

**MONITORIZAÇÃO DE VIBRAÇÕES EM ESTRUTURAS.
MÉTODOS DE IDENTIFICAÇÃO MODAL
NO DOMÍNIO DO TEMPO**

**MATILDE MARIA CUNHA DOS SANTOS
GASPAR DE FREITAS**

(Licenciada em Engenharia Civil)

Trabalho Final de Mestrado elaborado no Laboratório Nacional de Engenharia Civil (LNEC) para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil pelo Instituto Superior de Engenharia de Lisboa no âmbito do protocolo de cooperação entre o ISEL e o LNEC

(Documento Definitivo)

Orientadores:

Doutor, Sérgio Bruno Martins de Oliveira, Prof. (LNEC/ISEL)
Doutora, Ana Filipa Martinó da Silva Pontes Prior, Prof. (ISEL)

Júri:

Presidente:
Mestre, Cristina Ferreira Xavier de Brito Machado, Prof. Coordenadora (ISEL)

Vogais:

Doutor, Paulo Jorge Henriques Mendes, Prof. (ISEL)
Doutora, Ana Filipa Martinó da Silva Pontes Prior, Prof. (ISEL)

Agradecimentos

A presente dissertação representa o término de uma etapa importante tanto a nível do meu percurso académico como a nível do meu crescimento pessoal. Não podia, por isso, deixar de agradecer a todos os que me têm acompanhado, ajudado e participado na construção das várias fases da minha vida.

Primeiro, ao Laboratório Nacional de Engenharia Civil e em particular aos presentes no Departamento de Barragens de Betão (Núcleo de Modelação Matemática e Física), pela possibilidade de desenvolver este trabalho em tão importante e nobre espaço.

Ao Professor Doutor Sérgio Oliveira, meu professor e orientador, agradeço toda a cooperação e a disponibilidade, bem como a paciência e o empenho que sempre demonstrou ter ao longo deste trabalho. Foi gratificante ter tido a oportunidade de trabalhar e aprender com alguém que considero ter um vasto leque de conhecimentos e ser um exemplo de competência e rigor. À Professora Doutora Ana Filipa Prior, minha orientadora, agradeço todo o empenho, dedicação e disponibilidade. Também reconheço que aos meus orientadores devo a compreensão, o apoio e as palavras de motivação que foram importantes em momentos em que estive menos resistente e prestes a entrar em cedência, o meu obrigada por não me terem deixado chegar a um estado limite.

Agradeço à minha família por ter sido continuamente o meu apoio fixo e a minha estrutura de suporte. Principalmente à minha mãe, pela força, fé e palavras de suporte, que sempre me ajudou a lutar e a acreditar quando mais precisei; ao meu pai pelo seu afeto, paciência e apoio “técnico” que me ajudou tantas vezes a esclarecer algumas dúvidas “existenciais”; à minha irmã que, apesar de distante, sempre me monitorizou, estando sempre disponível para me ouvir e por ser uma grande força de impulso positivo na minha vida; ao meu irmão pelo seu carinho e por ter sido com ele que descarreguei alguns momentos de maior tensão e, por fim, aos meus avós, por terem estado sempre presentes. Um profundo agradecimento e consciencialização de que foi o vosso apoio e amor incondicional que me têm ajudado sempre ao longo da minha vida e que me tem feito chegar mais longe de cada vez. Aos meus amigos em geral, em particular às minhas grandes amigas Joana Pinho e Ana Marina Augusto pela compreensão e paciência; e ao meu grande amigo André Martins pela tolerância e amizade. Às minhas amigas e colegas de curso, Lizandra Neto, Diana Soares, Nerysa Amaro e Agnes Pitucha, que me acompanharam nesta caminhada entre aço e betão, agradeço as dinâmicas ocasiões de boa disposição e de descompressão, mas também a compatibilidade nas situações de maior esforço e pressão. A coesão que sempre tivemos permitiu consolidar uma boa amizade, que será o Ligante que nos manterá agregadas fora da faculdade. Por fim, obrigada aos engenheiros Luísa Braga e Nuno Azevedo pelo carinho e apoio, aos meus colegas e amigos que esta experiência no LNEC me proporcionou, Glória Mendonça, Mariana Simarro, Margarida Espada, André Alegre, Rafael Ramos, Rodrigo Morais e Renato Pereira pelas palavras de apoio e por me terem ajudado a resistir mesmo quando estava prestes a ceder em situações de maior fadiga e tensão.

A todos o meu sincero agradecimento por nunca me terem deixado entrar em rotura nem colapsar, obrigada pelas palavras de força, por acreditarem sempre em mim e por acharem que sou capaz!

MONITORIZAÇÃO DE VIBRAÇÕES EM ESTRUTURAS MÉTODOS DE IDENTIFICAÇÃO MODAL NO DOMÍNIO DO TEMPO

Resumo

A reabilitação de estruturas tem vindo a assumir uma importância crescente, nomeadamente por razões económicas. Para caracterização do estado de degradação das estruturas existentes utilizam-se preferencialmente métodos não invasivos, assumindo especial relevância os ensaios de vibração ambiente que permitem determinar os principais parâmetros modais, com base nos denominados métodos de identificação modal.

Os parâmetros modais (frequências próprias, amortecimentos e modos de vibração) estão diretamente relacionados com as reais condições de conservação/deterioração das estruturas, pois dependem das suas características de rigidez, massa e amortecimento.

Os métodos de identificação modal dividem-se em duas categorias principais, métodos no domínio da frequência e métodos no domínio do tempo, abordando-se neste trabalho apenas os métodos no domínio do tempo.

Quanto aos métodos no domínio do tempo, apresenta-se inicialmente o denominado Método da Máxima Verosimilhança (MMV), implementado, neste caso, apenas para sistemas completamente observados. No caso de sistemas parcialmente observados implementou-se, o método Covariance-driven, Stochastic Subspace Identification method (SSI-Cov).

Neste trabalho foram inicialmente implementados, em MATLAB, os referidos métodos no domínio do tempo, MMV e SSI-Cov, os quais foram testados na análise de estruturas simples do tipo edifícios de N pisos, considerando situações de estruturas completamente observadas. Posteriormente o método SSI-Cov foi aplicado a casos de estruturas simples, mas considerando situações de estruturas parcialmente observadas. Por fim, o método SSI-Cov é testado na barragem do Cabril, primeiro com base em registos gerados numericamente, recorrendo a um modelo de elementos finitos da barragem (considerando excitação do tipo ruído branco) e, em seguida, o método é utilizado para a análise de registos reais de vibrações medidas na barragem do Cabril, com um sistema de monitorização de vibrações em contínuo, instalado em obra desde 2008.

MONITORING VIBRATIONS IN STRUCTURES

MODAL IDENTIFICATION METHOD IN TIME DOMAIN

Abstract

The rehabilitation of structures is becoming increasingly important, for economic reasons. In order to characterize the degradation state of existing structures, non-invasive methods are preferred. Ambient vibration tests are used to determine the main modal parameters, based on the so-called modal identification methods.

Modal parameters (own frequencies, damping and vibration modes) are directly related to the actual conditions of conservation / deterioration of the structures, since they depend on their characteristics of rigidity, mass and damping.

The methods of modal identification are divided into two main categories - methods in the frequency domain and time-domain methods, being the latter, i. e., time-domain methods, the only ones used in this work.

As for the methods in the time domain, the so-called Maximum Likelihood Method (MLM) is initially introduced, implemented in this case only for fully observed systems. In the case of partially observed systems, the Covariance-driven, Stochastic Subspace Identification method (SSI-Cov) was implemented.

This work is divided into two phases. In a first phase, the time domain methods MLM and SSI-Cov in MATLAB are implemented, in order to study simple structures, such as N-storey buildings, in cases of completely observed structures. Subsequently, the SSI-Cov method is applied to simple structures, but considering these as partially observed. Finally, and as a main objective, this work intends to contribute to the development and use of the modal identification methods of structures in large dams, in the time domain, in the perspective of their use in the analysis of vibrations, due to environmental excitation. Thus, the SSI-Cov method is tested on the Cabril dam, based on numerically generated records, using a finite element model of the dam (considering white noise type excitation), and then the method is used for the analysis of actual vibration records measured at the Cabril dam, with a continuous vibration monitoring system, installed on site since 2008.

PALAVRAS-CHAVE / KEYWORDS

Estruturas em betão / Concrete structures

Monitorização / Monitoring

Reabilitação / Rehabilitation

Medição de acelerações / Measurement of accelerations

Modos de vibração / Vibration modes

Modelo linear estocástico / Linear Stochastic model

Equações diferenciais estocásticas / Stochastic differential equations

Estimador de máxima verosimilhança / Maximum Likelihood Estimator

Processos estocásticos / Stochastic processes

Processo de Ornstein-Uhlenbeck / Ornstein-Uhlenbeck process

Índice

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Considerações gerais.....	1
1.2	Justificação e enquadramento do tema	3
1.2.1	Apresentação do Problema.....	4
1.3	Objetivos da Dissertação	8
1.4	Estrutura do Trabalho.....	11
2	MONITORIZAÇÃO DE VIBRAÇÕES PARA CARACTERIZAÇÃO DO ESTADO DE DETERIORAÇÃO DE ESTRUTURAS.....	15
2.1	Considerações Iniciais.....	15
2.2	Reabilitação e métodos não invasivos.....	16
2.3	Caracterização dinâmica de estruturas. Ensaio in situ.....	16
2.3.1	Transdutores e sistemas de aquisição de dados	17
2.3.2	Ensaio in situ para a caracterização dinâmica de estruturas.....	18
2.4	Monitorização de estruturas.....	19
2.4.1	Monitorização de Edifícios	21
2.4.2	Monitorização de Pontes	25
2.4.3	Monitorização de barragens	26
2.5	Considerações Finais	28
3	ANÁLISE DINÂMICA DE ESTRUTURAS	31
3.1	Considerações Iniciais.....	31
3.2	Formulação Clássica. Modelo de 1 GL.....	33
3.3	Formulação em velocidades e deslocamentos (espaço de estados). Modelo de 1 GL	35
3.4	Modelos com vários graus de liberdade. Formulação de estado	38
3.4.1	Força de excitação aleatória	40

3.4.2	Diagonalização da equação de estado para modelos com vários GL	45
3.4.3	Implementação computacional. Programa DynBuildings1.0 (MATLAB)	47
3.5	Análise de estruturas contínuas. Discretização espacial pelo método dos elementos finitos (MEF).....	49
3.6	Considerações Finais.....	51
4	MÉTODOS DE IDENTIFICAÇÃO MODAL NO DOMÍNIO DO TEMPO.....	53
4.1	Considerações iniciais	53
4.2	Método da Máxima Verosimilhança (MMV). Sistemas completamente observados	55
4.2.1	Equação de equilíbrio dinâmico. Da formulação clássica à formulação de estado recorrendo a uma equação diferencial estocástica.....	56
4.2.2	Descrição do Método da Máxima Verosimilhança	57
4.2.3	Implementação Computacional do MMV. Programa ModID_MLM1.0 (MATLAB).....	62
4.3	Método Stochastic Subspace Identification-Covariance (SSI-Cov). Sistemas parcialmente observados	63
4.3.1	Formulação do problema introduzindo a equação de observação	64
4.3.2	Resolução da equação diferencial de estado. Representação no tempo discreto.....	67
4.3.3	Modelos de identificação determinísticos. Forças impulsivas	71
4.3.4	Modelos de identificação estocásticos. Excitação do tipo ruído branco	74
4.3.5	Implementação Computacional do SSI-Cov. Programa ModID_SSI-Cov1.0 (MATLAB).....	80
4.4	Considerações Finais.....	81
5	APLICAÇÃO DOS MÉTODOS DE IDENTIFICAÇÃO MODAL	83
5.1	Considerações Iniciais.....	83
5.2	Aplicação ao caso de estruturas simples do tipo edifício de N pisos.....	84
5.2.1	Caso de sistemas completamente observados	86
5.2.2	Caso de sistemas parcialmente observados.....	105
5.3	Barragem do Cabril. Identificação modal utilizando resultados gerados numericamente com um modelo de EF3D.....	118
5.3.1	Descrição da barragem do Cabril.....	118
5.3.2	Modelo de elementos finitos adotado para geração dos registos de vibrações sob excitação aleatória .	121

5.3.3	Análise dos registos de vibrações gerados numericamente com o MEF. Identificação modal com o método SSI-Cov.....	123
5.4	Barragem do Cabril. Identificação modal utilizando resultados da medição de vibrações em obra	129
5.4.1	Monitorização do comportamento dinâmico da barragem do Cabril	129
5.4.2	Análise de resultados experimentais obtidos com o sistema de monitorização instalado em obra	131
5.5	Considerações Finais	138
6	CONCLUSÕES E PERSPETIVAS FUTURAS	141
6.1	Síntese do trabalho e conclusões gerais	141
6.2	Principais Contribuições.....	143
6.3	Apreciação dos Resultados Obtidos.....	145
6.4	Desenvolvimentos Futuros.....	145
	BIBLIOGRAFIA	147

Simbologia

Latinas maiúsculas

<u>A</u>	Sub-matriz de estado que contém as matrizes de massa e amortecimento
A	Matriz de transmissibilidade de estado (ou de estado no tempo discreto)
<u>A</u>	Matriz de estado diagonalizada
<u>B</u>	Matriz dos coeficientes de entrada (solução da eq. de estado – fórmula recursiva)
B	Matriz dos coeficientes de entrada no tempo discreto
<u>B</u>	Matriz que contém as derivadas das funções de interpolação ($\underline{B} = \underline{LN}$)
C_{MAA}	Coefficiente de redução das massas de água associadas
<u>C</u>	Matriz que relaciona o vetor de estado com as histórias observadas
<u>C_a</u>	Matriz que contém a indicação sobre os GL em que se medem acelerações
<u>C_d</u>	Matriz que contém a indicação sobre os GL em que se medem deslocamentos
<u>C_v</u>	Matriz que contém a indicação sobre os GL em que se medem velocidades
<u>C_{on}</u>	Matriz de controlabilidade estocástica
<u>D</u>	Matriz de elasticidade
D	Matriz que relaciona as histórias de forças aplicadas com as histórias observadas
E	Módulo de elasticidade
G	Módulo de distorção
<u>G</u>	Matriz de covariância
<u>H_R</u>	Matriz de Hankel das funções de correlação
<u>H_v</u>	Matriz de Hankel das séries temporais da resposta
L	Função de Log-verosimilhança
<u>L</u>	Operador diferencial ($\varepsilon = \underline{L}u$)
<u>L_E</u>	Matriz dos fatores de participação modal na representação de estado
N_{GL}	Número de graus de liberdade do modelo
<u>O_{bs}</u>	Matriz de observabilidade
R	Função de auto-correlação
<u>R</u>	Matriz das funções de correlação da resposta
<u>S</u>	Matriz das funções de densidade espectral de potência
<u>V</u>	Matriz da resposta modal no espaço de estados
<u>W</u>	Processo de Wiener

Latinas minúsculas

a	Aceleração
\underline{a}_s	Vetor de aceleração sísmica
\underline{a}	Vetor de aceleração radial
c	Amortecimento específico
c	Amortecimento
\underline{c}	Matriz de amortecimento
f	Frequência circular (Hz)
f_A	Força de amortecimento
f_e	Força de restituição elástica
f_i	Força de inércia (2ª Lei de Newton)
\underline{f}	Vetor das forças
\underline{f}	Vetor das forças mássicas
\underline{f}_G	Vetor das forças nodais em todos os graus de liberdade
\underline{f}_R	Vetor com as n_I histórias de forças aplicadas
\underline{I}	Matriz identidade
k	Rigidez
\underline{k}	Matriz de rigidez
m	Massa específica (kg/m ³)
m	Massa
\underline{m}	Matriz de massa
\underline{n}	Número de valores singulares da matriz \underline{H}_v
n_I	Número de “inputs”
n_o	Número de pontos observados
r	Ordem do modelo
\underline{r}	Vetor que inclui de forma não explícita a excitação, o denominado ruído de medição
\underline{s}	Matriz da distribuição espacial das forças pelos vários graus de liberdade
u	Deslocamento
\underline{u}	Campo de deslocamentos num dado $\underline{u} = \underline{u}(x_1, x_2, x_3, t)$
\underline{u}	Vetor de deslocamentos
$\dot{\underline{u}}$	Vetor de velocidades
$\ddot{\underline{u}}$	Vetor de acelerações
v	Velocidade
\underline{v}	Vetor das velocidades na formulação de estado

$\dot{\tilde{y}}$	Vetor das acelerações na formulação de estado
\tilde{w}	Vetor que inclui, de forma não explícita, a excitação considerada como um processo estocástico, o denominado ruído do processo
x_i	Séries temporais observadas
\tilde{x}	Vetor de estado
\tilde{x}	Vetor do processo estocástico
\tilde{y}	Vetor com as n_o histórias observadas
\tilde{z}	Vetor de estado em coordenadas modais
z_n	Coordenada modal correspondente ao modo n
\dot{z}_n	Derivada da Coordenada modal correspondente ao modo n

Gregas maiúsculas

Φ	Matriz modal
Φ_E	Matriz modal no espaço de estados

Gregas minúsculas

α	Constante de amortecimento de <i>Rayleigh</i> (com c_α o coeficiente multiplicativo da matriz de massa)
β	Constante de amortecimento de <i>Rayleigh</i> (com c_β o coeficiente multiplicativo da matriz de rigidez)
γ	Peso volúmico de um material (kN/m ³)
$\tilde{\varepsilon}$	Vetor das deformações
$\tilde{\phi}$	Vetor modal
$\tilde{\phi}_E$	Vetor modal no espaço de estados
$\tilde{\theta}$	Estimador da máxima verosimilhança
$\tilde{\lambda}$	Valores próprios de um sistema estrutural
$\underline{\lambda}$	Matriz de valores próprios de um sistema estrutural (diagonal)
$\bar{\lambda}$	Conjugado de λ
λ_E	Valores próprios da matriz de estado
$\underline{\lambda}_E$	Matriz diagonal com os valores próprios de um sistema no espaço de estados
ξ	Coeficiente de amortecimento relativo ($\xi = c/c_{cr} = c/2\sqrt{km}$)
σ	Desvio-padrão
$\tilde{\sigma}$	Vetor das tensões
τ	Desfasamento

ν	Coeficiente de Poisson
ω_A	Frequência natural amortecida de um modo n (rad/s)
ω_n	Frequência natural de um modo n (rad/s)

Notação

\underline{A}^\dagger	pseudo-inversa da matriz A
\underline{B}^T	Transposta da matriz B
$\hat{\underline{A}}$	Estimador da máxima verosimilhança

Abreviaturas (siglas)

EDEs	Equações Diferenciais Estocásticas
EF	Elemento Finito
EMV	Estimador da Máxima verosimilhança
FDD-SVD	<i>Frequency Domain Decomposition taking the Singular value Decomposition</i>
FRF	Funções de Resposta em Frequência
GL	Grau(s) de Liberdade
IRF	Funções de Resposta Impulsiva
KAIST	Instituto Avançado de Ciência e Tecnologia da Coreia
LNEC	Laboratório Nacional de Engenharia Civil
MAA	Modelo de Massas de Água Associadas
MEF	Método dos Elementos Finitos
MEF3D	Método dos Elementos Finitos em 3 Dimensões
MIE	Monitorização da Integridade Estrutural
MMV	Método da Máxima Verosimilhança
NIMA	<i>Noise Input Modal Analyses</i>
SHM	<i>Structural Health Monitoring</i>
SSI-Cov	Método Estocástico de Identificação Modal em Subespaços utilizando funções de Covariância da resposta medida
UNLV	Universidade de Nevada, em Las Vegas

1

Introdução

1.1 Considerações gerais

Atualmente, em engenharia civil tem vindo a generalizar-se a utilização das técnicas de monitorização de vibrações para caracterizar experimentalmente a condição estrutural das obras construídas (“health monitoring”).

O objetivo desta caracterização, não invasiva, prende-se muitas vezes com a necessidade de se obter informação sobre o estado real das estruturas com vista a projetar intervenções de reabilitação que, como se sabe, é uma área que tem vindo a assumir uma importância crescente na construção de novas estruturas; tal facto deve-se, por um lado, a fatores económicos que têm levado à contração do investimento na construção de novas obras (não só em Portugal, mas em vários outros países), por outro lado, à evidente necessidade de manter em boas condições de operacionalidade e segurança a grande quantidade de obras existentes, muitas delas já com várias décadas de vida e que, em muitos casos, já evidenciam sinais de deterioração (Figura 1.1).

As técnicas de monitorização de vibrações são utilizadas também após a ocorrência de sismos intensos para apoio aos trabalhos de inspeção pós-sismo, usualmente efetuados no caso das estruturas mais importantes, recorrendo aos denominados ensaios de vibração ambiente.

A utilização da técnica de medição de vibrações estruturais induzidas por excitação ambiente/operacional e dos métodos de identificação modal com vista a identificar características estruturais na perspetiva de detetar eventuais danos estruturais, de forma não invasiva, é uma metodologia que foi pioneiramente aplicada no ramo da engenharia aeroespacial, nomeadamente no âmbito do programa aeroespacial americano implementado pela NASA (Houbolt, 1975) e, mais

tarde, adotada no âmbito da caracterização de estruturas de engenharia civil (Abdel-Ghaffar & Scanlan, 1985; Portugal, 1990; Portugal & Caetano, 1992). Hoje em dia é geralmente aceite como uma boa opção o recurso à técnica de medição e análise de vibrações em estruturas de engenharia civil com vista à identificação das suas principais características dinâmicas (ou parâmetros modais: frequências naturais, configurações modais e amortecimentos modais) na perspetiva de obter informação sobre o seu estado de deterioração/conservação. A realização de estudos/ensaios para obter uma boa caracterização do estado de deterioração de uma estrutura é fundamental para fazer uma correta avaliação das suas condições de segurança e funcionalidade e para definir eventuais intervenções de reabilitação.

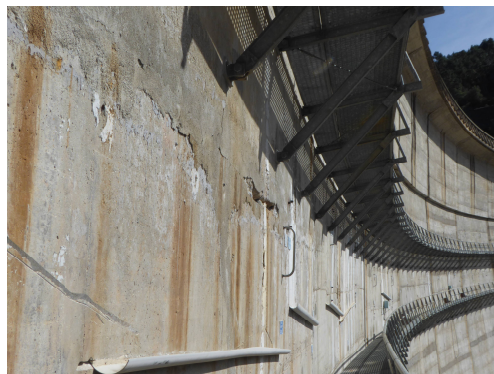


Figura 1.1 – Barragem do Cabril [LNEC 1962;1985]. Pormenor da zona fendilhada na zona central entre os passadiços.

Nas estruturas de maior importância, como é o caso de edifícios de grande altura, pontes e barragens é já usual a instalação de sistemas de monitorização de vibrações em contínuo cujos dados são analisados automaticamente recorrendo aos referidos métodos de identificação modal abordados na presente dissertação.

1.2 Justificação e enquadramento do tema

A medição de vibrações com vista a obter informação sobre as características estruturais das obras, é uma técnica que se baseia no facto de que é possível caracterizar experimentalmente o estado de deterioração/conservação das mesmas, a partir de registos de vibrações medidos em vários pontos. Uma estrutura nova e sem problemas estruturais tem um comportamento dinâmico distinto de uma estrutura idêntica, mas com problemas estruturais, associados a deterioração ou a deficiências construtivas. Ou seja, para um mesmo tipo de excitação (excitação ambiente, por exemplo) as vibrações que se medem em ambos os casos serão distintas, pelo que, a partir dos registos de vibrações medidas, é possível obter informação sobre a condição estrutural das obras, recorrendo aos denominados métodos de identificação modal.

Os métodos de identificação modal permitem calcular os principais parâmetros modais das estruturas: frequências naturais, configurações modais e amortecimentos modais. Estes parâmetros, como se sabe, dependem das características das estruturas e, claro, dependem do seu estado de deterioração/conservação.

Existem basicamente dois tipos de métodos de identificação modal:

- i) Métodos no Domínio da Frequência - as vibrações medidas são analisadas com base na análise de Fourier (decomposição dos registos medidos em ondas harmónicas de diferentes frequências);
- ii) Métodos no Domínio do Tempo - as vibrações medidas são analisadas com base em técnicas estatísticas que permitem obter estimativas da matriz de estado do sistema (no caso geral, com base em observações parciais envolvendo apenas alguns pontos da estrutura em análise).

Os métodos no domínio da frequência, até agora os mais utilizados na identificação modal de estruturas, baseiam-se na análise espectral e exigem o recurso a técnicas de identificação automática de picos espectrais as quais, por vezes, não são de fácil implementação e nem sempre conduzem a uma correta identificação dos picos espectrais relevantes para a análise modal.

Por esta razão, na identificação modal de estruturas, é de todo o interesse recorrer também aos denominados métodos de identificação modal no domínio do tempo. Neste trabalho apenas são abordados os métodos de identificação modal domínio do tempo (em particular apenas dois desses métodos), sendo de referir, que, na prática, o ideal será recorrer sempre que possível à utilização conjunta de diferentes tipos de métodos com vista a melhorar a fiabilidade dos resultados da identificação modal.

1.2.1 Apresentação do Problema

A identificação modal de estruturas é uma técnica que, a partir da medição das vibrações estruturais sob excitação ambiente/operacional (em geral as vibrações são medidas colocando sensores em vários pontos da estrutura em análise, nomeadamente acelerómetros de grande sensibilidade; a excitação pode ser devida a ondas sonoras, vento, tráfego, máquinas em funcionamento, micro-sismos, etc.), visa obter informação sobre as características estruturais de uma dada obra, nomeadamente sobre os seus principais parâmetros modais: frequências naturais dos principais modos de vibração, e respetivas configurações e amortecimentos (Figura 1.2a).

Os métodos de identificação modal baseiam-se no facto dos registos de vibrações medidas num dado ponto de uma estrutura, durante um determinado período de tempo, conterem informação sobre as frequências naturais da estrutura e respetivos amortecimentos modais (claro que também contém informação sobre o conteúdo em frequência das forças de excitação; no caso da denominada excitação ambiente admite-se geralmente que, quanto ao seu conteúdo em frequência, pode ser classificada como ruído branco). Este facto pode ser confirmado fisicamente, através de ensaios de vibrações, e pode ser entendido matematicamente a partir do estudo da denominada equação de equilíbrio dinâmico que, para uma dada estrutura discretizada em N_{GL} graus de liberdade, assume a conhecida forma $\underline{m} \ddot{\underline{u}} + \underline{c} \dot{\underline{u}} + \underline{k} \underline{u} = \underline{f}$. Com base nesta equação (equação diferencial ordinária de segunda ordem que envolve as denominadas matrizes de massas, de amortecimento e de rigidez da estrutura, matrizes quadradas de ordem N_{GL} , tendo como função incógnita, o vetor $\underline{u} = \underline{u}(t)$ com as histórias de deslocamentos ao longo do tempo (Figura 1.2b) nos N_{GL} graus de liberdade e as respetivas derivadas em ordem ao tempo: velocidades e acelerações) é possível simular a resposta dinâmica de qualquer estrutura sob qualquer tipo de forças de excitação variáveis no tempo e é possível verificar que a resposta, em cada instante, pode ser obtida como uma combinação linear de vetores denominados modos de vibração da estrutura os quais correspondem aos vetores próprios da matriz de estado da estrutura (de ordem $2N_{GL}$) que, como se verá mais à frente, é uma matriz que depende apenas das referidas matrizes de massa, de

amortecimento e de rigidez. Verifica-se matematicamente que a resposta dinâmica ao longo do tempo envolve ainda os valores próprios da referida matriz de estado os quais, no caso geral, são valores complexos cujo módulo corresponde às frequências naturais da estrutura e cuja parte real, dividindo pelo módulo e tomando o valor simétrico, corresponde aos amortecimentos modais da estrutura. Desta forma, conclui-se que, a resposta dinâmica de uma estrutura, que, na prática, é medida em vários pontos, deverá conter forçosamente informação sobre as suas frequências naturais, amortecimentos modais e configurações modais que são características intrínsecas da estrutura (que, matematicamente, dependem apenas das matrizes de massa, rigidez e amortecimento).

Os métodos de identificação modal de estruturas sob excitação ambiente/operacional são métodos que, partindo do conhecimento físico/matemático da dinâmica de estruturas e de registos de vibrações medidos ao longo do tempo, em vários pontos de uma estrutura, permitem identificar os principais parâmetros modais da estrutura, que, podem ser diretamente relacionados com as reais condições de conservação/deterioração das estruturas dado que dependem das suas características de rigidez, massa e amortecimento.

Como referido, os métodos de identificação modal podem-se dividir em duas categorias principais, métodos no domínio da frequência e métodos no domínio do tempo, abordando-se neste trabalho apenas os métodos no domínio do tempo.

Os métodos de identificação modal no domínio do tempo são formulados com base na referida matriz de estado da estrutura, ou seja, com base na denominada forma de estado da equação de equilíbrio dinâmico que corresponde a uma equação diferencial de primeira ordem em que se assume como incógnita um vetor que contém não apenas as histórias de deslocamentos nos vários graus de liberdade, mas também as correspondentes histórias de velocidades. No caso de aplicação a casos de excitação ambiente do tipo ruído branco (excitação aleatória de média nula e desvio padrão conhecido) a referida equação diferencial assume a forma de uma equação diferencial estocástica de primeira ordem, envolvendo a referida matriz de estado, matriz com as propriedades estruturais que se pretendem identificar a partir das vibrações medidas em vários pontos da estrutura.

Quanto aos métodos no domínio do tempo apresenta-se inicialmente o denominado Método da Máxima Verosimilhança (MMV) (Prior, 2015), implementado, nesta dissertação, apenas para o caso de sistemas completamente observados (Figura 1.2c). Neste caso, obtém-se um estimador da matriz de estado formulado para sistemas completamente observados (sistemas em que se observam as histórias de deslocamentos e velocidades em todos os graus de liberdade), o interesse fica restringido apenas a casos teóricos e, eventualmente, a um reduzido número de casos práticos

como alguns ensaios em modelos laboratoriais, pois, na prática da engenharia civil, a identificação modal de estruturas é efetuada em situações reais que envolvem sistemas parcialmente observados. Contudo, optou-se por apresentar primeiramente este método, pela sua elegância matemática e pelo seu grande interesse para ilustrar os fundamentos dos métodos de identificação modal no domínio do tempo e ainda porque se trata de um método de fácil implementação computacional que também poderá ser estendido para o caso de sistemas parcialmente observados, o que, contudo, não será abordado no âmbito desta dissertação.

Para o caso de sistemas parcialmente observados implementou-se no âmbito desta dissertação o método denominado “Método Estocástico de Identificação Modal em Subespaços utilizando funções de Covariância da resposta medida (SSI-Cov, *Covariance-driven, Stochastic Subspace Identification method*)”.

O método SSI-Cov é um método de grande interesse prático concebido para a análise de sistemas parcialmente observados cuja formulação envolve, para além da referida equação diferencial estocástica, a introdução da denominada equação de observação (Juang, 1994) em que se explicitam os graus de liberdade observados e o tipo de histórias observadas: deslocamentos, velocidades e/ou acelerações.

a) Edifício de 3 pisos

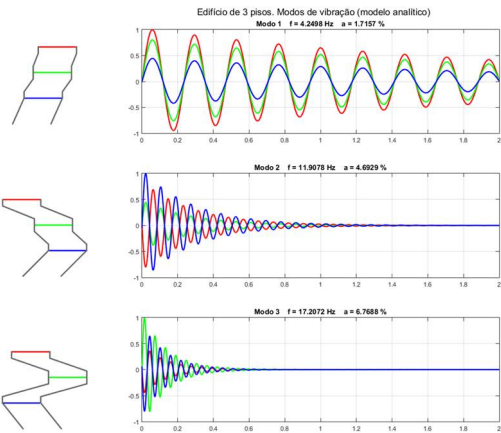
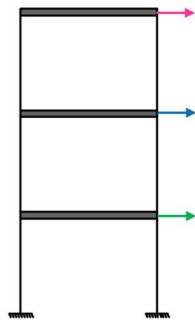
$$\underline{\underline{m}} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{k}} = \begin{bmatrix} 18000 & -18000 & 0 \\ -18000 & 36000 & -18000 \\ 0 & -18000 & 36000 \end{bmatrix}$$

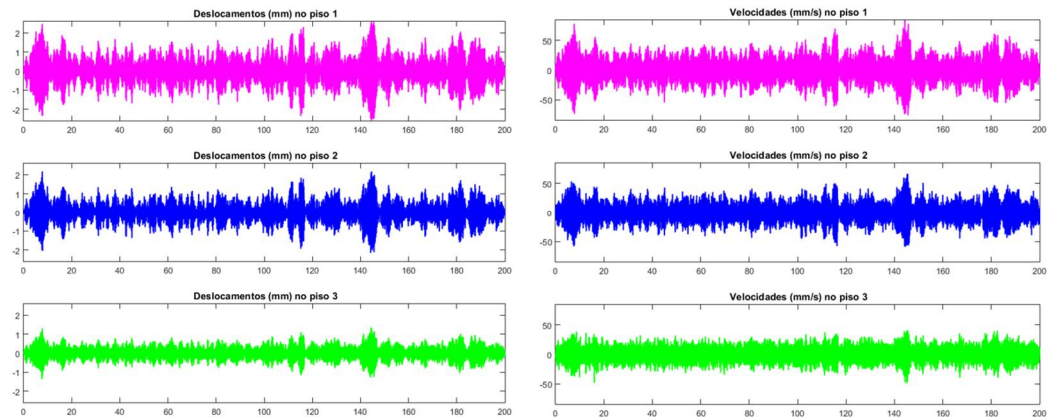
$$\underline{\underline{c}} = \begin{bmatrix} 22,625 & -22,500 & 0 \\ -22,500 & 45,150 & -22,500 \\ 0 & -22,500 & 45,125 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}}_{(6 \times 6)} = \begin{bmatrix} 0 & \underline{\underline{I}} \\ -\underline{\underline{m}}^{-1}\underline{\underline{k}} & -\underline{\underline{m}}^{-1}\underline{\underline{c}} \end{bmatrix}$$

$$\dot{\underline{\underline{x}}} = \underline{\underline{A}} \underline{\underline{x}} + \underline{\underline{F}}$$



b) Resposta sob excitação do tipo ruído branco: deslocamentos e velocidades



c) MMV com estimador para sistemas completamente observados

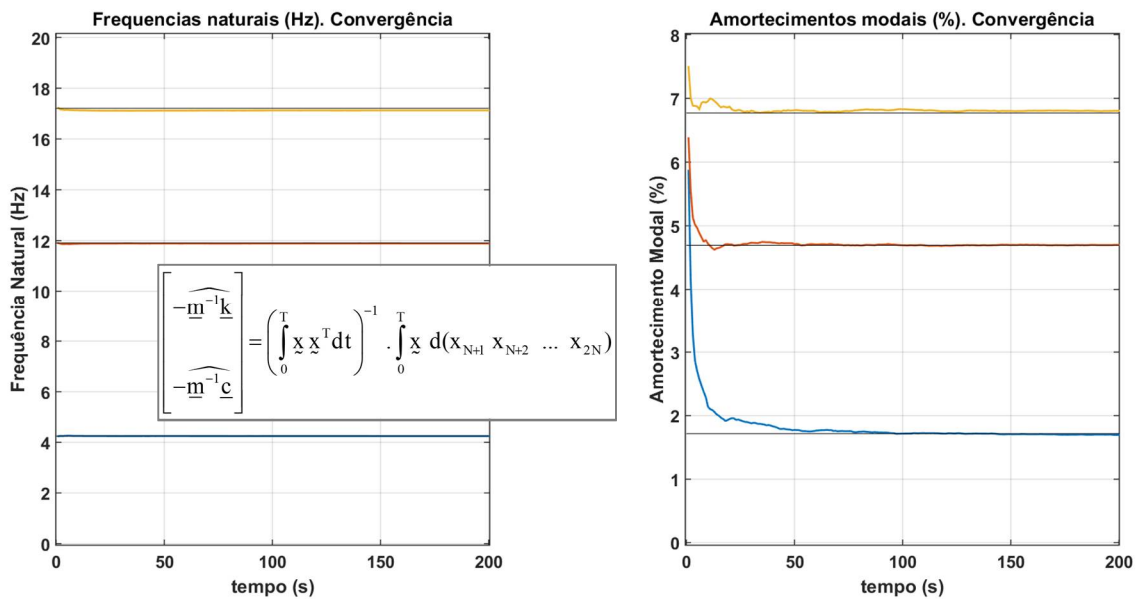


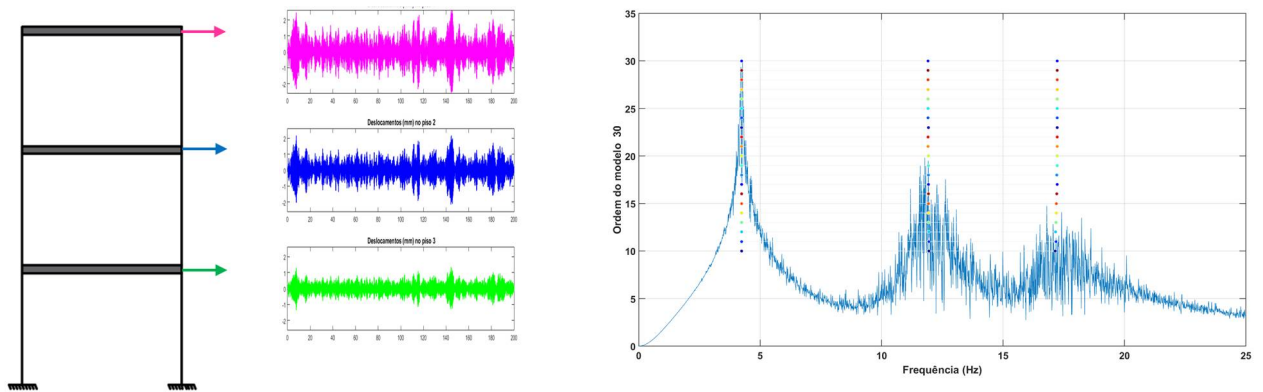
Figura 1.2 – a) Exemplo de edifício de 3 pisos. Modos de vibração; b) Resposta sob excitação do tipo ruído branco: deslocamentos e velocidades; c) Identificação modal utilizando o Método da Máxima Verosimilhança (MMV) com estimador da matriz de estado formulado para sistemas completamente observados.

1.3 Objetivos da Dissertação

O principal objetivo desta dissertação é contribuir para o desenvolvimento e utilização dos métodos de identificação modal de estruturas no domínio do tempo, na perspetiva da sua utilização na análise de vibrações em grandes barragens, devidas a excitação ambiente, através da apresentação e implementação computacional em MATLAB, dos dois seguintes métodos:

- i) Método da Máxima Verosimilhança (MMV) para sistemas completamente observados, o qual é apresentado sobretudo pelo seu interesse teórico para ilustrar os fundamentos dos métodos no domínio do tempo; relativamente a este método apresentam-se em detalhe os fundamentos teóricos e os principais aspetos práticos da sua implementação computacional em MATLAB, mostrando resultados de testes envolvendo a geração numérica da resposta dinâmica de modelos simples de edifícios de vários pisos (sob excitação do tipo ruído branco), considerando os casos de 3, 6 e 20 pisos; os parâmetros modais identificados (frequências, amortecimentos e configurações modais) a partir das histórias da resposta gerada numericamente são comparados com os correspondentes valores conhecidos à partida referentes aos modelos utilizados dos referidos edifícios de 3, 6 e 20 pisos (Figura 1.2);
- ii) Método Estocástico de Identificação Modal em Subespaços utilizando funções de Covariância da resposta medida (SSI-Cov, *Covariance-driven, Stochastic Subspace Identification method*), desenvolvido para sistemas parcialmente observados, o qual é também apresentado em detalhe desde os fundamentos à implementação computacional, recorrendo igualmente aos testes com modelos simples de edifícios de vários pisos: 3, 6 e 20 pisos (Figura 1.3a); como exemplo de aplicação do método SSI-Cov apresenta-se o caso da barragem do Cabril, para o qual, primeiramente, o método é novamente testado com base em registos gerados numericamente recorrendo a um modelo de elementos finitos da barragem (considerando excitação do tipo ruído branco) (Figura 1.3b) e, em seguida, o método é utilizado para a análise de registos reais de vibrações medidas na barragem do Cabril (Oliveira & Silvestre, 2017) com um sistema de monitorização de vibrações em contínuo instalado em obra desde 2008 (Mendes, 2010; Oliveira, 2002; Oliveira, Espada, & Câmara, 2012) (Figura 1.4).

a) Edifício de 3 pisos. Teste do método SSI-Cov



b) Barragem abóbada. Teste do método SSI-Cov

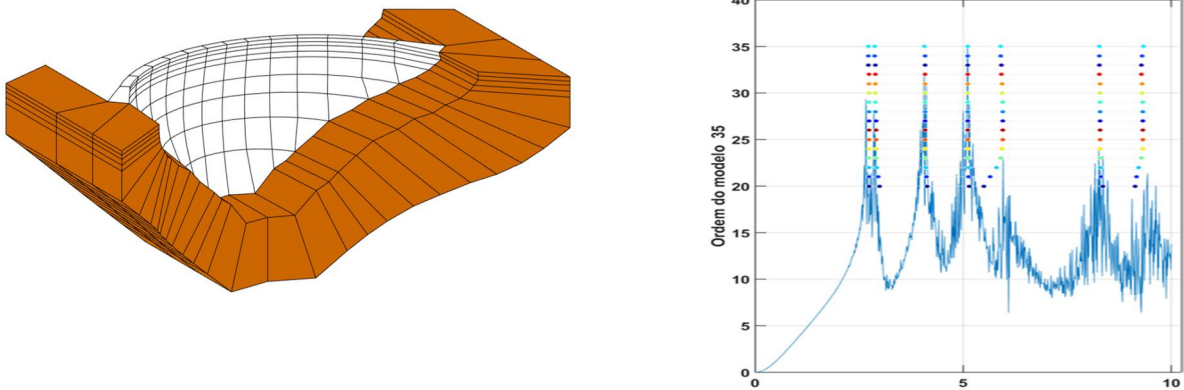


Figura 1.3 – Identificação modal utilizando o Método SSI-Cov. Análise de teste com registos gerados numericamente. a) Exemplo de edifício de 3 pisos; b) modelo numérico da barragem do Cabril.

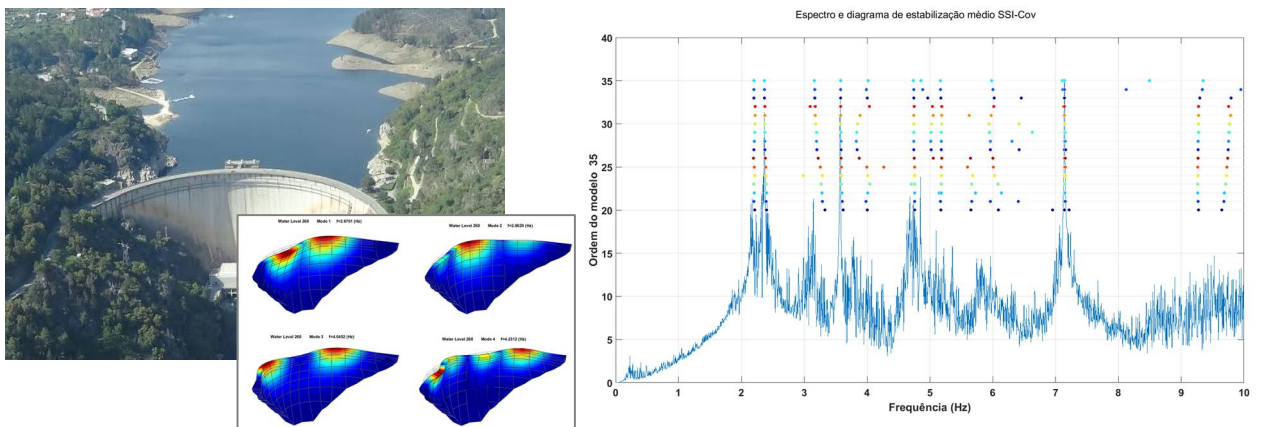


Figura 1.4 – Barragem do Cabril. Resultados da monitorização dinâmica: identificação modal utilizando o método SSI-Cov.

Tendo em vista o objetivo principal desta dissertação, é fundamental começar por estudar e apresentar os fundamentos da modelação do comportamento dinâmico de estruturas, sob diferentes tipos de excitação (nomeadamente sob excitação do tipo ruído branco), recorrendo a uma formulação de estado (em velocidades e deslocamentos); como se sabe, a formulação de estado permite a consideração da hipótese de amortecimento generalizado, para a qual surgem modos de vibração de componentes complexas, designados por modos de vibração não estacionários. É de notar que a formulação de estado também permite, obviamente, a consideração do caso particular de amortecimento proporcional às matrizes globais de massa e de rigidez, de acordo com a hipótese simplificativa de Rayleigh.

Por outro lado, é necessário atingir vários outros objetivos parcelares, envolvendo, nomeadamente, o desenvolvimento dos seguintes programas computacionais (em MATLAB):

- i) **DynBuildings1.0**: programa para análise dinâmica de estruturas simples, representáveis por modelos simples espacialmente discretos do tipo edifício de N pisos com 1 grau de liberdade de translação por piso, sob excitação do tipo ruído branco; este programa permite gerar numericamente as histórias de deslocamentos e velocidades em todos os pisos, utilizando a referida formulação de estado;
- ii) **ModID_MLM1.0**: programa de identificação modal com base no método MMV (ou, *Maximum Likelihood Method MLM*) para sistemas completamente observados, em particular, aplicado na identificação modal de modelos de edifícios; este programa lê os registos correspondentes às histórias de velocidades e deslocamentos “observados” em todos os pisos de um edifício com 1GL por piso (os registos “observados” podem ser gerados numericamente com o programa atrás referido, no ponto i) e faz uma estimativa da matriz de estado do edifício, cujos valores e vetores próprios são calculados com vista a determinar as estimativas das suas frequências naturais, amortecimentos modais e configurações modais;
- iii) **DynDam1.0**: programa de elementos finitos 3D para análise dinâmica sob excitação do tipo ruído branco de estruturas espacialmente contínuas, como é o caso de grandes barragens abóbada; este programa permite efetuar análises dinâmicas lineares no domínio do tempo de barragens abóbada, para diferentes cotas de água, considerando a hipótese de massas de água associadas de Westergaard para simular o efeito das pressões hidrodinâmicas e a geração numérica de histórias de deslocamentos, velocidades e acelerações em quaisquer graus de liberdade da discretização espacial adotada (na análise de estruturas contínuas podem adotar-se diferentes discretizações espaciais consoante o grau de refinamento pretendido pelo utilizador);

iv) **ModID_SSI-Cov1.0**: programa de identificação modal com base no método SSI-Cov, desenvolvido para sistemas parcialmente observados; este programa lê registros correspondentes a histórias de acelerações observadas em alguns pontos de uma dada estrutura; no caso de barragens os registros “observados” podem ser medidos *in-situ* mas, com vista a testes, também podem ser gerados numericamente com o programa atrás referido, no ponto iii); e faz uma estimativa de pseudo-matrizes de estado correspondente aos pontos observados na estrutura em análise efetuando a decomposição em valores e vetores singulares destas pseudo-matrizes de estado é possível estimar as frequências naturais, amortecimentos modais e configurações modais dos principais modos de vibração: geralmente os de frequências mais baixas.

1.4 Estrutura do Trabalho

A presente dissertação está organizada em 6 capítulos, incluindo a presente Introdução e as Conclusões. De seguida apresenta-se a estrutura deste trabalho e o resumo dos tópicos mais importantes abordados em cada capítulo.

Capítulo 2 – Monitorização de Vibrações para Caracterização do Estado de Deterioração de Estruturas

No capítulo 2 abordam-se os aspetos relacionados com a reabilitação e os métodos não invasivos de diagnóstico do estado de conservação de estruturas. Referem-se os aspetos principais relativamente à a caracterização dinâmica de estruturas, explicando o processamento e aquisição dos dados, mostrando ainda os diferentes tipos de ensaios de caracterização dinâmica *in situ*.

Por fim, é referida e explicada a importância da monitorização de estruturas no âmbito de um programa de monitorização de integridade estrutural (MIE), ilustrado com diversos exemplos de estruturas monitorizadas em edifícios, pontes e barragens.

Capítulo 3 – Análise Dinâmica de Estruturas

Neste capítulo abordam-se os conceitos principais da dinâmica de estruturas para efetuar uma análise na perspetiva do problema da identificação modal.

Inicialmente, apresentam-se as equações fundamentais para a formulação clássica, de estado, equação/formulação/modelação diferencial para modelos simples de 1 grau de liberdade e para modelos estruturais com vários graus de liberdade (com base no conceito de coordenadas modais). Em seguida, mostra-se a estrutura do programa **DynBuildings1.0**, desenvolvido em MATLAB, que permite gerar histórias “observadas” (tipo ruído branco) em estruturas discretas, simples, como edifícios de N pisos.

Posteriormente, referem-se os conceitos teóricos dos fundamentos do Método dos Elementos Finitos (MEF), com vista à modelação numérica do comportamento estático e dinâmico de estruturas.

Por fim, apresenta-se a estrutura do programa **DynDam1.0**, desenvolvido em MATLAB, o qual, utilizando elementos finitos tridimensionais (20 nós), permite gerar histórias “observadas” (do tipo ruído branco) e efetuar a análise dinâmica de estruturas contínuas, como é o caso de barragens.

Capítulo 4 – Métodos de Identificação Modal no Domínio do Tempo

Este capítulo tem como objetivo descrever e aprofundar os conhecimentos dos métodos no domínio do tempo, os quais permitem obter as características dinâmicas de uma estrutura, a partir da medição de vibrações sob excitação ambiente (histórias de velocidades, deslocamentos e acelerações).

Inicialmente, devido ao seu interesse do ponto de vista teórico, para ilustrar os fundamentos dos métodos no domínio do tempo, apresentam-se os fundamentos teóricos do Método da Máxima Verosimilhança (MMV), adaptado ao caso de sistemas completamente observados.

Posteriormente é apresentada a estrutura do programa **ModID_MLM1.0**, desenvolvido em MATLAB, o qual permite calcular e estimar a matriz de estado, obtendo as características dinâmicas da estrutura: frequências naturais, amortecimentos modais e modos de vibração, a partir das histórias “observadas” geradas pelo programa **DynBuildings1.0**.

Em seguida, apresenta-se detalhadamente os fundamentos do Método Estocástico de Identificação Modal em Subespaços, utilizando funções de Covariância da resposta medida (SSI-Cov), desenvolvido especificamente para sistemas parcialmente observados.

Por fim mostra-se a estrutura do programa **ModID_SSI-Cov1.0**, desenvolvido em MATLAB, que permite calcular e estimar as frequências naturais da estrutura a partir das histórias “observadas”, geradas pelo programa **DynDam1.0**.

Capítulo 5 – Aplicação do Métodos de Identificação Modal

No capítulo 5 vai-se proceder à implementação computacional em MATLAB dos programas referidos no Capítulo 3 e no Capítulo 4.

Inicialmente, proceder-se-á à implementação do método MMV, utilizando um exemplo de uma estrutura simples, tipo edifício de N pisos (3, 6 e 20 pisos). Os cálculos dinâmicos da estrutura, serão feitos com características conhecidas a partir do programa **DynBuildings1.0** e geradas as histórias “observadas” em velocidades e deslocamentos, para que possam ser analisadas e calculadas as características dinâmicas a partir do MMV, com o programa **ModID_MLM1.0**. São comparados os resultados obtidos quer por via analítica, quer por via de identificação modal.

Em seguida, ir-se-á proceder à implementação do método de identificação modal SSI-Cov. Inicialmente, será feito um estudo considerando o exemplo anterior para estruturas simples, em que se considera que todos os pisos são observados (3, 6 e 20 pisos). Posteriormente, dentro do mesmo exemplo - edifício de N pisos, será considerado o sistema parcialmente observado (observar 6 em 8 pisos e 16 em 20 pisos). Utilizar-se-á o programa **DynBuildings1.0** para calcular as características dinâmicas da estrutura conhecida, permitindo gerar as histórias “observadas” em acelerações que irão ser analisadas pelo programa **ModID_SSI-Cov1.0** e calculadas as respetivas características a partir do método SSI-Cov.

Posteriormente, após a aplicação ao caso de estruturas simples, utilizar-se-á o programa **DynDam1.0** para gerar histórias “observadas”, do tipo ruído branco (em acelerações) a partir do MEF, agora aplicado a uma barragem abóbada - barragem do Cabril (caso de um modelo estrutural mais complexo). São calculadas as características dinâmicas a partir do MEF, em vários pontos do coroamento (considerando 5, 9 e 13 pontos “observados”), as quais serão comparadas com as calculadas pelo programa **ModID_SSI-Cov1.0**.

Apresenta-se uma breve descrição da barragem do Cabril, referindo as suas principais características, aspetos históricos, construção, sistema de monitorização e modelo numérico utilizado (EF3D).

Por fim, apresentar-se-ão histórias reais medidas em diferentes pontos da barragem do Cabril, as quais irão ser lidas pelo programa de identificação modal **ModID_SSI-Cov1.0**, por forma a se verificar a aplicabilidade do método. Estas características serão comparadas às obtidas pelo programa já existente na barragem (**Cabril_ModalID2.0**) e, como referência, mostrar-se-ão os resultados obtidos pelo programa **DamDySSA2.0**.

Capítulo 6 – Conclusões e Perspetivas futuras

Neste capítulo apresenta-se uma síntese do trabalho desenvolvido ao longo da presente dissertação, destacam-se as contribuições inovadoras e a qualidade dos resultados obtidos e salientam-se as perspetivas de desenvolvimentos futuros.

2

Monitorização de Vibrações para Caracterização do Estado de Deterioração de Estruturas

2.1 Considerações Iniciais

Na reabilitação e recuperação de estruturas, antes de se proceder a qualquer intervenção é necessário saber qual o seu estado de conservação e conhecer eventuais anomalias existentes, caracterizando a sua natureza e a sua extensão. Um bom diagnóstico é fundamental para detetar de forma correta os problemas apresentados pelas estruturas, proporcionando aos responsáveis pela intervenção, manutenção ou conservação, a possibilidade de optar pela solução económica, ou tecnicamente mais adequada.

Na reabilitação de estruturas é importante, numa primeira fase, identificar o estado de deterioração das obras a intervencionar o que, para além das primeiras inspeções visuais e da consulta dos elementos de projeto disponíveis, requer em muitos casos, a realização de ensaios para caracterização dos materiais e do comportamento global das estruturas a reabilitar. Nesta dissertação procura-se dar prioridade aos métodos não invasivos para caracterização do estado de conservação das estruturas existentes e, em particular, aos métodos baseados na medição de vibrações ambiente cujos registos se analisam com base nos denominados métodos de identificação modal. Estes métodos permitem analisar as vibrações medidas com vista a extrair informação sobre os parâmetros modais (frequências naturais, configurações modais e amortecimentos modais) os quais são diretamente correlacionáveis com as características

estruturais. Os ensaios de vibração ambiente constituem uma técnica relativamente económica para avaliar as características estruturais, nomeadamente em termos dos referidos parâmetros modais.

Neste capítulo são abordados os aspetos relacionados com a reabilitação e os métodos não invasivos. Refere-se, sucintamente, como pode ser efetuada a caracterização dinâmica de estruturas, referindo a importância do processamento e aquisição dos dados e mostrando diferentes tipos de ensaios de caracterização dinâmica *in situ*.

Por fim, é referida a importância da monitorização de estruturas no âmbito de programas de monitorização da integridade estrutural (MIE), ilustrados com diversos exemplos de estruturas como edifícios, pontes e barragens, em que foram instalados sistemas de monitorização de vibrações.

2.2 Reabilitação e métodos não invasivos

A evolução tecnológica tem contribuído para a otimização do projeto e construção de grandes estruturas, permitindo que estas suportem ações mais elevadas, sejam mais esbeltas, e construídas mais rapidamente e com menos custos.

Esta otimização estrutural e as crescentes exigências funcionais e ambientais podem levar a uma degradação estrutural precoce o que pode pôr em risco a estabilidade, a segurança e a operacionalidade das estruturas.

A avaliação periódica da integridade dos diversos elementos que constituem uma estrutura deverá ser efetuada de forma fiável, expedita, o menos intrusiva possível, por forma a permitir implementar eventuais ações preventivas antes de quaisquer anomalias graves virem a tornar-se evidentes ou virem a comprometer o adequado e seguro funcionamento das estruturas.

2.3 Caracterização dinâmica de estruturas. Ensaio *in situ*

A identificação experimental das características dinâmicas ou modais de estruturas constitui uma das técnicas cada vez mais utilizada atualmente na engenharia civil. Esta avaliação experimental tem um forte interesse no que diz respeito à validação de modelos utilizados na análise do comportamento estrutural face às ações dinâmicas. A caracterização do comportamento dinâmico das estruturas tem como principal objetivo o de descrever um sistema estrutural através dos seus principais parâmetros modais, a partir de um conjunto de modos naturais de vibração, traduzidos

em termos das suas frequências, coeficientes de amortecimento e configurações modais (J. Rodrigues, 2004).

2.3.1 Transdutores e sistemas de aquisição de dados

A observação da resposta dos sistemas estruturais é executada a partir de sensores e transdutores que têm como objetivo medir as grandezas físicas, sendo as mais frequentes os deslocamentos, velocidades, acelerações, rotações e extensões. Estas grandezas são transformadas num sinal elétrico proporcional às mesmas através de transdutores. Na maior parte dos casos o sinal elétrico de resposta dos transdutores não se encontra numa forma apropriada para ser medida e processada diretamente pelo equipamento de aquisição, sendo necessário condicioná-lo adequadamente por forma a haver uma geração de sinais de excitação e a amplificação e filtragem dos sinais de resposta. Este condicionamento é feito através da associação dos transdutores a condicionadores de sinal (Rodrigues, 2004).

Na Figura 2.1 apresentam-se os elementos funcionais de um sistema de aquisição de dados onde se encontram representados os sensores e transdutores, o condicionamento de sinal, o equipamento de aquisição e o computador com o *software* de aquisição. Cada elemento funcional vai afetar a exatidão do sistema total de medição e a correta recolha dos dados do processo físico que se pretende monitorizar, pelo que a adequada calibração e interface destes elementos é de importância crítica, por forma a garantir a fiabilidade da informação (L. M. V. Serrano, Alcobia, Mateus, & Silva, n.d.).



Figura 2.1 - Diagrama funcional de um sistema de aquisição baseado num computador pessoal. Esquema adaptado do artigo (L. M. V. Serrano et al., n.d.).

Assim, enquanto que os transdutores permitem medir a resposta dinâmica de estruturas (transformando-as em sinais elétricos proporcionais às mesmas), os sistemas de aquisição de dados permitem efetuar o registo desses sinais elétricos, se possível já em unidades de grandeza física equivalente. Esta operação é efetuada através de sistemas de aquisição de dados, com placas de

conversão analógica/digital (A/D), ligados a computadores digitais. Os dados convertidos são transferidos para o computador para visualização, armazenamento das respostas observadas ou análise.

Por forma a se poder efetuar uma análise da informação recolhida através de métodos diferentes, tem-se utilizado sistemas de aquisição de dados, onde as respostas medidas são armazenadas sob a forma de séries temporais discretas por amostragem (Rodrigues, 2004; L. M. V. Serrano et al., n.d.).

2.3.2 Ensaio *in situ* para a caracterização dinâmica de estruturas

No que diz respeito à caracterização dinâmica de estruturas, pode-se dizer que existem essencialmente dois tipos de ensaio *in situ* para o efeito: os ensaios de vibração forçada, com controlo e medição das forças de excitação; e os ensaios de vibração ambiente, medindo as ações às quais as estruturas estão normalmente sujeitas em condições usuais de serviço (Rodrigues, 2004).

2.3.2.1 Ensaio de vibração forçada

Os ensaios de vibração forçada consistem na excitação controlada da estrutura e na medição do seu efeito sobre esta, normalmente em aceleração, em vários pontos da mesma estrutura. Este modo de excitação tem particular interesse quando se pretende ensaiar estruturas de elevada rigidez. Por norma recorre-se ao uso de um ou mais vibradores de massa excêntrica para introduzir a ação na estrutura e aparelhos de medição (deslocamentos, extensões, etc.), sendo que ambos podem variar no número de pontos e locais de aplicação. Outra forma de efetuar a vibração forçada de uma estrutura é a partir da utilização de martelos de impulsos ou com recurso a explosões controladas.

A análise dos resultados obtidos nos ensaios de vibração forçada baseia-se na correlação da excitação aplicada com a resposta medida, por exemplo, através das designadas funções de resposta em frequência (FRF), ou das funções a elas correspondentes no domínio do tempo, as funções de resposta impulsiva (IRF), a partir das quais é possível obter estimativas para as frequências naturais, modos de vibração e coeficientes de amortecimentos modais (Lopes et al., 2010; Mendes, 2010; Rodrigues, 2004).

Este tipo de ensaio apresenta algumas desvantagens na sua execução por ser bastante dispendioso e haver dificuldades de logística para mobilização do equipamento, sendo apenas realizado

ocasionalmente. Na Figura 2.2 mostra-se um vibrador mecânico utilizado pelo LNEC em ensaios de vibração forçada e acelerómetros.



Figura 2.2 - a) Vibrador rotativo de massa excêntrica; b) Acelerómetros.

2.3.2.2 Ensaio vibração ambiente

No que diz respeito aos ensaios de vibração ambiente ou ensaios de medição de resposta às ações ambientais, estes são realizados a partir da medição da resposta das estruturas às ações a que normalmente elas estão sujeitas: vento, tráfego rodoviário ou ferroviário, funcionamento de equipamentos, ondas marítimas ou quaisquer outras fontes presentes no local que sejam responsáveis pela excitação das estruturas. É um ensaio totalmente não destrutivo pois apenas se recorre à fixação de sensores, com elevada sensibilidade, que registam a resposta da estrutura, sem que haja qualquer tipo de intrusão, podendo desta forma salvaguardar, por completo, a integridade da mesma.

O uso da vibração ambiental foi possível dado o desenvolvimento tecnológico verificado ao nível dos acelerómetros utilizados neste tipo de medições, pois, a baixa amplitude de vibração das excitações, impõe a utilização de aparelhos com elevada sensibilidade, precisão e recolha de dados eficiente. Estes ensaios apresentam vantagens, uma vez que são mais económicos e mais simples, não necessitando de meios mais pesados para realizar qualquer tipo de vibração forçada (Lopes et al., 2010).

2.4 Monitorização de estruturas

Os sistemas de observação e monitorização do comportamento dinâmico de estruturas consistem num conjunto de aparelhos e instrumentos de medição nela instalados que permitem o registo, a

recolha e a apresentação dos dados relativos às principais grandezas que caracterizam o comportamento dinâmico dessa estrutura (ver Figura 2.3).

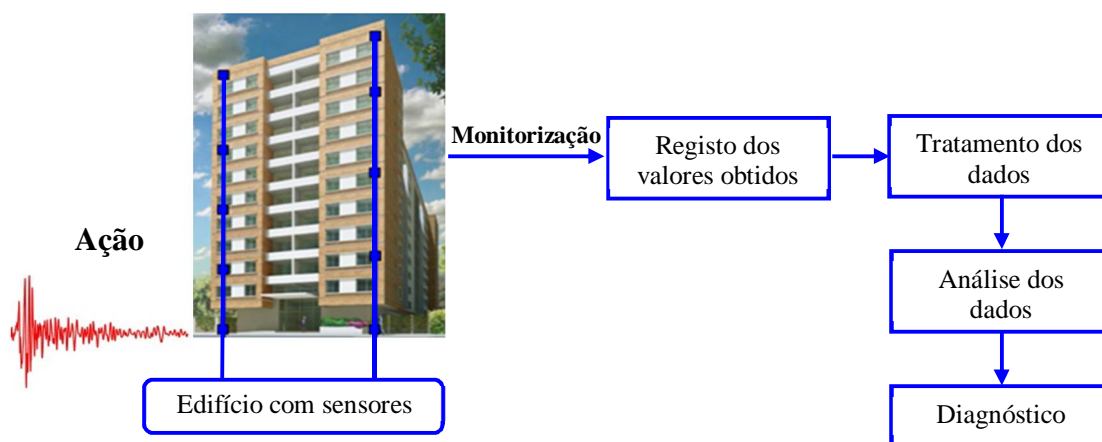


Figura 2.3 – Esquema ilustrativo de um sistema de monitorização estrutural.

Cada estrutura tem um comportamento dinâmico característico, que varia quando se alteram as propriedades estruturais o que pode acontecer devido a ações excecionais ou devido a processos de deterioração. Por esta razão a implementação de sistemas de monitorização de vibrações em contínuo (Figura 2.4) é do maior interesse pois permite acompanhar e identificar eventuais alterações estruturais que ocorram ao longo da vida das obras. Os ensaios referidos anteriormente são efetuados apenas de forma esporádica, pelo que a informação recolhida, apesar de útil, não é suficiente para efetuar o controlo da segurança das estruturas ao longo da sua vida. Assim, a instalação de um sistema que possibilite a observação em contínuo do comportamento dinâmico de uma estrutura, como o implementado na barragem do Cabril (Mendes, 2005, 2010; Oliveira, 2002; Oliveira et al., 2012; Oliveira, Mendes, Garrett, Costa, & Reis, 2011; Oliveira, Osório, Silvestre, & Câmara, 2014), é de todo o interesse para complementar os sistemas de observação da resposta sob ações estáticas e para obter informação sobre a evolução do estado de deterioração ao longo do tempo.

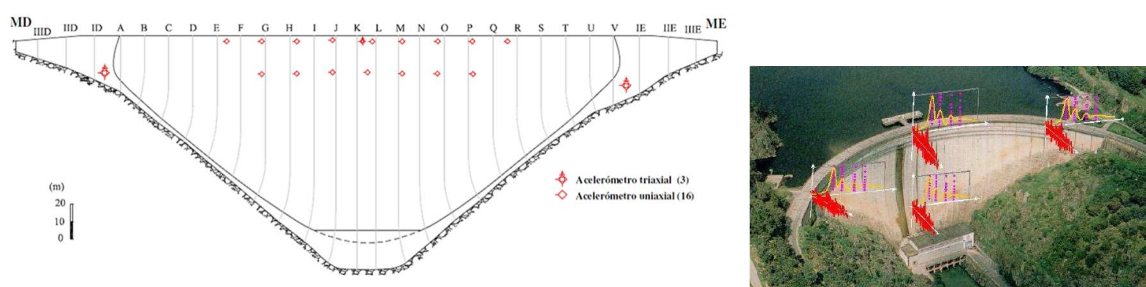


Figura 2.4 - Sistema de observação do comportamento dinâmico em contínuo instalado na barragem do Cabril (Mendes, 2010; Oliveira et al., 2012).

2.4.1 Monitorização de Edifícios

Nas secções seguintes são apresentados dois exemplos de edifícios em que foram instalados sistemas de monitorização de vibrações: um edifício de pequena altura na universidade de Nevada e um edifício de grande altura no Dubai, o maior do mundo até à data.

2.4.1.1 Edifício do departamento de Ciências e Engenharia da Universidade de Nevada - Las Vegas, Estados Unidos da América

O Edifício de Ciências e Engenharia da Universidade de Nevada, em Las Vegas (UNLV) (Figura 2.5), é não só pioneiro relativamente ao seu design ecológico, como também no que diz respeito aos seus sistemas de monitorização estrutural, instalados para medir a resposta durante a ocorrência de sismos, uma vez que Nevada é um dos estados com maior sismicidade ativa nos EUA. A monitorização dos edifícios na região de Las Vegas permite fornecer dados no que diz respeito ao comportamento das suas estruturas, quando solicitadas por um sismo. O risco sísmico nesta região é elevado, pois existem grandes falhas geológicas, no conhecido “Death valley” (Vale da Morte), no vizinho estado da Califórnia, bem como dentro e perto da grande bacia do Nevada, capazes de gerar eventos sísmicos de magnitude 7 ou superior (Kalkan, Savage, Reza, Knight, & Tian, 2013).



Figura 2.5 – Edifício do departamento de Ciências e Engenharia da Universidade de Nevada, Las Vegas (Kalkan et al., 2013).

O Edifício de Ciências e Engenharia da Universidade de Las Vegas possui um sistema de monitorização, instalado com 21 sensores de movimento (sensores de velocidades e de

acelerações). Os sensores encontram-se localizados nas extremidades da estrutura, locais onde é esperada a resposta máxima da mesma quando solicitada por um sismo. O edifício possui também um sensor triaxial instalado no primeiro andar, para registar movimentos de entrada em três direções ortogonais neste nível. Durante a ocorrência de um sismo, o sistema está projetado para gravar e calcular: i) O movimento oscilatório e de torção do edifício; ii) O tempo que as ondas sísmicas levam desde a base até chegarem ao topo da estrutura; e iii) a deformação que possa vir a existir durante o sismo (Figura 2.6) (Kalkan et al., 2013).

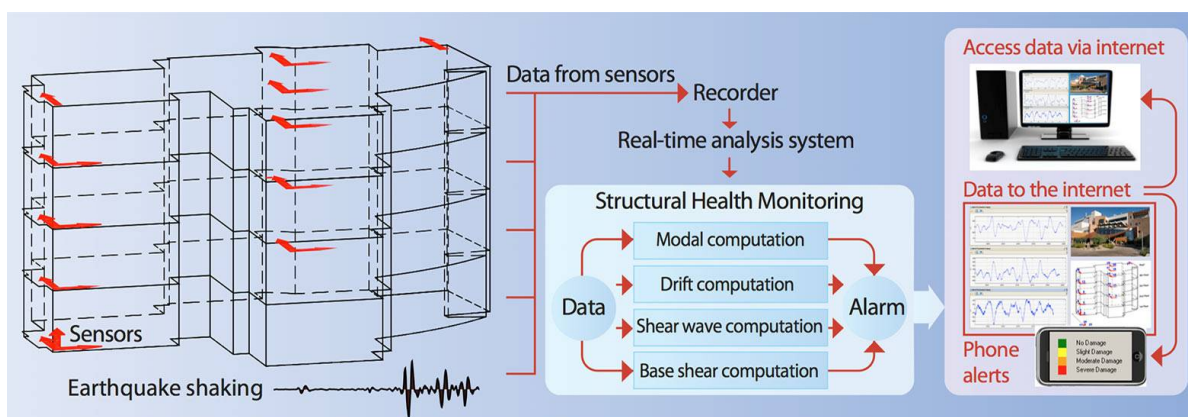


Figura 2.6 - Fluxograma que representa o funcionamento do sistema de monitorização de terremotos em tempo real instalado na Universidade de Nevada Las Vegas no departamento de Ciências e Engenharia (Kalkan et al., 2013).

A informação recolhida pode ser utilizada para se proceder a uma avaliação rápida da segurança estrutural e para apoiar decisões relativamente a possíveis reparações, substituições e outras medidas de manutenção e reabilitação necessárias.

Os dados monitorizados em tempo real também estão disponíveis para os professores da Universidade de Nevada e para estudantes de engenharia, através de um computador no local, para que possam estudar e compreender as características de vibração do edifício e a resposta durante os sismos.

2.4.1.2 Burj Khalifa – Dubai, Emirados Árabes Unidos

O Burj Khalifa encontra-se localizado no Dubai, nos Emirados Árabes Unidos sendo, nos dias de hoje, considerado a maior estrutura em altura do mundo, com 828 metros de altura e 160 andares (Figura 2.7). A sua construção teve início a 21 de setembro de 2004 e término no ano de 2009, tendo sido inaugurado dia 4 de janeiro de 2010 (Wikipédia, 2017).

Durante o início da sua construção o edifício dispôs de um programa de monitorização temporária, em tempo real que serviu como ponto de expansão para o sistema de monitorização em escala completa do edifício, designado como “*permanent real-time Structural Health Monitoring (SHM) program*”, ou seja, programa permanente em tempo real de Monitorização de Integridade Estrutural (MIE). Este programa foi financiado e instalado pela Samsung C & T em cooperação com a Universidade de Notre Dame (Kareem, Kijewski e Kwon), dos Estados Unidos da América e a respetiva instalação do teste de túnel de vento foi efetuada em Cermak Peterka Petersen, Colorado.

O Programa de MIE permanente em tempo real permite medir a aceleração do edifício, o movimento, as características dinâmicas (frequências, formas dos modos), registos de histórias de aceleração, velocidade e direção do vento ao longo de toda a altura e comportamento de fadiga do pináculo (Civil+Structural Engineer, 2014).



Figura 2.7 – Burj Khalifa, Dubai.

Na Figura 2.8 pode-se observar o esquema da configuração detalhada do conceito do programa MSE desenvolvido para o Burj Khalifa.

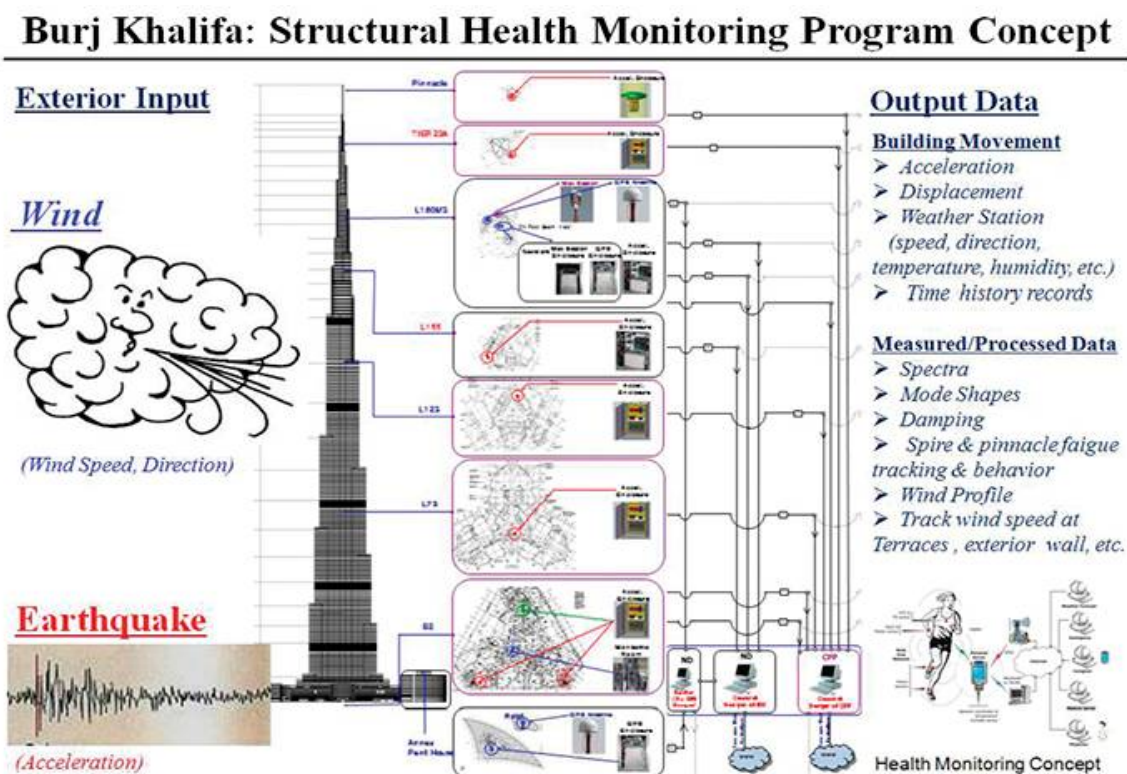


Figura 2.8 – Esquema detalhado do conceito de programa permanente de monitorização de saúde estrutural em tempo real, desenvolvido pelo autor de Burj Khalifa (Civil+Structural Engineer, 2014)

A Figura 2.9 fornece amostras dos dados medidos em tempo real em Burj Khalifa durante um sismo de magnitude 5.8 na escala de Richter que ocorreu no sul do Irão em 20 de julho de 2010, chegando ao Dubai já com uma magnitude mais baixa. Apesar disso, este sismo teve uma frequência natural correspondente à do pináculo, colocando o pináculo em ressonância. As histórias de acelerações capturadas no nível mais baixo das caves permitiram realizar a análise das histórias de acelerações da torre. Estas acelerações medidas e os deslocamentos previstos da torre (não à escala), encontram-se resumidos na Figura 2.9 (Civil+Structural Engineer, 2014).

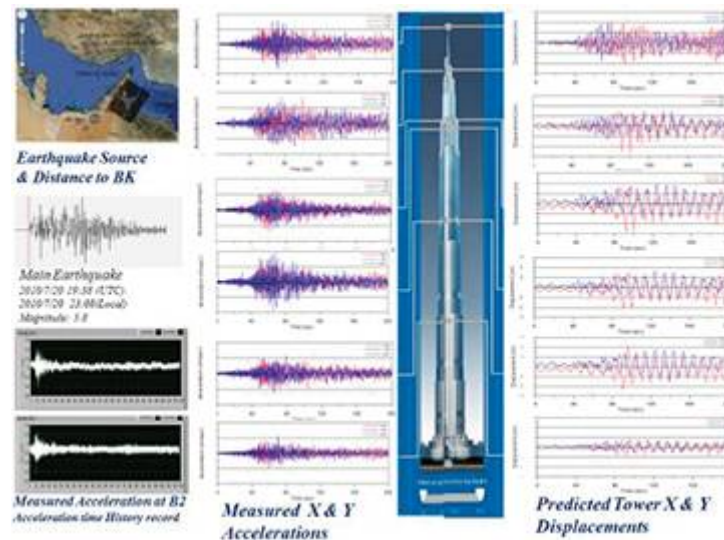


Figura 2.9 – Dados referentes a aceleração medida (não à escala) e deslocamento previsto, ambos em todos os níveis do edifício devido a um evento de terremoto ocorrido no sul do Irão em 20 de julho de 2010 (Civil+Structural Engineer, 2014).

2.4.2 Monitorização de Pontes

Neste ponto apresenta-se um exemplo de monitorização de uma ponte, a qual tem a maior rede de sensores inteligentes sem fios do mundo (“*World's Largest Wireless Smart Sensor Network (WSSN)*” (Smart Structure Systems Lab, n.d.).

2.4.2.1 2ª ponte de Jindo, ponte gémea – Jindo, Coreia do Sul

As pontes de Jindo são pontes duplas de tirantes, que fazem a ligação entre a ilha de Jindo e a ponta sudoeste da península coreana perto da cidade de Haenam. A mais antiga das pontes gémeas, construída em 1984, é a primeira ponte de tirantes retratada na história das pontes da Coreia. A mais recente ponte de Jindo, nomeada de 2ª Ponte de Jindo, foi construída em 2006, para fazer face ao aumento do tráfego na região (Figura 2.10 a)).

O primeiro sistema de monitorização foi instalado na 2ª ponte de Jindo em 2009, resultante do esforço conjunto entre a Universidade de Illinois, em Urbana-Champaign (UIUC), o Instituto Avançado de Ciência e Tecnologia da Coreia (KAIST) e a Universidade de Tóquio. Foi instalado um total de 427 canais de sensores ao longo do tabuleiro, por forma a possibilitar a medição da aceleração segundo 3 eixos, da temperatura e da humidade, bem como, um dispositivo para aquisição de dados do sistema de monitorização de integridade estrutural (MIE). Em 2010 o

sistema de monitorização foi ampliado para um total de 661 canais de dados, conforme se mostra na Figura 2.10 b).

O sistema de monitorização implementado permite estimar as propriedades modais, tais como: as frequências naturais, a forma dos modos de vibração e o amortecimento modal. Estas propriedades extraídas das acelerações médias (Figura 2.10 c) parte superior) permitem validar o modelo numérico (Figura 2.10 c) parte inferior) por forma a determinar o desempenho estrutural e encontrar possíveis locais danificados (Cho, Jr, Jo, Li, & Kim, 2012).

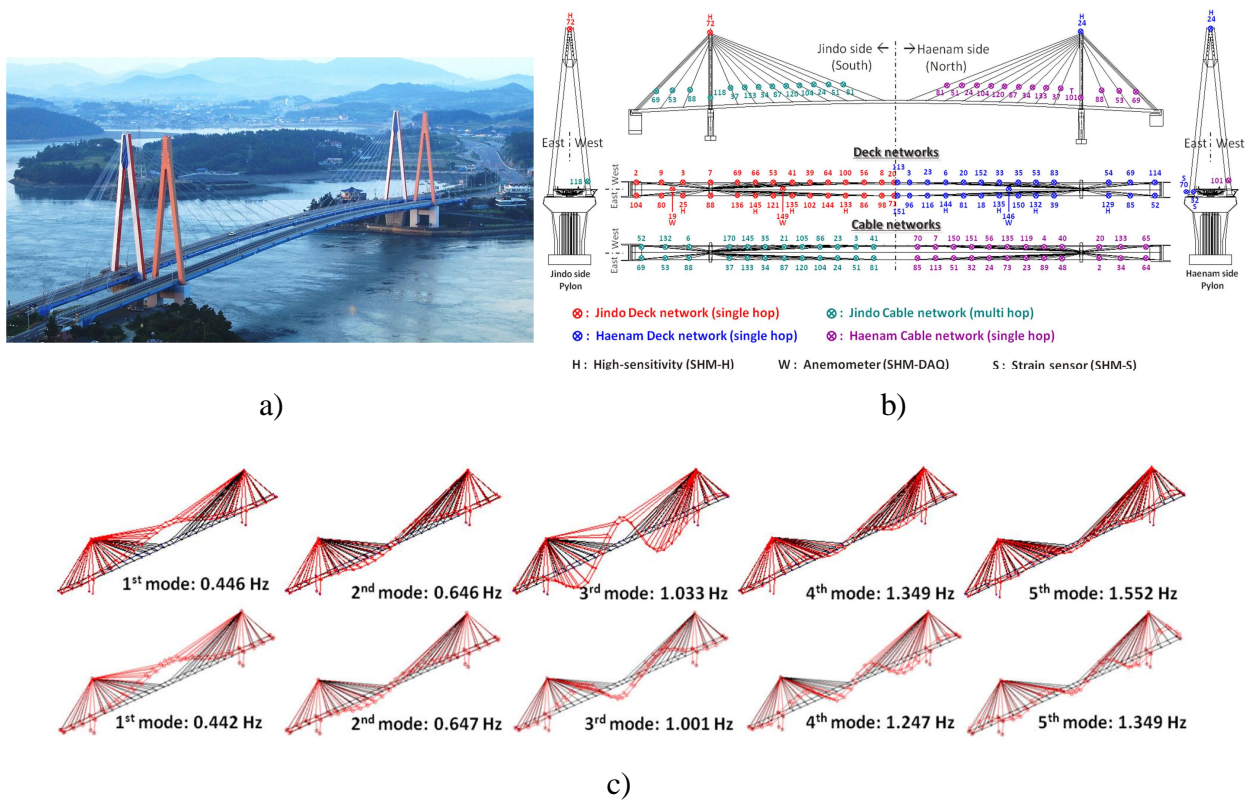


Figura 2.10 - Sistema de monitorização implementado na 2ª ponte de Jindo: a) Pontes de Jindo, Coreia do Sul. A 2ª ponte de Jindo, ponte gémea, é a que se encontra à esquerda; b) Sistema de monitorização da 2ª ponte de Jindo, com um total de 661 canais de dados; c) Cinco primeiros modos de vibração. Na primeira linha obtidos com dados experimentais e na segunda obtidos a partir de um modelo numérico (Cho et al., 2012).

2.4.3 Monitorização de barragens

Nas secções seguintes apresentam-se exemplos de barragens com sistemas de monitorização.

2.4.3.1 Barragem de Punta Gennarta – Lago Corsi, Sardenha, Itália

A barragem de Punta Gennarta encontra-se localizada no rio Canonica, no Sudoeste da Sardenha, Itália (Figura 2.11 a)). Trata-se de uma barragem abóbada construída ao longo de quatro anos (1959 – 1962). A barragem tem 57 metros de altura (acima da base) e desenvolve-se ao longo de 254 metros.

O sistema de monitorização instalado consiste na instalação de catorze sensores que permitem medir as vibrações ambiente de acordo com as técnicas “*Noise Input Modal Analyses (NIMA)*”.

Na Figura 2.11 b) encontra-se ilustrada a distribuição de sete sensores colocados na coroa da barragem e na Figura 2.11 c) apresenta-se uma visão frontal do lado de jusante da estrutura com a distribuição dos catorze sensores colocados em todo o paramento da barragem (Calcina, Eltrudis, Piroddi, & Ranieri, 2014).

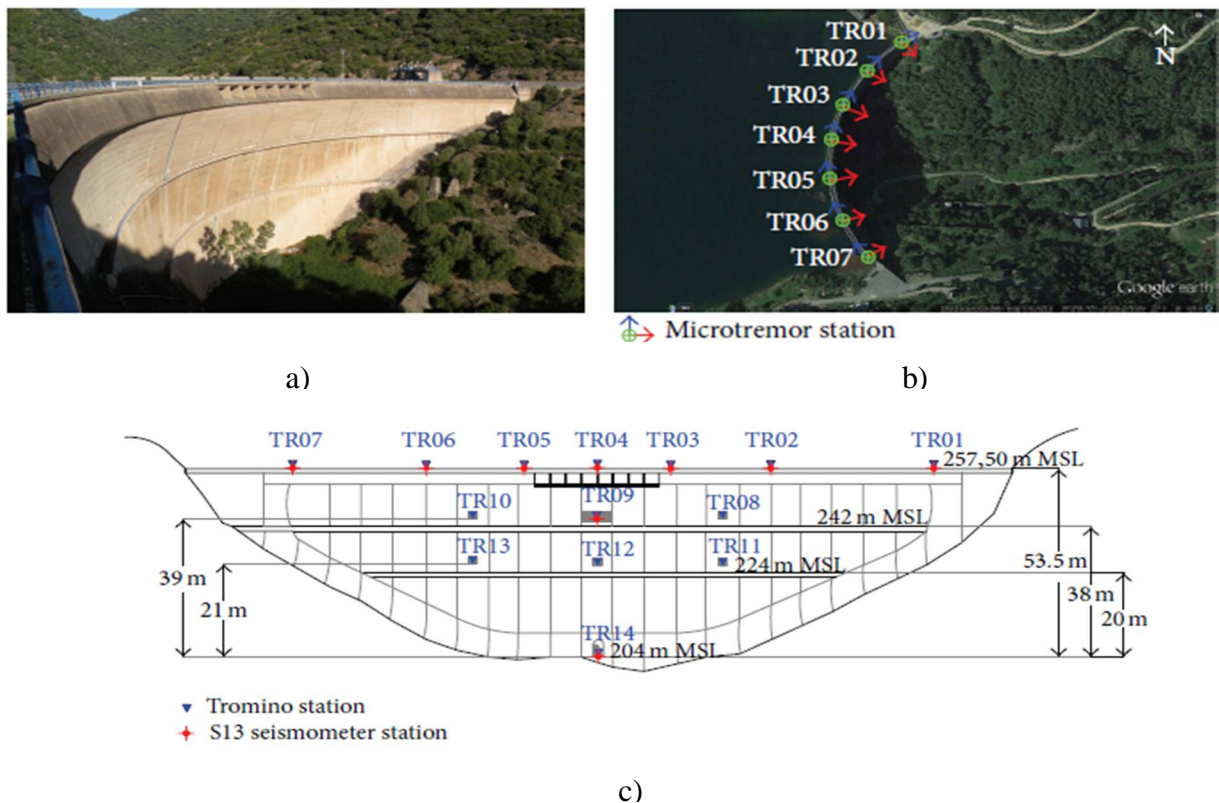


Figura 2.11 – Sistema de monitorização implementado na barragem de Punta Gennarta: a) Barragem de Punta Gennarta, Itália; b) esquema de sensores colocados no coroamento da barragem; c) Sistema de monitorização instalado na barragem (Calcina et al., 2014).

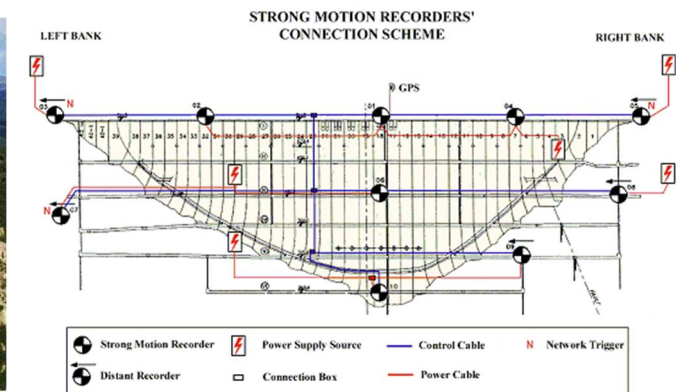
2.4.3.2 Barragem de Enguri – Jvari, Geórgia

A barragem de Enguri encontra-se localizada no rio Enguri, na Geórgia, tendo a sua construção decorrido entre 1978 e 1987. É uma das maiores barragens abóbada do mundo, com 271,5 metros de altura e um desenvolvimento de 728 metros na zona do coroamento (Figura 2.12 a)).

A barragem de Enguri dispõe de um sistema de monitorização em contínuo, com sensores capazes de medir vibrações sísmicas e vibrações devidas à excitação ambiental, conforme se apresenta na Figura 2.12 b) (GeoSIG, 2017).



a)



b)

Figura 2.12 – Sistema de monitorização implementado na barragem de Enguri: a) Barragem de Enguri, Geórgia (Horner & Vejnovic, 2017); b) Sistema de monitorização instalado na barragem (GeoSIG, 2017).

2.5 Considerações Finais

Neste capítulo foram abordados aspetos relacionados com a reabilitação de estruturas e referido o interesse dos métodos de diagnóstico não invasivos como é o caso dos métodos baseados em ensaios de vibração ambiente. Foi descrito de forma sucinta como é efetuada a caracterização dinâmica de estruturas, explicando o processamento e aquisição dos dados (histórias de acelerações p.ex.) e foi salientado o interesse dos sistemas para monitorização de vibrações em contínuo.

Os sistemas de monitorização de vibrações combinam tecnologias de deteção, sensores capazes de medir vibrações de pequena amplitude, com *software* de análise automática de dados, capaz de analisar como as vibrações ambiente ou vibrações sísmicas podem afetar as estruturas, e como podem ser usadas para obter informações úteis para avaliar o estado de deterioração estrutural,

possibilitando o adequado dimensionamento de reforços e o projeto de estruturas mais seguras no futuro.

Abordou-se a importância da monitorização de estruturas no âmbito de programas de monitorização da integridade estrutural (MIE), ilustrando com diversos exemplos de estruturas monitorizadas, nomeadamente edifícios, pontes e barragens. A instalação de sistemas para MIE constitui atualmente a melhor forma de prevenir acidentes e incidentes resultantes de problemas estruturais ou decorrentes da degradação dos materiais,

A utilização de sistemas de monitorização estrutural assume particular relevância na deteção de danos ou zonas de degradação, possibilitando a elaboração de diagnósticos mais precisos e objetivos. É importante implementar programas de monitorização de estruturas desde a sua entrada em serviço pois permite reduzir os respetivos custos de manutenção, pois quando as anomalias são detetadas numa fase inicial, a respetiva progressão é suspensa, a profundidade da reparação, os custos e os eventuais períodos de inoperação serão menores, podendo ainda aumentar o período de utilização da estrutura.

A partir do exemplo apresentado do edifício Burj Khalifa, verificou-se que, numa fase inicial de construção duma estrutura, a sua monitorização permite fornecer informações em tempo real sobre a resposta do sistema estrutural, possibilitando a correção/alteração das técnicas de construção por forma a garantir ou melhorar o desempenho durante a construção e durante a vida útil da estrutura, bem como identificar anomalias/erros de conceção nos estágios iniciais da construção.

3

Análise Dinâmica de Estruturas

3.1 Considerações Iniciais

Nas estruturas, tais como pontes, edifícios ou barragens, ocorrem movimentos oscilatórios quando estas são solicitadas por forças externas variáveis no tempo $f = f(t)$, como é o caso das forças devidas ao vento ou das forças associadas a ações sísmicas. Para uma estrutura simples com 1 grau de liberdade, do tipo do edifício de 1 piso representado na Figura 3.1 (equivalente a um sistema massa-mola, com massa m , rigidez k e amortecimento c) o equilíbrio do movimento ou equilíbrio dinâmico traduz-se, em cada instante de tempo, pelo equilíbrio entre todas as forças envolvidas no movimento. Em cada instante t deve ser nula a soma de todas as forças, ou seja, deve ser

$$f_I(t) + f_A(t) + f_E(t) + f(t) = 0 \quad (3.1)$$

em que

$$f_I(t) = -m \ddot{u}(t) \quad - \text{Força de inércia (2ª Lei de Newton)}$$

$$f_A(t) = -c \dot{u}(t) \quad - \text{Força de amortecimento}$$

$$f_E(t) = -k u(t) \quad - \text{Força de restituição elástica.}$$

$$f(t) \quad - \text{Força exterior aplicada}$$

Assim, a anterior equação que traduz o equilíbrio dinâmico de um sistema oscilatório simples com 1 grau de liberdade é uma equação diferencial de 2ª ordem que se pode escrever na forma

$$m \ddot{u}(t) + c \dot{u}(t) + k u(t) = f(t) \quad (3.2)$$

Para sistemas estruturais de vários graus de liberdade (N_{GL}) o movimento pode ser descrito pela seguinte equação diferencial matricial (3.3), idêntica à anterior (3.2), mas na qual surgem as matrizes de massas \underline{m} , de amortecimento \underline{c} e de rigidez \underline{k} e um vetor $\underline{f}(t)$ com as histórias de forças em todos os graus de liberdade (N_{GL})

$$\underline{m} \ddot{\underline{u}}(t) + \underline{c} \dot{\underline{u}}(t) + \underline{k} \underline{u}(t) = \underline{f}(t) \quad (3.3)$$

Com vista a introduzir a notação utilizada na análise dinâmica de modelos espacialmente discretos (modelos utilizados no estudo de estruturas contínuas após a aplicação das técnicas numéricas de discretização espacial), é conveniente começar por estudar com detalhe as formulações matemáticas que permitem descrever o comportamento dinâmico de um modelo discreto de apenas 1 grau de liberdade (oscilador de 1 GL). Um modelo físico de um edifício de 1 piso como o que se mostra na Figura 3.1 é o ideal para se visualizar uma estrutura de interesse para a engenharia civil cujo comportamento dinâmico pode ser adequadamente simulado com base na equação da dinâmica de modelos estruturais de 1 GL.

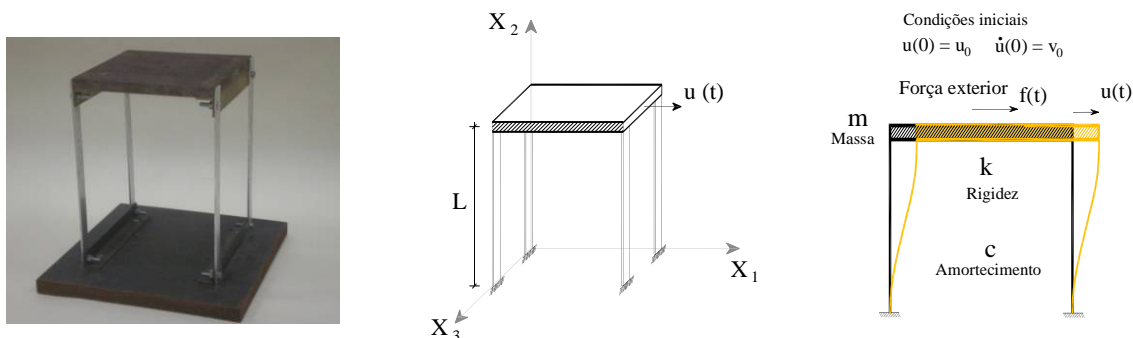


Figura 3.1 - Modelo físico de um edifício de um piso. Perspetiva e representação esquemática do modelo de 1 GL idealizado para estudar o comportamento dinâmico da direção mais flexível.

O grande interesse do estudo dos modelos de 1 GL deve-se sobretudo ao facto de conduzir a resultados que podem ser utilizados diretamente na análise de modelos de vários GL, dado que a resposta dinâmica desses modelos de maior complexidade pode ser estudada através da sobreposição da resposta de modelos de 1 GL, se for utilizada uma transformação de coordenadas adequada (transformação das coordenadas estruturais, correspondentes aos deslocamentos nos vários graus de liberdade, para as denominadas coordenadas modais).

Neste capítulo apresentam-se os principais conceitos e fundamentos da dinâmica de estruturas, sendo em primeiro lugar abordados os sistemas de um grau de liberdade, como sistemas mais

simples de análise do comportamento dinâmico de estruturas, desde a formulação clássica à formulação em espaço de estados.

Posteriormente são introduzidos os sistemas com vários graus de liberdade e o conceito de identificação modal estocástica, pois a fonte de excitação a estudar irá ser aleatória, mostrando o processo para obter as frequências naturais, amortecimentos modais e modos de vibração. Será apresentado um programa em MATLAB, desenvolvido no âmbito desta dissertação para efetuar o cálculo dinâmico de estruturas simples e gerar histórias de deslocamentos, velocidades e acelerações sob excitação do tipo ruído branco.

Finalmente serão referidos os conceitos fundamentais do método dos elementos finitos para a análise dinâmica de estruturas contínuas.

3.2 Formulação Clássica. Modelo de 1 GL

Para o caso de modelos de apenas 1 GL, a equação diferencial da dinâmica de estruturas assume a forma escalar atrás referida, em que a incógnita $u = u(t)$ é uma função escalar que representa a pretendida história de deslocamentos no intervalo de tempo em estudo ($0 \leq t \leq t_f$)

$$m \ddot{u} + c \dot{u} + k u = f \quad (3.4)$$

e em que m , c e k são escalares (constantes no tempo) que representam, respetivamente, a massa, o amortecimento e a rigidez do modelo, enquanto $f = f(t)$ representa a história de carga, e $\ddot{u}(t)$ e $\dot{u}(t)$ as histórias de acelerações e velocidades ao longo do tempo. As condições iniciais, em deslocamento e velocidade, são usualmente representadas por $u(0) = u_0$ e $\dot{u}(0) = v_0$.

A determinação dos parâmetros que caracterizam a vibração de um modelo de 1 GL no seu **modo natural de vibração** é a chave para o estudo da dinâmica de estruturas. O modo natural de vibração de um modelo de 1 GL corresponde à sua oscilação natural, ou seja, ao seu movimento oscilatório sem a atuação de qualquer força ($f = 0$), após a aplicação de uma perturbação no instante inicial (condições iniciais não nulas). Matematicamente o modo natural de vibração de um modelo de 1 GL determina-se, então, resolvendo o seguinte problema de valores iniciais (que envolve uma equação diferencial ordinária, homogénea, com coeficientes constantes)

$$\begin{cases} m \ddot{u} + c \dot{u} + k u = 0 \\ u(0) = u_0, \dot{u}(0) = v_0 \end{cases} \quad (3.5)$$

Utilizando o conhecido método do polinómio característico¹ e admitindo que o amortecimento c é suficientemente baixo para que ocorra oscilação (amortecimento inferior ao crítico $c_{cr} = 2\sqrt{km}$ como se verifica na generalidade das estruturas de engenharia civil), obtém-se a seguinte solução particular para este problema da determinação do **modo natural de vibração** de um modelo de 1 GL

$$u(t) = a e^{\lambda t} + b e^{\bar{\lambda} t} \quad (3.6)$$

em que λ e $\bar{\lambda}$ correspondem a um par de raízes complexas conjugadas do polinómio característico ($m\lambda^2 + c\lambda + k = 0$), sendo

$$\lambda = -\xi \omega_N + i \omega_A, \quad \text{com} \quad \omega_N = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \xi = \frac{c}{2\sqrt{km}} \quad \text{e} \quad \omega_A = \omega_N \sqrt{1 - \xi^2} \quad (3.7)$$

e

$$a = u_0 - \frac{v_0 - u_0 \lambda}{\bar{\lambda} - \lambda} = \frac{1}{2} u_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{v_0 + \xi \omega_N u_0}{\omega_A} \right) i \quad \text{e} \quad b = \frac{v_0 - u_0 \lambda}{\bar{\lambda} - \lambda} = \bar{a} \quad (3.8)$$

Quanto à notação, utiliza-se ω_N para designar a frequência natural, ξ para designar o amortecimento relativo e ω_A a frequência natural amortecida.

Utilizando a conhecida fórmula de Euler para os complexos pode-se verificar que a anterior solução $u(t)$, após as devidas manipulações algébricas, pode ser escrita numa forma trigonométrica equivalente, mais adequada para a interpretação física dos parâmetros dinâmicos que caracterizam o **modo natural de vibração** de um modelo de 1 GL com amortecimento não nulo, ficando então

$$u(t) = \left[u_0 \cos(\omega_A t) + \left(\frac{v_0 + \xi \omega_N u_0}{\omega_A} \right) \text{sen}(\omega_A t) \right] e^{-\xi \omega_N t} \quad (3.9)$$

Na figura seguinte (Figura 3.2) representa-se graficamente a anterior solução, o que permite visualizar o pretendido **modo natural de vibração** de um modelo de 1 GL (com amortecimento inferior ao crítico) e apreender o significado físico dos vários parâmetros envolvidos

¹ Método baseado na hipótese de que a solução geral pode ser uma combinação linear de funções da forma $u(t) = e^{\lambda t}$.

Modelo de 1 GL. Modo natural de vibração

Oscilação livre, com amortecimento

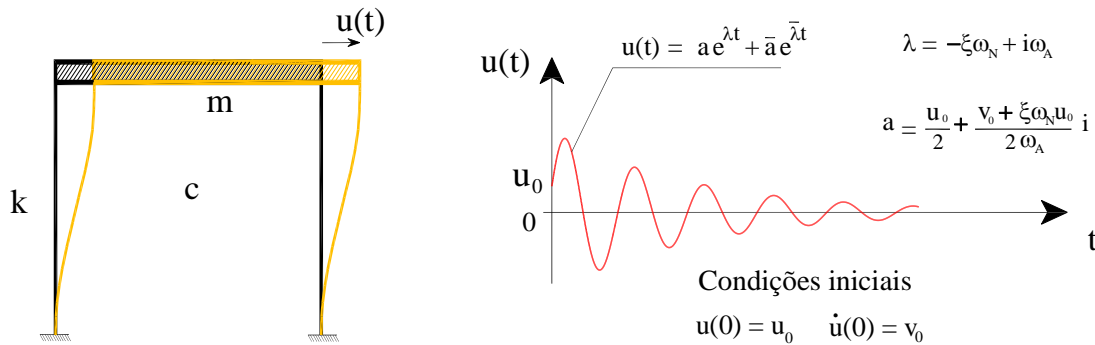


Figura 3.2 - Modo natural de vibração de um modelo de 1 GL, com amortecimento inferior ao valor do amortecimento crítico $c_{cr} = 2\sqrt{km}$.

Quando existe uma história de forças aplicadas a solução envolve mais uma parcela (parcela forçada) correspondente a um integral de convolução entre a história da força $f(t)$ e a função de resposta a impulsos unitários $h(t)$

$$u(t) = \left[u_0 \cos(\omega_A t) + \left(\frac{v_0 + \xi \omega_N u_0}{\omega_A} \right) \text{sen}(\omega_A t) \right] e^{-\xi \omega_N t} + \underbrace{\int_0^t h(t-\tau) f(\tau) d\tau}_{\text{Convolução}} \quad (3.10)$$

em que

$$h(t-\tau) = \frac{1}{m\omega_A} \text{sen}(\omega_A(t-\tau)) e^{-\xi \omega_N(t-\tau)} \quad (3.11)$$

3.3 Formulação em velocidades e deslocamentos (espaço de estados). Modelo de 1 GL

O exemplo de um sistema de 1 GL (Figura 3.3) é ideal para ilustrar a aplicação da denominada formulação no espaço de estados (em velocidades e deslocamentos) à resolução de problemas de dinâmica de estruturas.

Modelo de 1 GL. Modo natural de vibração

Oscilação livre, com amortecimento

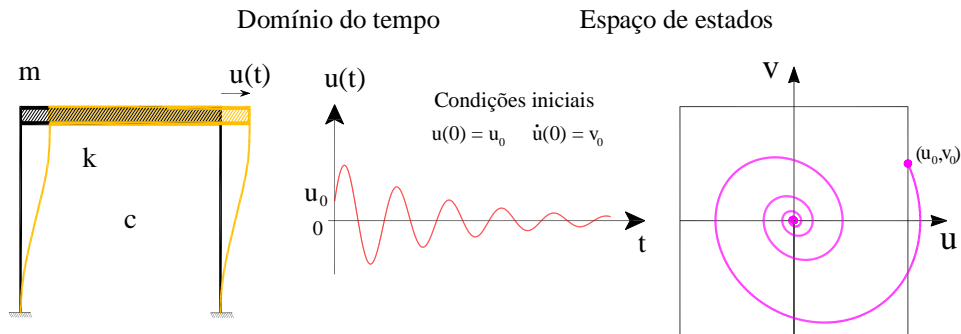


Figura 3.3 - Modo natural de vibração de um modelo de 1 GL, com consideração do efeito de amortecimento.

Representação no domínio do tempo e no espaço de estados (em velocidades e deslocamentos: espaço $u - v$).

Para obter a denominada representação no espaço de estados da equação diferencial (3.5) há que efetuar uma mudança de variável de forma a obter um sistema de duas equações diferenciais de 1ª ordem equivalente à equação original de 2ª ordem.

Considerando a mudança de variável $\dot{u} = v(t)$ obtém-se então o seguinte sistema de duas equações diferenciais de 1ª ordem em que as funções incógnitas são, como se referiu, o deslocamento $u = u(t)$ e a velocidade $v = v(t)$

$$m \ddot{u} + c \dot{u} + k u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dot{u} = v \\ m \dot{v} + c v + k u = f \end{cases} \quad (3.12)$$

A partir do anterior sistema obtém-se a conhecida representação no espaço de estados da equação do movimento do modelo estrutural de 1 GL (nas variáveis de estado: deslocamento e velocidade)

$$\begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = -\frac{k}{m} u - \frac{c}{m} v + \frac{f}{m} \end{cases} \quad (3.13)$$

pelo que a equação de estado assume a seguinte forma matricial

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix}}_{\dot{\underline{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -c/m \end{bmatrix}}_{\underline{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}}_{\underline{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix}}_{\underline{B}} \cdot f \quad (3.14)$$

ou

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x} + \underline{B} f \quad (3.15)$$

em que

$\underline{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}$ é o vetor de estado (contém o deslocamento e a velocidade), e

$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -c/m \end{bmatrix}$ é a matriz de estado do sistema.

Para resolver a equação de estado é conveniente proceder à sua diagonalização através da decomposição da matriz de estado \underline{A} em valores próprios $\underline{\lambda}_E$ e vetores próprios $\underline{\Phi}_E$.

O cálculo dos vetores próprios da matriz de estado corresponde a resolver o seguinte sistema

$$\underline{A} \underline{\phi} = \lambda \underline{\phi} \Leftrightarrow [\underline{A} - \lambda \underline{I}] \underline{\phi} = \underline{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -k/m & -c/m - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Este sistema tem soluções $\underline{\phi}$ não nulas (indeterminadas) se e só se

$$\det[\underline{A} - \lambda \underline{I}] = 0 \quad (3.17)$$

Resolvendo a equação (3.17) obtêm-se os seguintes valores próprios

$$(-\lambda) \cdot (-c/m - \lambda) + k/m = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\xi \omega_N + i \omega_A \quad \vee \quad \lambda = -\xi \omega_N - i \omega_A \quad (3.18)$$

sendo estes um par de valores complexos conjugados com parte real negativa.

Considerando $\underline{\lambda}_E$ a matriz diagonal contendo os valores próprios da matriz de estado,

$$\underline{\lambda}_E = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{bmatrix}, \lambda = -\xi \omega_N + i \omega_A \quad (3.19)$$

onde,

$$\omega_N = \sqrt{k/m} \quad \text{- Frequência natural}$$

$$\xi = \frac{c}{c_{\text{crítico}}} = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{c}{2m\omega_N} \quad \text{- Coeficiente de amortecimento}$$

$$\omega_A = \omega_N \sqrt{1 - \xi^2} \quad \text{- Frequência amortecida}$$

sendo de salientar que $\omega_N = |\lambda|$ e $\xi = -\text{Re}(\lambda) / |\lambda|$.

A matriz dos vetores próprios, também designada de matriz modal, é dada por

$$\underline{\Phi}_E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda & \bar{\lambda} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

sendo

$$\underline{\Phi}_E^{-1} = \frac{i}{2\omega_A} \begin{bmatrix} \bar{\lambda} & -1 \\ -\lambda & 1 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

desta forma a matriz de estado pode ser escrita à custa do seguinte produto matricial

$$\underline{A} = \underline{\Phi}_E \underline{\lambda}_E \underline{\Phi}_E^{-1} \quad (3.22)$$

O que permite concluir que a forma diagonalizada é dada pela seguinte expressão

$$\underline{A}^* = \underline{\Phi}_E^{-1} \underline{A} \underline{\Phi}_E = \underline{\lambda}_E \quad (3.23)$$

A diagonalização da equação de estado $\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{B}f$ obtém-se efetuando a mudança de variável $\underline{x} = \underline{\Phi}_E \underline{z}$ e substituindo \underline{A} por $\underline{\Phi}_E \underline{\lambda}_E \underline{\Phi}_E^{-1}$, vindo então

$$\underline{\Phi}_E \dot{\underline{z}} = \left(\underline{\Phi}_E \underline{\lambda}_E \underline{\Phi}_E^{-1} \right) \left(\underline{\Phi}_E \underline{z} \right) + \underline{B}f \quad (3.24)$$

Multiplicando ambos os membros por $\underline{\Phi}_E^{-1}$ fica

$$\dot{\underline{z}} = \underline{\lambda}_E \underline{z} + \underline{\Phi}_E^{-1} \underline{B}f \quad (3.25)$$

O que corresponde a um sistema de duas equações diferenciais desacopladas de 1ª ordem, de fácil resolução.

3.4 Modelos com vários graus de liberdade. Formulação de estado

Para obter a forma de estado da equação da dinâmica que descreve o comportamento oscilatório de sistemas de vários graus de liberdade, ou seja, para obter um sistema de equações diferenciais de 1ª ordem a partir da equação de 2ª ordem, $\underline{m}\ddot{\underline{u}} + \underline{c}\dot{\underline{u}} + \underline{k}\underline{u} = \underline{f}$, basta considerar, como no caso de 1 GL, a mudança de variável $\dot{\underline{u}} = \underline{v}(t)$ obtendo-se um sistema de duas equações diferenciais (matriciais) de 1ª ordem em que as funções incógnitas são, como se referiu, os deslocamentos $\underline{u} = \underline{u}(t)$ e as velocidades $\underline{v} = \underline{v}(t)$. Considerando, $\underline{f} = \underline{s} \underline{f}_R$, ou seja, considerando um número reduzido de histórias de forças \underline{f}_R (n_f histórias de forças como “input”), distribuídas pelos N_{GL} graus

de liberdade de acordo com os coeficientes dados nas n_1 colunas da matriz \underline{s} , a formulação de estado assume a forma

$$\begin{cases} \dot{\underline{u}} = \underline{v} \\ \underline{m} \dot{\underline{v}} + \underline{c} \underline{v} + \underline{k} \underline{u} = \underbrace{\underline{s}}_{(N_{GL} \times n_1)} \underbrace{\underline{f}_R}_{(n_1 \times 1)} \end{cases} \quad (3.26)$$

Na análise de modelos tridimensionais sob ações sísmicas é usual que a ação sísmica seja dada por três acelerogramas $\underline{a}_s(t)$ na base ($n_1 = 3$) e escreve-se

$$\begin{cases} \dot{\underline{u}} = \underline{v} \\ \underline{m} \dot{\underline{v}} + \underline{c} \underline{v} + \underline{k} \underline{u} = -\underline{m} \underbrace{\underline{s}}_{(N_{GL} \times n_1)} \underbrace{\underline{a}_s}_{(n_1 \times 1)} \end{cases} \quad (3.27)$$

Escrevendo

$$\begin{cases} \dot{\underline{u}} = \underline{v} \\ \dot{\underline{v}} = -\underline{m}^{-1} \underline{k} \underline{u} - \underline{m}^{-1} \underline{c} \underline{v} + \underline{m}^{-1} \underline{s} \underline{f}_R \end{cases} \quad (3.28)$$

Obtém-se a seguinte forma matricial

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\underline{u}} \\ \dot{\underline{v}} \end{bmatrix}}_{\underline{\dot{x}} \quad (2N_{GL} \times 1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{I} \\ -\underline{m}^{-1} \underline{k} & -\underline{m}^{-1} \underline{c} \end{bmatrix}}_{\underline{A} \quad (2N_{GL} \times 2N_{GL})} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{v} \end{bmatrix}}_{\underline{x} \quad (2N_{GL} \times 1)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{m}^{-1} \underline{s} \end{bmatrix}}_{\underline{B} \quad (2N_{GL} \times n_1)} \underbrace{\underline{f}_R}_{(n_1 \times 1)} \quad (3.29)$$

É usual escrever a equação anterior de forma mais compacta em termos do denominado vetor de estado

$$\underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} \underline{u}(t) \\ \underline{v}(t) \end{bmatrix} \quad (2N_{GL} \times 1) \quad (3.30)$$

e das matrizes \underline{A} e \underline{B} , obtendo-se então a conhecida representação de estado da equação do movimento de um modelo estrutural discretizado espacialmente

$$\underline{\dot{x}} = \underline{A} \underline{x} + \underline{B} \underline{f}_R \quad (3.31)$$

em que

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{I} \\ -\underline{m}^{-1} \underline{k} & -\underline{m}^{-1} \underline{c} \end{bmatrix} \quad - \text{Matriz de estado } (2N_{GL} \times 2N_{GL}) \text{ envolvendo as propriedades do sistema estrutural discretizado espacialmente, referentes à distribuição de massa, amortecimento e rigidez;}$$

- $$\underline{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{m}}^{-1} \underline{\mathbf{s}} \end{bmatrix}$$
- Matriz ($2 N_{GL} \times n_I$) envolvendo valores nulos e a inversa da matriz de massa e a distribuição espacial das histórias de forças aplicadas pelos graus de liberdade do modelo discretizado;
- $$\underline{\mathbf{f}}_R = \underline{\mathbf{f}}_R(t)$$
- Vetor ($n_I \times 1$) com as n_I histórias de forças aplicadas (em geral será $n_I \ll N_{GL}$), de acordo com os coeficientes especificados para graus de liberdade na matriz $\underline{\mathbf{s}}$ ($N_{GL} \times n_I$).

3.4.1 Força de excitação aleatória

A identificação modal permite a identificação das características dinâmicas das estruturas (frequências naturais, configurações modais e amortecimentos modais) a partir de dados experimentais. Assim, a introdução desta secção tem como objetivo principal descrever os principais aspetos a ter em conta na utilização e implementação de técnicas de identificação modal. As técnicas de identificação modal baseiam-se apenas na análise da resposta medida e, tendo em conta que nos ensaios de vibração ambiente não existe controlo sobre as forças de excitação, nem existe a possibilidade de as conhecer ou medir, é necessário assumir que são consideradas como uma realização de um processo estocástico gaussiano de tipo ruído branco com média nula. Por se adotar esta hipótese é que surge a designação identificação modal estocástica, que advém do facto de a fonte de excitação resultar da contribuição paralela de várias fontes e, assim, para uma melhor compreensão destas definições, introduz-se o tema do comportamento dinâmico de estruturas sob excitação estocástica.

A variação ao longo do tempo de uma grandeza física, como a aceleração num ponto de uma estrutura, devido, por exemplo, ao efeito do vento (excitação aleatória), corresponde a uma função aleatória. Assim, a caracterização do comportamento dinâmico de estruturas sujeitas a ações de natureza aleatória só pode ser conseguida recorrendo a conceitos probabilísticos.

Nesta perspetiva, é conveniente começar por idealizar a excitação e a resposta estrutural recorrendo ao conceito de processo estocástico.

Um processo estocástico $x(t)$ é um conjunto de n funções aleatórias ($n \rightarrow \infty$) dependentes de um parâmetro t (tempo), em que cada uma corresponde a uma realização, r , do processo ($r \rightarrow \infty$). As realizações do processo estão associadas à caracterização/medição de uma determinada grandeza física (processo estocástico escalar), ou de um conjunto de grandezas físicas (processo estocástico vetorial).

A aceleração $a(t)$ num ponto de uma estrutura (medida numa dada direção) pode ser tratada como um processo estocástico escalar: uma realização r deste processo é um registo de acelerações, com

duração T ($t \in [0, T]$, idealmente $T \rightarrow \infty$), iniciado num dado instante; outro registo com a mesma duração T , iniciado noutra instante, constitui outra realização do mesmo processo. Como exemplo de um processo estocástico vetorial $\underline{x}(t)$ pode-se pensar na medição de acelerações radiais em vários pontos de uma barragem abóbada, como se mostra na Figura 3.4, para o caso da medição em três pontos, $\underline{a}(t) = [a_1(t) \ a_2(t) \ a_3(t)]$. Neste caso, cada realização do processo inclui três registos de duração T , todos iniciados num mesmo instante.

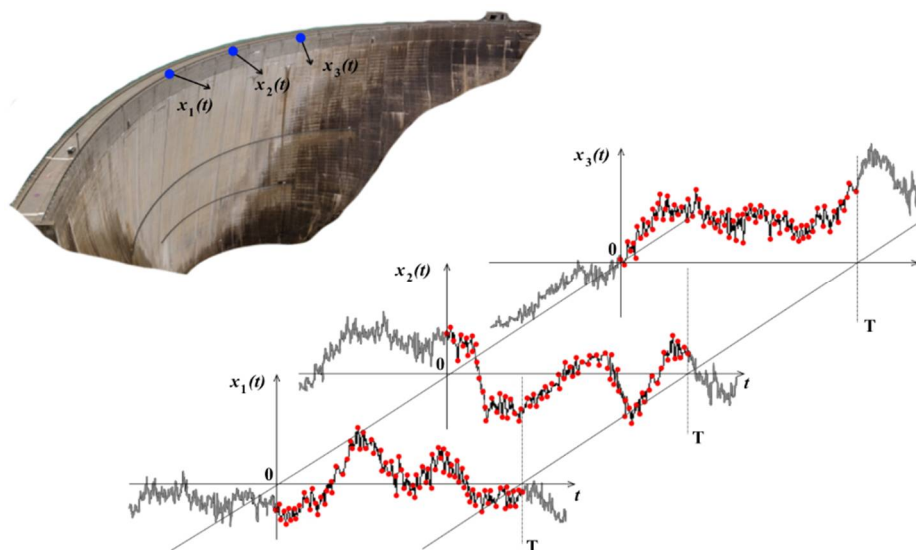


Figura 3.4: Processo estocástico vetorial, de três componentes, $\underline{x}(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t)]^{(r)}$: uma realização (r) do processo corresponde a um conjunto de três registos temporais (funções aleatórias) de duração T (idealmente $T \rightarrow \infty$).

Neste caso mostra-se um processo estocástico vetorial que envolve três grandezas físicas: acelerações radiais medidas numa barragem abóbada, sob excitação ambiente, em três pontos da obra.

Para simplificar a análise dos processos estocásticos é usual admitir que são estacionários e ergódicos. Estacionário significa que os seus parâmetros estatísticos são independentes do instante de tempo e ergódico significa que o valor dos parâmetros estatísticos avaliados para um determinado instante, para diferentes realizações, é igual ao valor avaliado apenas para uma realização. Na análise do comportamento dinâmico de estruturas, é também usual admitir, como é o caso desta dissertação, que os processos estocásticos têm média nula e são do tipo Gaussiano (como é o caso de muitos fenómenos naturais).

Assim, para um processo estocástico estacionário e ergódico, a correspondente função de auto-correlação depende apenas do desfasamento τ entre instantes (não depende dos instantes) e, assim, pode ser calculada usando uma única realização $\underline{x}(t)$ do processo, com base na seguinte expressão (valor médio do produto $\underline{x}(t) \cdot \underline{x}(t + \tau)$, na realização escolhida, de comprimento $T \rightarrow \infty$)

$$R(\tau) = E[x(t) \cdot x(t + \tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot x(t + \tau) dt \quad (3.32)$$

Quanto mais irregular ou aleatório é o processo estocástico, mais rapidamente a sua função de auto-correlação decai com o aumento do desfasamento τ (Figura 3.5). Para processos estocásticos estacionários de média nula, as funções de auto-correlação são simétricas com um máximo na origem igual à variância do processo e decaimento para zero quando $\tau \rightarrow \infty$.

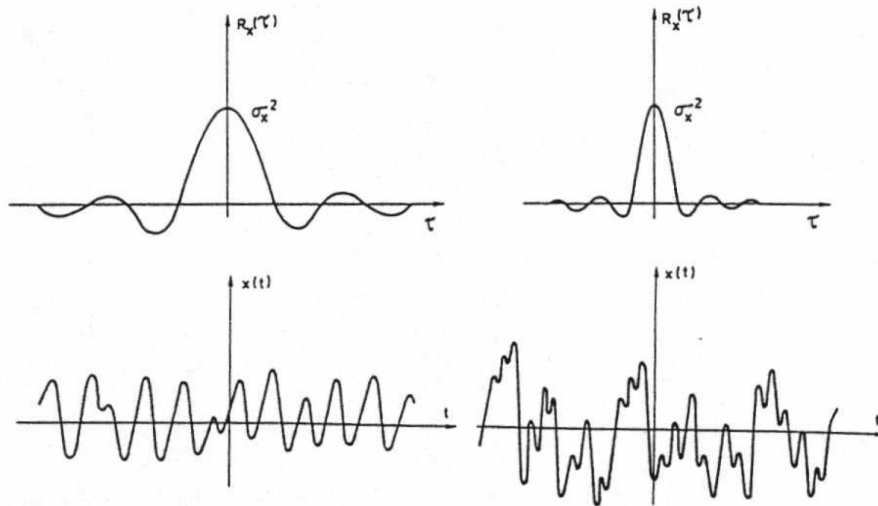


Figura 3.5: Representação gráfica das funções da auto-correlação para dois processos estocásticos. Num processo com maior grau de aleatoriedade a função de auto-correlação tende mais rapidamente para zero.

A história no tempo de uma realização $x(t)$ de um processo estocástico escalar, estacionário e ergódico, correspondente a um dado fenómeno físico, com duração $T \rightarrow \infty$ e, por isso, em rigor, o integral ao longo do tempo de $|x(t)|$, ou seja do módulo de $x(t)$, tende para infinito, o que significa que não é possível calcular, no sentido clássico, a transformada de Fourier de $x(t)$, com vista a obter informação sobre o conteúdo em frequência do processo aleatório (note-se que as funções seno e cosseno não têm transformada de Fourier no sentido clássico). Na prática esta dificuldade não se coloca dado que nunca se trabalha com registos de dados correspondentes a intervalos de tempo infinitos. Contudo, a referida dificuldade formal pode ser facilmente ultrapassada optando por analisar a função de auto-correlação (que tende para zero quando $\tau \rightarrow \infty$ e, por isso, tem transformada de Fourier no sentido clássico) em vez da própria função aleatória (Newland, 1975) correspondente a uma realização do processo estocástico em análise, dado que a função de auto-correlação $R(\tau)$ de uma dada realização $x(t)$, contém informação em frequência idêntica à do sinal original $x(t)$.

Assim, tendo um dado sinal $x(t)$, correspondente a uma realização de um processo estocástico estacionário e ergódico, é usual trabalhar com a respetiva função de auto-correlação $R(\tau)$, em vez de trabalhar diretamente com o sinal original $x(t)$. A função de auto-correlação é transposta para o domínio da frequência, recorrendo à transformada de Fourier, com vista a analisar o conteúdo em frequência de $x(t)$. A transformada de Fourier de uma função de auto-correlação denomina-se auto-espectro e, na prática, para um intervalo de tempo $[0, T]$ (idealmente $T \rightarrow \infty$, mas, na prática, T é sempre finito), obtém-se, recorrendo à regra para cálculo da transformada de Fourier do produto de convolução, a seguinte expressão

$$S(\omega) = \mathcal{F}(R(\tau)) = \frac{1}{T} \mathcal{F}(x(t)) \cdot \overline{\mathcal{F}(x(t))} = \frac{1}{T} X(\omega) \cdot \overline{X(\omega)} \quad (3.33)$$

que é uma função real, de variável real ω (frequência), que quantifica a distribuição em frequência do conteúdo energético de um sinal.

Para o caso de um processo estocástico vetorial do tipo $\underline{x}(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t)]$, como o que se apresentou na Figura 3.4, o conceito anterior de função de auto-correlação é generalizado e surge a denominada matriz de correlação $\underline{R}(\tau)$ em que, na diagonal, surgem funções de auto-correlação e nos termos não diagonais surgem as denominadas funções de correlação-cruzada e, neste caso, seria

$$\underline{R}(\tau) = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}, \quad R_{ij}(\tau) = E[x_i(t) \cdot x_j(t+\tau)] = \frac{1}{T} \int_0^T x_i(t) \cdot x_j(t+\tau) dt \quad (3.34)$$

Mais à frente mostra-se que o problema da identificação modal de uma estrutura sob excitação ambiente corresponde à análise de um processo estocástico vetorial, em que se revela a utilidade das matrizes de correlação e, em particular, das respetivas transformadas de Fourier, designadas matrizes de densidade espectral de potência. Estas matrizes contêm informação de grande interesse para a identificação modal, nomeadamente para a determinação das frequências naturais, amortecimentos modais e configurações modais. Mostra-se também, em detalhe, que os termos não diagonais destas matrizes contêm informação que permite identificar as configurações modais, dado que envolvem informação de pares de registos correspondentes a pontos distintos da estrutura.

A transformada de Fourier da matriz de correlação $\underline{R}(\tau)$ correspondente a um determinado processo estocástico vetorial é, como se referiu, a denominada matriz de densidade espectral de potência do processo a qual é dada pela seguinte expressão

$$\underline{S}(\omega) = \mathcal{F}(\underline{R}(\tau)) = \frac{1}{T} \mathcal{F}(\underline{x}(t)) \cdot \overline{\mathcal{F}}(\underline{x}^T(t)) = \frac{1}{T} \underline{X}(\omega) \cdot \overline{X}^T(\omega) \quad (3.35)$$

em que $\underline{X}(\omega) = \mathcal{F}(\underline{x}(t))$.

Para o caso do processo estocástico vetorial da Figura 3.4, a matriz $\underline{S}(\omega)$ é dada por

$$\underline{S}(\omega) = \frac{1}{T} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \overline{X}_1 & \overline{X}_2 & \overline{X}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{T} \begin{bmatrix} X_1 \overline{X}_1 & X_1 \overline{X}_2 & X_1 \overline{X}_3 \\ X_2 \overline{X}_1 & X_2 \overline{X}_2 & X_2 \overline{X}_3 \\ X_3 \overline{X}_1 & X_3 \overline{X}_2 & X_3 \overline{X}_3 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

Os resultados anteriores apresentam-se esquematicamente, de forma resumida, na Figura 3.6 para o caso de uma barragem abóbada sob excitação ambiente em que se se medem acelerações radiais em três pontos (registos com duração T), com vista à determinação da matriz de densidade espectral de potência de acelerações. Esta matriz espectral (função da frequência) contém informação sobre a estrutura e sobre a excitação. Nomeadamente contém informação sobre os parâmetros modais da estrutura (frequências naturais dos primeiros modos de vibração e as correspondentes configurações e amortecimentos) e informação sobre a distribuição em frequência da energia da excitação (em geral associada a diversas fontes como, por exemplo, o vento ou vibrações induzidas pelo funcionamento de máquinas).

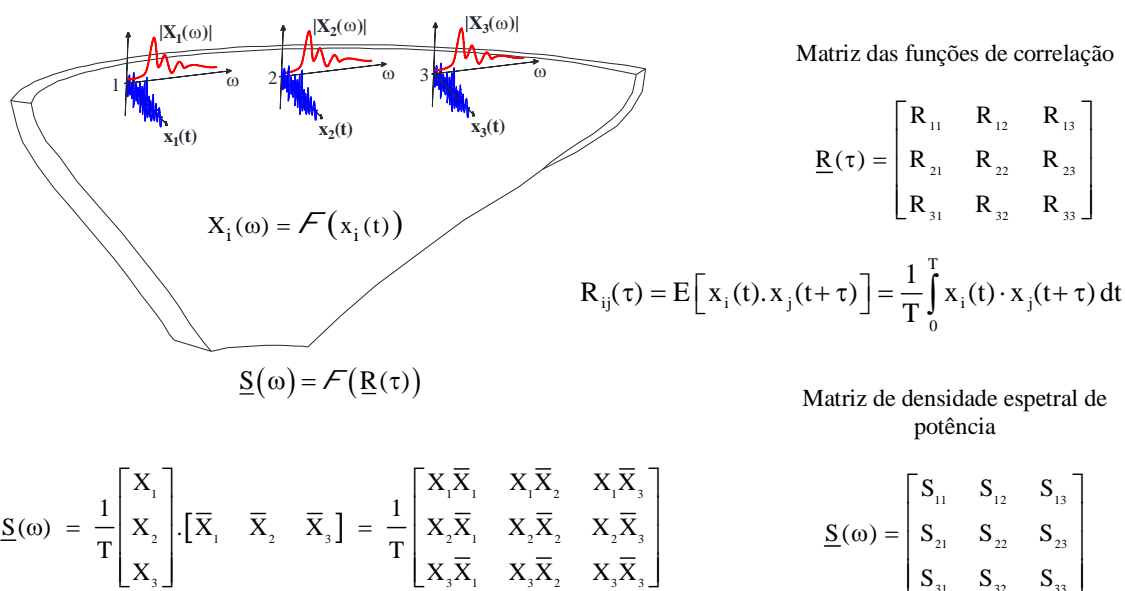


Figura 3.6 - Ensaio de vibração ambiente com medição de acelerações radiais em três pontos. Séries temporais observadas $x_i(t)$, matriz de correlação $\underline{R}(\tau)$ e matriz de densidade espectral de potência $\underline{S}(\omega)$.

3.4.2 Diagonalização da equação de estado para modelos com vários GL

Para se obter a diagonalização da equação (3.31), correspondente à representação de estado do movimento oscilatório de um modelo estrutural discretizado espacialmente, pode ser usada uma transformação de coordenadas semelhante à clássica sobreposição de modos² dada por $\underline{u} = \underline{\Phi} \underline{z}$, mas agora envolvendo a matriz modal $\underline{\Phi}_E$ (denominada matriz modal para a representação de estado ou, simplesmente matriz modal de estado) de dimensão $2N_{GL} \times 2N_{GL}$

$$\underline{\dot{x}} = \underline{\Phi}_E \underline{\dot{z}} \quad (3.37)$$

A matriz modal de estado $\underline{\Phi}_E$ é uma matriz cujas colunas (N_{GL} pares de colunas, um par por cada modo, com valores complexos conjugados) correspondem aos vetores próprios da matriz de estado \underline{A} , sendo $\underline{\Phi}_E = [\underline{\phi}_1 \ \bar{\underline{\phi}}_1 \ \underline{\phi}_2 \ \bar{\underline{\phi}}_2 \ \dots \ \underline{\phi}_{N_{GL}} \ \bar{\underline{\phi}}_{N_{GL}}]$. A determinação de $\underline{\Phi}_E$ envolve, portanto, a resolução do seguinte problema de valores e vetores próprios (dimensão $2N_{GL} \times 2N_{GL}$)

$$\underline{A} \underline{\phi}_E = \lambda_E \underline{\phi}_E \Leftrightarrow [\underline{A} - \lambda_E \underline{I}] \underline{\phi}_E = \underline{0} \quad (3.38)$$

que fornece, para além dos N_{GL} pares de vetores próprios que constituem as colunas da matriz $\underline{\Phi}_E = [\underline{\phi}_{E1} \ \dots \ \underline{\phi}_{En} \ \dots \ \underline{\phi}_{E2N_{GL}}]$, os correspondentes N_{GL} pares conjugados de valores próprios complexos

$$\lambda_n = -\xi_n \omega_n + i \omega_n \sqrt{1 - \xi_n^2} \quad \text{e} \quad \bar{\lambda}_n = -\xi_n \omega_n - i \omega_n \sqrt{1 - \xi_n^2}, \quad n = 1, \dots, N_{GL} \quad (3.39)$$

A partir destes N_{GL} pares de valores próprios da matriz de estado obtêm-se facilmente as frequências modais e os amortecimentos modais

$$\omega_n = |\lambda_n| \quad \text{e} \quad \xi_n = -\text{Re}(\lambda_n) / \omega_n \quad (3.40)$$

É de notar que existem N_{GL} modos de vibração, calculando-se para cada modo n um par de vetores próprios conjugados, $\underline{\phi}_n$ e $\bar{\underline{\phi}}_n$, que poderão descrever modos não estacionários caso a matriz de amortecimento não seja proporcional às matrizes de massa e de rigidez. A representação gráfica

² Os deslocamentos estruturais $\underline{u}(t)$ em cada instante t podem ser escritos como uma combinação linear dos modos (vetores próprios do sistema) ou seja

$$\begin{aligned} \underline{u}(t) &= z_1(t) \underline{\phi}_1 + z_2(t) \underline{\phi}_2 + \dots + z_{N_{GL}}(t) \underline{\phi}_{N_{GL}} \\ \underline{u}(t) &= [\underline{\phi}_1 \ \underline{\phi}_2 \ \dots \ \underline{\phi}_{N_{GL}}] \underline{z}(t) \\ \underline{u}(t) &= \underline{\Phi} \underline{z}(t) \end{aligned}$$

Em que $z_1(t), z_2(t), \dots$ são coeficientes de combinação modal, denominados coordenadas modais.

dos modos de vibração pode ser efetuada, para cada modo n , utilizando a seguinte fórmula envolvendo os respectivos pares conjugados de valores e vetores próprios, associados a cada modo

$$\text{Modo } n = \underline{f}_n e^{\lambda_n t} + \overline{\underline{f}}_n e^{\bar{\lambda}_n t} \quad (3.41)$$

A utilização desta fórmula envolvendo exponenciais complexas conduz ao traçado de ondas sinusoidais amortecidas que descrevem o movimento oscilatório de cada grau de liberdade para o modo n .

Com vista a obter a diagonalização da equação de estado (3.31) efetua-se a substituição $\underline{x} = \underline{\Phi}_E \underline{z}$ e multiplicam-se ambos os membros da equação por $\underline{\Phi}_E^{-1}$ para obter uma forma diagonalizada da equação de estado a qual corresponde a um sistema de $2 \times N_{GL}$ equações diferenciais de 1ª ordem, em coordenadas modais

$$\dot{\underline{z}} = \underline{\lambda}_E \underline{z} + \underline{L}_E \underline{f}_R \quad (3.42)$$

$\underline{z} = \underline{z}(t)$ - Vetor ($2N_{GL} \times 1$) das coordenadas modais de estado (o vetor \underline{z} contém as correspondentes derivadas em ordem ao tempo);

$\underline{\lambda}_E$ - Matriz diagonal ($2N_{GL} \times 2N_{GL}$) com os valores próprios da matriz de estado (matriz de estado diagonalizada).

$\underline{L}_E = \underline{\Phi}_E^{-1} \underline{B}$ - Vetor ($2N_{GL} \times n_I$) dos fatores de participação modal na representação de estado.

Portanto, a equação de estado $\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x} + \underline{B} \underline{f}_R$ pode ser reduzida a um conjunto de $2N_{GL}$ equações diferenciais de 1ª ordem, desacopladas, do tipo

$$\dot{z}_n(t) - \lambda_{E_n} z_n(t) = f_n^*(t) \quad (n = 1, 2, \dots, 2N_{GL}) \quad (3.43)$$

A solução da equação (3.43) pode ser obtida com base na seguinte fórmula recursiva

$$z_n(t_{i+1}) = e^{\lambda_{E_n} \Delta t} z_n(t_i) + \frac{(\Delta t - 1)(e^{\lambda_{E_n} \Delta t} - 1) - \lambda_{E_n}}{\lambda_{E_n} / \Delta t} f_n^*(t_i) + \frac{e^{\lambda_{E_n} \Delta t} + (\Delta t - 1)}{\lambda_{E_n} / \Delta t} f_n^*(t_{i+1}) \quad (3.44)$$

em que Δt corresponde aos incrementos de tempo utilizados para discretizar a variação temporal das forças aplicadas (Figura 3.7).

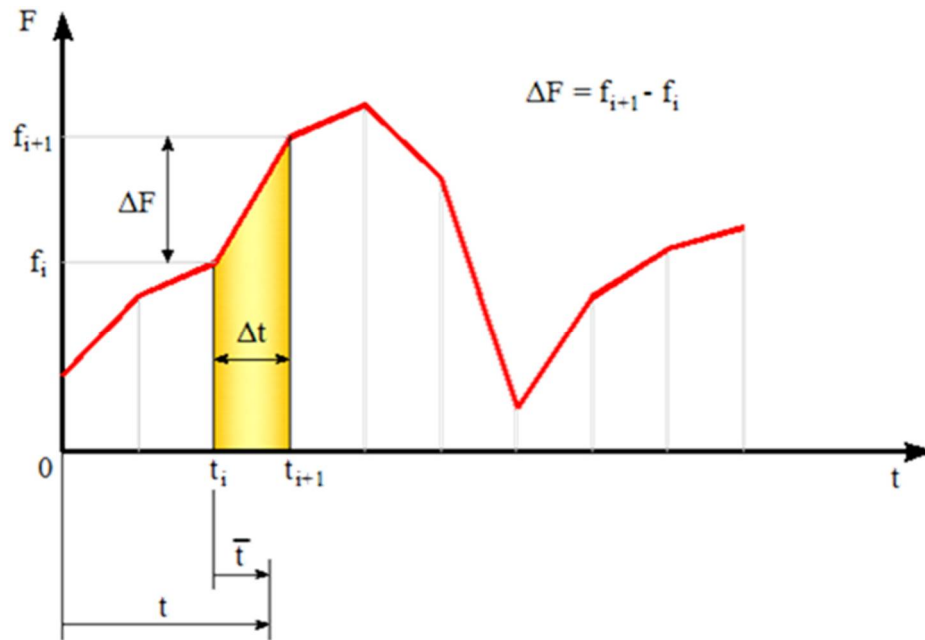


Figura 3.7 – Discretização temporal das forças aplicadas.

3.4.3 Implementação computacional. Programa DynBuildings1.0 (MATLAB)

Por forma a se proceder à análise dinâmica de edifícios de N pisos e posterior geração das histórias “observadas”, do tipo ruído branco, foi elaborado um programa em MATLAB, no âmbito desta dissertação, o qual se denominou de **DynBuildings1.0**. Abaixo encontra-se a descrição do fluxo deste programa.

PROGRAMA DymBuildings1.0

ANÁLISE DINÂMICA DE EDIFÍCIOS DE N PISOS E GERAÇÃO DE HISTÓRIAS SOB EXCITAÇÃO DO TIPO RUÍDO BRANCO

1. DEFINIR AS PROPRIEDADES DO EDIFÍCIO

- 1.1. Número de pisos do edifício.
- 1.2. Rigidez por piso (k_p) e massa por piso (m_p).
- 1.3. Construção das matrizes de rigidez (\underline{k}) e de massa (\underline{m}).
- 1.4. Lei de amortecimento de Rayleigh:
 - a. Definir os coeficientes α e β ;
 - b. Construir a matriz de amortecimento de Rayleigh ($\underline{c} = \alpha\underline{m} + \beta\underline{k}$).
- 1.5. Definir o número de pisos a estudar:
 - a. **Edifício completamente observado:** número de pisos do edifício é o mesmo do número de observações para estudo;
 - b. **Edifício parcialmente observado:** número de pisos para estudo (observados) é diferente e inferior ao número de pisos total do edifício.

2. CARACTERÍSTICAS PARA GERAR FORÇAS DO TIPO RUÍDO BRANCO

- 2.1. Definir o intervalo de tempo (Δt).
- 2.2. Definir o tempo máximo para a geração das histórias (T).
- 2.3. Histórias geradas em função do número de pisos observados.
- 2.4. Construção da matriz de estado do modelo - $\underline{A} = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{I} \\ -\underline{m}^{-1}\underline{k} & -\underline{m}^{-1}\underline{c} \end{bmatrix}$:

3. CÁLCULO DAS CARACTERÍSTICAS DO MODELO

- 3.1. Valores próprios e vetores próprios.
- 3.2. Frequências naturais.
- 3.3. Amortecimentos modais: Gráfico da lei de amortecimento de Rayleigh.
- 3.4. Modos de vibração: Representação gráfica dos modos de vibração.

4. GERAÇÃO DE HISTÓRIAS “OBSERVADAS”

- 4.1. Geração de um acelerograma na base.
 - a. Cálculo da resposta em deslocamentos, velocidades e acelerações.
- 4.2. Representação gráfica:
 - a. Acelerograma gerado na base;
 - b. Resposta em deslocamentos;
 - c. Resposta em velocidades;
 - d. Resposta em acelerações.

5. GRAVAÇÃO DE DADOS PARA FICHEIRO

- 5.1. Grava um ficheiro de dados para cada resposta gerada:
 - a. Deslocamentos; Velocidades; Acelerações.

3.5 Análise de estruturas contínuas. Discretização espacial pelo método dos elementos finitos (MEF)

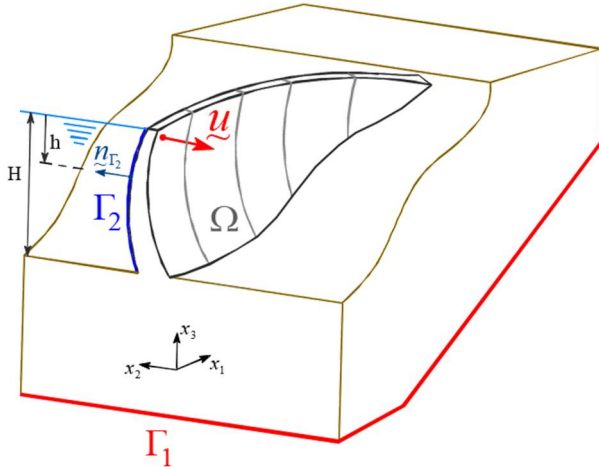
A modelação do comportamento estrutural de barragens sob a ação das diversas solicitações, estáticas e dinâmicas, é efetuada com base nas equações que se apresentam na Figura 3.8a e que conduzem à formulação de um problema de valores de fronteira envolvendo a equação de Navier (Figura 3.8b). A solução numérica deste problema é usualmente obtida com base no método dos elementos finitos (MEF) o que conduz à obtenção de uma equação global de equilíbrio envolvendo as matrizes de massa, de rigidez e de amortecimento para uma dada discretização adotada, como se ilustra esquematicamente na Figura 3.8b.

Neste trabalho foi adotada uma formulação de elementos finitos tridimensionais cúbicos de 20 pontos nodais (Zeinkiewicz, Taylor, & Zhu, 2005), implementada no programa **DynDam1.0** que se encontra descrito em seguida.

Software utilizado: DynDam1.0

Os resultados apresentados neste trabalho referentes à resposta dinâmica da barragem calculada numericamente para ações do tipo ruído branco foram obtidos com o referido programa DynDam1.0, o qual foi desenvolvido em MATLAB, especificamente para análise estática e dinâmica de barragens de betão. Os cálculos dinâmicos são efetuados com base na hipótese de sobreposição modal considerando amortecimento de Rayleigh. Quanto à fundação, o programa permite considerar a hipótese de comportamento elástico e efeitos dinâmicos desprezáveis admitindo a hipótese de massa nula e, desta forma, permite adotar a técnica de condensação da rigidez da fundação ao nível dos graus de liberdade da inserção com vista a aumentar a eficiência computacional. As pressões hidrodinâmicas são consideradas simplificadaamente com base na hipótese de Westergaard que conduz à determinação de uma matriz de massas de água associadas ao paramento de montante (que é adicionada à matriz de massas global).

a) Equações fundamentais da mecânica dos sólidos



$$\underline{\underline{u}} = \begin{bmatrix} u_1(x_1, x_2, x_3, t) \\ u_2(x_1, x_2, x_3, t) \\ u_3(x_1, x_2, x_3, t) \end{bmatrix} \quad (3 \times 1)$$

$$\underline{\underline{\xi}} = \begin{bmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{22} \\ \xi_{33} \\ 2\xi_{23} \\ 2\xi_{31} \\ 2\xi_{12} \end{bmatrix} \quad (6 \times 1)$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad (6 \times 1)$$

Relação deformações-deslocamentos

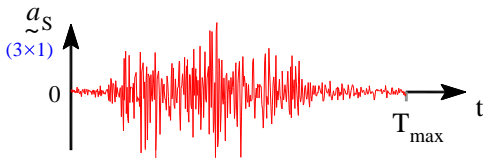
$$\underline{\underline{\xi}} = \underline{\underline{L}} \underline{\underline{u}} \quad (\text{pequenas deformações})$$

Equação constitutiva

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{D}} (\underline{\underline{\xi}} - \underline{\underline{\xi}}_0)$$

Equação de equilíbrio (ações estáticas e dinâmicas)

$$\underline{\underline{L}}^T \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{f}} = \underline{\underline{0}} \quad , \quad \underline{\underline{f}} = m \underline{\underline{g}} - m (\underline{\underline{\ddot{u}}} + \underline{\underline{a}}_s) - \underline{\underline{c}}_a \underline{\underline{\dot{u}}}$$



Matriz de elasticidade (material isotrópico)

$$\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} K_v + \frac{4}{3}G & K_v \frac{2}{3}G & K_v \frac{2}{3}G & 0 \\ \text{sim.} & K_v + \frac{4}{3}G & K_v \frac{2}{3}G & 0 \\ & & K_v + \frac{4}{3}G & 0 \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & G \\ & & & G \\ & & & G \end{bmatrix} \quad (6 \times 6)$$

$$K_v = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Operador diferencial

$$\underline{\underline{L}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \end{bmatrix} \quad (6 \times 3)$$

b) Resolução numérica da equação de Navier pelo método dos elementos finitos

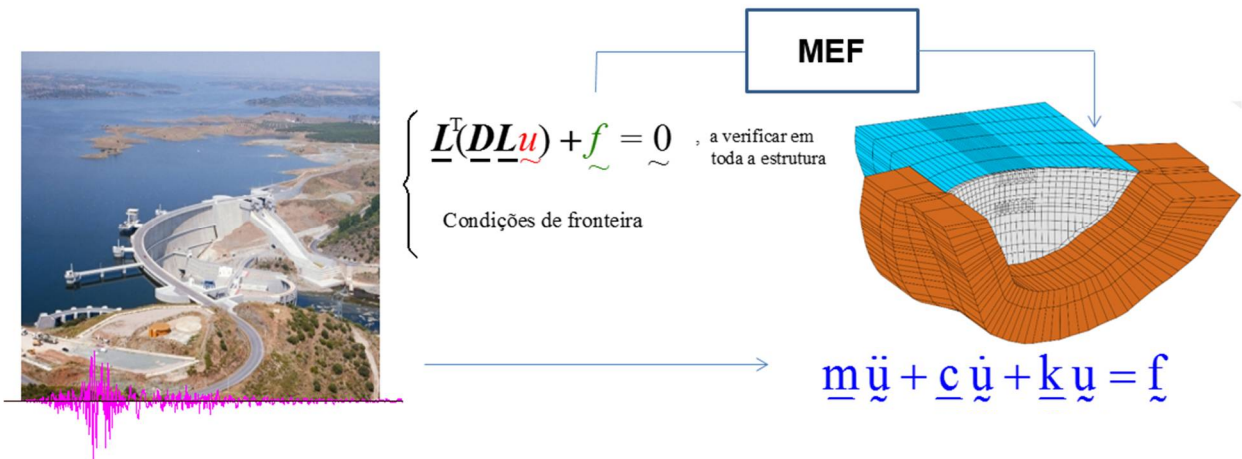


Figura 3.8 – a) Modelação do comportamento de sistemas barragem-fundação-albufera sob ações estáticas e dinâmicas: equações fundamentais. Representação esquemática de uma barragem (Ω) com indicação das fronteiras Γ_1 (em que se impõem deslocamentos nulos e histórias de acelerações sísmicas) e Γ_2 (em que se aplicam tensões normais correspondentes à pressão hidrostática e hidrodinâmica); b) A resolução numérica pelo MEF da equação de Navier conduz à equação de equilíbrio na forma discreta: $\underline{\underline{m}} \underline{\underline{\ddot{u}}} + \underline{\underline{c}} \underline{\underline{\dot{u}}} + \underline{\underline{k}} \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{f}}$.

3.6 Considerações Finais

Neste capítulo apresentaram-se os principais conceitos da dinâmica de estruturas, tendo sido abordados os sistemas de um grau de liberdade e os sistemas com vários graus de liberdade, com o intuito da sua aplicação a ensaios de medição de vibração ambiente.

Nos sistemas com vários graus de liberdade introduziu-se o conceito de identificação modal estocástica, mostrando-se o processo para obter as frequências naturais, amortecimentos modais e modos de vibração. Foi apresentada a implementação computacional do programa desenvolvido em MATLAB, DynBuildings1.0 que permite efetuar o cálculo dinâmico de estruturas simples e gerar histórias de deslocamentos, velocidades e acelerações do tipo ruído branco.

Por fim, foram apresentados os principais aspetos relacionados com o desenvolvimento de modelos numéricos, com o método dos elementos finitos para a análise dinâmica de estruturas contínuas, em particular para o caso de sistemas barragem-fundação-albufeira. Foi abordado o programa DynDam1.0, que permite efetuar o cálculo dinâmico de estruturas, como barragens, através do MEF3D e gerar histórias do tipo ruído branco, de velocidades e acelerações.

4

Métodos de Identificação Modal no Domínio do Tempo

4.1 Considerações iniciais

Em engenharia civil tem vindo a generalizar-se a técnica de medição de vibrações em estruturas, sob excitação ambiente, com vista a obter informação sobre algumas das principais características estruturais, nomeadamente sobre os principais parâmetros modais: frequências naturais, amortecimentos modais e configurações modais, referentes aos modos naturais de vibração mais importantes, geralmente os de frequência mais baixa. Nesta perspetiva, têm vindo a ser desenvolvidos os denominados métodos de identificação modal para aplicações em engenharia civil, que permitem analisar registos temporais de vibrações medidas numa dada estrutura, ou, mais concretamente, num determinado conjunto de pontos dessa estrutura, com vista a estimar alguns dos seus parâmetros modais mais importantes.

Os métodos de identificação modal classificam-se em dois grupos principais:

- i) Métodos de identificação modal no domínio da frequência; e
- ii) Métodos de identificação modal no domínio do tempo.

Os métodos de identificação modal no domínio do tempo ou métodos paramétricos baseiam-se no ajuste de modelos às séries temporais da resposta ou às correspondentes funções de correlação (métodos de uma fase ou de duas fases, respetivamente).

Neste capítulo abordam-se apenas os métodos no domínio do tempo, apresentando-se, em particular, os fundamentos de dois desses métodos:

- i) Método da Máxima Verosimilhança (MMV), aplicado, neste caso, a sistemas completamente observados; este método é apresentado com vista a ilustrar o conceito de identificação modal no domínio do tempo recorrendo a um estimador da matriz de estado do sistema, válido apenas para problemas teóricos envolvendo sistemas estruturais completamente observados, partindo das histórias de deslocamentos e velocidades medidas em todos os graus de liberdade; e
- ii) Método Estocástico de Identificação Modal em Subespaços utilizando funções de Covariância da resposta medida (SSI-Cov, “Covariance-driven, Stochastic Subspace Identification Method”); este método é aplicável a casos reais de sistemas estruturais parcialmente observados, baseando-se geralmente na análise de histórias de acelerações medidas em apenas alguns graus de liberdade do sistema estrutural a identificar.

No que diz respeito a estes dois métodos, MMV e SSI-Cov, apresentam-se os fundamentos teóricos e os detalhes para a respetiva implementação computacional, em que se define o intervalo Δt usado para a discretização no domínio do tempo.

Salienta-se que, ao nível da formulação destes dois métodos, o conceito de matriz de estado (abordado em detalhe no capítulo anterior), é fundamental em ambos. No caso do método MMV o objetivo é estimar a matriz de estado do sistema completamente observado, o que exige, como se referiu atrás, a observação de velocidades e deslocamentos em todos os graus de liberdade. No caso do método SSI-Cov, aplicável a casos reais de sistemas parcialmente observados, é necessário acrescentar a equação de observação em que se explicitam os graus de liberdade observados e qual o tipo de grandezas observadas, deslocamentos, velocidades e/ou acelerações. No método MMV não se considera a equação de observação já que a formulação deste método, no caso da presente dissertação, requer que se observem velocidades e deslocamentos em todos os graus de liberdade do sistema, daí o ser classificado como aplicável a sistemas completamente observados. No entanto, este método pode ser estendido ao caso de sistemas parcialmente observados, sendo necessário, nesse caso, acrescentar a equação de observação e adaptar a formulação (Campillo & Le Gland, 1989).

4.2 Método da Máxima Verosimilhança (MMV). Sistemas completamente observados

A prática da engenharia conduz, em certas situações, a problemas que podem ser formulados recorrendo a modelos de equações diferenciais estocásticas, como é o caso do estudo do comportamento de estruturas sujeitas a ações aleatórias, veja-se por exemplo, (Clough & Penzien, 1982), (Giuliano, Barata, & Casciati, 1984), (S. Serrano, 2001).

Neste contexto, apresenta-se pertinente a estimação de parâmetros nessas equações, com particularidades que não aparecem eventualmente noutras áreas de aplicação.

A modelação de estruturas é realizada de acordo com princípios da mecânica estrutural, considerando-se que esse modelo tem parâmetros desconhecidos, que podem ser estimados com base na observação da resposta da estrutura quando sujeita a ações de índole aleatória.

O modelo linear estocástico de dimensão $2N$, tendo como matriz de deriva a matriz de estado do modelo mecânico estrutural, aparece naturalmente do modelo mecânico estrutural para modelar o comportamento dinâmico de estruturas sujeitas a ações aleatórias. O processo estocástico que resulta do modelo linear estocástico é um processo de difusão habitualmente designado na literatura por processo de Ornstein-Uhlenbeck e foi objeto de investigação por diversos autores, devido essencialmente à sua capacidade para modelar fenómenos físicos (ver (Arató, 1982)).

O problema de estimação de parâmetros do processo de Ornstein-Uhlenbeck através do MMV é abordado nos trabalhos (Arató, Baran, & Ispány, 1999; Arató, Kuki, & Szabó, 1996; Arató & Fegyverneki, 2002).

De facto, o MMV tem sido sugerido na literatura para resolver este tipo de problemas de estimação de parâmetros. Neste sentido, a metodologia de determinação da derivada de Radon-Nikodym para a construção da função de verosimilhança assume particular importância na obtenção dos estimadores, sendo esta a base do método da máxima verosimilhança. Esta técnica de construção da função de verosimilhança está documentada por exemplo em (Arató, 1982), (Basawa & Rao, 1980) e (Lipster & Shiryaev, 1977).

No entanto, somente em (Arató, 1982) e (Lipster & Shiryaev, 1977) é contemplado o caso da derivada de Radon-Nikodym num contexto mais geral numa matriz de deriva degenerada, que corresponde ao caso que interessa nesta dissertação. Esta técnica permite, utilizando pseudo-inversas, construir os estimadores em contextos muito gerais.

É de salientar o trabalho (Prior, 2015) onde o método MMV foi usado para estimar os parâmetros de equações diferenciais estocásticas que modelam o comportamento dinâmico de estruturas sujeitas a ações aleatórias, as propriedades do estimador da matriz de estado foram analisadas e exploradas em estudos computacionais.

4.2.1 Equação de equilíbrio dinâmico. Da formulação clássica à formulação de estado recorrendo a uma equação diferencial estocástica

Para um sistema estrutural de N graus de liberdade com matriz de massa \underline{m} , matriz de rigidez \underline{k} e matriz de amortecimento \underline{c} (matrizes simétricas de ordem N) a equação de equilíbrio dinâmico para forças exteriores aplicadas $\underline{f} = \underline{f}(t)$ é escrita usualmente na forma (3.3)

$$\underline{m} \ddot{\underline{u}} + \underline{c} \dot{\underline{u}} + \underline{k} \underline{u} = \underline{f}$$

correspondente à denominada formulação clássica em deslocamentos $\underline{u} = \underline{u}(t)$.

A correspondente formulação em velocidades e deslocamentos, ou formulação de estado, como referido na secção 3, é representada na forma matricial (3.31)

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x} + \underline{B} \underline{f}_R$$

No caso de a excitação ser do tipo ruído branco, a parcela $\underline{B} \underline{f}_R$ não pode ser considerada explicitamente, sendo usual admitir que pode ser descrita matematicamente como um processo de Wiener³ $\underline{W}(t)$.

Neste caso a formulação de estado é representada na forma matricial

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x} + \underline{\Sigma}^{1/2} \underline{W} \quad (4.1)$$

sendo \underline{A} a matriz de estado, $\underline{\Sigma}^{1/2} = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{\sigma}^{1/2} \end{bmatrix}$ onde $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}^{1/2} \underline{\sigma}^{1/2T}$ é uma matriz simétrica definida positiva de ordem N_{GL} , e \underline{W} é um processo de Wiener de dimensão $2 N_{GL}$.

³ $\underline{W}(t)$ representa um processo Wiener ou movimento Browniano: é um processo estocástico vetorial de dimensão $2 N_{GL}$, sendo, como referido na secção 3.4.1, $\underline{W}(t) = (W_1(t), W_2(t), \dots, W_{2N_{GL}}(t))^T$, em que $W_n(t)$, $n = 1, \dots, 2N_{GL}$, representa um processo de Wiener escalar, ou seja, um processo estocástico Gaussiano, estacionário, de média nula.

Na forma diferencial obtém-se a equação diferencial estocástica

$$d\mathbf{x} = \underline{\mathbf{A}} \mathbf{x} dt + \underline{\Sigma}^{1/2} d\mathbf{W} \quad (4.2)$$

4.2.2 Descrição do Método da Máxima Verosimilhança

Considera-se a equação diferencial estocástica (4.2) sendo a sua solução $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ um processo estocástico em $\mathbb{R}^{2N_{GL}}$ e $\mathbf{W} = \mathbf{W}(t)$ um processo de Wiener com valores em $\mathbb{R}^{2N_{GL}}$, as matrizes $\underline{\mathbf{A}}$ e $\underline{\Sigma}^{1/2}$ são definidas por,

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{I}} \\ -\underline{\mathbf{m}}^{-1}\underline{\mathbf{k}} & -\underline{\mathbf{m}}^{-1}\underline{\mathbf{c}} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{\Sigma}^{1/2} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{0}} & \underline{\sigma}^{1/2} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

sendo $\underline{\sigma}^{1/2}$, $\underline{\mathbf{m}}$, $\underline{\mathbf{k}}$, e $\underline{\mathbf{c}}$ matrizes reais, quadradas de ordem N_{GL} , sendo $\underline{\sigma}$ uma matriz definida positiva e $\underline{\mathbf{m}}$ uma matriz invertível, supõe-se que os valores próprios da matriz $\underline{\mathbf{A}}$ são complexos com parte real negativa e os processos de Wiener $W_n(t)$, $n = 1, \dots, 2N_{GL}$, independentes.

Considere-se ainda a condição inicial dada por um vetor \mathbf{x}_0 conhecido em $\mathbb{R}^{2N_{GL}}$. Admite-se que o processo $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ é observado no intervalo $[0, T]$, sem perda de generalidade.

O objetivo é estimar a matriz de estado $\underline{\mathbf{A}}$, ou matriz de deriva, no instante T com base nas observações do processo $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, em tempo contínuo, no intervalo de tempo $[0, T]$.

4.2.2.1 Estimador de máxima verosimilhança

O estimador da matriz de estado $\underline{\mathbf{A}}$, denominado estimador da máxima verosimilhança (EMV) de $\underline{\mathbf{A}}$, obtém-se maximizando a função de log-verosimilhança, que, no caso das equações diferenciais estocásticas (EDEs) é construída a partir da derivada de Radon-Nikodym da medida gerada pelo processo $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ com respeito à medida de Wiener (Basawa & Rao, 1980). A derivada de Radon-Nikodym da medida gerada pelo processo $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ com respeito à medida de Wiener é dada por (ver (Lipster & Shiryaev, 1977)):

$$\frac{dP_{\mathbf{x}}}{dP_{\mathbf{W}}}(\mathbf{x}) = \exp \left(\text{tr} \left(\underline{\Sigma}^{\dagger} \underline{\mathbf{A}} \int_0^T \mathbf{x} d\mathbf{x}^{\top} - \frac{1}{2} \underline{\mathbf{A}}^{\top} \underline{\Sigma}^{\dagger} \underline{\mathbf{A}} \int_0^T \mathbf{x} \mathbf{x}^{\top} dt \right) \right) \quad (4.4)$$

sendo a função de log-verosimilhança

$$L(\underline{A}) = \ln \left(\frac{dP_{\underline{x}}(\underline{x})}{dP_{\underline{y}}(\underline{z})} \right) \quad (4.5)$$

ou seja

$$L(\underline{A}) = \text{tr} \left(\underline{\Sigma}^\dagger \underline{A} \int_0^T \underline{x} d\underline{x}^\top - \frac{1}{2} \underline{A}^\top \underline{\Sigma}^\dagger \underline{A} \int_0^T \underline{x} \underline{x}^\top dt \right) \quad (4.6)$$

O EMV de \underline{A} é obtido maximizando a função de log-verosimilhança (4.5), assim, resolvendo o sistema de equações,

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial a_{ij}} = 0 & , \quad i, j = N+1, \dots, 2N \end{cases} \quad (4.7)$$

obtém-se o estimador de máxima verosimilhança da matriz de estado \underline{A} ,

$$\hat{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{I} \\ -\widehat{\underline{m}^{-1}\underline{k}} & -\widehat{\underline{m}^{-1}\underline{c}} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Estimador de máxima verosimilhança para o caso $N_{GL} = 1$

Em seguida apresenta-se o EMV para o caso $N_{GL} = 1$ (modelo com matriz de estado de dimensão

2) com vista a facilitar a compreensão do método. Neste caso, $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, em que $x_1 = x_1(t)$

corresponde à história de deslocamentos e $x_2 = x_2(t)$ corresponde à história de velocidades.

Assim, neste caso, o modelo tem como matriz de deriva e matriz de difusão, respetivamente, as seguintes matrizes de ordem 2,

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \quad e \quad \underline{\Sigma}^{1/2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma^{1/2} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

A função de log-verosimilhança envolve a inversa da matriz $\underline{\Sigma} = \underline{\Sigma}^{1/2} \underline{\Sigma}^{1/2\top} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix}$, que devido à

particularidade de $\underline{\Sigma}$ ser uma matriz degenerada, será usada uma pseudo-inversa de $\underline{\Sigma}$, mais especificamente a inversa generalizada de Moore-Penrose que tem a importante propriedade de

ser única, a pseudo-inversa da matriz $\underline{\Sigma}$ é a matriz $\underline{\Sigma}^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/\sigma \end{bmatrix}$.

A proposição 1 estabelece a expressão do EMV, que daqui se deduz.

Proposição 1 O estimador da máxima verosimilhança para $\theta = \begin{bmatrix} -k/m \\ -c/m \end{bmatrix}$ é

$$\hat{\theta}_T = \begin{bmatrix} -\widehat{k/m} \\ -\widehat{c/m} \end{bmatrix} = \left(\int_0^T \underline{x} \underline{x}^T dt \right)^{-1} \cdot \left(\int_0^T \underline{x} dx_2 \right) \quad (4.10)$$

Demonstração:

Atendendo à expressão (4.6) da derivada de Radon-Nikodym, a função de log-verosimilhança

$L(k, c) = \ln \left(\frac{dP_x}{dP_w}(\underline{x}) \right)$, para o caso $N=1$ é dada por

$$L(k, c) = -\frac{k}{m\sigma} \int_0^T x_1 dx_2 - \frac{c}{m\sigma} \int_0^T x_2 dx_2 - \frac{1}{2m^2\sigma} \left(k^2 \int_0^T x_1^2 dt + 2ck \int_0^T x_1 x_2 dt + c^2 \int_0^T x_2^2 dt \right) \quad (4.11)$$

Como é bem conhecido, para determinar o estimador de máxima verosimilhança de θ há que resolver o sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial k} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial c} = 0 \end{cases} \quad (4.12)$$

Neste caso trata-se do sistema

$$\begin{cases} -\frac{1}{m\sigma} \int_0^T x_1 dx_2 - \frac{k}{m^2\sigma} \int_0^T x_1^2 dt - \frac{c}{m^2\sigma} \int_0^T x_1 x_2 dt = 0 \\ -\frac{1}{m\sigma} \int_0^T x_2 dx_2 - \frac{k}{m^2\sigma} \int_0^T x_1 x_2 dt - \frac{c}{m^2\sigma} \int_0^T x_2^2 dt = 0 \end{cases} \quad (4.13)$$

sendo equivalente ao sistema,

$$\begin{cases} m \int_0^T x_1 dx_2 + k \int_0^T x_1^2 dt + c \int_0^T x_1 x_2 dt = 0 \\ m \int_0^T x_2 dx_2 + k \int_0^T x_1 x_2 dt + c \int_0^T x_2^2 dt = 0 \end{cases} \quad (4.14)$$

Que se pode escrever na seguinte forma matricial,

$$\begin{bmatrix} \int_0^T x_1^2 dt & \int_0^T x_1 x_2 dt \\ \int_0^T x_1 x_2 dt & \int_0^T x_2^2 dt \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{k}{m} \\ \frac{c}{m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_0^T x_1 dx_2 \\ \int_0^T x_2 dx_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Donde se obtém a pretendida expressão do EMV para o caso N=1,

$$\begin{bmatrix} -\widehat{k/m} \\ -\widehat{c/m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^T x_1^2 dt & \int_0^T x_1 x_2 dt \\ \int_0^T x_1 x_2 dt & \int_0^T x_2^2 dt \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \int_0^T x_1 dx_2 \\ \int_0^T x_2 dx_2 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

ou seja,

$$\hat{\theta}_T = \left(\int_0^T \underline{x} \underline{x}^T dt \right)^{-1} \cdot \int_0^T \underline{x} dx_2 \quad (4.17)$$

o que conclui a demonstração.

Após esta breve exposição ao método da máxima verosimilhança em dimensão 2 é mais fácil compreender o estudo seguinte em dimensão $2 N_{GL}$, com $N_{GL} > 1$.

Estimador de máxima verosimilhança para o caso geral, $N_{GL} > 1$

Como referido, o EMV associado ao modelo em análise é obtido por maximização da função log-verosimilhança (4.6). Repetindo o raciocínio utilizado na demonstração da Proposição 1, obtém-se o EMV associado ao modelo em análise resolvendo o sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial a_{N_{GL}+1}} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial a_{N_{GL}+2}} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial a_{2N_{GL}}} = 0 \end{array} \right. \quad (4.18)$$

que envolve as derivadas parciais da função de log-verosimilhança em ordem às entradas a_{ij} do bloco inferior da matriz de estado $\underline{\hat{A}}$ que se denota por $\underline{\hat{A}}_{N_{GL}+1:2N_{GL}} = \begin{bmatrix} -\underline{\hat{m}}^{-1}\underline{\hat{k}} & -\underline{\hat{m}}^{-1}\underline{\hat{c}} \end{bmatrix}$.

Da resolução do anterior sistema obtém-se o pretendido estimador de $\underline{\hat{A}}$ na forma

$$\underline{\hat{A}} = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{I} \\ \underline{\hat{A}}_{N_{GL}+1:2N_{GL}} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

em que

$$\underline{\hat{A}}_{N_{GL}+1:2N_{GL}} = \left(\int_0^T \underline{\hat{x}} d(\underline{x}_{N_{GL}+1} \quad \underline{x}_{N_{GL}+2} \quad \dots \quad \underline{x}_{2N_{GL}}) \right)^T \left(\int_0^T \underline{\hat{x}} \underline{\hat{x}}^T dt \right)^{-1} \quad (4.20)$$

é o estimador do bloco inferior da matriz de estado, o qual pode também ser escrito na forma seguinte

$$\begin{bmatrix} \widehat{-\underline{\hat{m}}^{-1}\underline{\hat{k}}} \\ \widehat{-\underline{\hat{m}}^{-1}\underline{\hat{c}}} \end{bmatrix} = \left(\int_0^T \underline{\hat{x}} \underline{\hat{x}}^T dt \right)^{-1} \cdot \int_0^T \underline{\hat{x}} d(\underline{x}_{N_{GL}+1} \quad \underline{x}_{N_{GL}+2} \quad \dots \quad \underline{x}_{2N_{GL}}) \quad (4.21)$$

O estimador de máxima verosimilhança tem importantes propriedades, sendo de salientar a centricidade, ou seja, o valor esperado do estimador da matriz de estado é a matriz de estado, $E[\underline{\hat{A}}] = \underline{A}$.

Para uma melhor compreensão e análise das propriedades do estimador de máxima verosimilhança, refere-se o trabalho (Prior, Kleptsyna, & Milheiro-Oliveira, 2017).

4.2.3 Implementação Computacional do MMV. Programa ModID_MLM1.0 (MATLAB)

Para que o estimador da máxima verosimilhança possa ser implementado computacionalmente, em MATLAB, utiliza-se a seguinte discretização dos integrais definidos na expressão (4.21).

$$\int_{i\Delta t}^{j\Delta t} x_r^2 dt \cong \sum_{n=i}^{j-1} \Delta t x_r^2(t_n) \quad , \quad r = 1, \dots, 2N_{GL} \quad (4.22)$$

$$\int_{i\Delta t}^{j\Delta t} x_r dx_s \cong \sum_{n=i}^{j-1} \Delta t x_r(t_n) (x_s(t_n) - x_s(t_{n-1})) \quad , \quad r = 1, \dots, 2N_{GL} \quad , \quad s = N_{GL} + 1, \dots, 2N_{GL} \quad , r \neq s \quad (4.23)$$

$$\int_{i\Delta t}^{j\Delta t} x_s dx_s \cong \frac{1}{2} \sum_{n=i}^{j-1} (x_s^2(t_n) - x_s^2(t_{n-1}) - \sigma \Delta t) \quad , \quad s = N_{GL} + 1, \dots, 2N_{GL} \quad (4.24)$$

$$\int_{i\Delta t}^{j\Delta t} x_r x_s dt \cong \sum_{n=i}^{j-1} \Delta t x_r(t_n) x_s(t_n) \quad , \quad r, s = 1, \dots, 2N_{GL} \quad (4.25)$$

Por fim é de referir que a implementação computacional do estimador permite determinar a estimativa da matriz de estado, cujos valores e vetores próprios correspondem à estimativa das frequências naturais da estrutura, amortecimentos modais e configurações modais.

Por forma a se proceder à análise modal segundo o MMV, foi elaborado um programa em MATLAB, no âmbito desta dissertação, o qual se denominou de **ModID_MLD1.0**. Abaixo encontra-se a descrição do fluxo deste programa.

PROGRAMA ModID_MLM1.0

ANÁLISE MODAL SEGUNDO O MÉTODO DA MÁXIMA VEROSIMILHANÇA

1. DEFINIR DADOS PARA “INPUT” DO PROGRAMA

- 1.1. O “*input*” é o ficheiro de histórias do tipo ruído branco em velocidades e deslocamentos, gravado e gerado pelo programa **DynBuildings1.0**.
- 1.2. Definir o número de testes a realizar:
 - a. Calcula o número de vezes que se definir e faz a média dos testes/simulações.

2. CÁLCULO AO LONGO DO TEMPO

- 2.1. Cálculo da matriz de estado estimada pelo MMV (das médias dos valores obtidos pelas simulações).
- 2.2. Obtenção das características modais a partir da matriz de estado estimada:
 - a. Frequências;
 - b. Amortecimentos.

3. REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS

- 3.1. Representação gráfica da convergência (com os valores médios do total de simulações realizadas):
 - a. Gráfico da convergência para as frequências;
 - b. Gráfico da convergência para os amortecimentos.
- 3.2. Representação gráfica dos modos de vibração com base nos valores da matriz de estado estimada.

4.3 Método Stochastic Subspace Identification-Covariance (SSI-Cov). Sistemas parcialmente observados

Os métodos de identificação modal no domínio do tempo ou métodos paramétricos, baseiam-se no ajuste de modelos às séries temporais da resposta ou às funções de correlação, encontrando-se por essa razão subdivididos em métodos de uma e de duas fases, respetivamente.

Nos métodos de uma fase procede-se diretamente ao ajuste de modelos às séries temporais da resposta, enquanto nos métodos de duas fases, em primeiro lugar obtém-se uma estimativa das

funções de correlação da resposta (1ª fase) e só numa segunda fase é que se procede ao ajuste de modelos às funções de correlação, com vista à identificação das características dinâmicas dos sistemas estruturais.

Estes métodos derivam da formulação no espaço de estados, na qual é necessário introduzir a designada equação da observação, desenvolvendo-se estes métodos a partir deste par de equações, em que o objetivo se centra na obtenção de uma matriz de estado a partir da qual se identificam os parâmetros modais das estruturas.

Importa salientar que, no desenvolvimento destes métodos, é muito importante a forma como se organizam, quer as séries temporais da resposta, quer as funções de correlação, pois a aplicação das metodologias de ajuste depende desta organização.

Assim, nesta secção apresentam-se os principais fundamentos dos métodos de identificação modal no domínio do tempo, começando pela introdução da equação de observação na formulação de estado, passando pela resolução e representação da equação diferencial de estado no tempo discreto recorrendo a uma fórmula recursiva em que as forças são discretizadas por troços constantes. Seguidamente, apresenta-se a formulação base para modelos de identificação determinísticos baseados na aplicação de forças determinísticas (Juang & Papa, 1985), da qual derivou a formulação base dos modelos de identificação modal estocásticos, desenvolvidos a partir das funções de correlação (métodos de duas fases) obtidas a partir da resposta das estruturas sujeitas a excitação do tipo ruído branco. Finalmente, apresentam-se os fundamentos dos denominados modelos estocásticos desenvolvidos a partir das séries temporais (métodos de uma fase) observadas num dado número de pontos da estrutura (modelos estocásticos parcialmente observados).

4.3.1 Formulação do problema introduzindo a equação de observação

Na perspetiva da identificação dinâmica de estruturas, o objetivo é determinar as características dinâmicas do sistema estrutural (nomeadamente, os seus principais parâmetros modais) através da medição da resposta $\underline{y} = \underline{y}(t)$ (vibrações) induzida por ações dinâmicas, que, podem ser conhecidas de forma determinística (aplicação de forças impulsivas, p.ex.) ou, como é mais usual, apenas em termos estatísticos (ou estocásticos).

Assim, quando o objetivo é a identificação dinâmica de estruturas, o problema deve ser estabelecido matematicamente com base na equação diferencial da dinâmica correspondente a um dado modelo estrutural, associado a uma dada discretização espacial (com N_{GL} graus de liberdade), e com base na denominada equação de observação que relaciona os diversos tipos de registos

observados (acelerações, velocidades ou deslocamentos) com as incógnitas principais do modelo $\underline{u} = \underline{u}(t)$, e suas derivadas em ordem ao tempo. A localização dos graus de liberdade de observação é dada pelas matrizes \underline{C}_a , \underline{C}_v e \underline{C}_d , que, permitem correlacionar os registos observados com os deslocamentos, velocidades e acelerações em todos os graus de liberdade do modelo discretizado espacialmente (admite-se que, num dado grau de liberdade de observação, só se observa a história de uma das três possíveis grandezas observáveis: ou deslocamento, ou velocidade ou aceleração)

$$\begin{cases} \underline{m} \ddot{\underline{u}} + \underline{c} \dot{\underline{u}} + \underline{k} \underline{u} = \underline{s} \underline{f} \\ \underline{y} = \underline{C}_a \ddot{\underline{u}} + \underline{C}_v \dot{\underline{u}} + \underline{C}_d \underline{u} \end{cases} \quad (4.26)$$

em que

- $\underline{y} = \underline{y}(t)$ – Vetor ($n_o \times 1$) com as n_o histórias observadas (“outputs”) nos vários sensores instalados (histórias de aceleração, velocidade e/ou deslocamento);
- \underline{C}_a – Matriz ($n_o \times N_{GL}$) envolvendo valores nulos e unitários indicando os graus de liberdade em que são medidas acelerações (instrumentados com acelerómetros);
- \underline{C}_v – Matriz ($n_o \times N_{GL}$) envolvendo valores nulos e unitários indicando os graus de liberdade em que são medidas velocidades (transdutores de velocidade);
- \underline{C}_d – Matriz ($n_o \times N_{GL}$) envolvendo valores nulos e unitários indicando os graus de liberdade em que são medidos deslocamentos (transdutores de deslocamento).

A representação de estado do anterior sistema (que é a base das técnicas de identificação modal de estruturas no domínio do tempo) assume a forma genérica seguinte

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\underline{u}} \\ \dot{\underline{y}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{I} \\ -\underline{m}^{-1}\underline{k} & -\underline{m}^{-1}\underline{c} \end{bmatrix}}_{(n \times n), n=2N_{GL}} \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{m}^{-1}\underline{s} \end{bmatrix} \underline{f} \\ \underline{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{C}_a \end{bmatrix}}_{(n_o \times n)} \begin{bmatrix} \dot{\underline{u}} \\ \dot{\underline{y}} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{C}_d & \underline{C}_v \end{bmatrix}}_{(n_o \times n)} \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{y} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (4.27)$$

na qual surge a conhecida matriz de estado \underline{A} cuja dimensão é $n \times n$, sendo $n = 2N_{GL}$ quando se pressupõe um modelo estrutural baseado numa discretização com N_{GL} graus de liberdade (assim, o número de elementos do vetor de estado \underline{X} é $n = 2N_{GL}$).

Escrevendo a segunda equação apenas em termos das variáveis de estado (substituindo a primeira na segunda equação) obtém-se

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{\underline{u}} \\ \dot{\underline{y}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{I} \\ -\underline{m}^{-1}\underline{k} & -\underline{m}^{-1}\underline{c} \end{bmatrix}}_{(n \times n), n=2N_{GL}} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{y} \end{bmatrix}}_{(n \times 1)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{m}^{-1}\underline{s} \end{bmatrix}}_{(n \times n_1)} \underbrace{\underline{f}}_{(n_1 \times 1)} \\ \underline{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{C}_d - \underline{C}_a \underline{m}^{-1} \underline{k} & \underline{C}_v - \underline{C}_a \underline{m}^{-1} \underline{c} \end{bmatrix}}_{(n_o \times n)} \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{y} \end{bmatrix} + \underbrace{\underline{C}_a \underline{m}^{-1} \underline{s}}_{(n_o \times n_1)} \underbrace{\underline{f}}_{(n_1 \times 1)} \end{array} \right. \quad (4.28)$$

ou, de forma mais compacta,

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x} + \underline{B} \underline{f} \\ \underline{y} = \underline{C} \underline{x} + \underline{D} \underline{f} \end{array} \right. \quad (4.29)$$

em que

$\underline{C} = \begin{bmatrix} \underline{C}_d - \underline{C}_a \underline{m}^{-1} \underline{k} & \underline{C}_v - \underline{C}_a \underline{m}^{-1} \underline{c} \end{bmatrix}$ – Matriz ($n_o \times n$) que relaciona o vetor de estado com as histórias observadas;

$\underline{D} = \underline{C}_a \underline{m}^{-1} \underline{s}$ – Matriz ($n_o \times n_1$) que relaciona as histórias de forças aplicadas (entradas ou “inputs”) com as histórias observadas (saídas ou “outputs”) e \underline{A} e \underline{B} dadas por (3.31).

Nos desenvolvimentos seguintes é importante ter em conta que, como se mostrou anteriormente, a identificação das principais características modais de uma estrutura (identificação modal), pode ser entendida matematicamente como um problema de determinação de valores e vetores próprios de uma matriz de estado definida com base num dado modelo estrutural, espacialmente discreto construído de forma a representar adequadamente o comportamento dinâmico da estrutura. Sob o ponto de vista da análise dos dados obtidos através de ensaios é importante ter em conta que o número de graus de liberdade em que se colocam os sensores é, geralmente, muito inferior ao número de graus de liberdade da discretização adotada nos modelos estruturais (identificação modal baseada nos denominados modelos parciais).

Representação modal no espaço de estados

A representação do sistema (4.29) em coordenadas modais obtém-se recorrendo à já referida transformação

$$\underline{\tilde{x}} = \underline{\Phi}_E \underline{z} \quad (4.30)$$

ficando

$$\begin{cases} \underline{\Phi}_E \dot{\underline{z}} = \underline{A} \underline{\Phi}_E \underline{z} + \underline{B} \underline{f} \\ \underline{y} = \underline{C} \underline{\Phi}_E \underline{z} + \underline{D} \underline{f} \end{cases} \quad (4.31)$$

Multiplicando a primeira equação, à esquerda, por $\underline{\Phi}_E^{-1}$ obtém-se

$$\begin{cases} \dot{\underline{z}} = \underline{\Phi}_E^{-1} \underline{A} \underline{\Phi}_E \underline{z} + \underline{\Phi}_E^{-1} \underline{B} \underline{f} \\ \underline{y} = \underline{C} \underline{\Phi}_E \underline{z} + \underline{D} \underline{f} \end{cases} \quad (4.32)$$

ou de forma mais compacta

$$\begin{cases} \dot{\underline{z}} = \underline{\lambda} \underline{z} + \underline{L} \underline{f} \\ \underline{y} = \underline{V} \underline{z} + \underline{D} \underline{f} \end{cases} \quad (4.33)$$

em que surge a nova matriz \underline{V} que relaciona as coordenadas modais de estado com as observações

$$\underline{V} = \underline{C} \underline{\Phi}_E \quad (4.34)$$

$\underline{V} = \underline{C} \underline{\Phi}_E$ – Matriz de resposta modal ($n_o \times n$); contém as configurações modais expressas em termos das componentes segundo os graus de liberdade observados.

4.3.2 Resolução da equação diferencial de estado. Representação no tempo discreto

Como foi referido, os métodos de identificação modal no domínio do tempo baseiam-se em formulações matemáticas que se apoiam na representação de estado do denominado problema da identificação dinâmica de estruturas, que envolve, na prática, como se mostrou atrás, uma equação diferencial matricial (equação de estado que descreve o comportamento dinâmico de uma estrutura, para uma dada discretização espacial) e uma equação algébrica (equação de observação), sistema (4.29).

Estes métodos baseiam-se na determinação dos valores e vetores próprios da matriz de estado (o que corresponde a determinar as frequências, os amortecimentos e as configurações modais) ou, mais concretamente, da matriz de transmissibilidade de estado \underline{A} que, como se verá mais à frente, resulta diretamente da resolução da equação diferencial (4.29) (admitindo uma discretização temporal em intervalos iguais, de comprimento Δt , coincidente com o intervalo de amostragem das séries temporais observadas) relacionando-se com a matriz de estado \underline{A} através da operação de exponenciação.

Assim, ao contrário dos métodos de identificação dinâmica no domínio da frequência, nos métodos de identificação dinâmica no domínio do tempo é necessário proceder à identificação da referida matriz de transmissibilidade de estado, também conhecida como matriz de estado no tempo discreto, a partir das séries temporais da resposta dinâmica medida em alguns pontos da estrutura (criteriosamente seleccionados). A determinação da matriz de transmissibilidade de estado \underline{A} consegue-se com base no estabelecimento de modelos paramétricos cujo ajuste às séries temporais observadas ou às correspondentes funções de correlação corresponde a determinar os coeficientes da pretendida matriz de estado no tempo discreto. Em geral, como se verá, experimentam-se modelos paramétricos de diferentes ordens e analisa-se a estabilidade das soluções à medida que se aumenta o número de parâmetros do modelo (ordem do modelo), é usual recorrer a representações gráficas dos resultados para modelos de diferente ordem denominadas de diagramas de estabilização.

Modelo no espaço de estados considerando a discretização do tempo em intervalos iguais

Para se avançar no sentido da obtenção de um modelo de identificação modal verdadeiramente útil do ponto de vista da identificação modal de estruturas é fundamental obter a solução da equação diferencial (4.29) e exprimi-la com base numa fórmula recursiva, que permita obter o estado do sistema $\underline{x}(t_{i+1})$ num qualquer instante t_{i+1} a partir do estado no instante anterior t_i . Para histórias de forças (“inputs”) discretizadas por troços lineares ou por troços constantes, considerando intervalos de tempo iguais, de comprimento Δt , é possível obter analiticamente a pretendida fórmula recursiva.

Usualmente, na formulação dos modelos de identificação modal considera-se aceitável a hipótese de discretização da força em troços constantes (Figura 4.1) definidos em intervalos de tempo idênticos aos escolhidos para registar a resposta estrutural.

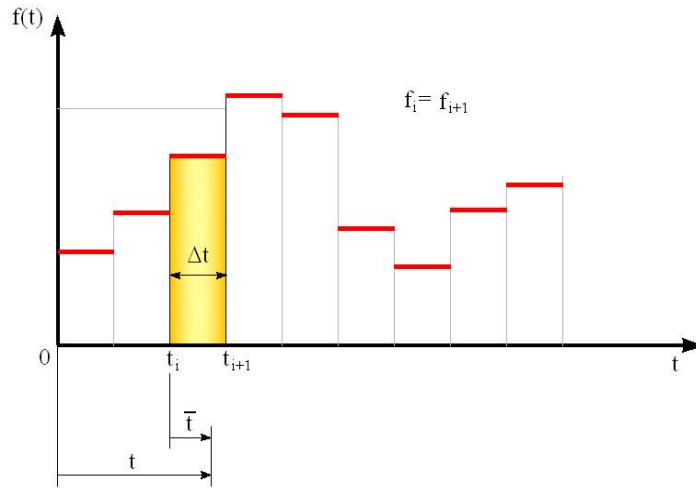


Figura 4.1 – Representação de uma história de carga $f(t)$ definida por troços constantes.

Considerando que a equação diferencial (de 1ª ordem) (4.29) pode ser resolvida independentemente para cada um dos intervalos da discretização desde que as condições iniciais (deslocamento e velocidade) de um dado intervalo correspondam às condições finais do intervalo anterior o problema reduz-se a obter a solução para um intervalo Δt genérico definido entre t_i e t_{i+1} , com base numa variável \bar{t} tal que:

$$0 \leq \bar{t} = t - t_i \leq \Delta t \quad (4.35)$$

Assim, para cada intervalo $[t_i, t_{i+1}]$, de comprimento Δt , a equação diferencial a resolver pode ser escrita da seguinte forma

$$\dot{\underline{x}}(\bar{t}) = \underline{A} \underline{x}(\bar{t}) + \underline{B} \underline{f}(\bar{t}) \quad , \quad 0 \leq \bar{t} \leq \Delta t$$

$$\text{Condição inicial: } \underline{x}(\bar{t}=0) = \underline{x}_i \quad (4.36)$$

à qual corresponde a seguinte solução particular para a condição inicial estabelecida no início do intervalo (Juang & Phang, 2001)

$$\underline{x}(\bar{t}) = e^{\underline{A}\bar{t}} \underline{x}(t_i) + \int_0^{\bar{t}} e^{\underline{A}(\bar{t}-\tau)} \underline{B} \underline{f}(\tau) d\tau \quad (4.37)$$

efetuando a integração, tendo em conta que a força $\underline{f}(\bar{t})$ neste intervalo é constante, fica

$$\underline{x}(\bar{t}) = e^{\underline{A}\bar{t}} \underline{x}(t_i) + (e^{\underline{A}\bar{t}} - \underline{I}) \underline{A}^{-1} \underline{B} \underline{f}(\bar{t}) \quad (4.38)$$

Assim, no final do intervalo, onde $\bar{t} = \Delta t$, pode-se escrever

$$\underline{\tilde{x}}(t_{i+1}) = \underbrace{e^{\underline{A}\Delta t}}_{\underline{A}} \underline{\tilde{x}}(t_i) + \left(\underbrace{e^{\underline{A}\Delta t}}_{\underline{A}} - \underline{I} \right) \underline{A}^{-1} \underline{B} \underline{\tilde{f}}(t_i) \quad (4.39)$$

ou, finalmente, a pretendida fórmula recursiva

$$\underline{\tilde{x}}(t_{i+1}) = \underline{A} \underline{\tilde{x}}(t_i) + \underbrace{(\underline{A} - \underline{I})\underline{A}^{-1}\underline{B}}_{\underline{B}} \underline{\tilde{f}}(t_i) \quad (4.40)$$

Acrescentando a equação de observação pode-se escrever, por fim, a denominada representação de estado do problema da identificação dinâmica de estruturas em termos de uma fórmula recursiva (para força constante por intervalos), ou, abreviadamente, representação de estado no tempo discreto

$$\begin{cases} \underline{\tilde{x}}(t_{i+1}) = \underline{A} \underline{\tilde{x}}(t_i) + \underline{B} \underline{\tilde{f}}(t_i) \\ \underline{\tilde{y}}(t_i) = \underline{C} \underline{\tilde{x}}(t_i) + \underline{D} \underline{\tilde{f}}(t_i) \end{cases} \quad (4.41)$$

em que

- $\underline{A} = e^{\underline{A}\Delta t}$ – Matriz de transmissibilidade de estado ou matriz de estado no tempo discreto ($n \times n$);
- $\underline{B} = (\underline{A} - \underline{I})\underline{A}^{-1}\underline{B}$ – Matriz das entradas (“*inputs*”) no tempo discreto ($n \times n_1$).

Valores e vetores próprios da matriz de transmissibilidade de estado

Os valores próprios da matriz de transmissibilidade de estado \underline{A} , μ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, (geralmente complexos) estão relacionados com os valores próprios λ_i da matriz de estado \underline{A} pela seguinte relação de exponenciação

$$\mu_i = e^{\lambda_i \Delta t} \Leftrightarrow \lambda_i = \frac{\ln(\mu_i)}{\Delta t}, \quad i=1,2,\dots,n \quad (4.42)$$

Tendo em conta que $\lambda_i = -\xi_i \omega_i + i \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2}$, então as frequências naturais ω_i e os amortecimentos modais ξ_i obtêm-se diretamente a partir dos valores complexos λ_i

$$\begin{cases} \omega_i = |\lambda_i| \text{ (rad/s)} \rightarrow f_i = \frac{|\lambda_i|}{2\pi} \text{ (Hz)} \\ \zeta_i = -\frac{\text{Re}(\lambda_i)}{|\lambda_i|} \end{cases} \quad i=1,2,\dots,n \quad (4.43)$$

Quanto aos vetores próprios de $\underline{\mathbf{A}}$ (também, geralmente, com componentes complexas) verifica-se que correspondem exatamente aos vetores próprios da matriz de estado $\underline{\mathbf{A}}$, ou seja, correspondem às configurações modais da estrutura (matriz modal). Para se obter as configurações modais expressas apenas em termos das componentes segundo os graus de liberdade observados (matriz $\underline{\mathbf{V}}$), basta multiplicar previamente a matriz modal pela matriz $\underline{\mathbf{C}}$, como se obteve na equação (4.34).

4.3.3 Modelos de identificação determinísticos. Forças impulsivas

Para se obter uma metodologia que, na prática, permita identificar a matriz $\underline{\mathbf{A}}$ com base nas n_o histórias da resposta, recorreu-se inicialmente ao conhecido conceito de resposta a impulsos e à anterior fórmula recursiva, (Juang & Papa, 1985).

Conhecida a resposta estrutural $\underline{\mathbf{y}}$ (valores observados) sob forças impulsivas $\underline{\mathbf{f}}$ a identificação das matrizes $\underline{\mathbf{A}}$, $\underline{\mathbf{B}}$, $\underline{\mathbf{C}}$ e $\underline{\mathbf{D}}$, resulta diretamente do estabelecimento de uma comparação ou ajuste entre a resposta a forças impulsivas calculada teoricamente com base na referida fórmula recursiva e a resposta da estrutura observada para as mesmas condições de excitação, ou seja, para forças impulsivas, trata-se de um método em que a excitação é conhecida – método de identificação determinístico, (Juang & Phang, 2001).

É importante salientar desde já que, em obra, o mais usual é que a resposta medida corresponda a condições de excitação bem distintas da excitação impulsiva (apenas em modelos físicos e em estruturas de reduzida dimensão, flexíveis e com pequena massa, é viável utilizar técnicas de excitação impulsiva). Assim, é frequente que a resposta em obra seja apenas medida sob excitação operacional ou ambiente do tipo ruído branco (aproximadamente ruído branco); nestes casos a excitação tem características que apenas podem ser estimadas em termos estatísticos o que levou ao desenvolvimento dos denominados métodos estocásticos de identificação modal que se apresentam na secção seguinte, onde se verá que o conhecimento das técnicas de identificação sob excitação impulsiva é também de grande interesse pois pode ser facilmente generalizado para o estudo sob excitação do tipo ruído branco após a conversão das séries medidas nas correspondentes funções de correlação (James, Carne, Lauffer, & Nard, 1992).

Cálculo teórico da resposta sob forças impulsivas. Parâmetros de Markov

De entre os vários tipos de excitação que podem atuar numa estrutura as forças impulsivas assumem uma especial importância em dinâmica de estruturas na perspectiva clássica. Também agora na perspectiva da identificação modal, com modelos de estado, as forças impulsivas são de grande interesse. Com base na fórmula recursiva (4.40) correspondente à solução do modelo de estado para a identificação modal

$$\begin{cases} \underline{x}(t_{k+1}) = \underline{A} \underline{x}(t_k) + \underline{B} \underline{f}(t_k) \\ \underline{y}(t_k) = \underline{C} \underline{x}(t_k) + \underline{D} \underline{f}(t_k) \end{cases} \quad (4.44)$$

pode-se verificar que para um impulso unitário aplicado num instante t_k num grau de liberdade GL, ou seja, para $\underline{f} = \underline{f}_I$, com $f_I(t) = 1$, se $I = GL \wedge t = t_k$ e $f_I(t) = 0$ se $I \neq GL \vee t \neq t_k$, a resposta em cada um dos instantes subsequentes pode ser escrita em termos de produtos matriciais simples envolvendo as matrizes \underline{A} , \underline{B} , \underline{C} e \underline{D} . Para condições iniciais nulas $\underline{x}(t_i) = \underline{0}$ pode-se utilizar a fórmula recursiva anterior para concluir que

$$\begin{aligned} \underline{x}(t_k) = \underline{0} & \Rightarrow \underline{y}(t_k) = \underline{D} \underline{f}_I(t_k) \\ \underline{x}(t_{k+1}) = \underline{B} \underline{f}_I(t_k) & \Rightarrow \underline{y}(t_{k+1}) = \underline{C} \underline{B} \underline{f}_I(t_k) \\ \underline{x}(t_{k+2}) = \underline{A} \underline{B} \underline{f}_I(t_k) & \Rightarrow \underline{y}(t_{k+2}) = \underline{C} \underline{A} \underline{B} \underline{f}_I(t_k) \\ \underline{x}(t_{k+3}) = \underline{A}^2 \underline{B} \underline{f}_I(t_k) & \Rightarrow \underline{y}(t_{k+3}) = \underline{C} \underline{A}^2 \underline{B} \underline{f}_I(t_k) \\ \vdots & \vdots \\ \underline{x}(t_{k+s-1}) = \underline{A}^{s-2} \underline{B} \underline{f}_I(t_k) & \Rightarrow \underline{y}(t_{k+s-1}) = \underline{C} \underline{A}^{s-2} \underline{B} \underline{f}_I(t_k) \end{aligned} \quad (4.45)$$

ou seja, a resposta impulsiva nos instantes após a aplicação de impulsos unitários em cada um dos vários GL de *input* (considera-se uma matriz identidade de forças unitárias \underline{I} ($n_I \times n_I$) aplicadas no instante t_k) pode ser dada matricialmente por

$$\begin{aligned} \underline{y}(t_k) &= \underline{D} \underline{I}, \\ \underline{y}(t_{k+1}) &= \underline{C} \underline{B} \underline{I}, \\ \underline{y}(t_{k+2}) &= \underline{C} \underline{A} \underline{B} \underline{I}, \\ \underline{y}(t_{k+2}) &= \underline{C} \underline{A}^2 \underline{B} \underline{I}, \\ &\vdots \\ \underline{y}(t_{k+s-1}) &= \underline{C} \underline{A}^{s-2} \underline{B} \underline{I} \end{aligned} \quad (4.46)$$

o que significa que a resposta observada deve corresponder às seguintes matrizes constantes geralmente conhecidas por parâmetros de Markov do sistema

$$\underline{D}, \underline{CB}, \underline{CAB}, \underline{CA^2B}, \dots, \underline{CA^{s-2}B} \quad (4.47)$$

Estes parâmetros de Markov são geralmente usados como base para a identificação de modelos dinâmicos lineares como se mostra de forma resumida na Figura 4.2, para o caso geral em que são aplicadas várias cargas impulsivas em n_1 pontos para cada uma das quais é registada a resposta no tempo nos vários graus de liberdade observados (designa-se por n_0 , o número de graus de liberdade observados).

Na Figura 4.2 apresenta-se, em síntese, uma metodologia para a implementação computacional de um modelo de identificação modal determinístico (forças impulsivas conhecidas), com base nos anteriores parâmetros de Markov.

FUNDAMENTOS DOS MÉTODOS DE IDENTIFICAÇÃO MODAL NO DOMÍNIO DO TEMPO
 Aplicação de forças impulsivas e medição da resposta: Modelo de identificação determinística no espaço de estados.
 Identificação por ajuste dos parâmetros de Markov à resposta observada sob impulsos (Juang & Papa, 1985)

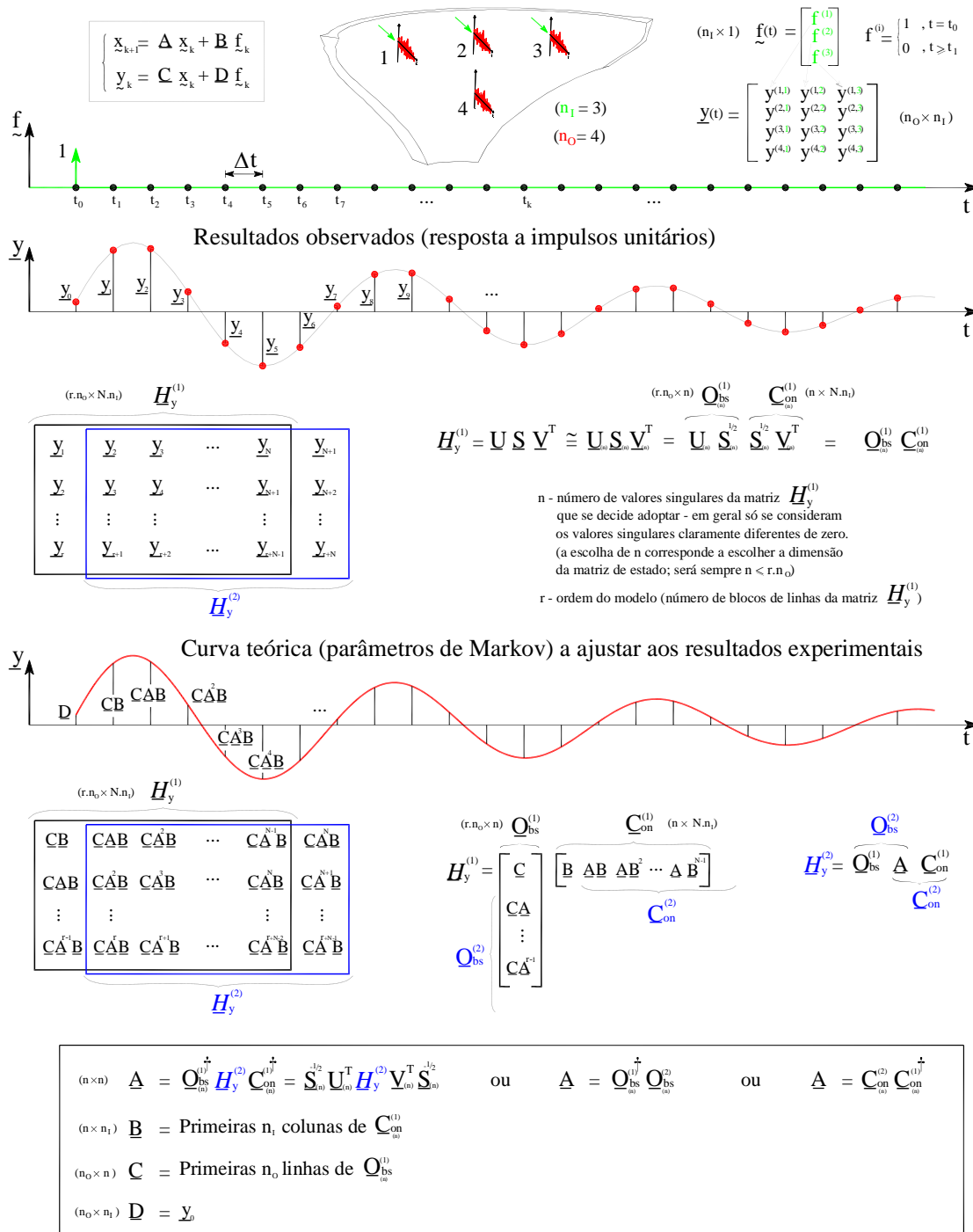


Figura 4.2 – Síntese da metodologia de identificação modal determinística no espaço de estados, com aplicação de forças impulsivas (Mendes, 2010).

4.3.4 Modelos de identificação estocásticos. Excitação do tipo ruído branco

Na sequência do desenvolvimento dos métodos determinísticos com aplicação de forças impulsivas foram desenvolvidos os denominados métodos de identificação modal estocástica que

permitem efetuar a identificação modal de sistemas utilizando apenas a resposta medida sob excitação do tipo ruído branco (a excitação não é medida – “output-only”), com base em técnicas de ajuste às funções de correlação da resposta medida (James et al., 1992). Nestes métodos é usual tentar obter o ajuste aos resultados experimentais recorrendo a modelos paramétricos de diferentes ordens (correspondentes a tentativas de identificação de matrizes de estado de diferentes dimensões) analisando-se, por comparação entre modelos, a estabilidade das diferentes soluções obtidas em termos dos valores e vetores próprios das matrizes de estado identificadas.

No caso presente dos modelos de identificação estocásticos, em que se admite que a força de excitação \underline{f} não pode ser conhecida de forma determinística, é usual adotar a seguinte representação de estado não envolvendo explicitamente a força de excitação (ver Figura 4.3).

$$\begin{cases} \underline{x}(t_{k+1}) = \underline{A} \underline{x}(t_k) + \underline{w}(t_k) \\ \underline{y}(t_k) = \underline{C} \underline{x}(t_k) + \underline{z}(t_k) \end{cases} \quad (4.48)$$

em que

$\underline{w}(t_k)$ – é um vetor de dimensão $(n \times 1)$ que inclui, de forma não explícita, a excitação (a parcela $\underline{B} \underline{f}$ não pode ser considerada explicitamente porque a excitação não é medida), considerada como um processo estocástico, o denominado ruído do processo (designado por $\hat{w}(t_k)$ na Figura 4.3); e

$\underline{z}(t_k)$ – é um vetor de dimensão $(n_o \times 1)$ que também inclui, de forma não explícita, a excitação (a parcela $\underline{D} \underline{f}$ não pode ser considerada explicitamente pela mesma razão atrás referida), o denominado ruído de medição (designado por $\hat{z}(t_k)$ na Figura 4.3).

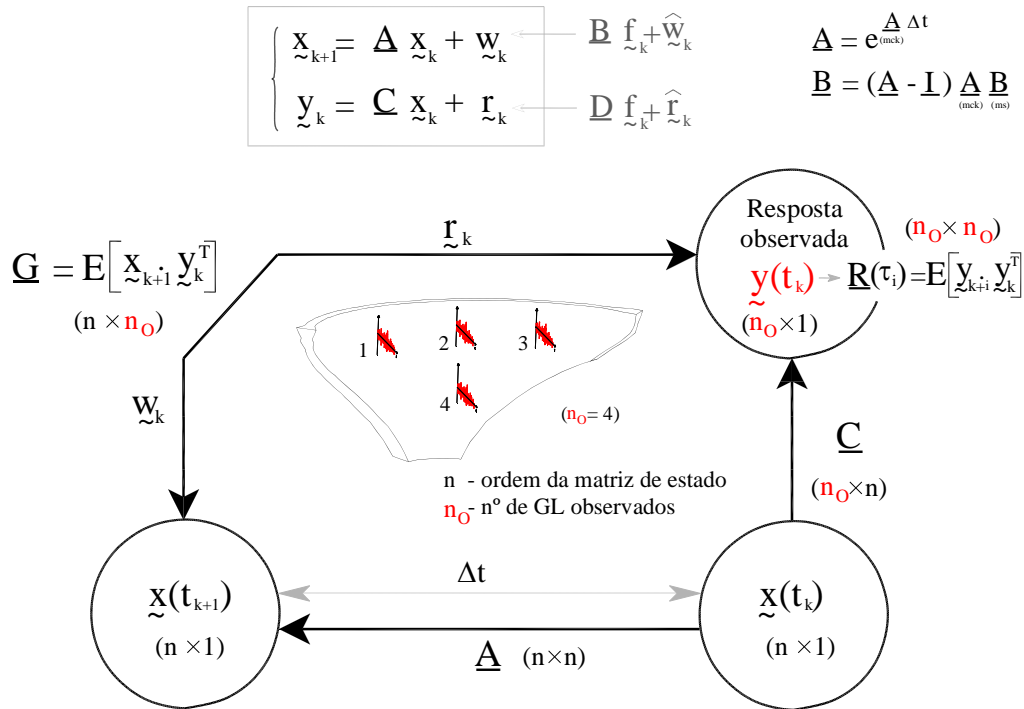
Com esta representação estocástica, o vetor de estado no instante t_{k+1} é correlacionado com as observações no instante t_k através da seguinte matriz de covariância de dimensão $(n \times n_o)$

$$\underline{G} = \underline{E} \left[\underline{x}(t_{k+1}) \cdot \underline{y}_k^T \right] \quad (4.49)$$

a qual permite relacionar as matrizes das funções de correlação da resposta \underline{R} $(n \times n_o)$

$$\underline{R} = \underline{E} \left[\underline{y}(t_{k+1}) \cdot \underline{y}_k^T \right] \quad (4.50)$$

IDENTIFICAÇÃO MODAL DE ESTRUTURAS
 Modelação estocástica no espaço de estados
 Forma recursiva - tempo discretizado em intervalos Δt



A identificação dos parâmetros do sistema (matrizes $\underline{\mathbf{A}}$ e $\underline{\mathbf{C}}$) pode ser conseguida através do ajuste das funções de correlação da resposta medida às correspondentes funções de correlação da resposta calculada. Na hipótese de excitação do tipo ruído branco as funções de correlação correspondentes à resposta calculada são as seguintes :

$\tau_0 = 0$	$\underline{\mathbf{R}}_0$
$\tau_1 = \Delta t$	$\underline{\mathbf{R}}_1 = \underline{\mathbf{C}} \underline{\mathbf{G}}$
$\tau_2 = 2\Delta t$	$\underline{\mathbf{R}}_2 = \underline{\mathbf{C}} \underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{G}}$
$\tau_3 = 3\Delta t$	$\underline{\mathbf{R}}_3 = \underline{\mathbf{C}} \underline{\mathbf{A}}^2 \underline{\mathbf{G}}$
\vdots	\vdots
$\tau_r = r \Delta t$	$\underline{\mathbf{R}}_r = \underline{\mathbf{C}} \underline{\mathbf{A}}^{r-1} \underline{\mathbf{G}}$
\vdots	\vdots

$$\underline{\mathbf{A}} \xrightarrow{\text{P.V.P}} \underline{\underline{\mu}} \longrightarrow \underline{\underline{\lambda}} = \ln(\underline{\underline{\mu}}) / \Delta t$$

$$\underline{\underline{\Phi}}_E \xrightarrow{\quad} \underline{\underline{\mathbf{V}}} = \underline{\mathbf{C}} \underline{\underline{\Phi}}_E$$

$(n \times n)$ $(n_o \times n)$

Figura 4.3 – Diagrama de blocos ilustrativo das variáveis e matrizes envolvidas num modelo de identificação modal estocástico no espaço de estados. Definição da matriz $\underline{\mathbf{R}}$ das funções de correlação da resposta e da matriz $\underline{\mathbf{G}}$ das funções de covariância entre o estado e a resposta (Mendes, 2010).

com as matrizes de estado $\underline{\mathbf{A}}$ e $\underline{\mathbf{C}}$, de forma semelhante à correlação estabelecida anteriormente, para o caso da resposta impulsiva, entre as séries observadas $\tilde{\mathbf{y}}$ e os parâmetros de Markov

$$\begin{aligned}
\tau_0 = 0 & \Rightarrow \underline{\mathbf{R}}_0 \\
\tau_1 = \Delta t & \Rightarrow \underline{\mathbf{R}}_1 = \underline{\mathbf{C}} \underline{\mathbf{G}} \\
\tau_2 = 2\Delta t & \Rightarrow \underline{\mathbf{R}}_2 = \underline{\mathbf{C}} \underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{G}} \\
\tau_3 = 3\Delta t & \Rightarrow \underline{\mathbf{R}}_3 = \underline{\mathbf{C}} \underline{\mathbf{A}}^2 \underline{\mathbf{G}} \\
& \vdots \\
\tau_r = r\Delta t & \Rightarrow \underline{\mathbf{R}}_r = \underline{\mathbf{C}} \underline{\mathbf{A}}^{r-1} \underline{\mathbf{G}}
\end{aligned} \tag{4.51}$$

Organizando as anteriores funções de correlação teóricas numa matriz de Hankel $\underline{\mathbf{H}}_R^{(1)}$ pode-se verificar que (ver a síntese apresentada na Figura 4.4)

$$\underline{\mathbf{H}}_R^{(1)} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{C}} \\ \underline{\mathbf{C}} \underline{\mathbf{A}} \\ \underline{\mathbf{C}} \underline{\mathbf{A}}^{i-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{A}}^{i-1} \underline{\mathbf{G}} & \dots & \underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{G}} & \underline{\mathbf{G}} \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{O}}_{bs}^{(1)} \underline{\mathbf{C}}_{on}^{(1)} \tag{4.52}$$

em que a matriz $\underline{\mathbf{O}}_{bs}^{(1)}$ é constituída por um conjunto de r blocos dispostos em coluna, enquanto a matriz $\underline{\mathbf{C}}_{on}^{(1)}$ é constituída por um conjunto de r blocos dispostos em linha. O valor de r denomina-se ordem do modelo a qual deve ser definida com um valor de, pelo menos, duas vezes o número de modos que se espera identificar na gama de frequências de interesse (cada modo corresponde a um par de pólos complexos conjugados). Correlacionando estas matrizes é possível extrair a matriz de estado $\underline{\mathbf{A}}$ (no tempo discreto), contudo para se obter as duas anteriores matrizes a partir da matriz de Hankel obtida é necessário aplicar o algoritmo da decomposição em valores singulares, obtendo-se

$$\underline{\mathbf{H}}_R^{(1)} = \underline{\mathbf{U}} \underline{\mathbf{S}} \underline{\mathbf{V}}^T \cong \underbrace{\underline{\mathbf{U}}_{(n)}}_{\substack{\underline{\mathbf{O}}_{bs}^{(1)} \\ (r \times n_0 \times n)}} \underbrace{\underline{\mathbf{S}}_{(n)}^{1/2}}_{\substack{\underline{\mathbf{C}}_{on}^{(1)} \\ (n \times n \times n_0)}} \underbrace{\underline{\mathbf{V}}_{(n)}^T}_{\substack{\underline{\mathbf{C}}_{on}^{(1)} \\ (n \times n \times n_0)}} = \underline{\mathbf{O}}_{bs}^{(1)} \underline{\mathbf{C}}_{on}^{(1)} \tag{4.53}$$

Para determinação da matriz de estado $\underline{\mathbf{A}}$, existem várias alternativas, que são apresentadas em (Peeters, 2000; Rodrigues, 2004), que se baseiam na obtenção de uma matriz de Hankel $\underline{\mathbf{H}}_R^{(2)}$ tal como se mostra na Figura 4.4. A partir destas duas matrizes de Hankel $\underline{\mathbf{H}}_R^{(1)}$ e $\underline{\mathbf{H}}_R^{(2)}$ pode-se obter

$$\underline{\mathbf{O}}_{\text{bs}}^{(1)} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{C}} \\ \underline{\mathbf{C}} \underline{\mathbf{A}} \\ \underline{\mathbf{C}} \underline{\mathbf{A}}^{i-2} \end{bmatrix} \quad \underline{\mathbf{O}}_{\text{bs}}^{(2)} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{C}} \underline{\mathbf{A}} \\ \underline{\mathbf{C}} \underline{\mathbf{A}}^2 \\ \underline{\mathbf{C}} \underline{\mathbf{A}}^{i-1} \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

e

$$\underline{\mathbf{C}}_{\text{on}}^{(1)} = [\underline{\mathbf{G}} \quad \underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{G}} \quad \underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{G}}^2 \quad \dots \quad \underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{G}}^{N-1}] \quad (4.55)$$

$$\underline{\mathbf{C}}_{\text{on}}^{(2)} = [\underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{G}} \quad \underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{G}}^2 \quad \underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{G}}^3 \quad \dots \quad \underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{G}}^N]$$

verificando-se que

$$\underline{\mathbf{H}}_{\text{R}}^{(2)} = \underline{\mathbf{O}}_{\text{bs}}^{(1)} \underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{C}}_{\text{on}}^{(1)} \quad \text{em que} \quad \underline{\mathbf{O}}_{\text{bs}}^{(2)} = \underline{\mathbf{O}}_{\text{bs}}^{(1)} \underline{\mathbf{A}} \quad \text{e} \quad \underline{\mathbf{C}}_{\text{on}}^{(2)} = \underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{C}}_{\text{on}}^{(1)} \quad (4.56)$$

Utilizando as relações anteriores é possível obter a matriz $\underline{\mathbf{A}}$ recorrendo às seguintes três vias

$$\underline{\mathbf{A}} = \underline{\mathbf{O}}_{\text{bs}}^{(1)\dagger} \underline{\mathbf{H}}_{\text{R}}^{(2)} \underline{\mathbf{C}}_{\text{on}}^{(1)\dagger} \quad \text{ou} \quad \underline{\mathbf{A}} = \underline{\mathbf{O}}_{\text{bs}}^{(1)\dagger} \underline{\mathbf{O}}_{\text{bs}}^{(2)} \quad \text{ou} \quad \underline{\mathbf{A}} = \underline{\mathbf{C}}_{\text{on}}^{(2)} \underline{\mathbf{C}}_{\text{on}}^{(1)\dagger} \quad (4.57)$$

Também é possível obter a matriz $\underline{\mathbf{C}}$, selecionando as primeiras n_o linhas da matriz $\underline{\mathbf{O}}_{\text{bs}}^{(1)}$. Para determinar as frequências naturais e os modos de vibração a partir da matriz $\underline{\mathbf{A}}$ é necessário resolver um problema de valores e vetores próprios, e recorrer às expressões (4.42) e (4.34), respetivamente.

Na Figura 4.4 apresenta-se, em síntese, uma metodologia para implementação computacional do método de identificação modal estocástica SSI-Cov, *Stochastic Subspace Identification based on Covariances*, com base nas anteriores matrizes de covariância.

IDENTIFICAÇÃO MODAL ESTOCÁSTICA NO DOMÍNIO DO TEMPO

Medição da resposta sob excitação do tipo ruído branco: Modelo de identificação estocástica no espaço de estados.
Identificação por ajuste dos parâmetros do sistema às funções de correlação da resposta

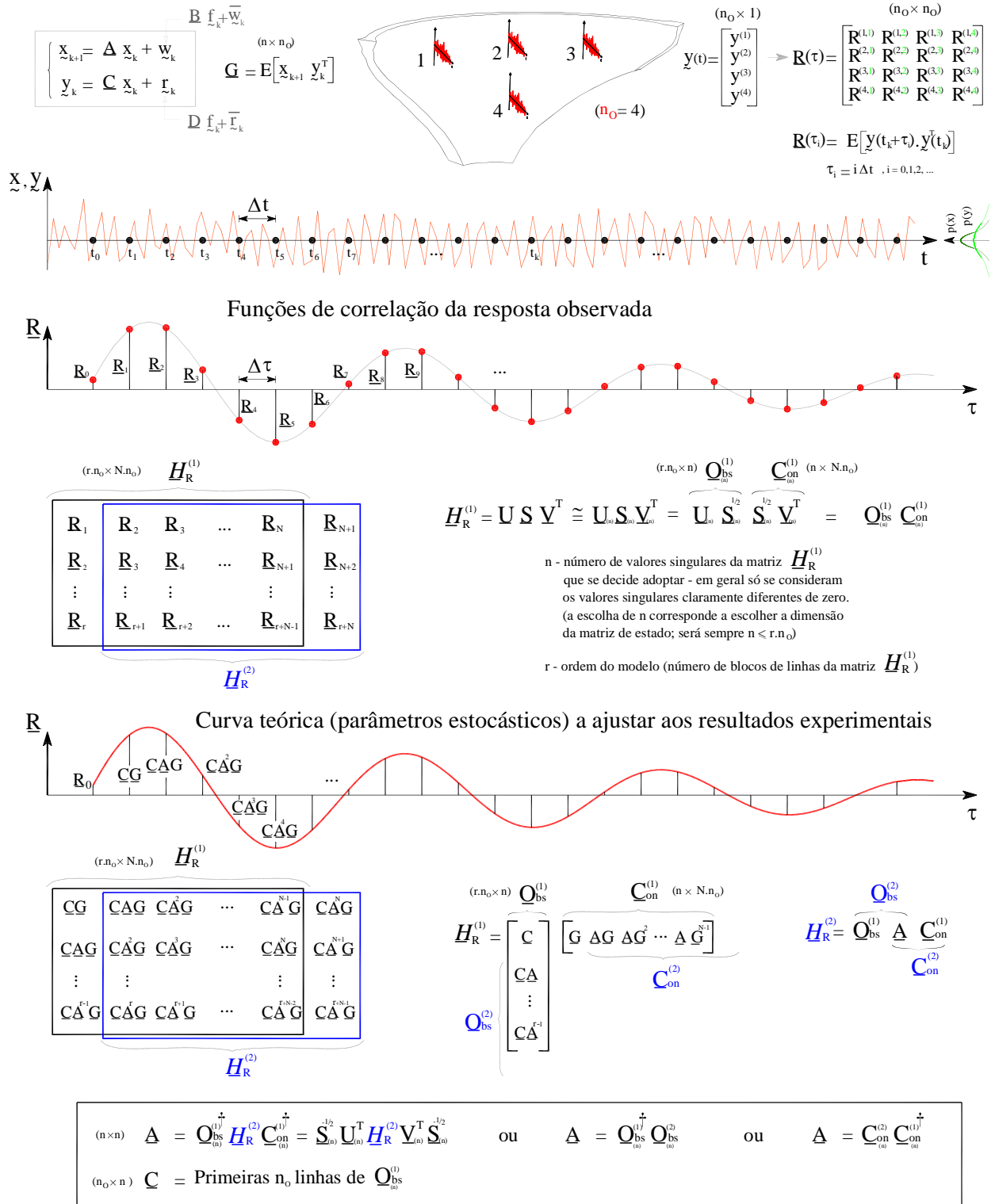


Figura 4.4 – Modelo de identificação modal estocástico no espaço de estados (SSI-COV). Utilização da matriz \underline{R} das funções de correlação da resposta e da matriz \underline{G} de covariância entre o estado e a resposta (Mendes, 2010).

4.3.5 Implementação Computacional do SSI-Cov. Programa ModID_SSI-Cov1.0 (MATLAB)

Por forma a se proceder à análise modal segundo o método em subespaços utilizando funções de covariância, foi elaborado um programa em MATLAB, no âmbito desta dissertação, o qual se denominou de **ModID_SSI-Cov1.0**. Abaixo encontra-se a descrição deste programa.

PROGRAMA ModID_SSI-Cov1.0

ANÁLISE MODAL SEGUNDO O MÉTODO STOCHASTIC SUBSPACE IDENTIFICATION-COVARIANCE

1. DEFINIR DADOS PARA “INPUT” DO PROGRAMA

- 1.1. O “*input*” é o ficheiro de histórias do tipo ruído branco em acelerações, gravado e gerado (caso de testes numéricos):
 - a. pelo programa **DynBuildings1.0** (quando se pretende fazer a identificação modal de edifícios de N pisos);
 - b. pelo programa **DynDam1.0** (quando o caso de estudo são estruturas complexas como a barragem).
- 1.2. O “*input*” é o ficheiro de histórias de acelerações, medido na barragem pelo sistema de monitorização lá instalado.
- 1.3. Definir a ordem do modelo:
 - a. Ordem do modelo inicial;
 - b. Incremento da ordem do modelo;
 - c. Ordem do modelo final.

2. LEITURA DO FICHEIRO DE ACELERAÇÕES

- 2.1. Cálculo das respetivas funções de auto correlação.

3. CÁLCULO DO ESPECTRO DE AMPLITUDES DAS ACELERAÇÕES

4. CÁLCULO DAS CARACTERÍSTICAS MODAIS PARA CADA INCREMENTO DA ORDEM DO MODELO

- 4.1. Valores próprios e vetores próprios;
- 4.2. Frequências naturais;
- 4.3. Amortecimentos.

5. REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS

- 5.1. Representação gráfica do diagrama de estabilização (cada ponto corresponde à frequência para essa ordem do modelo) com o espectro de amplitudes das acelerações como fundo;
- 5.2. Representação gráfica dos modos de vibração.

4.4 Considerações Finais

Neste capítulo foram abordados dois métodos no domínio do tempo, tendo-se apresentado em particular, os fundamentos teóricos do Método da Máxima Verosimilhança (MMV) e do Método Estocástico de Identificação Modal em Subespaços, utilizando funções de Covariância da resposta medida (SSI-Cov, “Covariance-driven, Stochastic Subspace Identification Method”).

O MMV destinou-se a ilustrar o conceito de identificação modal no domínio do tempo, recorrendo a um estimador da matriz de estado do sistema, válido apenas para problemas teóricos, envolvendo sistemas estruturais completamente observados, partindo das histórias de deslocamentos e velocidades medidas em todos os graus de liberdade.

Posteriormente, abordou-se o método SSI-Cov, o qual é um método aplicável a casos reais de sistemas estruturais parcialmente observados, baseando-se geralmente na análise de histórias de acelerações medidas em apenas alguns graus de liberdade do sistema estrutural a identificar.

Por fim, mostrou-se ainda a implementação computacional efetuada para estudar os dois métodos de identificação modal. Os programas desenvolvidos em MATLAB, no âmbito desta dissertação, foram designados de ModID_MLM1.0 e de ModID_SSI-Cov1.0, para efetuar a identificação modal do MMV e do SSI-Cov, respetivamente.

5

Aplicação dos Métodos de Identificação Modal

5.1 Considerações Iniciais

Neste capítulo vai-se proceder à implementação computacional em MATLAB dos métodos de identificação modal referidos no Capítulo 4.

Numa primeira fase, ir-se-á proceder à calibração do modelo teórico do programa DynBuildings1.0 e aplicar o método MMV, em sistemas completamente observados. O programa desenvolvido em MATLAB a partir do método de identificação modal MMV (ModID_MLM1.0) tem como objetivo estimar a matriz de estado, obtendo as características dinâmicas da estrutura: frequências naturais, amortecimentos modais e modos de vibração. Em primeiro lugar, o programa DynBuildings1.0 vai calcular as características dinâmicas duma estrutura simples, tipo edifício de N pisos, tendo como base o conhecimento das suas características (massa, rigidez e coeficiente de amortecimento) servindo estas para calibrar o modelo e gerar as histórias de deslocamentos, velocidades e acelerações. Posteriormente, o programa ModID_MLM1.0 irá ler as histórias “observadas” do tipo ruído branco, geradas (em velocidades e deslocamentos), a partir do programa DynBuildings1.0, permitindo que o programa de identificação modal as possa interpretar e a partir das mesmas estimar as características dinâmicas da estrutura em causa. Os resultados obtidos quer por via analítica, quer por via de identificação modal, são comparados e é analisada a eficácia do método.

Numa segunda fase, ir-se-á proceder à aplicação do método de identificação modal SSI-Cov (programa ModID_SSI-Cov1.0), em sistemas parcialmente observados. Inicialmente é feito um estudo considerando o exemplo anterior, edifício de N pisos, para estruturas simples, em que se considera que todos os pisos são observados. Posteriormente, dentro do mesmo exemplo - edifício de N pisos, será considerado o caso do sistema parcialmente observado, neste caso são observados apenas alguns dos pisos.

O método SSI-Cov, após a aplicação ao caso de estruturas simples, utilizar-se-á o programa DynDam1.0, que irá gerar histórias “observadas”, do tipo ruído branco (em acelerações) a partir do MEF, agora aplicado a uma barragem abóbada - barragem do Cabril (caso de um modelo estrutural mais complexo).

Será apresentada uma breve descrição da barragem do Cabril referindo as suas principais características, aspetos históricos, construção, sistema de monitorização e modelo numérico utilizado (EF3D).

Conhecendo as características da barragem do Cabril e através do modelo numérico de Elementos Finitos tridimensionais (EF3D) (Oliveira, 1991), são simuladas as suas características dinâmicas (frequências e modos de vibração), as quais serão comparadas com as características dinâmicas obtidas a partir da identificação modal (programa ModID_SSI-Cov1.0), que apenas têm como ponto de partida a excitação ambiente “observada”.

Numa terceira etapa, utilizando as histórias de acelerações reais medidas em diferentes pontos da barragem do Cabril, ir-se-á aplicar o método de identificação modal SSI-Cov, com o programa ModID_SSI-Cov1.0, por forma a se verificar a aplicabilidade do método. Nesta mesma fase ir-se-á efetuar a identificação modal a partir do programa Cabril_ModID2.0, existente na barragem, e do programa DamDySSA2.0, por forma a se ter uma melhor comparação de resultados.

Por fim, são apresentados e discutidos os resultados obtidos a partir da identificação modal efetuada com os diferentes métodos no domínio do tempo tendo sempre como base de comparação as características da estrutura através do modelo analítico.

5.2 Aplicação ao caso de estruturas simples do tipo edifício de N pisos

Para esta aplicação considerou-se que as características geométricas do edifício em estudo seriam sempre as mesmas, variando apenas o número de pisos por forma a poder efetuar-se uma melhor comparação da aplicação dos métodos.

Assim, o edifício terá uma rigidez (k), por pilar de 4500 N/m, e uma massa por piso de 5 kg, no que diz respeito ao amortecimento de Rayleigh considerou-se para os parâmetros α e β os valores de 0,025 e 0,00125, respetivamente.

Os exemplos apresentados nas seções seguintes são ilustrados com figuras em duas dimensões, no entanto, os dados são sempre referentes a estruturas tridimensionais, pelo que se consideram sempre quatro pilares, por piso, conforme se mostra na Figura 5.1. Assume-se que o modelo é constituído por uma placa de aço que simula o piso do edifício, sendo a responsável pela massa do sistema, funcionando como um elemento estrutural infinitamente rígido, quando comparado com a massa dos pilares constituídos por lâminas de alumínio, os quais conferem uma grande flexibilidade na direção perpendicular ao plano XZ, ou seja, segundo o eixo Y, em relação à flexibilidade na direção YZ, segundo o eixo X, pois, quanto maior a inércia menor a deformação. Assim, a análise do modelo segundo uma única direção deve-se ao facto de este ser mais flexível segundo o plano XZ, direção que apresenta maior deformação, ficando a rigidez do modelo apenas a depender da rigidez dos pilares, nessa direção.

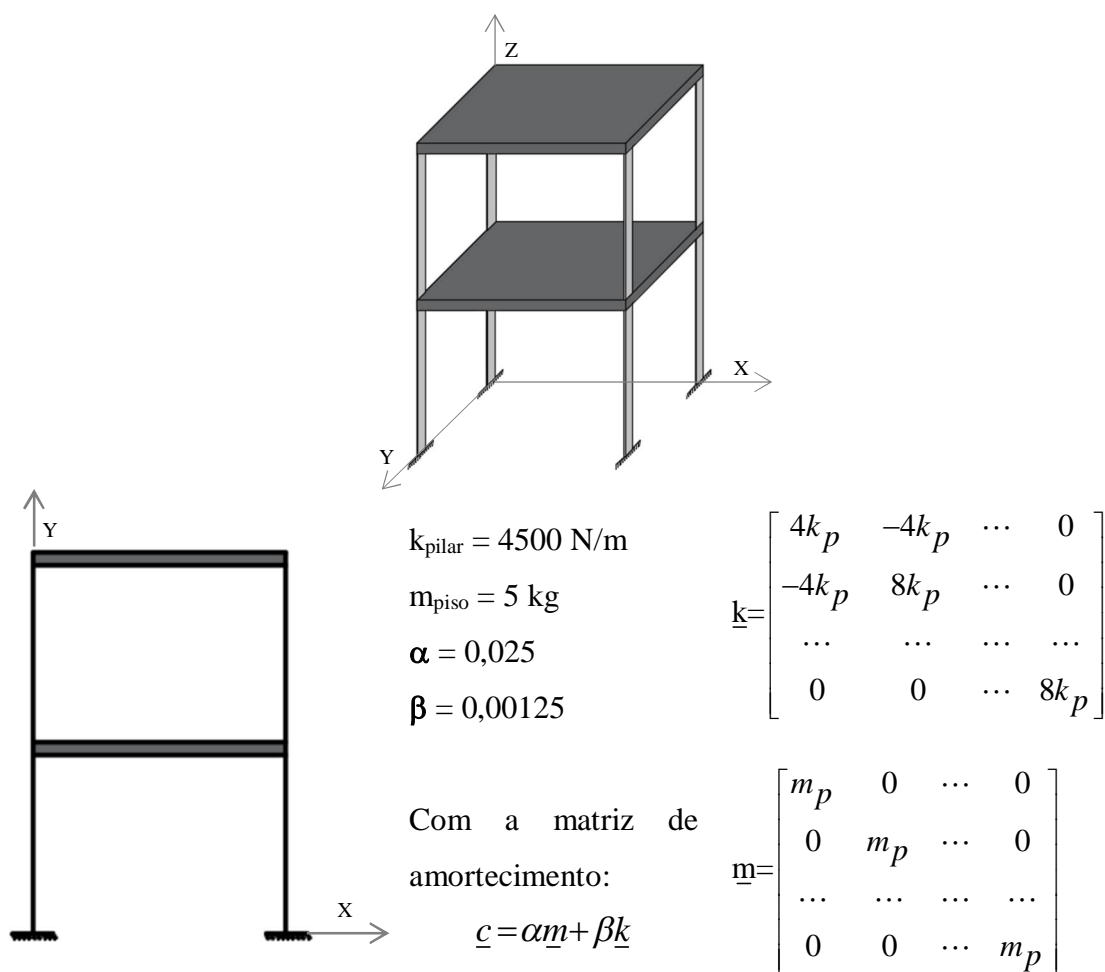


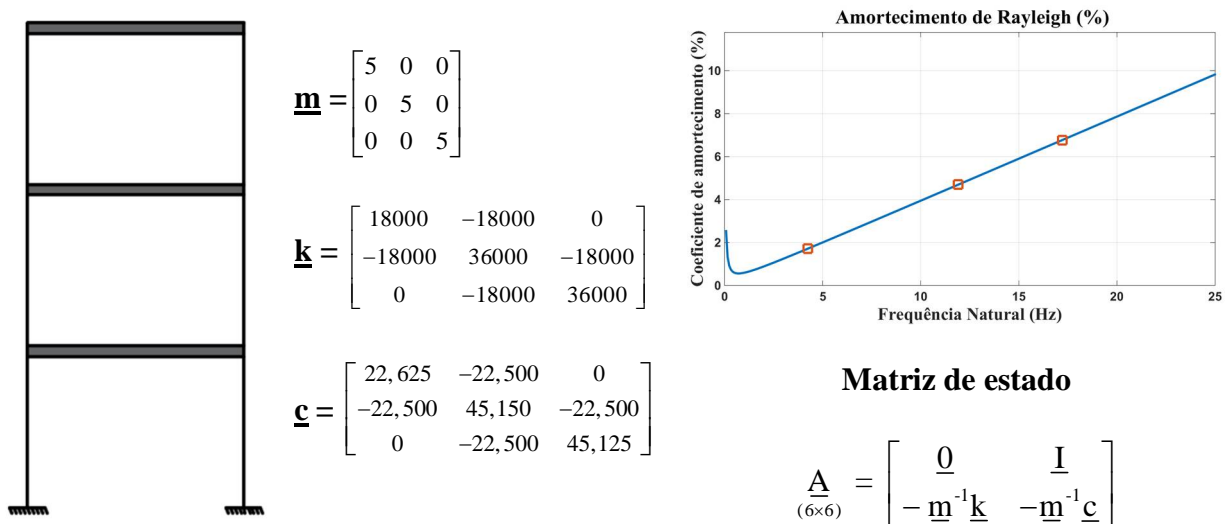
Figura 5.1 – Modelo de Edifício de N pisos em três e duas dimensões. Características e respetivas matrizes de rigidez, massa e amortecimento de forma geral, a considerar nas aplicações.

5.2.1 Caso de sistemas completamente observados

No caso de sistemas completamente observados, o método de identificação modal a utilizar é o Método da Máxima Verosimilhança referido no Capítulo 4, secção 4.2. Desenvolveu-se um programa em MATLAB que permite calcular este método, ModID_MLM1.0.

5.2.1.1 Edifício com 3 Pisos (N=3)

Para um edifício de três pisos com as características enunciadas na Figura 5.1, as matrizes de massa \underline{m} , rigidez \underline{k} , amortecimento \underline{c} e de estado \underline{A} encontram-se representadas na Figura 5.2, bem como a respetiva curva de amortecimento de Rayleigh.



Matriz de estado do modelo: \underline{A}

0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	1
-3600	3600	0	-4.525	4.500	0
3600	-7200	3600	4.500	-9.025	4.500
0	3600	-7200	0	4.500	-9.025

Figura 5.2 - Edifício de 3 pisos. Modelo em duas dimensões; matrizes de massa, amortecimento e de estado; curva de Rayleigh.

O programa DynBuildings1.0, permitiu calcular analiticamente os parâmetros modais da estrutura. Os modos de vibração foram calculados com base nos valores e vetores próprios da matriz de estado, permitindo obter as frequências naturais, amortecimentos modais e configurações modais para cada um dos três modos de vibração do edifício, conforme representado graficamente na Figura 5.3.

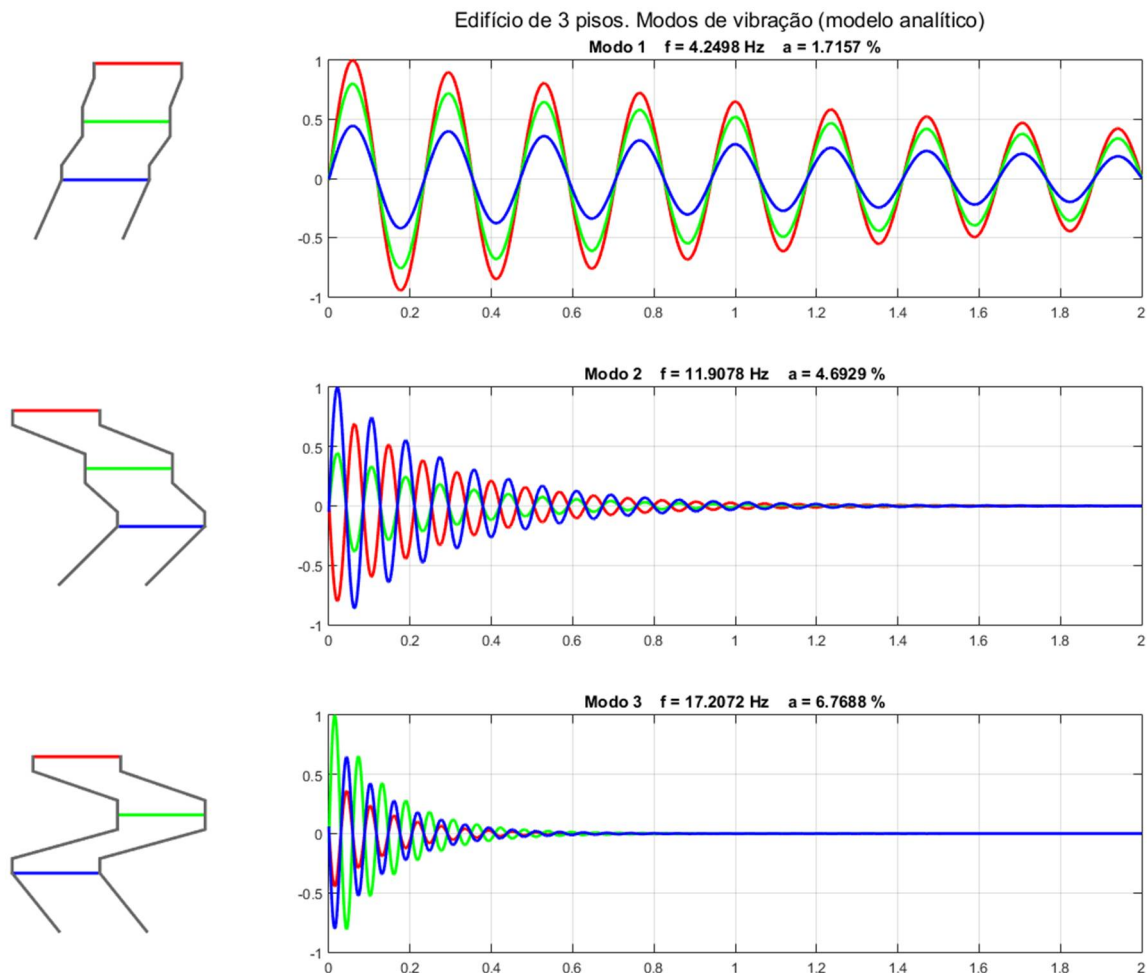
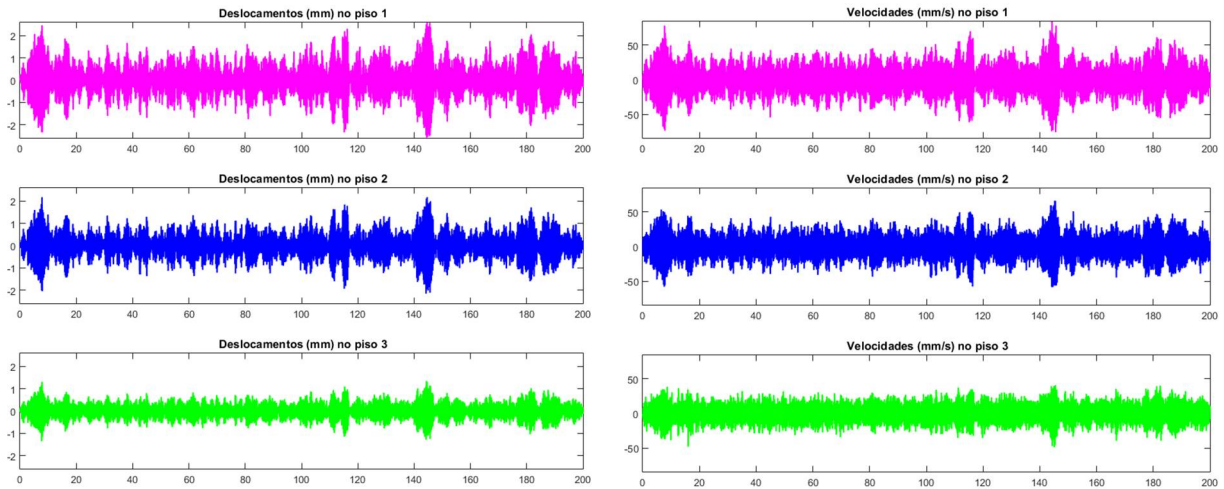
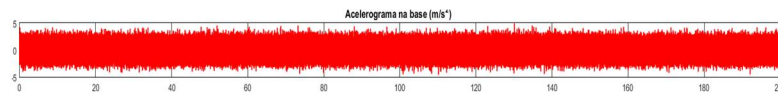


Figura 5.3 - Edifício de 3 pisos. Parâmetros modais calculados analiticamente.

A resposta sob excitação do tipo ruído branco que servirá de “input” para o programa que utiliza o MMV foi obtida a partir do programa desenvolvido em MATLAB referido no Capítulo 3, subsecção 3.4.3. Este programa permitiu gerar as histórias “observadas” de deslocamentos e velocidades com duração de $T = 200 \text{ s}$ ($\Delta t = 0.001 \text{ s}$), geradas numericamente para todos os pisos (Figura 5.4 a), considerando excitação do tipo ruído branco dada por uma distribuição normal com desvio padrão unitário e média nula (acelerograma aplicado na base, Figura 5.4 b), conforme se pode ver na figura seguinte.



a)



Nota: `Acel_base = random('Normal',0,dp,NPt,1)` (MATLAB)

b)

Figura 5.4 - Edifício de 3 pisos. Resposta sob excitação do tipo ruído branco. a) Histórias “observadas” de deslocamentos e velocidades; b) Acelerograma aplicado na base.

Como referido no Capítulo 4, secção 4.2, o método MMV funciona a nível de resultados médios, pelo que foram feitas 100 simulações e calculadas as respetivas trajetórias médias. Na Figura 5.5 encontram-se representadas as trajetórias médias que ilustram o processo de convergência do MMV ao longo do período de 200 s considerado, são apresentadas as frequências naturais f_n e amortecimentos modais ξ_n (obtidos a partir dos valores próprios λ_n da matriz de estado estimada: $f_n = |\lambda_n| / 2\pi$ e $\xi_n = -\text{Re}(\lambda) / |\lambda|$).

MMV. Trajetórias médias para 100 simulações ($\Delta t= 0,001$ s)

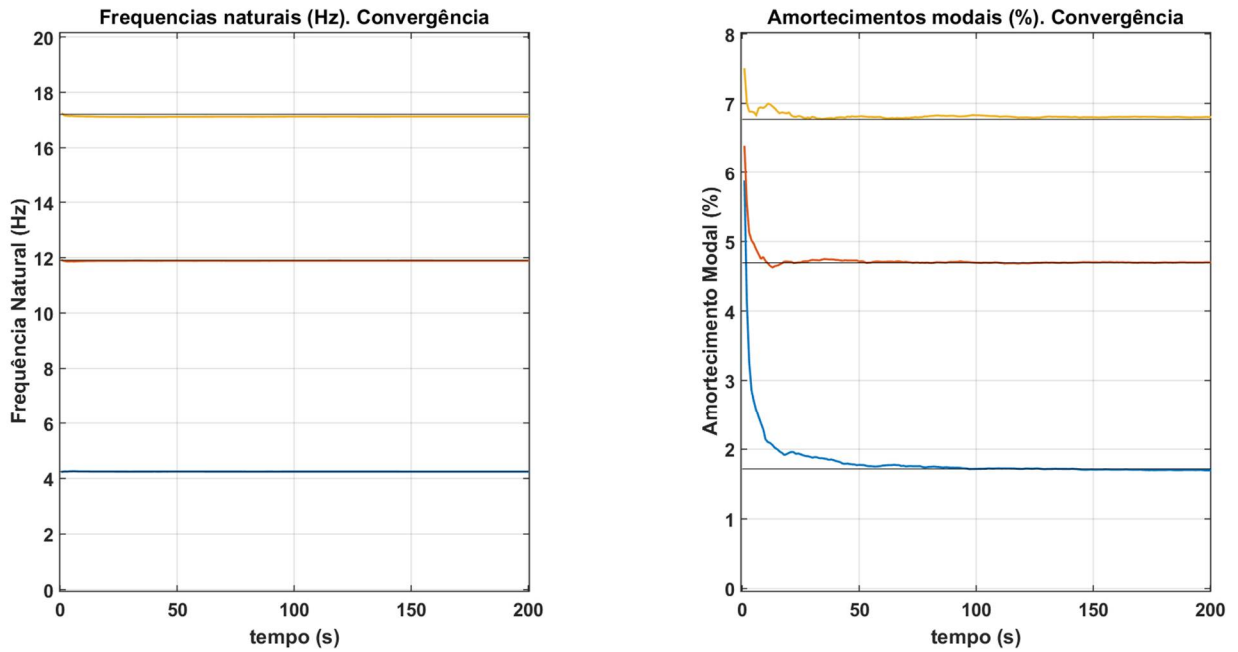


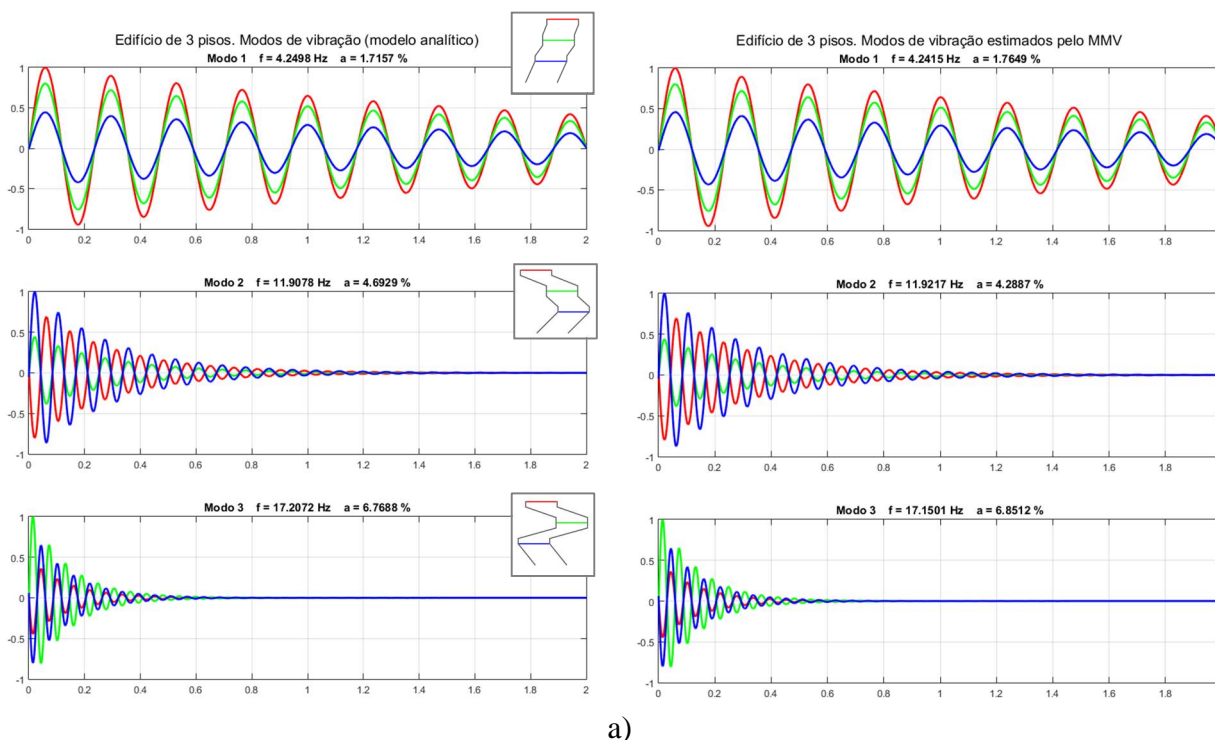
Figura 5.5 - Edifício de 3 pisos. Trajetórias médias que ilustram o processo de convergência do MMV ao longo do período de 200 s considerado, em termos das frequências naturais f_n e amortecimentos modais ξ_n (obtidos a partir dos valores próprios λ_n da matriz de estado estimada: $f_n = |\lambda_n| / 2\pi$ e $\xi_n = -\text{Re}(\lambda)/|\lambda|$).

Na Tabela 5.1 encontram-se os resultados calculados por via analítica e os resultados obtidos pela trajetória média para as 100 simulações do MMV, a partir do programa desenvolvido em MATLAB para a aplicação do MMV. Apresentam-se também as respectivas diferenças entre os resultados obtidos.

		Modelo analítico	MMV	dif. (%)
Frequências (Hz)	Modo 1	4,2498	4,2482	-0,04
	Modo 2	11,9078	11,9223	+0,12
	Modo 3	17,2072	17,1465	-0,35
Amortecimentos (%)	Modo 1	1,7157	1,7649	+2,87
	Modo 2	4,6929	4,2889	-8,61
	Modo 3	6,7688	6,8505	+1,21

Tabela 5.1 – Edifício de 3 pisos. Comparação entre os resultados obtidos pelo modelo analítico e os resultados estimados com o MMV para as frequências e os amortecimentos.

A Figura 5.6 apresenta uma comparação entre os resultados obtidos pelo modelo analítico e os resultados estimados com o MMV, no que diz respeito aos modos de vibração, frequências naturais e amortecimentos modais (Figura 5.6a). Na Figura 5.6b encontram-se representadas as matrizes de estado inicial do modelo e a matriz de estado estimada com o MMV (correspondente à média das matrizes estimadas em 100 simulações de 200 s cada).



a)

Matriz de estado do modelo: \underline{A}

0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	1
-3600	3600	0	-4.525	4.500	0
3600	-7200	3600	4.500	-9.025	4.500
0	3600	-7200	0	4.500	-9.025

Matriz de estado estimada pelo MMV: \underline{A}_{estim}

0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	1
-3580.189	3571.075	12.144	-4.513	4.499	0.019
3570.656	-7139.363	3556.218	4.528	-9.043	4.488
9.981	3556.797	-7147.849	-0.021	4.503	-9.015

b)

Figura 5.6 - Edifício de 3 pisos. Modos de vibração obtidos pelo MMV (frequências naturais, amortecimentos modais e configurações modais). a) Comparação entre os resultados do modelo analítico e os resultados obtidos com o MMV. b) Matriz de estado do modelo e matriz de estado estimada com o MMV.

Da análise comparativa dos valores apresentados na Figura 5.6 e na Tabela 5.1, verifica-se que os resultados obtidos pelo modelo analítico e os resultados estimados pelo MMV, no que diz respeito às frequências naturais, amortecimentos modais e respectivos modos de vibração, se encontram em concordância.

5.2.1.2 Edifício com 6 Pisos (N=6)

Para um edifício de seis pisos com as características enunciadas na Figura 5.1, o modelo plano de análise, a respetiva curva de amortecimento de Rayleigh e a matriz de estado \underline{A} , encontram-se representados na Figura 5.7.

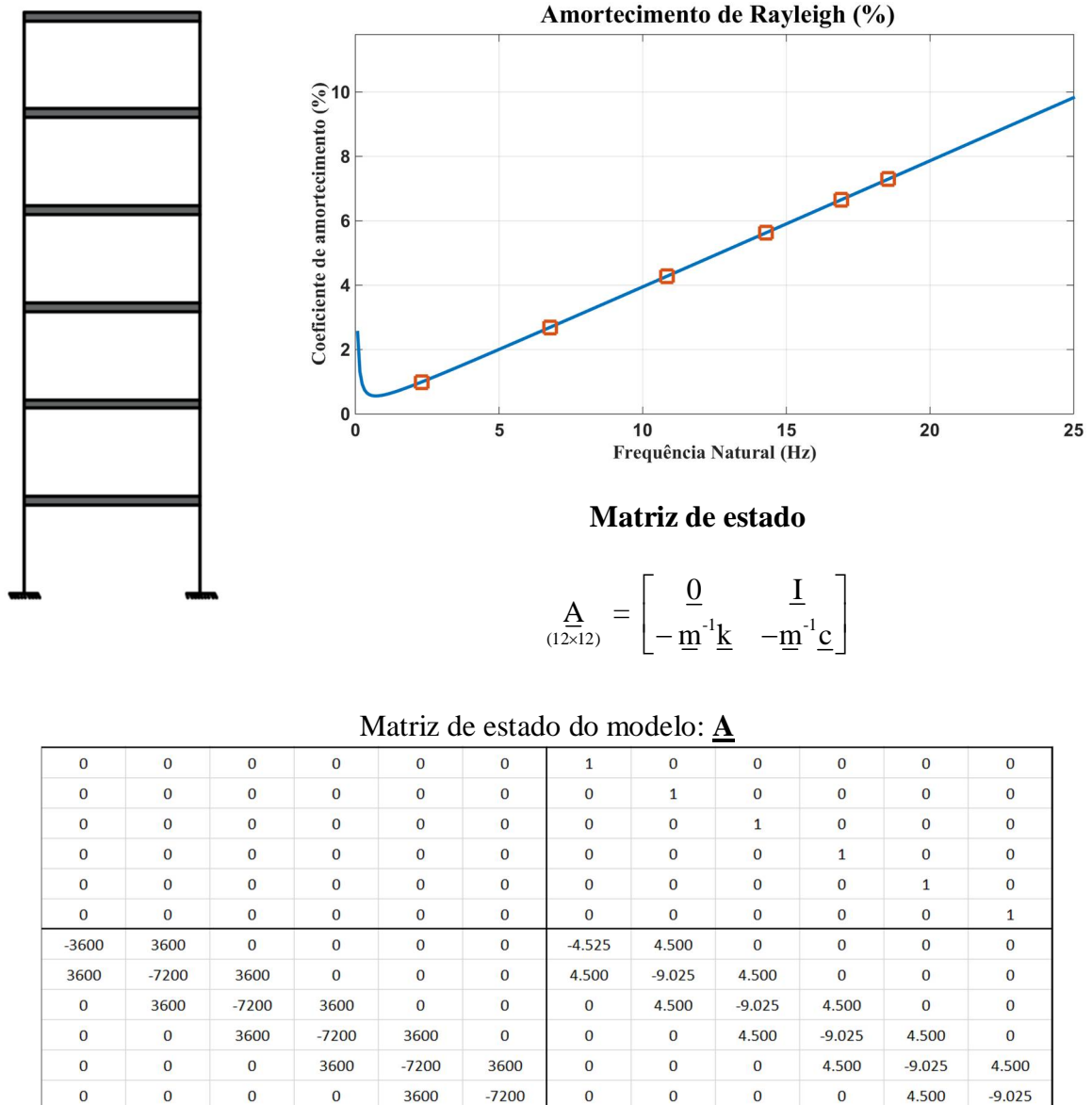


Figura 5.7 - Edifício de 6 pisos. Modelo em duas dimensões; matriz de estado e curva de Rayleigh.

O programa desenvolvido em MATLAB, DynBuildings1.0, permitiu calcular analiticamente os parâmetros modais da estrutura. Os modos de vibração foram calculados com base nos valores e vetores próprios da matriz de estado, permitindo obter as frequências naturais, amortecimentos modais e configurações modais para cada um dos seis modos de vibração do edifício, conforme representado graficamente na Figura 5.8.

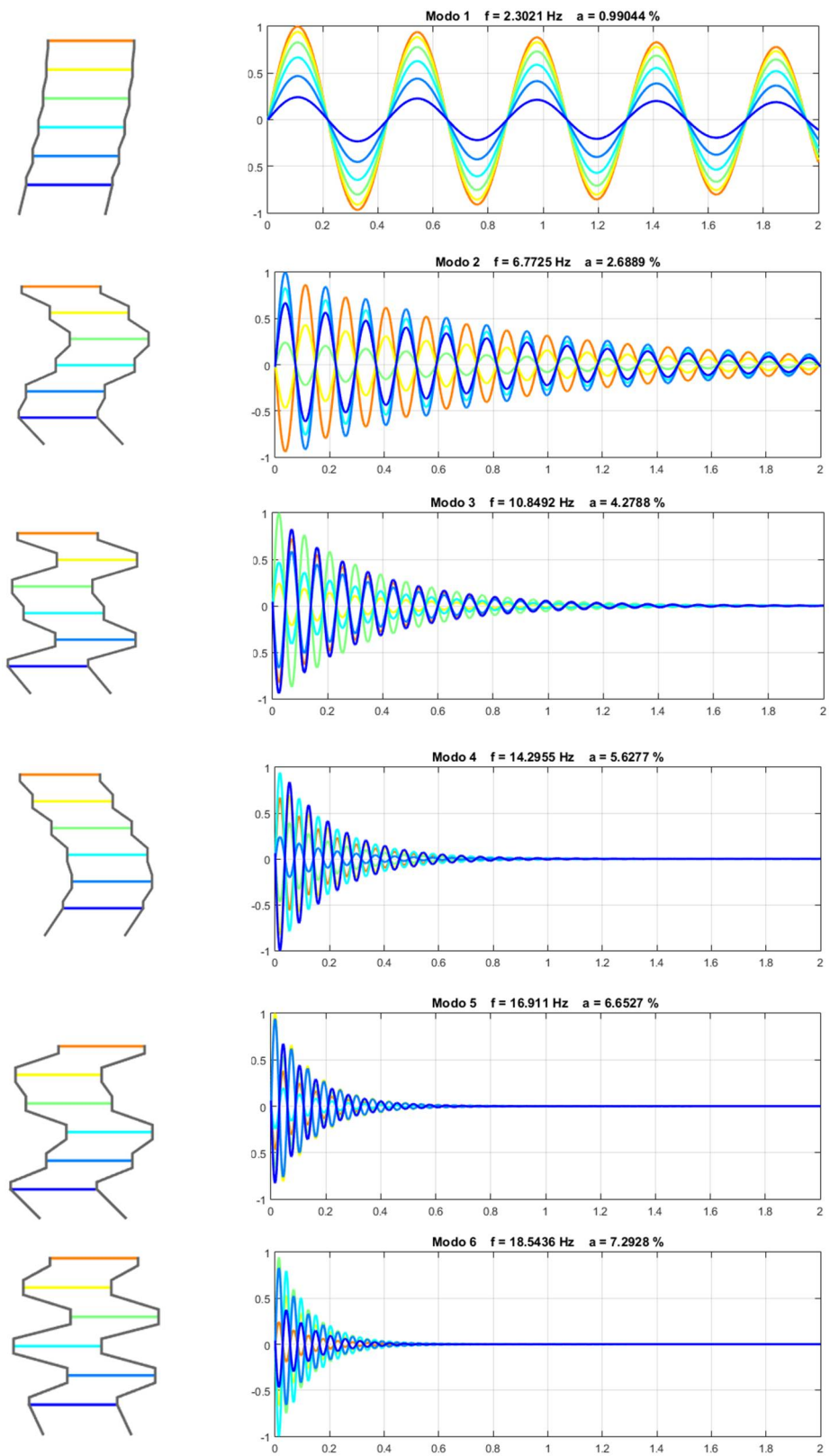
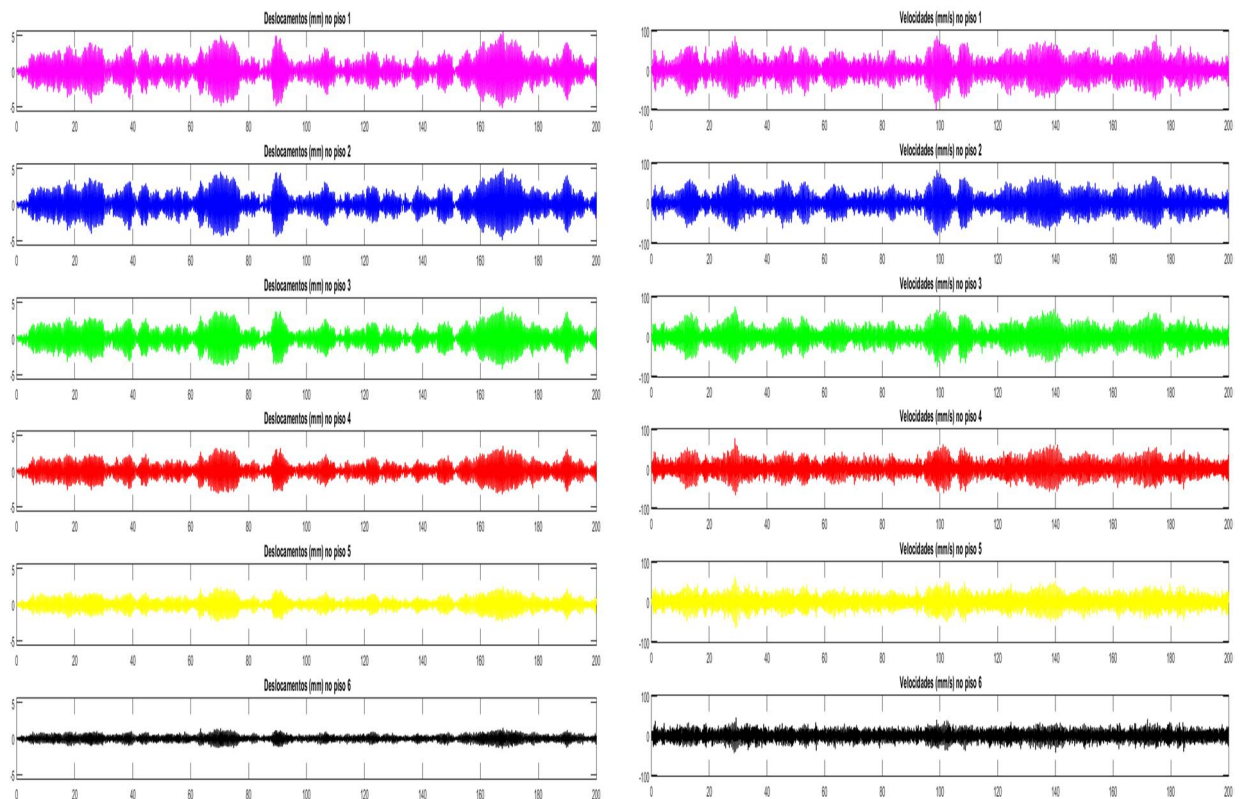
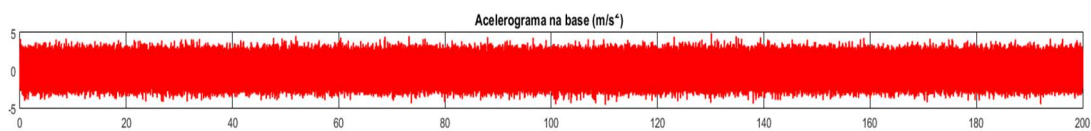


Figura 5.8 - Edifício de 6 pisos. Parâmetros modais calculados analiticamente.

A resposta sob excitação do tipo ruído branco que servirá de “input” para o programa que utiliza o MMV para estimar a matriz de estado, foi obtida a partir do programa desenvolvido em MATLAB referido no Capítulo 3, DynBuildings1.0. Este programa permite gerar as histórias “observadas” de deslocamentos e velocidades com duração de $T = 200$ s ($\Delta t = 0.001$ s), geradas numericamente para todos os pisos (Figura 5.9a), considerando excitação do tipo ruído branco dada por uma distribuição normal com desvio padrão unitário e média nula (acelerograma aplicado na base, Figura 5.9b), conforme se pode ver na figura seguinte.



a)



Nota: `Acel_base = random('Normal',0,dp,NPt,1)` (MATLAB)

b)

Figura 5.9 - Edifício de 6 pisos. Resposta sob excitação do tipo ruído branco. a) Histórias “observadas” de deslocamentos e velocidades; b) Acelerograma aplicado na base.

Como referido no Capítulo 4, secção 4.2, os resultados do método MMV resultam da média de várias simulações. Assim, foram feitas 100 simulações e calculadas as respetivas trajetórias médias. Na Figura 5.10 encontram-se representadas as trajetórias médias que ilustram o processo de convergência do MMV ao longo de um período de 200 s, são ainda apresentadas as frequências naturais f_n e os amortecimentos modais ξ_n (obtidos a partir dos valores próprios λ_n da matriz de estado estimada: $f_n = |\lambda_n| / 2\pi$ e $\xi_n = -\text{Re}(\lambda) / |\lambda|$).

MMV. Trajetórias médias para 100 simulações ($\Delta t = 0,001$ s)

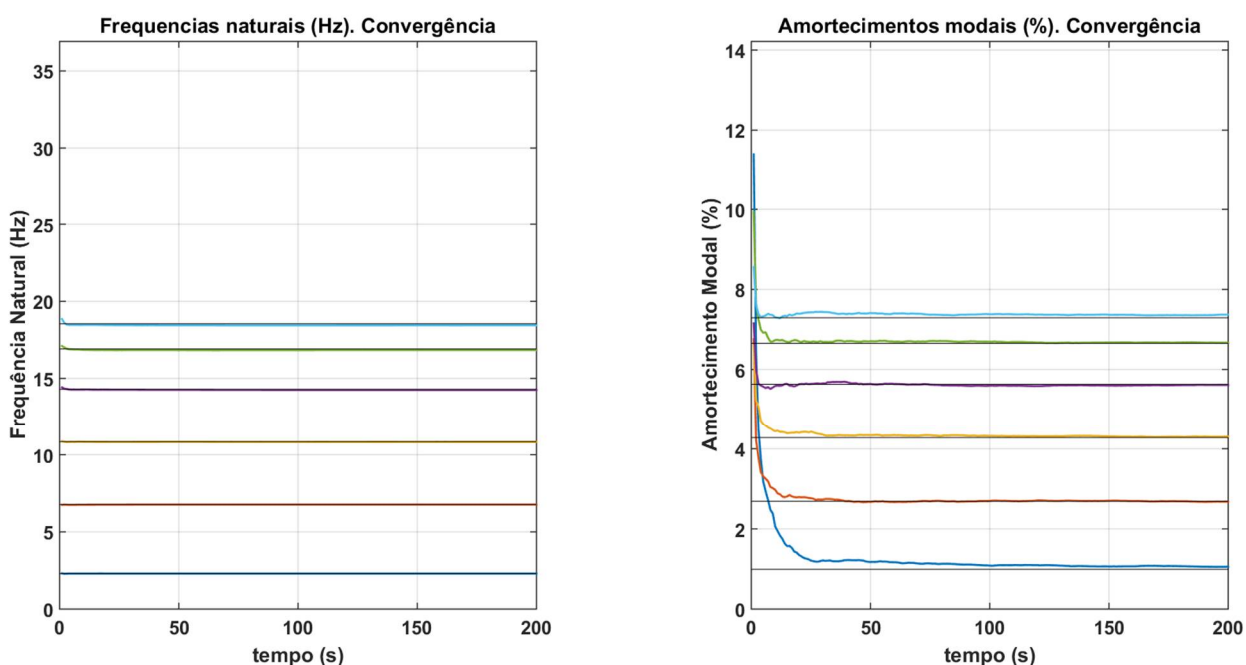


Figura 5.10 - Edifício de 6 pisos. Trajetórias médias que ilustram o processo de convergência do MMV ao longo do período de 200 s considerado, em termos das frequências naturais f_n e amortecimentos modais ξ_n (obtidos a partir dos valores próprios λ_n da matriz de estado estimada: $f_n = |\lambda_n| / 2\pi$ e $\xi_n = -\text{Re}(\lambda) / |\lambda|$).

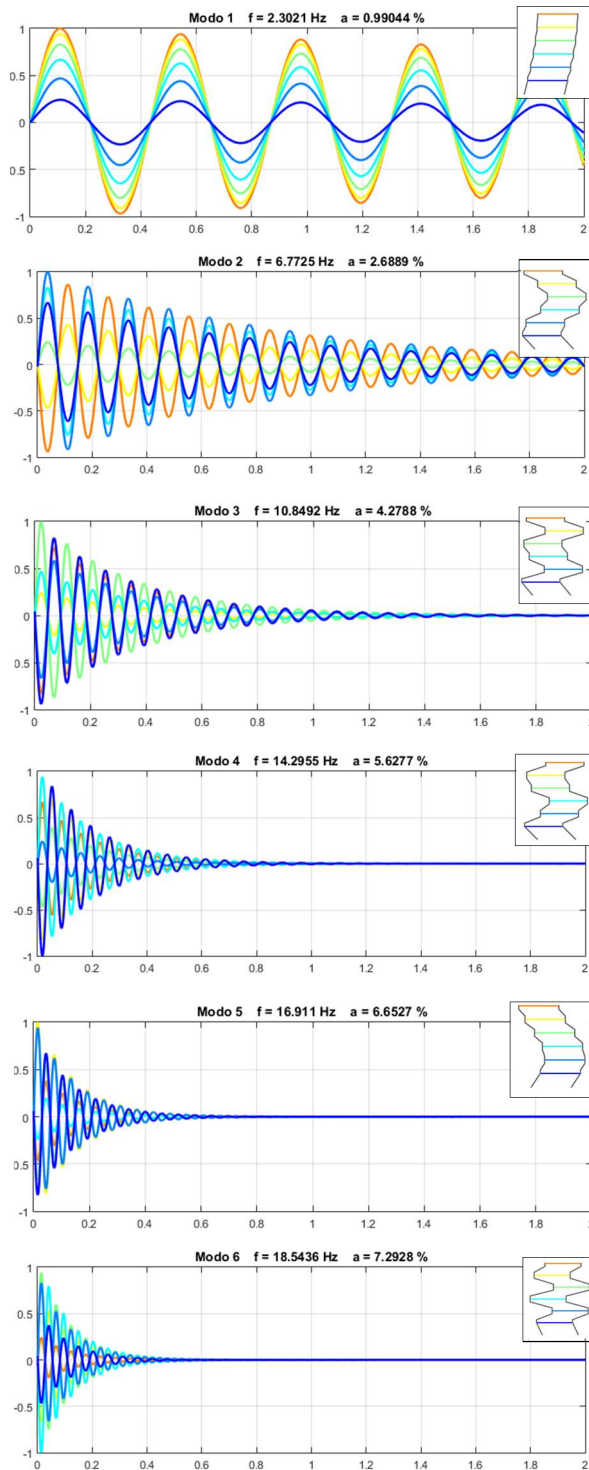
Na Tabela 5.2 encontram-se os resultados calculados por via analítica e os resultados obtidos pela trajetória média para as 100 simulações do MMV, a partir do programa desenvolvido em MATLAB, ModID_MLM1.0, para a utilização do método MMV. Apresentam-se também as respectivas diferenças entre os resultados obtidos.

		Modelo analítico	MMV	dif. (%)
Frequências (Hz)	Modo 1	2,3021	2,3071	+0,22
	Modo 2	6,7725	6,7602	-0,18
	Modo 3	10,8492	10,8206	-0,26
	Modo 4	14,2955	14,2399	-0,39
	Modo 5	16,9110	16,8857	-0,15
	Modo 6	18,5436	18,4558	+0,47
Amortecimentos (%)	Modo 1	0,9904	0,8798	-11,17
	Modo 2	2,6889	2,6963	+0,28
	Modo 3	4,2788	3,9676	-7,27
	Modo 4	5,6277	5,4205	-3,68
	Modo 5	6,6527	6,7369	+1,27
	Modo 6	7,2928	7,1073	-2,54

Tabela 5.2 - Edifício de 6 pisos. Comparação entre os resultados obtidos pelo modelo analítico e os resultados obtidos com o MMV para as frequências e os amortecimentos.

Na Figura 5.11 apresenta-se uma comparação entre os resultados obtidos com o modelo analítico e os resultados obtidos com o MMV, no que diz respeito aos modos de vibração, frequências naturais e amortecimentos modais.

Edifício de 6 pisos. Modos de vibração (modelo analítico)



Edifício de 6 pisos. Modos de vibração estimados pelo MMV

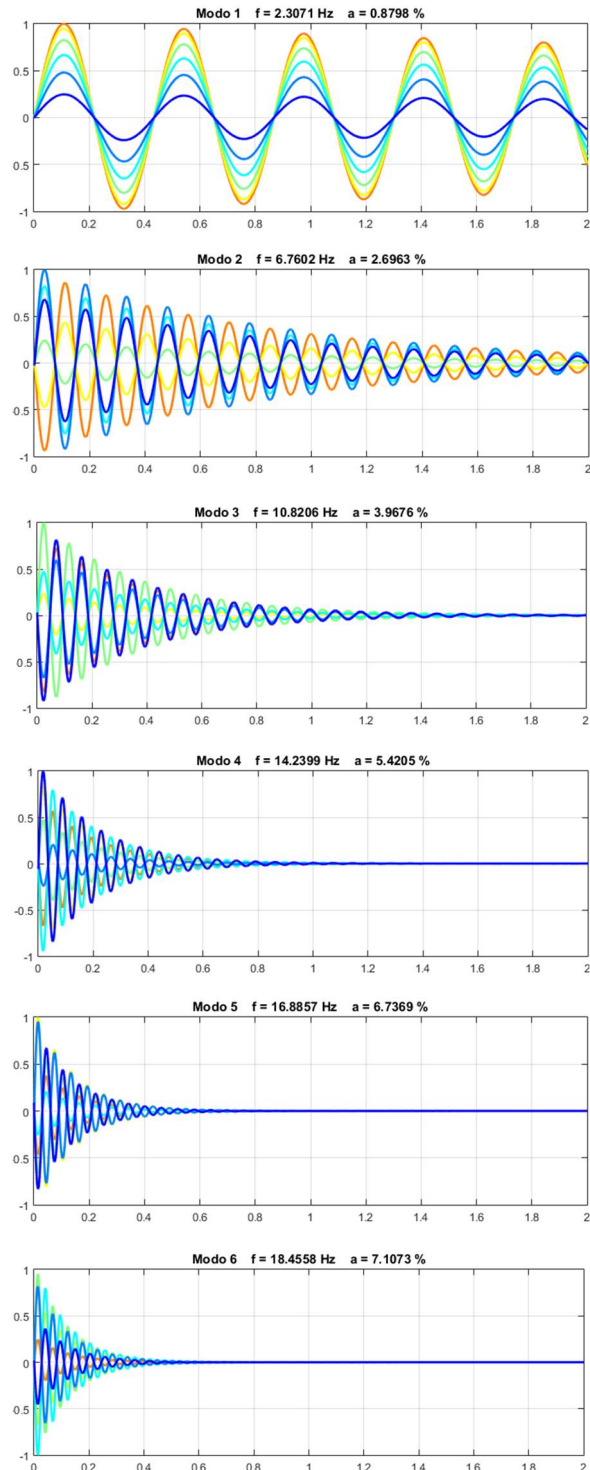


Figura 5.11 - Edifício de 6 pisos. Modos de vibração obtidos pelo MMV (frequências naturais, amortecimentos modais e configurações modais). Comparação entre os resultados do modelo analítico e os resultados obtidos com o MMV.

Na Figura 5.12 encontram-se representadas as matrizes de estado inicial do modelo e a matriz de estado estimada com o MMV (correspondente à média das matrizes estimadas em 100 simulações de 200 s cada).

Matriz de estado do modelo: $\underline{\mathbf{A}}$

0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
-3600	3600	0	0	0	0	-4.525	4.500	0	0	0	0
3600	-7200	3600	0	0	0	4.500	-9.025	4.500	0	0	0
0	3600	-7200	3600	0	0	0	4.500	-9.025	4.500	0	0
0	0	3600	-7200	3600	0	0	0	4.500	-9.025	4.500	0
0	0	0	3600	-7200	3600	0	0	0	4.500	-9.025	4.500
0	0	0	0	3600	-7200	0	0	0	0	4.500	-9.025

Matriz de estado estimada pelo MMV: $\underline{\mathbf{A}}_{estim}$

0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
-3581	3566	11	2	-2	1	-4.534	4.512	0	0	0	0
3571	-7133	3557	8	4	0	4.464	-9.042	4.509	0	0	0
13	3555	-7136	3558	8	1	0	4.499	-9.009	4.513	0	0
-3	13	3559	-7137	3563	3	0	0	4.548	-9.016	4.494	0
0	-2	7	3558	-7146	3569	0	0	0	4.568	-9.025	4.502
0	4	3	11	3566	-7155	0	0	0	0	4.485	-9.059

Figura 5.12 - Edifício de 6 pisos. Modos de vibração obtidos pelo MMV (frequências naturais, amortecimentos modais e configurações modais). Matriz de estado do modelo e a matriz de estado estimada com o MMV.

A análise comparativa dos valores apresentados na Figura 5.11, Figura 5.12 e Tabela 5.2, permite verificar que os resultados obtidos pelo modelo analítico e os resultados estimados pelo MMV se encontram em concordância, quanto às frequências naturais, amortecimentos modais e respectivos modos de vibração.

vetores próprios da matriz de estado, permitindo obter as frequências naturais, amortecimentos modais e configurações modais para cada um dos vinte modos de vibração do edifício, conforme representado graficamente na Figura 5.14.

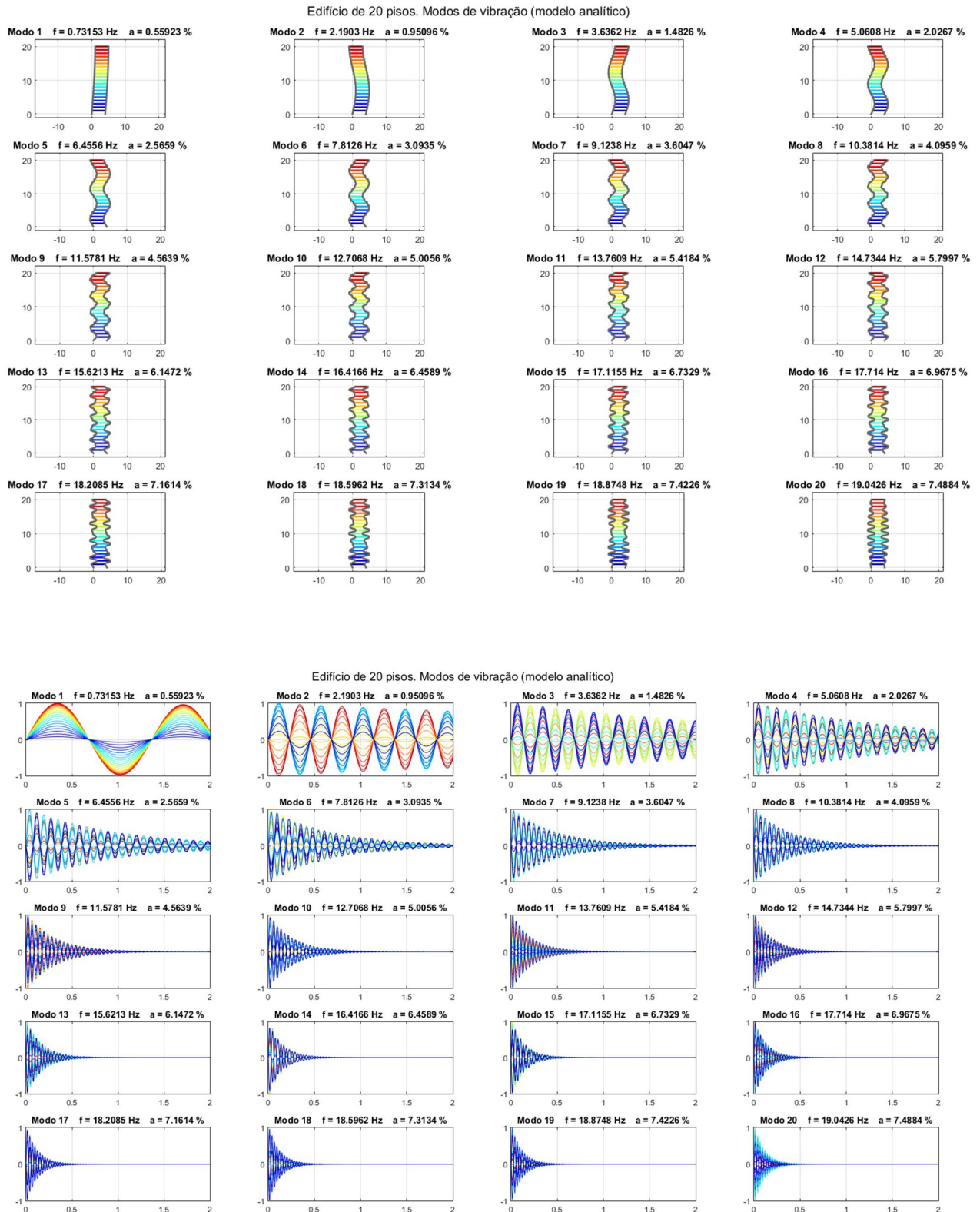


Figura 5.14 - Edifício de 20 pisos. Parâmetros modais calculados analiticamente.

A resposta sob excitação do tipo ruído branco que servirá de “input” para o programa que utiliza o MMV, foi obtida a partir do programa desenvolvido em MATLAB referido no Capítulo 3, ModID_MLM1.0. Este programa permitiu gerar numericamente as histórias “observadas” de deslocamentos e velocidades com duração de $T = 500$ s ($\Delta t = 0.0002$ s), para todos os pisos (Figura 5.15a), considerando excitação do tipo ruído branco dada por uma distribuição normal, com desvio padrão unitário e média nula (acelerograma aplicado na base, Figura 5.15b), conforme se pode ver na figura seguinte.

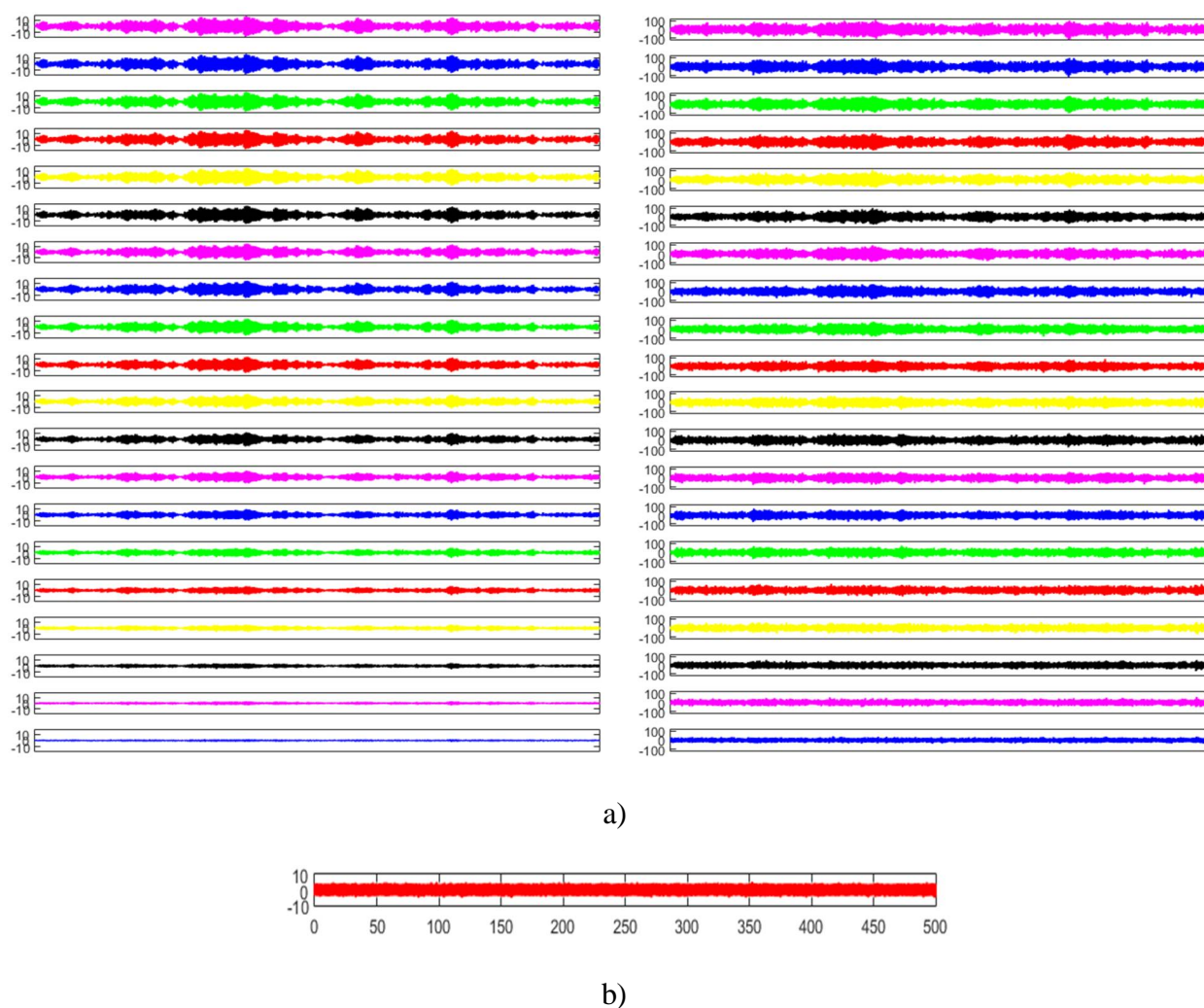


Figura 5.15 - Edifício de 20 pisos. Resposta sob excitação do tipo ruído branco. a) Histórias “observadas” de deslocamentos e velocidades; b) Acelerograma aplicado na base.

Como referido no Capítulo 4, secção 4.2, os resultados do método MMV resultam da média de várias simulações, tendo-se realizado 100 e calculado as respetivas trajetórias médias. Na Figura 5.16 encontram-se representadas as trajetórias médias que ilustram o processo de convergência do MMV ao longo do período de 500 s considerado, são apresentadas as frequências naturais f_n e amortecimentos modais ξ_n (obtidos a partir dos valores próprios λ_n da matriz de estado estimada: $f_n = |\lambda_n| / 2\pi$ e $\xi_n = -\text{Re}(\lambda) / |\lambda|$).

MMV. Trajetórias médias para 100 simulações ($\Delta t = 0,0002$ s)

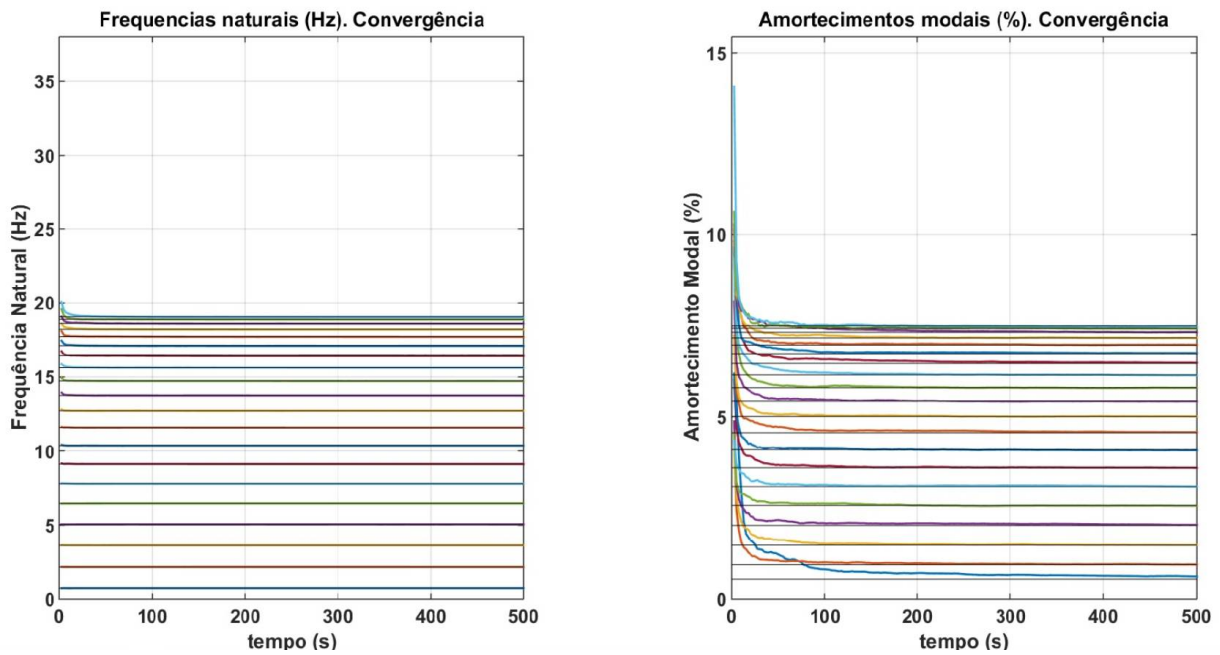


Figura 5.16 - Edifício de 20 pisos. Trajetórias médias que ilustram o processo de convergência do MMV ao longo do período de 500 s considerado, em termos das frequências naturais f_n e amortecimentos modais ξ_n (obtidos a partir dos valores próprios λ_n da matriz de estado estimada: $f_n = |\lambda_n| / 2\pi$ e $\xi_n = -\text{Re}(\lambda) / |\lambda|$).

Na Tabela 5.3 encontram-se os resultados calculados por via analítica e os resultados obtidos pelo MMV, a partir do programada desenvolvido em MATLAB, ModID_MLM1.0. Apresentam-se também as respetivas diferenças entre os resultados obtidos.

	Frequências (Hz)				Amortecimentos (%)		
	Modelo analítico	MMV	dif. (%)		Modelo analítico	MMV	dif. (%)
Modo 1	0,7315	0,7314	-0,01	Modo 1	0,5592	0,6316	+12,95
Modo 2	2,1903	2,1905	0,01	Modo 2	0,9510	0,9586	+0,80
Modo 3	3,6362	3,6361	0,00	Modo 3	1,4826	1,4833	+0,05
Modo 4	5,0608	5,0607	0,00	Modo 4	2,0267	2,0440	+0,85
Modo 5	6,4556	6,4559	0,00	Modo 5	2,5659	2,5562	+0,38
Modo 6	7,8126	7,8124	0,00	Modo 6	3,0935	3,0938	+0,01
Modo 7	9,1238	9,1222	-0,02	Modo 7	3,6047	3,6016	-0,09
Modo 8	10,3814	10,3787	-0,03	Modo 8	4,0959	4,0813	-0,36
Modo 9	11,5781	11,5745	-0,03	Modo 9	4,5639	4,5810	+0,37
Modo 10	12,7068	12,7010	-0,05	Modo 10	5,0056	5,0050	-0,01
Modo 11	13,7609	13,7565	-0,03	Modo 11	5,4184	5,4169	-0,03
Modo 12	14,7344	14,7248	-0,07	Modo 12	5,7997	5,8009	+0,02
Modo 13	15,6213	15,6129	-0,05	Modo 13	6,1472	6,1377	-0,15
Modo 14	16,4166	16,4058	-0,07	Modo 14	6,4589	6,4786	+0,31
Modo 15	17,1155	17,1022	-0,08	Modo 15	6,7329	6,7482	+0,23
Modo 16	17,7140	17,7039	-0,06	Modo 16	6,9675	6,9738	+0,09
Modo 17	18,2085	18,1949	-0,07	Modo 17	7,1614	7,1649	0,05
Modo 18	18,5962	18,5811	-0,08	Modo 18	7,3134	7,3194	+0,08
Modo 19	18,8748	18,8535	-0,11	Modo 19	7,4226	7,4135	-0,12
Modo 20	19,0426	19,0213	-0,11	Modo 20	7,4884	7,4815	-0,09

Tabela 5.3 - Edifício de 20 pisos. Comparação entre os resultados obtidos pelo modelo analítico e os resultados obtidos com o MMV para as frequências e os amortecimentos.

A Figura 5.17 apresenta uma comparação entre os resultados obtidos pelo modelo analítico e os resultados obtidos com o MMV, no que diz respeito aos modos de vibração, frequências naturais e amortecimentos modais.

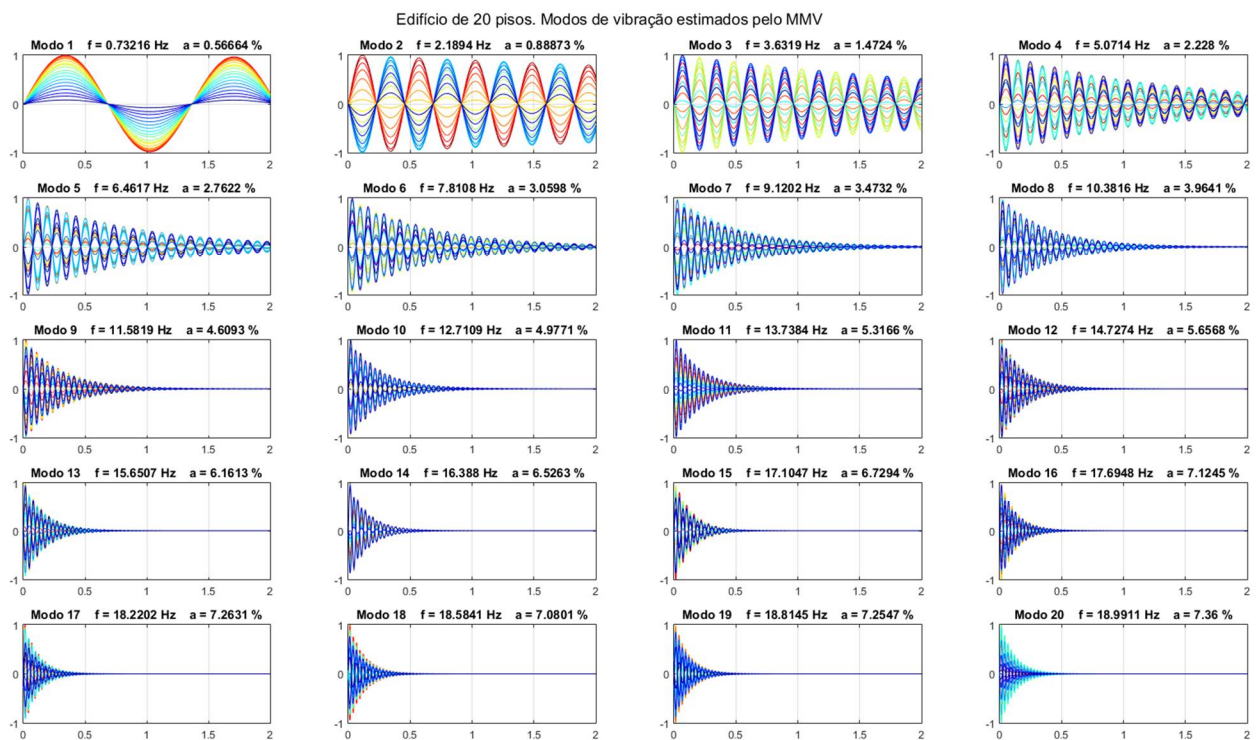
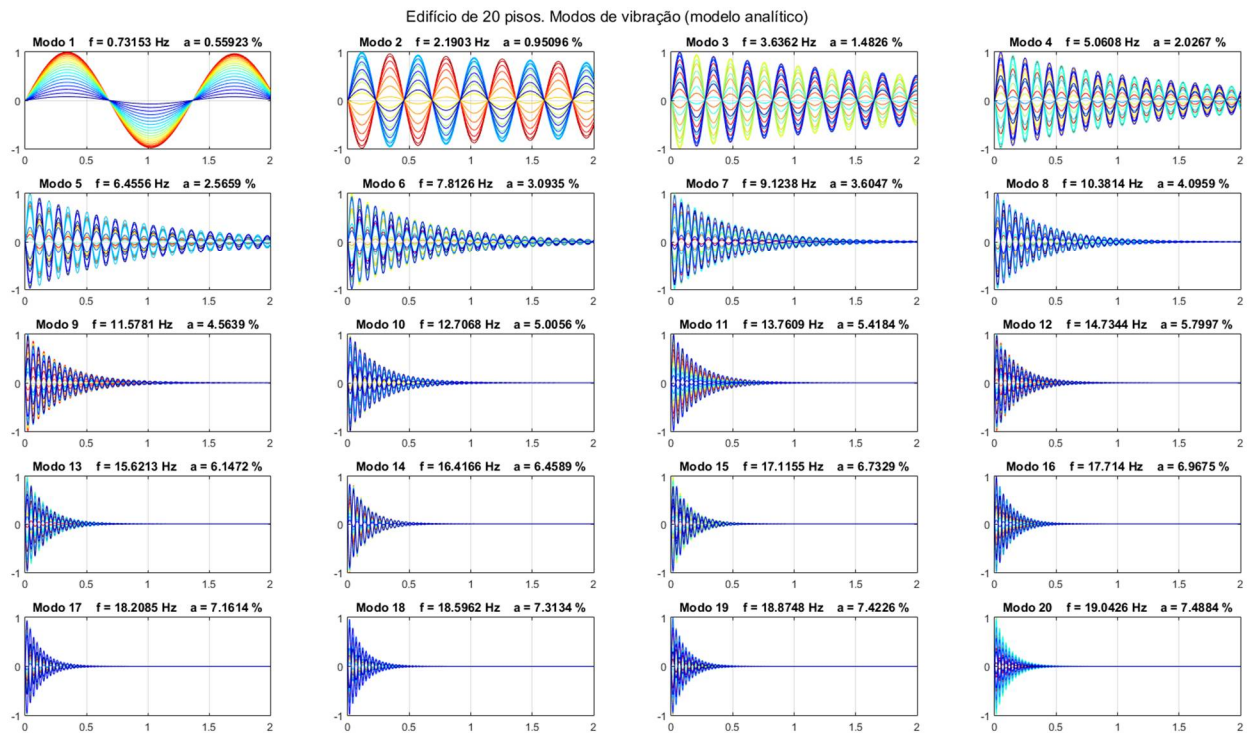


Figura 5.17 - Edifício de 20 pisos. Modos de vibração obtidos pelo MMV (frequências naturais, amortecimentos modais). Comparação entre os resultados do modelo analítico e os resultados obtidos com o MMV.

respeito às frequências naturais, amortecimentos modais e respectivos modos de vibração se encontram em concordância.

A análise dos valores anteriormente calculados, para cada exemplo de aplicação, ilustra que o método MMV permite obter, com clareza, os parâmetros modais esperados. Quanto aos modos de vibração, estes foram facilmente identificados, encontrando-se em harmonia com os associados ao modelo analítico. As frequências naturais obtidas em ambas as aplicações conduziram na sua maioria, a valores de trajetória inferiores aos valores do modelo analítico, nunca atingindo uma diferença de 1%, pelo que se pode considerar que se encontram em conformidade. Quanto aos amortecimentos modais os respectivos valores foram maioritariamente superiores aos valores do modelo analítico, tendo diferenças máximas na ordem dos 13%. Verificou-se que quanto maior o tempo observado e maior a discretização do tempo, melhores são os resultados obtidos. Tal constatou-se, não só nos valores das frequências, mas, principalmente, nos valores dos amortecimentos, conforme se pode constatar na Tabela 5.3, em que apenas o primeiro modo apresenta maior diferença de amortecimento (superior a 9%).

5.2.2 Caso de sistemas parcialmente observados

No caso de sistemas parcialmente observados, o método de identificação modal a utilizar é o Stochastic Subspace Identification-Covariance, SSI-Cov, Método de identificação estocástica em subespaços, usando covariância. Este método encontra-se descrito no Capítulo 4, secção 4.3. Foi desenvolvido um programa em MATLAB para a aplicação deste método, por forma a se proceder à identificação modal a partir do método SSI-Cov. Nesta primeira fase foram feitos testes utilizando as acelerações medidas em todos os pisos de um edifício, considerando o exemplo de edifício descrito na Figura 5.1. Posteriormente, foram feitos testes no mesmo modelo do edifício, mas desta vez considerando edifícios com mais pisos e menos pisos “observados”. O programa em MATLAB para a aplicação do método SSI-Cov permite elaborar os diagramas de estabilização que contêm os valores das frequências naturais. Por forma a se ter uma melhor leitura e interpretação dos diagramas de estabilização, os mesmos têm como fundo o espectro de Fourier das acelerações no piso superior, conforme explicado no Capítulo 4, subsecção 4.3.5.

5.2.2.1 Edifício com 3 Pisos (considerando que são observados todos os pisos)

Para a aplicação do método SSI-Cov no caso do edifício de três pisos, segue-se um modelo como o apresentado na Figura 5.1, sendo considerado que o edifício é “observado” em todos os pisos, tendo sido medidas as histórias de acelerações nos três pisos, obtém-se o diagrama de estabilização representado na Figura 5.19, para uma ordem do modelo de 30, com andamento unitário a partir da ordem 10 e um período de observação de 100 s, com um intervalo de tempo de 0,002 s .

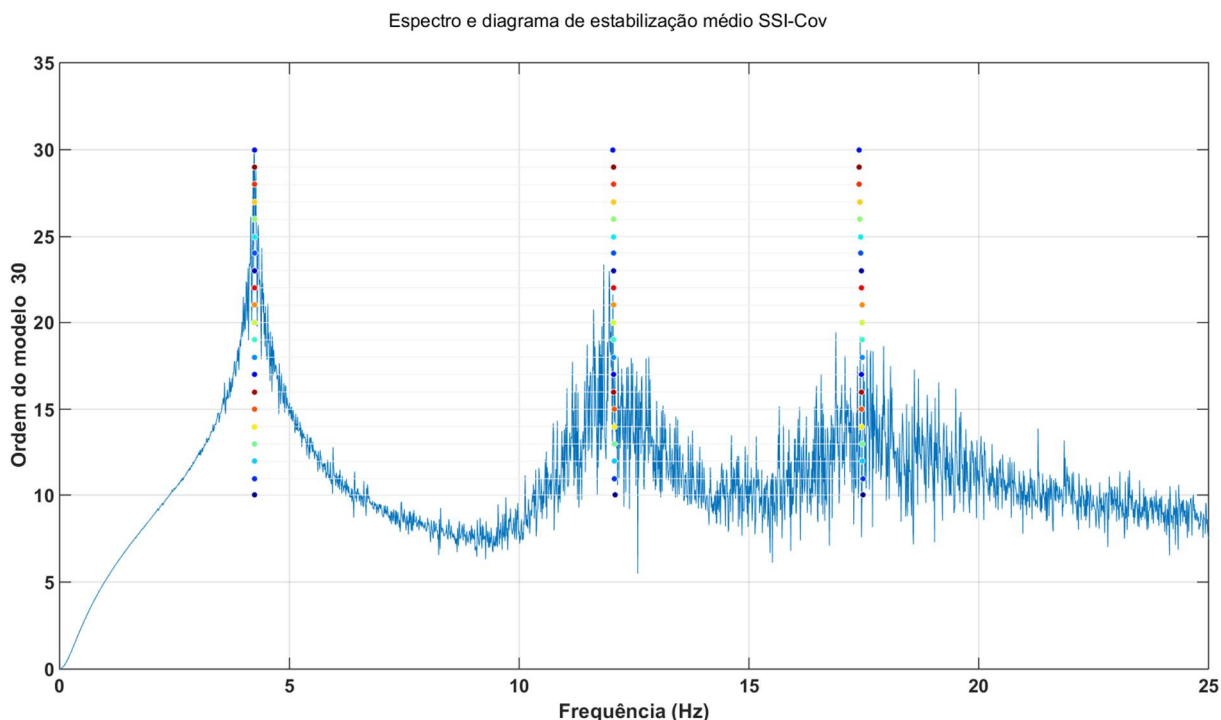


Figura 5.19 - Edifício de 3 pisos. Espectro de Fourier das acelerações no piso superior e diagrama de estabilização obtido pelo método SSI-Cov (frequências naturais) para um período de “observação” de 100 s ($\Delta t=0,002$ s): utilizaram-se histórias de acelerações nos 3 pisos, geradas com o modelo analítico.

A Figura 5.20 apresenta uma comparação entre os resultados obtidos pelo modelo analítico e os resultados obtidos com o SSI-Cov, no que diz respeito aos modos de vibração, frequências naturais e amortecimentos modais.

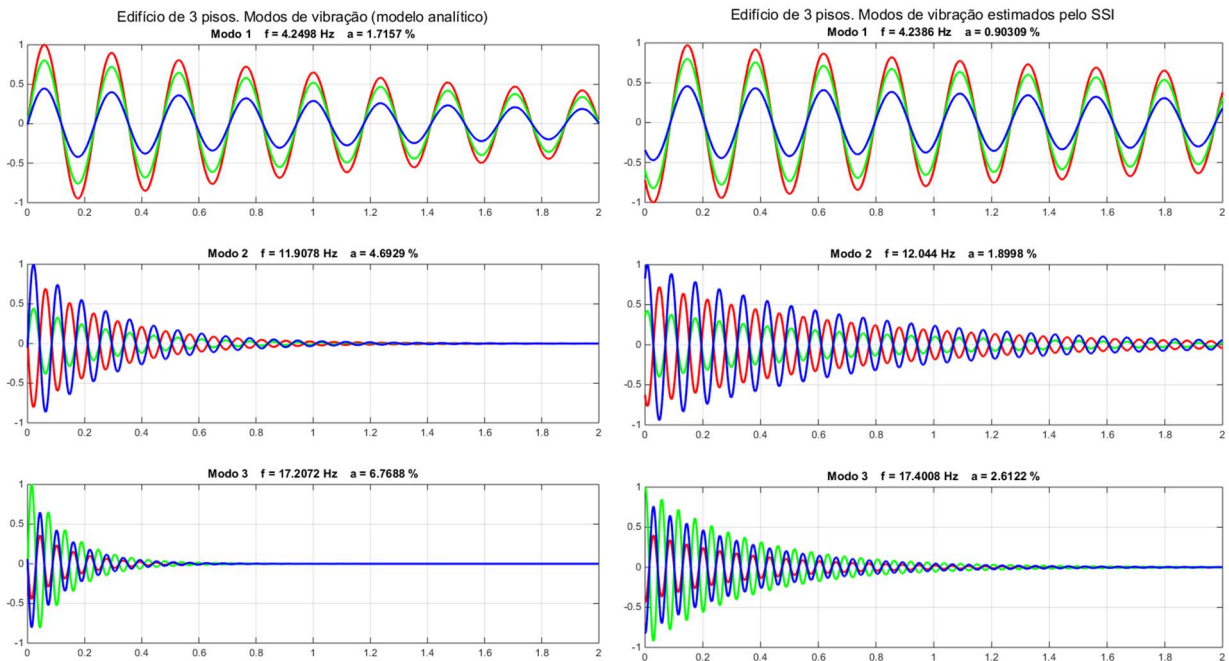


Figura 5.20 - Edifício de 3 pisos. Modos de vibração obtidos pelo SSI-Cov (frequências naturais, amortecimentos modais). Comparação entre os resultados do modelo analítico e os resultados obtidos com o SSI-Cov.

Na Tabela 5.4 encontram-se os resultados calculados por via analítica e os resultados obtidos pelo método SSI-Cov (para uma única simulação), a partir do programada desenvolvido em MATLAB, ModID_SSI-Cov1.0. Apresentam-se também as diferenças entre os resultados obtidos.

		Modelo analítico	SSI-Cov	dif. (%)
Frequências (Hz)	Modo 1	4,2498	4,2386	-0,26
	Modo 2	11,9078	12,0440	+1,14
	Modo 3	17,2072	17,4008	+1,13
Amortecimentos (%)	Modo 1	1,7157	0,9031	-47,36
	Modo 2	4,6929	1,8998	-59,52
	Modo 3	6,7688	2,6122	-61,41

Tabela 5.4 – Edifício de 3 pisos. Comparação entre os resultados obtidos pelo modelo analítico e os resultados obtidos com o SSI-Cov para as frequências e os amortecimentos.

Pela análise da Tabela 5.4, relativamente às frequências naturais, verifica-se que os valores obtidos pelo método SSI-Cov foram na sua maioria superiores às do modelo analítico, com diferenças inferiores a 2%, encontrando-se em conformidade. Quanto aos valores dos amortecimentos

estimados pelo método SSI-Cov, estes ficaram muito por baixo dos calculados analiticamente, atingindo-se diferenças acima dos 50%. Estes valores são demasiado elevados, pelo que não devem ser tidos em conta.

5.2.2.2 Edifício com 6 Pisos (considerando que são observados todos os pisos)

Para a aplicação do método SSI-Cov no caso do edifício de seis pisos, segue-se um modelo como o apresentado na Figura 5.1, considera-se que o edifício é “observado” em todos os pisos, tendo sido medidas as histórias de acelerações nos três pisos, obtendo-se o diagrama de estabilização representado na Figura 5.21, para uma ordem do modelo de 30, com andamento unitário a partir da ordem 10 e um período de observação de 100 s, com um intervalo de tempo de 0,002 s .

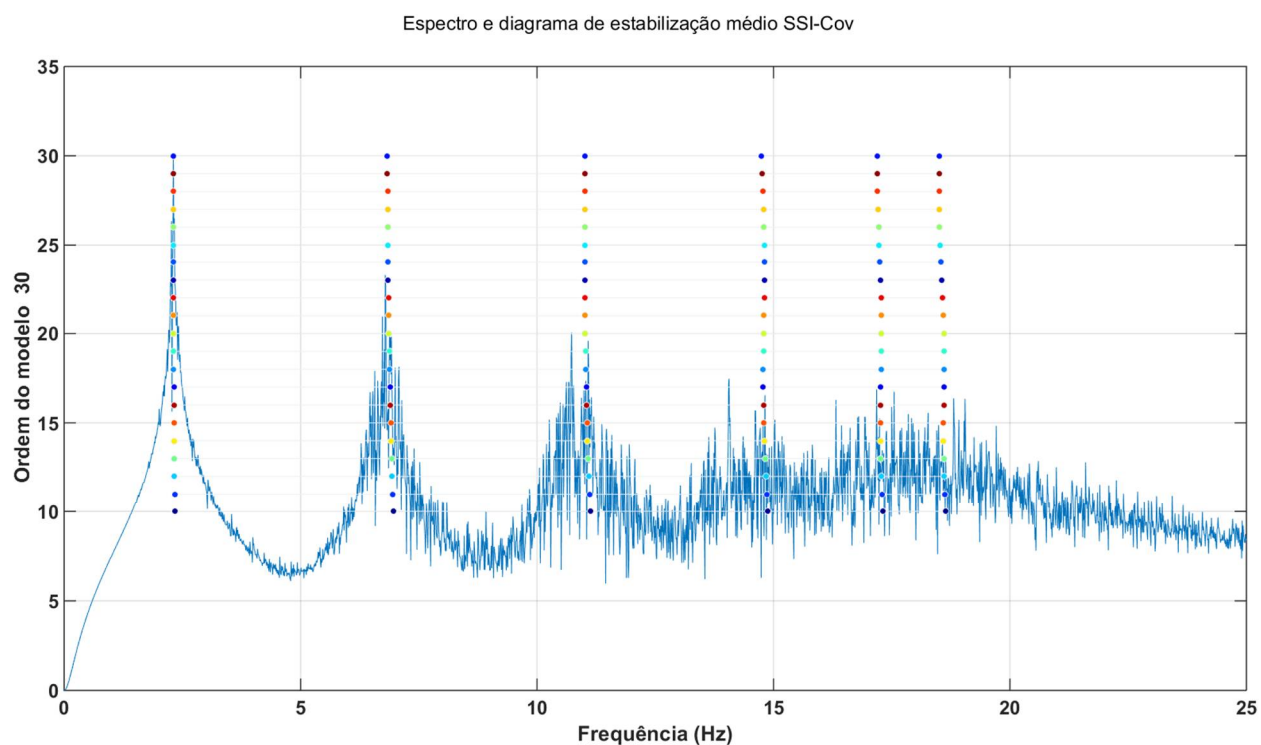


Figura 5.21 - Edifício de 6 pisos. Espectro de Fourier das acelerações no piso superior e diagrama de estabilização obtido pelo método SSI-Cov (frequências naturais) para um período de “observação” de 100 s ($\Delta t=0,002$ s): utilizaram-se histórias de acelerações nos 6 pisos, geradas com o modelo analítico.

A Figura 5.22 apresenta uma comparação ente os resultados obtidos pelo modelo analítico e os resultados obtidos com o SSI-Cov, no que diz respeito aos modos de vibração, frequências naturais e amortecimentos modais.

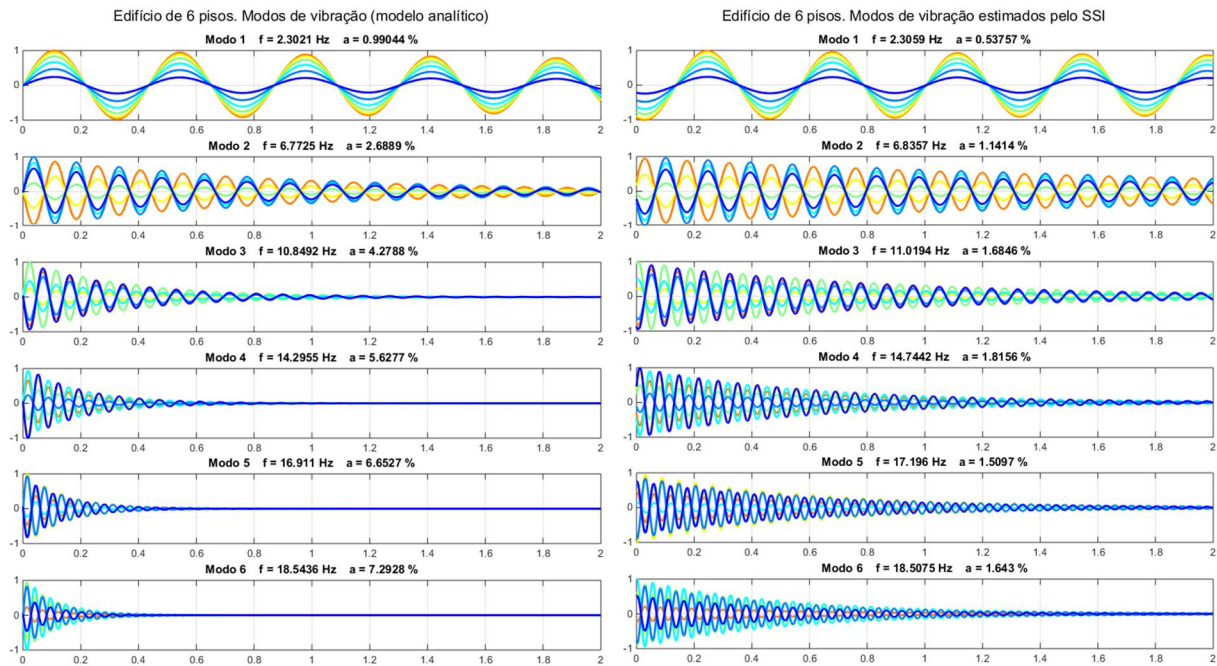


Figura 5.22 - Edifício de 6 pisos. Modos de vibração estimados pelo SSI-Cov (frequências naturais, amortecimentos modais). Comparação entre os resultados do modelo analítico e os resultados estimados com o SSI-Cov.

Na Tabela 5.5 encontram-se os resultados calculados por via analítica e os resultados obtidos pelo método SSI-Cov, a partir do programa desenvolvido em MATLAB, ModID_SSI-Cov1.0. Apresentam-se também as diferenças entre os resultados obtidos.

	Frequências (Hz)				Amortecimentos (%)		
	Modelo analítico	SSI-Cov	dif. (%)		Modelo analítico	SSI-Cov	dif. (%)
Modo 1	2,3021	2,3059	+0,17	Modo 1	0,9904	0,5376	-45,72
Modo 2	6,7725	6,8357	+0,93	Modo 2	2,6889	1,1414	-57,55
Modo 3	10,8492	11,0194	+1,57	Modo 3	4,2788	1,6846	-60,63
Modo 4	14,2955	14,7442	+3,14	Modo 4	5,6277	1,8156	-67,74
Modo 5	16,9110	17,1960	+1,69	Modo 5	6,6527	1,5097	-77,31
Modo 6	18,5436	18,5075	-0,19	Modo 6	7,2928	1,6430	-77,47

Tabela 5.5 - Edifício de 6 pisos. Comparação entre os resultados obtidos pelo modelo analítico e os resultados obtidos com o SSI-Cov para as frequências e os amortecimentos.

Pela análise da Tabela 5.5, relativamente às frequências naturais, verifica-se que os valores obtidos pelo método SSI-Cov foram na sua maioria superiores aos do modelo analítico, com diferenças inferiores a 3%, encontrando-se em conformidade. Quanto aos valores dos amortecimentos

estimados pelo método SSI-Cov, estes ficaram muito por baixo dos calculados analiticamente, atingindo-se diferenças acima dos 70%. Estes valores são demasiado elevados, pelo que não vão ser tidos em conta, conforme mencionado anteriormente.

5.2.2.3 Edifício com 20 Pisos (considerando que são observados todos os pisos)

Para a aplicação do método SSI-Cov no caso do edifício de vinte pisos, segue-se um modelo como o apresentado na Figura 5.1, considera-se que o edifício é “observado” em todos os pisos, tendo sido medidas as histórias de acelerações nos vinte pisos, obtendo-se o diagrama de estabilização representado na Figura 5.23, para uma ordem do modelo de 30, com andamento unitário a partir da ordem 10 e um período de observação de 100 s, com um intervalo de tempo de 0,01 s .

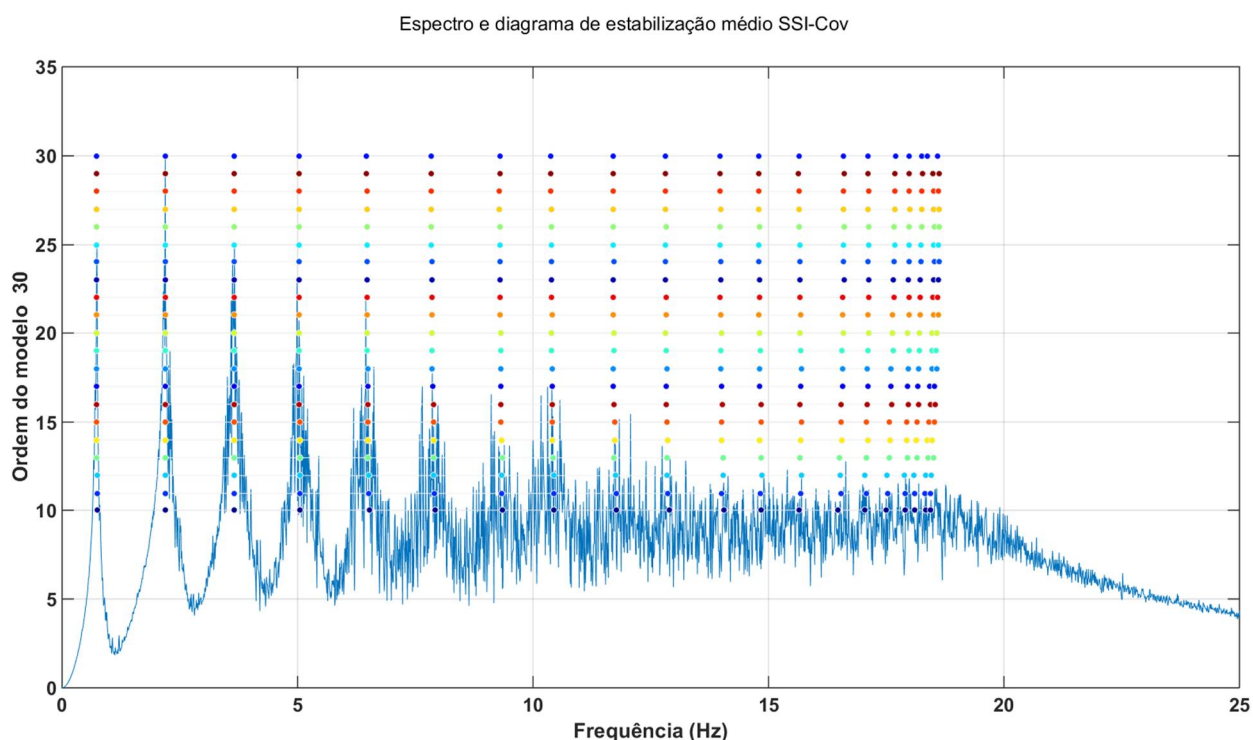


Figura 5.23 - Edifício de 20 pisos. Espectro de Fourier das acelerações no piso superior e diagrama de estabilização obtido pelo método SSI-Cov (frequências naturais) para um período de “observação” de 100 s ($\Delta t=0,01$ s): utilizaram-se histórias de acelerações nos 20 pisos, geradas com o modelo analítico.

A Figura 5.24 apresenta uma comparação entre os resultados obtidos pelo modelo analítico e os resultados obtidos com o SSI-Cov, no que diz respeito aos modos de vibração, frequências naturais e amortecimentos modais.

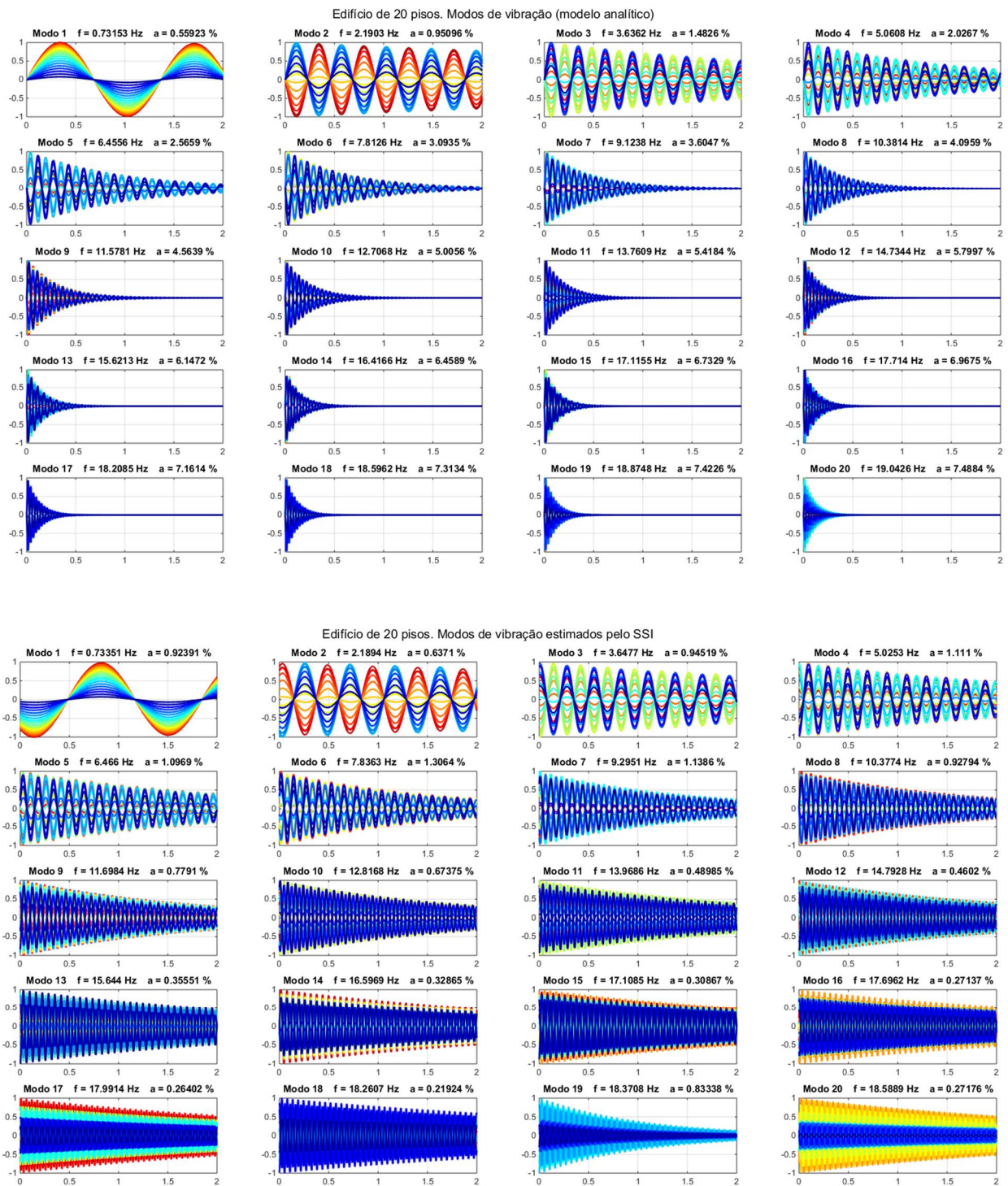


Figura 5.24 - Edifício de 20 pisos. Modos de vibração obtidos pelo SSI-Cov (frequências naturais, amortecimentos modais). Comparação entre os resultados do modelo analítico e os resultados obtidos com o SSI- Cov.

Na Tabela 5.6 encontram-se os resultados calculados por via analítica e os resultados obtidos pelo método SSI-Cov, a partir do programa desenvolvido em MATLAB, ModID_SSIciv1.0. Apresentam-se também as diferenças entre os resultados obtidos.

	Frequências (Hz)				Amortecimentos (%)		
	Modelo analítico	SSI-Cov	dif. (%)		Modelo analítico	SSI-Cov	dif. (%)
Modo 1	0,73153	0,73351	+0,27	Modo 1	0,55923	0,92391	+65,21
Modo 2	2,19029	2,18943	-0,04	Modo 2	0,95096	0,6371	-33,00
Modo 3	3,6362	3,64774	+0,32	Modo 3	1,48265	0,94519	-36,25
Modo 4	5,06077	5,02527	-0,70	Modo 4	2,02667	1,11098	-45,18
Modo 5	6,45565	6,46595	+0,16	Modo 5	2,56594	1,09686	-57,25
Modo 6	7,81264	7,83631	+0,30	Modo 6	3,09348	1,30635	-57,77
Modo 7	9,12378	9,29514	+1,88	Modo 7	3,6047	1,13865	-68,41
Modo 8	10,3814	10,3774	-0,04	Modo 8	4,09592	0,92794	-77,34
Modo 9	11,5781	11,6984	+1,04	Modo 9	4,56387	0,7791	-82,93
Modo 10	12,7068	12,8168	+0,87	Modo 10	5,0056	0,67375	-86,54
Modo 11	13,7609	13,9686	+1,51	Modo 11	5,41837	0,48985	-90,96
Modo 12	14,7344	14,7928	+0,40	Modo 12	5,79967	0,4602	-92,07
Modo 13	15,6213	15,644	+0,15	Modo 13	6,14721	0,35551	-94,22
Modo 14	16,4166	16,5969	+1,10	Modo 14	6,45889	0,32865	-94,91
Modo 15	17,1155	17,1085	-0,04	Modo 15	6,73287	0,30867	-95,42
Modo 16	17,714	17,6962	-0,10	Modo 16	6,9675	0,27137	-96,11
Modo 17	18,2085	17,9914	-1,19	Modo 17	7,1614	0,26402	-96,31
Modo 18	18,5962	18,2607	-1,80	Modo 18	7,31341	0,21924	-97,00
Modo 19	18,8748	18,3708	-2,67	Modo 19	7,42264	0,83338	-88,77
Modo 20	19,0426	18,5889	-2,38	Modo 20	7,48844	0,27176	-96,37

Tabela 5.6 - Edifício de 20 pisos. Comparação entre os resultados obtidos pelo modelo analítico e os resultados estimados com o SSI-Cov para as frequências e os amortecimentos.

Pela análise da Tabela 5.6, relativamente às frequências naturais, verifica-se que os valores obtidos pelo método SSI-Cov foram na sua maioria superiores aos do modelo analítico, com diferenças inferiores a 3%, encontrando-se em conformidade. Quanto aos valores dos amortecimentos obtidos pelo método SSI-Cov, estes ficaram muito por baixo dos calculados analiticamente, atingindo-se diferenças acima dos 90%. Estes valores, mais uma vez, são demasiado elevados, pelo que não vão ser tidos em conta, conforme mencionado anteriormente.

5.2.2.4 Edifício de 8 pisos (considerando que são observados apenas 6 pisos)

Para a aplicação do método SSI-Cov no caso do edifício de oito pisos, segue-se um modelo como o apresentado na Figura 5.1, considera-se que o edifício é “observado” apenas em alguns pisos, tendo sido medidas as histórias de acelerações em seis pisos, obtendo-se o diagrama de estabilização representado na Figura 5.25, para uma ordem do modelo de 30, com andamento unitário a partir da ordem 10 e um período de observação de 100 s, com um intervalo de tempo de 0,01 s .

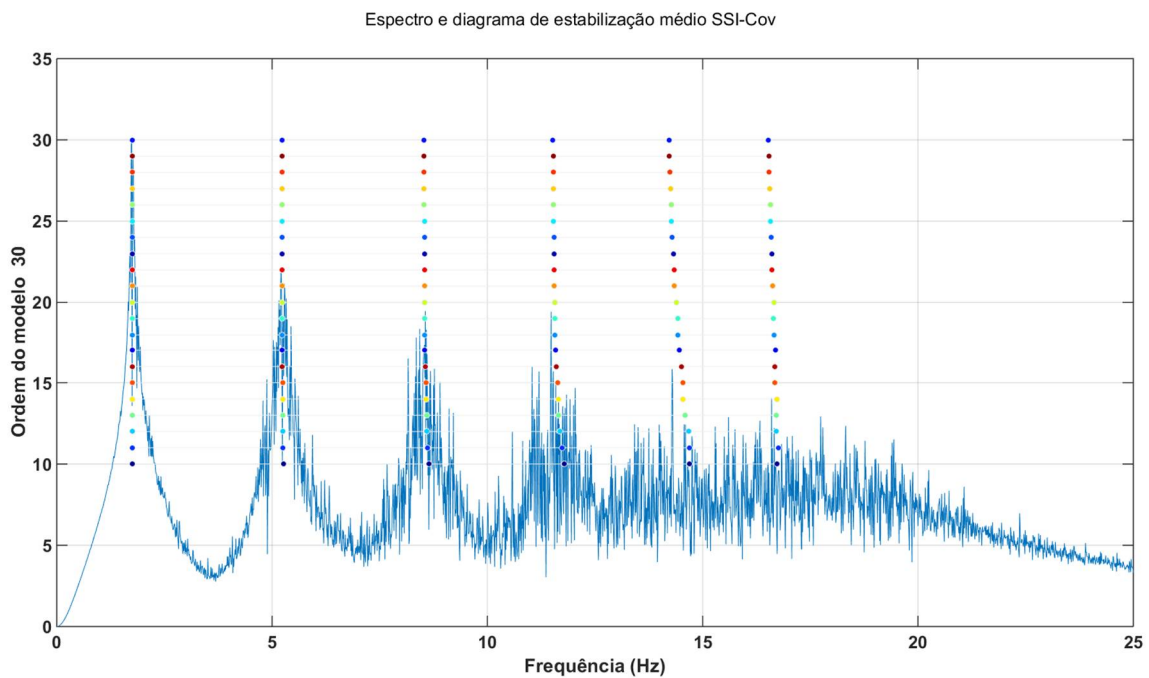


Figura 5.25 - Edifício de 8 pisos com apenas 6 pisos observados. Espectro de Fourier das acelerações no piso superior e diagrama de estabilização obtido pelo método SSI-Cov (frequências naturais) para um período de “observação” de 100 s ($\Delta t=0,01$ s): utilizaram-se histórias de acelerações nos 6 pisos, geradas com o modelo analítico.

A Figura 5.26 apresenta uma comparação ente os resultados obtidos pelo modelo analítico e os resultados obtidos com o método SSI-Cov, no que diz respeito aos modos de vibração, frequências naturais e amortecimentos modais.

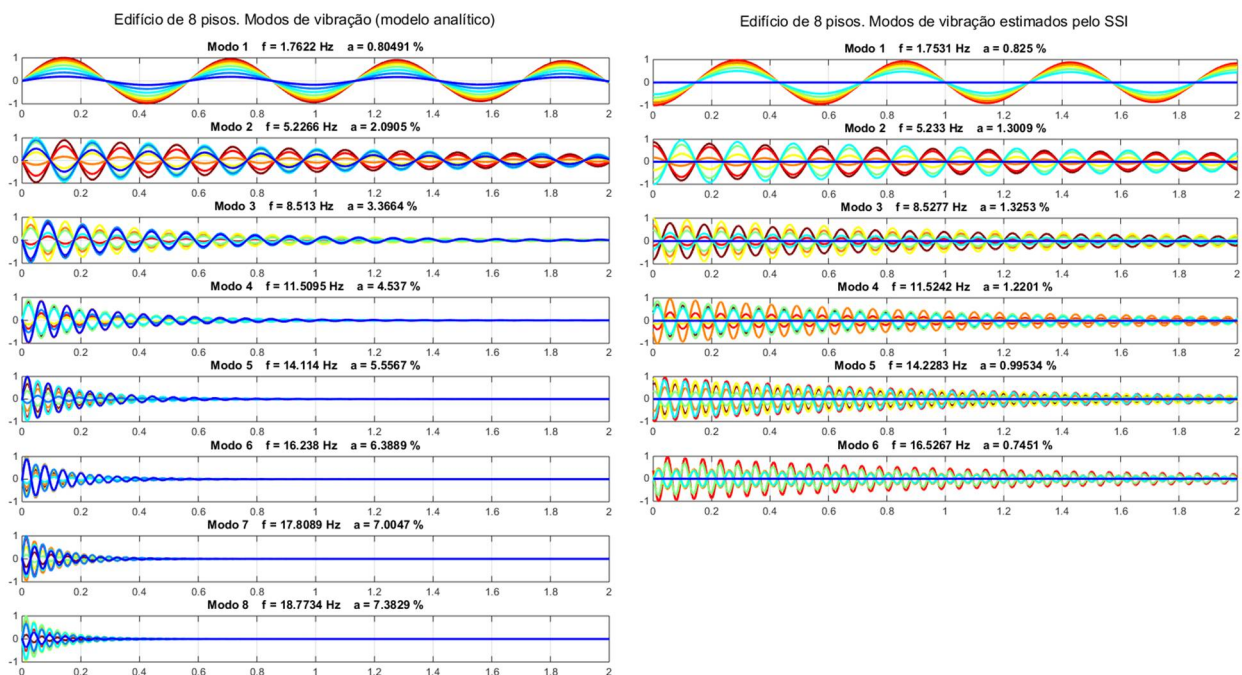


Figura 5.26 - Edifício de 8 pisos com apenas 6 pisos observados. Comparação entre os resultados do modelo analítico e os resultados obtidos com o SSI-Cov..

Na Tabela 5.7 encontram-se os resultados calculados por via analítica e os resultados obtidos pelo método SSI-Cov, a partir do programa ModID_SSI-Cov1.0, desenvolvido em MATLAB. Apresentam-se também as diferenças entre os resultados obtidos.

	Frequências (Hz)				Amortecimentos (%)		
	Modelo analítico	SSI-Cov	dif. (%)		Modelo analítico	SSI-Cov	dif. (%)
Modo 1	1,7622	1,7531	-0,52	Modo 1	0,8049	0,8250	+2,50
Modo 2	5,2266	5,2330	+0,12	Modo 2	2,0905	1,3009	-37,77
Modo 3	8,5130	8,5277	+0,17	Modo 3	3,3664	1,3253	-60,63
Modo 4	11,5095	11,5242	+0,13	Modo 4	4,5370	1,2201	-73,11
Modo 5	14,1140	14,2283	+0,81	Modo 5	5,5567	0,9953	-82,09
Modo 6	16,2380	16,5267	+1,78	Modo 6	6,3889	0,7451	-88,34
Modo 7	17,8089	-	-	Modo 7	7,0047	-	-
Modo 8	18,7734	-	-	Modo 8	7,3829	-	-

Tabela 5.7 - Edifício de 8 pisos com apenas 6 observados. Comparação entre os resultados obtidos pelo modelo analítico e os resultados obtidos com o SSI-Cov para as frequências e os amortecimentos.

Pela análise da Tabela 5.7, relativamente às frequências naturais, verifica-se que os valores estimados pelo ao método SSI-Cov foram na sua maioria superiores às do modelo analítico, com diferenças inferiores a 2%, encontrando-se em conformidade. Quanto aos valores dos amortecimentos estimados pelo método SSI-Cov, estes ficaram muito por baixo dos calculados analiticamente, atingindo-se diferenças acima dos 80%. Conforme mencionado anteriormente, estes valores são demasiado elevados, pelo que não vão ser tidos em conta.

5.2.2.5 Edifício de 20 pisos (considerando que são observados apenas 16 pisos)

Para a aplicação do método SSI-Cov no caso do edifício de vinte pisos, segue-se um modelo como o apresentado na Figura 5.1, considera-se que o edifício é “observado” em alguns pisos, tendo sido medidas as histórias de acelerações em 16 pisos, obtendo-se o diagrama de estabilização representado na Figura 5.27, para uma ordem do modelo de 30, com andamento unitário a partir da ordem 10 e um período de observação de 100 s, com um intervalo de tempo de 0,01 s .

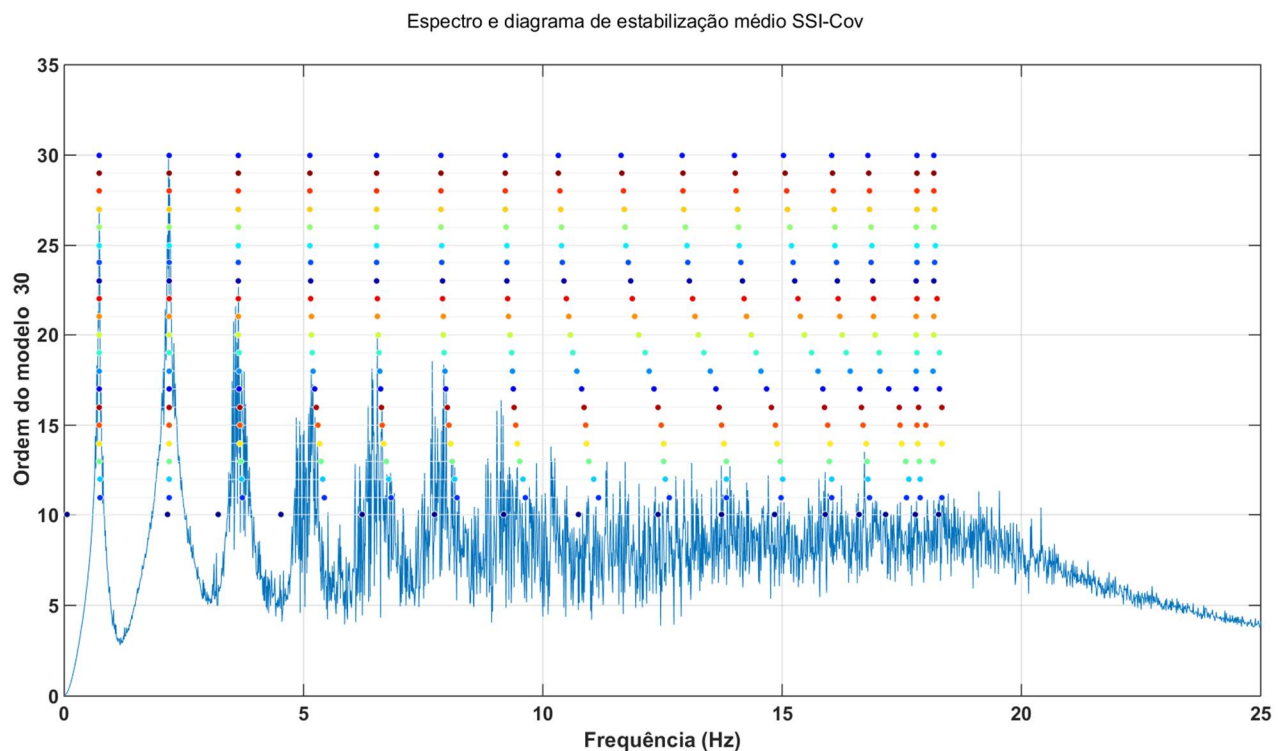


Figura 5.27 - Edifício de 20 pisos com apenas 16 pisos observados. Espectro de Fourier das acelerações no piso superior e diagrama de estabilização obtido pelo método SSI-Cov (frequências naturais) para um período de “observação” de 100 s ($\Delta t=0,01$ s): utilizaram-se histórias de acelerações nos 16 pisos, geradas com o modelo analítico.

A Figura 5.28 apresenta uma comparação entre os resultados obtidos pelo modelo analítico e os resultados obtidos com o método SSI-Cov, no que diz respeito aos modos de vibração, frequências naturais e amortecimentos modais.

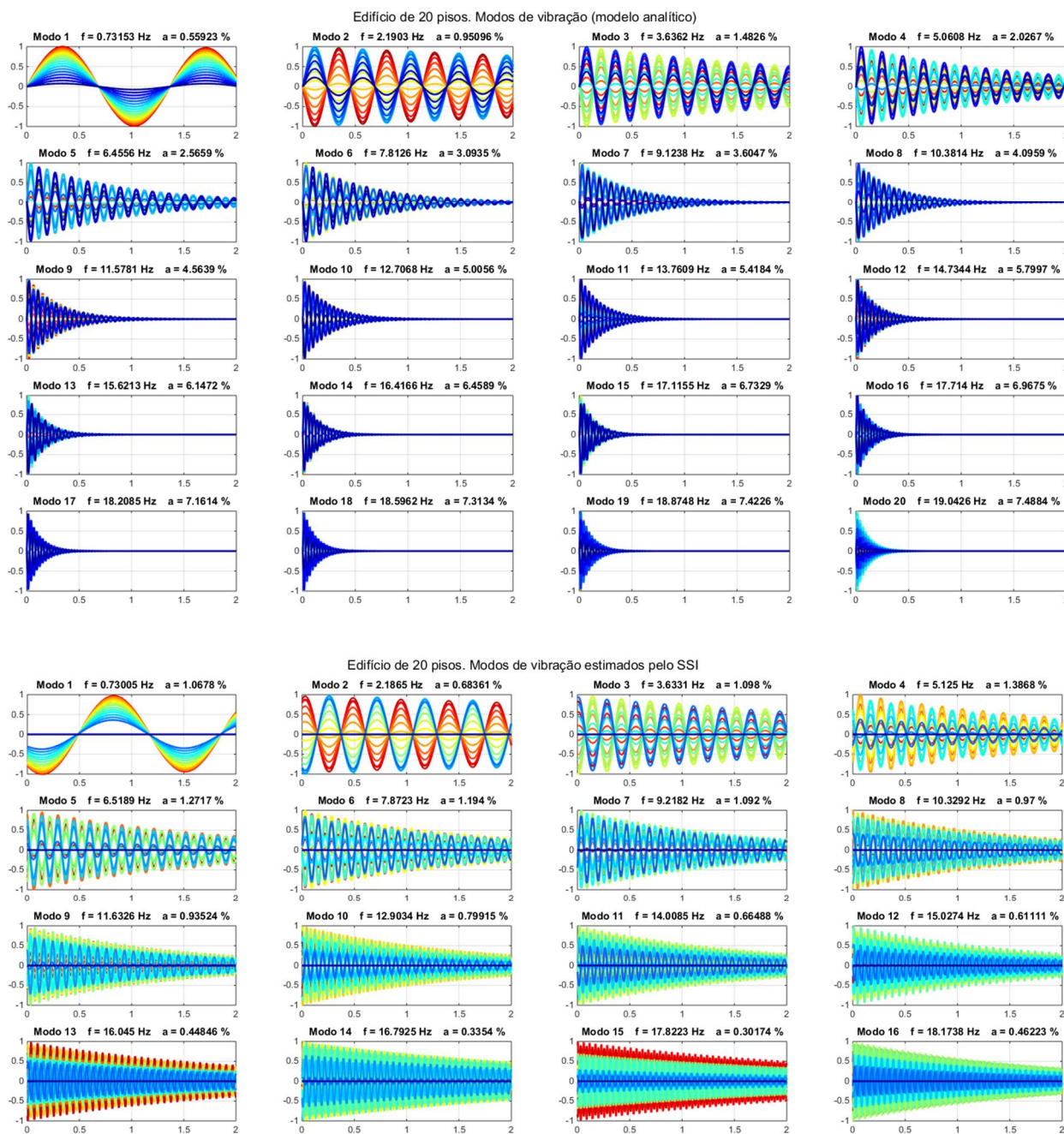


Figura 5.28 - Edifício de 20 pisos com apenas 16 pisos observados. Comparação entre os resultados do modelo analítico e os resultados obtidos com o SSI-Cov para 16 pisos.

Na Tabela 5.8 encontram-se os resultados calculados por via analítica e os resultados obtidos pelo método SSI-Cov, a partir do programa ModID_SSI-Cov1.0, desenvolvido em MATLAB. Apresentam-se também as diferenças entre os resultados obtidos.

	Frequências (Hz)				Amortecimentos (%)		
	Modelo analítico	SSI-Cov	dif. (%)		Modelo analítico	SSI-Cov	dif. (%)
Modo 1	0,73153	0,73005	-0,20	Modo 1	0,55923	1,06777	+90,94
Modo 2	2,19029	2,18649	-0,17	Modo 2	0,95096	0,68361	-28,11
Modo 3	3,6362	3,63307	-0,09	Modo 3	1,48265	1,09801	-25,94
Modo 4	5,06077	5,12501	+1,27	Modo 4	2,02667	1,38685	-31,57
Modo 5	6,45565	6,51888	+0,98	Modo 5	2,56594	1,27167	-50,44
Modo 6	7,81264	7,87234	+0,76	Modo 6	3,09348	1,19403	-61,40
Modo 7	9,12378	9,21822	+1,04	Modo 7	3,6047	1,09199	-69,71
Modo 8	10,3814	10,3292	-0,50	Modo 8	4,09592	0,97	-76,32
Modo 9	11,5781	11,6326	+0,47	Modo 9	4,56387	0,93524	-79,51
Modo 10	12,7068	12,9034	+1,55	Modo 10	5,0056	0,79915	-84,03
Modo 11	13,7609	14,0085	+1,80	Modo 11	5,41837	0,66488	-87,73
Modo 12	14,7344	15,0274	+1,99	Modo 12	5,79967	0,61111	-89,46
Modo 13	15,6213	16,045	+2,71	Modo 13	6,14721	0,44846	-92,70
Modo 14	16,4166	16,7925	+2,29	Modo 14	6,45889	0,3354	-94,81
Modo 15	17,1155	17,8223	+4,13	Modo 15	6,73287	0,30174	-95,52
Modo 16	17,714	18,1738	+2,60	Modo 16	6,9675	0,46223	-93,37
Modo 17	18,2085	-	-	Modo 17	7,1614	-	-
Modo 18	18,5962	-	-	Modo 18	7,31341	-	-
Modo 19	18,8748	-	-	Modo 19	7,42264	-	-
Modo 20	19,0426	-	-	Modo 20	7,48844	-	-

Tabela 5.8 - Edifício de 20 pisos com apenas 16 observados. Comparação entre os resultados obtidos pelo modelo analítico e os resultados obtidos com o método SSI-Cov para as frequências e os amortecimentos.

Pela análise dos resultados, no que diz respeito às frequências naturais, observou-se que as mesmas se encontram em concordância, tendo os valores obtidos pelo método SSI-Cov sido muito semelhantes aos obtidos pelo modelo analítico. Tal pode verificar-se quando são medidas as histórias de acelerações em todos os pisos do edifício, bem como quando o número de “observações” é inferior ao número de pisos existentes. Assim, poder-se-á afirmar que o método SSI-Cov é adequado para a obtenção das frequências naturais. Relativamente aos valores dos amortecimentos, estes estão demasiado abaixo dos valores calculados pelo modelo analítico, apresentando erros na ordem dos 90%. São valores que não podem ser considerados para análise, assumindo-se desta forma a ineficácia do método SSI-Cov para o cálculo dos amortecimentos. Tal discrepância de valores deve-se ao facto do método não ser adequado para estimar os amortecimentos.

5.3 Barragem do Cabril. Identificação modal utilizando resultados gerados numericamente com um modelo de EF3D

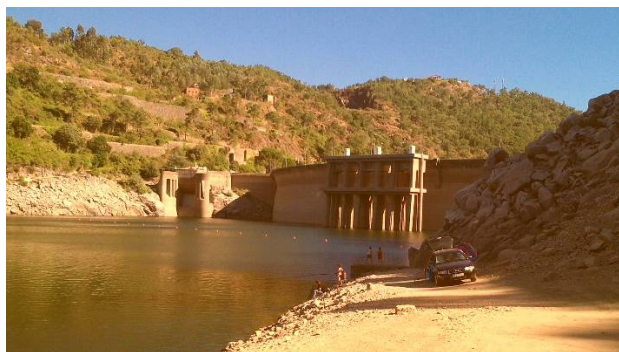
5.3.1 Descrição da barragem do Cabril

A barragem do Cabril (Figura 5.29), a mais alta de Portugal (inaugurada em 31 de julho de 1954, atualmente com 63 anos), situa-se no distrito de Castelo Branco no rio Zêzere. Encontra-se fundada num maciço granítico e possui uma capacidade útil de albufeira de 6,15 hm³.

Esta barragem foi construída, em conjunto com outras duas (Bouçã e Castelo de Bode), para aproveitamento das potencialidades do Zêzere, conseguindo ter uma Potência Nominal de 108 MW, com dois 2 grupos de produção de energia.



a)



b)

Figura 5.29 - Barragem do Cabril. a) Vista de jusante. b) Vista de montante.

O corpo da barragem do Cabril consiste numa abóboda de dupla curvatura, com a particularidade de apresentar uma maior espessura no coroamento (ver consola central Figura 5.30). Tem 132 m de altura máxima acima da fundação e um desenvolvimento de 290 m, no coroamento, entre encontros. O perfil central possui uma espessura na base de 20,2 m, junto ao soco, e possui uma espessura mínima de 4,5 m à cota 290 m.

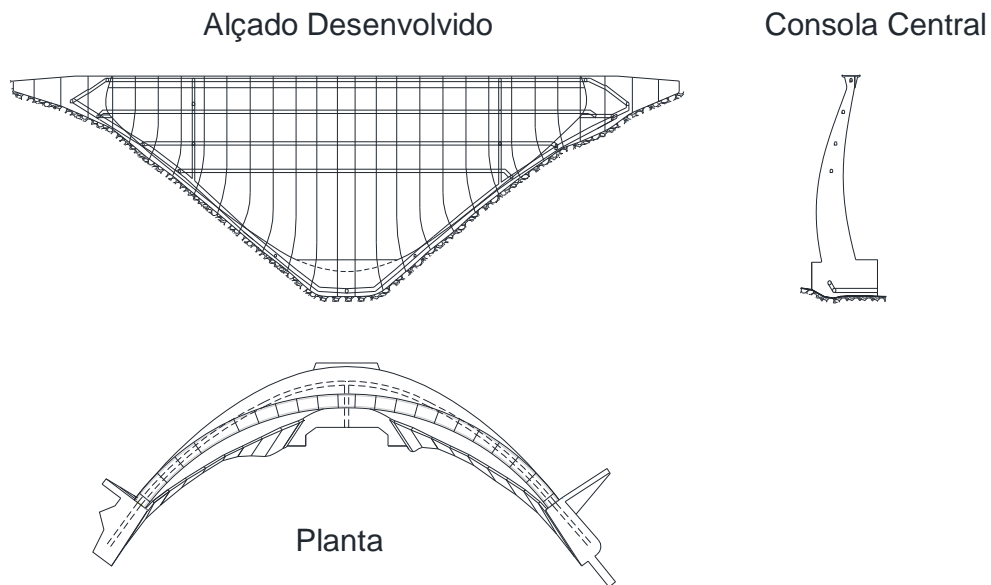
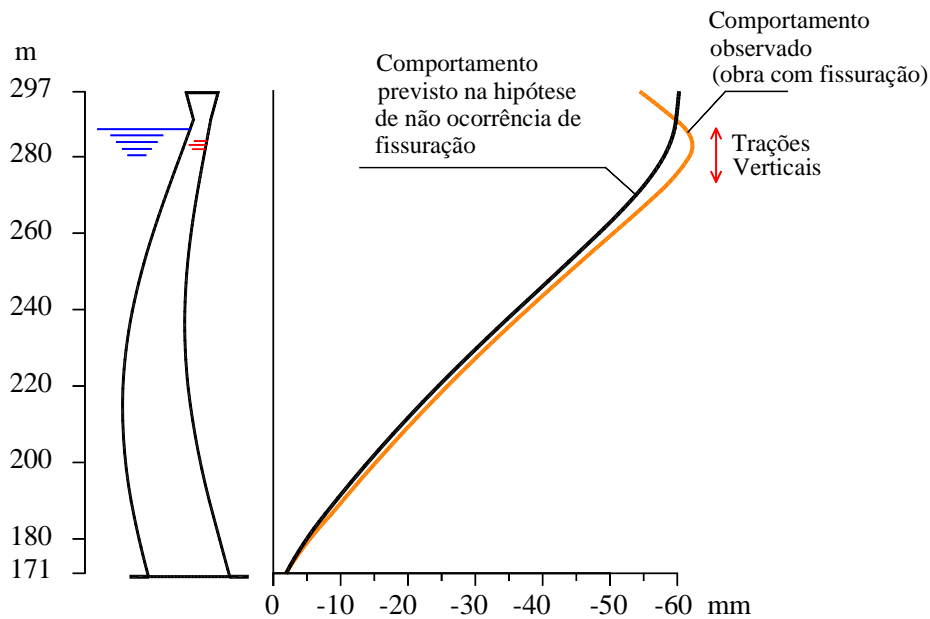


Figura 5.30 - Barragem do Cabril. Alçado desenvolvido, consola central e planta.

Após o primeiro enchimento da barragem, em 1954, foi detetada uma fendilhação horizontal no paramento de jusante, situada numa faixa entre os 15 e os 30 m abaixo do coroamento (Figura 5.31). Desde essa data, o LNEC tem acompanhado o processo de fendilhação e tem desenvolvido modelos numéricos com vista a estudar a influência da fendilhação na segurança estrutural da barragem. Na Figura 5.31 apresenta-se a deformada da consola central, para uma situação de albufeira cheia, comparando os resultados numéricos obtidos na hipótese de não ocorrência de fendilhação, com os resultados correspondentes à deformada real da obra (fendilhada), a qual foi obtida a partir de dados da observação (geodesia), após análise com um modelo de separação de efeitos (Oliveira, 2000).



Fendilhação horizontal na zona superior central, no paramento de jusante (onde se indica a ocorrência de trações verticais)



Figura 5.31 – Comportamento da barragem do Cabril. Deslocamentos da consola central, adaptado de (Oliveira, 2000).

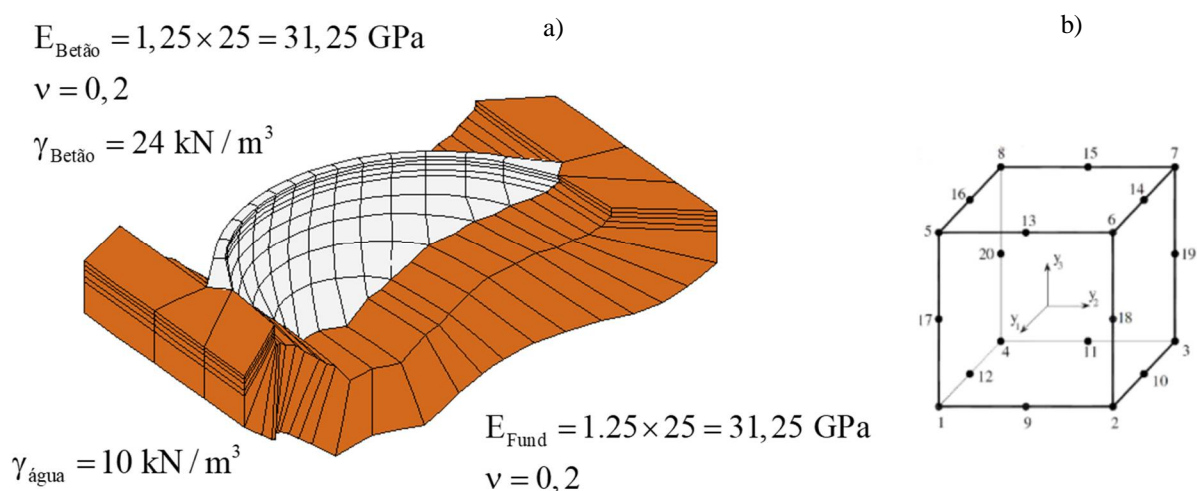
Através da análise da Figura 5.31, verifica-se que podem surgir trações verticais a jusante causadas pela maior rigidez do coroamento. Devido a estas trações desenvolveu-se fendilhação horizontal que influencia o comportamento estrutural da obra. Tendo em conta esta situação, realizaram-se estudos específicos para caracterizar melhor a influência da fendilhação na resposta estrutural da barragem. Estes estudos envolvem inspeções visuais periódicas (uma por ano), a medição da resposta dinâmica sob excitação ambiente/operacional e o desenvolvimento de modelos numéricos que têm em conta a fendilhação.

É ainda de referir que a barragem do Cabril é afetada por fenómenos expansivos que, ao longo do tempo, estão a provocar deslocamentos radiais evolutivos no sentido de montante e deslocamentos verticais de empolamento.

5.3.2 Modelo de elementos finitos adotado para geração dos registos de vibrações sob excitação aleatória

Nesta secção utiliza-se o programa **DynDam 1.0** (programa de EF3D para análise dinâmica de barragens em regime elástico-linear, considerando a hipótese de massas de água associadas de Westergaard, com um coeficiente de redução de 50% (Alegre et al. 2017)) para gerar numericamente histórias de acelerações na barragem do Cabril considerando excitação aleatória do tipo ruído branco. O objetivo é gerar as referidas histórias de acelerações em alguns pontos no corpo da barragem, com vista a simular histórias “observadas” em obra, para agora testar o programa de identificação modal ModID_SSIcCov1.0 com dados referentes a uma barragem: as frequências, amortecimentos e configurações modais identificadas a partir das histórias de acelerações geradas numericamente podem ser comparadas com as do modelo de EF3D o que permitirá testar eficazmente o programa de identificação modal ModID_SSIcCov1.0.

No modelo de elementos finitos (Figura 5.32) foi adotada uma discretização com um total de 202 elementos (106 na barragem e 96 da fundação) e 1569 pontos nodais.

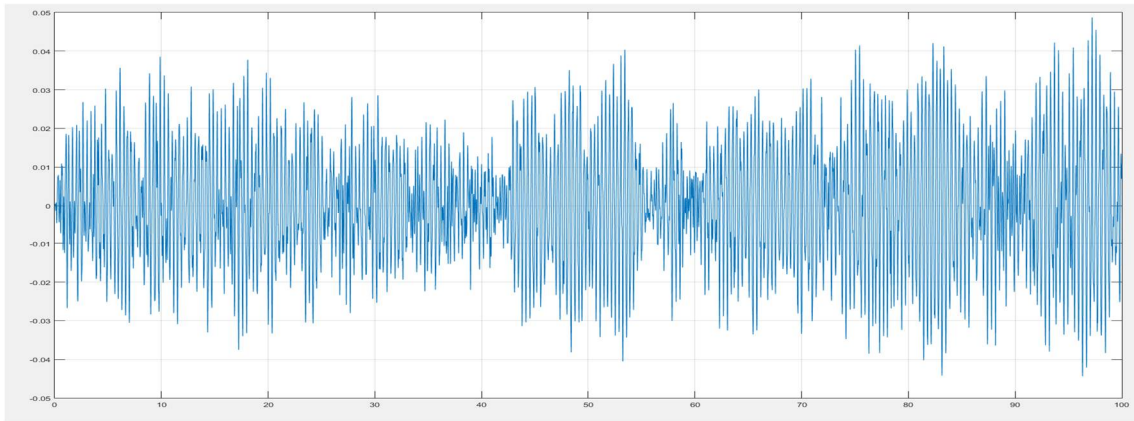


Pressão hidrodinâmica: consideração de massas de água associadas de Westergaard com redução de 50%

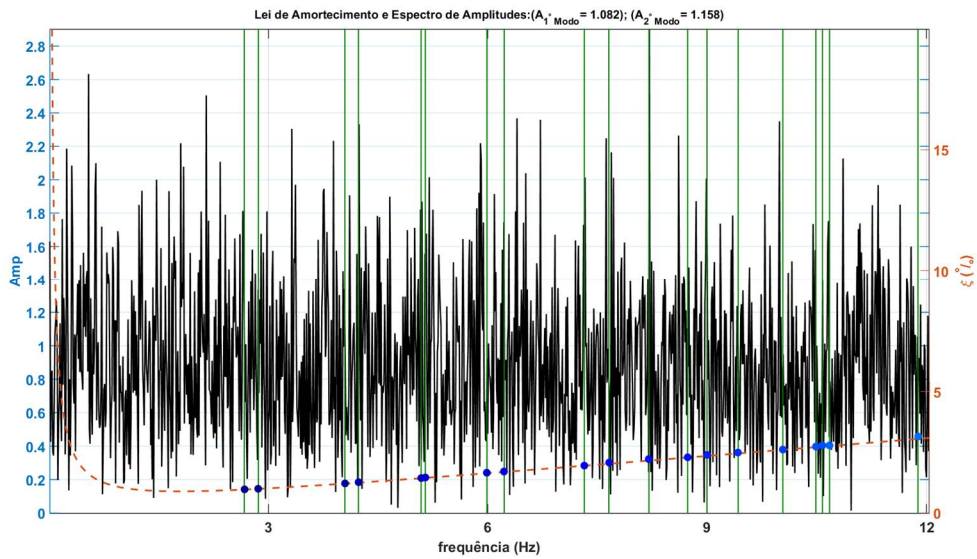
Figura 5.32 – Malha de EF do conjunto barragem-fundação: a) Discretização utilizada no programa DynDam1.0; b)

Tipo de elemento finito considerado (tipo cubo, isoparamétrico, com 20 pontos nodais).

Em termos dos acelerogramas de atuantes, foi aplicado um acelerograma na base do tipo ruído branco (Figura 5.33).



a)



b)

Figura 5.33 – a) Aplicação de excitação do tipo ruído branco: acelerograma aplicado na base; b) Lei de amortecimento e espectro de amplitudes. (obtidos pelo programa DynDam1.0).

Para o nível de água na albufeira à cota 260 m foram efetuados os cálculos dinâmicos com o programa DynDam1.0 (MEF3D), tendo-se obtido as frequências naturais e s modos de vibração, apresentados na Figura 5.34. Foram geradas as pretendidas histórias de acelerações, simulando “histórias observadas”, a partir das quais se efetua a identificação modal com o método SSI-Cov, para posterior comparação entre os parâmetros modais identificados e os do MEF3D.

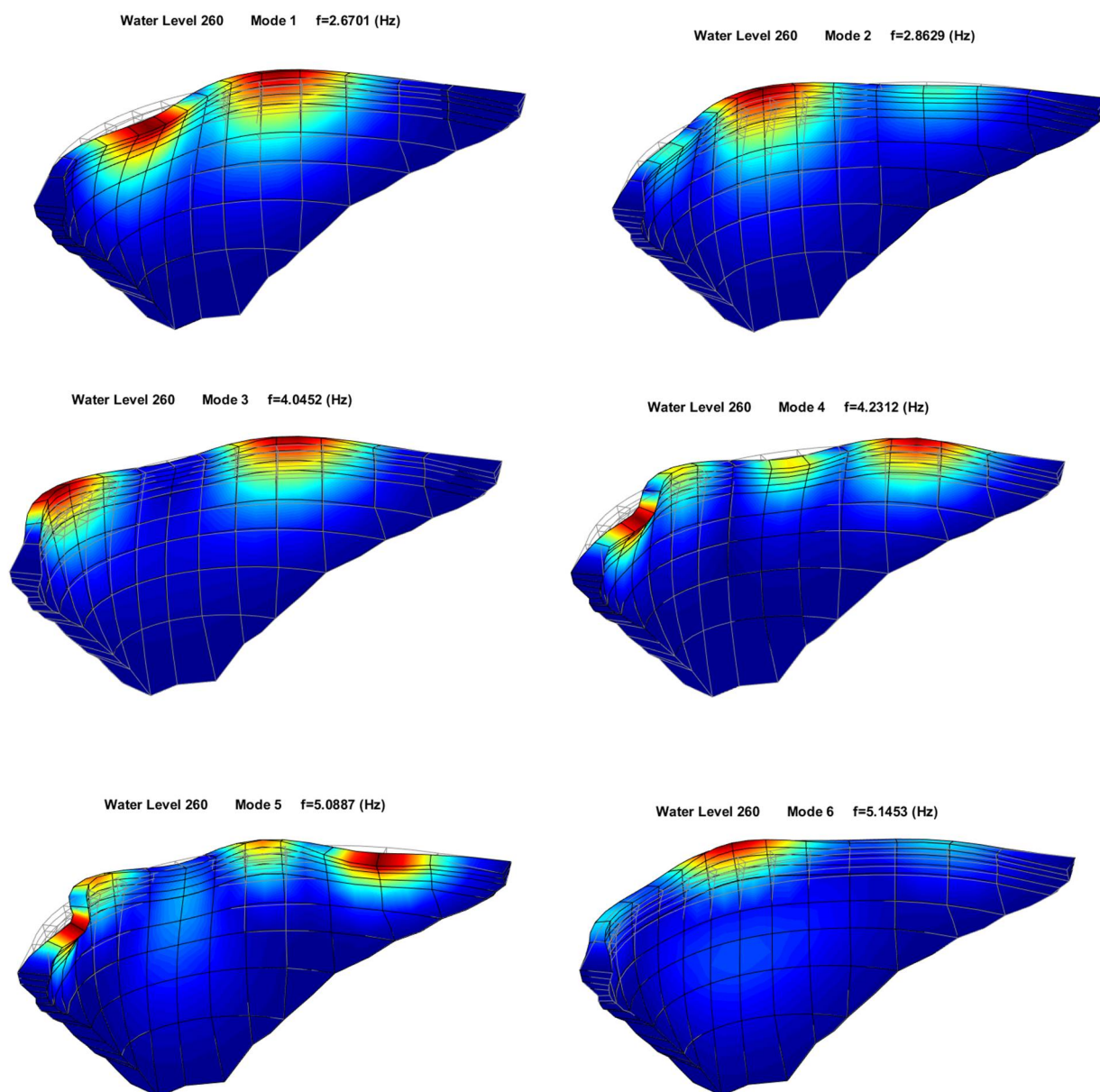


Figura 5.34 – Barragem do Cabril. Modos de vibração calculados com o programa DynDam1.0 (MEF3D, com massas de água associadas), para a água à cota 260 m.

5.3.3 Análise dos registos de vibrações gerados numericamente com o MEF.

Identificação modal com o método SSI-Cov

Nesta seção o programa ModID_SSI-Cov1.0 é testado com base em histórias de acelerações geradas numericamente com o modelo de EF3D da barragem do Cabril, atrás descrito.

Foram geradas numericamente histórias de acelerações “observadas” num dado número de pontos da barragem, para uma cota de água de 260 m. Estas histórias geradas constituem os “*inputs*” do programa ModID_SSI-Cov1.0, que, a partir das histórias de acelerações em vários pontos,

identifica as frequências naturais da barragem (configurações modais e amortecimentos modais), as quais poderão ser comparadas com respectivos valores calculados numericamente com o MEF3 (com o DynDam1.0).

Os valores a seguir apresentados referem-se a registros de vibrações gerados numericamente com o MEF3D (utilizando o programa DynDam1.0) e à respectiva identificação modal com o método SSI-Cov (utilizando o programa ModID_SSICov1.0).

5.3.3.1 Utilização de registros gerados numericamente em 5 pontos (no coroamento da barragem)

Considerando histórias de acelerações radiais geradas numericamente em 5 pontos nodais ao nível do coroamento, devidamente espaçados, (simulando histórias “observadas”) com a duração de 100 s e um intervalo de tempo de $\Delta t = 0,02$ s, a aplicação do método SSI-Cov permitiu obter o diagrama de estabilização da Figura 5.35, considerando modelos de identificação de ordem $r = 20$ até $r = 35$.

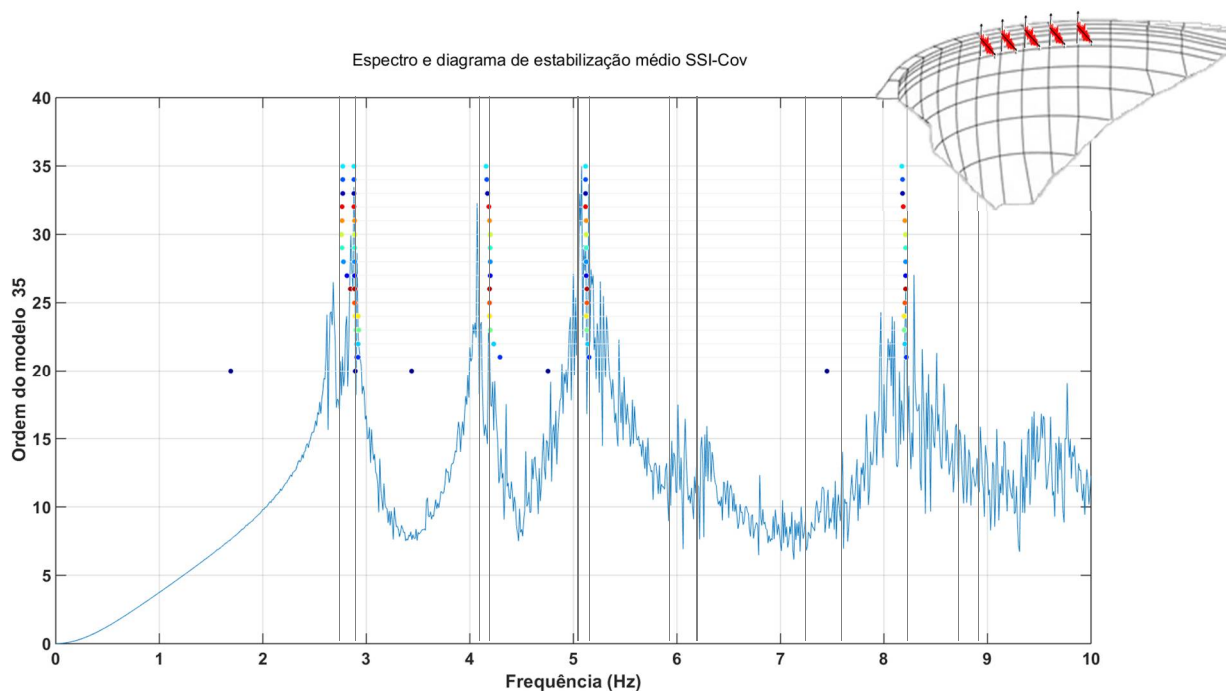


Figura 5.35 – Barragem do Cabril (água à cota 260 m): utilização de histórias de acelerações radiais em 5 pontos no coroamento, geradas numericamente com o DynDam1.0. Comparação entre frequências naturais de referência, calculadas com o MEF (linhas verticais), e o diagrama de estabilização obtido método SSI-Cov (ModID_SSICov1.0), indicando as frequências naturais identificadas através de conjuntos de pontos formando linhas tendencialmente verticais. Sobreposição com um espectro médio obtido pelo método FDD.

Na Tabela 5.9 apresentam-se as frequências naturais da barragem, calculadas com o modelo de EF3D que foi utilizado para gerar as histórias de acelerações, e os correspondentes valores obtidos por identificação modal com método SSI-Cov, utilizando programa ModID_SSI-Cov1.0. Apresentam-se também as diferenças entre os resultados do MEF3D e os resultados da identificação como SSI-Cov.

Barragem do Cabril (água à cota 260 m)			
Frequências naturais (Hz)			
	Modelo MEF3D	SSI-Cov (histórias geradas em 5 pontos)	dif. (%)
Modo 1	2,6701	2,7690	+3,70
Modo 2	2,8629	2,8771	+0,50
Modo 3	4,0452	4,1576	+2,78
Modo 4	4,2312	-	-
Modo 5	5,0887	5,1147	+0,51
Modo 6	5,1453	-	-
Modo 7	5,9880	-	-
Modo 8	6,2246	-	-
Modo 9	7,3204	-	-
Modo 10	7,6566	-	-
Modo 11	8,2046	8,1847	-0,24

Tabela 5.9 – Teste do programa ModID_SSI-Cov1.0 utilizando histórias de acelerações geradas numericamente com o MEF3D, em 5 pontos do coroamento da barragem do Cabril (água à cota 260 m). Comparação entre as frequências calculadas com o MEF3D e as frequências identificadas com o método SSI-Cov.

Pela análise da Figura 5.35 e da Tabela 5.9, com os valores das frequências naturais calculadas com o MEF3D e identificadas com o SSI-Cov utilizando histórias de acelerações em apenas 5 pontos, verifica-se que, apesar do reduzido número de pontos considerado, ainda assim este método permite identificar com boa aproximação as frequências naturais dos três principais modos e ainda do modo 5 e do modo 11.

5.3.3.2 Utilização de registos gerados numericamente em 9 pontos (no coroamento da barragem)

Considerando histórias de acelerações radiais geradas em 9 pontos nodais ao nível do coroamento, devidamente espaçados, (simulando histórias “observadas”) com a duração de 100 s e um intervalo de tempo de $\Delta t = 0,02$ s, a aplicação do método SSI-Cov permitiu obter o diagrama de estabilização apresentado na Figura 5.36, considerando modelos de identificação de ordem $r = 20$ até $r = 35$.

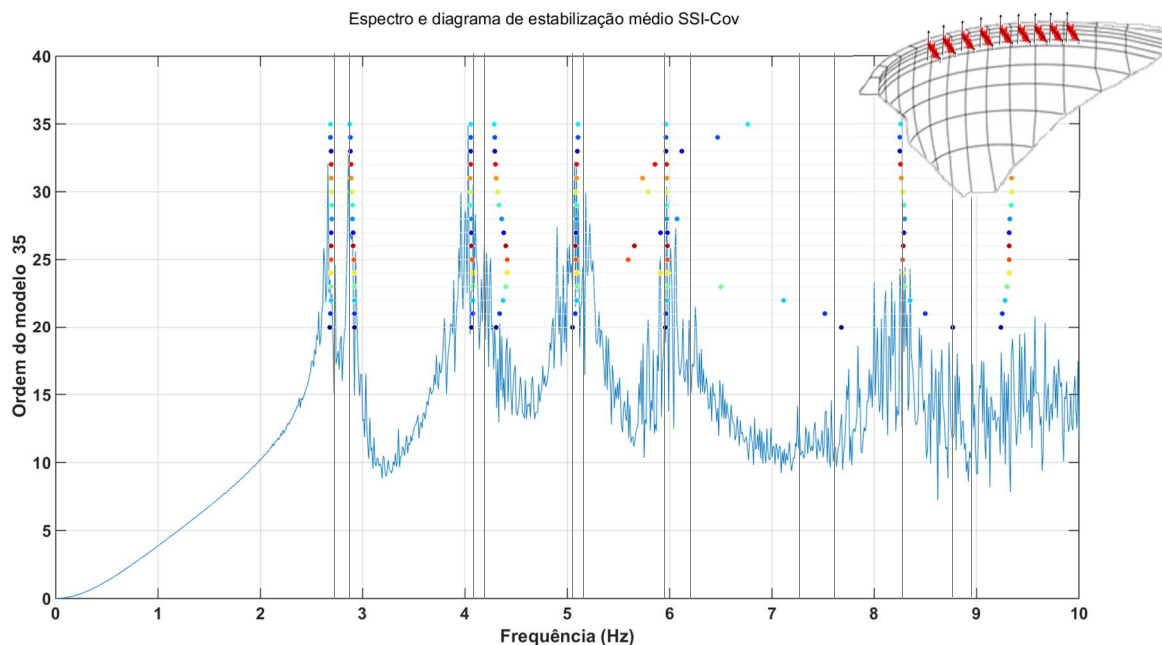


Figura 5.36 - Barragem do Cabril (água à cota 260 m): utilização de histórias de acelerações radiais em 9 pontos no coroamento, geradas numericamente com o DynDam1.0. Comparação entre frequências naturais de referência, calculadas com o MEF (linhas verticais), e o diagrama de estabilização obtido método SSI-Cov (ModID_SSI-Cov1.0), indicando as frequências naturais identificadas através de conjuntos de pontos formando linhas tendencialmente verticais. Sobreposição com um espectro médio obtido pelo método FDD.

Na Tabela 5.10 apresentam-se as frequências naturais de referência calculadas com o MEF3D e as frequências naturais identificadas pelo método SSI-Cov (ModID_SSI-Cov1.0) e as respectivas diferenças em percentagem.

Barragem do Cabril (água à cota 260 m)			
Frequências naturais (Hz)			
	Modelo MEF3D	SSI-Cov (histórias geradas em 9 pontos)	dif. (%)
Modo 1	2,6701	2,6837	+0,51
Modo 2	2,8629	2,8754	+0,44
Modo 3	4,0452	4,0580	+0,31
Modo 4	4,2312	4,2841	+1,25
Modo 5	5,0887	5,1035	+0,29
Modo 6	5,1453	-	-
Modo 7	5,9880	5,9655	-0,38
Modo 8	6,2246	-	-
Modo 9	7,3204	-	-
Modo 10	7,6566	-	-
Modo 11	8,2046	8,2538	+0,60

Tabela 5.10 – Teste do programa ModID_SSI-Cov1.0 utilizando histórias de acelerações geradas numericamente com o MEF3D, em 9 pontos do coroamento da barragem do Cabril (água à cota 260 m). Comparação entre as frequências calculadas com o MEF3D e as frequências identificadas com o método SSI-Cov.

Pela análise da Tabela 5.10 verifica-se que utilizando registos de acelerações em 9 pontos os resultados da identificação modal são bastante melhores do que com 5 pontos, sendo agora bem captadas as frequências dos 5 primeiros modos e ainda as frequências do modo 7 e do modo 11.

5.3.3.3 Utilização de registos gerados numericamente em 13 pontos (no coroamento)

Para a aplicação do método SSI-Cov no caso da barragem do Cabril gerada pelo MEF3D, adotou-se um modelo numérico como o representado na Figura 5.33, sendo a barragem “observada” em 9 pontos do coroamento, são medidas as histórias de acelerações nos 13 acelerómetros, obtendo-se o diagrama de estabilização representado na Figura 5.37, para uma ordem do modelo de 35, com andamento unitário a partir da ordem 20 e um período de observação de 100 s, com um intervalo de tempo de 0,02 s .

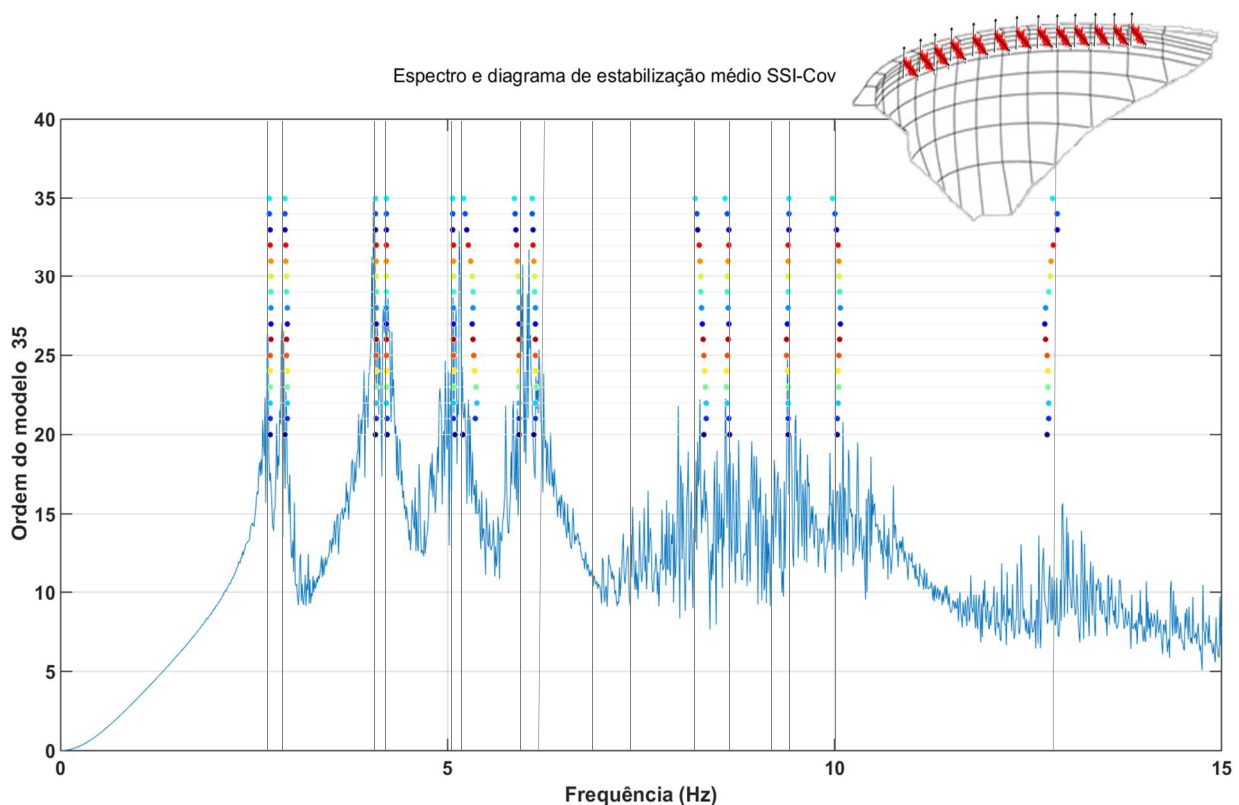


Figura 5.37 – Barragem do Cabril (água à cota 260 m): utilização de histórias de acelerações radiais em 13 pontos no coroamento, geradas numericamente com o DynDam1.0. Comparação entre frequências naturais de referência, calculadas com o MEF (linhas verticais), e o diagrama de estabilização obtido método SSI-Cov (ModID_SSICov1.0), indicando as frequências naturais identificadas através de conjuntos de pontos formando linhas tendencialmente verticais. Sobreposição com um espectro médio obtido pelo método FDD.

Na Tabela 5.11 encontram-se os resultados das frequências naturais da barragem calculados pelo MEF3D e os resultados obtidos pelo método SSI-Cov, a partir do programa ModID_SSI-Cov1.0, desenvolvido em MATLAB. Apresentam-se também as diferenças entre os resultados obtidos.

Barragem do Cabril Água à cota 260 m			
Frequências naturais (Hz)			
	Modelo MEF3D	SSI-Cov (histórias geradas em 13 pontos)	dif. (%)
Modo 1	2,6701	2,6973	+1,02
Modo 2	2,8629	2,8933	+1,06
Modo 3	4,0452	4,0707	+0,63
Modo 4	4,2312	4,2052	-0,61
Modo 5	5,0887	5,0649	-0,47
Modo 6	5,1453	5,2111	+1,28
Modo 7	5,9880	5,8650	-2,05
Modo 8	6,2246	6,0949	-2,08
Modo 9	7,3204	-	-
Modo 10	7,6566	-	-
Modo 11	8,2046	8,2024	-0,03
Modo 12	8,7345	8,5800	-1,77
Modo 13	8,9983	-	-
Modo 14	9,425222	9,4123	-0,14
Modo 15	10,03648	9,9796	-0,57
...
Modo 22	12,84801	12,8185	-0,23

Tabela 5.11 – Teste do programa ModID_SSI-Cov1.0 utilizando histórias de acelerações geradas numericamente com o MEF3D, em 13 pontos do coroamento da barragem do Cabril (água à cota 260 m). Comparação entre as frequências calculadas com o MEF3D e as frequências identificadas com o método SSI-Cov.

Pela análise da Tabela 5.11 verifica-se que utilizando registos de acelerações em 13 pontos os resultados da identificação modal são ainda melhores, sendo agora bem captadas as frequências dos 8 primeiros modos e ainda as frequências dos modos 11, 12, 14, 15 e 22.

É de salientar a grande melhoria verificada com o SSI-cov à medida que se aumenta o número de pontos “observados”, o que mostra o interesse de utilizar um elevado número de sensores nos sistemas de monitorização de vibrações instalados em obra e o interesse de testar previamente o seu posicionamento em obra com testes numéricos como os apresentados nesta secção.

5.4 Barragem do Cabril. Identificação modal utilizando resultados da medição de vibrações em obra

Com vista ao controlo da segurança da barragem do Cabril foi instalado um sistema para monitorização em contínuo do comportamento dinâmico da obra (Figura 5.38). Com este sistema as acelerações são medidas continuamente em 16 pontos no corpo da barragem e em dois pontos na inserção, junto aos encontros. O sistema inclui *software* desenvolvido em **MATLAB** (**Cabril_ModalID2.0**) que permite o processamento automático dos registos recorrendo a técnicas de identificação modal, que possibilitam a determinação automática dos principais parâmetros modais da estrutura e a sua evolução ao longo do tempo.

Na secção 5.4.2.1 apresentam-se alguns dos principais resultados experimentais obtidos com este sistema, os quais são comparados com resultados numéricos obtidos com os programas de EF3D, **DamDySSA2.6** e **DynDam1.0**, também desenvolvidos em **MATLAB**, como se referiu no Capítulo 3.



Figura 5.38 – Sistema de monitorização em contínuo instalado na barragem do Cabril.

5.4.1 Monitorização do comportamento dinâmico da barragem do Cabril

Nas grandes barragens de betão, como é o caso da barragem do Cabril, é fundamental tratar a informação recolhida “*in situ*”, por forma a caracterizar o seu comportamento dinâmico ao longo do tempo. Assim, é importante caracterizar experimentalmente as curvas que representam a variação das principais frequências naturais em função do nível da água, o que se pode conseguir com base na monitorização em contínuo, registando e analisando a resposta da obra sob excitação ambiente/operacional. Estas curvas são fundamentais para calibrar os modelos numéricos que se usam na simulação do comportamento dinâmico das obras, quer na perspetiva da identificação de alterações estruturais associadas a fenómenos de deterioração (pode ocorrer deterioração devido a ações excecionais, como é o caso de sismos ou cheias, ou ainda devido a processos evolutivos como é o caso das expansões), quer na perspetiva da verificação da segurança sob ações sísmicas.

Para a calibração de modelos numéricos com vista à simulação da resposta de barragens sob ações sísmicas é também importante dispor de resultados experimentais referentes à resposta das obras sob ações sísmicas, o que exige a implementação de sistemas de monitorização capazes de registar as acelerações sísmicas no maciço rochoso envolvente e, simultaneamente, as acelerações induzidas pelo sismo no corpo da obra.

5.4.1.1 Sistema de monitorização instalado “*in situ*”. Equipamento e *software*

Para o controlo de segurança de barragens são necessários, não só equipamentos de medição, como também aplicações computacionais para o registo automático das medições e *software* para o tratamento e análise dos dados, permitindo obter informação fiável e organizada.

Equipamento experimental

Em 2008 foi instalado na barragem do Cabril um sistema para monitorização em contínuo do comportamento dinâmico da obra (Mendes 2010), com o apoio financeiro da Fundação para a Ciência e Tecnologia (FCT - Plano Nacional de Re-Equipamento Científico) e da EDP. Este sistema, constituído por 16 acelerómetros uniaxiais e 3 triaxiais, permite a medição de acelerações em contínuo, com uma frequência de amostragem de 1000 Hz, na zona superior da barragem e nos encontros, como se pode observar na Figura 5.39.

Os principais parâmetros de configuração deste sistema são definidos de modo a medir continuamente e com precisão a resposta dinâmica da barragem sob diferentes ações: excitação ambiente, excitação operacional e ações sísmicas de diferentes magnitudes.

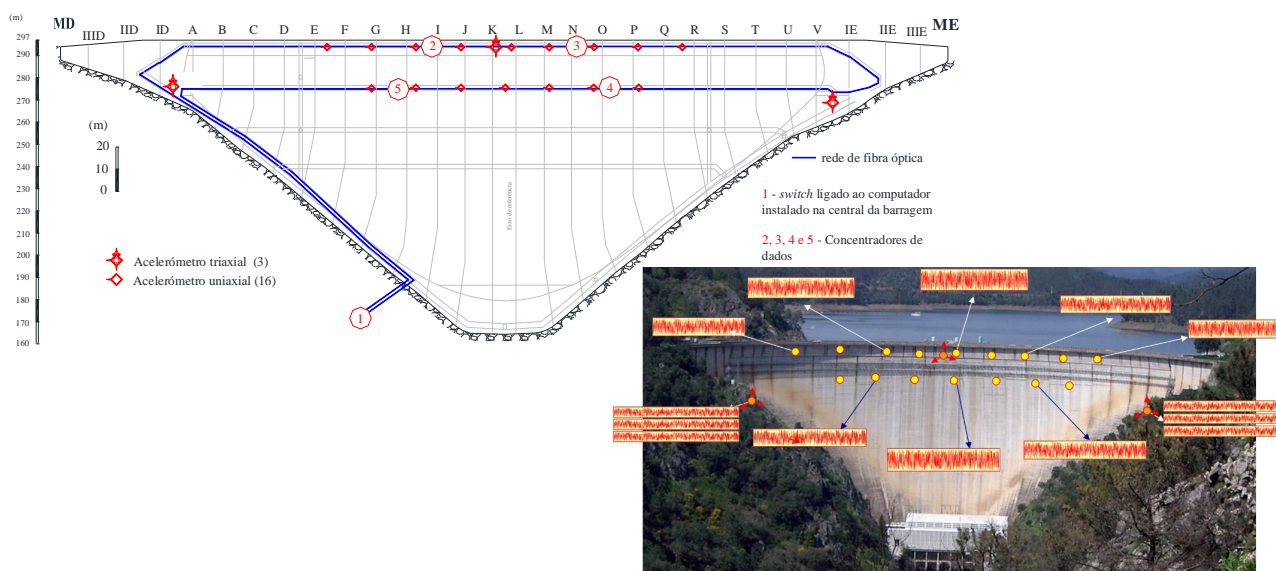


Figura 5.39 - Posição dos acelerómetros utilizados na monitorização de vibrações em contínuo da barragem do Cabril (16 acelerómetros uniaxiais instalados no corpo da barragem).

5.4.2 Análise de resultados experimentais obtidos com o sistema de monitorização instalado em obra

Após testado o programa ModID_SSI-Cov1.0, desenvolvido em MATLAB, para a utilização do método SSI-Cov com histórias de acelerações geradas numericamente, procede-se nesta secção à análise das histórias reais observadas em vários pontos da barragem, através do programa ModID_SSI-Cov1.0, tendo-se obtido os resultados apresentados nas secções seguintes.

As mesmas histórias foram analisadas pelo programa existente na barragem, Cabril_ModalID2.0, que permite calcular as frequências naturais através de métodos de identificação modal no domínio da frequência (FDD-SVD) e a partir do programa DamDySSA2.0, que calcula e compara os valores obtidos pelo MEF3D com os resultados reais obtidos pelo programa existente.

Foram feitas as respetivas comparações por forma a se perceber a eficiência do método SSI-Cov.

5.4.2.1 Dados Reais com 16 pontos observados

Procedeu-se à análise dos dados reais da monitorização de vibrações em obra na data de 14 de fevereiro de 2014, recolhidos no intervalo de uma hora (3600 s), das 15h às 16h, onde se aplicou o método SSI-Cov ao intervalo compreendido entre os 1000 s e 1200 s para um intervalo de tempo de 0,02 s. A cota de água era de 293,82 m. As frequências foram medidas utilizando as histórias de acelerações radiais em 9 pontos na galeria do coroamento e em 7 pontos na 2ª galeria, sob a zona fissurada.

Resultados obtidos utilizando o programa instalado na barragem: PROGRAMA Cabril_ModalID2.0

Antes de se aplicar o método de identificação modal SSI-Cov, procedeu-se à identificação modal a partir do método das frequências já existente e instalado na barragem do Cabril. O programa Cabril_ModalID2.0 permite através da introdução da data e hora aceder aos registos desse mesmo dia. A Figura 5.40 apresenta um esquema de como foram obtidos os valores a partir do programa já instalado. Em primeiro lugar, indica-se a data e hora pretendidos, acedendo-se então aos acelerogramas e espectros. Como o método SSI-Cov está a analisar intervalos de 200 s dentro dos 3600 s observados, seleccionou-se o intervalo de estudo dentro da aplicação, ou seja, entre os 1000 s e 1200 s, onde foram obtidos os espectros e acelerogramas da última imagem da Figura 5.40.

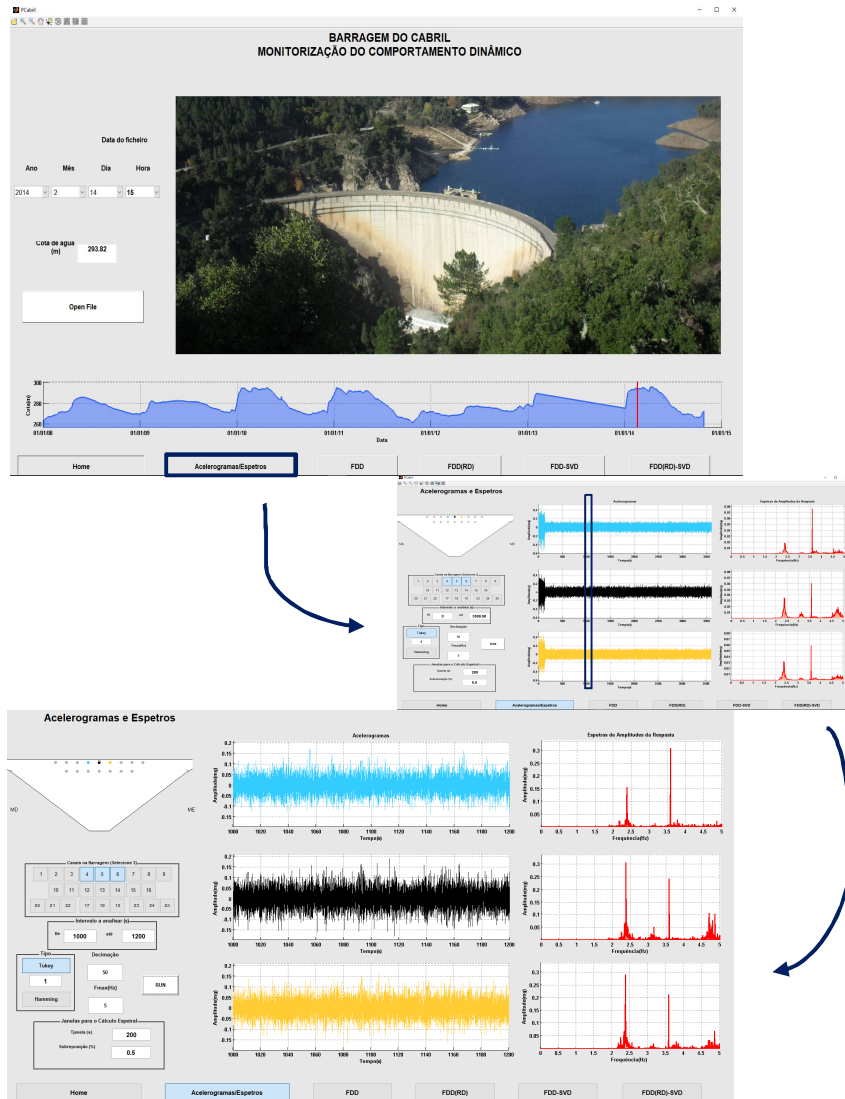
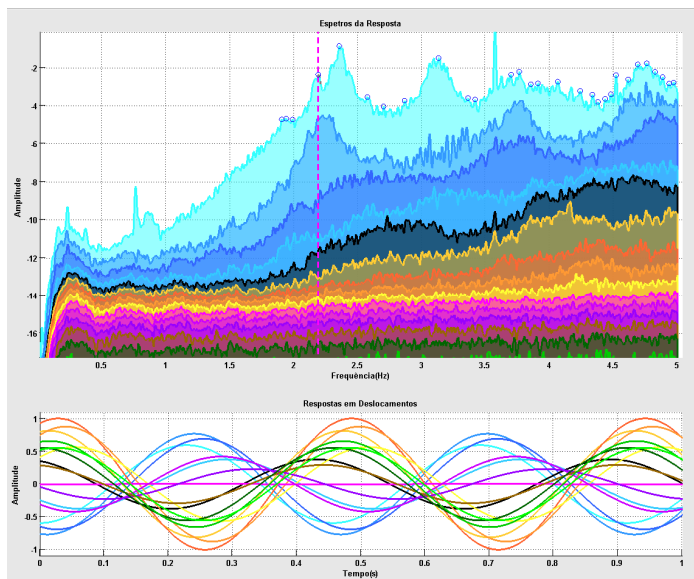


Figura 5.40 – Barragem do Cabril. “Layout” da aplicação instalada na barragem (Cabril_ModalID2.0), espectros e acelerogramas correspondentes à data de 14 de fevereiro de 2014 das 15:00 às 16:00 horas para os 3600 s e o intervalo de tempo de 200 s analisado.

Posteriormente, ainda dentro da aplicação, procedeu-se à identificação modal no domínio da frequência através do método FDD-SVD (Peeters, 2000), onde se obteve os espectros de resposta, a resposta em deslocamentos e a respetiva configuração modal para o primeiro modo de vibração, conforme se pode verificar na Figura 5.41



1º Modo de Vibração

Frequência: 2,190 Hz

Cota de água: 293,82 m

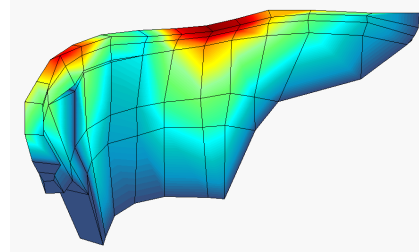
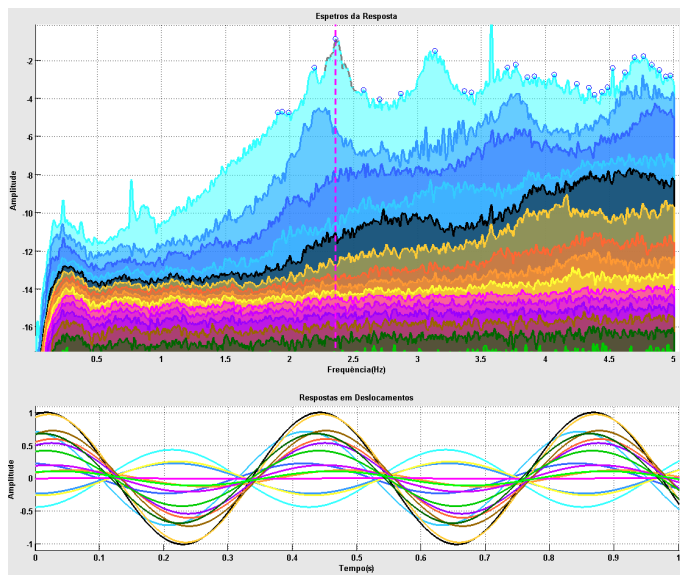


Figura 5.41 – Barragem do Cabril. Espectros de resposta, resposta em deslocamentos e configuração modal obtidos para o primeiro modo de vibração através do programa Cabril_modalID2.0.

Na Figura 5.42 encontram-se representados os espectros de resposta, a resposta em deslocamentos e a configuração modal obtidos para o segundo modo de vibração no intervalo de 1h.



2º Modo de Vibração

Frequência: 2,355 Hz

Cota de água: 293,82 m

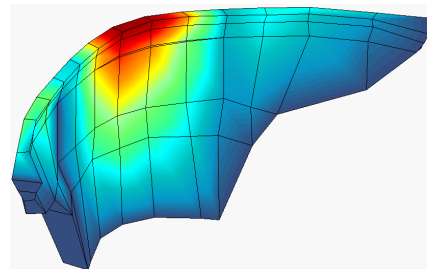


Figura 5.42 – Barragem do Cabril. Espectros de resposta, resposta em deslocamentos e configuração modal obtidos para o segundo modo de vibração através do programa Cabril_modalID2.0.

Os resultados obtidos a partir da aplicação, permitem fazer uma comparação com os obtidos pelo método SSI-Cov e pelo MEF3D, e encontram-se na Tabela 5.12.

Resultados obtidos com o programa DamDySSA2.0, instalado no servidor da barragem

O *software* instalado na barragem do Cabril inclui o módulo DamDySSA2.0, para cálculo da resposta dinâmica da obra utilizando EF3D (

Figura 5.43). Este módulo permite calcular frequências naturais e modos de vibração do sistema barragem-fundação-albufeira, simulando a interação dinâmica água-estrutura através da propagação de ondas de pressão na albufeira, recorrendo a EF de pressão para discretizar a albufeira.

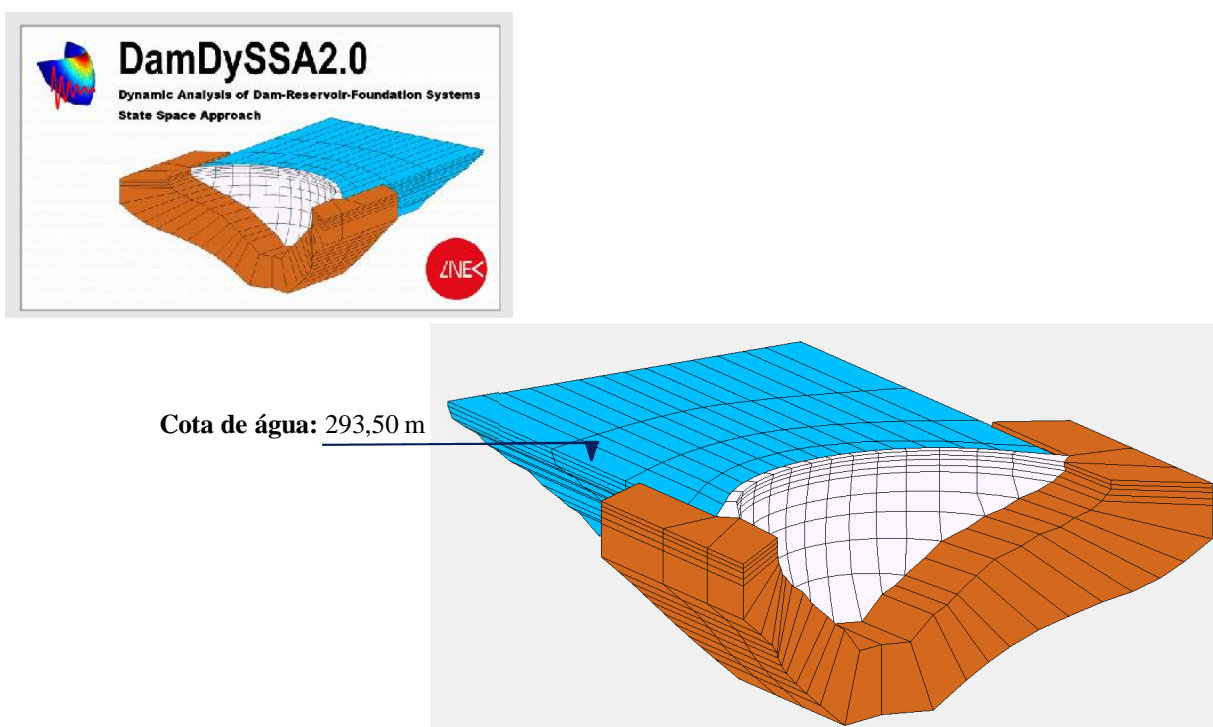
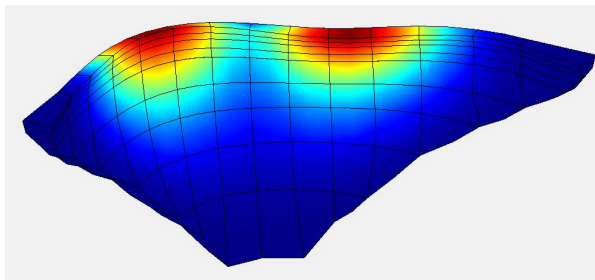


Figura 5.43 – Barragem do Cabril. Discretização em EF3D do sistema barragem-fundação-albufeira. Malha considerada nos cálculos de frequências naturais e modos de vibração efetuados com o programa DamDySSA2.0, que simula a interação dinâmica água-estrutura admitindo a propagação de ondas de pressão na albufeira, recorrendo a EF de pressão para discretização da albufeira.

Utilizando o programa DamDySSA2.0 analisou-se o comportamento dinâmico da barragem do Cabril para a água à cota 293,5 m, tendo sido calculadas as frequências naturais e os modos de vibração do sistema barragem-fundação-albufeira com se mostra na Figura 5.44.

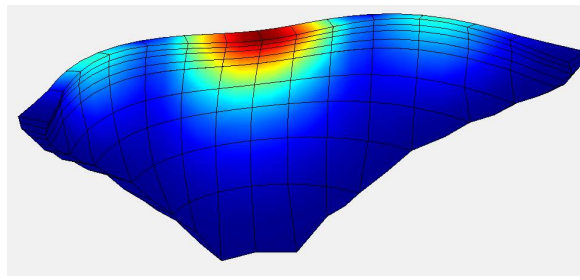
1º Modo de Vibração

Cota de água: 293,50 m Frequência= 2,157 Hz



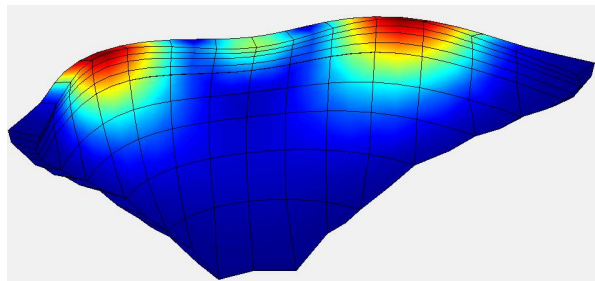
2º Modo de Vibração

Cota de água: 293,50 m Frequência= 2,309 Hz



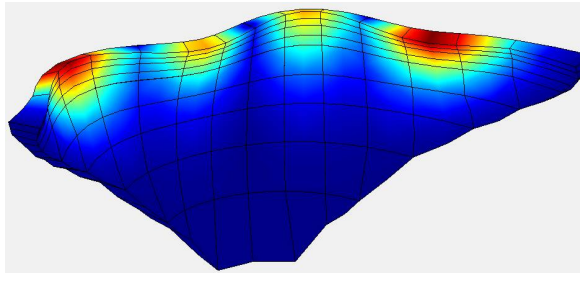
3º Modo de Vibração

Cota de água: 293,50 m Frequência= 3,109 Hz



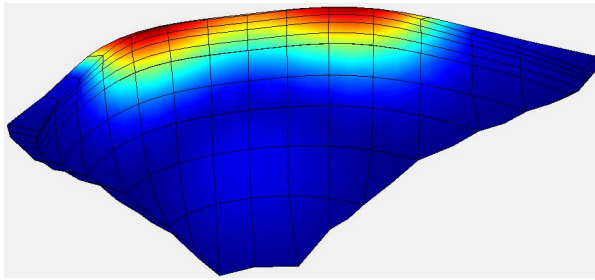
4º Modo de Vibração

Cota de água: 293,50 m Frequência= 3,525 Hz



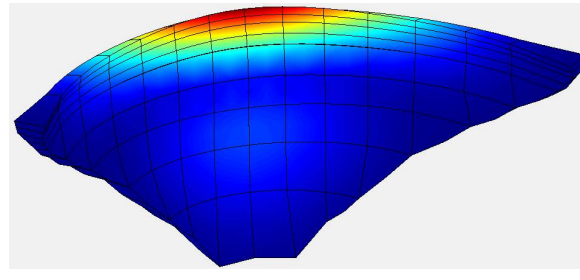
5º Modo de Vibração

Cota de água: 293,50 m Frequência= 3,792 Hz



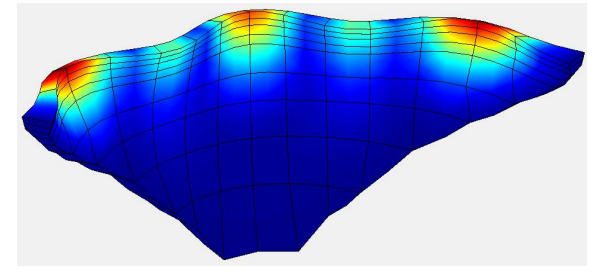
6º Modo de Vibração

Cota de água: 293,50 m Frequência= 4,293 Hz



7º Modo de Vibração

Cota de água: 293,50 m Frequência= 4,327 Hz



8º Modo de Vibração

Cota de água: 293,50 m Frequência= 5,185 Hz

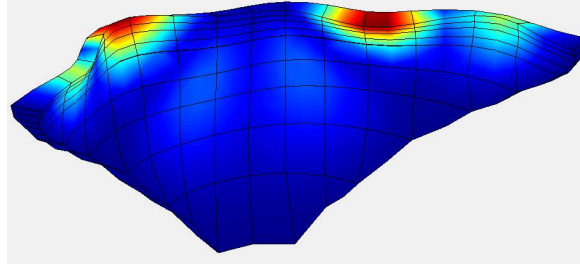


Figura 5.44 – Barragem do Cabril. Resultados referentes aos 8 primeiros modos de vibração obtidos com programa DamDySSA2.0, para a água à cota 293,5 m.

Após obtenção dos resultados pelo programa DamDySSA2.0 e a partir da aplicação Cabril_ModaliD2.0, foi possível efetuar uma representação gráfica das linhas de influência das frequências, em função da cota de água. A Figura 5.45 apresenta as linhas de influência obtidas pelo programa DamDySSA2.0 à cota 293,5 m, bem como, os valores obtidos pela aplicação Cabril_ModaliD2.0 com o método FDD-SVD à cota 293,8 (cota da água).

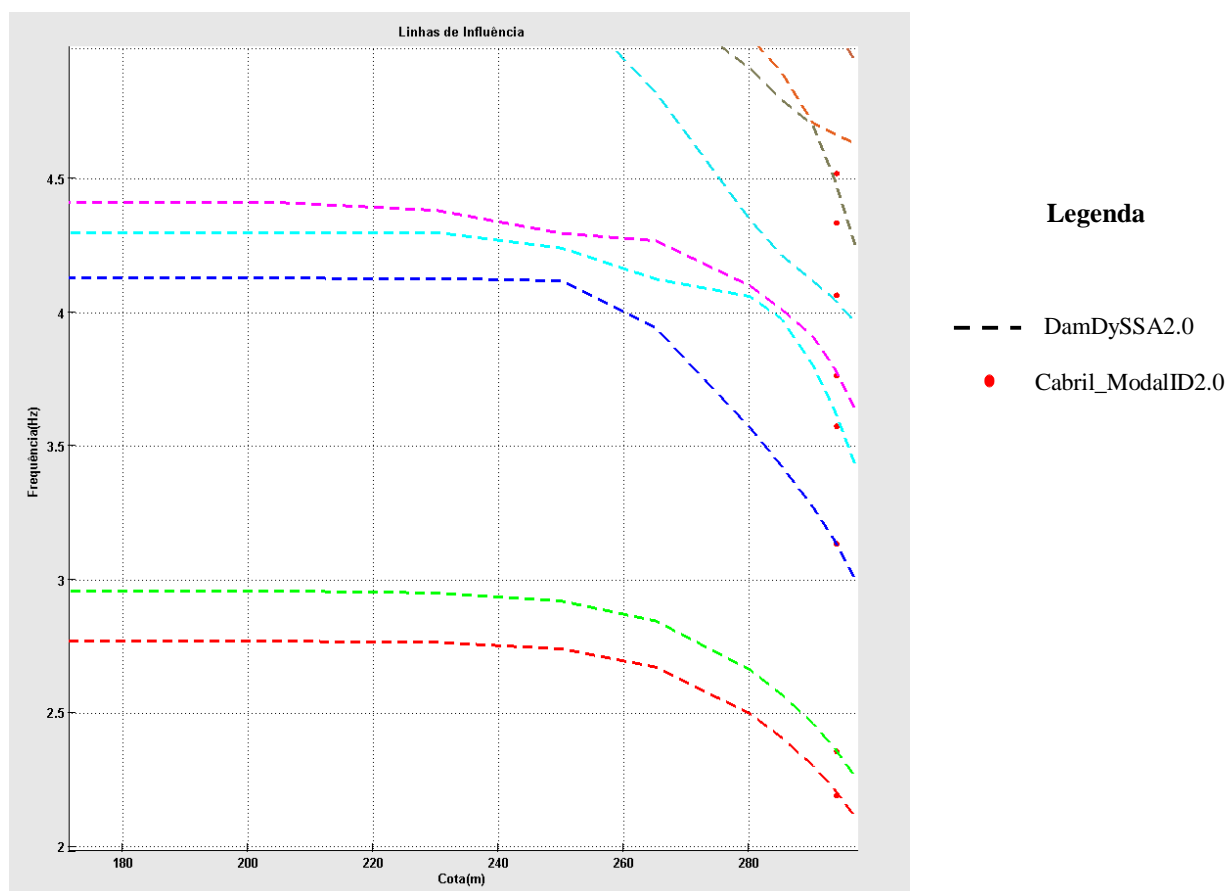


Figura 5.45 – Linhas de influência e frequências obtidas pelo programa Cabril_ModaliD2.0.

Verifica-se que existe uma boa concordância entre os resultados simulados pelo programa DamDySSA2.0 e os resultados obtidos com o método FDD-SVD implementado no programa Cabril_ModaliD2.0.

Resultados obtidos utilizando o programa desenvolvido para aplicação do método SSI-Cov

A aplicação do método SSI-Cov foi feita com o programa ModID_SSICov1.0, desenvolvido em MATLAB, onde o “input” foram os registos das histórias medidas nos 16 acelerómetros existentes na barragem. Foi utilizado o ficheiro do dia 14 de fevereiro de 2014 com as acelerações registadas

entre as 15:00 e as 16:00 horas, do qual se analisou o intervalo de tempo entre os 1000s e os 1200s. A Figura 5.46 apresenta os resultados obtidos pelo método SSI-Cov relativamente às frequências naturais, para os 16 acelerogramas com uma ordem do modelo de 35.

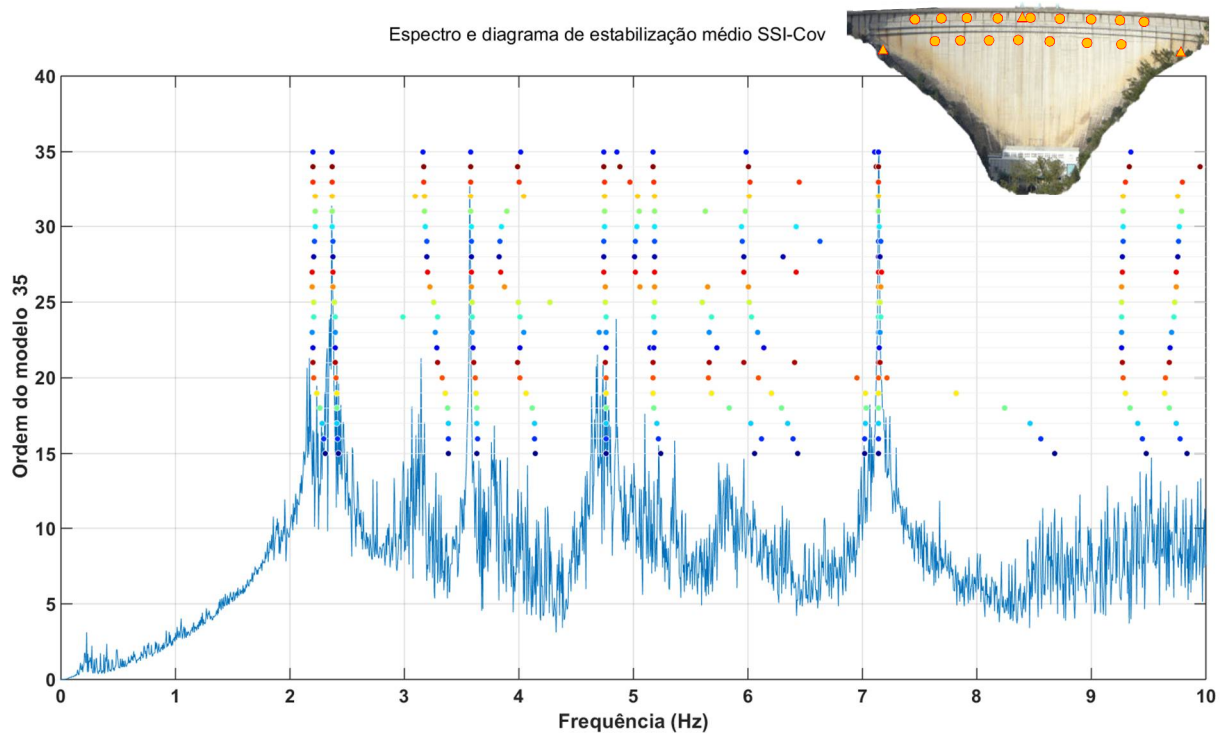


Figura 5.46 – Barragem do Cabril, resultados experimentais referentes a medições obtidas em obra a 14 de fevereiro de 2014, entre as 15:00 e as 16:00 horas. Frequências naturais identificadas com o método SSI-Cov.

Com os resultados obtidos, quer por via da aplicação instalada na barragem, método das frequências, quer pela análise dinâmica a partir dos EF3D com o programa DamDySSA2.0, quer pelo programa desenvolvido para a aplicação do método SSI-Cov, efetuou-se uma tabela de comparação dos respetivos valores, por forma a se verificar a fiabilidade do método em estudo. A Tabela 5.12 apresenta uma comparação feita para as frequências obtidas nos 8 primeiros modos para os três programas utilizados.

	Frequências identificadas (Hz)			Frequências (Hz), calculadas pelo MEF
	Cota de água: 293,8		dif. (%)	DamDySSA2.0 (cota de água: 293,5)
	FDD-SVD	SSI-Cov		
Modo 1	2,190	2,201	+0,51	2,157
Modo 2	2,355	2,369	+0,59	2,309
Modo 3	3,110	3,165	+1,73	3,109
Modo 4	3,531	3,579	+1,34	3,525
Modo 5	3,783	4,017	+5,82	3,792
Modo 6	4,115	4,738	+13,15	4,293
Modo 7	4,357	4,858	+10,31	4,327
Modo 8	4,612	5,171	+10,80	5,185

Tabela 5.12 - Barragem do Cabril. Comparação entre os resultados obtidos pelo programa Cabril_ModalID2.0, o programa DamDySSA2.0 e os resultados obtidos com o método SSI-Cov para as frequências nos 8 primeiros modos.

Apenas foram comparados os oito primeiros modos, visto terem sido os que melhor convergiram para valores expetáveis. Acresce-se que os modos de ordem mais baixa são os mais importantes para uma análise do ponto de vista do comportamento estrutural.

Relativamente aos resultados das frequências naturais, verifica-se que os valores obtidos pelo método SSI-Cov foram superiores aos identificados pelo método FDD-SVD, com diferenças inferiores a 2% nos quatro primeiros modos e superiores a 5% nos restantes.

Verificou-se que o método SSI-Cov apresenta valores de frequência identificados em concordância com os obtidos pelo MEF, a uma cota semelhante, pelo que se pode considerar ser este método mais fiável do que o FDD-SVD.

5.5 Considerações Finais

Neste capítulo apresentou-se inicialmente a implementação computacional em MATLAB, do método de identificação modal MMV, com o programa ModID_MLM1.0, para sistemas completamente observados. Procedeu-se à calibração do modelo analítico a partir do programa desenvolvido em MATLAB, DynBuildings1.0.

Relativamente à análise dos valores obtidos pelo método MMV, verificou-se que este apresenta resultados bastante favoráveis relativamente ao cálculo das características modais pretendidas. Foram facilmente identificados os modos de vibração, que se encontraram em concordância com

os associados ao modelo analítico. As frequências naturais obtidas em ambas as aplicações conduziram, na sua maioria, a valores com uma diferença inferior a 1%, pelo que se pode considerar que se encontram em conformidade. Quanto aos amortecimentos modais, os respetivos valores apresentaram diferenças máximas na ordem dos 13%, em comparação com os valores obtidos no modelo analítico. Verificou-se que quanto maior o tempo observado e maior a discretização do tempo, melhores são os resultados obtidos. Tal constatou-se não só nos valores das frequências, mas principalmente, nos valores dos amortecimentos, conforme se pode verificar na Tabela 5.3, em que apenas para o primeiro modo se regista a maior diferença de amortecimento, superior a 9%.

Posteriormente, efetuou-se a aplicação do método de identificação modal SSI-Cov a sistemas parcialmente observados. Inicialmente foi feito o estudo, considerando sistemas de massa discretos, estruturas simples e posteriormente, de massas contínuos, estruturas complexas. Relativamente à eficácia do método em modelos de estruturas simples, constatou-se que o método SSI-Cov apresenta bons resultados apenas na estimativa das frequências naturais, tendo os valores de amortecimento ficado muito longe dos esperados e por isso considerados inadequados para análise.

Para verificar a adequabilidade do método SSI-Cov para estruturas complexas, recorreu-se à informação disponibilizada na observação contínua da barragem do Cabril.

Foi feita uma descrição da barragem do Cabril quanto às suas principais características: aspetos históricos, construção, sistema de monitorização e modelo numérico utilizado no método EF3D para gerar a estrutura.

O método SSI-Cov aplicado ao caso da barragem do Cabril (estruturas complexas), foi primeiro aplicado no modelo numérico em EF3D da barragem, onde foram obtidas as frequências e geradas as histórias “observadas” a partir do programa DynDam1.0. As frequências da estrutura obtidas pelo método SSI-Cov foram calculadas com o programa ModID_SSI-Cov1.0. Os resultados obtidos pelo método SSI-Cov foram na sua maioria superiores aos do modelo gerado pelo MEF3D. Verificou-se que à medida que se aumenta o número de pontos “observados”, melhor são os resultados obtidos pelo método SSI-Cov comparativamente aos obtidos pelo modelo MEF3D.

Assim, foi possível aplicar o método SSI-Cov a uma situação real, barragem do Cabril, onde foram analisadas e estimadas as características dinâmicas da barragem a partir da medição de histórias de aceleração reais, obtidas, em diversos pontos da barragem. As mesmas histórias foram analisadas pelo programa instalado na barragem, Cabril_ModalID2.0 e pelo DamDySSA2.0 para que se fizesse uma melhor comparação dos resultados.

Verificou-se que os resultados das frequências naturais identificados pelo método SSI-Cov se encontram em concordância com os identificados pelo FDD-SVD, com diferenças inferiores a 2% nos quatro primeiros modos e superiores a 5% nos restantes. O método SSI-Cov apresenta valores de frequência identificados em concordância com os obtidos pelo MEF a uma cota semelhante, pelo que este método é certamente mais fiável do que o FDD-SVD.

6

Conclusões e perspectivas futuras

6.1 Síntese do trabalho e conclusões gerais

A reabilitação e recuperação de estruturas tem vindo a assumir um papel muito importante nos dias de hoje, nomeadamente por razões ambientais e económicas. Antes de se proceder a qualquer tipo de intervenção numa infraestrutura é necessário saber qual o seu estado de conservação/deterioração, bem como possíveis anomalias existentes. É fundamental haver um bom diagnóstico por forma a se proporcionar aos responsáveis pela intervenção, manutenção ou conservação, a possibilidade de optar pela solução económica ou tecnicamente mais adequada às suas necessidades.

Neste âmbito, procura-se dar prioridade aos métodos não invasivos para caracterização do estado de conservação das estruturas existentes, assumindo especial relevância os métodos associados à medição de vibrações com vista à identificação modal, baseados geralmente nos denominados ensaios de vibração ambiente. Os ensaios/testes de vibração ambiente representam um método relativamente económico no que diz respeito aos meios empregues para estimar as características dinâmicas das estruturas. A avaliação das características dinâmicas das estruturas, na engenharia civil, tem um papel fundamental, pois conhecendo as frequências naturais, amortecimentos e modos de vibração tem-se uma caracterização global da estrutura.

Quanto aos sistemas de monitorização, estes combinam tecnologias de deteção, sensores capazes de medir vibrações, com *software* de análise automática de dados, capaz de calcular como as vibrações sísmicas, ou como as vibrações ambientais afetam a estrutura. Assim, obtêm-se informações úteis para avaliar o estado de segurança e deterioração dos elementos que constituem

a estrutura, possibilitando o adequado dimensionamento de reforços e a otimização do projeto de estruturas, tornando-as mais seguras.

A utilização de sistemas de monitorização estrutural assume particular relevância na deteção de danos ou zonas de degradação, possibilitando a elaboração de diagnósticos mais precisos e objetivos. É importante implementar programas de monitorização em contínuo de estruturas desde a sua entrada em serviço, pois permite reduzir os respetivos custos de manutenção, pelo que é fundamental implementar um bom programa de monitorização de saúde estrutural (MSE). A identificação modal estocástica permite avaliar as características dinâmicas das estruturas, com base na resposta medida às ações a que normalmente estão sujeitas.

Neste trabalho apresentaram-se dois métodos de identificação modal no domínio do tempo, o Método da Máxima Verosimilhança (MMV) para sistemas completamente observados e o Método Estocástico de Identificação Modal em Subespaços, utilizando funções de Covariância da resposta medida (SSI-Cov).

Por forma a atingir o objetivo principal desta dissertação, os métodos de identificação modal apresentados foram implementados computacionalmente em MATLAB, tendo-se estabelecido outros objetivos parcelares, como o desenvolvimento de quatro programas em MATLAB: o DynBuildings1.0 para proceder à análise dinâmica e geração de histórias do tipo ruído branco para estruturas simples; o programa ModID_MLM1.0 para efetuar a análise modal no domínio do tempo a partir do método MMV; o DynDam1.0 para proceder à análise dinâmica e geração de histórias do tipo ruído branco para estruturas complexas, como é o caso da barragem do Cabril; e o programa ModID_SSI-Cov1.0 para efetuar a identificação modal no domínio do tempo com o método SSI-Cov.

O MMV para sistemas completamente observados, foi aplicado devido ao seu interesse teórico para ilustrar os fundamentos dos métodos no domínio do tempo. Relativamente a este método, apresentaram-se os fundamentos teóricos e os principais aspetos práticos da sua implementação computacional em MATLAB, mostrando resultados de testes envolvendo a geração numérica da resposta dinâmica de modelos simples de edifícios de vários pisos (sob excitação do tipo ruído branco), considerando os casos de 3, 6 e 20 pisos. Os parâmetros modais identificados (frequências, amortecimentos e configurações modais), a partir das histórias da resposta gerada numericamente, são comparados com os correspondentes valores conhecidos à partida, referentes aos modelos utilizados dos referidos edifícios de 3, 6 e 20 pisos. A informação obtida permite concluir que este método apresenta resultados bastante favoráveis relativamente ao cálculo das características modais pretendidas, tendo-se conseguido identificar facilmente as frequências e os amortecimentos da estrutura.

O Método Estocástico de Identificação Modal em Subespaços utilizando funções de Covariância da resposta medida (SSI-Cov, *Covariance-driven, Stochastic Subspace Identification method*)”, desenvolvido para sistemas parcialmente observados, foi também apresentado em detalhe desde os fundamentos à implementação computacional, recorrendo igualmente aos testes com modelos simples de edifícios de vários pisos: 3, 6 e 20 pisos. Como exemplo de aplicação do método SSI-Cov apresentou-se o caso da barragem do Cabril, para o qual, o método é novamente testado com base em registos gerados numericamente, recorrendo a um modelo de elementos finitos da barragem, considerando excitação do tipo ruído branco e, em seguida, o método foi utilizado para a análise de registos reais de vibrações medidas na barragem do Cabril, com um sistema de monitorização de vibrações em contínuo, instalado em obra desde 2008.

Os resultados obtidos permitem concluir que é de todo o interesse a implementação dos métodos no domínio do tempo, na identificação modal das características dinâmicas das estruturas monitorizadas em contínuo, particularmente na análise de vibrações em grandes barragens, devido à excitação ambiente. Verifica-se que estes métodos permitem obter valores semelhantes aos dos modelos numéricos, tendo uma maior fiabilidade, bem como a existência de mais fontes de comparação, para além dos já utilizados e conhecidos métodos no domínio da frequência.

6.2 Principais Contribuições

Nesta dissertação as principais contribuições a destacar são as seguintes:

- i) implementação computacional, em MATLAB, do Método da Máxima Verossimilhança (MMV) para sistemas completamente observados, o qual foi apresentado essencialmente pelo seu interesse teórico para ilustrar os fundamentos dos métodos no domínio do tempo; relativamente a este método apresentaram-se em detalhe os seus fundamentos matemáticos e os principais aspetos práticos da sua implementação computacional em MATLAB, mostrando resultados de testes envolvendo a geração numérica da resposta dinâmica de modelos simples de edifícios de vários pisos (sob excitação do tipo ruído branco), considerando os casos de 3, 6 e 20 pisos; os parâmetros modais que foram identificados a partir das histórias da resposta geradas numericamente foram posteriormente comparados com os correspondentes valores de referência calculados diretamente com os modelos dos edifícios de 3, 6 e 20 pisos;
- ii) implementação computacional do Método Estocástico de Identificação Modal em Subespaços utilizando funções de Covariância da resposta medida (SSI-Cov,

Covariance-driven, Stochastic Subspace Identification method), desenvolvido para sistemas parcialmente observados, o qual foi também apresentado em detalhe desde os fundamentos à implementação computacional, recorrendo igualmente a testes com modelos simples de edifícios de vários pisos: 3, 6 e 20 pisos; como exemplo de aplicação do método SSI-Cov apresentou-se o caso da barragem do Cabril, para o qual, primeiramente, o método foi testado com base em registos gerados numericamente recorrendo a um modelo de elementos finitos da barragem (considerando excitação do tipo ruído branco) e, em seguida, o método é utilizado para a análise de registos reais de vibrações medidas na barragem do Cabril;

- iii) Desenvolvimento do programa **DynBuildings1.0** para análise dinâmica de estruturas simples, representáveis por modelos simples espacialmente discretos do tipo edifício de N pisos com 1 grau de liberdade de translação por piso, sob excitação do tipo ruído branco; este programa permite gerar numericamente as histórias de deslocamentos e velocidades em todos os pisos, utilizando a referida formulação de estado;
- iv) Desenvolvimento do programa **ModID_MLM1.0** para identificação modal de estruturas com base no método MMV (ou, *Maximum Likelihood Method MLM*) para sistemas completamente observados, em particular, aplicado na identificação modal de modelos de edifícios; este programa lê os registos correspondentes às histórias de velocidades e deslocamentos “observados” em todos os pisos de um edifício com 1GL por piso (os registos “observados” podem ser gerados numericamente com o programa atrás referido, no ponto i) e faz uma estimativa da matriz de estado do edifício, cujos valores e vetores próprios são calculados com vista a determinar as estimativas das suas frequências naturais, amortecimentos modais e configurações modais;
- v) Desenvolvimento do programa **DynDam1.0** para análise dinâmica de barragens utilizando elementos finitos 3D e considerando excitação do tipo ruído branco (considera massas de água associadas de Westergaard para simular o efeito das pressões hidrodinâmicas); este programa foi utilizado para efetuar a análise dinâmica da barragem do Cabril com vista à geração numérica de histórias de acelerações em vários pontos situados à cota do coroamento;
- vi) Desenvolvimento do programa **ModID_SSI-Cov1.0** para identificação modal de estruturas com base no método SSI-Cov, desenvolvido para sistemas parcialmente observados; este programa foi preparado para ler registos de acelerações observadas em alguns pontos de uma dada estrutura; no caso analisado referente à barragem do Cabril utilizaram-se registos observados que foram medidos *in-situ* mas, inicialmente, foram efetuados testes com base em registos de acelerações gerados numericamente com o programa **DynDam1.0**.

6.3 Apreciação dos Resultados Obtidos

Considera-se que os objetivos delineados para este trabalho foram atingidos, sendo de realçar que foi pela primeira vez implementado o método MMV para o estudo de estruturas em situações completamente observadas, mesmo que apenas estudado numericamente, verifica-se que este apresenta resultados bastante favoráveis relativamente ao cálculo das características modais pretendidas. Foram facilmente identificados os modos de vibração, que se encontraram em concordância com os associados ao modelo analítico, bem como, uma boa conformidade nos valores obtidos pelo modelo analítico, quer os calculados pelo método MMV para as frequências naturais e os amortecimentos modais. É de notar que quanto maior o tempo observado e maior a discretização do tempo, melhores são os resultados das frequências e dos amortecimentos obtidos. A aplicação do método de identificação modal SSI-Cov a sistemas parcialmente observados, permite constatar que este apresenta bons resultados apenas na estimativa das frequências naturais, tendo os valores de amortecimento ficado muito longe dos esperados e por isso considerados inadequados para análise.

Relativamente à aplicação do método SSI-Cov ao modelo numérico em EF3D da barragem, verifica-se que os valores foram na sua maioria superiores aos do modelo gerado pelo MEF3D, porém, à medida que se aumenta o número de pontos “observados”, melhor são os resultados obtidos pelo método SSI-Cov.

A análise dos valores obtidos pelo método SSI-Cov aplicado a uma situação real, barragem do Cabril, permite verificar que os resultados das frequências naturais identificados por este método, se encontram em concordância com os identificados pelo FDD-SVD, método implementado no *software* para análise dos dados recolhidos com o sistema automático de monitorização da barragem do Cabril, atualmente em utilização.

6.4 Desenvolvimentos Futuros

Ao nível de desenvolvimentos futuros, propõe-se que o método SSI-Cov apresentado, seja implementado computacionalmente no programa **Cabril ModalID2.0**, o qual atualmente integra o *software* que tem vindo a ser desenvolvido no LNEC-DBB, para análise dos dados recolhidos com o sistema automático de monitorização de vibrações, instalado na barragem do Cabril (Oliveira,S. 2002; Mendes, 2010; Oliveira et al. 2012; Oliveira e Silvestre 2017).

No âmbito dos métodos de identificação modal, propõe-se o estudo do método MMV para o caso de estruturas parcialmente observadas, bem como, a sua aplicação a casos reais. Prevê-se que este

método permitirá uma melhor estimativa na obtenção dos valores dos amortecimentos modais, sendo de grande interesse o estudo do mesmo.

Bibliografia

- Abdel-Ghaffar, A. M., & Scanlan, R. H. (1985). Ambient Vibration Studies of Golden Gate Bridge: I. Suspended Structure. *Journal of Engineering Mechanics*, *111*(4), 463–482.
- Arató, M. (1982). *Linear Stochastic Systems with Constant Coefficients. A Statistical Approach*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Arató, M., Baran, S., & Ispány, M. (1999). Functionals of complex Ornstein-Uhlenbeck processes. *Computers & Mathematics with Applications*, *37*(1), 1–13.
- Arató, M., & Fegyverneki, S. (2002). New Statistical Investigation of the Ornstein-Uhlenbeck Process. *Computers & Mathematics with Applications*, *44*, 677–692.
- Arató, M., Kuki, A., & Szabó, A. (1996). Exact Distribution of Estimators of Parameters in Ornstein-Uhlenbeck Processes. *Computers & Mathematics with Applications*, *11*(1), 45–54.
- Basawa, I., & Rao, B. L. S. (1980). Asymptotic inference for stochastic processes. *Stochastic Processes and Their Applications*, *10*(3), 221–254.
- Calcina, S. V., Eltrudis, L., Piroddi, L., & Ranieri, G. (2014). Ambient vibration tests of an arch dam with different reservoir water levels: Experimental results and comparison with finite element modelling. *Hindawi Publishing Corporation. Scientific World Journal*, *2014*, 1–12.
- Campillo, F., & Le Gland, F. (1989). MLE for partially observed diffusions: direct maximization vs. the em algorithm. *Stochastic Processes and Their Applications*, *33*(2), 245–274.
- Catarino, A. (2016). *Modelação do comportamento dinâmico de sistemas barragem-fundação-albufeira. Análise sísmica de uma barragem de abóbadas múltiplas*. Trabalho Final de Mestrado. Instituto Superior de Engenharia de Lisboa.
- Cho, S., Jr, B. F. S., Jo, H., Li, J., & Kim, R. E. (2012). Bridge monitoring using wireless smart sensors. *Spie*, *3*.
- Civil+Structural Engineer. (2014). Structural vital signs. Retrieved January 1, 2017, from <https://cseengineermag.com/article/structural-vital-signs/>
- Clough, R. W., & Penzien, J. (1982). *Dynamics of structures*. Clough, R. W. e Penzien, J. Dynamics of structures. McGraw-Hill.
- GeoSIG. (2017). Enguri Dam, Georgia. Retrieved January 1, 2017, from <https://www.geosig.com/Enguri-Dam--Georgia--pg60.aspx>
- Giuliano, A., Barata, A., & Casciati, F. (1984). *Probabilistic methods in structural engineering*. London: Chapman and Hall.

- Horner, K., & Vejnovic, I. (2017). River Defenders Gather Forces in Georgia. Retrieved January 1, 2017, from <https://www.internationalrivers.org/blogs/537/river-defenders-gather-forces-in-georgia>
- Houbolt, J. C. (1975). *On Identifying Frequencies and Damping in Subcritical Flutter testing*. California.
- James, G., Carne, T., Lauffer, J., & Nard, A. (1992). *Modal testing using natural excitation*. San Diego, USA.
- Juang, J.-N. (1994). *Applied system identification*. Englewood Cliffs, N.J. : Prentice Hall.
- Juang, J.-N., & Papa, R. S. (1985). An Eigensystem Realization Algorithm for Modal Parameter Identification and Model Reduction. *Journal of Guidance and Dynamics*, 8(4), 620–627.
- Juang, J.-N., & Phang, M. (2001). *Identification and Control of Mechanical Systems*. Cambridge University Press.
- Kalkan, E., Savage, W., Reza, S., Knight, E., & Tian, Y. (2013). UNLV ’ s Environmentally Friendly Science and Engineering Building is Monitored for Earthquake Shaking. *USGS - Science for a Changing World, Fact Sheet*(Earthquake Science Center-U.S. Geological Survey).
- Lipster, R. S., & Shiryayev, A. N. (1977). *Statistics of random processes*. Berlin: Springer-Verlag.
- Lopes, V., Guedes, J., Arêde, A., Milheiro, J., Paupério, E., & Costa, A. (2010). Identificação dinâmica de estruturas. In *Congresso PATRIMÓNIO 2010* (p. 21).
- Mendes, P. (2005). *Observação e Análise do Comportamento Dinâmico de Barragens de Betão Sob Excitação Ambiente*. Trabalho Final de Mestrado. Instituto Superior Técnico.
- Mendes, P. (2010). *Observação e Análise do Comportamento Dinâmico de Barragens de Betão*. Tese de Doutoramento. Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto/LNEC.
- Newland, D. E. (1975). *An Introduction to Random Vibrations and Spectral Analysis*. Longman.
- Oliveira, S. (1991). Elementos Finitos Parabólicos para Análise de Estática e Dinâmica de equilíbros tridimensionais. Trabalho de síntese para AI do LNEC. Lisboa.
- Oliveira, S. (2000). *Modelos para a Análise do Comportamento de Barragens de Betão Considerando a Fissuração e os Efeitos do Tempo. Formulações de Dano*. Tese de Doutoramento. Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.
- Oliveira, S. (2002). Sistemas de monitorização em contínuo para avaliação do comportamento dinâmico de barragens abóbada. Sub-programa D, in “Estudo de processos de deterioração evolutiva em barragens de betão. Controlo da segurança ao longo do tempo.”
- Oliveira, S., Espada, M., & Câmara, R. (2012). Long-term dynamic monitoring of arch dams. The case of Cabril dam, Portugal. In *15th World Conference on Earthquake Engineering*. Lisboa.

- Oliveira, S., Mendes, P., Garrett, A., Costa, O., & Reis, J. (2011). Long-term dynamic monitoring systems for the safety control of large concrete dams. The case of Cabril dam, Portugal. In *6th Int. Conf. on Dam Eng, LNEC*.
- Oliveira, S., Osório, A., Silvestre, A., & Câmara, R. (2014). Identificação modal e simulação da resposta sísmica de barragens abóboda. Lisboa: LNEC.
- Oliveira, S., & Silvestre, A. (2017). *Barragem do Cabril. Sistema para Monitorização de Vibrações em contínuo. Medição e análise automática da resposta dinâmica sob excitação ambiente/operacional e sob ações sísmicas*.
- Peeters, B. (2000). *System identification and damage detection in civil engineering*. Universidade Católica de Loviana.
- Portugal, A. (1990). *Caracterização do comportamento dinâmico de barragens de betão através de ensaios "in situ."* Tese de Doutoramento. Instituto Superior Técnico/LNEC.
- Portugal, A., & Caetano, E. (1992). Experimental evaluation of the dynamic characteristics of portuguese dams. In *10TH WORLD CONF ON EARTHQUAKE ENGINEERING (10 WCEE)*. MADRID, SPAIN.
- Prior, A. (2015). *Estimação de parâmetros em modelos estocásticos de estruturas com comportamento dinâmico linear e quasi linear*. Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.
- Prior, A., Kleptsyna, M., & Milheiro-Oliveira, P. (2017). On maximum likelihood estimation of the drift matrix of a degenerated O–U process. *Stochastic Processes and Their Applications*, 20(1), 57–78.
- Rodrigues, J. (2004). *Identificação Modal Estocástica. Métodos de análise e aplicações em estruturas de engenharia civil*. Tese de Doutoramento. Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto/LNEC.
- Serrano, S. (2001). *Engineering Uncertainty and Risk Analysis: A Balanced Approach to Probability, Statistics, Stochastic Modeling, and Stochastic Differential Equations*. Lexington: Hydrosience Inc, cop.
- Serrano, L. M. V., Alcobia, C. J. O. P. J., Mateus, M. L. O. S., & Silva, M. C. G. (n.d.). Sistemas de Aquisição, Processamento e Armazenamento de Dados, p. 15.
- Smart Structure Systems Lab. (n.d.). World's Largest Wireless Smart Sensor Network (WSSN) for Civil Infrastructure Monitoring. Retrieved January 1, 2017, from <https://smartstructure.weebly.com/jindo-bridge.html>
- Wikipédia. (2017). Burj Khalifa. Retrieved January 1, 2017, from https://pt.wikipedia.org/wiki/Burj_Khalifa

Zeinkiewicz, O. C. ., Taylor, R. L. ., & Zhu, J. Z. (2005). *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. (Elsevier Butterworth-Heinemann, Ed.) (Sixth).