

**Instituto Politécnico de Lisboa
Escola Superior de Educação**

**CONTRIBUTOS DE UM AMBIENTE DE GEOMETRIA DINÂMICA
(GEOGEBRA) E DO GEOPLANO NA COMPREENSÃO DAS
PROPRIEDADES E RELAÇÕES ENTRE QUADRILÁTEROS**

Um estudo com alunos do 4.º ano

Dissertação apresentada para obtenção do grau de Mestre em Educação
Matemática na Educação Pré-Escolar e nos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico

Maria da Graça Bruno Pereira

2012

**CONTRIBUTOS DE UM AMBIENTE DE GEOMETRIA DINÂMICA
(GEOGEBRA) E DO GEOPLANO NA COMPREENSÃO DAS
PROPRIEDADES E RELAÇÕES ENTRE QUADRILÁTEROS**

Um estudo com alunos do 4.º ano

Dissertação apresentada para obtenção do grau de Mestre em Educação
Matemática na Educação Pré-Escolar e nos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico

Orientadora: Professora Doutora Maria de Lurdes Serrazina

Maria da Graça Bruno Pereira

2012

Há um tempo em que é preciso abandonar as roupas usadas, que já têm a forma do nosso corpo, e esquecer os nossos caminhos, que nos levam sempre aos mesmos lugares. É o tempo da travessia: e, se não ousarmos fazê-la, teremos ficado, para sempre, à margem de nós mesmos.

Fernando Pessoa

RESUMO

O estudo insere-se no âmbito da educação matemática, mais especificamente na área da geometria. Com esta investigação pretende-se compreender qual o contributo do Ambiente de Geometria Dinâmica (AGD), *GeoGebra*, e do material manipulável (geoplano) na identificação das propriedades e relações entre quadriláteros: trapézio, paralelogramo, retângulo, losango e quadrado.

De acordo com o objetivo do estudo formularam-se três questões: Qual o papel das representações na identificação das propriedades dos quadriláteros? Que influência tem a visualização na identificação das propriedades dos quadriláteros? Quais os contributos da utilização do AGD, *GeoGebra*, e do material manipulável (geoplano) na compreensão das propriedades e relações entre os quadriláteros?

Atendendo à problemática em estudo, optou-se por uma metodologia de investigação predominantemente qualitativa, baseada em três estudos de caso. A recolha de dados empíricos foi realizada numa turma de 4.º ano do 1.º ciclo do ensino básico onde se implementou uma experiência de ensino, envolvendo todos os alunos e recorrendo ao geoplano e ao *GeoGebra*. Essa recolha incidiu na observação participante, em sala de aula, no registo de notas da investigadora, nos documentos produzidos pelos alunos e nos registos áudio e vídeo das discussões nos grupos e no coletivo da turma.

Em termos de resultados, salienta-se que a utilização de representações evidenciou a compreensão que os alunos têm dos conceitos, facilitou a identificação das propriedades dos quadriláteros e a compreensão das relações entre eles. Os alunos identificaram as propriedades com base nas representações, no entanto focaram-se em casos particulares, de acordo com a imagem mental que têm da figura, especificamente o protótipo, indiciando a influência da visualização. Dos resultados sobressai também a dificuldade que os alunos sentiram em considerar uma figura como representante de uma classe e em distinguir atributos essenciais e não essenciais.

Da análise dos dados ressalta também que tanto o geoplano como o *GeoGebra* foram uma mais-valia na concretização da experiência de ensino deste estudo. Os dois possuem vantagens e limitações e podem ser usados de maneira que um complemente o outro, podendo dessa forma contribuir, favoravelmente, para a aprendizagem da geometria.

Palavras-chave: Geometria, representações, visualização, propriedades dos quadriláteros, ambientes de geometria dinâmica, materiais manipulativos.

ABSTRACT

The study falls within the scope of mathematics education, specifically in the area of geometry. This research aims to understand the contribution of the Dynamic Geometry Environment (GeoGebra) and manipulative material (Geoboard) in the identification of properties and relations of quadrilaterals: trapezium, parallelogram, rectangle, diamond and square.

According to the purpose of the study three questions were formulated: What is the role of the representations in the identification of the properties of quadrilaterals? What is the influence of visualization on the identification of the properties of quadrilaterals? What are the contributions on the use of Dynamic Geometry Environment (GeoGebra) and manipulative material (Geoboard) to understand the properties and relationships among quadrilaterals?

Given the problem under study, it was chosen a predominantly qualitative research methodology based on three case studies. The empirical data collection was carried out on a fourth primary grade class, where it was implemented a teaching experience, involving all students and the use of Geoboard and GeoGebra. This collection was focused on participant observation in the classroom, in the record of the researcher's notes, the documents produced by the students and the audio and video recordings of group discussions and collective class.

In terms of results, it is noted that the use of representations showed the students understanding of the concepts and that it has facilitated the identification of the properties of quadrilaterals and understanding of the relationships between them. The students identified properties based on representations, however they focused in particular cases, according to the mental image that they have of the figure, specifically the prototype, indicating the influence of visualization. Results also highlights the difficulty that students felt in considering a figure as a representation of a group and distinguishing essential and nonessential attributes.

Data analysis also highlights that both Geoboard and *GeoGebra* have been an asset in the delivery of teaching experience in this study. Both have advantages and limitations and they may be used to complement each other and contribute favorably to the learning of geometry.

Keywords: Geometry, representations, visualization, properties of quadrilaterals, dynamic geometry environments, manipulative materials.

AGRADECIMENTOS

À minha orientadora, Professora Doutora Maria de Lurdes Serrazina, pela sua disponibilidade, críticas e sugestões, sempre pertinentes, e por todo o apoio ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus alunos do 4.º ano, pela colaboração e por terem permitido a recolha de dados para este estudo.

Ao meu marido e filhas por todo o apoio que me deram.

A todos aqueles que me apoiaram e acreditaram no meu trabalho.

ÍNDICE

RESUMO	i
ABSTRACT	ii
AGRADECIMENTOS	iii
CAPÍTULO 1 - PROBLEMA E CONTEXTO DO ESTUDO	1
1.1. Problema e objetivo do estudo	1
1.2. Questões de investigação	2
1.3. Pertinência do estudo.....	3
1.4. Organização geral	4
CAPÍTULO 2 - REVISÃO DA LITERATURA	5
2.1. Geometria – o que é?.....	5
2.1.1. Geometria no currículo.....	6
2.2. Ensino e Aprendizagem da geometria	9
2.2.1. Teoria de van Hiele	10
2.2.2. Materiais manipuláveis.....	16
2.3. As figuras geométricas (2D).....	17
2.3.1. Representações.....	19
2.3.2. Visualização espacial e imagens	24
2.3.3. Propriedades dos quadriláteros	27
2.3.4. Classificação.....	29
2.4. Aprendizagem com recurso a meios computacionais	32
2.4.1. Os ambientes de geometria dinâmica	35
CAPÍTULO 3 - METODOLOGIA	45
3.1. Opções metodológicas.....	45
3.2. Participantes e critérios de seleção	46
3.3. Procedimento de recolha de dados	47
3.4. Procedimento de análise de dados	49
CAPÍTULO 4 - A EXPERIÊNCIA DE ENSINO	51
4.1. Objetivos	51
4.2. As tarefas.....	51
4.3. A turma	56
4.4. Os pares	57
4.5. Organização do trabalho.....	58
4.6. Concretização da experiência de ensino.....	60
4.7. As tarefas analisadas	69

CAPÍTULO 5 - ANÁLISE DOS DADOS RECOLHIDOS	71
Estudos de caso	71
5.1. O par Maria e Luísa.....	71
5.1.1. Atitude perante as tarefas	71
5.1.2. Representações e identificação das propriedades	72
5.1.3. Visualização e identificação de propriedades	89
5.1.4. Síntese	95
5.2. O par Miguel e Diogo	97
5.2.1. Atitude perante as tarefas	97
5.2.2. Representações e identificação das propriedades	97
5.2.3. Visualização e identificação de propriedades	107
5.2.4. Síntese	111
5.3. O par Isa e Mauro.....	113
5.3.1. Atitude perante as tarefas	113
5.3.2. Representações e identificação das propriedades	113
5.3.3. Visualização e identificação de propriedades	126
5.3.4. Síntese	128
CAPÍTULO 6 - CONCLUSÕES, RECOMENDAÇÕES E LIMITAÇÕES DO ESTUDO.....	131
6.1. Síntese do estudo.....	131
6.2. Conclusões do estudo.....	132
6.2.1. Representações e identificação das propriedades dos quadriláteros .	132
6.2.2. Influência da visualização na identificação de propriedades	136
6.2.3. Contributos do geoplano na compreensão das propriedades e relações entre os quadriláteros	138
6.2.4. Contributos do <i>GeoGebra</i> na compreensão das propriedades e relações entre os quadriláteros	139
6.2.5. Geoplano versus <i>GeoGebra</i>	140
6.2.6. O papel de professora e investigadora.....	141
6.3. Recomendações e limitações do estudo	142
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	145
ANEXOS.....	155

ANEXOS

Anexo 1 – Pedido de autorização ao órgão de gestão do agrupamento	155
Anexo 2 – Pedido de autorização aos encarregados de educação dos alunos.....	156
Anexo 3 - tarefa 1 – Desenho de quadriláteros e diagonais.....	157
Anexo 4 – tarefa 2 – Descoberta de quadrados diferentes no geoplano.....	158
Anexo 5 – tarefa 3 – Quadriláteros com todos os lados iguais.....	159
Anexo 6 – tarefa 4 – Quadriláteros com lados iguais dois a dois.....	160
Anexo 7 – tarefa 5 – Quadriláteros com apenas dois lados paralelos	161
Anexo 8 – tarefa 6 – Explorar o GeoGebra.....	162
Anexo 9 – tarefa 7 – Explorar o GeoGebra.....	163
Anexo 10 – tarefa 8 – Desenho de um quadrilátero qualquer.....	164
Anexo 11 – tarefa 9 – Desenho de quadriláteros a partir de diagonais dadas.....	165
Anexo 12 – tarefa 10 – Desenho de quadriláteros (soma dos ângulos internos)....	166
Anexo 13 – tarefa 11 – Construção de um trapézio.....	167
Anexo 14 – tarefa 12 – Construção de um paralelogramo.....	168
Anexo 15 – tarefa 13 – Construção de um retângulo.....	169
Anexo 16 – tarefa 14 – Análise da construção do quadrado.....	170
Anexo 17 – tarefa 15 – Análise da construção do losango.....	171
Anexo 18 – tarefa 16 – Elaborar um plano de construção.....	172
Anexo 19 – tarefa 17 – Classificar quadriláteros.....	173
Anexo 20 – tarefa 18 – Classificar quadriláteros (II).....	174
Anexo 21 – Registo de opinião dos alunos sobre as atividades e sobre o uso do geoplano e do GeoGebra.....	175

Índice de Quadros

Quadro 1 - Tarefas a realizar ao longo da experiência de ensino.....	53
Quadro 2 - Tarefas analisadas.....	69

Índice de Figuras

Figura 1- Descoberta de quadrados diferentes no geoplano, apresentada pela Maria e Luísa.....	62
Figura 2 - Identificação do quadrilátero pela Isa e Mauro.....	64

Figura 3 - Identificação do quadrilátero pela Maria e Luísa.....	64
Figura 4 - Representações dos quadriláteros, no geoplano, identificação e registo dos seus elementos, apresentadas pela Maria e Luísa.....	72
Figura 5 - Representações para explicar a ideia de “meio trapézio”, apresentadas pela Maria e Luísa.....	73
Figura 6 - Representação de quadriláteros diferentes, apresentada pela Maria e Luísa.....	74
Figura 7- Representações, no geoplano, de quadriláteros com lados iguais dois a dois, apresentadas pela Maria e Luísa.....	76
Figura 8 - Representação do paralelogramo realizada com o Geogebra e seguindo o protocolo de construção, apresentada pela Maria e Luísa.....	78
Figura 9 - Listagem das características do paralelogramo, apresentada pela Maria e Luísa.....	79
Figura 10 - Registo de alterações e invariantes entre o retângulo, o quadrado, o losango e o paralelogramo, apresentado pela Maria e Luísa.....	80
Figura 11 - Representação do losango, no GeoGebra, após arrastarem os pontos do paralelogramo obliquângulo, apresentada pela Maria e Luísa.....	81
Figura 12 - Listagem das características do quadrado, apresentada pela Maria e Luísa.....	83
Figura 13 - Registo da justificação do que é um quadrado, apresentado pela Maria e Luísa.....	84
Figura 14 - Registo das semelhanças entre o losango e o quadrado, apresentado pela Maria e Luísa.....	84
Figura 15 - Classificação dos quadriláteros: trapézio, paralelogramo, retângulo, losango, quadrado, apresentada pela Maria e Luísa.....	85
Figura 16 – Registo das características comuns ao quadrado, retângulo, paralelogramo, trapézio e losango, apresentado pela Maria e Luísa.....	86
Figura 17 - Representação dos quadriláteros para serem classificados, apresentada pela Maria e Luísa.....	87
Figura 18 - Registo do critério de classificação usado em cada grupo, apresentado pela Maria e Luísa.....	88
Figura 19 - Justificação da concordância com uma classificação hierárquica, apresentada pela Maria e Luísa.....	89
Figura 20 - Representação dos quadriláteros para serem classificados, apresentada pela Maria e Luísa.....	91

Figura 21 - Representações do paralelogramo e do trapézio, apresentadas pelo Miguel e Diogo.....	98
Figura 22 - Identificação dos quadriláteros e registo dos seus elementos, apresentada pelo Miguel e Diogo.....	98
Figura 23 - Quadriláteros representados no geoplano, pela turma, e projetados no data show.....	99
Figura 24 - Representação, no geoplano, de quadriláteros com lados iguais dois a dois e todos os ângulos iguais, apresentada pelo Miguel e Diogo.....	101
Figura 25 - Representação, no geoplano, de quadriláteros com lados iguais dois a dois, apresentada pelo Miguel e Diogo.....	101
Figura 26 - Registo do Diogo explicando porque considera um quadrado retângulo.....	101
Figura 27 - Representação do paralelogramo realizada com o Geogebra, apresentada pelo Miguel e Diogo.....	102
Figura 28 - Listagem das características do paralelogramo, apresentada pelo Miguel e Diogo.....	103
Figura 29 - Listagem das características do quadrado, apresentada pelo Miguel e Diogo.....	103
Figura 30 – Registo das características comuns ao quadrado, retângulo, paralelogramo, trapézio e losango, apresentado pelo Miguel e Diogo...	104
Figura 31 – Registo de alterações e invariantes entre o quadrado e o retângulo, apresentado pelo Miguel e Diogo.....	104
Figura 32 - Registo da justificação do que é um quadrado, apresentado pelo Miguel e Diogo.....	105
Figura 33 - Classificação dos quadriláteros: trapézio, paralelogramo, retângulo, losango, quadrado, apresentada pelo Miguel e Diogo.....	106
Figura 34 - Justificação da concordância com uma classificação hierárquica, apresentada pelo Miguel e Diogo.....	107
Figura 35 - Registo de alterações e invariantes entre o losango e o paralelogramo, apresentado pelo Miguel e Diogo.....	108
Figura 36 - Listagem das características do losango, apresentada pelo Miguel e Diogo.....	110
Figura 37 - Registo de alterações e invariantes entre o losango e o quadrado, apresentado pelo Miguel e Diogo.....	110
Figura 38 - Representações de quadriláteros, no geoplano, apresentadas pela Isa e Mauro.....	114

Figura 39 - Explicação do Mauro, à turma, da representação das diagonais do trapézio.....	115
Figura 40 - Apresentação, à turma, de quadriláteros com lados iguais dois a dois.....	115
Figura 41 - Representações, no geoplano, de quadriláteros com lados iguais dois a dois, apresentadas pela Isa e Mauro.....	116
Figura 42 - Representação do paralelogramo realizada no GeoGebra, apresentada pela Isa e Mauro.....	116
Figura 43 - Listagem das características do paralelogramo representado no GeoGebra, apresentada pela Isa e Mauro.....	117
Figura 44 - Registo de alterações e invariantes entre o losango e o paralelogramo, representados no GeoGebra, apresentado pela Isa e Mauro.....	118
Figura 45 - Classificação dos quadriláteros: trapézio, paralelogramo, retângulo, losango, quadrado, apresentada pela Isa e Mauro.....	119
Figura 46 - Representação do quadrado e do retângulo e listagem das propriedades comuns, apresentada pela Isa e Mauro.....	120
Figura 47 - Registo das semelhanças entre o losango e o quadrado, apresentado pela Isa e Mauro.....	123
Figura 48 - Listagem das características do quadrado representado no GeoGebra, apresentada pela Isa e Mauro.....	123
Figura 49 – Definição de quadrado, apresentada pela Isa e Mauro.....	124
Figura 50 - Registo do critério de classificação usado em cada grupo, apresentado pela Isa e Mauro.....	125
Figura 51- Justificação da concordância com uma classificação hierárquica, apresentada pela Isa e Mauro.....	126
Figura 52 - Registo das características do losango representado no GeoGebra, apresentado pela Isa e Mauro.....	127
Figura 53 - Registo da observação do quadrado após a movimentação dos pontos no GeoGebra, apresentado pela Isa e Mauro.....	128
Figura 54 - Registo da observação da representação dinâmica do losango, apresentado pela Isa e Mauro.....	128

CAPÍTULO 1

PROBLEMA E CONTEXTO DO ESTUDO

O primeiro capítulo deste trabalho identifica o problema e objetivo do estudo, a sua pertinência, as questões que justificam a realização da investigação a que se refere esta dissertação. Apresenta, ainda, a estrutura do estudo.

1.1. Problema e Objetivo do Estudo

É indubitável a importância da geometria e essa importância assume-se também nas reformas curriculares, onde ocupa, agora, um lugar de destaque. Para o *National Council of Supervisors of Mathematics*, a geometria é uma das doze componentes essenciais de matemática para o século XXI (Geddes et al., 2001). Todavia, também é do conhecimento geral que, apesar da sua importância, apesar de todos os esforços empreendidos pelas novas orientações e por alguns professores, esta continua a ser relegada para segundo plano, conjuntamente com todas as suas potencialidades.

Existe no nosso país, desde há algumas décadas até hoje, preocupação na introdução das Tecnologias da Informação e Comunicação no ensino. Essa introdução tem vindo a acontecer, também a nível do 1.º ciclo, concretizada mais recentemente através do programa *e. escolinha*, uma iniciativa do Plano Tecnológico da Educação que visa garantir o acesso dos alunos do 1.º ciclo do ensino básico a computadores portáteis pessoais adequados a este nível de ensino. Surge, então, o computador *magalhães* tornando, mais fácil, a utilização deste instrumento no processo de ensino-aprendizagem.

O *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM), refere-se à tecnologia nos seus princípios, mais precisamente, no *Princípio para a Tecnologia – (Princípios e Normas para a Matemática Escolar, 2008)*. Neste princípio pode ler-se:

A tecnologia é essencial no ensino e na aprendizagem da matemática; influencia a matemática que é ensinada e melhora a aprendizagem dos alunos. (p. 26)

Também as indicações curriculares atuais sobre o ensino da geometria dão ênfase à utilização de tecnologias, nomeadamente aos softwares de Geometria Dinâmica.

Assim, e podendo o computador ser mais uma ferramenta presente na sala de aula pretende-se, de algum modo, compreender de que forma a interação dos

alunos com essa ferramenta facilita a aprendizagem, especificamente compreender quais os contributos do AGD (*GeoGebra*) e do material manipulável (geoplano) na compreensão das propriedades e relações entre quadriláteros. Para isso propus-me produzir, implementar e analisar um conjunto de tarefas a desenvolver num AGD (*GeoGebra*) e com o material manipulável (geoplano) com alunos do 4.º ano de escolaridade, salientando o papel das representações e da visualização na identificação das propriedades dos quadriláteros: trapézio, paralelogramo, retângulo, quadrado e losango.

O interesse pela Geometria prende-se com o facto de sentir necessidade em aprofundar o meu conhecimento nesta área de modo a melhorar a qualidade das aprendizagens dos alunos, pois estudos recentes (Battista, 2007), referem que os estudantes continuam a ter dificuldades em aprender geometria com a profundidade desejada e de forma significativa. Alguns autores como Clements e Sarama (2000) afirmam, ainda, ser surpreendente o pouco que as crianças aprendem sobre as figuras geométricas, do pré-escolar ao ensino secundário.

Outros, ainda, referem que os alunos não conseguem atingir o nível da geometria descritiva, em parte, porque não são confrontados com problemas geométricos nos seus primeiros anos (van Hiele, 1997 citado em Clements, Sarama et al., 1999) ou consideram que o "período prolongado de inatividade geométrica" (Wirszup, 1976 citado em Matos, 1999) dos primeiros anos leva a crianças "geometricamente necessitadas" (Fuys, Geddes, e Tischler, 1988 citados em Clements, Sarama et al., 1999).

A opção pelo estudo das propriedades dos quadriláteros, para além das indicações no programa de matemática relativamente à descrição, construção de figuras no plano e identificação de propriedades e classificações, deveu-se ao facto de ser um tema rico em conceitos geométricos indicados no programa de matemática, 3.º e 4.º anos, nomeadamente, o paralelismo, perpendicularidade e ângulos. Além disso são figuras retomadas no tópico da área.

1.2. Questões de investigação

Para um melhor aprofundamento do tema, definiram-se as seguintes questões de investigação:

- Qual o papel das representações na identificação das propriedades dos quadriláteros?

- Que influência tem a visualização na identificação das propriedades dos quadriláteros?
- Quais os contributos da utilização do ambiente de geometria dinâmica (*GeoGebra*) e do geoplano na compreensão das propriedades e relações entre quadriláteros?

1.3. Pertinência do estudo

De acordo com o *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME, 2007), o recurso a programas computacionais de geometria dinâmica, favorece a compreensão dos conceitos e relações geométricas (2.º ciclo) e deve ser utilizado em tarefas exploratórias e de investigação (3.º ciclo). Relativamente ao 1.º ciclo este documento, embora não faça referência à utilização destes programas, menciona a importância da utilização do computador em sala de aula de modo a possibilitar explorações que podem enriquecer as aprendizagens realizadas no âmbito da geometria. No mesmo documento, nas orientações metodológicas gerais, pode ler-se:

Ao longo de todos os ciclos, os alunos devem usar calculadoras e computadores na realização de cálculos complexos, na representação de informação e na representação de objectos geométricos. O seu uso é particularmente importante na resolução de problemas e na exploração de situações. (p. 9)

Nas indicações metodológicas para o 1.º ciclo, pode ler-se:

O computador possibilita explorações que podem enriquecer as aprendizagens realizadas no âmbito deste tema, nomeadamente através de applets – pequenos programas ou aplicações disponíveis na Internet – e permitir a realização de jogos e outras atividades de natureza interativa. (p. 21)

Também o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM), se refere à tecnologia nos seus princípios, mais precisamente, no *Princípio da Tecnologia* – (NCTM, 2008). Neste princípio pode ler-se:

A tecnologia é essencial no ensino e na aprendizagem da matemática; influencia a matemática que é ensinada e melhora a aprendizagem dos alunos. (p. 26)

Ainda, neste documento, mais adiante, sobre normas respeitantes à geometria, pode ler-se:

Os programas de geometria dinâmica propiciam um ambiente onde os alunos podem explorar relações e formular e testar conjecturas. (p. 44)

Assim, a meu ver, as razões fundamentais que justificam a pertinência deste estudo são, por um lado, a preocupação com a melhoria da qualidade das aprendizagens dos alunos; por outro, a importância das Tecnologias da Informação e Comunicação, nomeadamente, o contributo do AGD na compreensão de propriedades de figuras no plano, especificamente, dos quadriláteros: trapézios, paralelogramos, retângulos, losangos e quadrados.

Finalmente e atendendo à preocupação de alguns investigadores relativamente ao facto de uma mudança nas práticas letivas, nomeadamente no que concerne à geometria e ao papel dos AGD, poder levar a uma melhoria no ensino e aprendizagem desta disciplina. Assim, esta investigação poderá ser um contributo para o aumento do conhecimento da comunidade de educação matemática.

A questão central desta investigação baseia-se na utilização do AGD, *GeoGebra*, e do geoplano na representação de quadriláteros, de modo a analisar os contributos de um e de outro na compreensão das suas propriedades e relações.

1.4. Organização geral

A dissertação encontra-se organizada em seis capítulos. O primeiro capítulo procura contextualizar o estudo, apresentando o problema de partida, os objetivos do mesmo e a sua pertinência.

No segundo capítulo é apresentada a revisão de literatura realçando os referenciais teóricos que fundamentam este estudo, nomeadamente, o ensino e aprendizagem da geometria, figuras geométricas, representações, visualização, propriedades dos quadriláteros e aprendizagem com recurso a meios computacionais com destaque para os AGD.

O terceiro capítulo engloba as opções metodológicas adotadas, descrevendo os participantes e os procedimentos relativos à recolha e análise dos dados.

No quarto capítulo apresenta-se a experiência de ensino, descrevendo os objetivos, tarefas e os aspetos respeitantes à sua implementação. É feita uma descrição da resolução das tarefas pelos alunos envolvidos.

No quinto capítulo é feita a análise dos dados recolhidos com base nos três estudos de caso, referindo-se a atitude perante as tarefas, o papel das representações e da visualização na identificação das propriedades dos quadriláteros.

Por fim, no sexto capítulo, apresentam-se as principais conclusões baseadas na análise de dados, limitações do estudo e recomendações para investigações futuras.

CAPÍTULO 2

REVISÃO DA LITERATURA

O enquadramento teórico de um estudo é de tal modo importante que o seu valor global deriva tanto das suas propriedades intrínsecas como da forma como ele se situa em relação a estudos anteriores e expande os seus resultados (Merriam, 1988 citada por Ponte, 1994). Assim, este capítulo pretende dar a conhecer alguma da literatura que orientou este estudo, realçando as perspetivas de autores de referência relativamente à temática abordada.

Numa primeira fase contextualiza-se a geometria, analisando a evolução específica dos conteúdos dos programas e orientações curriculares internacionais e nacionais e realçam-se perspetivas do ensino-aprendizagem abordando a teoria de van Hiele, os materiais manipuláveis, o papel das representações e da visualização espacial.

Segue-se uma análise às figuras geométricas 2D, destacando as propriedades e classificação dos quadriláteros.

Por último, é feita uma alusão à aprendizagem com recurso a meios computacionais destacando-se os AGD.

2.1. Geometria – o que é?

As primeiras experiências das crianças, ao tentarem compreender o mundo que as rodeia, ao distinguirem um objeto de outro e ao descobrirem o grau de proximidade de um dado objeto, são geométricas e espaciais. Enquanto estudo das formas e das relações espaciais, a geometria oferece às crianças uma das melhores oportunidades para relacionar a matemática com a realidade, refere Freudenthal (1973). De acordo com o mesmo autor a geometria é, essencialmente, conhecer o espaço “em que a criança vive, respira e se movimenta” (p. 403).

A geometria é essencial na formação dos indivíduos, pois segundo Lorenzato (1995) possibilita uma interpretação mais completa do mundo, uma comunicação mais abrangente de ideias e uma visão mais equilibrada da matemática. É o grande campo de treino para o raciocínio lógico, e alguns matemáticos e educadores matemáticos entendem que o seu estudo proporciona ao estudante um treino elementar nesse tipo de raciocínio (Davis e Hersh, 1995).

Goldenberg, Cuoco e Mark (1998) dão suporte e significado à noção de “geometria amplamente concebida” com a proposição que ajuda os alunos a

conectar-se, a alegação de que essa conexão é com a matemática e a noção de perspectiva “hábitos da mente” e sua importância. As conexões da geometria podem construir *boas pontes* para atrair mais alunos e um grupo mais diversificado para a matemática em geral.

Alsina (1999) afirma:

A Geometria no ensino da Matemática deve ser a Geometria útil para todos: o conhecimento matemático do espaço. Uma Geometria baseada na intuição e na experimentação aconselhada pelo sentido comum; rica em temas de representação e interpretação; capaz de ordenar, classificar e mover figuras planas e espaciais; audaz na combinação de linguagens diversas (gráficas, analíticas e simbólicas...); apoiada no rigor das definições e das deduções sobre factos relevantes; com técnicas diversas para medir, construir e transformar; induzindo à compreensão do diálogo plano-espaço; (...) esta é a Geometria com a qual nos gostaríamos de educar todos. (p.65)

Como é referido em Ponte e Serrazina (2000) a geometria, ao fornecer formas de representação com forte apelo visual para outros tópicos da matemática, como por exemplo “as figuras geométricas que podem auxiliar a compreensão das frações, e em particular, dos números decimais” (p.165), pode constituir-se um tema unificador na aprendizagem da matemática. Segundo estes investigadores, outra das razões para valorizar o seu estudo nos primeiros anos de escolaridade é que a geometria “dá-nos ainda a oportunidade de ensinar a resolução de problemas e pela resolução de problemas” como, por exemplo, a construção de figuras no geoplano, que possibilita trabalhar o nome e as características das figuras ou a construção de figuras com dois ângulos retos que é uma tarefa problemática, pois envolve grande variedade de soluções requerendo, a sua realização, o uso de conceitos geométricos importantes.

O estudo da geometria contribui, segundo Jones (2002), para ajudar os alunos a desenvolver as habilidades de visualização, o pensamento crítico, a intuição, a resolução de problemas, o raciocínio dedutivo, a argumentação e prova.

2.1.1. Geometria no currículo

Há umas décadas o ensino e aprendizagem da geometria em Portugal, assim como em muitos outros países, assumiu um papel secundário como consequência, em grande parte, do movimento da Matemática Moderna que trouxe para o seu estudo o carácter excessivamente formal e abstrato da teoria de conjuntos. Esta situação era agravada pelo facto de os currículos anteriores à Nova Reforma proporcionarem que a geometria fosse “trabalhada” no final do ano letivo, tornando-

se propícia a sua não lecionação ou o seu tratamento apressado, desvalorizando-se as abordagens manipulativas e intuitivas dos problemas geométricos. Agravando esta crise emerge, nas décadas de 70 e 80, a geometria encarada com um desinteresse intrínseco para o prosseguimento dos estudos (Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999).

Porém, no final dos anos 80, o papel da geometria começou a ser repensado, destacando-se a importância do Seminário de Vila Nova de Milfontes realizado em 1988, do qual surgiu a *Renovação do Currículo de Matemática* (Associação de Professores de Matemática, APM), documento que preconizava uma nova perspectiva relativamente a objetivos e orientações para o ensino da matemática.

Estas novas orientações tiveram uma forte influência na elaboração do novo Programa de Matemática para o 1.º ciclo do ensino básico (publicado em 1990, pela Direção Geral do Ensino Básico e Secundário), tendo a geometria, como conteúdos essenciais: (i) a organização espacial, (ii) sólidos geométricos, (iii) figuras geométricas planas, (iv) transformações no plano, e (v) utilização de instrumentos de desenho.

A revalorização da geometria foi continuada ao longo dos anos 90, nacional e internacionalmente, sendo a geometria apresentada como um dos vários domínios da competência matemática, em documentos como: *Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais* (ME, 2001), *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (NCTM, 2008) e *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME, 2007).

Atualmente e, de acordo com o *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME, 2007), o ensino da geometria centra-se no desenvolvimento do sentido espacial dos estudantes e o estudo da figuras bi e tridimensionais tem um papel importante neste tema. Logo desde o 1.º ciclo estudam-se as diversas transformações geométricas, primeiro de forma intuitiva e depois com crescente formalização. O ensino da geometria, no 1.º ciclo, deve privilegiar a exploração, manipulação e a experimentação utilizando objetos do mundo real e materiais específicos, devendo os alunos ser capazes de agir, prever, ver e explicar o que se passa no espaço que percebem, desenvolvendo, progressivamente, a capacidade de raciocinarem com base em representações mentais. Foram definidos como objetivos gerais de aprendizagem:

- desenvolver a visualização e ser capazes de representar, descrever e construir figuras no plano e no espaço e de identificar propriedades que as caracterizam;
- ser capazes de identificar e interpretar relações espaciais;

- ser capazes de resolver problemas, raciocinar e comunicar no âmbito deste tema;
- ...

(adaptado de ME, 2007, p. 20)

Também a nível internacional, o documento de referência, *Principles and Standards for School Mathematics* publicado pelo NCTM em 2000 (e pela APM em 2008 com o título *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*), define orientações para a educação matemática do pré-escolar ao 12.º ano e preconiza que no âmbito da geometria, os alunos devem ser capazes de:

- analisar as características e propriedades de formas geométricas bi e tridimensionais e desenvolver argumentos matemáticos acerca de relações geométricas;
- especificar posições e descrever relações espaciais;
- aplicar transformações geométricas e usar a simetria para analisar situações matemáticas;
- usar a visualização, o raciocínio espacial e a modelação geométrica para resolver problemas.

(adaptado de NCTM, 2008, p.44)

Além destas orientações são, ainda, apresentadas algumas expectativas para os alunos do 3.º ao 5.º anos que deverão:

- identificar, comparar e analisar atributos de formas bi e tridimensionais e desenvolver vocabulário para descrever esses atributos;
- classificar formas bi e tridimensionais através das propriedades e criar definições de classes de formas;
- formular e testar conjeturas sobre propriedades e relações geométricas, e justificar as conclusões com argumentos lógicos.

(adaptado de NCTM, 2008, p.190)

Uma outra orientação comum aos documentos acima apresentados é o uso da tecnologia que deve ser largamente utilizada com o intuito de enriquecer a aprendizagem matemática dos alunos, nomeadamente, a utilização de programas de geometria dinâmica para investigar as propriedades das formas. Em consonância com esta orientação, vários estudos foram desenvolvidos (Battista, 2001, 2007; Clements, 2004; Clements e Battista, 1992; Clements, Battista, Sarama, Swaminathan e McMillen, 1997; Clements e Sarama, 2000; Gutiérrez, 1996; Hershkowitz, 1990; Jones, 2000) reforçando a importância que o *software* de geometria dinâmica assume na aprendizagem dos conceitos.

2.2. Ensino e aprendizagem da geometria

A geometria é um dos temas do ensino da matemática que mais controvérsia tem levantado. Questionam-se os conteúdos, as finalidades e também as metodologias a utilizar na sala de aula. Há, no entanto, grandes linhas de concordância sobre o que deve ser o ensino da geometria nas escolas: reforço da intuição espacial, recurso à utilização dos computadores, com especial destaque a programas de geometria dinâmica e manipulação das figuras elementares valorizando a investigação de algumas propriedades.

Matos e Serrazina (1996) sugerem um modelo de ensino assente numa visão que valoriza a aprendizagem da geometria como um fenómeno *gradual*, pois pressupõe que a intuição, o raciocínio e a linguagem geométrica são adquiridos gradualmente; *global*, porque uma figura ou propriedade não são abstrações isoladas mas relacionam-se umas com as outras, pressupondo níveis mais simples ou mais complexos que lhes dão outros significados e possuem ligações com outras áreas da matemática e do próprio saber; é um fenómeno *construtivo*, porque não existe transmissão de conhecimentos, mas antes o aluno constrói ele próprio os seus conceitos e, finalmente, a aprendizagem da geometria deve ser um ato *social* exercido entre alunos, alunos e professor e entre alunos e a comunidade envolvente da escola. Os mesmos autores referem que a aprendizagem da geometria deve desenvolver nos alunos diversas capacidades como a visualização, a construção e manipulação de objetos geométricos, a organização lógica do pensamento matemático e a aplicação dos conhecimentos geométricos a outras situações, fundamentais para toda a matemática.

Também o documento NCTM (2008), que define orientações para a educação matemática, refere a importância do estudo da geometria, propondo Normas e Expetativas, do pré-escolar ao 12.º ano. De acordo com o estipulado neste documento, de referência internacional, o estudo da geometria permite aos alunos aprender as formas e estruturas geométricas e o modo de analisar as suas características e relações, constituindo-se como um contexto natural para o desenvolvimento das capacidades de raciocínio, de argumentação e, em anos mais avançados, da demonstração. O raciocínio espacial e a modelação geométrica podem ser ferramentas importantes na resolução de problemas, pois proporcionam formas de interpretar e descrever ambientes físicos.

As ideias geométricas são de grande utilidade na representação e resolução de problemas em outras áreas da matemática pelo que, sempre que possível, a

geometria deverá ser relacionada com outras áreas. A título de exemplo, podemos referir as representações geométricas para ajudar a compreender áreas e frações, os histogramas e os diagramas de dispersão para clarificar a informação e os gráficos de coordenadas para estabelecer a ligação entre a geometria e a álgebra. O raciocínio espacial facilita a utilização de mapas, o planeamento de trajetos, a construção de plantas e a criação artística. Ainda, através da utilização de modelos concretos, desenhos e programas informáticos de geometria dinâmica, os alunos poderão envolver-se ativamente com conceitos geométricos. Assim, “com atividades bem concebidas, com ferramentas adequadas e com apoio do professor, poderão formular e explorar conjecturas e poderão aprender a raciocinar cuidadosamente sobre as noções geométricas, logo desde os primeiros anos de escolaridade” (NCTM, 2008, p. 44).

Nesta perspetiva e de acordo com Jones (2002), apresentar a geometria de uma forma que estimule a curiosidade e incentivar a exploração pode melhorar a aprendizagem do aluno e as suas atitudes em relação à matemática.

2.2.1. Teoria de van Hiele

No final da década de 50, os educadores holandeses Pierre e Dina van Hiele, preocupados com as dificuldades apresentadas pelos seus alunos ao lidar com conceitos geométricos, principalmente em relação ao processo dedutivo e demonstrações, desenvolveram um modelo para o ensino e aprendizagem nesse campo da matemática, no qual o pensamento geométrico evolui ao longo de uma sequência de cinco níveis de complexidade crescente.

De acordo com a teoria de Pierre e Dina van Hiele (van Hiele, 1999), os estudantes progredem através de níveis sequenciais e hierárquicos de pensamento em geometria:

Nível 1 – Visualização – Neste nível os alunos veem o espaço apenas como algo que existe em torno deles. Reconhecem as figuras geométricas apenas pela sua forma (aparência física), não conseguindo identificar as suas partes ou propriedades. São capazes de reproduzir figuras dadas e aprender um vocabulário geométrico básico. Por exemplo, são capazes de reconhecer um retângulo, porque este se parece com uma porta;

Nível 2 – Descrição/Análise – É onde começa a análise dos conceitos. Os alunos começam a distinguir as características e as propriedades das figuras, mas não conseguem, ainda, estabelecer relações entre essas propriedades, não entendem as definições e não veem relações entre as figuras;

Nível 3 – Dedução Informal – Neste nível os alunos começam a estabelecer relações de propriedades dentro das figuras e entre figuras, deduzindo propriedades e reconhecendo classes de figuras. As definições começam a ter significado, mas ainda não compreendem a dedução como um todo ou o papel dos axiomas;

Nível 4 – Dedução Formal – Os alunos entendem a geometria como um processo dedutivo;

Nível 5 – Rigor – Os alunos estudam diversos sistemas axiomáticos para a geometria.

De acordo com a interpretação dominante da teoria, no final do primeiro nível, os alunos, são capazes de identificar retângulos, quadrados, losangos, e outras figuras. No final do segundo nível, são capazes de enumerar várias propriedades que cada uma dessas figuras tem. Somente no terceiro nível concordam com a usual classificação hierárquica dos quadriláteros, ou seja, que um quadrado é um tipo especial de retângulo e que ambos são paralelogramos especiais. A razão para esta mudança é que, no terceiro nível, os alunos são capazes de compreender a lógica de conexões entre as propriedades e, conseqüentemente, são capazes de aceitar as conseqüências lógicas de uma definição (van Hiele, 1984).

Porém, os van Hiele propuseram que a inclusão de classes pode ocorrer no Nível 2 desde que uma criança possa perceber que um quadrado é um losango, pois tem todas as suas propriedades (citado em Villiers e Njisane, 1987), interpretação que não tem sido aceite pela comunidade científica.

Burger e Shaughnessy (1986 citado em Villier, 2010) usaram entrevistas com base em tarefas e apresentam uma caracterização dos níveis de pensamento dos alunos nos primeiros quatro níveis de maneira mais completa:

Nível 1

(1) Costumam usar propriedades visuais irrelevantes para identificar figuras, comparar, classificar e descrever. (2) Normalmente referem-se a protótipos visuais de figuras e são facilmente enganados pela orientação das figuras. (3) Incapacidade de pensar em uma variação infinita de um tipo específico de figura (por exemplo, em termos de orientação e forma). (4) Classificações inconsistentes de figuras, por exemplo, uso de propriedades incomuns ou irrelevantes para classificarem as figuras. (5) Descrições (definições) incompletas de figuras ao ver condições necessárias (normalmente visuais) como condições suficientes;

Nível 2

(1) Uma comparação explícita de figuras com relação às suas propriedades subjacentes. (2) Evitam inclusões de classe entre as diferentes classes de figuras, por exemplo, quadrados e retângulos são considerados disjuntos. (3) Classificação de figuras somente com relação a uma propriedade, por exemplo, propriedades dos lados, enquanto outras

propriedades, como simetrias, ângulos e diagonais, são ignoradas. (4) Exibem uma utilização não econômica das propriedades das figuras para descrevê-las (defini-las), em vez de usar apenas as propriedades suficientes. (5) Rejeição explícita de definições fornecidas por terceiros, por exemplo, um professor ou livro, favorecendo apenas as suas próprias definições pessoais. (6) Abordagem empírica no estabelecimento da verdade de uma declaração, por exemplo, o uso de observação e medição com base em diversos rascunhos;

Nível 3

(1) Formulação de definições econômicas e corretas para as figuras. (2) Capacidade de transformar definições incompletas em definições completas e uma aceitação e uso espontâneo de definições para novos conceitos. (3) A aceitação de diferentes definições equivalentes para o mesmo conceito. (4) Classificação hierárquica de figuras, por exemplo, quadriláteros. (5) Uso explícito da forma lógica “se... então” na formulação e tratamento de conjecturas, além do uso implícito de regras lógicas, como modus ponens. (6) Incerteza e falta de clareza com relação às respectivas funções de axiomas, definições e provas;

Nível 4

(1) Compreensão das respectivas funções (papéis) de axiomas, definições e provas. (2) Realização espontânea de conjecturas e esforços iniciados por vontade própria para verificá-los de maneira dedutiva. (Villier, 2010. p. 404)

A teoria de van Hiele tem sido grandemente discutida e questionada devido à sua natureza e à sua limitação às figuras no plano (Battista, 2007). Vários autores, nomeadamente, (Clements e Batista, 1992; Gutierrez, Jaime e Fortuny, 1991; Lehrer, Jenkins e Osana, 1998; Pegg e Davey, 1989; Battista, 2007) têm questionado os níveis, tal como era interpretação comum, especificamente, conceituar um nível puramente visual seguido e substituído por um nível puramente descritivo e verbal. Estes autores defendem que raciocínios de diferentes níveis coexistem num indivíduo podendo desenvolver-se simultaneamente, embora a ritmos diferentes.

Estudos feitos demonstraram que crianças, mesmo em níveis iniciais, podem atender conscientemente a um subconjunto de características visuais da forma e usá-las como um subconjunto para identificar formas geométricas, incluindo as suas descrições alguns termos e atributos (Clements, Swaminathan, Hannibal e Sarama, 1999). Assim, vão de encontro a Clements e Battista (1992) que defendem existir um nível pré-recognitivo antes do Nível 1 de van Hiele (nível visual). Constataram, ainda, que algumas crianças parecem usar, simultaneamente, a correspondência a um protótipo visual e o raciocínio sobre os componentes e as propriedades para resolver tarefas de seleção de figuras. Ficou, assim, evidente que o Nível 1 de

pensamento geométrico, tal como proposto pela teoria de van Hiele é mais sincrético do que visual, como Clements e Battista (1992) sugeriram. Isto porque este nível é a síntese do conhecimento declarativo verbal e imagístico, cada um interagindo com o outro. Neste nível *sincrético*, a criança mais facilmente usa o conhecimento declarativo para explicar porque uma figura em particular não é um membro de uma classe, uma vez que o contraste entre a figura e o protótipo visual provoca descrições das diferenças (Gibson, 1985 citado em Clements, Sarama et al., 1999).

Na transição para o nível seguinte, as crianças experienciam, por vezes, conflitos entre as duas combinações, correspondência de protótipo versus análise de componentes e propriedades, levando à execução de tarefas de forma errada e inconsistente. Isto porque começam a depender dos atributos que determinam para definir a categoria em vez de confiar exclusivamente na comparação com um protótipo mental.

Para formar o conhecimento sólido que suporta a transição para o Nível 2, as crianças devem construir e atender conscientemente aos componentes e propriedades de formas geométricas como objetos cognitivos (um processo de aprendizagem que requer a mediação e, provavelmente, auxiliado pelo uso de materiais manipuláveis em tarefas de construção física, bem como reflexão, muitas vezes solicitado por meio da discussão), (Clements, Sarama et al., 1999).

Clements e Battista (2001 citados em Battista, 2007)) propuseram a ideia de que os níveis de van Hiele (vistos como tipos de raciocínio) se desenvolvem simultaneamente (embora a ritmos diferentes). Conhecimento visual-holístico, conhecimento descritivo verbal e, inicialmente, em menor medida, o conhecimento abstrato simbólico cresce simultaneamente, assim como as interconexões entre os níveis. No entanto, embora estes tipos diferentes de raciocínio cresçam em grau conjunto, um nível tende a tornar-se ascendente ou privilegiado na orientação de uma criança em direção a problemas geométricos. O nível que é privilegiado, é influenciado pela idade, experiência, intenções, tarefas e habilidade no uso dos vários tipos de raciocínio. Nos primeiros anos, enquanto o raciocínio visual (chamado sincrético para significar combinação, análise e síntese sem coerência) é dominante, o conhecimento descritivo-analítico começa a surgir e interage com o conhecimento visual. O domínio inicial do raciocínio visual-holístico dá lugar, gradualmente, ao raciocínio descritivo-analítico. Como o raciocínio abstrato começa a sua ascendência, as conexões entre todos os tipos de raciocínio são reforçadas e reformuladas. Consistentes com este ponto de vista “crescimento contínuo”, estes

pesquisadores encontraram poucas evidências nas suas próprias pesquisas ou de outros, de descontinuidades entre os níveis como postulado pela teoria de van Hiele.

De acordo com esta concepção, Battista (2007) apresenta uma alternativa para entender o desenvolvimento do raciocínio em geometria, redefinindo os níveis de van Hiele expandindo-os em dois campos: o desenvolvimento do pensamento baseado nas propriedades e o desenvolvimento de inferências sobre as propriedades. O autor traça assim o progresso dos alunos na passagem de conceptualizações informais intuitivas de formas geométricas 2D para o formal baseado nas propriedades. Assim:

Nível 1 (Raciocínio visual-holístico): os alunos identificam, descrevem e raciocinam sobre as formas e outras configurações geométricas de acordo com sua aparência como um todo visual. Assim, a orientação das figuras pode afetar fortemente a identificação de figuras, ao mesmo tempo que os alunos podem justificar as suas respostas usando transformações visuais imaginadas, dizendo por exemplo, que uma forma é um quadrado, porque se é rodado, parece um quadrado. O autor apresenta subníveis: - **pré-reconhecimento:** os alunos não são capazes de identificar muitas formas comuns e - **reconhecimento:** os alunos identificam corretamente muitas formas comuns;

Nível 2 (Raciocínio Analítico-componencial¹): os alunos concetualizam e especificam as formas descrevendo as suas partes e as relações espaciais entre as partes. De acordo com a sofisticação das descrições e concetualizações dos alunos, o autor apresenta como subníveis: - **raciocínio componencial Visual-informal:** os alunos descrevem partes e propriedades das formas de maneira informal e imprecisa pois não possuem as concetualizações formais que permitem especificações precisas das propriedades. As descrições baseiam-se no visual, concentrando-se inicialmente em partes de formas e depois em relações espaciais entre as partes e usando linguagem estritamente informal, aprendida na experiência quotidiana, - **raciocínio componencial informal e insuficientemente formal:** os alunos usam uma combinação de descrições informais e formais, de formas. As descrições formais utilizam conceitos geométricos padrão e termos ensinados nos currículos de matemática, no entanto são insuficientes para especificar completamente formas. Embora os alunos apresentem propriedades abstratas para uma classe de formas o seu raciocínio é ainda baseado visualmente e a maioria das suas descrições e concetualizações ainda parecem ocorrer de forma extemporânea enquanto eles inspecionam formas, - **raciocínio baseado na propriedade formal suficiente:** os alunos usam explícita e exclusivamente conceitos geométricos e linguagem formal para descrever e concetualizar formas atendendo a um conjunto suficiente de propriedades para as especificar. Este subnível é caracterizado por uma mudança considerável pois o principal critério para a identificação de uma forma é se satisfaz um conjunto preciso de propriedades formais verbalmente declaradas, deixando longe o raciocínio visual dominante. Os alunos podem usar e formular

¹ Em inglês: *Componential* - sobre as componentes (partes) da figura

definições formais para as classes de formas mas essas definições não são mínimas, pois que formular definições mínimas requer relacionar uma propriedade a outra usando algum raciocínio de tipo inferencial (que ocorre no Nível 3). Eles enunciam um conjunto de propriedades para uma classe de formas, listando todas as características visuais que têm vindo a associar a esse tipo de forma, descritas em termos de conceitos geométricos formais. Progredir para este subnível exige que os conceitos formais, como o comprimento dos lados e a medida dos ângulos, devem ter atingido um nível suficiente de abstração para que possam ser usados na formação de concetualizações relacionais, tais como "todos os lados iguais" que descrevem as relações espaciais entre as partes da forma;

Nível 3 (Raciocínio relacional inferencial baseado na propriedade): os estudantes interrelacionam explicitamente e fazem inferências sobre as propriedades geométricas de figuras. A sofisticação das interrelações das propriedades dos alunos varia muito começando com associações empíricas (quando a propriedade X ocorre, o mesmo acontece com a propriedade Y), progredindo para a análise componencial que explica por que razão uma propriedade "causa" outra propriedade depois infere logicamente uma propriedade de outra e, finalmente, para usar inferências para organizar concetualizações de figura geométrica num sistema de classificação hierárquica. No entanto, porque uma propriedade pode "sinalizar" outras propriedades, os alunos podem organizar logicamente conjuntos de propriedades, especificando corretamente figuras geométricas sem nomear todas as suas propriedades, formar definições mínimas, e distinguir entre conjuntos de condições necessárias e suficientes. Os alunos podem raciocinar com sentido sobre as declarações de propriedades formais que descrevem relações espaciais, em muitos casos, sem ter de representar visualmente as estruturas espaciais reais que as declarações descrevem. Subníveis: - **relações empíricas:** os alunos usam a evidência empírica para concluir que se uma figura tem uma propriedade, tem outra, - **análise componencial:** ao analisar como os tipos de figuras podem ser construídas, um componente de cada vez, os alunos concluem que, quando ocorre uma propriedade, uma outra propriedade deve ocorrer. Os alunos realizam esta análise, fazendo desenhos ou imaginando construir figuras peça por peça, - **inferência lógica:** os alunos fazem inferências lógicas sobre as propriedades, eles operam mentalmente em declarações de propriedade e não em imagens. Por exemplo, um aluno pode raciocinar dessa maneira porque se um quadrado tem todos os lados iguais, tem os lados opostos iguais. Tal raciocínio permite que os alunos façam as inferências necessárias para a classificação hierárquica. Por exemplo, um estudante cuja definição de um retângulo é "4 ângulos retos e lados opostos iguais" pode inferir que um quadrado é um retângulo porque "um quadrado tem quatro ângulos retos, que um retângulo tem que ter, e porque um quadrado tem 4 lados iguais, tem os lados opostos iguais, que um retângulo tem que ter." Mas os estudantes não usam esta capacidade de inferência para reorganizar logicamente as suas redes concetuais sobre figuras, pois eles não adotam o sistema de classificação lógica e hierárquica de figuras (ou seja, eles ainda resistem à ideia de que um quadrado é um retângulo embora possam seguir a lógica que justifica tal afirmação), - **classificação hierárquica de figuras baseada em**

inferência lógica: os alunos utilizam inferência lógica para reorganizar a sua classificação de figuras geométricas numa hierarquia lógica. Os alunos dão argumentos lógicos para justificar as suas classificações hierárquicas. O uso da lógica dos alunos para tirar conclusões proporciona-lhes uma nova forma de acumular conhecimentos ou seja, novos conhecimentos podem ser gerados não apenas por meios empíricos ou intuitivos, mas através de dedução lógica;

Nível 4 (Prova dedutivo formal): os alunos podem compreender e construir provas geométricas formais. Isto é, dentro de um sistema axiomático, podem produzir uma sequência de instruções que justifica logicamente uma conclusão como consequência dos "dados". Eles reconhecem as diferenças entre termos indefinidos, definições, axiomas e teoremas. (p. 851-853)

Neste estudo e tendo em conta a idade dos alunos envolvidos (8/9 anos), dar-se-á maior atenção aos dois primeiros níveis da teoria de van Hiele ou de acordo com a redefinição de Battista (2007) aos níveis 1 e 2, atendendo aos subníveis: raciocínio componencial visual-informal e raciocínio componencial informal e insuficientemente formal pois, supostamente, será entre estes níveis que as crianças se movimentam.

2.2.2. Materiais manipuláveis

A utilização de materiais manipuláveis no desenvolvimento do pensamento geométrico e espacial em crianças mais novas é sugerida em várias pesquisas (Clements e McMillen, 1996; Ponte e Serrazina, 2000), pois fornecem, muitas vezes, o suporte visual e experimental.

Também o Programa de Matemática (ME, 2007) enfatiza a importância da utilização de materiais manipuláveis (estruturados e não estruturados) na aprendizagem da geometria e da medida. De acordo com este documento, “estes materiais permitem estabelecer relações e tirar conclusões, facilitando a compreensão de conceitos” (p. 23). Alguns materiais como geoplano, tangram, pentaminós, peças poligonais encaixáveis, espelhos, miras, modelos de sólidos geométricos, *puzzles*, mosaicos, régua, esquadros e compassos são especificamente apropriados para a aprendizagem da geometria. Na abordagem da geometria e medida devem também ser utilizados instrumentos como, por exemplo: régua, esquadros, metros articulados, fitas métricas, balanças, recipientes graduados e relógios.

Também Ponte e Serrazina (2000) referem que a manipulação de materiais, juntamente com a reflexão sobre as atividades realizadas, tem um papel primordial na construção dos conceitos geométricos. Ao nível do 1.º ciclo do ensino básico

podemos considerar o uso de materiais como fundamental, por um lado, porque as crianças estão fortemente dependentes do ambiente e dos materiais à sua disposição e por outro, porque sendo os conceitos e relações matemáticas entes abstratos, é necessário encontrar ilustrações, representações e modelos que facilitem a construção desses conceitos.

Assim, devem ser proporcionadas, aos alunos, oportunidades para realizar experiências que lhes permitam explorar, visualizar, desenhar e comparar objetos do dia-a-dia e outros materiais concretos que deverão constituir a base para um ensino mais formal. É, porém, imprescindível que os materiais sejam de facto usados pelos alunos e que estes saibam realmente qual a tarefa para a qual é suposto usar o material, pois “é tão ineficaz ser o professor a usar o material, com o alunos a ver, como ter o aluno a mexer no material sem saber o que está a fazer” (Ponte e Serrazina, 2000. p. 116).

No entanto, a utilização de materiais, só por si, não garante a aprendizagem (ME, 2007) pois tal como é referido em Matos e Serrazina (1996), os conceitos matemáticos que a criança deve construir não estão em nenhum dos materiais de forma a podê-los abstrair empiricamente, mas “formar-se-ão pela ação interiorizada da criança, pelo significado que dá às suas ações, às formulações que enuncia, às verificações que realiza” (p. 197). Assim os professores têm um papel fundamental neste processo devendo disponibilizar os materiais e organizar adequadamente o ambiente de aprendizagem, de modo a encorajar os alunos a explorar as figuras e as suas propriedades.

Neste estudo optou-se pelo recurso ao geoplano (5X5) porque é um recurso estimulante que possibilita discussões ricas acerca das características dos polígonos. Também por se considerar um recurso facilitador na resolução de problemas geométricos e no estudo das figuras planas, possibilitando o apoio à representação mental dessas figuras. E ainda, por ser uma etapa no caminho da abstração e por se adequar às tarefas da experiência de ensino deste estudo, nomeadamente, a representação de quadriláteros enfatizando a identificação e a nomenclatura e, ainda, a emergência de algumas propriedades das figuras.

2.3. As figuras geométricas (2D)

A compreensão básica das figuras geométricas, conforme teorizado por Hannibal (1999), é essencial no estudo da geometria e os professores devem ajudar as crianças a desenvolver a compreensão de categorias de figuras.

Mas não podemos falar de figuras geométricas sem pensar no espaço, pois interagir com figuras reais envolve a compreensão do mundo visual que nos rodeia e também a interpretação da informação visual e, acima de tudo, compreender as mudanças nas figuras que povoam o nosso espaço. O espaço e as figuras, como defendido por Freudenthal (1973), fornecem o ambiente no qual o aluno pode obter a percepção de uma teoria matemática. Este ambiente, numa fase mais avançada adquire um aspeto mais amplo e mais abstrato, sem a necessidade de um ambiente real como base. No caso mais abstrato lidamos com as figuras e algum tipo de espaço, mesmo quando elas são representações visuais, ou seja imagens mentais ou, por outras palavras, representações teóricas.

De acordo com Senechal (1990 citada em Hershkowitz, Parzysz e Dormolen, 1996) a interação significativa com figuras reais no nosso espaço tem três objetivos principais: "Para descobrir semelhanças e diferenças entre objetos, para analisar os componentes da figura, e reconhecer as figuras em diferentes representações" (p. 161). Ela sugere que o estudo das figuras deverá ser orientado, em todos os anos de escolaridade, por três instrumentos principais: identificação e classificação de figuras, a análise de figuras e representações e visualização de figuras.

Desde 1950, foram feitas pesquisas por psicólogos para observar o desenvolvimento de níveis na compreensão geométrica (Piaget e Inhelder, 1967). Estes autores teorizaram que inicialmente as crianças discriminam objetos com base em características "topológicas", tais como ser fechada ou de outra forma topologicamente equivalente e só as crianças mais velhas podem discriminar figuras retilíneas de curvilíneas e, finalmente, figuras retilíneas fechadas, tais como quadrados e losangos, através de explorações sistemáticas e coordenadas.

Várias investigações têm sido desenvolvidas, nomeadamente as de Clements e Battista (1992), com o intuito de conhecer o que as crianças sabem sobre as formas geométricas.

Segundo Clements e Sarama (2007) as crianças atribuem nomes de formas a alguns exemplos concretos, de seguida combinam essa habilidade para produzir nomes corretos de figuras para exemplos prototípicos de figuras comuns e somente após essas experiências constroem categorias de figuras.

Laborde (1993) enfatiza uma natureza dual das figuras (aqui principalmente figuras geométricas), como expressou: "As figuras podem ser vistas como desempenhando o papel da realidade no que diz respeito à teoria, bem como desempenhando o papel de modelo para uma teoria geométrica" (p. 49).

Também Fischbein (1993) propôs uma teoria em que o objeto geométrico é tratado como tendo duas componentes, uma conceptual e a outra figural. A componente conceptual, através da linguagem escrita ou falada, expressa propriedades que caracterizam uma certa classe de objetos. A componente figural corresponde à imagem mental que associamos ao conceito e, no caso da geometria, essa imagem pode ser manipulada por transformações geométricas mas mantendo invariantes certas relações. A harmonia entre estas duas componentes determina a noção correta sobre o objeto geométrico. Na formação da imagem mental, o desenho associado ao objeto geométrico desempenha um papel fundamental. Para o aluno nem sempre é claro que o desenho é apenas uma instância física da representação do objeto. Se por um lado o desenho é um suporte concreto de expressão e entendimento do objeto geométrico por outro lado, pode ser um obstáculo a este entendimento, isto porque guarda características particulares que não pertencem ao conjunto das condições geométricas que definem o objeto.

Duval (1994,1998) e Matos (1992) vão de encontro a esta teoria, pois mostraram que a apreensão perceptiva pode constituir-se como um obstáculo a uma interpretação geométrica, sobretudo desenhos protótipos e as interpretações a eles associados. O tratamento de objetos geométricos baseado em desenhos particulares, os ditos desenhos prototípicos faz com que os alunos não reconheçam desenhos desses mesmos objetos quando diferem desses modelos prototípicos. E mais, para os alunos, a posição relativa do desenho ou o seu traçado particular, passam a fazer parte das características do objeto, quer no aspeto conceptual ou quer no figural, estabelecendo desequilíbrios na formação do conceito.

Assim, no sentido de minorar esses desequilíbrios, vários autores, entre os quais Laborde (1992) defendem o recurso a AGD uma vez que têm a vantagem de permitir a manipulação do desenho no ecrã do computador, nomeadamente, medir, deslocar um elemento do desenho observando as modificações e verificar certas relações geométricas entre os objetos. Na descoberta das propriedades, as características dinâmicas das figuras (desenhos em movimento) implicam que as particularidades da representação física mudem fazendo emergir os invariantes, ou seja as reais propriedades da figura.

2.3.1. Representações

As representações matemáticas têm sido alvo de crescente atenção por parte da investigação em Educação Matemática (por exemplo, Bishop e Goffree, 1986;

Dufour-Janvier, B., Bednarz, N., Belanger, M., 1987; Janvier, 1987), ao mesmo tempo que têm vindo a ocupar um lugar de destaque na aprendizagem da matemática, em especial na resolução de problemas. Esta relevância traduz-se, por exemplo, na integração da norma *Representação* no grupo dos processos transversais estipulados nos *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2008).

Também a investigação sobre a importância da visualização e do papel das imagens mentais na atividade matemática tem contribuído para o reconhecimento da utilidade das representações na formação dos conceitos matemáticos. Porém, a definição de representação não é consensual entre pesquisadores em educação matemática embora, no sentido de clarificar o sentido de representação matemática, encontremos algumas propostas de definição. Uma definição amplamente utilizada é a de que a representação é uma configuração que pode representar uma outra coisa, como referiu Gerald Goldin (2008), um dos autores que mais tem escrito sobre representações matemáticas. Por exemplo, “uma palavra pode representar um objeto real, um numeral pode representar o número de elementos num conjunto, ou a posição de um número numa reta numérica” (Goldin, 2008, p. 178).

Duval (2002 citado em Dindyal, 2003) afirmou que não há acesso direto a objetos matemáticos se não através das suas representações e, portanto, só podemos trabalhar em e a partir das representações semióticas, porque fornecem um meio de processamento. Na geometria, isto implica trabalhar em registos diferentes (linguagem natural, simbólico e figurativo) e mover-se entre os registos. Um símbolo é um som ou algo visível, mentalmente ligado a uma ideia (Skemp, 1987 citado em Dindyal, 2003). A ideia a que o símbolo está ligado é chamada referente. O símbolo é chamado *significante* e aquilo que simboliza chamado *significado*. A tradição de Piaget refere-se ao "significado" como o mental (interno) e construir o "significante", como o físico (externo). Segundo Goldin e Kaput (2006), esta relação pode ser invertida, sempre que uma representação externa é interpretada por um indivíduo, especialmente se a representação externa não foi produzida pelo intérprete, a construção interna está a atuar para representar a configuração externa, física.

Skemp (1987) acrescentou que é, em grande parte, através do uso de símbolos que alcançamos o controle voluntário sobre os nossos pensamentos. Simbolizamos quando queremos algo que está ausente ou em falta, de alguma maneira, e então trabalhamos com o símbolo como um substituto (Pimm, 1995). Em

álgebra símbolos literais são usados como variáveis, incógnitas, constantes, etc., enquanto que em geometria são utilizados símbolos visuais como diagramas.

Janvier (1987) acrescenta que uma representação poderia ser considerada como uma combinação de três componentes: símbolos escritos, objetos reais e imagens mentais. Van de Walle (2004) vai mais além e refere que as representações podem assumir uma variedade de formas, incluindo imagens (por exemplo, desenho, tabelas, gráficos), símbolos escritos (por exemplo, números, equações, palavras), modelos de manipulação, linguagem oral (por exemplo, falar entre pares de alunos e situações de discussão na turma), e do mundo real (Van de Walle, 2004).

Em geral, pode considerar-se que o termo representação se refere simultaneamente ao processo e ao produto (NCTM, 2008), já que, se for entendida como um processo, corresponde ao ato de captar um conceito matemático numa determinada forma, por outro lado, sendo vista como um produto trata-se da forma propriamente dita.

Assim, a representação é uma parte essencial da atividade matemática e um veículo para a apreensão de conceitos matemáticos (Cobb, 2003; Cobb et al., 2002 citados em Stylianou, 2010; Dufour-Janvier et al., 1987.; Gravemeijer et al., 2003; Kaput et al., 2008; Meira, 2003; Stylianou, 2010). A compreensão das relações existentes entre as várias representações de um mesmo conceito e a identificação das suas semelhanças e diferenças contribui para uma melhor compreensão do conceito por parte dos alunos (Goldin e Shteingold, 2001).

Da análise da literatura existente constata-se que as representações são consideradas de duas formas. Uma delas refere-se à construção de representações pelo aluno: “O estudo das representações construídas pelos alunos deve dar-nos sugestões para formular representações alternativas para a aprendizagem de conceitos matemáticos” (Dufour-Janvier et al., p. 119). Outra forma refere-se à apresentação de representações para serem usadas pelo professor e pelo aluno com o objetivo de construir conceitos: “Diagramas, gráficos e expressões simbólicas fazem parte do ensino da matemática, mas infelizmente essas representações, assim como outras, têm sido aprendidas e ensinadas como um fim” (NCTM, 2008, p. 75).

Além disso, representações podem ser externas, como entidades observáveis que são utilizadas para ilustrar ideias ou conceitos ou internas que ocorrem na mente dos estudantes e que simbolizam ideias matemáticas (Dufour-Janvier, Bednarz, Belanger, 1987; Goldin e Kaput, 2006; Goldin, 2008) e “só podemos fazer

inferências sobre as representações internas dos alunos através da produção de representações externas” (Goldin e Shteingold, 2001, p. 6). É através das conexões entre representações internas e externas que a sua utilização em matemática assume um contributo significativo no processo de ensino e aprendizagem. Goldin e Shteingold (2001) focam esta ideia referindo que a interação entre as representações externas e internas é fundamental para um ensino e uma aprendizagem significativos.

Um outro autor com uma influência marcante no tema das representações é Jerome Bruner (1966), que fala em representações ativas, icónicas e simbólicas. Considera que estes sistemas de representação são sequenciais, começando no *ativo*, passando pelo *icónico* e culminando no *simbólico*. Segundo o autor, numa fase inicial, as experiências concretas contribuem para a formação de uma noção intuitiva do conceito (modo *ativo*), seguindo-se a utilização de imagens para interiorizar o significado desse conceito, sejam imagens mentais ou imagens externas, como figuras e diagramas que descrevam ou representem esses conceitos (modo *icónico*). Finalmente as imagens são substituídas por símbolos que representam os objetos (modo *simbólico*). Estes três sistemas de representação não só constituem diferentes contextos de trabalho ou diferentes formas de raciocinar, mas salientam a importância de encorajar os alunos a interrelacionar a componente física com a formação de imagens, bem como esta fase com a simbólica.

Existe ainda uma vasta teoria acerca da representação em geometria, em especial no que se refere às figuras geométricas. Estas, por um lado, são usadas para retirar ideias que conduzem ao conceito geométrico, por outro lado, são entendidas como meios para representar um conceito geométrico formal. Uma das dificuldades que esta teoria reconhece é a de que os alunos se fixam, por vezes, em aspetos concretos de uma figura particular, esquecendo que esta pretende representar uma situação mais geral, uma classe. “Os alunos costumam atribuir características de um desenho ao objeto geométrico que representa” (Clements e Battista, 1992, p. 448) ou frequentemente conferem atributos e características irrelevantes dos diagramas aos conceitos geométricos (Clements e Battista, 1992; Yerushalmy e Chazan, 1993 citados em Battista, 2007). Na mesma linha, Fishbein (1994) defende que certos assuntos podem ligar uma representação particular a um dado conceito o que provoca um forte impacto nas decisões cognitivas dos alunos.

Duval (1998) refere que a aprendizagem da geometria envolve três tipos de processos cognitivos: visualização, construção e raciocínio. Embora o processo de visualização seja, geralmente, considerado útil, para apoiar a intuição e a formação

de conceitos na aprendizagem da matemática, Dreyfus (1991), refere que uma figura pode ser, às vezes, enganosa pois os alunos são muitas vezes influenciados por figuras paradigmáticas (modelos) podendo a simples visualização interferir com o processo de dedução. Duval argumentou, no entanto, que “esses três tipos de processo cognitivo estão intimamente ligados e a sua sinergia é cognitivamente necessária para a proficiência em geometria” (p. 38). Por outras palavras, raciocínio e visualização completam-se mutuamente. Mas, a fim de evitar a influência das imagens paradigmáticas, podemos utilizar uma figura de geometria dinâmica. Duval (2000) sugeriu, ainda, que somente através da coordenação de diferentes representações os alunos podem desenvolver capacidades para resolver problemas de geometria.

Nesta perspetiva, as novas tecnologias proporcionam novas formas de representação matemática pois mudam o modo como os alunos usam as formas convencionais de representação em matemática e alargam o conjunto de representações com que eles podem trabalhar (Ponte e Serrazina 2000). Desta forma os alunos desenvolvem as suas imagens mentais das ideias matemáticas.

Uma figura em geometria dinâmica é também uma representação visual. Num AGD, o aluno pode arrastar um objeto geométrico como um vértice dum quadrado e alterar a figura dinamicamente, preservando as condições dadas da figura e os invariantes geométricos, que são consequência das condições dadas. Um aluno pode interagir com uma figura dinâmica, que fornece uma imagem clara das ideias matemáticas abstratas por meio do arrastamento do objeto concreto. Assim, e de acordo com Wong (2011), o aluno pode comparar múltiplas perspetivas fornecidas por diferentes representações e alterar conjeturas e conceitos incorretos. Ao manipular uma figura dinâmica e observar como ela muda, os alunos podem ser capazes de evitar a sobregeneralização de teoremas a partir de imagens paradigmáticas.

No entanto, alguns pesquisadores descobriram que, apesar de professores e alunos estarem despertos para a importância da compreensão de cada tipo de representação, os alunos podem deixar de notar regularidades e discrepâncias entre as representações (Kaput, 1987; de Jong et al., 1998; Kozma, 2003 citados em Wong et al., 2011). Sweller (1988 citado em Wong, 2011) apontou que quando aprendem com várias representações, os alunos são obrigados a relacionar diferentes fontes de informação, o que pode causar uma carga cognitiva pesada que deixa poucos recursos para a aprendizagem real.

2.3.2. Visualização espacial e imagens

“A visualização engloba capacidades relacionadas com a forma como os alunos percebem o mundo que os rodeia. Envolve observação, manipulação e transformação de objetos e as suas representações, a interpretação de relações entre os objetos e entre estes e as suas representações” (ME, 2007, p. 20).

Muitos conceitos em geometria não podem ser reconhecidos ou compreendidos a menos que, visualmente, o aluno possa perceber exemplos e identificar figuras e propriedades associando-os a experiências anteriores (Ponte e Serrazina, 2000).

Van Hiele (1986) considera que a visualização tem uma importância vital no processo de construção do conhecimento. Segundo este autor, a representação mental dos objetos geométricos, a análise e a organização formal (síntese) das propriedades geométricas relativas a um conceito geométrico são passos preparatórios para o entendimento da formalização de um conceito.

Embora haja um elevado número de pesquisas na área da visualização e pensamento visual, não há consenso para a terminologia utilizada neste campo.

Presmeg (1986) pensa que a imagem visual está na mente: “A imagem visual é um esquema mental que descreve a informação visual ou espacial” (p. 42), e ela afirma que este esquema mental pode existir com ou sem a presença do objeto externo.

Por outro lado, Zimmerman e Cunningham (1991) definem a visualização como “o processo de produção ou utilização de representações geométricas e gráficas de conceitos matemáticos, princípios, ou problemas, se desenhado à mão ou produzido por computador” (p. 1) ou, ainda, “... que é o processo de formação de imagens (mentalmente, ou com papel e lápis, ou com o auxílio de tecnologia)” (p. 3).

Para Dreyfus (1991) a visualização é um processo pelo qual as representações mentais ganham existência e Mariotti e Pesci (1994) chamam à visualização o pensar que é naturalmente acompanhado e apoiado por imagens.

A visualização em matemática é caracterizada por Gutiérrez (1996) como o tipo de atividade que tem por base o recurso a elementos visuais ou espaciais, sejam mentais ou físicos, utilizados na demonstração de propriedades ou na resolução de problemas. Sublinha que a visualização é composta por quatro elementos principais: imagens mentais, representações externas, processos de visualização e capacidades de visualização.

Arcavi (2003) apresenta uma definição de visualização que se enquadra nas ideias defendidas por Zimmermann e Cunningham (1991): “A visualização é a capacidade, o processo e o produto de criação, interpretação, utilização e análise de figuras, imagens e diagramas, na nossa mente, no papel ou por intermédio de ferramentas tecnológicas, com o propósito de descrever e comunicar informação, pensar sobre e desenvolver ideias previamente desconhecidas e progredir no conhecimento” (p. 217).

Pode, ainda, acontecer um autor utilizar, por exemplo, o termo "visualização" e outro usar "raciocínio espacial", com o mesmo significado. Por outro lado, um único termo, como "imagem visual", podem ter significados diferentes, de acordo com os autores e os contextos. “Essa confusão aparente é apenas um reflexo da diversidade de áreas em que a visualização é considerada relevante e à variedade de especialistas que estão interessados nela” (Gutierrez, 1996, p. 4), pois tal como referem Zimmermann e Cunningham (1991), a visualização está relacionada com diversos ramos e, tendo raízes na matemática, compreende aspetos históricos, psicológicos, pedagógicos e tecnológicos importantes.

A visualização é, hoje em dia, considerada uma ação matemática como o cálculo ou a simbolização, quando os estudantes procuram modelos matemáticos e relações (NCTM, 2008; Senechal, 1991). A condução e a apresentação da matemática estão cada vez mais a tornar-se visuais, diz Mason (1995), devido à presença de ecrãs inteligentes, conjuntamente com o reconhecimento da importância das imagens.

De acordo com o NCTM (2008), a visualização espacial constitui um aspeto essencial do raciocínio geométrico:

Desde o início dos primeiros anos de escolaridade, os alunos deverão desenvolver capacidades de visualização através de experiências concretas com uma diversidade de objectos geométricos e através da utilização das tecnologias, que permitem rodar, encolher e deformar uma série de objectos bi e tridimensionais. Mais tarde, os alunos deverão sentir-se à vontade na análise e no desenho das vistas, na contagem das partes componentes das figuras e na descrição das propriedades que não podem ser vistas, mas apenas inferidas. Os alunos necessitam de aprender a alterar quer física quer mentalmente, a posição, a orientação e a dimensão dos objectos de forma sistematizada, à medida que vão desenvolvendo os seus conhecimentos sobre congruência, semelhança e transformações. (p.47)

No entanto, há autores que consideram que nem sempre a visualização ajuda o raciocínio. Rieber (1994) aconselha a que sejamos cautelosos, não só porque a visualização é um processo cognitivo fortemente influenciado pelo conhecimento

anterior, podendo levar a conclusões falsas, mas também devido à forma como as pessoas desenvolvem cognitivamente a sua realidade, podendo esta tornar-se confusa quando submersa em ambientes dominados completamente pelo visual.

Na mesma linha de pensamento, Mariotti (1995) aponta o papel complexo que as imagens têm num contexto geométrico, sendo essa complexidade expressa por um lado, na impossibilidade de introduzir um conceito geométrico sem dar exemplos, isto é desenhar figuras ou construir modelos e, por outro, estes exemplos particulares do conceito, podem não ser suficientes para determinar o conceito corretamente.

No dizer de Dreyfus (1991), a visualização é geralmente considerada útil para apoiar a intuição e a formação de conceitos na aprendizagem da matemática, no entanto resume as muitas dificuldades sentidas, pelos estudantes, com a visualização:

- incapacidade de ver um diagrama de diferentes maneiras;
- dificuldades em reconhecer as transformações implicadas nos diagramas;
- interpretações incorretas ou não convencionais de variação e covariação em gráficos;
- falha na distinção entre uma figura geométrica e o desenho que representa essa figura;
- falha em unir as suas visualizações com o pensamento analítico.

No sentido de colmatar estas e outras dificuldades, vários autores defendem o recurso a ferramentas computacionais, (por exemplo, Clements et al., 1997), para quem a visualização e o raciocínio espacial são melhorados pela interação com animações computadorizadas e com outros tipos de meios tecnológicos, já que a manipulação das ferramentas computacionais favorece a formação de imagens mentais, contribuindo para o desenvolvimento da capacidade de visualização e raciocínio espacial (Abrantes et al., 1999).

Também Gravina (1996) argumenta que os AGD com recurso a “desenhos em movimento” podem ser ferramentas ideais na superação de dificuldades. A partir de exploração experimental em ambientes informatizados, os alunos conjeturam e, com o *feedback* constante oferecido pela máquina, refinam ou corrigem as suas conjeturas, chegando a resultados que resistem ao “desenho em movimento”, passando então para a fase abstrata de argumentação e demonstração matemática.

Yerushalmy e Chazan (1990) referem que ambientes de *software* podem ajudar a atenuar algumas das desvantagens de imagens visuais, em particular a dependência de um único diagrama, pois que uma das potencialidades destas

ferramentas é a repetibilidade que possibilita um elevado número de representações para o mesmo objeto, ao mesmo tempo que permitem a visualização quase imediata das imagens geradas quando os alunos fazem conjecturas sobre propriedades e relações e procuram testá-las e justificá-las (Bishop et al., 2000). Também o movimento e a modificação dos desenhos, permitidas por estes ambientes, possibilitam uma mais fácil visualização das propriedades e das relações geométricas, uma vez que é possível fazer construções e manipulá-las, conservando invariantes as propriedades e relações estabelecidas (Laborde, 1993).

Apesar da controvérsia relacionada com a visualização, muitos investigadores realçam a sua importância para o desenvolvimento de competências ao nível da geometria, assim como o contributo das ferramentas computacionais para o desenvolvimento dessa capacidade (visualização).

Dado que, na literatura, como já referido, são identificadas múltiplas interpretações do significado de visualização, nesta investigação, e com base nos objetivos delineados, adota-se uma perspetiva de visualização baseada na definição de Arcavi (2003): “A visualização é a capacidade, o processo e o produto de criação, interpretação, utilização e análise de figuras, imagens e diagramas, na nossa mente, no papel ou por intermédio de ferramentas tecnológicas, com o propósito de descrever e comunicar informação, pensar sobre e desenvolver ideias previamente desconhecidas e progredir no conhecimento” (p. 217).

2.3.3. Propriedades dos quadriláteros

É comum as crianças identificarem as figuras pela sua aparência física, porém também podem atender conscientemente a características visuais da forma e usá-las para identificar formas geométricas. De acordo com o NCTM (2008), a identificação de formas é importante, mas as suas propriedades e relações deverão ser fortemente privilegiadas devendo os alunos mais novos aprender sobre formas geométricas utilizando objetos concretos, observáveis, palpáveis e manipuláveis. Recomenda, ainda, que os estudantes estudem exemplos e não-exemplos de objetos bidimensionais para começar a classificar formas.

Pesquisas indicam que mesmo crianças mais novas referem componentes e atributos das formas quando as descrevem (Clements, Battista, e Sarama, 2001 citados em Battista, 2007; Lehrer, Jenkins, Osana, 1998), no entanto, segundo Clements e Sarama (2007), muitas vezes, elas apenas atendem a um subconjunto próprio de características visuais de uma forma e são incapazes de identificar muitas formas comuns. As crianças mais velhas podem atender a propriedades (igualdade

dos lados, ângulos retos e paralelismo dos lados) separadamente, enquanto as crianças mais novas não são capazes ou não estão predispostas a concentrar-se nas características individuais (Smith, 1989 citado em Clements, Sarama et al., 1999) ao mesmo tempo que podem produzir protótipos na classificação de figuras sem atender, necessariamente, às propriedades e componentes específicos dessas figuras (Clements e Sarama, 2007). Estes autores referem, também, que o pensamento matemático baseado em imagens limitadas pode causar dificuldades, pois uma ideia pode estar muito ligada a uma imagem. Deste modo, o ensino baseado em protótipos deve ser questionado, pois de acordo com Clements e Battista (1992) pode estabelecer bases que podem comprometer o desenvolvimento do pensamento hierárquico (nível abstrato e relacional de van Hiele).

Segundo Markopoulos e Potari (1996) os alunos, partindo de considerações visuais das formas geométricas, desenvolvem relações entre as figuras e as suas propriedades, e constroem relações hierárquicas entre diferentes classes de figuras. Também Casa e Gavin (2009) argumentam que com um currículo de qualidade, materiais e ensino, que suportem os conceitos e o desenvolvimento da linguagem, podem ajudar a mover os estudantes do nível visual, identificando as formas isoladamente para a definição dos seus atributos classificando-as e reconhecendo relações entre elas.

No entanto, estudos dão conta que, relativamente às propriedades de figuras geométricas, os estudantes possuem diferentes concepções acerca do mesmo conceito. Por exemplo, é comum os estudantes não considerarem os ângulos como uma propriedade saliente das figuras geométricas (Clements et al., 1996). Outro estudo nesta área (Matos, 1999) revela que a imagem mental de ângulo dos alunos é o agudo e o reto, constituindo-se estes como o protótipo de ângulo. Além disso, a posição prototípica de um ângulo é aquela em que um dos lados está na posição horizontal ou vertical. Também, a propósito do conceito de ângulo, Mitchelmore (1992) considera que o mesmo tem uma natureza complexa, pelo que se torna essencial relacionar as representações estáticas com modelos dinâmicos. E a noção de perpendicularidade não é “perceptualmente primitiva” como a noção de paralelismo, pois a relação entre retas paralelas é visualmente óbvia o que não acontece com retas perpendiculares.

Vinner (1991) refere que a imagem do paralelogramo no conceito dos alunos é um em que nem todos os ângulos ou lados podem ser iguais. Daí que os estudantes não possam considerar retângulos, quadrados e losangos como paralelogramos.

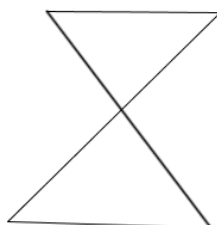
Outros, como Abrantes et al. (1999) sustentam que os programas informáticos, por exemplo o Logo, ou de geometria dinâmica, podem auxiliar na descoberta de propriedades na medida em que, por exemplo, desenhando uma figura geométrica, os alunos podem deslocá-la, ampliá-la, reduzi-la e observar que certas características se mantêm inalteradas (regularidades fundamentais no processo de compreensão do conceito de propriedade).

Nesta perspetiva não será de mais realçar que, logo no início da escolaridade, os alunos devem trabalhar os conceitos de paralelismo, perpendicularidade, congruência, semelhança e simetria, bem como conhecer as propriedades das figuras planas e dos sólidos geométricos. Sheffielf e Cruikshank (2000) referem que as crianças organizam os conceitos, as propriedades e as características das formas com que trabalham, durante o processo comunicativo, escrito ou oral, pois a escrita individual ou cooperativa de ideias geométricas é uma atividade essencial porque, enquanto se descrevem raciocínios, desenvolvem-se conceitos e competências geométricas que ficam registados, podendo ser partilhados a qualquer momento.

Assim, o professor deverá proporcionar materiais aos alunos e estruturar a sala de aula, de forma a encorajá-los a explorar as figuras geométricas e as suas propriedades.

2.3.4. Classificação

A classificação de quadriláteros, à semelhança da definição de quadrilátero, não é consensual entre a comunidade científica. Não existe uma definição “padrão” para quadrilátero. Alguns matemáticos incluem como exigência para ser um quadrilátero o facto de ser uma linha simples fechada, enquanto outros não (Matos, 1999). Também o desenho abaixo, onde a interseção de duas linhas não é um vértice, é um quadrilátero para alguns (Vinner e Hershkowitz, 1983) e nem mesmo uma figura geométrica para outros.



Desacordo semelhante acontece em relação ao trapézio, pois para alguns um paralelogramo é um tipo especial de trapézio e para outros não.

Este “desacordo” relativamente às formas pode estar, segundo Edwards e Harper (2010) ligado à definição que se adota para determinada forma e que resulta

do facto de, erroneamente, a matemática ser entendida como um corpo estático de conhecimento descoberto há muito tempo. Segundo estes investigadores, os estudantes devem saber que a matemática é uma atividade humana negociada por meio da interação social e como tal pode mudar. Consideram que a definição é essencial para a matemática, asserção defendida por vários autores, nomeadamente, Veloso (2006), Marioti e Fischbein (1997, citados em Gomes A. E Ralha E., 2005) e os alunos devem reconhecer a necessidade de clareza da definição em todos os assuntos onde o pensamento preciso é essencial. “Para entender como a imprecisão e ambiguidade das palavras comuns leva a erros graves no pensamento reflexivo é valorizar a importância de definir claramente conceitos em qualquer vocabulário técnico” (Fawcett, 1938, p. 30 citado em Edwards e Harper, 2010).

Porém matemáticos e educadores de matemática criticam bastante o ensino direto de definições de geometria sem ênfase no processo subjacente da definição, pois o facto de saber a definição de um conceito não garante a compreensão do mesmo (Vinner, 1991). Os alunos devem, pois, estar envolvidos na ação de definir e terem a possibilidade de selecionar as suas próprias definições (Freudenthal, 1973; Villiers, 2010).

Vinner e Hershkowitz (1980 citado em Clements e Battista, 1992, p.447) referem que muitas vezes, na classificação de figuras, são utilizadas imagens conceptuais (modelos mentais) em vez de definições conceptuais (combinação dos modelos mentais com propriedades associadas ao conceito), é o “fenómeno protótipo” (Hershkowitz, 1990 citado em Fujita e Jones, 2007). Este autor argumenta que cada conceito tem um ou mais exemplos de protótipos que são obtidos em primeiro lugar, existindo na imagem conceito da maioria dos indivíduos. Na maior parte das vezes, essas imagens conceptuais são coerentes com o tipo de definições que utilizam: partitivas ou exclusivas, em vez de hierárquicas ou inclusivas (Heinze, 2002; Jones, 2000; Villiers, 1994)).

Embora as crianças mais novas sejam capazes de compreender inclusões de classes, estudos realizados dão conta das dificuldades que os estudantes apresentam nas definições hierárquicas de figuras geométricas, compreendendo-as mas com dificuldades na sua aceitação (Clements e Battista, 1992). A compreensão das definições inclusivas depende dos modelos visuais pessoais, pois é necessário que as imagens conceptuais sejam coerentes com as definições conceptuais. Por exemplo, a classificação do quadrado como um retângulo parece depender das propriedades em que os estudantes se focam (Matsuo, 1993).

Pesquisas relatadas por Villiers (1994) demonstram que os alunos preferem definir os quadriláteros de forma partitiva pois é uma estratégia espontânea e natural. Assim, defende o mesmo autor, que os alunos deveriam receber a oportunidade de formular as suas próprias definições independentemente delas serem partitivas ou hierárquicas. É, no entanto, importante que os alunos sejam confrontados com as vantagens e desvantagens relativas a esses dois diferentes modos de classificação e definição de quadrilátero. Refere, ainda, o mesmo autor que envolver os alunos na definição de conceitos geométricos como os quadriláteros também proporciona uma oportunidade valiosa para que os alunos aprendam a construir contraexemplos para definições incompletas ou erradas criadas por eles mesmos.

No entanto, defendem muitos autores (Craine e Rubenstein, 1993 citados em Villiers, 2010; Casa e Gavin, 2009) que os alunos deveriam desenvolver uma compreensão sólida de uma classificação hierárquica (inclusiva) de quadriláteros antes de se envolverem com a definição formal dos quadriláteros e que esse desenvolvimento pode ser alcançado pelo uso de *softwares* interativos de geometria, onde podem confirmar as propriedades que se mantêm durante a transformação dinâmica das figuras (Leung, 2008), podendo facilitar a aceitação de uma classificação hierárquica dos quadriláteros, mesmo nos níveis inferiores de van Hiele.

Considerando a classificação como a organização de um conjunto de objetos segundo um determinado critério (Loureiro, 2008), Smith (1995) descreve o ato de classificar como um processo individual de apelo às representações mentais das várias categorias para decidir em qual incluir determinado objeto. De facto o pensamento geométrico das crianças não é apenas visual (Clements et al., 1999) mas, na verdade, decidem se um objeto pertence a uma categoria se for suficientemente similar a outro objeto anteriormente observado (Smith, 1995). Inclusivamente, Clements e Battista (1992) sugerem que as crianças diferenciam as formas através da combinação de protótipos visuais (exemplares de figuras) e algum conhecimento das suas propriedades. Os protótipos são importantes na fase inicial da aprendizagem da geometria, pois proporcionam exemplos que permitem às crianças associar nomes a vários tipos de figuras (Edwards e Harper, 2010). Porém, as formas limitadas de protótipos dos estudantes conduzem à centralização da observação numa característica em especial, em detrimento de outros atributos. (Battista, 2007; Clements e Sarama, 2000).

Zaslavsky, Chapman e Roza (2003 citados em Loureiro, 2008) afirmam que a classificação de diferentes objetos matemáticos de acordo com vários critérios pode salienta a consciência que temos dos modos como eles se relacionam entre si. Embora não haja consenso relativamente à classificação, vários investigadores parecem estar de acordo quanto ao conceito de classificação como um dos conceitos essenciais no ensino da geometria para os primeiros anos (Albuquerque et al., 2008; Jones e Mooney, 2003; Loureiro, 2008).

Vários estudos têm sido realizados acerca da classificação de formas/quadriláteros, dando conta de algumas conceptualizações erradas das crianças capazes de influenciar as classificações. De acordo com Hannibal e Clements (2000) certas características matematicamente irrelevantes afetaram as categorizações das crianças: assimetria/obliquidade, relativamente ao aspeto, e, para determinadas situações, a orientação. Outro aspeto que leva a erros de classificação é o facto de basearem as suas análises na semelhança (quase perpendicular) em vez de identidade (perpendicularidade) (Smith, 1989 citado em Clements e Sarama, 2007). As crianças negligenciam atributos relevantes (identidade) e atributos ou dependência de atributos irrelevantes levam a erros de classificação (Clements e Sarama, 2007).

Também Fujita e Jones (2007) referem dificuldades dos alunos em classificar quadriláteros, indicando que tais dificuldades estão relacionadas com a complexidade em aprender a analisar as características de diferentes quadriláteros e distinguir entre os aspetos essenciais e não essenciais, aprendizagem que requer dedução lógica e interações adequadas entre conceitos e imagens.

2.4. Aprendizagem com recurso a meios computacionais

A propósito de computadores na escola, Borba e Penteadó (2003), escrevem que enquanto os computadores estão cada vez mais presentes em todos os domínios da atividade humana, é fundamental que eles também estejam presentes nas atividades escolares. Também o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM), se refere à tecnologia nos seus princípios, mais precisamente, no *Princípio para a Tecnologia* – (NCTM, 2008). Neste princípio pode ler-se: “A tecnologia é essencial no ensino e na aprendizagem da matemática; influencia a matemática que é ensinada e melhora a aprendizagem dos alunos” (p.26).

Mais adiante neste documento, sobre normas que dizem respeito à geometria, pode ainda ler-se: “A través da utilização de modelos concretos,

desenhos e programas de geometria dinâmica, os alunos poderão envolver-se ativamente com conceitos geométricos (...) formular e explorar conjecturas e poderão aprender a raciocinar cuidadosamente sobre as noções geométricas” (p.44).

Também Laborde (2008) apresenta duas principais hipóteses subjacentes à análise do papel da tecnologia nos processos de ensino e aprendizagem.

Primeira hipótese – assume-se que uma ferramenta não é transparente e que o uso dessa ferramenta para fazer matemática, não só muda a maneira de fazer matemática, mas também exige uma apropriação específica da ferramenta. Na última década, alguns psicólogos (Vérillon e Rabardel, 1995 citados em Laborde, 2004) têm mostrado através de pesquisa empírica, como a ferramenta dá origem a uma construção mental por parte do aluno usando a ferramenta para resolver problemas;

Segunda hipótese – as ferramentas oferecidas pela tecnologia da informação incorporam conhecimentos matemáticos (como por exemplo, já é visível no *Cabri* nas denominações dos itens do menu - mediatriz, linha paralela...) e o uso dessas ferramentas exige a integração de ambos os conhecimentos, matemáticos e sobre a ferramenta.

Resumidamente, a resolução de tarefas matemáticas num ambiente tecnológico exige dois tipos de conhecimento, matemático e instrumental. A maior parte das vezes, sobretudo porque as TIC utilizadas no ensino da matemática incorporam matemática, os dois tipos de conhecimento interagem na utilização da tecnologia.

O computador é referido sistematicamente como propiciador de ambientes de ensino/aprendizagem (Laborde, 1993; Laborde e Laborde, 1992; Healy, Hoelzl, Hoyles e Noss, 1994) e a geometria como a área particularmente adaptada a explorar as virtualidades dos micromundos computacionais. Os computadores vieram aumentar a importância de certas ideias, tornar alguns problemas e tópicos mais acessíveis, valorizar conteúdos e pedagogias e proporcionar novas formas de representação e domínio da informação matemática, que nunca antes tinha sido possível (Goldenberg, 2000).

Num grande estudo, Clements, Battista, e Sarama, (2001 citados em Clements e Sarama, 2007) constataram que ambientes de computador podem catalisar o pensamento das crianças sobre quadrados e retângulos pois que algumas crianças do jardim de infância formaram o seu próprio conceito (por exemplo, "é um quadrado retângulo ") em resposta ao seu trabalho com o Logo. Foi, ainda, evidente que os computadores são especialmente úteis pois as ferramentas

do ecrã possibilitam movimentos mais acessíveis à reflexão, e, assim, trazem-nos para um nível explícito de consciência para as crianças (Clements e Sarama, 2007; Sarama, Clements e Vukelic, 1996).

Já ao nível das representações, os computadores podem funcionar como manipuláveis físicos, pois eles podem fornecer representações que, para as crianças mais novas, são tão reais e úteis como os manipuláveis físicos. Mas o uso do computador tem outras vantagens: as crianças e os professores podem guardar e depois recuperar para qualquer arranjo posterior; permitem armazenar mais configurações estáticas; podem gravar e reproduzir sequências de ações em manipuláveis, ajudando as crianças a formar imagens dinâmicas e podem ajudar as crianças a tornar-se conscientes e a matematizar as suas ações (Clements e McMillen, 1996).

A manipulação das ferramentas computacionais favorece a formação de imagens mentais, contribuindo para o desenvolvimento da capacidade de visualização e raciocínio espacial (Abrantes et al., 1999).

Apesar da literatura de referência evidenciar a importância do uso da tecnologia no processo de ensino/aprendizagem, a verdade é que estudos recentes referem que passados mais de vinte anos, a integração da tecnologia é, ainda, uma questão muito debatida na investigação, bem como na realidade das salas de aula e que apesar de muitos países apoiarem esta integração a nível institucional, a prática quotidiana de grande parte dos professores, em geral, não segue essa demanda institucional (Laborde, 2008).

De facto os professores continuam muito hesitantes no uso da tecnologia. Se é importante conhecer as razões de tal atitude, não menos importante é ter consciência que apesar de todas as vantagens que podem advir da sua utilização, não significa, de maneira alguma, como salientam Méndez, Estévez e del Sol (2003), que estas venham substituir completamente os meios tradicionais, como o uso de modelos ou os instrumentos de desenho. Antes, trata-se de combinarmos os vários recursos para conseguir aumentar a qualidade do processo de ensino/aprendizagem sem esquecer o ambiente de sala de aula, o tipo de tarefas, o papel do professor, entre outros, pois o que funciona com uns alunos e um professor pode não funcionar com outros. Assim, e como é salientado por Goldenberg (2000) e King (1999), o que é realmente importante é como as tecnologias são usadas e como orientamos os alunos na forma como aprendem.

Parafraseando Ponte:

“É impossível falar de efeitos genéricos das novas tecnologias no processo de aprendizagem. A sua utilização na educação pode assumir formas radicalmente diferentes, com efeitos diametralmente opostos. Tudo depende das interações que se estabelecem entre alunos, o computador e o professor. (...) Mas, globalmente, a maioria das indicações aponta para a possibilidade de desenvolver novas estratégias cognitivas, para a criação de sentimentos e autoconfiança, maior responsabilização do aluno pelo seu próprio trabalho, novas relações professor-aluno e laços de cooperação e interajuda entre os alunos. Estas indicações são altamente encorajadoras, fazendo-nos crer que as novas tecnologias podem dar, de facto, um importante contributo para o desenvolvimento multifacetado dos alunos em harmonia com um mundo de alta tecnologia.” (Ponte, 1997, p. 121)

Assim, a tecnologia, nomeadamente o computador, deve fazer parte do ambiente de sala de aula pois, para além das vantagens acima referidas é preconizado no Programa de Matemática (ME, 2007) que o computador possibilita explorações que podem enriquecer as aprendizagens realizadas no âmbito deste tema, nomeadamente através de *applets* – pequenos programas ou aplicações disponíveis na Internet – e permite a realização de jogos e outras atividades de natureza interativa.

Os ambientes computacionais mais recentes para o ensino da geometria permitem realizar construções geométricas no ecrã do computador, utilizando explicitamente as propriedades das figuras, e possibilitam a manipulação direta dessas construções, conservando as propriedades utilizadas. A esses ambientes dá-se o nome de Ambientes de Geometria Dinâmica (AGD).

2.4.1. Os ambientes de geometria dinâmica

Como referido ao longo da investigação, o objeto geométrico é tratado como tendo duas componentes, uma conceptual e a outra figural. A componente conceptual expressa propriedades que caracterizam uma certa classe de objetos e a componente figural corresponde à imagem mental que associamos ao conceito. A harmonia entre as componentes determina a noção correta sobre o objeto geométrico. Fischbein (1993) refere que, a propósito da confusão entre o desenho e o conceito, um dos maiores obstáculos para a aprendizagem da geometria é a tendência para negligenciar o aspeto conceptual devido à pressão das restrições do desenho. Frequentemente, condições de desenho escapam, do controle conceptual, e determinam interpretações que do ponto de vista de desenho são consistentes, mas que não são condições conceptuais.

De acordo com Dreyfus e Schwarz (2000), a dualidade da construção de figuras é responsável por três obstáculos:

- A natureza particular de um diagrama conduz o aluno a ter em consideração as características desse diagrama; essas características não têm relação com as propriedades da figura e, por isso, provavelmente não estarão adaptadas ao problema;
- A natureza padrão de certos esquemas ou diagramas induz no aluno a aparência de estereótipos, o que mais tarde pode prejudicar o reconhecimento das propriedades em situações não padronizadas;
- A incapacidade para visualizar um diagrama de maneiras diferentes ou, em particular, para abarcar o todo e a parte em simultâneo.

Para minorar estas dificuldades, vários autores, defendem a utilização de programas de geometria dinâmica no ensino/aprendizagem da geometria.

De acordo com Jones (2001), o *software* de geometria dinâmica possui alguns atributos cruciais. Um atributo que distingue tais aplicações dos programas de desenho simples é a possibilidade de especificar as relações geométricas entre objetos criados no ecrã do computador, tais como pontos, linhas e círculos, ou seja, pode especificar que é um ponto sobre uma linha ou que uma linha é paralela a outra linha. O segundo atributo e, provavelmente, o que define tal *software* é a possibilidade para explorar, graficamente, as implicações das relações geométricas estabelecidas na construção da figura. Isto é conseguido através do arrastamento. Arrastando um elemento da figura, com o rato do computador, é possível observar como as várias partes da figura respondem, dinamicamente, ao arrastamento do elemento escolhido. Enquanto o arrastamento acontece, dá a impressão que a figura está a ser, continuamente, deformada mas, ao mesmo tempo, mantém as relações geométricas que foram especificadas na construção original. Isto significa que quando uma linha é arrastada, qualquer linha que tenha sido especificada para ser paralela a essa linha, mantém-se paralela à primeira, quando arrastada.

Estes programas podem ajudar o aluno a atingir níveis mais abstratos do conhecimento em geometria, já que ele pode modificar os objetos geométricos e generalizar os conceitos (Melo et al., 2000). Nesta abordagem é possível disponibilizar representações gráficas de objetos geométricos que aproximam o objeto representado no ecrã do computador (desenho) ao objeto teórico (figura/conceito), favorecendo o desenvolvimento de uma leitura geométrica dos desenhos e contornando, assim, uma das grandes dificuldades no ensino da geometria (Bellemain, 2001).

De acordo com Battista (2007) são dois os principais aspectos didáticos de utilização dos programas de geometria dinâmica: a) os alunos constroem os desenhos de objetos ou configurações, quando o objetivo é o domínio de determinados conceitos através da construção; b) recebem desenhos prontos, projetados pelo professor, sendo o objetivo a descoberta de invariantes através da experimentação e, dependendo do nível de escolaridade dos alunos, num segundo momento, trabalham as demonstrações dos resultados obtidos experimentalmente.

Assim, “estas ferramentas computacionais (*Cabri-Geomètre*, *Geometer’s Sketchpad*, *GeoGebra*, etc.) são geradoras de uma nova abordagem no ensino e aprendizagem da geometria, pois permitem a construção e manipulação de objetos geométricos e a descoberta de novas propriedades desses objetos, através da investigação das relações ou medidas que se mantêm invariantes” (Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999, p. 68).

Tal como refere Laborde (1993), aprender geometria com papel, lápis, régua e compasso é diferente de aprender recorrendo a materiais manipuláveis, que por sua vez é diferente de aprender geometria recorrendo a ambientes computacionais dinâmicos, como o *Cabri-Géomètre* ou o *Geometer’s Sketchpad*. Estes libertam os alunos de tarefas mecânicas e rotineiras, de construção, de medição e de cálculos, deixando tempo para um trabalho mais dinâmico e ativo em geometria. Destaca, ainda, que o movimento e a modificação dos desenhos possibilitam uma mais fácil visualização das propriedades e das relações geométricas, uma vez que é possível fazer construções e manipulá-las, conservando invariantes as propriedades e relações estabelecidas.

Ainda de acordo com Gravina (1996), nestes ambientes, os conceitos geométricos são construídos com equilíbrio conceptual e figural; a habilidade em perceber representações diferentes de uma mesma configuração desenvolve-se; o controlo sobre configurações geométricas leva à descoberta de propriedades novas e interessantes. Quanto às atitudes dos alunos frente ao processo de aprender: experimentam; criam estratégias; fazem conjecturas; argumentam e deduzem propriedades matemáticas. A partir da manipulação concreta, “o desenho em movimento”, passam para manipulação abstrata atingindo níveis mentais superiores da dedução e rigor e, desta forma, entendem a natureza do raciocínio matemático.

Os AGD vieram, então, dar um novo contributo ao processo de ensino/aprendizagem da geometria, uma vez que estes permitem, de uma maneira muito mais viva e eficaz (Villiers, 1996), explorar, descobrir e desenvolver conceitos matemáticos e não somente verificar resultados ou realizar experiências.

As experiências num AGD, de acordo com Laborde (1992), não são apenas mais numerosas mas de natureza diferente, pois que o comportamento do desenho é controlado por uma teoria geométrica. Esta característica é, na perspetiva desta investigadora, fundamental para a aprendizagem, já que permite o confronto das tentativas do aluno com o observado no ecrã do computador, que acontece independentemente da sua vontade. Assim, o computador torna-se suscetível de desmentir aquilo que o aluno supunha, nascendo desta contradição um desequilíbrio cognitivo que pode ser o motor para a evolução dos conhecimentos.

No *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2008), sobre normas que dizem respeito à geometria pode ler-se:

Através da utilização de modelos concretos, desenhos e programas de geometria dinâmica, os alunos poderão envolver-se ativamente com conceitos geométricos (...) formular e explorar conjeturas e poderão aprender a raciocinar cuidadosamente sobre as noções geométricas. (p. 44)

O aumento do uso de AGD levou à realização de vários estudos com o objetivo de observar as suas potencialidades no ensino e na aprendizagem da matemática, e em especial, da geometria. Destaco alguns que vão de encontro às questões deste estudo, especificamente, os que abordam os contributos do AGD na identificação das propriedades dos quadriláteros.

Hazzan e Goldenberg (1997) estudaram de que forma alunos do 9.º e 10.º anos utilizam processos de refinamento sucessivo para resolver duas tarefas. A primeira envolvia a construção de um quadrado onde um aluno foi refinando a sua construção até o obter. Desta experiência sobressaem três aspetos: (i) matemático, pois existe a possibilidade de entender experimentalmente as formas das figuras como invariantes, o que seria muito mais difícil de conseguir num ambiente estático; (ii) epistemológico, a hierarquia que existe entre as relações de objetos geométricos, evidenciando que forma é mais geral ou mais específica (neste caso o paralelogramo requer menos condições do que o retângulo, que requer menos condições do que o quadrado); (iii) educacional, os erros que os alunos vão fazendo nas construções permitem que foquem a sua atenção no que falta fazer para refinar a sua solução e a respetiva construção mental. Na outra tarefa, em que se pretendia verificar que figura se obtinha pela união dos pontos médios dos lados de um quadrilátero, os autores constataram que a definição que os alunos têm de quadrilátero vai mudando quando arrastam os vértices do quadrilátero original obtendo figuras que pensam já não ser um quadrilátero (caso do quadrilátero em

que dois lados se cruzam). Este tipo de ambiente permitiu, segundo os autores, “reexaminar e reformular a definição de quadrilátero, levando a um refinamento da primeira definição ou à criação de um novo conceito que englobe todas as formas das figuras para as quais o teorema é verdadeiro (da união dos pontos médios de um quadrilátero qualquer resulta sempre um paralelogramo)”, (Hazzan e Goldenberg, 1997 citados em Candeias, 2005, p. 20).

Num estudo desenvolvido com seis alunos do 6.º ano, utilizando o *Cabri-Géomètre* como ferramenta de trabalho, Coelho (1995) procurou compreender os processos dos alunos na resolução de problemas que envolvem conceitos relacionados com quadriláteros e simetria, o efeito deste *software* na aprendizagem e os pontos de vista dos alunos sobre o seu uso. Concluiu que o *Cabri* e as suas funções desempenharam um papel importante na aprendizagem dos alunos que recorreram com alguma frequência à “ajuda disponibilizada pelo *software* e ao “histórico” das construções para relembrem uma ou outra construção”. Salienta, ainda, que “a eficácia mais evidente do *software* se relaciona com a possibilidade de utilização de estratégias de tentativa e erro e com o movimento, com a manipulação direta, caso em que a geometria assume a sua natureza dinâmica” (p. 239).

Jones (1997, 1998, 1999, 2000) tem apresentado em vários artigos, as conclusões do seu trabalho de investigação com alunos de doze anos e que trabalharam durante algum tempo, com o *Cabri*, nas aulas de matemática. Num artigo, Jones (1998 citado por Candeias, 2005) indica que os alunos: (i) centram a sua atenção no que está no monitor para poderem refletir sobre as suas construções; (ii) têm algumas dificuldades em utilizar conhecimentos matemáticos anteriores; (iii) tendem a modificar a figura até ficar com a forma pretendida, em vez de fazerem a respetiva construção; (iv) fazem generalizações indutivas, mas têm dificuldades em aplicá-las a uma situação nova; (v) têm dificuldade em distinguir entre problemas conceptuais e os que surgem da utilização do *software*; (vi) manipulam as figuras no ecrã, o que não significa que apreciem as respetivas propriedades conceptuais.

Um outro estudo, realizado por Hoyles e Jones (1998), com alunos de doze anos de uma escola inglesa, onde foi pedido aos alunos que construíssem um losango, as respetivas diagonais e as explicações sobre os passos dados na respetiva construção, ilustra as potencialidades que o *software* de GD tem no desenvolvimento das capacidades de explicação e, como tal, de demonstração, desde que esteja inserido num currículo que encoraje atividades de exploração e de investigação. Segundo os autores, o sucesso da experiência deveu-se ao ambiente

da sala de aula, na qual foi valorizado o pensamento matemático, à sequência bem definida e estruturada das atividades e à ajuda do professor e colegas para superar dificuldades momentâneas relacionadas com algum aspeto matemático ou do próprio *Cabri*.

Jones (2000) continuou a apresentar os resultados da sua investigação baseando-os nos níveis de van Hiele. O autor seguiu três etapas. Na primeira, os alunos desenvolveram várias tarefas com o objetivo de se familiarizarem com o *software* e compreenderem a diferença entre desenhar figuras e construí-las neste tipo de ambientes. Na segunda, os alunos tinham que construir um losango, um quadrado e um papagaio de modo a que as suas formas se mantivessem quando arrastadas. A terceira consistiu num conjunto de seis tarefas que envolviam as relações existentes entre os vários quadriláteros. Na última atividade pretendia que os alunos completassem uma classificação hierárquica dos quadriláteros e explicassem as relações entre eles. Dos dados recolhidos, o autor constatou que, na fase inicial do estudo, os alunos descreviam o que viam e não o que tinham feito. Na segunda etapa, as explicações já eram matematicamente precisas, mas estavam influenciadas pelos termos do próprio *software*. No final do trabalho, as explicações dos alunos estavam inteiramente relacionadas com o contexto matemático das tarefas. O investigador concluiu que: quando os alunos começam a utilizar o *software*, desenham as figuras em vez de as construir; os AGD dão aos utilizadores a possibilidade de arrastar elementos das construções permitindo-lhes focar a sua atenção na procura de invariantes; a utilização de termos matematicamente corretos em conjunto com a utilização deste tipo de programas leva os alunos a desenvolverem a compreensão do significado desses termos.

Furinghetti e Paola (2002) fizeram um estudo (sobre a classificação de quadriláteros), com o objetivo de demonstrar que os AGD também podem desempenhar um papel importante quando se pretende que os alunos construam definições, pois podem ajudá-los a definir e redefinir conceitos matemáticos. Da análise dos dados sobressai um caso particularmente interessante. Um dos alunos apresentou um esquema que as autoras chamaram de classificação “por defeito”, uma vez que apresentava uma hierarquia “inversa”, ou seja, o aluno começava do quadrilátero com mais propriedades, o quadrado, e retirava progressivamente propriedades até chegar aos outros quadriláteros. Dos dados as autoras afirmam que “O *Cabri* pode ser útil para alterar comportamentos, uma vez que enfatiza os aspetos de construção-orientada em detrimento da pura reprodução, o que permite atribuir significados às ações dos alunos” (Furinghetti e Paola, 2002,

p. 396 citados em Candeias, 2005, p. 32). Esses aspectos de construção-orientada levaram os alunos a construir definições.

Outros investigadores, (Assude e Gelis, 2002), defendem que a integração de um *software* de geometria dinâmica “faculta aos alunos uma prática experimental da geometria, através do construir, descrever, reproduzir, transformar, analisar, comunicar e resolver situações problemáticas, que pode possibilitar passar de uma geometria de observação, da constatação e do desenho, a uma geometria da figura e assim conjecturar certas propriedades da mesma” (p. 2).

Bravo (2005) investigou o contributo de um AGD no ensino-aprendizagem em alunos do 4.º ano do 1.º ciclo do ensino básico. O autor concluiu que “as competências decorrentes da utilização do AGD, manifestadas pelos alunos foram as seguintes: i) identificaram conceitos; ii) reconheceram formas geométricas simples; iii) descreveram e identificaram figuras geométricas e suas propriedades; iv) construíram figuras geométricas simples; v) formularam, pontualmente, argumentos válidos recorrendo à visualização e ao raciocínio espacial” (p. 141).

Os vários estudos apresentados sugerem que, quando os alunos contactam com estes ambientes computacionais, começam por explorar as suas potencialidades e só depois, utilizando diversos tipos de arrastamento, iniciam a investigação, pois este *software* respeita as propriedades das figuras geométricas construídas (ao construir-se, por exemplo, um retângulo, ele continuará a sê-lo quando arrastado, transformando-o noutra figura que continua a ter ângulos retos e lados paralelos iguais dois a dois). A esta fase sucede-se a formulação de conjecturas acompanhadas de descrições, dando-se a comunicação dos resultados ao professor e colegas. Uma característica deste tipo de *software* que surge dos estudos apresentados é a facilidade com que os alunos se adaptam e familiarizam com a sua utilização.

Na verdade, são muitas as potencialidades dos *softwares* de geometria dinâmica, no entanto, é necessário ter consciência, no dizer de Villiers (2007), das suas potenciais “armadilhas”. O autor refere as seguintes:

- **Não muda o estilo tradicional de ensino.** É usado, por alguns professores como um “glorificado quadro”. A este propósito, Sutherland, (2005, citado por Villiers, 2007, p. 47) escreveu: Muitos professores são propensos a usar *software* de geometria dinâmica como uma extensão de geometria do papel e lápis. Nesta perspectiva é provável que rejeitem a nova tecnologia digital... porque utilizado desta forma a nova tecnologia digital não é tão boa quanto a tecnologia antiga;
- **Dominar totalmente o *software* antes de o usar.** O autor defende que não é preciso dominar totalmente o *software* antes de o poder usar para explorar, aprender,

conceptualizar conjecturar, etc., os alunos podem recorrer a construções já prontas do próprio software. Outra possibilidade pode ser desenvolver ou expor os alunos a um tipo específico de ferramentas necessárias para um contexto particular de aprendizagem;

- **Construção de figuras de geometria dinâmica** antes de explorar as suas propriedades. Isto porque a atividade construir, além de exigir um bom nível de experiência e conhecimento do *software* exige, fundamentalmente, um nível cognitivo mais elevado do que explorar as suas propriedades ao mesmo tempo que requer uma sólida compreensão das condições necessárias e suficientes, que segundo a teoria Van Heile ocorre no Nível 3. O autor argumenta que a construção é uma estratégia de aprendizagem muito boa mas só pode ocorrer depois de os alunos explorarem e compreenderem todas as propriedades da respetiva figura;
- **Imaginar que usar a geometria dinâmica**, por si só, torna automaticamente a aprendizagem da geometria "mais fácil" e "sem dor". O aluno precisa envolver-se e ser orientado a observar e analisar o que vai acontecendo no ecrã do computador, caso contrário muita pouca aprendizagem ocorrerá. O colorido e o exibido pelo dinâmico pode apenas impressionar e até "confundir";
- **Visualização mais fácil, como distrator.** Os "dados e sobrecarga visual" fornecido pelo *software* pode tornar mais difícil os alunos identificar as variáveis cruciais necessárias à realização de problemas;
- **Avaliação insuficiente.** Para usar a geometria dinâmica é essencial repensar os conteúdos e abordagem de ensino que se usa, pois como uma das principais vantagens da geometria dinâmica é a sua precisão visual imediata e a capacidade de verificar muitos casos em um curto espaço de tempo, os alunos facilmente ficam convencidos, considerando como desnecessária a prova dedutiva;
- **Faz práticas obsoletas.** Pode seduzir, excluindo atividades com manipuláveis e experiências conceptuais muito importantes que nenhum *software* pode reproduzir. Os *softwares* nunca foram destinados a essas importantes atividades mas podem ser usados de diferentes maneiras para melhorar e ampliar as experiências de aprendizagem das crianças;
- **Prova de Verificação.** O grande problema pedagógico com a geometria dinâmica continua a ser, segundo o autor, convencer os alunos da necessidade de uma prova como forma de verificação. O facto de ver no ecrã parece tornar desnecessária a prova.

(adaptado de Villiers, M. 2007, p. 46-52)

Assim, e independentemente dos inconvenientes, é minha convicção que estes recursos computacionais devem, cada vez mais, estar integrados no processo de ensino/aprendizagem porque toda a sociedade está organizada em torno de processos informáticos de comunicação e informação. Além deste fator essencial, é de referir que os computadores são extremamente motivadores para os alunos.

Neste estudo, optou-se pelo AGD *GeoGebra* dado ser uma aplicação de manipulação relativamente fácil, mas sobretudo porque os alunos já o tinham utilizado anteriormente (3.º ano), quando trabalharam os conceitos de paralelismo e ângulo.

De acordo com o descrito no Instituto *GeoGebra*, é um *software* matemático que reúne geometria, álgebra e cálculo. Foi desenvolvido por Markus Hohenwarter da Universidade de Salzburg para educação matemática nas escolas. Por um lado, o *GeoGebra* é um sistema de geometria dinâmica, permite realizar construções tanto com pontos, vetores, segmentos, retas, seções cónicas, como com funções que se podem modificar, posteriormente, de forma dinâmica. Por outro lado, equações e coordenadas podem estar interligadas diretamente através do *GeoGebra*.

Assim, o *software* tem a capacidade de trabalhar com variáveis vinculadas a números, vetores e pontos; permite achar derivadas e integrais de funções e oferece comandos, como raízes e extremos. Essas duas visões são características do *GeoGebra*: uma expressão em álgebra corresponde a um objeto concreto na geometria e vice-versa.

A interface do *software* é constituída por uma janela gráfica que se divide numa área de trabalho, uma janela algébrica e um campo de entrada de texto. A área de trabalho possui um sistema de eixos cartesianos onde o usuário faz as construções geométricas com o rato.

Ao mesmo tempo as coordenadas e equações correspondentes são mostradas na janela de álgebra. O campo de entrada de texto é usado para escrever coordenadas, equações, comandos e funções diretamente e estes são mostrados na área de trabalho imediatamente após pressionar a tecla *Enter*.

O *GeoGebra* pode ser utilizado para qualquer propósito e é distribuído livremente de acordo com a GNU (General Public License). Poderá ainda efetuar-se o *download* a partir da Internet, de forma a obter as versões mais recentes da aplicação.

CAPÍTULO 3

METODOLOGIA

Neste capítulo dá-se a conhecer a metodologia seguida no estudo. É feita uma análise das opções metodológicas adotadas, a caracterização dos participantes envolvidos no estudo, respetivos critérios de seleção e descrevem-se os procedimentos relativos à recolha e análise dos dados.

3.1. Opções metodológicas

A investigação seguiu uma abordagem qualitativa possuindo as seguintes características, referidas por Bogdan e Biklen (1994): (i) a fonte direta de dados é o ambiente natural, onde o investigador será o principal instrumento da recolha de dados; (ii) é descritiva, já que os dados recolhidos serão em forma de imagens ou palavras e não quantitativos; (iii) será dada maior ênfase ao processo do que aos resultados ou produtos; (iv) a análise de dados será feita de forma indutiva, pois não se sabe o suficiente para reconhecer as questões importantes antes de efetuar a investigação; (v) o investigador qualitativo atribui importância vital à compreensão do significado que os participantes atribuem às suas experiências e ao modo como as interpretam.

O método qualitativo “implica uma ênfase nos processos e significados que não são examinados ou medidos em termos de quantidade, intensidade ou frequência” (Garcia; Quek, 1997 citado em Oliveira e al., 2009), onde “se procura fazer análises em profundidade, obtendo-se até as percepções dos elementos pesquisados sobre os eventos de interesse” (Campomar, 1991 citado em Oliveira e al., 2009).

Assim, a metodologia é de natureza interpretativa, dada a adequação às questões orientadoras do estudo: a) Qual o papel das representações na identificação das propriedades dos quadriláteros? b) Que influência tem a visualização na identificação das propriedades do quadriláteros? e c) Quais os contributos da utilização do AGD (*GeoGebra*) e do geoplano na compreensão das propriedades e relações entre os quadriláteros?

O formato de investigação a utilizar foi o *estudo de caso múltiplo* na medida em que se foca a atenção específica em três díades, no seu ambiente natural, de modo a estudar como viveram as aulas onde se implementou uma sequência de tarefas com recurso ao *GeoGebra* e ao material manipulativo, geoplano, no sentido

de perceber quais os contributos de um e de outro na identificação das propriedades dos quadriláteros e compreensão das relações entre eles.

De acordo com Merriam (1988 citada em Bogdan e Biklen, 1994), o *estudo de caso* consiste na observação detalhada de um contexto ou indivíduo, de uma única fonte de documentos ou de um acontecimento específico. Assume-se como uma investigação particularista, procurando descobrir o que nela há de mais essencial e característico, ou seja, pretende-se, prioritariamente, descrever e compreender o fenómeno em estudo, não havendo a preocupação de generalizar os resultados.

A opção pelo *estudo de caso* prendeu-se com o facto de ser uma abordagem indicada para o estudo de situações em que o investigador tem pouco controle sobre os acontecimentos intrínsecos ao fenómeno a estudar. O “estudo de caso é a estratégia escolhida para examinar acontecimentos contemporâneos, quando não se podem manipular comportamentos relevantes” (Yin, 1994, p. 27).

3.2. Participantes e critérios de seleção

Participaram neste estudo os alunos duma turma de 3.º/4.º anos, constituída por vinte e cinco alunos, (três de 3.º ano, um dos quais com NEE e vinte e dois de 4.º ano), duma escola do Concelho de Cascais. A seleção desta turma prende-se com o facto de tencionar fazer a pesquisa na turma onde leciono. Apesar de autores como Bodgan e Biklen (1994) considerarem a conveniência de o investigador não escolher um assunto em que esteja pessoalmente envolvido, referindo que “as pessoas intimamente envolvidas num ambiente têm dificuldade em distanciar-se, quer de preocupações pessoais, quer do conhecimento prévio que possuem das situações”, outros como Lessard-Hébert, Goyette e Boutin (1990), defendem que a investigação interpretativa se baseia numa aproximação do investigador aos participantes, centrada na construção de sentido. Ponte (2004) vai de encontro ao referido por estes últimos, afirmando que essa distância pode existir, tendo o investigador três recursos para a conseguir: (i) recorrendo à teoria, (ii) tirando partido da sua vivência num grupo, e (iii) tirando partido do debate no exterior do grupo.

Também Sierpinska e Kilpatrick (1998 citados em Candeias, 2005) argumentam que os professores que são simultaneamente investigadores das suas práticas estão numa posição privilegiada, pois para além de planificarem e ensinarem, também analisam e refletem sobre as suas aulas. Reflexão que tentam fazer à luz de teoria existente ou, por vezes, criando teoria a partir da sua prática.

Foram selecionados seis alunos com níveis de aproveitamento diferente, na área de matemática: dois com bom aproveitamento (Luísa e Maria), dois com aproveitamento médio (Miguel e Diogo) e dois com aproveitamento mais fraco (Isa e Mauro). Parece-me um número viável, atendendo às questões do estudo, não demasiado pequeno, nem muito grande para que possa permitir o estudo do fenómeno, em profundidade. A delimitação da matéria de estudo, escolhendo três díades em particular, relaciona-se com a necessidade de controlar a investigação. No entanto, tal como referido por Bogdan e Biklen (1994), “a escolha de um determinado foco é sempre um acto artificial, uma vez que implica fragmentação do todo onde ele está integrado” (p. 91), pelo que o investigador tenta ter em consideração a relação desta parte (grupo) com o todo (turma).

3.3. Procedimento de recolha de dados

Uma vez que a investigação seguiu uma abordagem qualitativa, os dados foram de natureza, essencialmente, descritiva. Manter as questões do estudo presentes e procurar reformulá-las e aperfeiçoá-las durante a recolha de dados foi uma preocupação presente.

A recolha de dados foi feita, diariamente, de 10 de janeiro a 13 de fevereiro de 2012, tendo as aulas duração variável de acordo com as exigências da tarefa. Em cada aula era realizada uma tarefa e apresentados/discutidos os resultados no grupo turma.

Foram utilizadas as seguintes técnicas de recolha de dados: observação participante, análise documental (produções dos alunos) e entrevistas a alguns alunos. Como complemento a estas técnicas recorreu-se, também, à gravação áudio e vídeo das discussões nos grupos e no coletivo da turma. Registaram-se, ainda, ideias, estratégias, reflexões e palpites, bem como os padrões que emergiram. São as notas de campo: “o relato escrito daquilo que o investigador ouve, vê, experiencia e pensa no decurso da recolha e reflectindo sobre os dados de um estudo qualitativo” (Bogdan e Biklen, 1994, p. 150).

Sendo, simultaneamente, professora da turma e investigadora, fui o instrumento principal da recolha de dados, o que permitiu que fossem recolhidos em situação e complementados com a informação obtida através do contacto direto. Assim, “as acções podem ser melhor compreendidas quando são observadas no seu ambiente habitual de ocorrência” (Bogdan e Biklen, 1994, p. 48). O recurso a diversas formas de recolha teve como objetivo a triangulação de dados de modo a dar maior fiabilidade ao estudo.

A opção pela observação participante baseou-se no facto de permitir compreender o fenómeno em estudo, ver factos que os participantes não veem, possibilitar a experiência com o fenómeno e favorecer uma abordagem indutiva, reduzindo as preconcepções. Consciente da impossibilidade de observar tudo, antes de iniciar a observação, houve todo um trabalho de planificação, no sentido de ter sempre presente os conceitos síntese do trabalho a fazer, nomeadamente a descrição do espaço físico e do ambiente, dos participantes em atividade incidindo no que fazem, o que dizem, como se envolvem, como interagem.

As notas de campo foram fundamentais para a observação participante. Foram um complemento à gravação áudio e vídeo, pois estes nem sempre captaram aspetos significativos como expressões dos participantes, comentários extra, impressões, reações e ideias do observador ... perante os quais o investigador, no decurso da recolha, registou ideias, estratégias e fez, até mesmo, alguma interpretação e reflexão sobre os dados. Atendendo a que as notas de campo devem ser detalhadas e descritivas, foi difícil, sendo investigadora e professora, tomá-las durante as aulas pelo que, as mesmas, foram registadas tão rápido quanto possível de modo a não esquecer aspetos importantes, fossem claras e o mais completas possível. Houve, também, a preocupação com a separação das notas descritivas das interpretativas, de modo a facilitar a sua análise.

Em conjunto com a observação participante e a análise documental foram utilizadas entrevistas “para recolher dados descritivos na linguagem do próprio sujeito” (Bogdan e Biklen, 1994, p. 134). Atendendo ao duplo papel na pesquisa, investigadora e professora, foi difícil separar a entrevista das outras atividades de investigação, dado que ocorreram no contexto da observação participante e em outros momentos considerados pertinentes, nomeadamente, no final das tarefas. Estas entrevistas ocorreram de modo informal, procurando-se esclarecer apenas situações decorrentes da realização das tarefas, quando foi impossível fazê-lo no momento da ocorrência. De acordo com Bogdan e Biklen (1994), procurou-se ouvir cuidadosamente, clarificar as questões reformulando-as; solicitar clarificações, quando necessário; evitar reações que deixassem o entrevistado desconfortável, relativamente aos seus pensamentos; encorajar os entrevistados a expressarem o que pensavam e sentiam; evitar perguntas que pudessem ser respondidas com “sim” e “não”; não induzir a resposta; traduzir em linguagem verbal, reações, gestos, sinais e outras manifestações do entrevistado.

No final de algumas tarefas e também do estudo, os alunos registaram as suas opiniões sobre aspetos inerentes à tarefa, nomeadamente, onde sentiram mais

facilidade ou mais dificuldade e fizeram, ainda, uma apreciação sobre os recursos usados.

As produções dos alunos, bem como a apresentação/discussão dos resultados no grupo turma, também foram usadas como dados tendo, a sua análise, contribuído para complementar e aumentar as evidências dos resultados.

Ainda, em relação à recolha de dados, várias questões éticas são colocadas ao investigador, as quais procurei respeitar. Foi solicitada, por escrito, ao Órgão de Gestão do Agrupamento, autorização para realização do estudo (Anexo 1) e aos Encarregados de Educação o consentimento para a participação dos seus educandos no estudo, nomeadamente, na recolha de registos áudio e vídeo e realização da entrevista, sendo garantido o direito à confidencialidade (Anexo 2). Para além do referido, a veracidade dos relatos foi outro aspeto considerado.

3.4. Procedimento de análise de dados

Parafraseando Bogdan e Biklen (1994), a análise de dados é o processo de busca e de organização sistemático de transcrições de entrevistas, de notas de campo e de outros materiais que foram sendo acumulados. Essa análise “envolve o trabalho com os dados, a sua organização, divisão em unidades manipuláveis, síntese, procura de padrões, descoberta dos aspectos importantes e do que deve ser aprendido e a decisão sobre o que vai ser transmitido aos outros” (Bogdan e Biklen, 1994, p. 205).

À semelhança do que acontece nos estudos qualitativos, a análise dos dados iniciou-se à medida que a recolha foi sendo feita, uma vez que o estudo não estava completamente definido. Esta análise incidiu sobre o que se foi descobrindo, nomeadamente aspetos inesperados, evidências e regularidades de modo a proceder a possíveis alterações e reformulações. No final da recolha procedeu-se à análise mais formal que começou pela organização de todo o material recolhido de modo a poder manipulá-lo facilmente. Procedeu-se a várias leituras para que os dados pudessem ser “arrumados” em *categorias de codificação* (Bogdan e Biklen, 1994), utilizando palavras e frases dos sujeitos sem, no entanto, perder de vista o todo recolhido.

A análise dos dados recolhidos não teve por base um modelo teórico específico, pois não consegui encontrar nenhum que se adaptasse à natureza do estudo e às características dos alunos. Assim, os dados foram “arrumados” em categorias emergentes, definidas de acordo com o objetivo do estudo, as questões de investigação e a fundamentação teórica. Inicialmente, fez-se uma breve análise

do desempenho dos pares em todas as tarefas e, posteriormente, agrupando situações semelhantes, encontraram-se regularidades que permitiram construir cadeias lógicas de evidência. Estas fizeram emergir as categorias: atitude perante as tarefas, representações e identificação de propriedades e visualização e identificação de propriedades que permitiram responder às questões do estudo. Fez-se uma análise, caso a caso, apreciando o seu desempenho e realçando as competências e dificuldades evidenciadas.

Neste estudo fez-se, também, uma análise indutiva, pois as sequências e padrões de análise não estavam, à partida, definidos emergindo dos dados recolhidos (Goetz e LeCompte, 1988), por outro lado, os dados não foram recolhidos com o objetivo de confirmar ou infirmar hipóteses previamente construídas mas construiu-se um quadro que foi ganhando forma à medida que se recolheram e examinaram as partes.

Por outro lado, não se pretendia saber se os alunos atingiam um ou outro nível de desenvolvimento mas sim compreender o modo como as aprendizagens ocorriam enquanto resolviam as tarefas, utilizando um ou outro recurso didático. Esta análise possibilitou aferir até que ponto a utilização do geoplano e/ou do AGD contribuiu ou não para a identificação das propriedades dos quadriláteros.

CAPÍTULO 4

A EXPERIÊNCIA DE ENSINO

Neste capítulo, descreve-se a implementação da experiência de ensino, dando a conhecer a dinâmica de sala de aula e o modo como foi vivida pelos intervenientes. Apresentam-se os objetivos, o contexto em que a mesma se desenvolveu, os participantes e as tarefas implementadas com referência aos objetivos e ao que era esperado dos alunos. Faz-se, ainda, uma descrição da concretização da experiência com referência ao desempenho dos alunos e a eventuais tarefas resultantes de questões emergentes. Por fim, apresentam-se as razões da seleção das tarefas que foram objeto de análise neste estudo.

4.1. Objetivos

De acordo com as questões de investigação, foram delineados os seguintes objetivos:

- Implementar uma sequência de tarefas promotoras da construção de quadriláteros e identificação das suas propriedades;
- Estabelecer relações entre os quadriláteros: trapézio, paralelogramo, retângulo, quadrado e losango;
- Compreender quais as vantagens e/ou limitações do AGD (*GeoGebra*) e do geoplano na compreensão das propriedades e relações entre os quadriláteros.

4.2. As tarefas

A teoria de van Hiele sobre a construção do pensamento geométrico serviu de referência à elaboração desta sequência de tarefas. Contudo, o objetivo não é avaliar os níveis de conhecimentos dos alunos, mas sim promover o desenvolvimento desses níveis e compreender quais os contributos e/ou limitações do software de Geometria Dinâmica, *GeoGebra*, e do geoplano, no estudo das propriedades dos quadriláteros.

As tarefas relacionam-se com os dois primeiros níveis da teoria de van Hiele. O nível 1, “visualização”, caracteriza-se pela capacidade de identificação, comparação e nomenclatura de figuras geométricas com base na sua aparência global. O nível 2, “análise”, tem como características a análise dos componentes de

uma figura geométrica, o reconhecimento das suas propriedades e o uso dessas propriedades para resolver problemas. Outro aspeto considerado na seleção das tarefas é o defendido por Laborde (1998) relativamente ao tipo de tarefa a escolher, argumentando que “os alunos devem ser capazes de realizar a tarefa com todos os conhecimentos que dispõem até ao momento, sem contudo estes conhecimentos lhes permitirem realizá-la imediatamente” (p. 209).

Na conceção das tarefas foi dado ênfase ao carácter exploratório e investigativo das mesmas por se adequarem às questões do estudo e ao tema em causa, a geometria, e por não exigirem dos alunos um grande número de conhecimentos anteriores. As tarefas incidem na investigação de figuras planas podendo os alunos descobrir e explorar um grande número de propriedades e conexões. Tal como teorizado por Abrantes (1999), as atividades investigativas em geometria são apropriadas para lidar com diversos aspetos essenciais da natureza da própria matemática, nomeadamente, formular e resolver problemas, fazer conjecturas, testá-las, validá-las ou refutá-las, procurar generalizações, comunicar descobertas e justificações, podendo fazer-se em todos os níveis de escolaridade e a diversos níveis de desenvolvimento.

Para a realização das tarefas apresenta-se a diferença entre desenhar e construir no contexto da geometria dinâmica, segundo Bongiovanni (2006).

“Desenhar é reproduzir a imagem mental que temos de um objeto geométrico. É uma das representações de um objeto teórico. Construir é utilizar as propriedades do objeto geométrico para obter a sua representação. A construção, quando realizada num software de geometria dinâmica, preserva, quando do deslocamento de um dos seus pontos, as propriedades ligadas ao objeto geométrico que representa. Podemos dizer que, nesse caso, a construção é um desenho dinâmico que não perde as suas propriedades quando do deslocamento de um dos seus pontos de base.” (p.3)

A sequência de tarefas foi pensada de modo a abranger representação no geoplano para os alunos se familiarizarem com os quadriláteros (tarefas 1, 2, 3, 4 e 5); exploração do *software* (tarefas 6 e 7); desenho para fazer emergir as propriedades (tarefas 8, 9 e 10); construção para identificar propriedades (tarefas 11, 12 e 13); construção para relacionar as propriedades e fazer emergir a classificação (tarefas 14, 15, 16 e 17). No final foi introduzida uma nova tarefa (tarefa 18) por considerar necessário complementar a tarefa 17 – classificação de quadriláteros. Este facto deveu-se à dúvida manifestada pela maioria dos alunos relativa ao *critério* a usar, considerando estes que *um critério* é apenas *uma propriedade*. Nesta tarefa era apresentada uma classificação hierárquica dos quadriláteros e os alunos tinham

de identificar o critério de cada um dos grupos e justificar a concordância ou não com esta classificação. As tarefas podem, ainda, ser agrupadas em atividades de exploração, atividades de investigação e exercícios ou de construção.

As atividades desenvolvidas com o *GeoGebra* envolveram o desenho e a construção de figuras com o *software* e a análise de construções já prontas de modo que, através da função “arrastar”, os alunos identificassem as propriedades presentes em cada figura. As propostas para o geoplano envolveram a representação de quadriláteros, enfatizando a identificação e a emergência de algumas propriedades das figuras.

O quadro especifica o tipo de tarefa, a designação e o instrumento de trabalho pensado para cada tarefa, Ambiente de Geometria Dinâmica (AGD) ou geoplano (G).

Quadro 1 – Tarefas a realizar ao longo da experiência de ensino.

Tipo de tarefa	Tarefa	Instrumento
Exercício/construção	1 – Desenho de quadriláteros e diagonais	G
Investigação	2 – Descoberta de quadrados	G
Investigação	3 – Quadriláteros com todos os lados iguais	G
Investigação	4 – Quadriláteros com lados iguais dois a dois	G
Investigação	5 – Quadriláteros com apenas dois lados paralelos	G
Exploração	6 e 7 – Explorar o <i>GeoGebra</i>	AGD
Exercício/construção	8 – Desenho de um quadrilátero qualquer	AGD
Exploração	9 – Desenho de quadriláteros a partir de diagonais dadas	AGD
Exploração	10 – Desenho de quadriláteros (soma dos ângulos internos)	AGD
Exploração	11 – Construção de um trapézio	AGD
Exploração	12 - Construção de um paralelogramo	AGD
Exploração	13 - Construção de um retângulo	AGD
Exploração	14 – Análise da construção do quadrado	AGD
Exploração	15 – Análise da construção do losango	AGD
Exploração	16 – Elaborar um plano de construção (<i>jogo dos telegramas</i>)	AGD/G
Exploração/Investigação	17 – Classificar quadriláteros	AGD/G
Exploração/Investigação	18 – Classificar quadriláteros (II)	Papel e lápis

As tarefas foram construídas com base no estudo empírico *La dialectique ancien-nouveau dans l'integration de Cabri-géomètre à l'école primaire* de Assude e Gelis (2002), outras adaptadas de Ponte et al. (2009): *Triângulos e quadriláteros. Materiais de apoio ao professor com tarefas para o 3.º ciclo – 7.º ano* e de José Manuel dos Santos dos Santos, <http://viajarnamatematica.es.eip.pt>

Tarefas 1 a 5

Objetivos:

Desenhar quadriláteros identificando-os pela sua aparência.

Identificar os elementos de quadriláteros: n.º de lados, vértices, ângulos e diagonais.

Desenhar quadrados de diferentes tamanhos e em diferentes posições.

Desenhar quadriláteros para fazer emergir as propriedades.

Formular conjecturas.

Percurso Esperado

Esperava-se que, nas tarefas 1 e 2, os alunos desenhassem diferentes quadriláteros (protótipos) e identificassem os elementos: lados, vértices, ângulos e diagonais. Deveriam, também, representar quadrados de diferentes tamanhos e posições de modo a compreenderem a conservação da forma. Com as tarefas 3 a 5, pretendia-se trabalhar as propriedades dos quadriláteros, onde se esperava que os alunos, desenhando no geoplano, identificassem as propriedades de cada um dos quadriláteros a nível de lados, ângulos e diagonais.

Tarefas 6 a 7

Objetivos:

Consolidar o conhecimento e uso das ferramentas do *GeoGebra*.

Percurso Esperado

Com estas tarefas pretendia-se que os alunos se familiarizassem com as ferramentas do *GeoGebra* e consolidassem algum conhecimento instrumental: pontos, segmentos de reta, retas paralelas, perpendiculares, função “arrastar”... Os alunos deveriam identificar os três tipos diferentes de pontos existentes no *GeoGebra*: pontos livres, pontos fixos e pontos sobre objetos.

Tarefas 8 a13

Objetivos:

Desenhar quadriláteros para fazer emergir as propriedades.

Determinar a soma dos ângulos internos de um quadrilátero.

Formular conjecturas.

Construir quadriláteros (trapézio, paralelogramo, retângulo), a partir de um plano de construção dado e investigar as suas propriedades.

Percurso Esperado

Este conjunto de tarefas, através das quais se pretendia trabalhar as propriedades dos quadriláteros, podem separar-se em dois grupos. Um primeiro grupo (8 e 9) onde se esperava que os alunos, desenhando no *GeoGebra*, identificassem as propriedades de cada um dos quadriláteros a nível de lados, ângulos e diagonais. No segundo grupo (10 a 13) esperava-se que os alunos construíssem os quadriláteros e, através da manipulação, do arrastamento no *GeoGebra* e da análise do que se mantém ou altera, investigassem propriedades comuns aos quadriláteros: trapézio, paralelogramo, retângulo, quadrado e losango. Pretendia-se, também, que a observação da deformação de “quadriláteros” pudesse fazer emergir as propriedades comuns contribuindo para a compreensão dessas propriedades e das relações entre as formas. Poderia ter surgido a inclusão entre as classes de quadriláteros, ainda que para tal pudesse ser necessária alguma intervenção do professor no sentido de levar os alunos a observar invariâncias.

Tarefas 14 e 15

Objetivos

Analisar planos de construção (quadrado e losango).

Descrever as propriedades de um quadrilátero.

Percurso esperado

As tarefas 14 e 15 foram realizadas a partir de figuras pré-construídas e gravadas num arquivo do *GeoGebra*. Os alunos abriram o arquivo e, sem movimentar, descreveram as características de cada uma. Pretendia-se que os alunos compreendessem as semelhanças e diferenças entre o quadrado e o losango e que identificassem o quadrado como um caso particular do losango. Estas tarefas permitiriam tomar consciência, tanto ao professor como ao aluno, do grau de compreensão dos conceitos fundamentais que descrevem os quadriláteros.

Tarefas 16 e 17

Objetivos

Descrever as propriedades de um quadrilátero.

Classificar quadriláteros.

Percurso Esperado

Os alunos desenvolveram um plano de construção, relacionando a construção com as propriedades. Um grupo descreveu o plano e o outro foi realizando a construção conforme as indicações. Esperava-se que os alunos recorressem ao histórico e identificassem as propriedades necessárias à construção do retângulo. Na última tarefa, era pedido aos alunos que relacionassem os quadriláteros e os agrupassem de acordo com as propriedades.

Com a concretização desta experiência de ensino esperava-se que, progressivamente, os alunos identificassem as propriedades dos quadriláteros (trapézio, paralelogramo, retângulo, quadrado, losango), estabelecessem relações entre eles de modo a progredir no pensamento geométrico a nível da inclusão entre as classes de quadriláteros indo, assim, além do nível 1, *visual*, de van Hiele.

4.3. A turma

A turma que participou neste estudo é constituída por vinte e cinco alunos, vinte e dois do 4.º ano e três do 3.º. Treze são raparigas e doze são rapazes e, à exceção de dois alunos (um do 3.º e outro do 4.º ano) que integraram a turma este ano letivo, vêm juntos desde o 1.º ano de escolaridade e com a mesma professora. Três dos alunos (duas raparigas e um rapaz) têm uma retenção, sendo que um deles está abrangido pelo Decreto-Lei n.º 3/2008, de 7 de janeiro e desenvolve o seu processo de ensino aprendizagem de acordo com o seu Plano Educativo Individual (PEI).

Os alunos apresentam, no geral, bom comportamento e bom aproveitamento embora com alguma disparidade a nível dos ritmos de trabalho. São empenhados e com vontade de aprender. Envolvem-se nas atividades de forma ativa e apreciam muito as aulas de matemática.

O uso do computador em sala de aula é habitual (uma vez por semana) desde o 1.º ano de escolaridade embora o AGD, *GeoGebra*, tenha sido usado apenas no 3.º ano, para trabalhar o tópico “retas paralelas e perpendiculares” e o conceito de “ângulo”.

O trabalho em grupo e o recurso a materiais manipuláveis é também prática corrente, bem como a realização de atividades de exploração/investigação.

A seleção dos três pares de alunos que são o foco deste estudo, para além do critério de formar *díades simétricas*, teve em consideração o bom entendimento entre os elementos de cada par e a capacidade de expressão oral e nível de participação na aula.

4.4. Os pares

Par bom

Maria é uma aluna muito empenhada, comunicativa, crítica e perspicaz. Relaciona-se bem com os pares e com os adultos, é extrovertida e muito participativa. Tem facilidade na aprendizagem, tanto em matemática como nas restantes áreas. Assume, normalmente, a liderança no trabalho de grupo sendo boa mediadora a nível de interações. Revela convicção e segurança nas suas aprendizagens e questiona tudo o que lhe causa dúvida ou insatisfação. Nas aulas de matemática faz intervenções de nível elevado, utiliza bons raciocínios e um vocabulário avançado para a sua idade

Luísa tem uma postura perante a escola semelhante à Maria mas é mais curiosa e demonstra grande valorização da escola. Traz muitas questões para a sala de aula e tenta saber mais sobre os assuntos abordados. Revela, também, facilidade na aprendizagem, embora na área de língua portuguesa apresente algumas lacunas a nível da expressão oral e escrita. É comunicativa e muito participativa. No trabalho de grupo assume também o papel de líder mas tem alguma dificuldade em gerir as interações. Nas aulas de matemática faz intervenções de nível elevado, utiliza bons raciocínios mas tem alguma dificuldade em os comunicar.

Maria e Luísa são alunas da turma desde o 1.º ano de escolaridade.

Par médio

Miguel integra a turma desde o 1.º ano de escolaridade. É um aluno interessado e adepto do computador. Utiliza-o com bastante destreza e gosta de o explorar livremente. É participativo e gosta de expor as suas descobertas. É persistente na execução das tarefas e não desiste enquanto não encontra a solução. Envolve-se ativamente nos trabalhos e anda sempre à procura de padrões e regularidades. Relaciona-se bem com os pares, é respeitador e todos gostam de trabalhar com ele. Executa os trabalhos sem dificuldade e com bastante autonomia. Não apresenta raciocínios muito elaborados mas vai diversificando as estratégias de resolução dos problemas. Nas atividades investigativas, faz sempre descobertas embora nem sempre as essenciais.

Diogo é, também, um aluno que usa bem o computador. É um pouco mais introvertido que o seu par mas envolve-se nas atividades e intervém de forma clara e pertinente. A área de matemática é a sua preferida executando as tarefas sem dificuldade, de forma autónoma. Está sempre pronto a participar, contrariamente ao

que acontece nas restantes áreas. Apresenta estratégias diversificadas na resolução de problemas mas nem sempre claras. É educado e relaciona-se bem com os outros. Integra a turma desde o 1.º ano de escolaridade.

Par fraco

Isa e Mauro são alunos da turma desde o 1.º ano de escolaridade. Têm bom comportamento, embora o Mauro tenha tendência para liderar o trabalho em grupo criando, por vezes, conflitos com os colegas. Apresentam aproveitamento razoável em todas as áreas curriculares, à exceção da área de matemática onde o aproveitamento é fraco.

Mauro é um aluno que tem algumas dificuldades na área de matemática, nomeadamente na compreensão dos enunciados dos problemas. Tem facilidade no cálculo e raramente recorre aos algoritmos. Envolve-se nos trabalhos que lhe são propostos e gosta de trabalhar em grupo. Gosta mais de trabalhar com raparigas onde assume o papel de líder. Tem revelado grandes progressos a nível de interesse e desempenho escolar. Participa nas aulas e adora ir ao quadro apresentar o que fez. Apresenta bom domínio no uso do computador. É educado e relaciona-se bem com os pares.

Isa é também uma aluna com dificuldades na área de matemática, nomeadamente a nível de resolução de problemas. É empenhada, envolve-se nos trabalhos e gosta de trabalhar em grupo. É introvertida mas gosta de participar na aula, embora na maioria das vezes não o faça de forma adequada e pertinente. É uma criança dócil e relaciona-se bem com todos. Tem muita vontade de aprender e esforça-se para realizar os trabalhos propostos. Usa o computador com bastante destreza.

4.5. Organização do trabalho

Os alunos trabalharam em pares à exceção de um grupo, constituído por três alunos do 3.º ano, uma vez que a turma é constituída por vinte e dois alunos do 4.º ano e três alunos do 3.º. Optou-se por esta dinâmica de trabalho por ser prática habitual e por ir de encontro ao defendido por vários autores sobre a importância do trabalho cooperativo na aula de matemática, considerando que “a cooperação é inerente à própria criatividade matemática e conseqüentemente o trabalho cooperativo é particularmente relevante nesta disciplina” (Schoenfeld, 1989); “quando os alunos trabalham cooperativamente podem ajudar os outros a perceber os conceitos mais básicos” (Fernandes, 1997, p. 564); “trabalhando

cooperativamente os alunos ganham confiança nas suas capacidades individuais, além de que os conceitos matemáticos são melhor apreendidos como parte de um processo dinâmico em que os alunos interagem” (Johnson e Johnson, 1990 citados em Fernandes, 1997).

Foram formadas *díades simétricas* (César, 1997), atendendo à proximidade de nível de desempenho em matemática e no uso do computador pretendendo-se, ao mesmo tempo, que fossem *díades com interação*, pois foi apresentada apenas uma solução para os problemas propostos de acordo com a concordância de ambos os alunos. A opção por díades com alunos de níveis de desempenho próximo teve em conta o observado por Laborde (1998) relativamente à escolha dos parceiros – “as observações de situações de interação que fizemos levam-nos a pensar que a 'distância cognitiva' entre os parceiros não deve ser grande para permitir que haja confrontação” (p. 209). A observação deste estudo incide em três díades, uma de nível bom de desempenho em matemática, outra de nível médio e outra de nível fraco.

Os alunos estão habituados a trabalhar com o computador e também com o AGD, *GeoGebra*. Realizaram, no ano letivo transato, algumas atividades relacionadas com o conteúdo programático “retas paralelas e perpendiculares” e o conceito de “ângulo”, tendo explorado algumas ferramentas do *software*.

A implementação das tarefas decorreu em janeiro e fevereiro, na sala de aula, utilizando o computador pessoal, na maioria o “*magalhães*”, um por díade, e o geoplano, um por aluno. As tarefas foram realizadas de forma sequencial e, no final de cada tarefa, foi feita uma discussão, com toda a turma, para partilhar os resultados a que os alunos chegaram e as dificuldades sentidas. Foi um momento muito importante pois, parafraseando Ponte (2010), as principais ideias relacionadas com a tarefa foram clarificadas, formalizadas e institucionalizadas como novo conhecimento, daí em diante aceite como tal na comunidade da sala de aula. Foram, assim, elaborados cartazes com as propriedades dos quadriláteros resultantes das descobertas feitas em grupo e em discussão coletiva. Estes foram expostos na sala de aula para poderem ser consultados. Ao longo da experiência de ensino, houve necessidade de atualizar/corriger os cartazes expostos com outras propriedades que os alunos iam descobrindo através da construção de outros exemplos. Estes momentos de discussão foram também uma boa ocasião para promover a reflexão sobre o trabalho pois, como referem Bishop e Goffree (1986), a aprendizagem não resulta simplesmente da atividade, mas sim da reflexão sobre a atividade. Esta discussão levou à reformulação do inicialmente previsto, incluindo tarefas

necessárias à clarificação de conceitos, nomeadamente, o conceito de diagonal, linhas oblíquas, coordenadas... Para além desta discussão final houve, em várias tarefas, necessidade de proporcionar um momento de discussão durante a sua realização com o objetivo de ajudar os alunos a ultrapassar certas dificuldades, de motivá-los em fases mais críticas do trabalho ou mesmo de enriquecer a investigação.

Cada aluno tinha um enunciado da tarefa, recolhido no final da aula. Os trabalhos realizados no *GeoGebra* foram guardados no computador pessoal, numa pendrive e transferidos para o computador pessoal da investigadora.

4.6. Concretização da experiência de ensino

A realização das tarefas englobou três momentos: apresentação da tarefa, trabalho autónomo dos alunos, em pares, e discussão coletiva com toda a turma. No primeiro momento foram dadas indicações sobre a realização da tarefa e o modo de trabalho, distribuindo o enunciado escrito e referindo oralmente os aspetos mais evidentes da tarefa. Pretendia-se que os alunos compreendessem bem a tarefa e quando necessário clarificaram-se termos desconhecidos ou alguma questão relacionada com a descrição da mesma.

De seguida, no segundo momento, os alunos trabalharam autonomamente nas questões propostas. A investigadora circulou pelos grupos verificando se existiam dúvidas impeditivas da resolução das questões. Procurou esclarecer os alunos tendo, contudo, cuidado para não esclarecer demasiado, respondendo às suas questões com outras questões que os obrigassem a pensar um pouco mais de modo a ultrapassarem as dificuldades manifestadas. Quando estas se manifestaram num número considerável de alunos, a tarefa foi interrompida proporcionando-se um momento de discussão coletiva que permitiu a resolução da dificuldade retomando, de seguida, o trabalho autónomo.

No terceiro momento, os pares apresentaram o trabalho realizado. Todos puderam participar, colocando questões e apresentando justificações, de modo a sistematizar as ideias fundamentais aprendidas na aula. Estas foram escritas no quadro, registadas por todos os alunos, na folha de registo e em cartazes que ficaram afixados na sala de aula. A análise e discussão dos resultados promoveram o desenvolvimento de capacidades de raciocínio, comunicação e argumentação.

Finalmente e, em algumas tarefas, antes de terminar a aula, cada aluno elaborou um pequeno registo de opinião incidindo nas dificuldades sentidas e no que mais e menos lhe agradou, justificando.

Tarefa 1. Desenho de quadriláteros e diagonais

Os alunos leram o guião da tarefa, esclareceu-se a questão relativa às diagonais e ângulos opostos, parecendo que tinha ficado claro para todos os alunos, o que na realidade não aconteceu. Pretendia-se que os alunos desenhassem diferentes quadriláteros (protótipos) e que identificassem os elementos: lados, vértices, ângulos e diagonais, o que de facto se verificou. Realizaram autonomamente a tarefa, sempre muito envolvidos e contrariamente ao planeado não foi finalizada, ficando a discussão para a aula seguinte.

Salienta-se a diversidade de quadriláteros representados por todos os alunos, a identificação correta dos lados, vértices e ângulos e alguma dificuldade nas diagonais. Notou-se que, na generalidade, os alunos entendem a diagonal como oblíqua e como tal o “quadrado, o losango e o papagaio não têm diagonais” (quando estas ficam posicionadas vertical ou horizontalmente). Outra questão que mereceu atenção foi o facto de um aluno apagar o *boomerang* porque dizia que não tinha duas diagonais, por isso não era um quadrilátero. No entanto a maioria descobriu as diagonais desse quadrilátero, embora tenham revelado alguma hesitação e questionassem a professora para validar a descoberta.

Os nomes surgidos foram: quadrado, retângulo e trapézio (apenas o isósceles), corretos na maioria e alguma troca na identificação do losango, papagaio e paralelogramo. O trapézio retângulo foi identificado por alguns alunos como “meio trapézio”, justificando que era “metade do trapézio” (isósceles). Vários alunos, ao desenharem as diagonais, uniram todos os pontos opostos do papel ponteadado e não só os vértices.

Ainda se iniciou a apresentação das figuras representadas mas não houve tempo para concluir. Por isso, retomou-se, na aula seguinte, a apresentação dessas figuras no data show. Dos comentários ficou evidente a importância da visualização na comparação das figuras “é parecida”, resposta típica, visual (Clements, Battista, e Sarama, 2001 citados em Clements e Sarama, 2007); “se rodarmos”, “se virarmos”, “um losango é como se fosse um paralelogramo com os lados todos iguais”, “uma diagonal é uma linha meio horizontal e meio vertical”... e a dificuldade em descobrir se algumas figuras eram ou não iguais, pois a análise visual nem sempre era fácil. Comparavam as figuras usando transformações visuais imaginadas “é a mesma porque se a rodarmos fica igual”. Esta dificuldade foi ultrapassada recorrendo à sobreposição através de geoplanos transparentes, pois manipular mentalmente as figuras, nomeadamente rodar, é muito difícil para os alunos. Notou-se pouca referência às propriedades que aconteceu apenas no momento da discussão,

quanto aos ângulos, sobretudo os retos (que verificaram com o canto da folha) e quando compararam uma figura com o paralelogramo, um aluno referiu “este (apontando para o paralelogramo) tem todos os lados paralelos” e ainda outro que referiu “o losango tem os lados todos do mesmo comprimento”, para justificar que o nome losango, atribuído ao paralelogramo, estava errado.

O conceito de diagonal foi neste momento abordado, tendo surgido a seguinte definição, construída por um aluno “é a linha reta que liga dois vértices opostos ficando um vértice no meio deles”.

Desta aula, ainda, surgiu a proposta de pesquisa em TPC (trabalho para casa) sobre linhas diagonais, oblíquas e perpendiculares.

Tarefa 2. Descoberta de quadrados diferentes no geoplano

A tarefa foi desenvolvida com facilidade mas apenas três grupos conseguiram descobrir todos os quadrados. A maioria dos grupos usou uma estratégia para os quadrados de lados horizontais (1x1; 2x2; 3x3; 4x4 e 5x5), que facilitou a descoberta de todos os quadrados por todos os grupos, mas apenas um grupo usou uma estratégia para descobrir os de lados não horizontais e apenas três grupos os descobriram na totalidade.

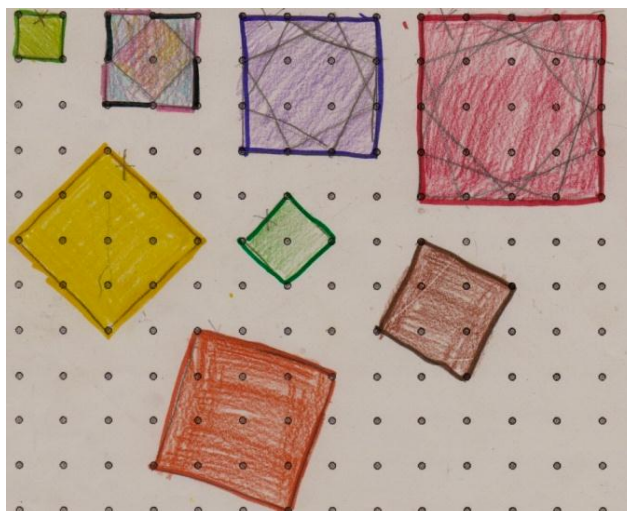


Figura 1 - Descoberta de quadrados diferentes no geoplano, apresentada pela Maria e Luísa.

Pretendia-se, com esta tarefa, que representassem quadrados de diferentes tamanhos e posições de modo a compreenderem a conservação da forma, o que já era evidente para estes alunos.

Tarefa 3. Quadriláteros com todos os lados iguais

Trabalhar as propriedades do quadrado e do losango a nível de lados, ângulos e diagonais era o pretendido nesta tarefa. Todos os grupos executaram a tarefa corretamente, não havendo grande discrepância na identificação das

propriedades, embora a linguagem usada não fosse muito correta: “tamanho dos lados”, “tamanho da figura”. Salienta-se a verificação da medida do comprimento dos lados e o recurso ao detetor de ângulos retos. Uma dificuldade detetada nesta tarefa, apesar de não a terem revelado na tarefa anterior, foi considerar que dois quadrados, um com lados horizontais e outro não, mas diferentes na área, tinham forma diferente. Talvez o modo como a proposta está redigida evidencie *quadriláteros diferentes* e a aluna não tenha valorizado a expressão *na forma*.

Tarefa 4. Quadriláteros com lados iguais dois a dois

Esta tarefa tinha como objetivo fazer emergir propriedades dos quadriláteros. Foi executada com facilidade, salientando-se o facto de alguns alunos terem dificuldade em incluir o quadrado e o losango neste critério (lados iguais dois a dois). Os mesmos alunos também não consideraram o quadrado como tendo lados iguais dois a dois e todos os ângulos iguais, o que era de esperar, de acordo com o representado na questão anterior.

Da discussão desta tarefa surgiu a questão “um quadrado é um retângulo” embora a justificação de grande parte dos alunos não seja correta “porque com dois quadrados fazemos um retângulo”, outros há que o fazem corretamente “o quadrado tem todas as características do retângulo”. Surgiu ainda uma proposta para investigação “todos os quadriláteros se podem construir com dois triângulos”.

Tarefa 5. Quadriláteros com apenas dois lados paralelos

À semelhança das tarefas anteriores e após a leitura do guião foi esclarecida a questão “apenas dois lados paralelos”, embora não tenha sido suficiente e se tenha interrompido a tarefa para prestar esse esclarecimento novamente, uma vez que estavam a considerar o quadrado e o retângulo. Outros tinham dificuldade em considerar os lados oblíquos como paralelos. Alguns sentiram dificuldade em descobrir trapézios, talvez porque possuam poucos protótipos. A maioria desenhou o trapézio retângulo e o isósceles, e poucos desenharam o escaleno.

Tarefas 6 e 7. Explorar o GeoGebra

Com estas tarefas pretendia-se que os alunos relembassem as ferramentas do GeoGebra e consolidassem algum conhecimento instrumental: pontos, segmentos de reta, retas paralelas, perpendiculares, função “arrastar”... o que foi conseguido. Salienta-se, nestas tarefas, a dificuldade em seguir o guião, manifestada pela maioria dos alunos, bem como a referência ao que veem no

monitor para responder à questão “O que observas?”, sobretudo as medidas. Surgiu, ainda, novo conhecimento instrumental *Protocolo de construção*, tendo-se analisado o *protocolo* desta tarefa.

Tarefa 8. Desenho de um quadrilátero qualquer

Com esta tarefa pretendia-se que os alunos desenhassem um quadrilátero qualquer e identificassem algumas propriedades, o que não aconteceu. Os alunos, à semelhança das tarefas anteriores, executaram corretamente a tarefa mas quando arrastavam qualquer ponto, focaram-se apenas no que veem mudar no monitor, as medidas (amplitude dos ângulos, comprimento dos lados) e as coordenadas. A realização desta tarefa deu origem a mais uma tarefa não prevista sobre a explicitação de *coordenadas*, que surgiu no momento da discussão por um dos grupos. Realizaram uma tarefa de localização de pontos, no *GeoGebra* e no quadro.

Tarefa 9. Desenho de quadriláteros a partir de diagonais dadas

Mais uma tarefa, com a qual se pretendia a identificação de propriedades das diagonais e a identificação dos quadriláteros. Notou-se maior correção na atribuição dos nomes mas ainda alguma confusão entre o paralelogramo e o losango. Muita referência ao visual para comparar as figuras, havendo mesmo um grupo que rodava o computador para verificar se duas figuras eram a mesma, em posição diferente ou mesmo para as identificar, pois que um quadrilátero foi identificado como trapézio, baseado no paralelismo de dois lados que de facto *pareciam ser*. Apenas os grupos que foram confirmar, desenhando retas paralelas sobre os lados, puderam constatar que de facto não eram paralelos.

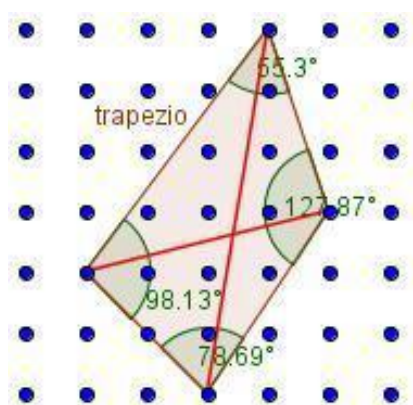


Figura 2 - Identificação do quadrilátero pela Isa e Mauro.

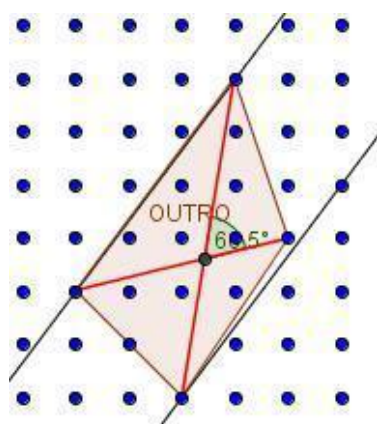


Figura 3 - Identificação do quadrilátero pela Maria e Luísa.

Este facto serviu para os alunos ficarem despertos para a necessidade de não confiar demasiado naquilo que *parece ser*. As propriedades das diagonais referidas foram a sua perpendicularidade ou obliquidade e a igualdade ou não do seu comprimento. É de referir que alguns grupos tiveram dificuldade em registar a propriedade de perpendicularidade ou obliquidade, ou porque não mediram os ângulos por elas formados, ou porque não as distinguem conforme o referido por um grupo “Todos os quadriláteros têm diagonais perpendiculares na forma oblíqua.”

Tarefa 10. Desenho de quadriláteros (soma dos ângulos internos)

Pretendia-se com esta tarefa que os alunos investigassem mais uma propriedade dos quadriláteros, somando os ângulos internos. A resolução da tarefa foi fácil mas a discussão foi muito *polémica* pelos resultados obtidos e pelas atitudes dos alunos. Houve casos em que a soma dava 360° e não houve problema e os alunos conjecturaram que “a soma dos ângulos internos dos quadriláteros é 360° ”. Outros, cuja soma não dava 360° , arrastavam a figura até conseguirem obter 360° já que a maioria dava 360° e fizeram a mesma conjectura. Outros, ainda, referiram que “se somarmos a medida de todos os ângulos internos, em algumas figuras dá 360° e em outras não”.

Também desta tarefa surgiu um *prolongamento* que ocupou mais uma aula, pois era necessário que os alunos ficassem esclarecidos e constatassem que o *GeoGebra* apresenta falhas no cálculo de medidas e que de facto a soma dos ângulos internos dos quadriláteros é 360° . Houve necessidade de recorrer às tiras articuladas para que os alunos compreendessem esta conjectura que alguns pareciam já terem entendido. Construíram um quadrado ou retângulo, pois tinham a certeza que os ângulos eram todos retos para demonstrar que quando *fecham dois ângulos os outros dois abrem* mas a soma das suas amplitudes não se altera. A teoria mais aceite foi o facto de as medidas do *GeoGebra* não serem exatas.

Tarefa 11. Construção de um trapézio

Com esta tarefa esperava-se que os alunos construíssem um trapézio a partir do plano dado e identificassem as propriedades dos lados, ângulos e diagonais e ainda obtivessem polígonos com dois pares de lados paralelos. A tarefa foi concretizada com facilidade, embora alguns grupos não tenham seguido todos os passos do guião, dificuldade já evidenciada em tarefas anteriores. À semelhança de outras tarefas, salientam-se as descobertas baseadas mais no que veem no monitor e não tanto no que fizeram. Referência a propriedades já incluídas noutras “4

ângulos”; “2 ângulos obtusos e 2 ângulos agudos” ou desnecessárias “dois lados consecutivos”.

Tarefa 12. Construção de um paralelogramo

Pretendia-se, com esta tarefa, que os alunos construíssem o paralelogramo a partir do plano dado e através da observação da deformação de “quadriláteros” e do que se altera e se mantém, identificassem as propriedades comuns contribuindo para a compreensão dessas propriedades e das relações entre as formas. Esta foi uma tarefa muito demorada salientando-se, no entanto, o envolvimento e interesse durante todo o tempo de realização da mesma. A maioria dos alunos construiu o paralelogramo protótipo e quando surgiu o retângulo, os alunos consideravam que se tinham “enganado” e arrastavam os pontos até obter o protótipo do paralelogramo. Estava claro que estes alunos não aceitavam o retângulo como paralelogramo. Foi uma tarefa que exigiu algumas pausas para esclarecer questões relacionadas com a compreensão do que era pedido, bem como de questões relacionadas com o *software* (ponto de interseção).

Notou-se maior referência às propriedades, o que facilitou a comparação entre o paralelogramo, retângulo, quadrado e losango. Mesmo assim, alguns grupos continuaram a focar-se em propriedades não essenciais como a soma dos ângulos internos. Parece-me que a manipulação das construções dinâmicas e a constatação da conservação das propriedades facilitou o estabelecimento de relações entre os quadriláteros. No momento da discussão referiram “o retângulo tem quase todas as características do paralelogramo”, “as características do quadrado são as mesmas que as do retângulo”, “ao losango só falta uma característica para ter todas as do paralelogramo”... no entanto, quando registaram as propriedades do paralelogramo tiveram necessidade de encontrar uma característica que excluísse o quadrado e o retângulo e um aluno referiu “eu descobri que há pelo menos uma característica diferente em cada figura”.

Tarefa 13. Construção de um retângulo

À semelhança da tarefa anterior, também nesta se pretendia que os alunos construíssem um retângulo a partir do plano dado e através da observação do arrastamento dos pontos verificassem as propriedades que se alteram ou mantêm, quando o transformam num quadrado. Esperava-se que os alunos identificassem as propriedades comuns contribuindo para a compreensão dessas propriedades e das relações entre as formas de modo a compreenderem que um quadrado é um

retângulo. Os alunos executaram a tarefa com facilidade, embora alguns não tenham seguido o guião corretamente, desmanchando-se a figura quando arrastada, dificuldade que resolveram confrontando o plano de construção com o guião e repetindo a construção. Salieta-se, mais uma vez, o facto de as *descobertas* incidirem no que veem no ecrã do computador “os lados horizontais são o dobro dos verticais”, ao mesmo tempo que se focam em propriedades não essenciais “a soma dos ângulos opostos é 180° ”.

Tarefas 14 e 15. Análise dos planos de construção do quadrado e do losango

As tarefas 14 e 15 foram realizadas a partir de figuras pré-construídas e gravadas num arquivo do *GeoGebra*. Os alunos analisaram as figuras e, sem as movimentar, descreveram as características de cada uma. De seguida e com recurso à ferramenta “mover” observaram o que se alterava e o que se mantinha invariante. Pretendia-se que os alunos compreendessem as semelhanças e diferenças entre o quadrado e o losango e que identificassem o quadrado como um caso particular do losango. A maioria dos alunos identificou as propriedades comuns ao quadrado e ao retângulo e notou-se maior preocupação na validação das propriedades através das ferramentas do *GeoGebra* e menos referência ao “parece” na identificação das mesmas. Desenharam retas paralelas sobre os lados do losango para confirmar se os lados eram paralelos; construíram outro losango para validar a conjectura “os ângulos obtusos são o dobro dos agudos”, facto não confirmado. No momento da discussão foi referido por um aluno que “o quadrado pode ser um losango” e ainda que “o quadrado é retângulo e é losango”, aceite por todos os alunos, mas não compreendido por todos.

Tarefa 16. Elaborar um plano de construção

Esta tarefa, diferente de todas as outras, exigia que os alunos analisassem um plano de construção e identificassem as propriedades necessárias à construção do retângulo. Um par descreveu o plano que trocou com outro para realizar a construção conforme as indicações. Esperava-se que os alunos recorressem ao histórico e identificassem as propriedades necessárias à construção do retângulo. A tarefa foi um pouco difícil de realizar sobretudo porque vários grupos tentaram descrever o plano de construção a partir da imagem que tinham no ecrã e outros consultaram o protocolo de construção mas não retiraram apenas os passos necessários, o que dificultou a construção do retângulo, exigindo a correção do

plano através da consulta do protocolo. Houve, no entanto, alguns que executaram a tarefa corretamente.

Tarefa 17. Classificar quadriláteros

Nesta tarefa era pedido aos alunos que relacionassem os quadriláteros, identificando as propriedades comuns, e os agrupassem de acordo com as propriedades. A identificação das propriedades comuns não foi difícil, se bem que alguns alunos se tenham fixado em propriedades não essenciais o que dificultou a classificação. É de referir que os alunos desenharam no *GeoGebra* os protótipos dos quadriláteros trabalhados, baseando a classificação no que viam no ecrã (Ex. no caso do trapézio indicaram como propriedade “ângulos iguais 2 a 2”, era o trapézio isósceles). Alguma confusão de linguagem também pode ter condicionado a classificação já que foi referido que pensavam que era só um “critério”, ou seja, uma “propriedade”.

Surgiram classificações com critérios diferentes:

- Atendendo ao paralelismo: duas classes – apenas um par de lados paralelos (trapézios) e dois pares de lados paralelos (paralelogramos);
- Número de ângulos retos: três classes – todos os ângulos retos, sem todos os ângulos retos e sem nenhum ângulo reto;
- Número de ângulos retos: duas classes – com ângulos retos; sem ângulos retos;
- Atendendo às diagonais: duas classes – diagonais perpendiculares, diagonais oblíquas.

No momento da discussão e quando focalizados no grupo dos que têm dois pares de lados paralelos, pareceu-me ser evidente para a maioria dos alunos que podiam formar subgrupos: ângulos retos/ângulos não retos; lados todos iguais/lados iguais dois a dois; diagonais perpendiculares/diagonais oblíquas, no entanto nenhum grupo o fez inicialmente. Os alunos referiram ter sido difícil agrupar os quadriláteros pois como foi referido “as características são tantas que é difícil agrupá-los.”

Tarefa 18. Classificar quadriláteros (II)

Por considerar que houve alguma dificuldade na compreensão da tarefa 17 e por constatar que os alunos se focaram em propriedades não essenciais, optou-se por fazer mais uma tarefa (Anexo 20). Consistia na análise de uma classificação hierárquica adaptada de Van de Walle (2004), com o intuito de perceber que critério

os alunos identificavam em cada um dos grupos e qual o grau de compreensão de uma classificação deste tipo.

Um numero considerável de alunos identificou corretamente o critério usado mas outros nem por isso pois misturaram critérios: igualdade dos lados, paralelismo, ângulos retos e diagonais. Salienta-se que houve critérios que excluía todos os contra exemplos mas apenas dos quadriláteros representados, o que evidencia a importância que as representações têm na identificação das propriedades. A maioria interpretou bem o diagrama mas poucos o justificaram indiciando a compreensão da classificação baseada na inclusão de classes.

4.7. As tarefas analisadas

Dadas as limitações que um estudo como este exige, optou-se por selecionar apenas algumas das tarefas realizadas. A escolha das tarefas teve por base três aspectos: a adequação às questões do estudo; a discussão que provocaram entre os alunos e a pertinência dos dados para análise, nomeadamente a identificação de propriedades dos quadriláteros.

A análise recaiu assim nas seguintes tarefas:

Quadro 2 – Tarefas analisadas

Tarefa	Objetivos	Percurso Esperado
1 – Desenho de quadriláteros e diagonais.	Desenhar quadriláteros para relembrar a nomenclatura Identificar os elementos: n.º de lados, vértices, ângulos e diagonais.	Esperava-se que os alunos desenhassem diferentes quadriláteros e identificassem os elementos: lados, vértices, ângulos e diagonais.
4 – Quadriláteros com lados iguais dois a dois.	Desenhar quadriláteros para fazer emergir a noção de propriedade.	Pretendia-se trabalhar as propriedades dos quadriláteros, onde se esperava que os alunos, desenhando no geoplano, identificassem as propriedades de cada um dos quadriláteros a nível de lados, ângulos e diagonais.
12 - Construção de um paralelogramo.	Construir um paralelogramo preservando as suas características e investigar as suas propriedades.	Pretendia-se que os alunos ao medirem os ângulos internos do paralelogramo verificassem que os ângulos opostos são iguais, que investigassem as propriedades relativas aos lados, aos ângulos e às diagonais de um paralelogramo e estabelecessem relações entre quadrado, paralelogramo, retângulo e losango. Pretendia-se, ainda, que a observação da deformação de “quadriláteros” fizesse emergir as

		<p>propriedades, trabalhando a inclusão entre as classes de quadriláteros.</p> <p>Esperava-se a necessidade de alguma intervenção do professor no sentido de levar os alunos a observar invariâncias.</p>
14 – Análise do plano de construção do quadrado.	Analisar um plano de construção.	Pretendia-se que os alunos compreendessem as semelhanças e diferenças entre o quadrado e o losango e que identificassem o quadrado como um caso particular do losango.
15 – Análise do plano de construção do losango.	Analisar um plano de construção.	Esperava-se que os alunos identificassem o quadrado como caso particular do losango.
17 – Classificar quadriláteros.	Classificar quadriláteros.	<p>Pretendia-se que os alunos relacionassem os quadriláteros e os agrupassem de acordo com as propriedades.</p> <p>Esperava-se que fizessem uma classificação por partição.</p>
18 – Classificar quadriláteros (II)	Analisar uma classificação hierárquica de quadriláteros.	Pretendia-se perceber que critério os alunos identificavam em cada um dos grupos e qual o grau de compreensão de uma classificação deste tipo.

CAPÍTULO 5

ANÁLISE DOS DADOS RECOLHIDOS

Neste capítulo descreve-se e interpreta-se o trabalho desenvolvido ao longo das tarefas, recorrendo às gravações de áudio e vídeo, às notas de campo e à análise dos trabalhos dos pares constituídos como estudos de caso. É feita uma breve caracterização dos alunos com referência à atitude perante as tarefas. Descreve-se, ainda, a forma como exploraram as questões propostas, discutindo-se o papel das representações e da visualização na identificação de propriedades dos quadriláteros. No final é feita uma síntese, apresentando o balanço do trabalho desenvolvido por cada um dos pares.

Estudos de caso

Foram constituídos três *estudos de caso*, formados por três pares de alunos com níveis de aproveitamento diferente, na área de matemática: dois com bom aproveitamento (Luísa e Maria), dois com aproveitamento médio (Miguel e Diogo) e dois com aproveitamento mais fraco (Isa e Mauro).

5.1. O par Maria e Luísa

Maria e Luísa são alunas com facilidade na aprendizagem em todas as áreas curriculares e têm bom aproveitamento e comportamento. Trabalharam bem em grupo, no entanto foi Maria que, geralmente, assumiu a liderança no trabalho de grupo. Nas discussões coletivas levantaram questões pertinentes e contribuíram para o esclarecimento de dúvidas e aprofundamento de conhecimentos.

5.1.1. Atitude perante as tarefas

As tarefas foram sempre recebidas com grande entusiasmo, por este par. Ao longo da sua realização foi evidente a preocupação com a apresentação das suas respostas e a persistência na resolução das questões propostas. As alunas trabalharam de forma colaborativa, dividindo entre elas a liderança na resolução das tarefas. Envolveram-se ativamente dando, cada uma delas, o seu contributo para o trabalho realizado. Dialogaram sobre as estratégias de resolução e as “descobertas” foram, na maioria dos casos, muito discutidas até chegarem a um consenso quanto à solução. Realizaram as tarefas com maior rapidez do que a maioria dos alunos, o

que lhes possibilitou maior exploração das ferramentas do *GeoGebra*. O trabalho com o computador foi bastante partilhado tendo havido equidade na sua utilização.

5.1.2. Representações e identificação das propriedades

Neste estudo, são entendidas como representações/imagens construídas pelo aluno para representar conceitos geométricos, mas também para identificar propriedades que conduzam ao conceito geométrico.

Este par representou diferentes quadriláteros e revelou ter bem adquirida a conservação da forma pois, de acordo com o observado na tarefa 1, não representaram figuras repetidas (Figura 4).

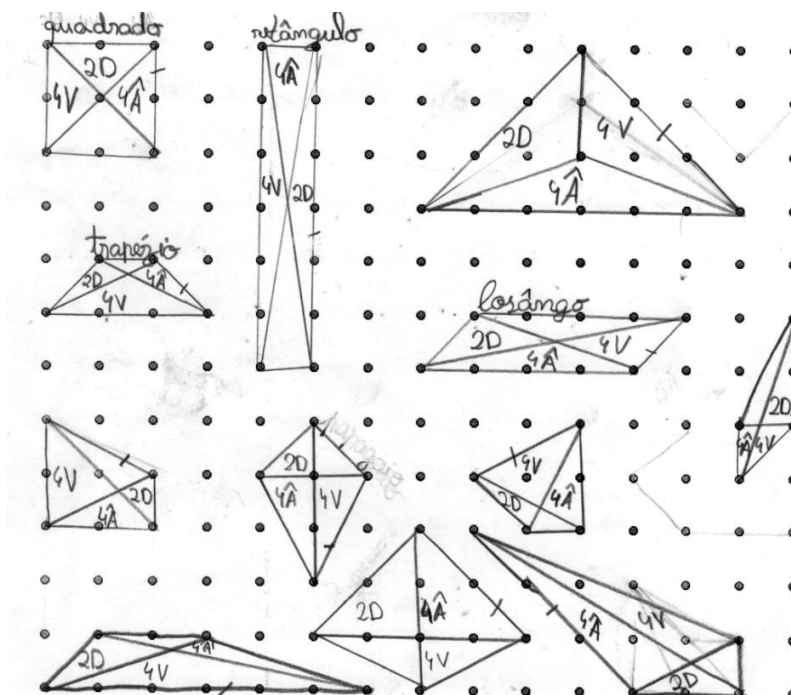


Figura 4 - Representações dos quadriláteros, no geoplano, identificação e registo dos seus elementos, apresentadas pela Maria e Luísa.

Representaram um número elevado de quadriláteros mas revelaram conhecer um número limitado de nomes de formas. Identificaram corretamente o quadrado, o retângulo e o trapézio (apenas o isósceles) e chamaram losango ao paralelogramo.

Os quadriláteros representados foram diversificados mas notou-se a forte influência das imagens protótipos, nomeadamente do quadrado, retângulo, trapézio, paralelogramo e papagaio reto.

A comparação das figuras foi feita, maioritariamente, de forma visual e, em alguns casos, com referência à imagem protótipo, como ficou claro na comparação das representações feitas.

Prof. – Fizeram diferente? Então vamos olhar para ali e vamos ver se há ali algum repetido.

Maria – Sim há. Há dois meios trapézios...

Prof. – Há dois quê?!

Maria – Aqueles que são metade do trapézio.

Prof. – Metade do trapézio! Explica lá isso. O que é isso de meio trapézio? Explica lá.

Maria – É assim professora. É a metade do trapézio.

(Maria foi mostrar a representação ao quadro)

Maria – Este é o meio trapézio, professora. [Maria apontava o trapézio retângulo]

Prof. – Porque é que dizes que é *um meio trapézio*?

Luísa – Porque se nós fizermos outro ao lado, forma um trapézio. [Completo a Luísa]

(Maria desenhou a outra metade do trapézio isósceles)

Maria – Eu não consigo muito bem, mas assim forma o trapézio.

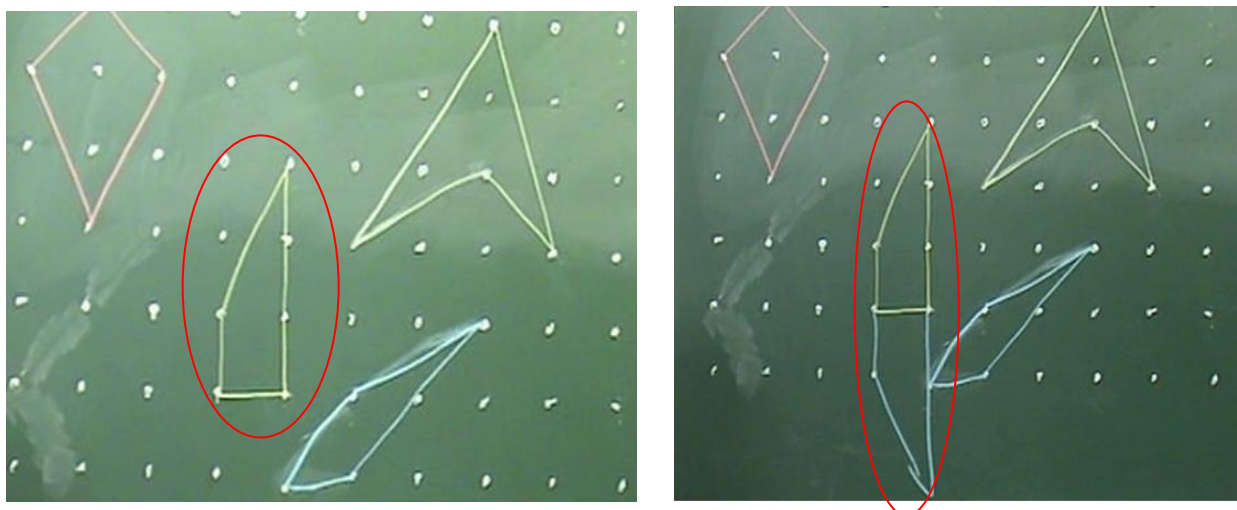


Figura 5 - Representações para explicar a ideia de “meio trapézio”, apresentadas pela Maria e Luísa.

O par usou a imagem protótipo de trapézio (isósceles) para o comparar com o trapézio retângulo. Na verdade visualizaram um eixo de reflexão no trapézio isósceles e como não sabiam o nome dessa figura, nomearam-no “meio trapézio”.

Outro – Professora eu cheguei à conclusão que o “meio trapézio” não existe.

Prof. – Tu achas que não existe “meio trapézio”?!

Outro – É trapézio ou não trapézio.

Luísa – Nelson, nós estamos a chamar “meio trapézio” porque se nós o partirmos em metade [referia-se ao trapézio isósceles] ficava como este [referia-se ao trapézio retângulo] e nós não sabemos como se chama mesmo.

Ficou claro que tanto Luísa como Maria compararam as figuras pela aparência global e segundo a imagem que têm de trapézio. A influência da imagem

protótipo de trapézio, esteve também presente quando o par representou um outro trapézio (não isósceles).

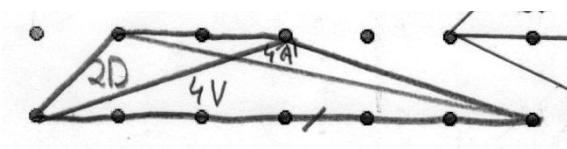


Figura 6 - Representação de quadriláteros diferentes (tarefa 1), apresentada pela Maria e Luísa.

Prof. – Mais alguém tem um diferente?

Luísa – Nós temos dois, professora.

[...]

Outro – Já está repetido. É o trapézio.

Maria – Não é o trapézio.

Luísa – Porque tem um lado maior do que o outro.

[Maria comparava os dois trapézios e acompanhava a explicação apontando para o desenho]

Maria – Porque este lado aqui é maior do que este [Referia-se aos lados opostos não paralelos do trapézio escaleno] e este é igual a este. [Referia-se aos lados opostos não paralelos do trapézio isósceles]

Mais uma vez, foi notória a influência da imagem protótipo na representação da ideia de trapézio construído por estas alunas. Essa representação influencia também as propriedades a ela associadas, pois ficou claro que as alunas formaram a ideia de trapézio como uma figura com os dois lados não paralelos iguais.

Como foi referido anteriormente, a comparação das figuras, nas tarefas iniciais, foi feita, maioritariamente, de forma visual. Rodaram e viraram o geoplano de modo a facilitar a comparação de figuras representadas em diferentes orientações, tendo recorrido, frequentemente, à sobreposição. No entanto, sobretudo durante a apresentação/discussão das figuras à turma surgiram, juntamente com a comparação baseada na percepção visual, as primeiras referências a propriedades, como aconteceu na comparação de figuras difíceis de discriminar visualmente. Salienta-se que as propriedades mencionadas tiveram sempre como referência o desenho da figura.

Luísa – A mim parece-me um paralelogramo.

[...]

Luísa – Tem 2 ângulos obtusos e 2 agudos. É este [apontava para o paralelogramo] porque este também tem 2 ângulos agudos e 2 ângulos obtusos.

[...]

Luísa – Este aqui é mais parecido com um papagaio.

Maria – Ó Nelson, este aqui [apontava numa representação] é um ângulo reto e este aqui [apontava na outra representação] também é um ângulo reto.

Tanto Luísa como Maria recorreram à percepção visual mas também às propriedades para compararem as figuras. Em relação às propriedades a mais usada para estabelecerem a comparação era a relativa aos ângulos, o que nem sempre era fácil pois os desenhos não eram feitos com a precisão necessária que permitisse uma medição correta da amplitude dos ângulos.

É de salientar, ainda, nesta tarefa, a utilidade das representações na aprendizagem do conceito de diagonal:

Maria – Eu antes também pensava que eram as diagonais [referia-se a retas oblíquas] mas eu depois vi quando comecei a fazer umas figuras assim, outras assim [referia-se a figuras com lados horizontais e verticais ou figuras com lados oblíquos] e depois comecei a perceber que diagonais são nomes de ... retas que unem dois vértices opostos.

[...]

Prof. – O que quer dizer “são opostos”, Luísa? Explica lá.

Luísa – Opostos é estar frente em frente.

Maria – (Completo a ideia da Luísa) Nós temos os 4 vértices. Um deles tem de estar com o que... Assim, tem de estar um no meio p'ra chegar a outro.

Prof. – Toda a gente percebeu?

Luísa – Eu não estou a perceber nada.

Prof. – Maria, explica lá outra vez.

[Maria desenha um retângulo]

Maria – [Apontava para os vértices e verbalizava a sua ideia] Este está no meio deste e deste. Estes são opostos. Este está no meio destes dois, por isso estes são opostos. Por isso diagonal é um segmento de reta que une 2 vértices opostos e descobrem-se [os vértices opostos] deixando 1 vértice entre eles;

ou também na clarificação de conexões erradas:

Maria – Ó professora, se nós pusermos só paralelos, os lados são iguais dois a dois.

Outro – Pois é.

Prof. – O quê? Para serem paralelos têm que ser iguais?

Outro – Não.

Maria – Ó professora, mas... eu acho que sim.

[...]

Outro – Ontem não estiveste a fazer o trapézio?

Maria – Sim.

(O colega ia representando o trapézio retângulo)

Outro – (Apontava para os lados opostos paralelos) Este é mais pequeno do que este.

Luísa – Pois, e são paralelos.

Outro – E não são iguais.

Foi com a ajuda de diferentes representações de diagonais dos quadriláteros que Maria corrigiu a ideia errada que tinha de diagonal e construiu a imagem correta desse conceito, chegando mesmo a verbalizar uma definição que, apesar de carecer de rigor científico e de linguagem, expressa a ideia correta do que é uma diagonal. O mesmo aconteceu na clarificação da ideia errada que Maria tinha sobre a relação “se os lados são paralelos são iguais dois a dois”.

Como já referido, os alunos identificaram as propriedades focando-se no desenho das figuras e, inicialmente, compararam-nas com maior influência da aparência global do desenho, sobretudo dos modelos mentais (protótipos). Também na tarefa 4 “quadriláteros com lados iguais dois a dois” a representação no geoplano revela a influência das imagens prototípicas na imagem mental que as alunas têm dos quadriláteros (Figura 7).

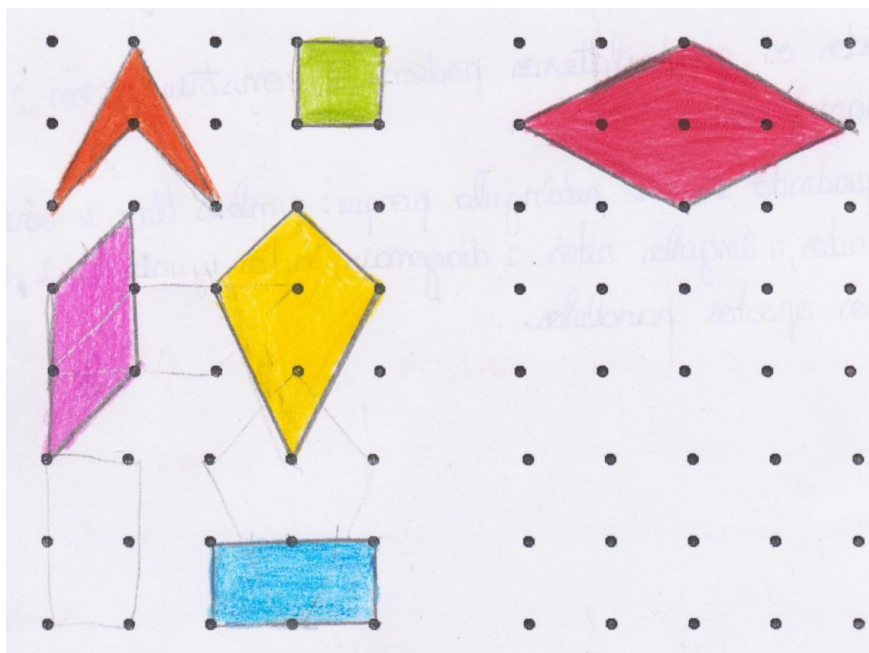


Figura 7 - Representações, no geoplano, de quadriláteros com lados iguais dois a dois, apresentadas pela Maria e Luísa.

Assim, foi partindo da representação dos modelos mentais e da comparação das diferentes representações, que exigiram reflexão sobre as características visuais, que este par constatou não ser suficiente uma comparação apenas baseada no

visual, como ficou claro na discussão da tarefa 4 “quadriláteros com lados iguais dois a dois”.

Prof. – Mais alguma coisa importante que tenham descoberto hoje com este trabalho?

Maria – Nem tudo o que parece é.

Prof. – A Maria diz aqui “nem tudo o que parece é”. O que queres dizer com isso Maria?

Maria – Sim porque nós tínhamos dito que pareciam ângulos agudos e obtusos mas afinal não eram e houve outros que não eram os que nós dizíamos. Eu dizia que não era reto e a Luísa estava farta de dizer que não era, depois fomos ver e era.

Maria usou as representações das figuras e comparou-as recorrendo ao aspeto visual e à imagem mental que delas tem, no entanto o par constatou que essa comparação não era suficiente e essa necessidade fez emergir as propriedades, surgindo assim a comparação baseada no visual mas ao mesmo tempo baseada, também, nas propriedades das figuras. O mesmo aconteceu quando compararam duas representações diferentes do papagaio:

Luísa – É o papagaio só que é mais gordo.

Prof. – E tu achas que têm a mesma forma?

Maria – Não.

Prof. – Porquê?

Maria – Porque não têm as mesmas propriedades.

Prof. – Não? Quais são as propriedades que não tem?

Maria – Aquela do ângulo reto.

ou quando justificaram que uma diagonal dividia um quadrilátero em dois triângulos ou como referido pela Luísa, que com dois triângulos é possível fazer um quadrilátero:

Luísa – Professora, acho que fiz uma descoberta. Eu acho que cada quadrilátero tem 2 triângulos.

Prof. – Tem 2 triângulos?

Luísa – Dá para fazer com 2 triângulos!

Prof. – E será que dá com todos, todos os quadriláteros?

Outros – Sim.

Outros – Todos, todos, não.

Maria – P’ra ter a certeza é preciso experimentar, professora. P’ra termos a certeza temos sempre de experimentar. [Reforçou]

Outro – O quadrado nem é preciso fazer.

Prof. – Então e o losango?

Luísa – O losango é quase parecido com o quadrado.

Luísa recorreu à aparência global das figuras, considerando o papagaio com a mesma forma, apenas com área maior, ou o losango parecido com o quadrado, enquanto Maria fez a comparação recorrendo a propriedades considerando que não tinha a mesma forma pois não tinha apenas um ângulo reto como o papagaio representado. Mas foi nas tarefas realizadas no AGD (*GeoGebra*), que pressupunham representações de ordem diferente, que a referência às propriedades se intensificou. Os alunos representavam as figuras seguindo um plano dado pela professora ou analisavam figuras pré-construídas e gravadas num arquivo do *GeoGebra*.

Apesar de seguirem, corretamente, o plano de construção dado, as alunas representaram as figuras conforme a imagem mental que delas tinham. Foi o caso do paralelogramo, tarefa 12, pois quando desenharam o terceiro ponto (C), colocaram-no de modo a obter uma linha oblíqua, representando a imagem que têm de paralelogramo (figura sem ângulos retos).

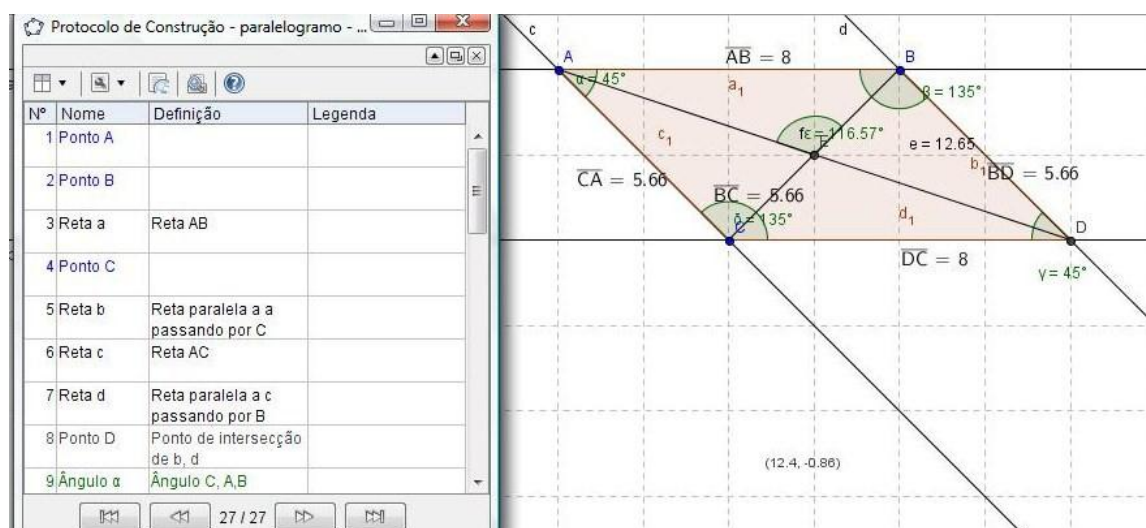


Figura 8 - Representação do paralelogramo realizada com o *GeoGebra* e seguindo o protocolo de construção, apresentada pela Maria e Luísa.

Luísa – Sou eu que vou medir os ângulos. 45, o mesmo, é igual. 135 é igual. São inteiros os números!

Maria – Vou medir os lados.

Luísa – Nós não queremos o perímetro.

Maria – Já vai. Luísa, já vai!

Luísa – Estou a dizer ao *GeoGebra*.

Maria – Eu sei. Ok. Eu já vou apagar o perímetro.

Luísa – Olha! Tem os ângulos iguais dois a dois.

[...]

Prof. – Então, estão nas descobertas?

Maria – Ainda não. Nós estivemos aqui a discutir aquilo sobre... Nós ontem estivemos a ver aquilo do Alexandre, Mauro e Isa... que já tinham descoberto e nós agora também vimos melhor... porque agora tínhamos o computador ligado, vimos e pusemos aquela descoberta dos 180°.

Ficou evidente que o trabalho no *GeoGebra* possibilitou que as características visuais das representações, nomeadamente as medidas, sobressaíssem, o que facilitou às alunas a reflexão sobre essas características, possibilitando-lhes o reconhecimento das propriedades. Constatamos que as experiências anteriores dos alunos, no caso concreto, a apresentação/discussão da resolução das tarefas, ajudaram à identificação de propriedades, pois como é referido pela Maria, a descoberta feita pelos colegas em tarefas anteriores, foi por elas confirmada influenciando as suas descobertas nesta tarefa.

O par fez uma descrição de tudo o que observou, mencionando características desnecessárias como é o caso da soma dos ângulos internos ou os ângulos consecutivos, tal como se pode verificar no registo feito:

Regista as características do paralelogramo?

Quadrilátero:	Ângulos :	Lados :	Diagonais:
paralelogramo	<ul style="list-style-type: none"> • 2 agudos e 2 obtusos. • os opostos são iguais 2 a 2. • a soma dos ângulos internos consecutivos é de 180°. • a soma da medida de todos os ângulos internos é de 360°. 	<ul style="list-style-type: none"> • a medida dos lados opostos é igual 2 a 2 • os lados opostos são paralelos 2 a 2. 	<ul style="list-style-type: none"> • a medida das diagonais é diferente • os ângulos formados pelas diagonais são 2 agudos e 2 obtusos

Figura 9 - Listagem das características do paralelogramo, apresentada pela Maria e Luísa.

É de salientar que o par teve sempre presente a representação visual das figuras pretendidas e foi com base nela que identificou as suas propriedades. Focou a atenção no observado no ecrã do computador, nomeadamente, as medidas dos lados, ângulos e diagonais, mas também no que fizeram, por exemplo, quando referiram “lados opostos são paralelos 2 a 2”, já que era condição dada no plano de construção do paralelogramo.

O recurso às características dinâmicas do *software* facilitou a visualização das propriedades da figura que se mantêm e que se alteram e nota-se que as alunas analisaram as representações dinâmicas fazendo uma comparação rigorosa dos invariantes e das alterações observadas, levando-as a concluir que as figuras

partilham muitas características, o que aparenta que compreenderam as regularidades entre as representações (Figura 10).

Movimenta os pontos de modo a obter um:

➤ retângulo;

O que se manteve?	O que se alterou?
<ul style="list-style-type: none"> os lados opostos são paralelos 2 a 2. a medida dos lados opostos é igual 2 a 2. os ângulos formados pelas diagonais 	<ul style="list-style-type: none"> a medida das diagonais são iguais ângulos → 4 retos

retângulo: são 2 ângulos

mantidos são 2 agudos e 2 obtusos.

- a soma da medida dos ângulos internos consecutivos é de 180° .
- a soma da medida dos ângulos internos é de 360° .

os ângulos opostos são iguais 2 a 2.

O que podes concluir? Concluímos que se mantiveram muitas características.

➤ quadrado;

O que se manteve?	O que se alterou?
<ul style="list-style-type: none"> os lados opostos são paralelos 2 a 2. a medida dos lados opostos é igual 2 a 2. a soma dos ângulos internos consecutivos é de 180°. 	<ul style="list-style-type: none"> os ângulos formados pelas diagonais → 4 retos. os ângulos → 4 retos a medida das diagonais é igual.

quadrado - manteve: a soma da medida de todos os ângulos internos é de 360° .

os ângulos opostos são iguais 2 e 2.

O que podes concluir? Concluímos que tem quase todas as alterações e que se todas as características mantidas.

➤ losango.

O que se manteve?	O que se alterou?
todas exceto →	os ângulos formados pelas diagonais - as diagonais são perpendiculares

O que podes concluir? Concluímos que só falta 1 para ter todas as características.

Figura 10 - Registo de alterações e invariantes entre o retângulo, o quadrado, o losango e o paralelogramo, apresentado pela Maria e Luísa.

O par movimentou os pontos da construção feita (paralelogramo oblíquângulo) até obter um losango. Recorreram às ferramentas do GeoGebra e exibiram o quadriculado na folha de trabalho para mais facilmente arrastarem o paralelogramo para a forma de retângulo, quadrado ou losango. O recurso ao quadriculado para, através do arrastamento, obterem as representações pretendidas

parece indiciar a importância da imagem mental e a sua interação com o conhecimento de conceitos e propriedades.

As alunas arrastaram a construção até obterem a representação mental do retângulo, do quadrado e do losango, embora associada ao conhecimento das respectivas propriedades, pois o movimentar os pontos e transformar a construção em retângulo pressupõe o conhecimento de que este tem os ângulos retos, ou em relação ao quadrado que este tem os lados congruentes, ou em relação ao losango, que tem os lados congruentes mas não os ângulos retos.

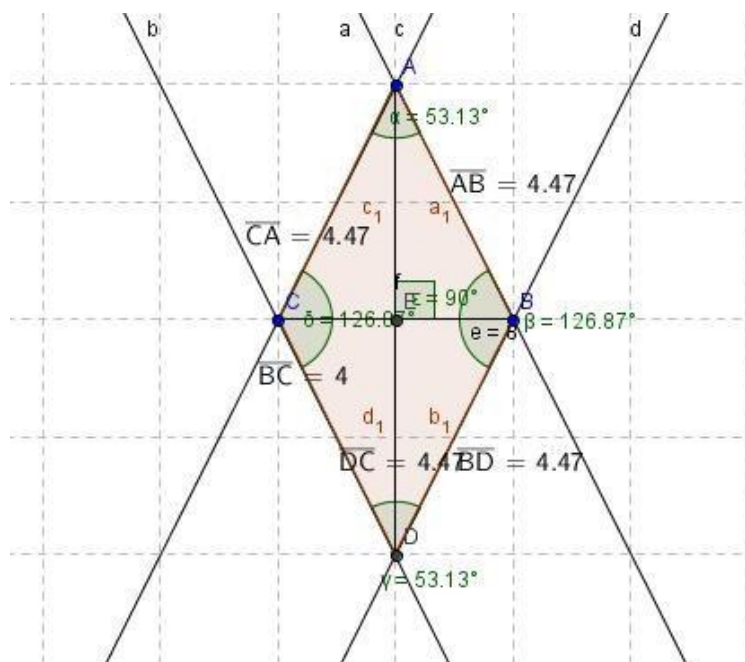


Figura 11 - Representação do losango, no *GeoGebra*, após arrastarem os pontos do paralelogramo obliquângulo, apresentada pela Maria e Luísa.

Como referido anteriormente, a utilização da geometria dinâmica permitiu a experimentação, exploração e análise dos invariantes, ajudando as alunas a estabelecer conexões entre as propriedades dos paralelogramos. Referiram que o quadrado mantém quase todas as características e quase todas as alterações, como o retângulo.

Do concluído pelas alunas parece sobressair que o losango é o que partilha mais características com o paralelogramo (Figura 10). Recorde-se que na tarefa 1 o grupo chamou losango ao paralelogramo.

Prof. – Mais alguma conclusão? Diz Maria. [Maria tinha o dedo no ar]

Maria – A nossa é sobre o losango e o paralelogramo. Concluímos que só falta uma para ter todas as características.

Prof. – Qual é a que falta? Concordam?

[...]

Maria – Para ter todas mantidas! Só mantidas e não ter nenhuma alteração.

Prof. – Então, e qual é a que falta?

Maria – Os ângulos formados pelas diagonais.

Luísa – As diagonais são perpendiculares.

Como referido acima, Luísa e Maria fizeram uma listagem de tudo o que observaram na representação do paralelogramo e foi com base nas propriedades em que se focaram que estabeleceram a comparação entre as suas propriedades e as do losango, daí a conclusão registada pelas alunas. Porém, e durante a discussão na turma, Maria foi obrigada a clarificar a conclusão já que os colegas não concordavam.

Prof. Toda a gente concorda que a diferença do losango para o paralelogramo é só nas diagonais? Ou há mais alguma diferença?

Outro – Os lados. O comprimento dos lados. Os lados são todos iguais.

Prof. – Maria, o que achas? Está aqui o teu colega a dizer que os lados são todos iguais, no losango.

[...]

Maria – Eu acho que nós aqui não pusemos “tem os lados todos iguais”, por isso é que nós não temos assim porque nós, cada um [referia-se a cada par] fez as suas descobertas e nós...agora é que eu percebi professora! Nós estamos a dizer o que concluímos, a dizer que falta uma ou faltam duas, quando não faz sentido estarmos a dizer isso porque cada um fez as conclusões de acordo com as características que escreveu.

De facto a conclusão do losango fazia sentido pois as alunas tinham referido como característica dos lados do paralelogramo “a medida dos lados opostos é igual” e “os lados opostos são paralelos 2 a 2”. Assim, a única característica diferente entre o paralelogramo e o losango eram as diagonais que neste passaram a ser perpendiculares. Esta conclusão e o relatado pela Maria revela que as conexões entre as propriedades das figuras depende das propriedades em que os alunos se focam, no entanto parece indicar, também, que as alunas compreendem que os atributos essenciais do paralelogramo estão incluídos nos atributos essenciais do losango, aspeto importante na compreensão de uma classificação inclusiva. É de salientar que as alunas listaram todas as propriedades observadas no ecrã do computador e referiram, em todas as representações, o paralelismo dos lados, condição com que construíram o paralelogramo.

A interação com a representação dinâmica, nomeadamente a observação da sua deformação fez emergir as propriedades comuns e contribuiu para a construção de uma imagem mais clara das propriedades das figuras, facilitando a compreensão dessas propriedades e das relações entre as formas.

Como tem vindo a ser referido, as representações, quer estáticas quer dinâmicas, influenciaram grandemente a identificação de propriedades. Porém, foi na utilização do *GeoGebra* (nomeadamente o recurso à ferramenta “arrastar”) que, através da observação do que permanece invariante, as alunas estabeleceram relações entre as figuras e suas propriedades, como se pode constatar na resolução das tarefas 14 e 15, onde tinham de relacionar o quadrado com o losango.

Regista as características do quadrado?			
Quadrilátero	Ângulos	Lados	Diagonais
• quadrado	• Tem quatro ângulos retos.	• Tem todos os lados iguais.	• São perpendiculares. • São iguais.

Figura 12 - Listagem das características do quadrado, apresentada pela Maria e Luísa.

O par analisou o quadrado pré construído e identificou as suas propriedades. Revelou alguma compreensão dos atributos essenciais, pois apesar de lhes ser pedido que medissem os ângulos internos e as diagonais, a referência a medidas já não prevalece, bem como excluíram as propriedades desnecessárias, nomeadamente, a soma da medida dos ângulos internos.

Luísa – Professora, nós agora só estamos a pôr aquelas que nós achamos necessárias.

Prof. – Só estão a pôr quais, Luísa?

Maria – Diga?

Prof. – Não percebi o que a Luísa disse.

Luísa – Só estamos a pôr as descobertas que nós achamos que são mesmo necessárias, porque aquela dos 360°, 180°, nós ontem, sexta-feira, chegámos a acordo que não era preciso porque têm todos.

Luísa e Maria referiram apenas os atributos essenciais. Para isso, muito contribuiu a discussão na turma.

Tens a certeza que é um quadrado? Sim Porquê? Porque quando movemos tem sempre as mesmas características.

Figura 13 - Registo da justificação do que é um quadrado, apresentado pela Maria e Luísa.

As alunas rodaram, ampliaram, reduziram e arrastaram a figura, mas parece ter ficado claro para elas que se as características se mantêm a figura é a mesma, apesar das diferentes representações que fizeram. Penso que esta é uma vantagem da utilização da geometria dinâmica pois facilita a compreensão do que observam no ecrã do computador.

Existem características semelhantes entre o quadrado e o losango? Sim
Quais?
• Têm todos os lados iguais.
• As diagonais são perpendiculares.

Figura 14 - Registo das semelhanças entre o losango e o quadrado, apresentado pela Maria e Luísa.

O par identificou corretamente as semelhanças entre o losango e o quadrado e tal como aconteceu no quadrado, já não referiram semelhanças desnecessárias, ou seja, as que são comuns a todos os quadriláteros.

Pode-se pensar que os registos revelam que as alunas já não se focam tanto nas medidas registadas no ecrã do computador, mas sim nas propriedades conceptuais. Outro aspeto a destacar e que confirma a atitude das alunas desde o início da experiência de ensino é o facto de sentirem necessidade de confirmar algumas características visuais, como evidenciado em várias tarefas.

Outro – A diagonal AC é o dobro da diagonal BC.

[...]

Luísa – Professora, agora temos de ver mesmo se é bem porque podemos fazer um paralelogramo que não tenha mesmo essa. [Referia-se à descoberta sobre as diagonais]

[...]

Maria – A ela é que deve ter mesmo acontecido, por coincidência.

[...]

Outros – Os obtusos são o dobro dos agudos.

Maria – Professora, nós não sabemos. Podemos desenhar outro losango?

[...]

Outros – Os ângulos agudos são metade dos ângulos obtusos.

Maria – Não. Eu e a Luísa também tínhamos feito essa descoberta e depois, logo a seguir, fizemos outro losango e deu-nos outros números e não dava. E fizemos duas vezes!

Luísa e Maria identificavam as propriedades das figuras mas, várias vezes, recorreram à confirmação das suas conjeturas, como foi o caso da suposta característica dos ângulos do losango ou das diagonais do paralelogramo. Esta atitude poderá apontar para o desenvolvimento da compreensão de uma figura como representativa de uma classe e não um desenho particular e a distinção entre uma característica particular e uma propriedade do paralelogramo. O par reforçou, ainda, a sua opinião de que para ter a certeza é preciso experimentar, já que fizeram vários exemplos para confirmar as suas conjeturas, mostrando alguma tendência para a generalização.

Também a classificação que as alunas fizeram revela mais do que um agrupamento baseado no visual, pois além de agruparem atendendo às propriedades, aparenta a compreensão da inclusão de classes, já que fizeram uma classificação inclusiva (Figura 15).

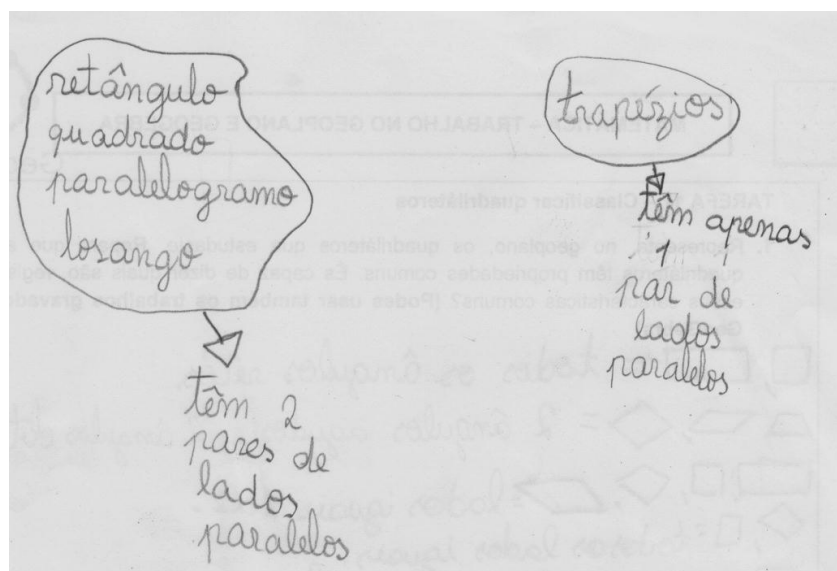


Figura 15 - Classificação dos quadriláteros: trapézio, paralelogramo, retângulo, losango, quadrado, apresentada pela Maria e Luísa.

No entanto a decisão de como agrupar não foi tarefa fácil, pois Luísa e Maria não chegavam a acordo quanto ao critério a usar. Este desacordo manifestou-se logo quando registaram as características comuns.

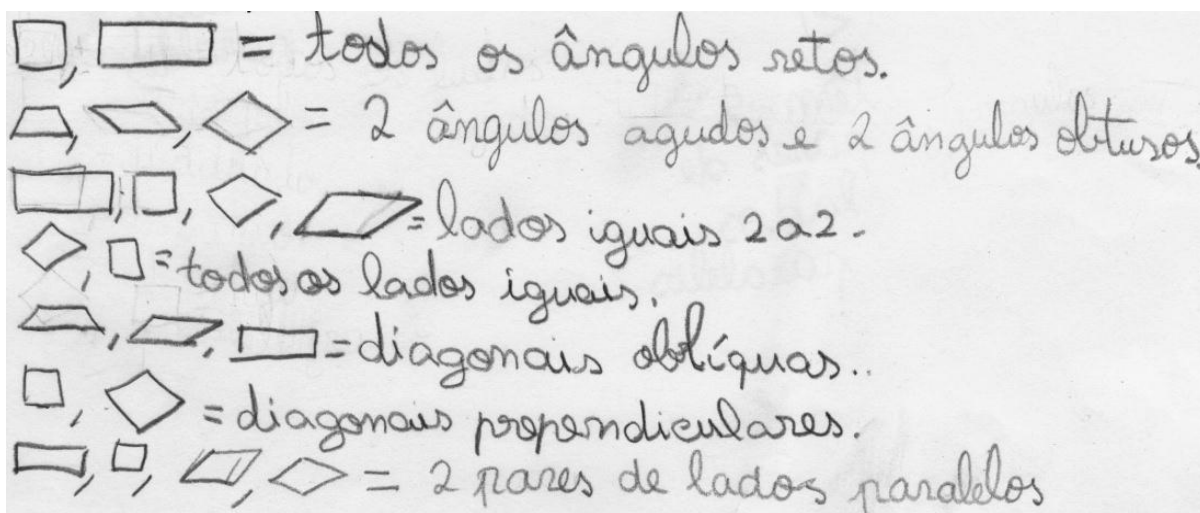


Figura 16 – Registo das características comuns ao quadrado, retângulo, paralelogramo, trapézio e losango, apresentado pela Maria e Luísa.

Luísa – Fazemos a tua ou a minha?

Prof. – Porque é que tu preferes os desenhos?

Maria – Porque não é preciso fazer legenda e porque é mais fácil, senão baralho-me.

Prof. – E tu Luísa?

Luísa – Eu não prefiro fazer os desenhos porque depois temos de demorar tempo a fazer com a régua, a fazer perfeito.

Ficou claro pelo relatado que a representação através do desenho ajuda Maria a visualizar as características comuns entre os quadriláteros e torna a tarefa mais fácil, enquanto Luísa considera que os desenhos têm de ser *perfeitos*, o que nos leva a pensar que para as alunas, os desenhos são as próprias figuras geométricas e são modelos que facilitam a visualização das propriedades.

Ao listarem as propriedades comuns, as alunas estabeleceram relações entre as figuras mas, como referido anteriormente, a dificuldade em optar por um critério era grande.

Maria – Não Luísa, estas aqui é as características comuns! É melhor os lados. Ou lados todos iguais ou lados iguais 2 a 2.

Luísa – Mas o papagaio?

Maria – O papagaio não é. São só aquelas. E são iguais 2 a 2.

Luísa – E se houver mais um quadrilátero com lados iguais 2 a 2?

Prof. – Ó Luísa, tu só tens de te preocupar com os trapézios, os paralelogramos, os retângulos, os quadrados e os losangos.

Maria – Lados todos iguais.

Luísa – Com os ângulos é melhor característica.

[...]

As alunas não conseguiam chegar a acordo quanto ao critério a usar na classificação dos quadriláteros. Maria sentia-se mais à vontade a agrupar atendendo à igualdade dos lados, mas Luísa via naquele critério a dificuldade em excluir outros quadriláteros como era o caso do papagaio. Note-se que Luísa manifestou esta atitude, de exclusão dos não-exemplos, também quando se registaram as características dos diferentes quadriláteros.

Porém não desistiram e tentaram encontrar um outro critério em que as duas estivessem de acordo.

Maria – Que outro critério, Luísa?

Luísa – Deve haver.

[Maria desenhava, novamente, os quadriláteros]

Maria – Não é... é dos lados. Tem 2 lados paralelos. Luísa, os lados... perpendiculares.

Luísa – Ângulos é melhor.

Maria – Não, lados!

Luísa – Não, ângulos é melhor.

Maria – Lados pode ser... Olha o quadrado.

Luísa – Ok, mas põe aqui...

Maria – Este é o quadrado, este é o retângulo. Este tem estes, este tem estes, estes têm estes, percebeste? [Maria cobria os lados das figuras, prolongando-os e mostrava à colega]. Estes dois vão para o outro grupo. [Referia-se aos trapézios]

Luísa – Estes têm os lados iguais 2 a 2. [Luísa ainda não tinha percebido que Maria se referia ao paralelismo]

Maria – Estes também têm lados iguais 2 a 2, Luísa!

Luísa – Tem 2 lados iguais.

Maria – Luísa, não é isso. Tem as paralelas. Este tem 2 paralelas. Este tem 4 paralelas. [Maria cantarolava de felicidade]

Luísa – Já percebi! Aqui tem 2 lados paralelos, aqui tem 4 lados paralelos.

[...]

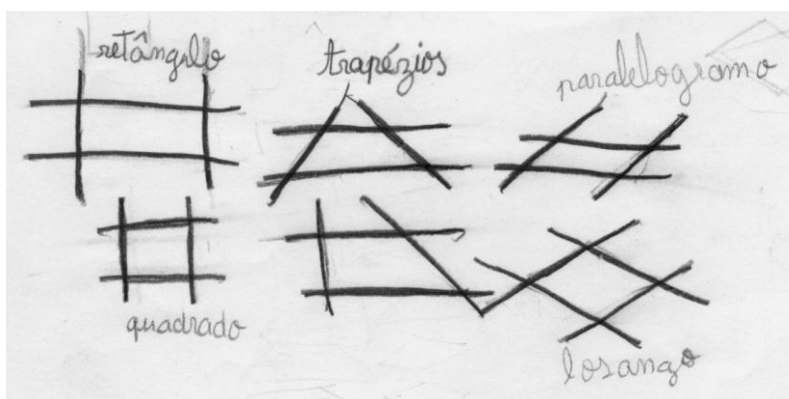


Figura 17 - Representação dos quadriláteros para serem classificados, apresentada pela Maria e Luísa.

O par acabou por fazer uma classificação inclusiva a nível dos paralelogramos, porém excluíram estes dos trapézios para o que parece ter contribuído, além do exigido na tarefa, (fazer grupos pressupõe, à partida, mais do que um grupo) a representação que fizeram, onde sobressaem as características com que agruparam: “dois pares de lados paralelos” e “apenas 1 par de lados paralelos”. Nesta representação, que se revelou facilitadora da classificação que as alunas fizeram, foi dado a conhecer o conceito que Maria tem de paralelismo.

Também na tarefa 18, que consistia na análise de uma classificação hierárquica com o intuito de perceber que critério os alunos identificavam em cada um dos grupos, o par evidenciou compreender uma classificação inclusiva.

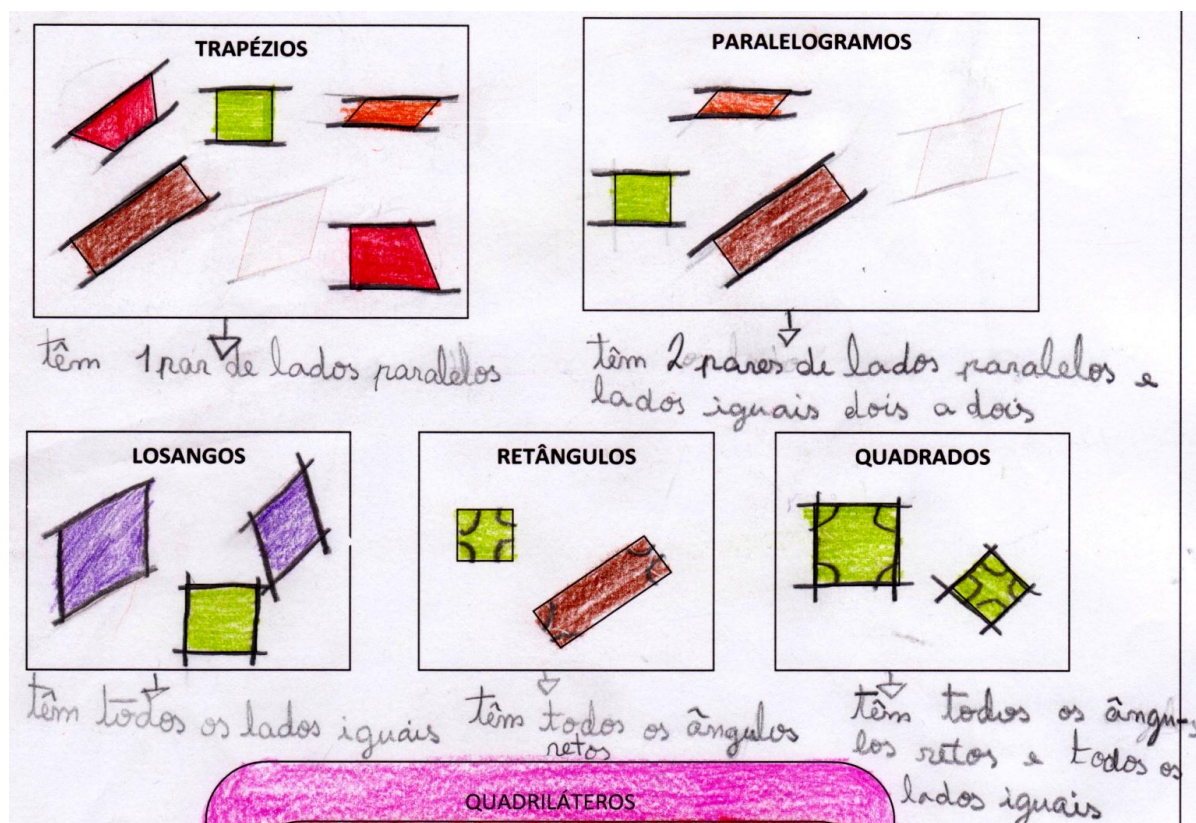


Figura 18 - Registo do critério de classificação usado em cada grupo, apresentado pela Maria e Luísa.

O par identificou corretamente as propriedades dos quadriláteros e estabeleceu relações entre as figuras revelando compreensão de inclusão de classes. À semelhança do evidenciado na tarefa 17, parece que as alunas tiveram necessidade de prolongar os lados das figuras para identificarem o paralelismo. Ao contrário do que aconteceu na sua classificação, que excluía os paralelogramos dos trapézios, aqui e da forma como redigiram o critério, “têm 1 par de lados paralelos”, os paralelogramos estão incluídos nos trapézios.

2. Concordas com esta classificação dos quadriláteros? Justifica a tua opinião.

Sim, concordamos com esta classificação porque faz sentido pois consegue-se perceber bem os grupos. É só: os quadrados estão nos grupos: retângulos, losangos, paralelogramos, trapézios e quadriláteros.

Figura 19 - Justificação da concordância com uma classificação hierárquica, apresentada pela Maria e Luísa.

O par concorda com uma classificação hierárquica e apresenta uma justificação que, à partida, parece revelar compreensão das propriedades dos quadriláteros e das relações entre eles.

5.1.3. Visualização e identificação de propriedades

Inicialmente, nomeadamente nas tarefas executadas no geoplano, o par baseou a identificação de propriedades dos quadriláteros nas características visuais das representações feitas.

A referência a propriedades tornou-se mais evidente a partir da tarefa 4. Contudo a representação mental das figuras parece ter influenciado essa referência, como ficou evidente na tarefa 12 quando tentavam registar as propriedades do paralelogramo.

Outro – Os lados têm medida diferente.

[...]

Prof. – Perceberam esta descoberta?

Maria – Ela disse...

Prof. – Disse “os lados têm medidas diferentes”.

Maria – Pois têm medidas diferentes.

Luísa – Têm porque o paralelogramo tem 2 parale... tem 2 lados paralelos que são grandes, depois os outros 2 são pequenos.

Luísa identificou a igualdade dos lados dois a dois do paralelogramo baseando essa identificação na sua imagem mental de paralelogramo, uma figura em que os lados consecutivos têm comprimento diferente. Repare-se que quando definiram um critério para agrupar os paralelogramos, além do paralelismo, registaram também a igualdade dos lados dois a dois (Figura 18).

Ainda durante a discussão coletiva da tarefa 12, aquando do registo das propriedades dos paralelogramos, as alunas também evidenciaram a necessidade de encontrar uma propriedade do paralelogramo representado (obliquângulo), que excluísse o quadrado e o retângulo, indicativo da influência da imagem mental de paralelogramo (protótipo).

Prof. – O Mauro acha que devemos pôr: os lados opostos são paralelos e iguais 2 a 2.

Luísa – Eu não concordo com o 2 a 2 porque o quadrado também pode ser.

Maria – Eu acho que também dava para pôr lá que... nós lá podemos pôr aquela frase [Referia-se à frase dita pelo Mauro], certo? E depois juntávamos uma parte “que os lados consecutivos eram diferentes” para não dizer... assim já não pode ser o quadrado.

Luísa – Mas o retângulo pode ser. Pode ser o retângulo.

Diogo – Sim, mas ó Luísa, 2 a 2... hum...

Luísa – Mas nós temos de dizer mais uma coisa para dizermos que estamos a falar do paralelogramo. [Referia-se à imagem que tem de paralelogramo, aquela que todos representaram]

[...]

Luísa – Está bem mas uma pessoa pode olhar diretamente naquela frase [referia-se à frase “os lados são paralelos e iguais 2 a 2”] e não perceber que figura é. Pensar que é um quadrado.

[...]

Luísa – Nós temos de dizer também naquela frase que o paralelogramo tem 2 lados paralelos na diagonal, depois 2 na horizontal.

Prof. – Tem dois lados paralelos na diagonal! O que é isso Luísa?

Luísa – 2 lados paralelos na posição oblíqua e os outros 2 paralelos na posição horizontal ou vertical. E agora... temos de encontrar uma maneira de explicar.

Maria – Sim. Do paralelogramo, nós vemos logo se nós girarmos mais ou menos [rodava com as mãos], conseguimos ver que há sempre 2 oblíquos e os outros podem estar na vertical ou na horizontal.

Com a característica referida pela Luísa e reforçada pela Maria, baseada sobretudo no aspeto visual, consideraram ficar excluídos o quadrado e o retângulo, embora não fique o losango, mas ninguém levantou essa questão, pois a preocupação era excluir o quadrado e o retângulo, talvez porque visualmente o losango é mais parecido com o paralelogramo e como tal não despertou os alunos para a sua exclusão. Outro aspeto evidenciado na intervenção da Maria é a noção de imagem dinâmica, para o que terá contribuído a manipulação e o movimento das figuras no ecrã do computador.

Também manifestaram essa preocupação, neste caso excluir o losango, quando tentaram definir o quadrado.

Prof. – É preciso dizermos isso tudo para dizermos que é um quadrado?

Luísa – É preciso dizer que tem todos os lados iguais porque pode ser qualquer quadrilátero se não dissermos isto. E também temos de dizer 4 ângulos retos porque se só dissermos que tem todos os lados iguais, então pode ser também o losango.

Luísa manifestou, ao longo da experiência de ensino, a necessidade de identificar a figura como única, referindo propriedades que excluíssem os não-exemplos.

Também na tarefa 17, a imagem mental das figuras fez sobressair as propriedades comuns tendo facilitado a classificação dos quadriláteros optando, o par, por uma classificação inclusiva.

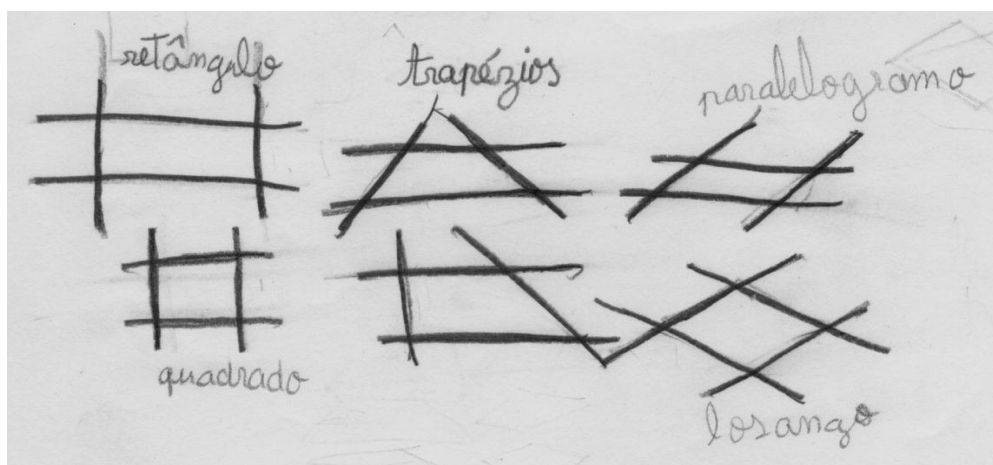


Figura 20 - Representação dos quadriláteros para serem classificados, apresentada pela Maria e Luísa.

As representações feitas parecem deixar perceber que o seu conceito de paralelismo está mais associado a retas do que a segmentos de reta. Isto talvez porque a representação do paralelismo está muito relacionado com retas que não se *cruzam*, e como tal prolongaram os segmentos de reta para justificarem que são paralelos pois, mesmo prolongando-os, não se cruzam. Também se poderá pensar na influência do *GeoGebra* no estudo do paralelismo pois, quando usam a ferramenta *reta paralela*, representam retas e não segmentos de reta.

Parece, no entanto, que as alunas já abstraíram a propriedade de paralelismo comum a estes quadriláteros e usaram as representações para tornar esse conceito mais concreto.

Recorrendo às características dinâmicas do *software*, as alunas estabeleceram relações entre o quadrado e o losango através da visualização do arrastamento dos pontos, como ficou claro durante a discussão da tarefa 14.

Outro – Maria tu tens um quadrado e esticas os pontos p'ra cima e imagina que formas um losango. Logo, as características que eram do quadrado... e se tu fores lá no *magalhães* ao mover até as diagonais mudam.

Maria – Mais fácil de ver é que ficam 2 agudos e 2 obtusos... e não é igual.

[...]

Prof. – E o quadrado tem todas as características do losango?

Luísa – O quadrado não tem o comprimento das diagonais diferente e o losango não tem 4 ângulos retos.

Maria – O losango não tem as características para ser um quadrado.

Prof. – O losango? E o quadrado tem as do losango?

Luísa – O quadrado não tem algumas do losango.

Prof. – Não. Quais são as que não tem?

Luísa – Porque o quadrado tem todos os ângulos retos e o losango tem 2 agudos e 2 obtusos.

Era claro para as alunas que o quadrado e o losango têm propriedades que os distinguem, mas reconhecem que têm algumas comuns. Na opinião da Maria, o losango não tem as características para ser um quadrado, no entanto, pelo que a Luísa afirma, não parece tão evidente que o quadrado não possa ser um losango. De qualquer maneira e, apesar de terem muitas características em comum, não estavam a aceitar que o quadrado fosse losango. Foi quase no final da discussão da tarefa 15 que a aceitação do quadrado como losango ficou mais clara.

Prof. – Então o que é que acham em relação ao losango e ao quadrado?

Outro – É a mesma coisa.

Luísa – É a mesma coisa?

Maria – Não é bem a mesma coisa!

Luísa – São parecidos.

Prof. – Mas tem muitas ou poucas características?

Maria – Muitas coisas em comum.

Luísa – Eu acho que o quadrado tem as características do losango e o losango tem as características do quadrado, só algumas.

Maria – Então não tem as características, tem algumas.

[...]

Maria – Quando nós estávamos a fazer outro losango... antes de fazer um losango, fizemos imensos quadrados.

Apesar de terem verificado que a partir do quadrado podiam fazer um losango, não era suficiente para o considerar como losango. Consideram partilhar muitas características com o quadrado mas “não é bem a mesma coisa”!

Prof. – Então qual é a característica diferente entre o losango e o quadrado?

Outro – São os ângulos. É que um tem todos iguais e o outro só tem 2 a 2.

Prof. – Então, no losango os ângulos são iguais 2 a 2 e no quadrado?

Luísa – Também.

Outro – O quadrado podia ser um losango.

Maria – Pois pode.

Outro – O quadrado pode ser um retângulo e um losango.

Prof. – O que acham desta opinião?

Luísa – Eu também ia dizer isso.

Foi neste momento da discussão que Luísa e Maria parecem ter compreendido que o quadrado é losango. Para esta compreensão penso que contribuiu o facto de relacionarem as figuras, não só através das semelhanças mas também das diferenças, para o qual contribuiu a questão “se o quadrado tinha os ângulos iguais dois a dois” que facilitou a compreensão de que os atributos essenciais do losango então incluídos nos atributos essenciais do quadrado.

A utilização da geometria dinâmica facilitou a visualização das propriedades que se mantêm invariantes, permitindo estabelecer relações entre o quadrado e losango. O movimento e a modificação das figuras promoveram maior facilidade de visualização das suas propriedades geométricas e a discussão na turma clarificou as ideias dos alunos e contribuiu para a compreensão de que o quadrado é losango.

Mesmo assim e apesar de aceitarem o quadrado como losango ou o quadrado como retângulo, a compreensão desta inclusão não é fácil pois várias vezes aconteceu as alunas hesitarem quando relacionavam as figuras. Ficam na dúvida relativamente a *o quadrado é retângulo* ou *o retângulo é quadrado*, como mostra o relatado durante a discussão da tarefa 4.

Prof. – Um quadrado é um retângulo? Porquê?

Maria – Um retângulo é um quadrado! [Desenhou um retângulo e um quadrado e comparava-os apontando para um e outro] Tem 4 vértices, tem 4 ângulos retos, 2 diagonais, os lados iguais 2 a 2. Eu disse que o retângulo é um quadrado, não disse que o quadrado é um retângulo.

Prof. – Maria, o retângulo tem todas as propriedades do quadrado?

Maria – O retângulo não, mas o quadrado tem todas as propriedades do retângulo.

Prof. Então quem é quem?

Maria – Ah! Já percebi professora, eu estava a dizer o mesmo que eles mas eu disse mal.

Prof. – Então?

Maria – Já percebi. É o quadrado um retângulo.

Prof. – E porquê?

Maria – Não pode ser o retângulo o quadrado porque não tem todos os lados iguais.

Fica claro com esta intervenção da Maria que não é fácil saber se o quadrado é retângulo ou, contrariamente, é o retângulo um quadrado. No entanto e após a discussão e a reflexão sobre o que a aluna estava a dizer, parece ter ficado claro que o quadrado é retângulo, pois tem todas as propriedades do retângulo e o contrário não pode ser pois o retângulo não tem os lados todos iguais.

Porém o que parecia tão claro voltou a não ser quando na tarefa 14 surgiu, novamente, a afirmação de que “o quadrado é um retângulo”.

[...]

Outro – Porque um quadrado é um retângulo.

[...]

Maria – Eu acho que é o quadrado um retângulo. Eu dizia que o retângulo é um quadrado porque tem lados iguais 2 a 2. O quadrado também mas o quadrado tem uma característica que o retângulo não tem que é os lados todos iguais.

Prof. – E então? Nós dizemos que um quadrado é um retângulo ou que o retângulo é um quadrado?

Maria – Um retângulo é um quadrado.

Prof. – É? O retângulo tem todas as características do quadrado?

Maria – Não.

Prof. – E o quadrado tem todas as do retângulo ou não?

Maria – Tem.

Prof. – E então?

Maria – O quadrado é um retângulo. Eu estou-me sempre a baralhar porque eu digo sempre a mesma coisa mas ...é assim, eu digo que é um retângulo um quadrado, porque têm quase as mesmas características.

Apesar de saber e dizer que o quadrado tem todas as características do retângulo, Maria revela dificuldade em ter isso em conta quando estabelece a relação entre as duas figuras, pois acha que eles “têm quase as mesmas características”. Este facto foi, novamente, evidenciado quando, na tarefa 17, os questionei sobre a não inclusão do quadrado no grupo dos retângulos nem no dos losangos, já que durante a experiência de ensino foi, várias vezes, mencionada essa inclusão.

[...]

Prof. – É que eu ouvi dizer, quando estivemos a explorar, que “o quadrado é um retângulo”, “que um quadrado é um losango”...

Maria – Eu ia dizer mas só que eu não me lembrava se é o quadrado, retângulo ou se é o retângulo, quadrado.

Apesar de parecer que Maria tinha compreendido a inclusão do quadrado no grupo dos retângulos, ela hesitou quando teve de agrupar, pois já não sabia qual era qual. Este facto revela a dificuldade em compreender a relação assimétrica entre o quadrado e o retângulo, pois o quadrado é um retângulo mas o retângulo não é um quadrado. Parece que Maria tem dificuldade em compreender que os atributos essenciais do retângulo estão incluídos nos atributos essenciais do quadrado. A hesitação da Maria pode dever-se ao facto de constatar que ter ângulos retos é uma característica comum, o que a leva a inferir que tanto possa ser o quadrado um retângulo como o retângulo um quadrado. O que julgo levar à compreensão dessa relação assimétrica é pensar que se o quadrado tem os lados todos iguais (característica do quadrado), implica ter lados iguais dois a dois (característica do retângulo) daí, o quadrado ter todas as propriedades essenciais do retângulo. Porém, e como já foi referido, a imagem mental tem grande influência na identificação de figuras e propriedades e tendo a aluna a imagem de retângulo como um quadrilátero cujos lados têm comprimento diferente, poderá, assim, justificar-se esta hesitação quando se refere à relação entre o quadrado e o retângulo.

5.1.4. Síntese

Após a análise pormenorizada do trabalho desenvolvido pela Luísa e pela Maria, ao longo da experiência de ensino, apresenta-se uma síntese centrada no papel das representações e da visualização na identificação das propriedades dos quadriláteros.

O par executou corretamente todas as tarefas e conseguiu construir todos os quadriláteros a partir do plano de construção dado. No momento de discussão no grupo turma, as alunas deram um grande contributo para a reflexão conjunta sobre propriedades e conceitos que emergiram. Revelaram uma grande motivação relativamente à execução das tarefas e um progresso significativo em termos de conhecimentos e competências desenvolvidas.

Inicialmente, nomeadamente nas tarefas executadas no geoplano, o par baseou a identificação de propriedades dos quadriláteros nas imagens mentais das

figuras e nas características visuais das representações feitas, passando depois para o *GeoGebra* onde, através do uso das ferramentas de medição e do movimento, analisaram as propriedades, desenvolveram e aperfeiçoaram conceitos geométricos, avançando no pensamento geométrico. As alunas construíram representações visuais das figuras pretendidas e usaram-nas tanto para retirar ideias que conduziram ao conceito geométrico, como para representar um conceito geométrico formal. Usaram a representação visual das figuras para identificar as propriedades e aproveitaram as características dinâmicas da aplicação, que lhes permitiu relacionar os conceitos geométricos com as características da figura e estabelecer relações entre as figuras, através da análise dos invariantes geométricos.

Nas primeiras tarefas, a preocupação em registrar tudo o que observavam era grande, traduzindo-se numa atenção em atributos não essenciais das figuras. Isto foi sendo corrigido à medida que construíram os quadriláteros e aprofundaram o domínio dos conceitos geométricos necessários para a sua construção, conduzindo-as, assim, ao reconhecimento dos atributos essenciais da figura. É de salientar que a imagem mental que as alunas têm das formas influenciou as representações, bem como a identificação de propriedades. No entanto foi, também, evidente uma constante experimentação, exploração e análise das representações de modo a confirmarem se uma característica que se revelou verdadeira num caso particular, se mantinha noutros casos, estabelecendo a sua generalização. Puderam, ainda, verificar visualmente e através de várias possibilidades de manipulação dos objetos geométricos, se as conjeturas formadas durante a investigação eram ou não válidas.

O recurso ao arrastamento dos elementos da figura e o movimento possibilitaram a constatação das suas propriedades através da observação dos invariantes geométricos, permitindo estabelecer relações entre os diferentes quadriláteros, ao mesmo tempo que levou a uma correta representação mental dos conceitos geométricos envolvidos e facilitou a compreensão da inclusão de classes. Penso que o par demonstrou compreender as relações entre os quadriláteros estudados e a inclusão de classes. Também foi evidente que embora cada figura possa formar, juntamente com outras, uma classe, ela é entendida como tendo uma identidade própria e cuja definição a deverá tornar única.

Em suma, as alunas construíram diferentes representações dos quadriláteros, analisaram as suas componentes, descobriram semelhanças e diferenças entre as formas e identificaram relações de inclusão entre classes. As propriedades foram descobertas experimentalmente através da observação, medição, desenho e

fazendo modelos. Pode dizer-se que com o auxílio das tarefas de construção física no geoplano, com o recurso ao AGD, *GeoGebra*, nomeadamente a possibilidade de visualizar uma mesma construção de diversas formas, juntamente com a reflexão surgida por meio da discussão no grupo turma, as alunas avançaram no raciocínio geométrico tendo ido além do nível visual. Desenvolveram uma compreensão mais avançada de quadriláteros, pois identificaram os seus atributos e reconheceram relações entre eles e construíram e aperfeiçoaram conceitos geométricos.

5.2. O par Miguel e Diogo

Miguel e Diogo são alunos com bom comportamento e aproveitamento razoável em matemática. Envolveram-se nas atividades e partilharam o uso do computador. Trabalharam em grupo de forma cooperativa e discutiram as soluções antes de acordarem uma solução comum. Participaram nas discussões coletivas e transmitiram as suas ideias de forma clara.

5.2.1. Atitude perante as tarefas

As tarefas foram sempre recebidas com grande entusiasmo, por este par. Ao longo da realização das mesmas foi evidente a preocupação com a apresentação das suas respostas e a persistência na resolução das questões propostas. Embora Miguel tivesse um papel mais interventivo, ambos revelaram interesse e motivação na resolução das tarefas, tendo trabalhado, efetivamente, de forma colaborativa, envolvendo-se ativamente dando, cada um deles, o seu contributo para o trabalho realizado. Dialogaram sobre as estratégias de resolução e discutiram as “descobertas” de modo a chegarem a consenso quanto à solução. O trabalho com o computador foi, também, partilhado tendo havido equidade na sua utilização.

5.2.2. Representações e identificação das propriedades

Este par representou diferentes quadriláteros e revelou não ter grande dificuldade em identificar, com a mesma forma, figuras com dimensões diferentes ou desenhadas em diferentes posições pois, de acordo com o observado na tarefa 1, repetiram apenas duas figuras (trapézio retângulo e paralelogramo), difíceis de discriminar visualmente, isto porque além de terem dimensão diferente, estão desenhadas em posição diferente (Figura 21).

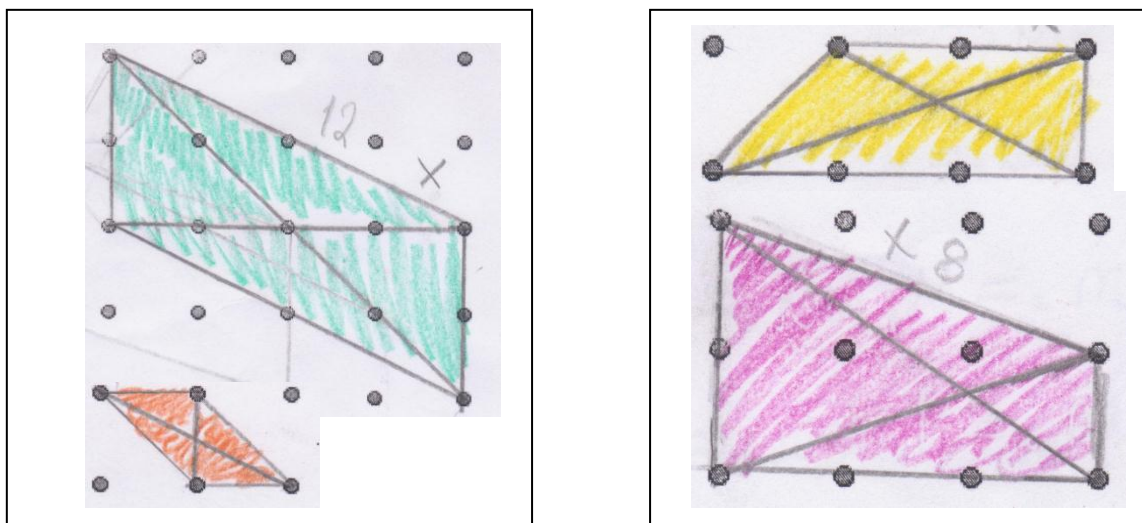


Figura 21 - Representações do paralelogramo e do trapézio, apresentadas pelo Miguel e Diogo.

Representaram um número elevado de quadriláteros mas revelaram conhecer um número limitado de nomes de formas. Identificaram corretamente o quadrado, o retângulo e o trapézio (apenas o isósceles), apesar de os desenhos feitos terem sido os protótipos (quadrado e retângulo, desenhados em posição “direita”). Chamaram losango ao paralelogramo.

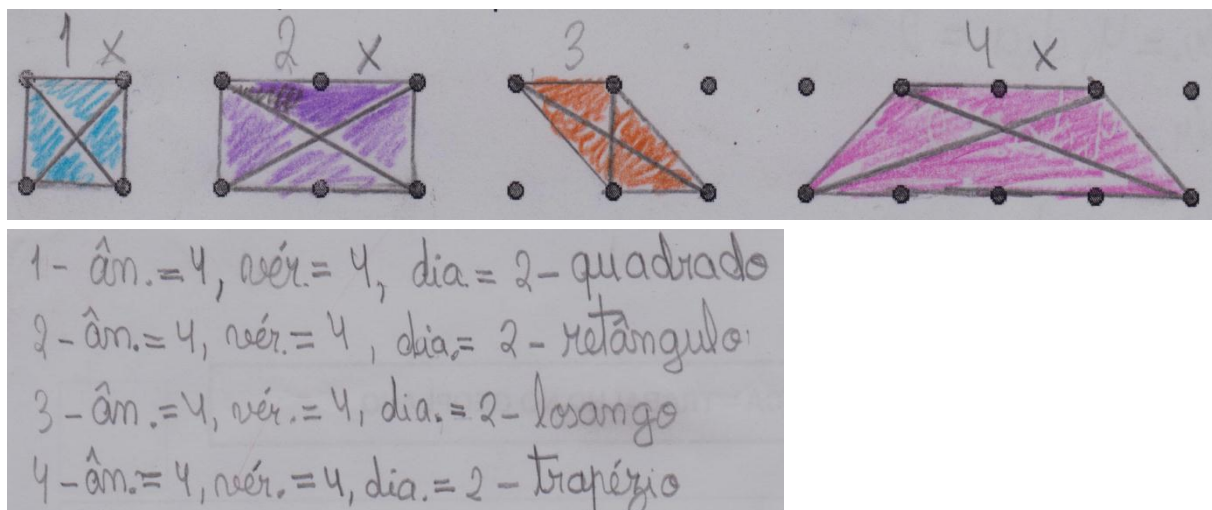


Figura 22 - Identificação dos quadriláteros e registo dos seus elementos, apresentada pelo Miguel e Diogo.

A comparação das figuras foi feita visualmente. Rodaram e viraram o geoplano de modo a facilitar a comparação de figuras representadas em diferentes orientações, tendo recorrido frequentemente à sobreposição.

Após a descoberta de diferentes quadriláteros, no trabalho a pares, estes foram apresentados em grande grupo. Foi proposto que cada par desenhasse na malha pontuada representada no quadro, um quadrilátero que aí ainda não estivesse, e assinalasse, na sua folha de registo, as figuras já representadas.

À semelhança do constatado durante o trabalho a pares, as figuras são comparadas visualmente e as referências a propriedades inexistentes.



Figura 23 - Quadriláteros representados no geoplano, pela turma, e projetados no data show.

Prof. – Há ali mais algum repetido?

Maria – Sim. Este aqui. [indica o quadrilátero côncavo representado]

Miguel – Não, professora, não é. Por causa que aquele [indica o quadrilátero A], aquela parte ali vai p'ra baixo e ali [indica o quadrilátero B] vai p'ro lado.

[...]

Miguel – Aquela parte ali do lado direito, aquela parte ali do ângulo ... aquela ali vai a descer e aquela ali vai p'ro lado.

[...]

Prof. – Diz lá Diogo.

Diogo – É que se nós tentamos fazer um triângulo vê-se que são diferentes.

Prof. – Se tentamos fazer um triângulo vê-se que são diferentes?!

Diogo – [...] Aquela figura [A], se for um triângulo, fica com uma forma diferente daquele. [fig. B]

Mesmo sabendo o nome correto das figuras, a identificação das mesmas é feita através de referências visuais.

Prof. – Miguel, porque é que disseste que era um paralelogramo?

Miguel – Esta parte é igual a esta. [comparava com outro paralelogramo]

E mesmo quando se referem a atributos da figura como os ângulos, estes são baseados em características visuais, como aconteceu quando desenharam um paralelogramo e o compararam com outras figuras já representadas.

Prof. – [repetindo o referido por um aluno] O quadrado tem ângulos retos e aquele? [referindo-me ao paralelogramo] Terá ângulos retos?

Miguel – Eu acho que também são ângulos retos por causa que [...] parece um retângulo.

O Miguel reconheceu a figura globalmente, considerando-a parecida com um retângulo, o que o levou a identificar os ângulos como retos. Associou o ângulo reto ao retângulo e usou o aspeto visual do desenho para justificar a sua ideia, ainda que incorreta.

Como já foi referido, os alunos identificaram as propriedades focando-se no desenho das figuras, embora tenham tido necessidade de recorrer à medição para justificar/validar as suas ideias. Foi o que aconteceu na resolução da tarefa 4 “quadriláteros com lados iguais dois a dois”, onde houve desacordo quanto à inclusão do quadrado e do losango neste critério.

Miguel – O quadrado tem os lados todos iguais.

Diogo – Mas também dá. Este com este, este com este. [aponta para os lados opostos do quadrado desenhado no geoplano]

Miguel – Os lados são todos iguais. Olha aqui [relê parte da questão] ... os lados iguais 2 a 2. (mede com a régua): 4cm, 4cm, 4cm, 4cm, todos iguais. [mede os lados do retângulo]. Por exemplo: 4cm, 4cm, 2cm, 2cm, 2 a 2.

Diogo – [insistia] Olha lá. Mas este é igual a este, este é igual a este. [mostrava os lados opostos do quadrado].

Miguel – Mas não dá, tem de ser iguais 2 a 2 e o quadrado tem todos iguais.

Diogo – Mas também dá.

Miguel – Esquece. Contigo não dá para explicar.

Diogo, contrariamente a Miguel, aceitou que ter os lados todos iguais incluía ter os lados iguais dois a dois, porém Miguel não concordou com esta inclusão, justificando a sua ideia através da medição dos lados. A ideia do Miguel prevaleceu e o par não considerou o quadrado, nem o losango na questão 1, da tarefa 4, (Figura 25) “quadriláteros com lados iguais dois a dois”, e não considerou o quadrado na questão 2 (Figura 24), “quadriláteros com lados iguais dois a dois e todos os ângulos iguais”.

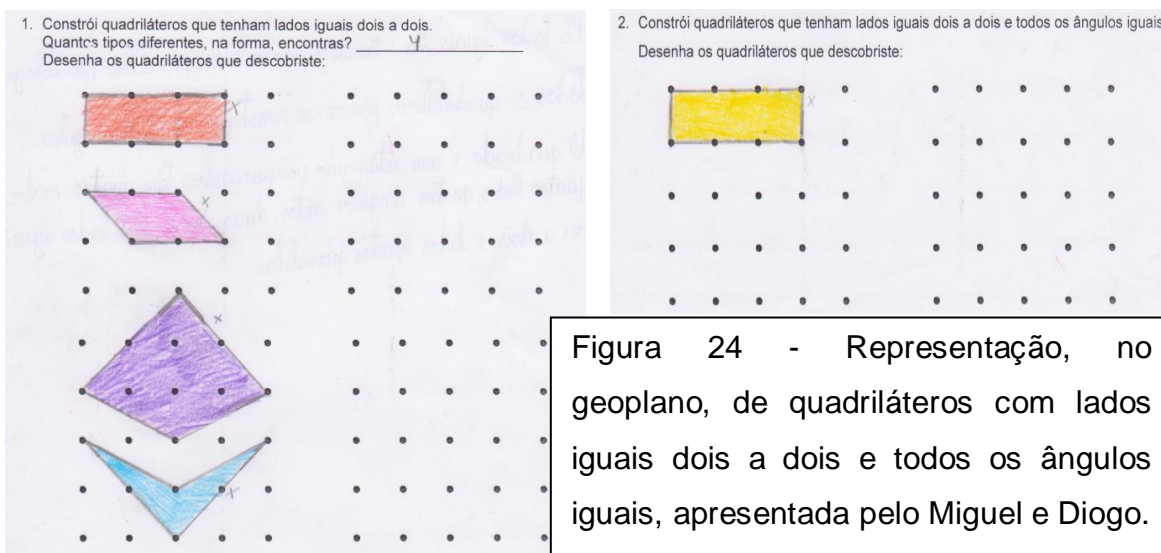


Figura 24 - Representação, no geoplano, de quadriláteros com lados iguais dois a dois e todos os ângulos iguais, apresentada pelo Miguel e Diogo.

Figura 25 - Representação, no geoplano, de quadriláteros com lados iguais dois a dois, apresentada pelo Miguel e Diogo.

Porém, Diogo manteve a ideia de que “ter os 4 lados iguais” incluía “ter os lados iguais dois a dois” e foi durante a discussão no grupo turma que a reafirmou quando explicou e registou que o quadrado é um retângulo.

Diogo – [registou] Um quadrado é um retângulo porque: ambos têm 4 vértices, 4 lados, 4 ângulos retos, 2 diagonais, lados iguais 2 a 2 e lados opostos paralelos.

O quadrado é um retângulo porque: ambos têm quatro vértices, quatro lados, quatro ângulos retos, duas diagonais, lados iguais dois a dois e lados opostos paralelos.

Figura 26 - Registo do Diogo explicando porque considera um quadrado retângulo.

O aluno aceita o quadrado como retângulo e justifica listando as propriedades comuns e não apenas as necessárias, no entanto parece não estar muito seguro deste facto, pois não foi invulgar o aluno hesitar quando referia se é “o quadrado que é um retângulo” ou “o retângulo que é um quadrado”.

Nelson – Professora, a primeira frase [referia-se à frase “Tem 4 ângulos retos”] é a que está ali no retângulo [referia-se ao cartaz do retângulo].

Prof. – O Nelson disse que a frase “Tem 4 ângulos retos” estava aqui no retângulo [apontando para o cartaz]...

Diogo – Por causa que o retângulo é um quadrado.

Outros – [em uníssono] O quadrado é um retângulo.

Diogo – Só tem uma diferença.

Prof. – Só tem uma diferença, diz o Diogo.

[...]

Diogo – É porque o quadrado tem os lados todos iguais e o retângulo não tem, tem 2 a 2.

Prof. – É? Então porque é que podemos dizer que um quadrado é um retângulo?

Diogo – Porque só uma [hesitou]. Ah, porque o retângulo também tem os lados iguais 2 a 2 e o quadrado também, depois tem o resto tudo igual.

Esta última afirmação do Diogo, revela o seu entendimento sobre a inclusão dos atributos essenciais do retângulo nos atributos essenciais do quadrado e, embora muitos dos alunos não se tenham manifestado nesta discussão, parece-me que a maioria aceita a ideia que o quadrado tem as características de um retângulo, apesar de este facto ser mais evidente para uns do que para outros, dependendo do seu grau de compreensão e análise das propriedades.

Relativamente às tarefas realizadas no AGD (*GeoGebra*), estas pressupunham representações de ordem diferente. Os alunos representavam as figuras seguindo um plano dado pela professora, ou analisavam figuras pré-construídas e gravadas num arquivo do *GeoGebra*.

Apesar de seguirem, corretamente, o plano de construção dado, os alunos representaram as figuras conforme a imagem mental que delas tinham. Foi o caso do paralelogramo, tarefa 12, pois quando desenharam o terceiro ponto (C), colocaram-no de modo a obter uma linha oblíqua, representando a imagem que têm de paralelogramo (figura sem ângulos retos).

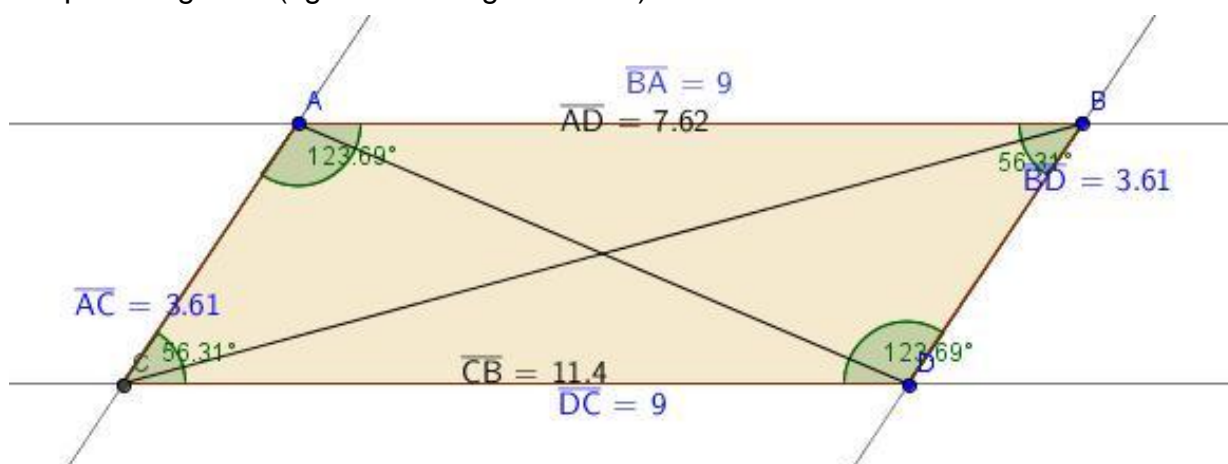


Figura 27 - Representação do paralelogramo realizada com o *Geogebra*, apresentada pelo Miguel e Diogo.

O par fez uma descrição de tudo o que observou, mencionando características desnecessárias tal como se pode verificar no registo feito:

Regista as características do paralelogramo?			
Quadrilátero	Ângulos	Lados	Diagonais
paralelogramo	<ul style="list-style-type: none"> • A soma dos ângulos internos é de 360°. • A soma de um ângulo agudo com um obtuso é de 180°. 	<ul style="list-style-type: none"> • Tem lados iguais 2 a 2 para- lelos. • Tem 2 lados consecutivos. • Tem 2 lados oblíquos. 	<ul style="list-style-type: none"> • As diagonais têm o comprimento diferente. • As diagonais unem vértices opostos.

Ângulos
<ul style="list-style-type: none"> • Os ângulos são iguais 2 a 2. • Tem 2 ângulos obtusos e 2 agudos.

Figura 28 - Listagem das características do paralelogramo, apresentada pelo Miguel e Diogo.

É de salientar que o par teve sempre presente a representação visual das figuras pretendidas e identificou as propriedades com base nessa representação, como ficou evidente no registo “tem 2 lados oblíquos” ou “tem 2 ângulos obtusos e 2 agudos”. Focaram a sua atenção no observado no ecrã do computador, nomeadamente, as medidas dos lados, ângulos e diagonais, mesmo quando analisaram as figuras pré-construídas, nas tarefas 14 e 15.

Regista as características do quadrado?

Quadrilátero	Ângulos	Lados	Diagonais
quadrado	<ul style="list-style-type: none"> • Todos iguais • A soma dos 4 ângulos dá 360° • A soma dos ângulos opostos dá 180°. • São iguais 2 a 2. 	<ul style="list-style-type: none"> • Todos iguais • Iguais 2 a 2. • Os lados opostos são pa- ralelos. 	<ul style="list-style-type: none"> • O comprimento da diago- nal é igual. • A soma dos ângulos das diagonais é de 360°.

Figura 29 - Listagem das características do quadrado, apresentada pelo Miguel e Diogo.

Listaram todas as características observadas, referindo algumas já incluídas noutras, como se verifica no caso do quadrado (Figura 29) onde registaram lados “todos iguais” e também lados “são iguais 2 a 2” ou ângulos “todos iguais” e ângulos “iguais 2 a 2”. O par teve necessidade de registar todas as propriedades visuais

observadas na representação da figura, indiciando a dificuldade em deduzir umas propriedades de outras e em compreender que uns atributos implicam outros.

Também na tarefa 17, quando analisaram as figuras representadas, no geoplano ou no *GeoGebra*, basearam o registo das propriedades nas características visuais das representações e fixaram-se em aspetos concretos das figuras, esquecendo que elas representam uma situação mais geral (classe), conforme sugere o registado no trapézio “ângulos iguais 2 a 2”, uma vez que tinham desenhado o trapézio isósceles.

características em comum	
quadrado	2 diagonais - a soma dos ângulos internos dá 360° - têm pelo menos 1 par de lados paralelos - ângulos iguais 2 a 2 -
retângulo	2 diagonais - a soma dos ângulos internos dá 360° - têm pelo menos 1 par de lados paralelos - ângulos iguais 2 a 2 -
paralelogramo	2 diagonais - a soma dos ângulos internos dá 360° - têm pelo menos 1 par de lados paralelos - ângulos iguais 2 a 2 -
trapézio	2 diagonais - a soma dos ângulos internos dá 360° - têm pelo menos 1 par de lados paralelos - <u>ângulos iguais 2 a 2 -</u>
losango	2 diagonais - a soma dos ângulos internos dá 360° - têm pelo menos 1 par de lados paralelos - ângulos iguais 2 a 2 -

Figura 30 – Registo das características comuns ao quadrado, retângulo, paralelogramo, trapézio e losango, apresentado pelo Miguel e Diogo.

As ferramentas de medidas do *software* para analisar as propriedades foram um recurso muito usado e as características dinâmicas possibilitaram o arrastamento levando os alunos a visualizar e a perceber o que permanece invariante, estabelecendo relações entre as figuras e as suas propriedades. Notou-se grande preocupação em registar o máximo de alterações e invariantes, no entanto a referência a características não essenciais continuou a evidenciar-se.

➤ quadrado;

O que se manteve?	O que se alterou?
<ul style="list-style-type: none"> • a soma dos ângulos, os lados 2 a 2 e os ângulos iguais 2 a 2. 	<ul style="list-style-type: none"> • o comprimento das diagonais, a medida dos ângulos e o comprimento dos lados.
<p>O que podes concluir?</p> <ul style="list-style-type: none"> • Podemos concluir que as características do quadrado são iguais às do retângulo. 	

Figura 31 - Registo de alterações e invariantes entre o quadrado e o retângulo, apresentado pelo Miguel e Diogo.

Foi ainda evidente que os alunos se focam mais no que veem do que no que fazem, pois na tarefa 12, onde tinham de comparar os paralelogramos, apenas fizeram referência ao paralelismo dos lados, no paralelogramo oblíquângulo (Figura 28), condição com que o construíram. Já na tarefa 14, onde tinham de analisar as propriedades do quadrado pré construído, referem o paralelismo dos lados mas não os ângulos retos (Figura 29). Este facto parece sugerir que os alunos identificam as propriedades das figuras mas têm dificuldade em distinguir entre os atributos essenciais e não essenciais.

Movimenta os pontos e verifica se obténs sempre um quadrado. Obtém sempre um quadrado
O que observas? Observamos que quando movemos os pontos fica sempre um quadrado.

Tens a certeza que é um quadrado? Sim Porquê? Porque os lados são todos iguais, os ângulos são todos iguais, as diagonais são iguais e os ângulos das diagonais são todos iguais.

Figura 32 - Registo da justificação do que é um quadrado, apresentado pelo Miguel e Diogo.

Como foi atrás referido, os registos revelam que os alunos se focaram nas medidas registadas no ecrã do computador, em detrimento das propriedades conceptuais. Não identificaram, explicitamente, os ângulos como retos, nem as diagonais como perpendiculares.

Prof. – Porque é que são perpendiculares? [referia-me às diagonais]

Miguel – Nós pusemos: a soma dos ângulos das diagonais é de 360° . [O que não justifica a perpendicularidade]

Já no final da experiência de ensino, tarefa 17, o par construiu representações visuais das figuras pretendidas, a maioria protótipos, e formaram grupos com base nas suas propriedades.

Atenderam ao paralelismo dos lados e fizeram duas classes – só um par de lados paralelos (trapézios), excluindo os paralelogramos e dois pares de lados paralelos (paralelogramos). No grupo dos trapézios desenharam, apenas, o isósceles (protótipo).

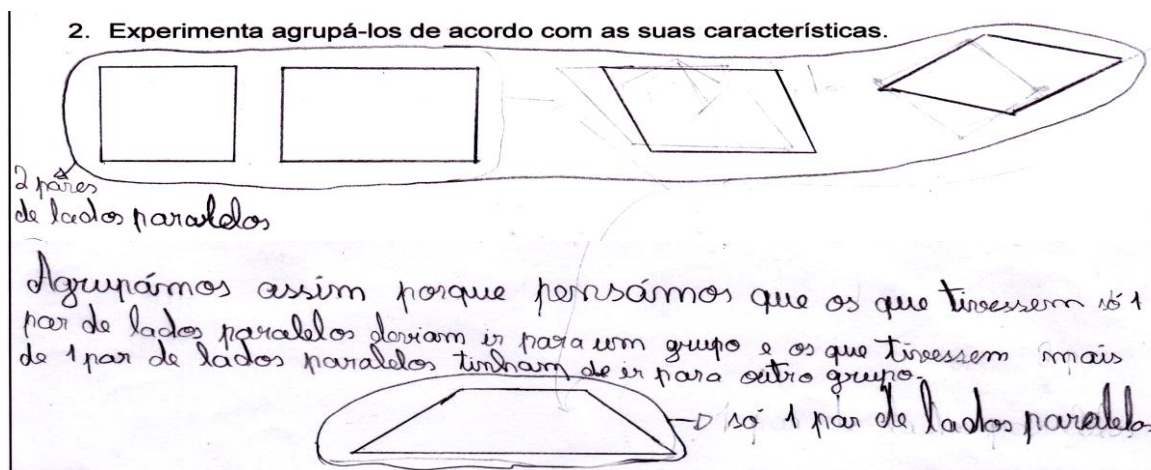


Figura 33 - Classificação dos quadriláteros: trapézio, paralelogramo, retângulo, losango, quadrado, apresentada pelo Miguel e Diogo.

Prof. – Em relação ao do Luís e da Bárbara, quem fez? [referia-me à classificação que estes dois alunos tinham feito: 4 lados paralelos – quadrado, retângulo, losango, paralelogramo – e apenas 2 lados paralelos – trapézio isósceles, trapézio retângulo] [...]

Diogo – Só não fizemos uma figura.

Miguel – Foi o outro trapézio.

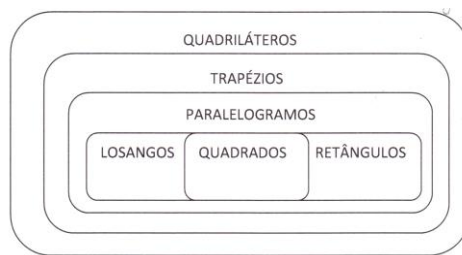
Prof. – Mas não o desenharam, foi?

Diogo – Não. Só desenhámos o principal. [Referia-se ao trapézio isósceles.]

Para Diogo e Miguel a ideia de trapézio está ligada à imagem do trapézio isósceles, que consideram como “principal”. No entanto, quando realizaram a tarefa 11 da experiência de ensino “Construção de um trapézio” representaram, através da função arrastar do *GeoGebra*, vários desenhos de trapézios, incluindo os não isósceles o que poderá evidenciar que quando arrastam uma construção e representam um outro desenho não o reconhecem como um objeto da mesma classe, mas sim um outro objeto geométrico.

Constataram que as figuras compartilham muitas propriedades e classificaram os quadriláteros, revelando alguma inclusão de classes, nomeadamente os paralelogramos (Figura 33).

O par indicou compreender uma classificação hierárquica, como evidenciou na resolução da tarefa 18.



2. Concordas com esta classificação dos quadriláteros? Justifica a tua opinião.

Sim, concordo com esta classificação porque o trapézio é um quadrilátero, o paralelogramo é um trapézio e um quadrilátero, o losango é um paralelogramo um trapézio e um quadrilátero, o retângulo é um paralelogramo um trapézio e um quadrilátero e o quadrado é um retângulo um losango um paralelogramo também é um trapézio e um quadrilátero.

Figura 34 - Justificação da concordância com uma classificação hierárquica, apresentada pelo Miguel e Diogo.

5.2.3. Visualização e identificação de propriedades

Inicialmente, nomeadamente nas tarefas executadas no geoplano, o par baseou a identificação de propriedades dos quadriláteros nas características visuais das representações feitas.

A referência a propriedades tornou-se mais evidente a partir da tarefa 4, onde tinham de representar quadriláteros com os lados iguais dois a dois, no entanto a perceção visual foi também muito forte.

Prof. – Diogo, achas que a figura tem a mesma forma! Explica porquê.

Diogo – [aponta para os ângulos opostos de um paralelogramo] Este ângulo e este ângulo são iguais 2 a 2 e este e este também são iguais 2 a 2; e nesta [aponta para o outro paralelogramo e para os ângulos opostos], este e este também são iguais 2 a 2 e este e este também são iguais 2 a 2.

[...]

Diogo – Se virarmos e se pusermos esta figura aqui dentro desta, vê-se que é igual, é só tirar um bocado.

Embora tenha começado por comparar as figuras, recorrendo à igualdade dos ângulos, Diogo acabou por basear essa comparação na aparência global das mesmas.

No entanto e à medida que avançavam na experiência de ensino, a referência a propriedades na comparação de figuras tornou-se mais evidente pois quando compararam o losango com o paralelogramo, o quadrado e o retângulo, referiram que “o losango tem mais características em comum com o paralelogramo do que com os outros”. Julgo que esta conclusão se deve ao facto de terem assinalado como invariante o *comprimento diferente* das diagonais, já que as restantes propriedades são coincidentes.

➤ losango.	
O que se manteve?	O que se alterou?
<p>• a soma dos ângulos, os lados iguais 2 a 2, os ângulos iguais 2 a 2 e o comprimento das diagonais é diferente.</p>	<p>• a medida dos ângulos e o comprimento dos lados.</p>
<p>O que podes concluir?</p> <p>• Podemos concluir que o losango tem mais características em comum com o paralelogramo do que com os outros.</p>	

Figura 35 - Registo de alterações e invariantes entre o losango e o paralelogramo, apresentado pelo Miguel e Diogo.

Contudo, este par tinha identificado o *paralelogramo* como *losango* na tarefa 1, o que indicia que a influência do visual permanece muito explícita, pois visualmente o losango é mais parecido com o paralelogramo do que com o retângulo ou o quadrado.

Durante a discussão coletiva da tarefa 12, quando registavam as propriedades dos paralelogramos, os alunos também evidenciaram a necessidade de encontrar uma propriedade do paralelogramo representado (obliquângulo), que excluísse o quadrado e o retângulo, indicativo da influência da imagem protótipo de paralelogramo.

Prof. – O Mauro acha que devemos pôr: os lados opostos são paralelos e iguais 2 a 2.

Luísa – Eu não concordo com o 2 a 2 porque o quadrado também pode ser.

Diogo – Sim, mas ó Luísa, 2 a 2... hum...

Luísa – Mas nós temos de dizer mais uma coisa para dizermos que estamos a falar do paralelogramo. [referia-se à imagem que tem de paralelogramo, aquela que todos representaram]

[...]

Miguel – Tem dois lados oblíquos.

Com a característica referida pelo Miguel ficam excluídos o quadrado e o retângulo. O mesmo aconteceu na tarefa 14 quando registavam as propriedades do quadrado.

Diogo – [...] tem os lados todos iguais, com os retos [referia-se aos ângulos todos retos] já se vê que é um quadrado. Não há mais nenhum.

[...]

Diogo – Ó professora, só por estas descobertas... só há uma figura, que é o quadrado. Tem que ser essas duas [referia-se aos lados todos iguais e aos ângulos todos retos]. São só preciso essas duas.

Ainda durante a discussão e perante a dúvida de outro colega o Diogo reforçou a sua ideia.

Prof. – Repete lá Diogo que eu acho que ele não ouviu.

Diogo – O que está ali no quadro foi o que nós explicámos há bocado, era [pausa] bastava para explicar que era um quadrado por causa que ao ter 4 ângulos retos podia ser um retângulo ou um quadrado mas depois ao ter todos os lados iguais só o quadrado é que tem.

Outro – E o losango.

Diogo – Não, mas são as duas. [referia-se às duas propriedades em simultâneo]

Também na resolução da tarefa 12, a representação da figura influenciou a identificação das propriedades e a utilização da geometria dinâmica facilitou a visualização das propriedades que se mantêm invariantes, permitindo estabelecer relações entre o quadrado e losango.

Prof. – Olhem para o losango. O que se mantém?

Diogo – Manteve os 4 lados iguais.

[...]

Mauro – Os dois lados paralelos 2 a 2.

[...]

Diogo – Os ângulos iguais dois a dois.

Através das características dinâmicas da aplicação, os alunos aperceberam-se que poderiam facilmente arrastar o quadrilátero construído inicialmente (paralelogramo oblíquângulo) para a forma de um retângulo, losango ou quadrado. O movimento e a modificação dessas figuras fizeram sobressair as propriedades geométricas, facilitando a sua visualização.

Os alunos usaram as representações para identificarem as propriedades, embora se tenham focado em atributos não essenciais. Estas evidências sugerem que os alunos identificam e verbalizam as propriedades das figuras, mas têm dificuldade em compreender quais são as essenciais. No entanto verificou-se alguma evolução pois, quando registaram as propriedades do losango, tarefa 15, o par já não referiu propriedades desnecessárias como fizeram no quadrado, concretamente, “a soma de todos os ângulos internos” e a “soma dos ângulos opostos”, focando-se nas essenciais. Para esta economia de características terá contribuído a discussão, no grupo turma, de tarefas resolvidas anteriormente, onde os alunos constataram que havia características comuns a todos os quadriláteros trabalhados e como tal eram desnecessárias.

Regista as características do losango?

Quadrilátero	Ângulos	Lados	Diagonais
losango	• Iguais 2 a 2.	• Os lados são todos iguais.	• O comprimento das diagonais é diferente. • As diagonais são perpendiculares.

Figura 36 - Listagem das características do losango, apresentada pelo Miguel e Diogo.

Referiram como características semelhantes entre o quadrado e o losango “os ângulos são iguais 2 a 2; os lados são todos iguais; as diagonais são perpendiculares”.

Existem características semelhantes entre o quadrado e o losango? Sim

Quais?
Os ângulos são iguais 2 a 2, os lados são todos iguais e as diagonais são perpendiculares.

Figura 37 - Registo de alterações e invariantes entre o losango e o quadrado, apresentado pelo Miguel e Diogo.

O par considerou que de um quadrado é fácil fazer um losango, isto porque algumas características são iguais. A referência à aparência visual é aqui também evidente.

Prof. – Então o que é que acham em relação ao losango e ao quadrado?

[...]

Diogo – O quadrado dá para fazer um losango.

Prof. – Olha o Diogo diz que do quadrado dá para fazer um losango. [...] Diz lá Diogo.

Diogo – Eu lembro-me que da outra vez que nós estivemos com o geoplano, que dava para fazer um losango.

Prof. – E com o GeoGebra não dava?

Diogo – Dá. Mas dessa vez eu e o Miguel tínhamos feito um quadrado que era assim na diagonal [mostrava com as mãos] e desse quadrado fizemos um losango.

Prof. – Então qual é a característica diferente entre o losango e o quadrado?

Diogo – São os ângulos. É que um tem todos iguais e o outro só tem 2 a 2.

Apesar de terem manipulado a figura de forma dinâmica, a verbalização do Diogo revela a grande influência que a representação gráfica, as características visuais e as experiências anteriores têm quando os alunos relacionam as figuras.

5.2.4. Síntese

Da análise da literatura existente constata-se que as representações são consideradas de duas formas. Uma delas refere-se à construção de representações pelo aluno, outra forma refere-se à apresentação de representações para serem usadas pelo professor e pelo aluno com o objetivo de construir conceitos. Em geometria, existe ainda uma vasta teoria acerca da representação, em especial no que se refere às figuras geométricas. Estas, por um lado, são usadas para retirar ideias que conduzem ao conceito geométrico, por outro, são entendidas como meios para representar um conceito geométrico formal.

Apresenta-se uma síntese centrada no papel das representações e da visualização na identificação das propriedades dos quadriláteros.

O par executou corretamente todas as tarefas e conseguiu construir todos os quadriláteros a partir do plano de construção dado. No momento de discussão no grupo turma, os alunos contribuíram para a reflexão conjunta sobre propriedades e conceitos que emergiram. Revelaram uma grande motivação relativamente à execução das tarefas e um progresso significativo em termos de conhecimentos e competências desenvolvidas.

Inicialmente, nomeadamente nas tarefas executadas no geoplano, o par baseou a identificação de propriedades dos quadriláteros nas características visuais das representações feitas, passando depois para o *GeoGebra* onde, através do uso das ferramentas de medição e do movimento, analisaram as propriedades

avançando no pensamento geométrico. Os alunos construíram representações visuais das figuras pretendidas e basearam as suas conclusões nessas representações. Usaram a representação visual das figuras para identificar as propriedades o que lhes permitiu relacionar os conceitos geométricos com as características da figura e facilitou a compreensão de alguns conceitos tornando-os concretos e mais claros.

Foi evidente, nas primeiras tarefas, a dificuldade que os alunos tiveram em distinguir entre os atributos essenciais e os não essenciais das figuras e em usar linguagem precisa e coerente. As dificuldades foram-se esbatendo à medida que os alunos construíram os quadriláteros e aprofundaram o domínio dos conceitos geométricos necessários para a sua construção de modo a reconhecerem os atributos essenciais da figura. É de salientar que a imagem mental que os alunos têm das formas influenciou a identificação de propriedades, pois os alunos arrastavam as construções de modo a obterem a forma desejada (protótipo visual), como evidenciado no caso do trapézio ou do paralelogramo.

O recurso ao arrastamento dos elementos da figura e o movimento possibilitou a constatação das suas propriedades através da observação dos invariantes geométricos, permitindo estabelecer relações entre os diferentes quadriláteros, ao mesmo tempo que permitiu uma correta representação mental dos conceitos geométricos envolvidos. Facilitou também a compreensão da inclusão de classes (paralelogramos). Penso que o par demonstrou compreender as relações entre os quadriláteros estudados e aceitar a inclusão de classes, no entanto também foi evidente que embora cada figura possa formar, juntamente com outras, uma classe, ela é entendida como tendo uma identidade própria. Os alunos puderam, ainda, verificar visualmente e através de várias possibilidades de manipulação se as conjeturas formadas durante a investigação eram ou não válidas.

Em suma, os alunos construíram diferentes representações dos quadriláteros, analisaram os seus componentes, descobriram semelhanças e diferenças entre as formas e identificaram relações de inclusão entre classes. As propriedades foram descobertas experimentalmente através da observação, medição, desenho e fazendo modelos. Pode dizer-se que com o auxílio das tarefas de construção física no geoplano, com o recurso às características do AGD, *GeoGebra*, e com a reflexão surgida por meio da discussão na turma, os alunos avançaram no raciocínio geométrico tendo ido além do nível visual, desenvolvendo uma compreensão mais avançada de quadriláteros, pois identificaram os seus atributos e reconheceram relações entre eles.

5.3. O par Isa e Mauro

Isa e Mauro são alunos com dificuldades na área de matemática. Têm bom comportamento e aproveitamento razoável em todas as áreas curriculares à exceção da área de matemática onde o aproveitamento é fraco. As principais dificuldades relacionam-se com a resolução de problemas.

Envolveram-se nas atividades e gostaram de trabalhar em grupo. Mauro foi um aluno mais extrovertido, assumiu a liderança no trabalho e foi mais participativo nas discussões coletivas. Revelaram bom domínio no uso do computador e foram persistentes na execução das tarefas.

5.3.1. Atitude perante as tarefas

Este par executou as tarefas com gosto e interesse. Embora a Isa se tenha envolvido em todo o trabalho realizado, foi o Mauro que impôs o ritmo de trabalho e, apesar de dialogarem sobre as estratégias de resolução e respetivas soluções, foi também ele que se mostrou mais interventivo, sobretudo no trabalho autónomo. Já a Isa revelou maior preocupação com a apresentação e organização das respostas. Nos momentos de discussão na turma, o par teve pouca iniciativa e raramente expos as suas ideias ou quando o fazia tinha dificuldade em justificar as opções feitas. O trabalho com o computador foi partilhado tendo havido equidade na sua utilização.

5.3.2. Representações e identificação das propriedades

Este par, apesar de ter optado pela representação dos protótipos na sua posição mais normal, ou seja, com os lados verticais/horizontais, como ficou evidente na resolução da tarefa 1, representou vários quadriláteros repetindo apenas duas figuras (trapézio retângulo e trapézio isósceles) com dimensão diferente e desenhadas, também, em posição diferente (Figura 38). Esta repetição deve-se, na minha opinião, ao facto de as figuras serem comparadas visualmente e não através das propriedades. Mesmo assim, o par revela identificar, com a mesma forma, figuras com dimensões diferentes ou desenhadas em diferentes posições, aspeto importante na identificação de propriedades comuns.

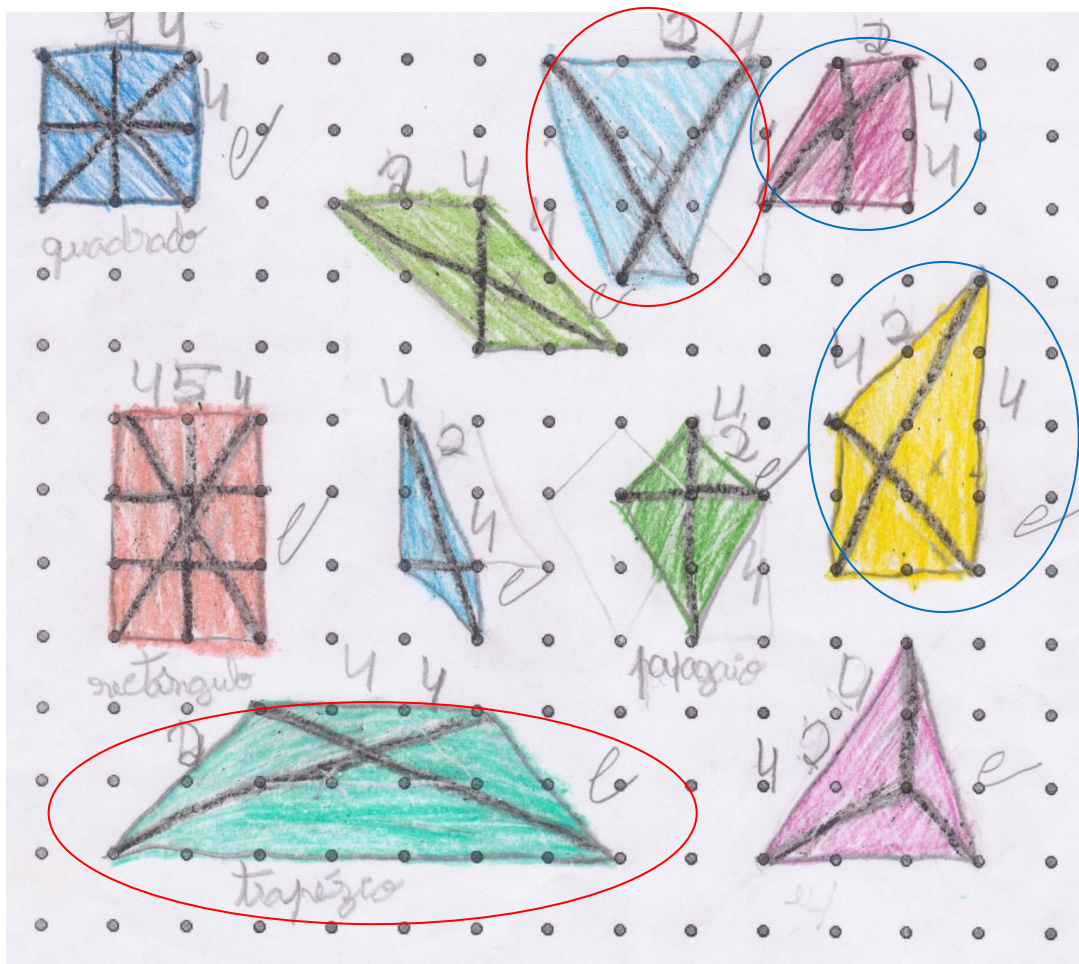


Figura 38 - Representações de quadriláteros, no geoplano, apresentadas pela Isa e Mauro.

Identificaram corretamente o quadrado, o retângulo, o trapézio isósceles (apenas o protótipo, mesmo tendo representado outros trapézios) e o papagaio. A comparação das figuras foi feita, maioritariamente, de forma visual pois rodavam e viravam o geoplano, tendo recorrido várias vezes à sobreposição dos geoplanos para, experimentalmente, verificarem se a figura era ou não a mesma.

Revelaram dificuldade em representar as diagonais pois em vez de desenharem segmentos de reta unindo os vértices opostos, como era pedido, desenharam segmentos de reta a unir todos os pontos opostos do geoplano (ver quadrado e retângulo da Figura 38).

Prof. – Toda a gente concorda que aquelas são as diagonais? [referia-me aos segmentos de reta representadas por um dos colegas, unindo os pontos médios dos lados iguais do trapézio isósceles].

Mauro – Não.

Prof. – Diz lá Mauro.

Mauro – [Apontou para as representadas pelo colega] Isto não é diagonal porque uma linha diagonal é unir aquela e a outra. [Referia-se ao segmento de reta que unia os pontos médios dos lados opostos].

Prof. – Vai lá mostrar Mauro.

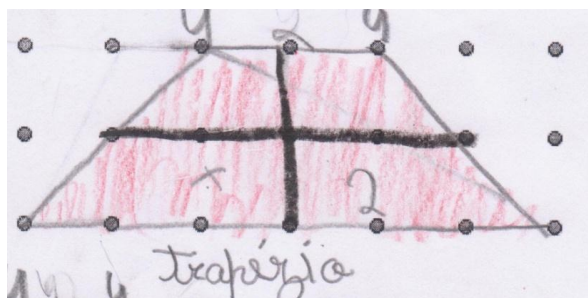


Figura 39 - Explicação do Mauro, à turma, da representação das diagonais do trapézio.

O par interpretou a definição de diagonal, indicada na folha da tarefa, de forma errada e foi de acordo com essa interpretação que representou as diagonais. É evidente que, nesta situação, a representação feita pelos alunos evidenciou a compreensão que tinham do conceito de diagonal, ou seja como representaram internamente a informação dada pela definição.

Salienta-se que a maioria dos alunos representou corretamente as diagonais dos quadriláteros e embora este par não o tenha feito, foi através da utilização de representações, em particular, representações de natureza visual, apresentadas pelos colegas, que Mauro e Isa acabaram por compreender o conceito de diagonal. Assim, a utilização de representações acabou por facilitar a compreensão deste conceito, tornando-o concreto e mais claro.

Por outro lado, o uso de representações realçou as características das figuras e fez emergir as suas propriedades, como evidenciado na comparação de figuras, na tarefa 4 (Figura 40).

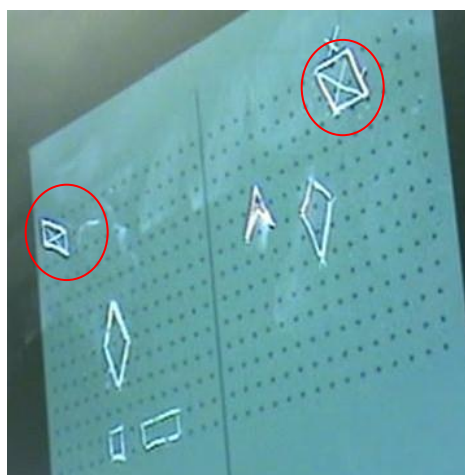


Figura 40 - Apresentação, à turma, de quadriláteros com lados iguais dois a dois.

Prof. – [Repetindo o enunciado por um aluno] Os ângulos são iguais 2 a 2. Mais?
 Mauro – Os lados são iguais 2 a 2. Este com este, este com este (apontando para os lados opostos dos desenhos).

Ainda nesta tarefa, a representação no geoplano possibilitou a visualização dos quadriláteros com lados iguais dois a dois, facilitando a análise dos componentes das formas. Salienta-se que os modelos representados foram majoritariamente os protótipos (Figura 41), o que indicia que os alunos representaram as figuras revelando a imagem mental que delas possuem.

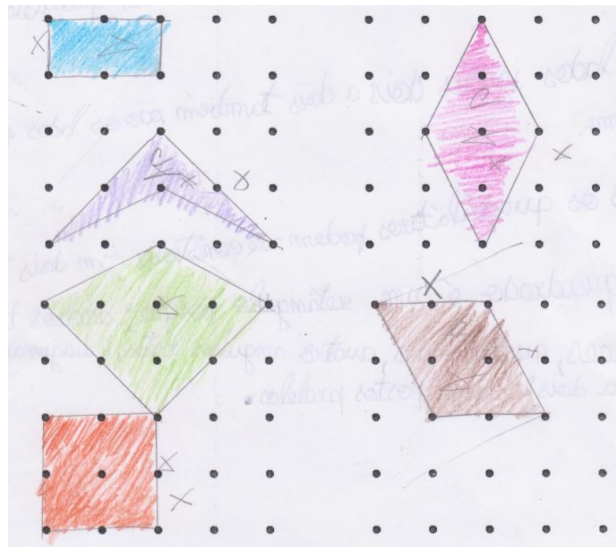


Figura 41 - Representações, no geoplano, de quadriláteros com lados iguais dois a dois, apresentadas pela Isa e Mauro.

Já na tarefa 12, com o recurso ao geogebra, o registo das propriedades feito pelo par indica forte influência da visualização das representações, nomeadamente as medidas (Figura 43).

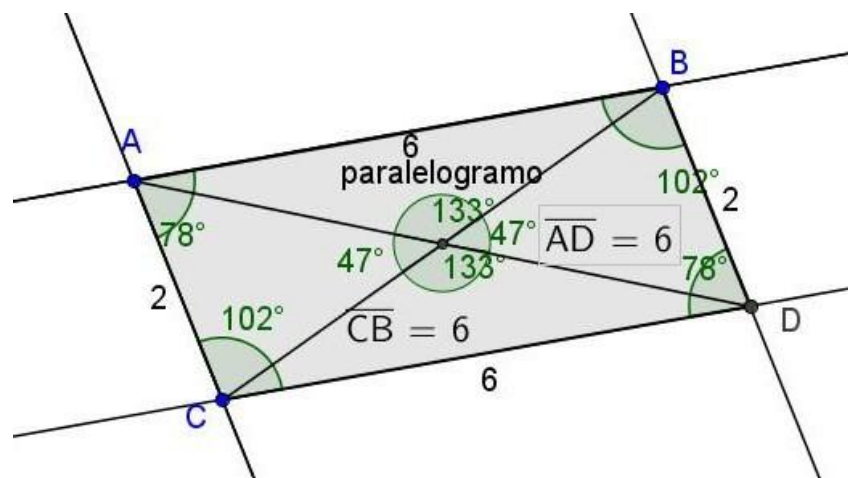


Figura 42 - Representação do paralelogramo realizada no GeoGebra, apresentada pela Isa e Mauro.

Regista as características do paralelogramo?			
Quadrilátero	Ângulos	Lados	Diagonais
paralelogramo	<ul style="list-style-type: none"> • Sem 2 ângulos agudos e 2 obtusos. • Se somarmos a medida de todos os ângulos vai dar um ângulo giro. 	<ul style="list-style-type: none"> • Sem 2 lados 2 a 2 paralelos. • Sem lados 2 a 2 opostos iguais. 	<ul style="list-style-type: none"> • As diagonais são oblíquas porque têm 2 ângulos obtusos e 2 agudos.
	<p>Ângulos</p> <ul style="list-style-type: none"> • Se somarmos 2 ângulos consecutivos vai dar 180 e 180 e metade de 1 ângulo giro. 	<p>diagonais</p> <ul style="list-style-type: none"> • A medida das diagonais mede as 2 o mesmo comprimento. 	

Figura 43 - Listagem das características do paralelogramo representado no GeoGebra, apresentada pela Isa e Mauro.

O par listou, embora de forma pouco clara, todas as características observadas no ecrã do computador, focou-se em propriedades não essenciais do paralelogramo representado como “a soma de todos os ângulos vai dar um ângulo giro ou a soma dos ângulos consecutivos é metade de um ângulo giro” e revelou dificuldade em lidar com essa informação. Salienta-se, ainda, que o registo da característica “A medida das diagonais mede as 2 o mesmo comprimento” baseada no que observam no ecrã do computador, deve-se ao facto de este grupo usar as ferramentas de medida com a propriedade de arredondamento *0 casas decimais*. Este par utilizou, várias vezes, esta propriedade de arredondamento por ter alguma dificuldade em lidar com números decimais. Esta e outras situações semelhantes foram clarificadas no momento de apresentação das conclusões à turma.

O recurso às características dinâmicas do *software* facilitou a visualização das propriedades que se mantêm e que se alteram, no entanto as conclusões não estão de acordo com o observado e registado pelos alunos, o que revela que não compreenderam as regularidades entre as representações (Figura 44).

➤ losango.

O que se manteve?	O que se alterou?
2 agudos e 2 obtusos. Todos os ângulos se vão somar vai dar 360.	Os ângulos das diagonais são perpendiculares

O que se manteve? losango

- Tem 2 lados 2 a 2 paralelos
- Lados 2 a 2 opostos iguais.

O que podes concluir?

Podemos concluir que o losango não tem nenhuma características como o paralelogramo.

Figura 44 – Registo de alterações e invariantes entre o losango e o paralelogramo representados no *GeoGebra*, apresentado pela Isa e Mauro.

Apesar de considerarem que se mantêm os dois ângulos obtusos e os dois agudos, a soma dos ângulos internos, o paralelismo dos lados e a igualdade dos lados opostos, acabam por concluir que “o losango não tem nenhuma característica como o paralelogramo”. Apresentam como alterações as diagonais que passaram, no losango, a ser perpendiculares e a referência à alteração dos ângulos parece basear-se na alteração da medida da sua amplitude.

Parece-me que esta inconsistência revelada pelo par poderá ser explicada porque a comparação de figuras através das propriedades invariantes, requer uma compreensão mais sólida dessas propriedades bem como um conhecimento mais preciso das propriedades essenciais das figuras que, segundo a teoria de van Hiele, ocorre no Nível 3, nível em que estes alunos não estão. Talvez tivessem conseguido melhores resultados se tivessem sido mais orientados na observação e análise daquilo que ia acontecendo no ecrã do computador. No entanto, é de referir que os alunos identificam como invariante os lados paralelos dois a dois, facto visualmente menos evidente na representação prototípica do losango. Este facto pode dever-se às condições exigidas na construção do paralelogramo e explícitas no plano de construção dado. Parece-me que o recurso ao movimento da figura possibilitou aos alunos a observação desta invariância, embora não a tenham usado para relacionar o losango com o paralelogramo.

As representações influenciam as ideias matemáticas que os alunos vão construindo, como aconteceu quando o par participou no registo das propriedades do paralelogramo.

Isa – O paralelogramo tem 2 ângulos opostos agudos e 2 obtusos.

Mauro – Podemos dizer, o paralelogramo não tem retos.

Mauro assumiu o paralelogramo como uma figura sem ângulos retos. Poder-se-á dizer que a observação do Mauro se deve ao facto de esta se basear na representação do paralelogramo (obliquângulo), considerado como uma figura particular e não representativa de uma classe. Esta ideia influenciará a aceitação ou não de uma classificação baseada na inclusão de classes, já que este conceito de paralelogramo exclui a inclusão dos retângulos nos paralelogramos.

Também na tarefa 17, classificação de quadriláteros, a classificação feita pelo par revela a não assunção das figuras como representativas de uma classe, pois acabaram por agrupar os quadriláteros incluindo os trapézios em grupos diferentes.

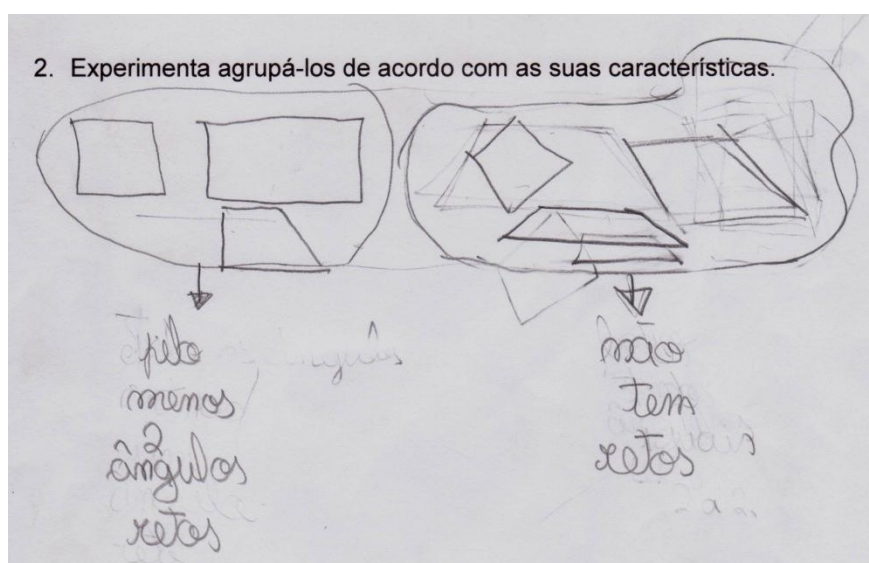


Figura 45 - Classificação dos quadriláteros: trapézio, paralelogramo, retângulo, losango, quadrado, apresentada pela Isa e Mauro.

Apesar de terem feito desenhos bastante imprecisos, os alunos classificaram os quadriláteros formando dois grupos: com pelo menos dois ângulos retos (quadrado, retângulo e trapézio retângulo) e sem ângulos retos (losango, trapézio isósceles e paralelogramo).

Esta foi uma tarefa difícil para este par que revelou dificuldades logo na compreensão do que se pretendia.

Mauro – Professora, a gente (hesitou), nós se fizermos a figura temos de fazer como fazíamos as descobertas no quadro não é?

Prof. – Não. Têm de pôr as características que são comuns.

Mauro – Com o trapézio?

Prof. – Sim. O trapézio tem algumas características comuns com outro qualquer?

Digam lá 2 que tenham características comuns.

Mauro e Isa – O quadrado e o retângulo.

Prof. – Quais são as características que são comuns?

Isa – Os ângulos são todos retos.

Mauro – As diagonais. (hesitou) Não as diagonais não.

Isa – Têm os lados iguais 2 a 2.

Prof. – Então põem o nome. Podem desenhá-los ou pôr só o nome e depois põem o que eles têm em comum. Perceberam? E depois aqui (referia-me à questão 2) veem os que têm características comuns e tentam agrupá-los.

Após o esclarecimento, Mauro e Isa abriram um documento do GeoGebra onde tinham representados todos os quadriláteros trabalhados. Mesmo assim, desenharam as figuras no papel e listaram as propriedades, mais com base nos cartazes afixados na sala de aula, do que nas representações do *GeoGebra*..

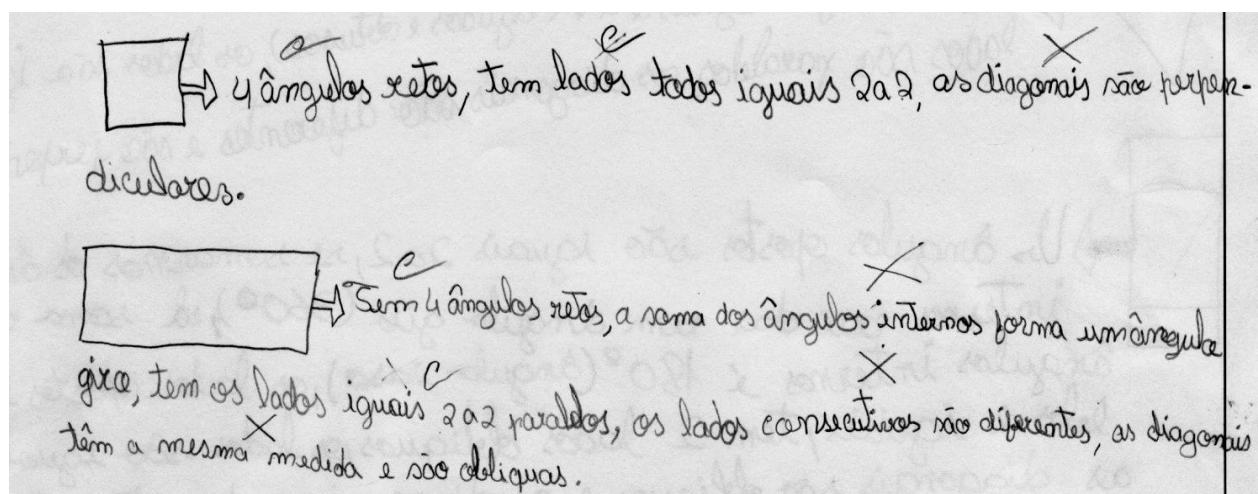


Figura 46 - Representação do quadrado e do retângulo e listagem das propriedades comuns, apresentada pela Isa e Mauro.

O par listou todas as propriedades das figuras e assinalou com (c) as propriedades comuns e com (X) as propriedades não comuns. Porém não atenderam a essas propriedades e quando foram agrupar tiveram muita dificuldade. A classificação inicial não incluía todos os quadriláteros trabalhados e o critério usado não excluía todos os não-exemplos.

Prof. – Já está? Agora vão agrupá-los.

Mauro – O quadrado e o retângulo.

Isa – O trapézio.

Mauro – Espera (pausa) o trapézio. Trapézio e paralelogramo.

Isa – Já está. Nós já agrupámos.

Formaram dois grupos e desenharam os quadriláteros: grupo 1 – quadrado e retângulo e registaram o critério, “tem os ângulos retos”; grupo 2 – paralelogramo e trapézio isósceles e registaram o critério, “tem ângulos iguais dois a dois”. É evidente a dificuldade que os alunos têm em definir critérios que excluam todos os não-exemplos e em compreender, baseado nas propriedades, a inclusão de uns grupos em outros, pois o grupo 1 está incluído no grupo 2. No entanto o par considerou como “ângulos iguais 2 a 2”, os que tinham dois ângulos agudos e dois obtusos.

Prof. – Então porque juntaram estes? [Referia-me ao quadrado e retângulo].

Mauro – Têm ângulos retos.

Prof. – E estes dois? [Referia-me ao paralelogramo e trapézio isósceles].

Mauro – Têm ângulos 2 a 2: 2 agudos e 2 obtusos.

Prof. – E este? [Referia-me ao trapézio não isósceles].

Mauro – Trapézio.

Prof. – E o trapézio não tem ângulos retos?

Isa – Sim, tem.

Prof. – Então, está bem este critério?

Isa – Não.

Mauro – Falta o losango. Ainda nem fizemos o losango! [Dirigindo-se à Isa] Não tem ângulos retos o trapézio!

Prof. – Ah! O losango vai p'ra li. Então e aqui o trapézio não tem ângulos retos?

Mauro – Não. Só tem 2 agudos e 2 obtusos, o trapézio.

Prof. – E então que figura é esta?

Mauro – É um trapézio.

Prof. – E vai p'ra onde?

Mauro – Vai p'ra este. (Indicando o grupo “tem os ângulos retos”). Este ainda não trabalhámos.

Prof. – Não é trapézio?

Isa – Mas é. Este é trapézio (referia-se ao isósceles) e este também é trapézio (referia-se ao não isósceles).

(Acabaram por desenhar o trapézio retângulo juntamente com o quadrado e o retângulo).

Prof. – Então e agora. Fica um trapézio aqui e outro ali (referia-me aos dois grupos). O que acham?

Mauro – [Dirigindo-se à Isa] Isto está tudo baralhado. Quiseste desenhar aquele... [Referia-se ao trapézio retângulo].

Desta verbalização do par sobressaem alguns aspetos que caracterizam as dificuldades reveladas por estes alunos, nomeadamente: focam a atenção no desenho feito e identificam as propriedades de acordo com essa representação; o desenho é para eles o objeto geométrico e cada representação é um objeto geométrico diferente; identificam as figuras mais pela aparência visual do que pelas suas propriedades...

Tiveram dificuldade em considerar o trapézio não isósceles como trapézio pois o mais representado foi o isósceles, revelando a importância dos protótipos nas representações dos alunos.

Depois de questionados sobre a primeira classificação que não incluía todos os quadriláteros trabalhados, o par fez várias tentativas tentando agrupá-los atendendo à igualdade dos lados.

Prof. – Então vocês começaram a agrupar com os ângulos e depois foram para os lados?

Mauro – Então, porque o trapézio não podemos por aqui! [Referia-se ao trapézio retângulo e ao grupo “tem ângulos iguais 2 a 2”, onde estava o trapézio isósceles].

Prof. – Então têm de arranjar um critério!

Mauro e Isa fizeram várias tentativas mas não conseguiram encontrar um critério de modo a incluir os trapézios no mesmo grupo. Parece-me que isto evidencia a dificuldade que os alunos têm em considerar uma figura como representante de uma classe. Consideram as figuras como objetos geométricos diferentes e identificam as propriedades focando-se em casos particulares, de acordo com a representação que têm da figura.

Mauro – Este não tem retos [referindo-se aos ângulos], este também não. Aqui não tem retos [apontava para um grupo], aqui tem retos [apontava para o outro grupo]. Não dá.

Isa – Então e se pusermos “pelo menos”?

Mauro – Se pusermos “pelo menos um ângulo reto” e aqui [referia-se ao outro grupo] não tem retos. Não dá.

Isa – Este aqui [aponta para o trapézio retângulo] tem 2 ângulos retos. Nós podemos por “pelo menos 2 ângulos retos”.

Mauro – E aqui [refere-se ao outro grupo] não tem. Então pomos “pelo menos 2 ângulos retos” e “não tem retos”.

Apesar de várias tentativas, o par não conseguiu definir um critério de modo a incluir os trapézios representados no mesmo grupo (Figura 45) no entanto os alunos revelaram algum avanço em termos de pensamento geométrico pois classificaram as figuras indo além da mera visualização. Conseguiram discernir as características de cada objeto construído, embora nas representações primassem os protótipos visuais.

A utilização das representações, em particular, representações de natureza visual, juntamente com o recurso ao movimento, facilitaram a compreensão do que permanece invariante, possibilitando estabelecer relações de semelhança entre o quadrado e o losango como se verificou na tarefa 15 (Figura 47).

Existem características semelhantes entre o quadrado e o losango? Sim
Quais?
 Lados iguais e diagonais perpendiculares.

Figura 47 - Registo das semelhanças entre o losango e o quadrado, apresentado pela Isa e Mauro.

O par constatou que apesar de haver alteração nas medidas dos componentes do losango, ele continua losango. Isto porque visualmente o desenho corresponde à representação mental que os alunos têm do losango.

Um aspeto que não deixa de ser curioso é o facto de o par ter continuado a listar propriedades desnecessárias quando registou as características do quadrado (Figura 48), no entanto, e ainda que de forma implícita definiram o quadrado apenas com as propriedades essenciais (Figura 49).

Regista as características do quadrado?			
Quadrilátero	Ângulos	Lados	Diagonais
quadrado	<ul style="list-style-type: none"> Os ângulos são todos retos. Se somarmos todos os ângulos a soma vai dar um ângulo giro (360°). 	<ul style="list-style-type: none"> Os lados medem o mesmo comprimento. O quadrado tem 2 lados opostos e 4 consecutivos. 	<ul style="list-style-type: none"> As diagonais são perpendiculares.

Figura 48 - Listagem das características do quadrado representado no GeoGebra, apresentada pela Isa e Mauro.

Tens a certeza que é um quadrado? Sim Porquê? Tem todos os ângulos iguais e os lados todos iguais

Figura 49 – Definição de quadrado, apresentada pela Isa e Mauro.

Parece-me que o facto de arrastarem a figura pré-construída e verificarem que os lados e os ângulos se mantêm todos iguais poderá ter contribuído para esta constatação dos alunos.

Ainda na discussão desta tarefa, Mauro revelou ter dificuldade em aceitar que uns atributos implicam outros, pois o facto de o quadrado ter todos os lados iguais não é para ele claro que sejam iguais dois a dois, o que contraria a solução da tarefa 4 onde o par incluiu o quadrado nos quadriláteros com “lados iguais dois a dois”. Talvez se possa explicar esta inconsistência pela influência das experiências e conhecimentos anteriores do aluno ou até mesmo pela imagem mental de figuras com lados iguais dois a dois, como o retângulo e não o quadrado.

Prof. – Tem ou não os lados iguais 2 a 2?

Mauro – O quadrado?

Prof. – Sim.

Mauro – Tem todos os lados iguais.

Prof. E são iguais 2 a 2 ou não?

Mauro – Não.

Outro – Professora, posso lá ir mostrar?

Prof. – Não, deixa lá ir o Mauro. Vai lá desenhar um quadrado.

[Mauro desenha o quadrado]

Prof. – Tem os lados todos iguais. Mostra lá.

Mauro - Tem. [Apontava para os lados] Este, este, este e este.

Prof. – E agora achas que não tem os lados iguais 2 a 2?

[Mauro estava hesitante]

Prof. – Desenha uma figura que tenha os lados iguais 2 a 2.

[Mauro desenhou o retângulo]

Prof. – Quais são os lados iguais?

Mauro – [Apontando para os lados opostos] este com este, este com este.

Prof. Então e no quadrado?

Mauro – [Apontando para os lados opostos] este com este, este com este.

Prof. – Este é ou não igual a este? E este é ou não igual a este? [Reforcei eu]

Mauro – Sim. Mas também é igual a estes.

Prof. – Mas a pergunta era... tem ou não os lados iguais 2 a 2?

Mauro – Tem!

Outro – Tem mas para além disso também tem os 4 lados iguais.

Também aqui o uso de representações e a comparação entre as representações feitas facilitou a compreensão de que uns atributos implicam outros, neste caso, ter quatro lados iguais implica ter iguais dois a dois, tornando o conhecimento mais concreto e claro.

Foi evidente, ao longo de toda a experiência de ensino, a influência das representações na identificação das propriedades das figuras, nomeadamente, as características visuais, a visualização das medidas e as características dinâmicas do *software*. O par revelou identificar as propriedades das figuras embora se tenha focado em atributos não essenciais o que, a meu ver, contribuiu para a dificuldade na inclusão de classes, revelada na tarefa 18. Escreveram o critério usado em cada grupo baseando-se apenas nos desenhos representados.

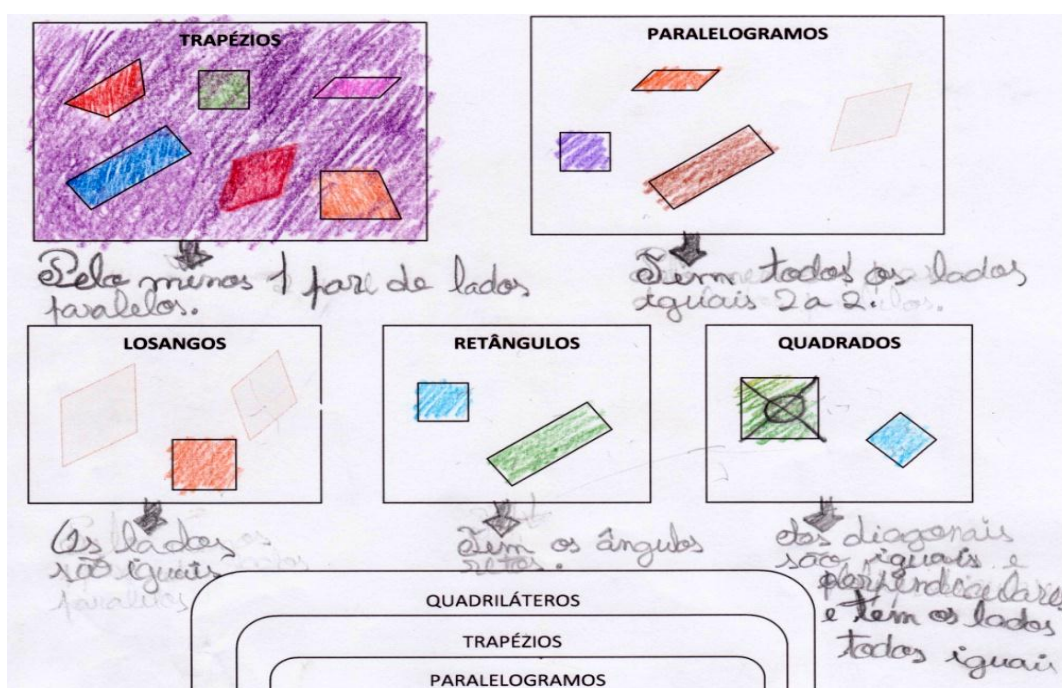


Figura 50 - Registo do critério de classificação usado em cada grupo, apresentado pela Isa e Mauro.

O critério indicado para o grupo dos paralelogramos não foi o esperado e não está correto, pois não exclui os não-exemplos. Um aspeto a salientar é o facto de considerarem o quadrado e o losango no critério “lados iguais 2 a 2” já que ao longo da experiência de ensino revelaram alguma inconsistência relativamente a esse facto pois, como referido anteriormente, na tarefa 4 incluíram o quadrado nesse critério e, contrariamente, na discussão da tarefa 14, um dos elementos do grupo referiu, explicitamente, que o quadrado não tinha os lados iguais dois a dois. Esta dificuldade foi ultrapassada, como já referido anteriormente, graças à discussão/reflexão no grupo turma e à análise das representações que facilitou a

compreensão de que uns atributos implicam outros. Este aspeto parece-me importante na compreensão de que o quadrado é um retângulo pois tem todas as suas características, ao contrário do retângulo que não é um quadrado pois não tem todas as suas características.



2. Concordas com esta classificação dos quadriláteros? Justifica a tua opinião.

Sim, porque o paralelogramo, o trapézio, o losango, o retângulo e o quadrado são iguais.
 O paralelogramo é o losango, quadrado e retângulo.
 O losango é o quadrado e o retângulo.
 Também o quadrado é o retângulo.

Figura 51- Justificação da concordância com uma classificação hierárquica, apresentada pela Isa e Mauro.

Os alunos não conseguiram justificar a classificação hierárquica, pois é inconsistente e a justificação apresentada não mostra qualquer compreensão da inclusão de classes.

5.3.3. Visualização e identificação de propriedades

O par representou as figuras, na sua maioria, com base na imagem mental que possui e forte influência dos modelos prototípicos. Inicialmente, nomeadamente nas tarefas executadas no geoplano, os alunos basearam a identificação de propriedades dos quadriláteros nas características visuais das representações feitas e nos conhecimentos que já tinham das formas.

A referência a propriedades tornou-se mais evidente a partir da tarefa 4 e foi nas tarefas desenvolvidas com recurso ao *GeoGebra* que a verbalização das propriedades foi mais evidente. Para isso terão contribuído as representações visuais, a visualização das medidas e as características dinâmicas do *software*, nomeadamente, o arrastamento.

Porém as representações e a identificação de propriedades baseadas na visualização, podem sugerir ideias erradas como aconteceu na resolução da tarefa 15, quando o par registou as características do losango.

Prof. – Vamos, agora que o Mauro e a Isa acabaram, registar as descobertas.

(...)

Mauro – Os ângulos agudos são metade dos ângulos obtusos.

Regista as características do losango?			
Quadrilátero	Ângulos	Lados	Diagonais
losango	<p>• Tem 2 ângulos agudos • 2 obtusos. • Os ângulos agudos são metade dos obtusos.</p>	<p>• Os lados medem todos o mesmo comprimento.</p>	<p>• As diagonais medem um comprimento diferente e são perpendiculares.</p>

Figura 52 - Registo das características do losango representado no GeoGebra, apresentado pela Isa e Mauro.

Mauro referia-se à medida da amplitude dos ângulos, baseando o registo na imagem visualizada no ecrã do computador. Não confirmaram com outras representações e assumiram o observado num único desenho como comum a todos os losangos, o que mais uma vez mostra a dificuldade que os alunos têm em considerar a figura como representativa de uma classe.

De igual modo e evidenciando a influência das representações visuais, referiu durante a discussão da tarefa 4, onde estava em causa o considerar ou não o quadrado nas figuras com lados iguais dois a dois.

Prof. – Podíamos por o quadrado junto com esses? (retângulo, paralelogramo boomerang e papagaio).

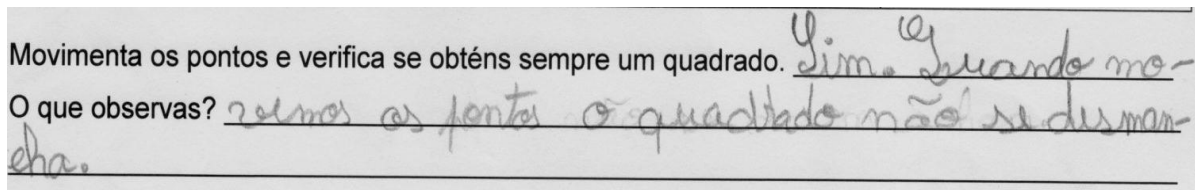
(...)

Prof. – Um quadrado é um retângulo? Porquê?

Mauro – Dois quadrados formam um retângulo.

É evidente que a relação que o Mauro estabelece entre o quadrado e o retângulo não tem por base qualquer compreensão ou relação entre as propriedades das figuras mas sim uma forte influência do visual, usando o aspeto visual do desenho para justificar a sua ideia, pois como acabou por referir se juntar dois quadrados forma um retângulo. O mesmo se verifica quando o grupo resolve a

tarefa 14 e depois de movimentar os pontos justifica que se obtém sempre um quadrado pois a figura não se desmancha.

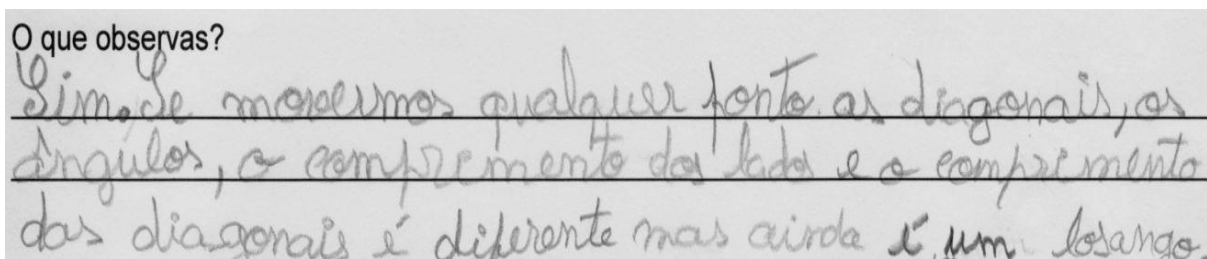


Movimenta os pontos e verifica se obténs sempre um quadrado. Sim. Quando mo-
O que observas? semos os pontos o quadrado não se desman-
cha.

Figura 53 - Registo da observação do quadrado após a movimentação dos pontos no GeoGebra, apresentado pela Isa e Mauro.

O par optou por se referir à figura na sua globalidade e não tanto à invariância das suas propriedades.

Também na tarefa 15, quando os alunos exploraram as características dinâmicas da aplicação arrastando, ampliando, reduzindo e rodando o losango, os alunos observaram a alteração das medidas mas referiram continuar um losango.



O que observas?
Sim. Se mexermos qualquer ponto as diagonais, os
ângulos, o comprimento das lados e o comprimento
das diagonais é diferente mas ainda é um losango.

Figura 54 - Registo da observação da representação dinâmica do losango, apresentado pela Isa e Mauro.

Apesar de obterem várias representações, a figura continua com a mesma aparência visual, o que terá levado os alunos a afirmar que continua a ser um losango.

5.3.4. Síntese

Após a análise pormenorizada do trabalho desenvolvido pelo Mauro e pela Isa, ao longo da experiência de ensino, apresenta-se uma síntese centrada no papel das representações e da visualização na identificação das propriedades dos quadriláteros.

O par executou todas as tarefas e conseguiu construir todos os quadriláteros a partir do plano de construção dado, embora solicitasse algum apoio na compreensão da informação escrita, nomeadamente, o que se pretendia com a

tarefa. No momento de discussão na turma, os alunos contribuíram para a reflexão conjunta sobre propriedades e conceitos que emergiram, embora não tanto com conhecimentos, mas sim manifestando as suas dúvidas e dificuldades. Revelaram grande motivação relativamente à execução das tarefas, muita persistência e, embora não tenham atingido o nível de conhecimentos dos outros pares do estudo, revelaram progressos em termos de clarificação de conceitos e aquisição de conhecimentos sobre as propriedades dos quadriláteros trabalhados.

Inicialmente, em particular nas tarefas executadas no geoplano, o par representou, identificou e estabeleceu relações de semelhança entre os quadriláteros com base na aparência global das figuras e forte influência da representação das figuras prototípicas. O recurso ao *GeoGebra*, especificamente, a construção dos quadriláteros a partir dos planos de construção dados, o uso das ferramentas de medição e do movimento, fez emergir as propriedades, inicialmente, limitadas às medidas observadas no ecrã do computador que, após os momentos de reflexão e análise coletiva, se tornaram mais claras e concretas. Os alunos construíram representações visuais das figuras pretendidas e basearam as suas conclusões nessas representações, ainda que inconsistentes em algumas tarefas.

Usaram a representação visual das figuras para identificar as propriedades e o recurso ao movimento da figura facilitou a observação do que se mantém invariante permitindo-lhes, relacionar as características da figura com os conceitos geométricos ao mesmo tempo que facilitou a compreensão desses mesmos conceitos e uma representação mental mais correta.

Nas tarefas iniciais, o par revelou bastante fragilidade na identificação das propriedades facto que melhorou ao longo da experiência de ensino. Mesmo assim, no final da experiência de ensino continuavam a analisar as figuras identificando as suas propriedades mas, ainda, com forte incidência em atributos não essenciais.

Revelaram, no entanto, avanço no pensamento geométrico pois identificam e comparam as figuras não apenas pela aparência global mas recorrendo a propriedades e usando linguagem mais precisa.

É de salientar que a imagem mental que os alunos têm das formas influenciou as representações, bem como a identificação de propriedades notando-se, tanto ao nível da verbalização como dos registos escritos, a enunciação de propriedades para o desenho representado e não para a figura representativa da classe.

Penso que o par demonstrou dificuldade em compreender as relações entre os quadriláteros estudados e em aceitar a inclusão de classes, pois foi evidente que cada figura representada é entendida como um objeto geométrico específico. No

entanto, também ficou claro que a experiência de ensino possibilitou, a este par, um avanço expressivo a nível de pensamento geométrico para o qual contribuíram, em grande escala, as discussões/ reflexões no grupo turma e a utilização da geometria dinâmica.

Em suma, os alunos construíram diferentes representações dos quadriláteros, analisaram as suas componentes, descobriram semelhanças e diferenças entre as formas recorrendo às suas propriedades e não apenas à aparência visual. Através do desenho, observação, medição, representação de modelos e visualização dinâmica, os alunos descobriram, experimentalmente, as propriedades e construíram ou corrigiram representações mentais dos quadriláteros trabalhados, desenvolvendo uma compreensão de nível mais avançado.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES, RECOMENDAÇÕES E LIMITAÇÕES DO ESTUDO

Neste capítulo são apresentadas as principais conclusões do estudo, de modo a responder às questões delineadas inicialmente. Para cada questão é feita uma síntese dos aspetos mais relevantes identificados nos três estudos de caso, focando os contributos do geoplano e do AGD, *GeoGebra*, e a apreciação feita pelos pares, relativamente à sua utilização. É feita referência às limitações deste trabalho e são lançadas algumas ideias, decorrentes dos resultados deste estudo, para futuras investigações.

6.1. Síntese do estudo

Este estudo realizado no âmbito da educação matemática, mais especificamente na área da geometria, tinha como objetivo central compreender quais os contributos do AGD (*GeoGebra*) e do material manipulável (geoplano) na compreensão das propriedades e relações entre os quadriláteros. De acordo com este objetivo definiram-se, no início do trabalho, as seguintes questões: Qual o papel das representações na identificação das propriedades dos quadriláteros? Que influência tem a visualização na identificação das propriedades dos quadriláteros? Quais os contributos da utilização do AGD (*GeoGebra*) e do geoplano na compreensão das propriedades e relações entre os quadriláteros?

Atendendo à natureza do estudo utilizou-se uma metodologia de carácter qualitativo e o formato de investigação a utilizar foi o *estudo de caso múltiplo*, optando por três casos com diferentes níveis de aproveitamento na área da matemática.

Procurou-se responder às questões atendendo aos pressupostos teóricos definidos e ao cruzar dos resultados obtidos através dos instrumentos de recolha utilizados. Esta triangulação baseou-se, essencialmente, na observação da realização das tarefas, nas entrevistas ocorridas no contexto da observação participante e, com maior relevância, na análise da resolução das tarefas e discussão dos resultados no grupo turma.

A análise dos dados assumiu um carácter descritivo e interpretativo, tendo por base o objetivo e as questões formuladas, de modo a melhor compreender o problema em estudo.

6.2. Conclusões do estudo

6.2.1. Representações e identificação das propriedades dos quadriláteros

Em geometria, as representações são usadas, por um lado, para retirar ideias que conduzem ao conceito geométrico, por outro, são entendidas como meios para representar um conceito geométrico formal. A utilização de representações, neste estudo, abordou estas duas perspetivas, pois os alunos executaram, a partir de instruções, representações para ilustrar ideias ou conceitos (representações externas), mas também construíram quadriláteros para analisar as propriedades de modo a construírem e clarificarem conceitos geométricos (representações internas).

Os alunos representaram um número significativo de quadriláteros, mas revelaram conhecer um número limitado de nomes de formas notando-se, ainda, a forte influência das imagens prototípicas, nomeadamente do quadrado, retângulo, trapézio e paralelogramo.

A utilização de representações evidenciou a compreensão que os alunos têm dos conceitos e facilitou a sua compreensão, tornando-os concretos e mais claros, como evidenciado no conceito de diagonal revelado pelo par Mauro e Isa. Também foi notória a influência das representações na identificação das propriedades dos quadriláteros, pois que a ideia de trapézio como uma figura com os dois lados não paralelos iguais esteve presente nas representações de todos os pares. Esta e outras ideias como a revelada pelo grupo bom “se os lados são paralelos, são iguais 2 a 2”, foram clarificadas e desconstruídas graças à diversidade de representações para o mesmo conceito e à discussão no grupo turma, indo de encontro ao verificado por Wong (2011).

Nas tarefas realizadas com o geoplano houve maior influência das representações internas, já que os alunos representaram as figuras conforme as imagens mentais que possuíam (protótipos). Todos os grupos evidenciaram possuir a imagem de trapézio como uma figura com os dois lados não paralelos iguais (trapézio isósceles). Nas tarefas realizadas no *GeoGebra*, esse facto foi menos evidente, embora também tenha ocorrido, pois todos os grupos arrastaram o vértice do paralelogramo de modo a representarem o paralelogramo obliquângulo, indo de encontro ao verificado por Jones (1998 citado por Candeias, 2005), que realizou um estudo onde concluiu que “os alunos tendem a modificar a figura até ficar com a forma pretendida, em vez de fazerem a respetiva construção” (p. 22) ou Vinner

(1991) que constatou que a imagem do paralelogramo, no conceito dos alunos, é uma figura em que nem todos os ângulos ou lados podem ser iguais.

Em relação à identificação das propriedades dos quadriláteros, os pares começaram por listar todas as características observadas no ecrã do computador, com especial incidência nas medidas dos lados, ângulos e diagonais, facto também verificado por Jones (1998 citado por Candeias, 2005) no seu trabalho de investigação. Referiram algumas características já incluídas noutras, como por exemplo “todos os lados iguais” e “lados iguais 2 a 2” e outras desnecessárias, tais como “a soma dos ângulos internos vai dar um ângulo giro” ou “a soma de um ângulo agudo com um obtuso é de 180°”. Estas ocorrências revelam a dificuldade dos alunos em distinguir entre os atributos essenciais e não essenciais de uma figura, podendo explicar-se pelo quadro teórico pois como referido em Fujita e Jones (2007) tal aprendizagem requer dedução lógica e interações adequadas entre conceitos e imagens, sugerindo o Nível 3 de van Hiele, o que leva à confirmação da suposição inicial de que estes alunos ainda não atingiram este nível de pensamento geométrico.

Essa listagem de todas as características visuais que os alunos associam a uma forma, descritas em termos de conceitos geométricos formais é característica do Nível 2 (Descrição/Análise) de van Hiele ou Nível 2 (Raciocínio Analítico-componencial), subnível: raciocínio baseado na propriedade formal suficiente de acordo com a redefinição apresentada por Battista (2007).

Os resultados do estudo também mostram que, os alunos necessitaram da presença do desenho das figuras para a identificação das suas propriedades, tendo centrado essa identificação no desenho particular, mais evidenciado nas tarefas iniciais, por todos os pares. Foi o que aconteceu no caso do trapézio, ao registarem “ângulos iguais 2 a 2”, pois referiam-se apenas ao trapézio representado, o isósceles, ou no caso do paralelogramo “tem 2 lados oblíquos”, ou, ainda, “o retângulo não tem os lados todos iguais”. Estas evidências são consonantes com a ideia de Clements e Battista (1992) “Os alunos costumam atribuir características de um desenho ao objeto geométrico que representa” (p. 448) ou mesmo Fishbein (1994) que defende que certos assuntos podem ligar uma representação particular a um dado conceito. O desenho é para eles o objeto geométrico e cada representação é um objeto geométrico diferente indo de encontro ao proposto por Fishbein (1994) que refere que para o aluno nem sempre é de todo claro que o desenho é apenas uma instância física de representação do objeto.

Dos resultados sobressaem, também, as dificuldades que os alunos sentiram em considerar uma figura como representante de uma classe e em distinguir entre atributos essenciais e não essenciais de uma figura, embora o par bom, à medida que avançou na experiência de ensino, tenha mostrado uma tendência diferente, pois a referência a medidas e a características desnecessárias foi substituída pela referência a atributos essenciais da figura e passou a verificar se as propriedades de uma representação particular se confirmavam para outras representações do mesmo conceito, avançando no entendimento da figura como representativa da classe.

De acordo com o referido anteriormente, as representações facilitaram a identificação das propriedades dos quadriláteros e a compreensão das relações entre eles, no entanto, as inferências dos pares foram diferentes. O par bom e o par médio mostraram compreender uma classificação hierárquica e fizeram uma classificação revelando inclusão de classes, apesar de não a terem feito quando lhes foi solicitado, o que confirma os resultados de outros estudos (Clements e Battista, 1992), que referem que embora as crianças mais novas sejam capazes de compreender inclusões de classes têm dificuldade na sua aceitação. Esta compreensão poderá ser explicada pelo quadro teórico que, de acordo com vários autores (Leung 2008; Jones, 2000), o uso de *softwares* interativos de geometria pode facilitar a compreensão de uma classificação hierárquica dos quadriláteros, mesmo nos níveis inferiores de van Hiele.

No entanto e, apesar de todos os pares estabelecerem relações entre o quadrado e o retângulo, só os pares bom e médio revelaram a compreensão do quadrado como um caso especial do retângulo, porque perceberam que os atributos essenciais do retângulo estão incluídos nos atributos essenciais do quadrado, porém hesitaram quando referiram as relações inclusivas entre eles, pois têm dificuldade em dizer se o quadrado é retângulo ou o retângulo é quadrado. Tal facto revela, por um lado, a dificuldade em compreender a relação assimétrica entre o quadrado e o retângulo (pois o quadrado é um retângulo mas o retângulo não é um quadrado) e, por outro, a influência da imagem mental de retângulo como uma figura em que os lados consecutivos têm comprimento diferente.

Em relação ao quadrado como um caso particular do losango e à semelhança do que aconteceu relativamente à relação quadrado/retângulo, a utilização da geometria dinâmica facilitou a visualização das propriedades que se mantêm invariantes (Laborde, 1993), contribuindo para a compreensão de que os atributos

essenciais do losango então incluídos nos atributos essenciais do quadrado e, como tal, a compreensão do quadrado como um caso especial do losango.

À exceção do par fraco, os outros pares revelaram compreender e aceitar uma classificação hierárquica, mas optaram por não a fazer. Apesar de estabelecerem relações inclusivas, os resultados deste estudo apontam para a resistência dos pares à ideia de que um quadrado é um losango ou que um quadrado é um retângulo. Esta atitude pode ser explicada pela necessidade, revelada por todos os pares, em definir uma propriedade que tornasse cada uma das figuras única, considerando a figura com uma identidade própria e não como representativa de uma classe; pela dificuldade em compreender a assimetria das relações entre os quadriláteros, por exemplo, o quadrado é retângulo mas o retângulo não é quadrado e pela imagem mental que os alunos têm das figuras, por exemplo o trapézio como tendo os dois lados não paralelos iguais, o paralelogramo como uma figura sem ângulos retos, o retângulo com os lados com diferentes comprimentos. Também podemos associar a esta explicação, o facto de estes alunos ainda não terem atingido um nível de raciocínio geométrico característico do Nível 3 (dedução informal) de van Hiele ou Nível 3 (Raciocínio relacional inferencial baseado na propriedade) de acordo com a redefinição apresentada por Battista (2007), onde os alunos interrelacionam explicitamente e fazem inferências sobre as propriedades geométricas de figuras num sistema de classificação hierárquica.

O grupo mais fraco teve dificuldade em compreender a inclusão de classes e consequentemente uma classificação hierárquica. Esta diferença no desempenho dos pares explica-se pelo facto deste grupo se ter focado em propriedades não essenciais tal como referem Clements e Sarama (2007), por se basear mais no que vê do que no que faz de acordo com Jones (2000) e por identificar as figuras mais pela aparência visual do que pelas suas propriedades (facto também evidenciado na comparação do quadrado e do retângulo), pois embora tenha reconhecido propriedades comuns às figuras, não atendeu a essas propriedades quando foi agrupar. Assim pode afirmar-se que este grupo se encontra num nível de desenvolvimento do seu pensamento geométrico inferior aos restantes.

As representações foram também importantes pois evidenciaram a compreensão que os alunos tinham dos conceitos e ao mesmo tempo facilitaram a compreensão dos mesmos e a sua correta representação mental, tal como sugerido por Goldin e Shteingold (2001). Com base nas representações, quer estáticas quer dinâmicas, formularam e testaram conjecturas sobre propriedades e relações geométricas, enriquecendo a aprendizagem matemática.

Em suma, estes alunos usaram as representações para comunicar ideias geométricas mas também para construir e corrigir conceitos, consideraram as representações como objetos geométricos diferentes e identificaram as propriedades focando-se em casos particulares, de acordo com a imagem que têm da figura.

6.2.2. Influência da visualização na identificação de propriedades

Inicialmente, a comparação das figuras foi feita, maioritariamente, de forma visual pois os alunos rodaram e viraram o geoplano de modo a facilitar a comparação de figuras representadas em diferentes orientações, tendo recorrido frequentemente à sobreposição. Em alguns casos, recorreram também à imagem protótipo e à referência, ainda que reduzida, a propriedades, nomeadamente, ângulos retos e igualdade dos lados. Estes resultados vão de encontro ao quadro teórico pois Clements e Battista (1992) sugerem que as crianças diferenciam as formas através da combinação de protótipos visuais (exemplares de figuras) e algum conhecimento das suas propriedades.

As representações que não conseguiram identificar foram as difíceis de discriminar visualmente ou as que não correspondiam aos protótipos, resultado que pode ser discutido à luz da teoria (Duval, 1994, 1998, Fischbein, 1993, Matos, 1992) já que estes autores questionam o tratamento de objetos geométricos baseado em desenhos particulares, os ditos desenhos prototípicos, pois faz com que os alunos não reconheçam desenhos desses mesmos objetos quando diferem desses modelos prototípicos. Para além disso, a posição relativa do desenho ou o seu traçado particular, passam a fazer parte das características do objeto, quer no aspeto conceptual, quer no aspeto figural, estabelecendo desequilíbrios na formação do conceito.

À medida que se avançou na experiência de ensino o conhecimento das propriedades aumentou, a referência a propriedades passou a evidenciar-se, no entanto a perceção visual baseada nas representações esteve sempre presente, indo de encontro à literatura (Mariotti, 1995; Ponte e Serrazina, 2000) que refere a impossibilidade de introduzir um conceito geométrico sem dar exemplos, isto é, desenhar figuras ou construir modelos.

Assim, os resultados demonstram que a imagem mental que os alunos tinham das formas influenciou a identificação de propriedades notando-se, tanto ao nível da verbalização como dos registos escritos, a enunciação de propriedades para os desenhos representados e não para a figura como representativa da classe, facto que corrobora o indicado por Dreyfus (1991) quando refere a falha na distinção entre

uma figura geométrica e o desenho que representa essa figura como uma dificuldade provocada pela influência da visualização. Este facto foi, ainda, evidenciado quando os alunos revelaram a necessidade de encontrar uma propriedade que tornasse a figura única.

Também quando construíram as figuras no *GeoGebra* a importância da imagem mental e a sua interação com o conhecimento de conceitos e propriedades esteve evidente, já que todos os grupos recorreram à malha quadriculada ou arrastaram a construção, de modo a obterem a representação das figuras pretendidas: o trapézio com dois lados não paralelos iguais, o paralelogramo sem ângulos retos, o retângulo com dois lados paralelos mais compridos, o losango sem ângulos retos e o quadrado com ângulos retos e lados iguais. Estas evidências vão de encontro ao defendido por Rieber (1994) que aconselha a que sejamos cautelosos, pois a visualização é um processo cognitivo fortemente influenciado pelo conhecimento anterior, podendo levar a conclusões falsas.

Como tem vindo a ser demonstrado, a visualização teve forte influência na identificação das propriedades dos quadriláteros, no entanto, a utilização do AGD melhorou o desempenho dos alunos uma vez que o rodar, o reduzir, o ampliar e o arrastar dos elementos das figuras, permitido pelas características dinâmicas do *software*, possibilitaram uma mais fácil visualização das propriedades e das relações geométricas, ao mesmo tempo que contribuíram para a correta representação mental dos conceitos ou correção/clarificação de conceitos já construídos, facto evidenciado pelos resultados do estudo.

Os resultados revelaram, também, que os alunos se focam mais no que veem do que no que fazem, pois o registo de propriedades baseou-se mais nas medidas observadas no ecrã do computador do que nas condições dadas para executarem a construção, tal como se verificou nos registos da tarefa 12 quando analisaram o que se manteve ou o que se alterou, após o arrastamento dos pontos da construção feita. O par médio comparou o quadrado com o losango referindo como alteração “a medida dos ângulos”, ou “o comprimento das diagonais é diferente”. Também na tarefa 15, o par fraco registou “os ângulos agudos são metade dos obtusos”, ou “os lados medem o mesmo comprimento” ou ainda “se movermos qualquer ponto, as diagonais, os ângulos, o comprimento dos lados e o comprimento das diagonais é diferente mas ainda é um losango”.

Apesar dos resultados indicarem esta evidência, o par bom foi-a contrariando, ao longo da experiência de ensino, quando referiu como propriedade dos paralelogramos, “lados opostos são paralelos 2 a 2”, já que era condição dada no

plano de construção, ou quando começaram a confirmar as conjecturas por terem constatado que “nem tudo o que parece é”, ou ainda por sentirem necessidade de justificar determinada característica visual observada no ecrã do computador, justificada pela verbalização do par “p’ra ter a certeza é preciso experimentar”.

Pode dizer-se que com o auxílio das tarefas de construção física no geoplano, com o recurso ao AGD, *GeoGebra*, nomeadamente pela possibilidade de visualizar uma mesma construção de diferentes perspetivas, juntamente com a reflexão surgida por meio da discussão no grupo turma, os alunos avançaram no raciocínio geométrico tendo ido além do nível visual. Desenvolveram uma compreensão mais avançada de quadriláteros, pois identificaram os seus atributos e reconheceram relações entre eles, construindo e aperfeiçoando conceitos geométricos.

6.2.3. Contributos do geoplano na compreensão das propriedades e relações entre os quadriláteros

O geoplano foi usado na resolução das primeiras cinco tarefas e ficou ao dispor dos alunos para a resolução da tarefa 17 “Classificar quadriláteros”. Pretendia-se que, com o recurso ao geoplano, os alunos representassem quadriláteros de acordo com as condições dadas de modo a emergirem as suas propriedades.

Os alunos representaram diferentes figuras e analisaram as diferenças e semelhanças. Dos resultados do estudo sobressai como vantagem deste recurso uma manipulação mais “palpável” das figuras. Permitiu a representação das imagens mentais das figuras, tendo-se revelado especialmente útil, nas tarefas iniciais, uma vez que a referência a propriedades era muito reduzida, estimulando a comparação de figuras através da aparência global. Puderam comparar visualmente as figuras e recorrer à sobreposição para confirmar a igualdade ou não entre figuras, servindo de suporte visual e experimental. Permitiu trabalhar os atributos irrelevantes das figuras como o tamanho, a orientação e a invariância da forma com base nestes atributos. Contribuiu para a representação mental das figuras, o desenvolvimento do vocabulário geométrico e a identificação de propriedades comuns aos quadriláteros. Possibilitou discussões ricas ao nível das características dos quadriláteros, embora os resultados tenham evidenciado a grande influência do aspeto visual do desenho na comparação das figuras e na identificação de propriedades.

6.2.4. Contributos do *GeoGebra* na compreensão das propriedades e relações entre os quadriláteros

O AGD, *GeoGebra*, foi usado na resolução das tarefas 6 a 17. Englobou o desenho de quadriláteros e também a sua construção, a partir de um plano de construção dado, com o objetivo de descobrir as propriedades. Analisaram, ainda, figuras previamente construídas com o objetivo de, através da experimentação, estabelecer relações entre os quadriláteros investigando as relações ou medidas que se mantêm invariantes.

Este recurso permitiu, aos alunos, a construção fácil de figuras, o cálculo rápido de medidas e a exploração das características dinâmicas deste *software*. Os alunos movimentaram os desenhos totalmente ou em partes, contribuindo para a descoberta das propriedades que se mantêm e/ou se alteram, aspeto que sem o recurso ao *software* não poderia ser trabalhado em sala de aula. Gravaram e reproduziram sequências de ações que os ajudou a formar imagens dinâmicas.

Assim, a utilização do *software* permitiu a experimentação, exploração e análise dos invariantes, ajudando os alunos a reconhecer propriedades e a estabelecer conexões entre as propriedades dos paralelogramos, indo de encontro ao defendido por Laborde (1993) “o movimento e a modificação dos desenhos possibilitam uma mais fácil visualização das propriedades e das relações geométricas”.

Dos resultados deste estudo ressalta a vantagem da representação precisa e variada das figuras geométricas que, associada às características dinâmicas deste *software*, fornecendo diferentes representações através do rodar, reduzir, ampliar e arrastar os elementos das figuras, facilitou a identificação de propriedades dos quadriláteros, possibilitou estabelecer relações entre eles e contribuiu para a correta representação mental dos conceitos (Abrantes et al., 1999, Ponte e Serrazina 2000) ou correção/clarificação de conceitos já construídos (Wong, 2011). De acordo com Laborde (2008), um AGD, por exemplo, o *GeoGebra*, incorpora conhecimento matemático que influencia o modo como os alunos constroem os conceitos. Foi o caso do conceito de paralelismo, mais evidente no grupo bom, associado a retas e não a segmentos de reta.

Os resultados evidenciaram que o facto de poderem manipular dinamicamente as figuras e as suas relações permanecerem invariantes ao arrastamento, juntamente com a visualização imediata das alterações produzidas,

facilitou a descoberta das propriedades dos paralelogramos e das relações entre eles.

Para além das vantagens do AGD mencionadas, os resultados do estudo deixam transparecer alguns condicionalismos que, embora não tenham influenciado significativamente o desempenho dos alunos, exigiram uma atenção e atitude da professora no sentido de os minorar, a saber: as propriedades dinâmicas do *software* fascinaram os alunos, nomeadamente, o “rodar”, o “ampliar”, o “reduzir”, o “arrastar”. Este fascínio provocou, a princípio, algum retardamento na procura de invariantes, pois focavam-se no “movimento” que acontecia no ecrã do computador, esquecendo o propósito da tarefa, tal como referido em Villiers (2007). Esta limitação foi ultrapassada pela orientação dada pela professora; pela exigência do registo do raciocínio no guião da tarefa que implicou discussão interpares e pela elaboração dos cartazes coletivos. Estes dados confirmam o defendido por Sheffielf e Cruikshank (2000) que referem que as crianças organizam os conceitos, as propriedades e as características das formas com que trabalham, durante o processo comunicativo, escrito ou oral, pois a escrita individual ou cooperativa de ideias geométricas é uma atividade essencial porque, enquanto se descrevem raciocínios, desenvolvem-se conceitos e competências geométricas que ficam registados, podendo ser partilhados a qualquer momento.

Os resultados do estudo salientam que os alunos se focaram nas medidas registadas no ecrã do computador em detrimento das propriedades conceptuais das representações, indo de encontro ao verificado em Jones (1998 citado por Candeias, 2005). Para minorar esta situação contribuiu a apresentação/discussão dos resultados no grupo turma que permitiu o confronto de ideias e a reflexão sobre o que viam acontecer no ecrã do computador.

6.2.5. Geoplano versus GeoGebra

Dos resultados pode destacar-se que tanto o geoplano como o *GeoGebra* foram uma mais-valia na concretização da experiência de ensino deste estudo. Tanto um como outro possuem vantagens e limitações, mas podem ser usados de maneira que um complemente o outro, podendo dessa forma contribuir, favoravelmente, para a aprendizagem da geometria.

Da apreciação que os alunos fizeram, destaca-se o facto de três deles referirem a preferência pelo trabalho com o geoplano, considerando este manipulável mais concreto, como evidenciam as razões apresentadas: “gostei mais do geoplano porque somos nós próprios a fazer e no *GeoGebra* não somos nós, é o

computador”; “éramos nós que experimentávamos com as nossas próprias mãos”; “tinha de ser eu a experimentar, fazer as figuras”.

Em relação ao *GeoGebra*, também três alunos preferiram este recurso, apresentando razões de aprendizagem para tal preferência, conforme os registos de opinião: “aprendi mais coisas sobre as retas e sobre as características dos quadriláteros”; “aprendi a medir ângulos, diagonais e a construir um polígono”.

Em suma, pode dizer-se que com o auxílio das tarefas de construção física no geoplano, com o recurso ao AGD, *GeoGebra*, nomeadamente a possibilidade de visualizar uma mesma construção de diversas formas, juntamente com a reflexão surgida por meio da discussão no grupo turma, os alunos avançaram no raciocínio geométrico tendo ido além do nível visual.

Estou certa, no entanto, que após esta experiência de ensino, estes alunos começaram a visualizar os quadriláteros com outro olhar, percebendo que as figuras geométricas são formadas por elementos que estão relacionados por propriedades matemáticas, ao mesmo tempo que conseguiram descrever essas propriedades. Desenvolveram uma compreensão mais avançada destas figuras, pois identificaram os seus atributos, reconheceram relações entre eles e construíram e aperfeiçoaram conceitos geométricos.

6.2.6. O papel de professora e investigadora

A escolha do tema a investigar foi um desafio e assumir o papel de professora e investigadora não o foi menos. Foram opções conscientes, pois para além de um estudo que fosse um contributo para melhorar a qualidade das aprendizagens dos alunos, pretendia refletir sobre a minha prática pedagógica, conhecer melhor as minhas falhas e, assim, haver reflexão crítica, para um enriquecimento pessoal e profissional.

Uma das primeiras dificuldades enfrentadas foi a inexperiência neste duplo papel: professora e investigadora. Pretendia ensinar, observar, tomar notas, registar o máximo de ocorrências... mas o papel de investigadora passou para segundo plano pois, tal como já referido, a investigação decorreu no desenrolar normal das aulas. Isto exigiu grande esforço para atender às solicitações dos alunos, dado que todos estiveram envolvidos na experiência de ensino. Outra das dificuldades foi a gravação vídeo das aulas, já que a câmara esteve fixa não captando imagens mais pormenorizadas e discussões nos grupos que enriqueceriam os dados, ou até mesmo, interrompendo a gravação (falta de bateria, necessidade de substituição do CD...) antes de terminar a tarefa. A grande interação dos alunos com o computador,

durante a realização das tarefas, dificultou-me o acesso a essas interações, bem como o acompanhamento, mais apertado, dos grupos em estudo. Tal situação foi minorada com as apresentações/discussões no grupo turma onde os resultados foram apresentados e discutidos, as dúvidas esclarecidas e a reflexão sobre as propriedades dos quadriláteros aprofundada, constituindo-se, este tempo, um momento privilegiado da tomada de notas.

O receio de não saber responder a alguma questão relacionada quer com o *hardware*, quer com o *software* esteve sempre presente, pois apesar de serem recursos habitualmente usados por estes alunos, não deixam de constituir verdadeiros desafios. Foi a natureza das tarefas, exigindo um professor moderador e orientador, que criou espaço para, juntamente com os alunos mais desenvolvidos no uso da aplicação, resolver dificuldades relacionadas com estes recursos e ultrapassar os efeitos do receio sentido.

Foi um trabalho extenuante mas valeu pelo envolvimento dos alunos, pelas suas “conquistas”, pelo enriquecimento das suas aprendizagens e pelo contributo para o meu desenvolvimento profissional e pessoal.

A satisfação pela realização deste estudo, vem, sobretudo, pelos resultados obtidos pelos alunos e, a nível pessoal e profissional, pela aprendizagem feita, quer a nível de aprofundamento de conhecimentos de geometria, quer a nível da exploração do AGD. Ser simultaneamente professora e investigadora foi um enorme desafio que se traduziu numa importante prática de reflexão e aprendizagem, bem como numa experiência marcante na carreira profissional.

6.3. Recomendações e limitações do estudo

Neste estudo privilegiou-se uma abordagem qualitativa de natureza interpretativa de forma a obter informação rica em pormenores, para dar resposta às questões de investigação. Optou-se por estudar três pares de alunos de uma turma de 4.º ano e uma vez que toda a turma esteve envolvida na experiência de ensino, é imprescindível ter em consideração a relação desta parte (pares) com o todo (turma). Assim, os resultados deste estudo estão diretamente associados à turma que nele participou e, em particular, aos três pares de alunos que constituíram os estudos de caso.

Atendendo a estes pressupostos, os resultados obtidos não podem ser generalizados a outros contextos podendo, no entanto, constituir um contributo importante para que se possa analisar a mesma temática noutros contextos.

Considera-se interessante acompanhar o percurso e aquisição de conhecimentos dos alunos envolvidos neste estudo, nomeadamente ao nível da construção de quadriláteros sem plano de construção prévio, no sentido de avaliar, com mais profundidade, os verdadeiros benefícios destas ferramentas.

A aplicação deste estudo em mais do que uma turma do mesmo ano de escolaridade é outro aspeto importante, pois permitiria a comparação de resultados e perceber se as conclusões deste estudo podem ser generalizadas ou mais fortemente fundamentadas.

Estender este estudo, com outras tarefas e a outros anos de escolaridade seria, também, interessante.

Relativamente às limitações são de natureza diversificada. A primeira delas refere-se ao elevado número de alunos na turma, dado que a investigação decorreu no desenrolar normal das aulas e todos os alunos estiveram envolvidos na experiência de ensino. Este facto impossibilitou que a investigadora respondesse, prontamente, às solicitações de todos os alunos de modo a estimular a sua curiosidade e a incentivar o aprofundamento das investigações. Impediu, ainda, uma maior reflexão sobre o que estava a acontecer, de modo a conseguirem interpretar a informação extraída do *feedback* dado pelo computador. Associada a esta situação esteve também a dificuldade da investigadora em tirar notas mais rigorosas e diversificadas que pudessem esclarecer e enriquecer os dados recolhidos.

O equipamento utilizado, especificamente o computador *magalhães*, também contribuiu para estas contrariedades. O esquecimento do computador, a fraca autonomia, a aplicação que não abria, o computador que bloqueava... enfim o suficiente para obrigar a encontrar soluções alternativas que impuseram alterações na dinâmica inicialmente planificada. Porém, as situações foram contornadas pela existência de um número de *magalhães* superior ao necessário para a execução das tarefas, pela utilização de portáteis pessoais de alguns alunos e, algumas vezes, pela reorganização dos grupos de trabalho não envolvidos no estudo.

Outra limitação foi o elevado número de tarefas num curto espaço de tempo, levando os alunos e a professora a desejar outro tipo de tarefas, com outros materiais e outros temas.

Por último, considera-se também uma limitação o facto deste estudo se fixar, apenas, numa turma, mais concretamente em três pares de alunos, orientados por uma professora e num contexto específico, não se podendo fazer quaisquer generalizações a outros alunos e a contextos diferentes.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abrantes, P. (1999). *Investigações em geometria na sala de aula*. In E. Veloso, H. Fonseca, J. Ponte e P. Abrantes (Orgs.), *Ensino da geometria ao virar do milénio* (pp. 51–62). Lisboa: Departamento de Educação da Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa.
- Abrantes, P., Serrazina, L., Oliveira, I., Loureiro, C e Nunes, F. (1999). *A matemática na educação básica*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica.
- Albuquerque, C., Veloso, E., Rocha, I., Santos, L., Serrazina, L., & Nápoles, S. (2008). *A matemática na formação inicial de professores*. Lisboa: APM.
- Alsina, C. (1999). Painel “Geometria no currículo de Matemática”. In E. Veloso, H. Fonseca, J. P. Ponte, & P. Abrantes (Orgs.), *Ensino da geometria no virar do milénio* (p. 65). Lisboa: Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Departamento de Educação.
- Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 215-241.
- Assude, T., Gelis J. M, (2002), La dialectique ancien-nouveau dans l'integration de Cabri-géomètre à l'école primaire - *Educational Studies in Mathematics* 50: 259287.
- Battista, M. T. (2001). Shape Makers: A computer environment that engenders students construction of geometric ideas and reasoning. *Computers in the Schools*, 17(1), 105-120.
- Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 2, Cap. 19, pp. 843-891). Charlotte, NC: Information Age & National Council of Teachers of Mathematics.
- Bellemain, F. (2001). Geometria dinâmica: Diferentes implementações, papel da manipulação direta e usos na aprendizagem. In *Simpósio Nacional de Geometria Descritiva e Desenho Técnico*, pp. 1314–1329.
- Bishop, A. J., & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson, M. Otte (Eds.) *Perspectives on mathematics education*. Dordrecht: Reidel.
- Bishop, A., Olsen, S., Dormolen, J. (2000). *Mathematical knowledge: its growth through thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Bogdan, R., Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação. Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Editora.
- Bongiovanni, V. (2006), Concepção de um módulo de geometria para uma formação continuada de professores de matemática do ensino médio. Consultado em 27/09/2012, de http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Relato_de_Experiencia/Tra.

- Borba, M.C., Penteadó. M. G. (2003), *Informática e Educação Matemática*, 3.^a ed. Belo Horizonte, MG. Autêntica.
- Bravo, F. (2005). *Impacto da utilização de um ambiente de geometria dinâmica no ensino-aprendizagem da geometria por alunos do 4º ano do 1º ciclo do ensino básico*. Tese de Mestrado (não publicada). Universidade do Minho.
- Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction*. Cambridge: Belknap Press of Harvard University Press.
- Candeias, N. J. (2005). *Aprendizagem em Ambientes de Geometria Dinâmica*. Tese de mestrado. Coleção Teses. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Carmo, H., Ferreira, M. M. (1998). *Metodologia da Investigação: Guia para Autoaprendizagem*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Casa, T. M., & Gavin, M. K. (2009). Advancing student understanding of quadrilaterals through the use of mathematical vocabulary. T. Craine, & R. Rubenstein (Eds.). *Understanding Geometry for a Changing World, National Council of Teachers of Mathematics 71st Yearbook*. (pp. 205-219). Reston, Va; NCTM.
- César, M. (1997). Investigação, interacções entre pares e matemática. *Actas do VIII Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 7-33). Lisboa: APM.
- Clements, D. H. (2004). Geometric and spatial thinking in early childhood education. In D. H. Clements, & J. Sarama (Eds.), *Engaging young children in mathematics* (pp.267-298). Mahwah, NJ: Lawrence Elbaum Associates.
- Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420–464). New York, NY: MacMillan.
- Clements, D. H., Battista, M. T., Sarama, J., & Swaminathan, S. (1996). Development of turn and turn measurement concepts in a computer-based instructional unit. *Educational Studies in Mathematics*, 30, 313-337.
- Clements, D.H. & McMillen, S. (1996). Rethinking "Concrete" Manipulatives. *Teaching Children Mathematics*. 2(5), 270-279.
- Clements, D. H., Battista, M. T., Sarama, J., Swaminathan, S., & McMillen, S. (1997). Students' development of length measurement concepts in a Logo-based unit on geometric paths. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(1), 70-95.
- Clements, D., Swaminathan, S., Hannibal, M., & Sarama, J. (1999). Young children's concept of shape. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(2), 192-212.
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2000). Young children's ideas about geometric shapes. *Teaching Children Mathematics*, 6(8), 482–487.

- Clements, D. H., & Sarama, J. (2007). Early childhood mathematics learning. In F. Lester, *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 489-517). Charlotte, NC: Information Age and National Council of Teachers of Mathematics.
- Coelho, M. (1995). *O Cabri-Géomètre na resolução de problemas – estudo sobre processos evidenciados e construção de conhecimento por alunos do 6º ano de escolaridade*. Aveiro: Universidade de Aveiro (Dissertação de Mestrado).
- Dufour-Janvier, B., Bednarz, N., & Belanger, M. (1987). Pedagogical considerations concerning the problem of representation. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 109-122). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Davis, J. P., & Hersh, R. (1995). *A experiência matemática*. Lisboa: Gradiva.
- Dindyal, J. (2003). *Algebraic Thinking in Geometry at High School Level: Students' Use of Variables and Unknowns*, (p. 183/190). National Institute of Education, Singapore. Consultado em 14/04/2012 de <http://www.merga.net.au/documents/RP202004.pdf>
- Dreyfus, T. (1991). On status of visual reasoning in Mathematics and Mathematics Education. In *Proceedings of 15th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 1, pp. 33-48. Genova: University de Genova.
- Dreyfus, T., & Schwarz, B. (2000). *Intelligent learning environments: the case of geometry*. Jean-Marie Laborde (Ed.). Berlin: Springer.
- Duval, R. (1994), Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique: *Repres IREM*, 17.
- Duval, R. (1998), Signe et objet (I): trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentation et objet, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 6, 139–163.
- Duval, R. (2000). Basic issues for research in mathematics education. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 55-69), Hiroshima: Nishiki.
- Edwards, M., & Harper, S. (2010). Paint bucket polygons. *Teaching Children Mathematics*, 16(7) pp. 420-428.
- Fernandes, E. (1997). O trabalho cooperativo num contexto de sala de aula, *Análise Psicológica* (1997), 4 (XV): 563-572.
- Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts, *Educational Studies in Mathematics*, 24/2, 139-162.
- Fishbein, E. (1994). *Intuition in science and mathematics*. Dordrecht: D. Reidel Publishing.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: D. Reidel.

- Fujita, T., & Jones, K. (2007). Learners' understanding of the definitions and hierarchical classification of quadrilaterals: towards a theoretical framing, *Research in Mathematics Education*, 9(1&2), 3-20. ISSN: 1479-4802; ISBN: 0953849880.
- Geddes, D. et al. (2001). *Geometria dos 2º e 3º Ciclos. Normas para o currículo e a avaliação em matemática em matemática escolar, Coleção de Adendas, Anos de Escolaridade 5-8.* (Tradução portuguesa de Geometry in the middle grades, 1992). Lisboa: APM.
- Goetz, J., & LeCompte, M. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa.* Madrid: Morata.
- Goldenberg, P., Cuoco, A., & Mark. J. (1998). A Role for Geometry in General Education. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing, learning environments for developing understanding of geometry and space*, (pp. 3-44). Londres: Lawrence Erlbaum.
- Goldenberg, P. (2000). Thinking (and teaching) about technology in Math classrooms. The k-12 Mathematics Curriculum Center. Issues in Mathematics Education. Consultado em 24/07/ 2011, de http://www2.edc.org/iss_tech.pdf
- Goldin, G., & Shteingold, N. (2001). Systems of Representations and Development on Mathematical Concepts, in A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds), *Roles of Representation in School Mathematics*. (pp. 1-23), Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.
- Goldin, G., & Kaput, J. (2006). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics, In Steffe, L. & Neshier, P. (Eds.) (1996). *Theories of mathematical learning.* (pp. 397-431) Mahwah (New Jersey): LEA.
- Goldin, G. (2008). Perspectives on representation in mathematical learning and problem solving, in Lyn D. English et al. (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 176- 199), NY. Routledge.
- Gomes, A., & Ralha, E. (2005). O conceito de ângulo: experiências e reflexões sobre o conhecimento matemático de (futuros) professores do 1.º ciclo. *Quadrante*, 14(1), 109-131.
- Gravemeijer, K., Lehrer, R., van Oers, B., & Verschaffel, L. (2003). *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education.* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- Gravina, M. A. (1996). Geometria dinâmica uma nova abordagem para o aprendizado da geometria. In *Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação*, (pp.1-13), Belo Horizonte, Brasil, nov 1996.
- Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. Plenary paper. In A. Gutierrez & L. Puig (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (vol. 1, pp. 3-19. Valencia, Espanha: PME.

- Gutiérrez, A., Jaime, A., & Fortuny, J. M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(3), 237-251.
- Hannibal, M. (1999). Young Children's Developing Understanding of Geometric Shapes, *Teaching Children mathematics*, 5 (6), 353-357).
- Hannibal, M. A. Z., & Clements, D. H. (2000). Young children's understanding of basic geometric shapes. National Science Foundation Grant No. ESI-8954644.
- Healy, L., Hoelzl, R., Hoyles, C., & Noss, R. (1994). Messing up. *Micromath*, 10 (1), 14-17.
- Heinze, A. (2002). "... because a square is not a rectangle" – Student's knowledge of simple geometrical concepts when starting to learn proof. In A. D. Cockburn, & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th PME International Conference* (Vol. 3, pp.81-88). Norwich, UK: PME.
- Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. In P. Neshier, & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 70-95). Cambridge: Cambridge University Press.
- Hershkowitz, R., Parzysz, B., & Dormolen, J. (1996). Space and shape. In A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 161 – 204). Londres: Kluwer Academic Publishers.
- Hoyles, C., & Jones, K. (1998). Proof in dynamic geometry contexts. In C. Mammana and V. Villani (eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*. Dordrecht: Kluwer.
- Janvier, C. (1987). Representation and Understanding: The Notion of Function as an Example. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 67-71). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
- Jones, K. (1997). Children learning to specify geometrical relationships using a dynamic geometry package. In E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol.3 (pp. 121-128). Lahti, Finlandia: University of Helsinki.
- Jones, K. (1999). Students interpretations of a dynamic geometry environment. in I. Schwank (ed.), *European Research in Mathematics Education*, Osnabrück : Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik. pp.249-262.
- Jones, K. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning: Students' interpretations when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1/2), 55-85.

- Jones, K. (2001). Learning Geometrical Concepts using Dynamic Geometry Software. In: Kay Irwin (Ed), *Mathematics Education Research: A catalyst for change*. Auckland: University of Auckland. pp 50-58.
- Jones, K. (2002). Issues in the Teaching and Learning of Geometry. In L. Haggarty (Ed), *Aspects of Teaching Secondary Mathematics: perspectives on practice*, (p. 121-139). London: Routledge Falmer. Consultado em 26/02/2012 de http://eprints.soton.ac.uk/13588/1/Jones_teach_learn_geometry_2002.pdf
- Jones, K., & Mooney, C. (2003). Making space for geometry in primary mathematics. In I. Thompson (Ed.), *Enhancing primary mathematics teaching and learning* (pp. 3-15). London: Open University Press.
- Laborde, C., & Laborde, J. M. (1992). Problem solving in geometry: From microworlds to intelligent computer environments. In J. Ponte, J. F. Matos, J. M. Matos, & D. Fernandes (Eds.), *Mathematical problem solving and new information technologies: Research in contexts of practice* (pp. 177-192). Berlin, Alemanha: Springer – Verlag.
- Laborde, C. (1993). The Computer as part of the Learning Environment; the case of geometry, in C. Keitel and K. Ruthven (eds), *Learning from Computers: Mathematics Education and Technology*. Berlin: Springer-Verlag.
- Laborde, C. (1998). *Actes du Colloque premier franco-allemand de Didactique des mathématiques et de l'informatique*.
- Laborde, C. (2004). *New technologies as a means of observing students' conceptions and making them develop: the specific case of dynamic geometry* - IAM (Computer Science and Mathematics Learning), ICME 10, 2004 -22 TSG .
- Laborde, C. (2008). *Technology as an instrument for teachers*, IAM (Computer Science and Mathematics Learning), ICME11.
- Lehrer, R., Jenkins, M., & Osana, H. (1998). Longitudinal study of children's reasoning about space and geometry. In R. Lehrer, & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing of Geometry and space* (pp. 137-167). New York: Lawrence Erlbaum Associates.
- Lessard-Hébert, Goyette & Boutin, (1990). *Investigação Qualitativa: Fundamentos e Práticas*, Instituto Piaget.
- Leung, I. (2008). Psychological aspects of inclusive and transitive properties among quadrilaterals by deductive reasoning with the aid of SmartBoard. *ZDM*, 40, 1007-1021.
- Lorenzato, S. (1995). Por que não Ensinar Geometria? In *A Educação Matemática em Revista*, 1995, 3-13.
- Loureiro, C. (2008). *Classificação matemática – três níveis de desenvolvimento*. Estudo não publicado, Escola Superior de Educação, Lisboa, Portugal.

- Mariotti, A. (1995). Images and concepts in geometrical reasoning. In R. Sutherland e J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in Mathematics Education*, (p. 97-116). Nova Iorque: Springer.
- Mariotti, A., & Pesci, A. (1994). Visualization in teaching-learning situations. In *Proceedings of 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 1, p. 20.
- Markopoulos, C., & Potari, D. (1996). Thinking about geometrical shapes in a computer-based environment. In L. Puig e A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3, pp. 337-344. Valencia: Universitat de Valencia.
- Mason, J. (1995). Mathematical Screen Metaphors. Em Rosamund Sutherland e John Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in Mathematics Education*, (pp. 291-308). Nova Iorque: Springer.
- Matos, J. M. (1992). Acomodando a teoria de van Hiele a modelos cognitivos idealizados. *Quadrante*, 1, 93-112.
- Matos, J. M. (1999). *Cognitive models for the concept of angle*. Doctoral dissertation, University of Georgia, Athens, Georgia, USA.
- Matos, J. M., & Serrazina, L. (1996). *Didáctica da matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Matsuo, N. (1993). Student's understanding of geometrical figures in transition from Van Hiele level 1 to 2. In I. Hirabayashi, N. Nohda, K. Shigematsu, & F.-L. Lin (Eds.), *Proceedings of the 17th PME International Conference* (Vol. 2, pp. 113-120). Tsukuba, Ibaraki, Japão: PME.
- Ministério da Educação (2007). *Programa de matemática do ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação. Direção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular.
- Meira, L. (2003). Mathematical representations as systems of notations-in-use. In K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. van Oers, & L. Verschaffel (Eds.), *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education* (pp. 87–104). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- Melo, L., J. M. Ferreira, & J. D. A. Pontes (2000). Um software educacional para o descobrimento de propriedades matemáticas. In *Anais do Congresso da Sociedade Brasileira de Computação*, pp. 1476–1487.
- Méndez, Y. D., Estéves, M. L., & Muñoz del sol, L. (2003). Um medio computacional concebido para la enseñanza de la geometria del espacio en el nível médio. *Xixim. Revista Electrónica de Didáctica de las Matemáticas*, 3, 97-104. Consultado em 13/04/2011, de <http://www.uaq.mx/matematicas/redm/articulos.html?1103>

- Mitchelmore, M. (1992). Children's concept of perpendiculars. In W. Geeslin, & K. Graham (Eds.), *Proceedings of the 16th PME International Conference* (Vol. 2, pp. 120-127). Durham, H: PME.
- National Council of Supervisors of Mathematics (1990). A Matemática para o século XXI (L. Fonseca, & P. Palhares, Trad.). *Educação e Matemática*, 14, 23-25.
- National Council of Teachers of Mathematics (2008). *Princípios e normas para a matemática escolar* (2.^a edição) (APM, Trad.). Lisboa: APM (Obra original publicada em 2000).
- Oliveira M., Maçada A., Golgini V. (2009). *Forças e Fraquezas na Aplicação do Estudo de Caso na Área de Sistemas de Informação*, Revista de Gestão USP, v. 16, n.º1, p.33-49.
- Pegg, J., & Davey, G. (1989). Clarifying level descriptors for children's understanding of some basic 2-D geometric shapes. *Mathematics Education Research Journal* 1 (1): 16- 27.
- Piaget, J., & Inhelder, B. (1967). *The Child's Conception of Space*. New York: Norton.
- Pimm, D. (1995). *Symbols and meanings in school mathematics*. New York: Routledge.
- Ponte, J. P. (1994). O estudo de caso na investigação em educação matemática. *Quadrante*, 3(1), 3-18.
- Ponte, J. P. (1997). *As novas tecnologias e a educação*. Lisboa: Texto Editora.
- Ponte, J. P., Serrazina, M. L. (2000). *Didáctica da Matemática do 1.º Ciclo*, Universidade Aberta.
- Ponte, J. P. (2004). Investigar a nossa própria prática: Uma estratégia de formação e de construção do conhecimento profissional. In E. Castro & E. Torre (Eds.), *Investigación en educación matemática* (pp. 61-84). Coruña: Universidad da Coruña. Republicado em 2008, *PNA - Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 2(4), 153-180.
- Ponte, J. P., Oliveira, P., Candeias, N. (2009). Triângulos e Quadriláteros, Materiais de apoio ao professor, com tarefas para o 3.º ciclo – 7.º ano, DGIDC, Junho 2009.
- Ponte, J. P. (2010). Explorar e Investigar em Matemática: Uma Actividade Fundamental no Ensino e na Aprendizagem, *Union, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 13-30.
- Presmeg, N. (1986). Visualization in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 6(3), 42-46.
- Kaput, J., Blanton, M., & Moreno-Armella, L. (2008). Algebra from a symbolization point of view. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.) *Algebra in the early grades* (pp. 19–56). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

- King, J. (1999). Teaching geometry in a time of change. In E. Veloso, H. Fonseca, J. P. Ponte e P. Abrantes (Orgs), *Ensino da geometria ao virar do milénio* (pp. 7-16). Lisboa: Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa: Departamento de Educação.
- Rieber, L. (1994). *Visualization as an aid to problem-solving: examples from history*. EDRS, ED 373773.
- Sarama, J., Clements, D., H. & Vukelic, E. B. (1996). The role of a computer manipulative in fostering specific psychological/mathematical processes. In E. Jakubowski, D. Watkins, & H. Biske (Eds.). *Proceedings of the eighteenth annual meeting of the North American chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 567-572). Columbus, OH: ERIC Clearing-house for Science, Mathematics, and Environmental Education.
- Schoenfeld, A. (1989). Ideas in the air: Speculations on small group learning, environmental and cultural influences on cognition, and epistemology. *International Journal of Research in Mathematics Education*, 13 (1), 71-88.
- Senechal, M. (1991). Visualization and visual thinking. Em J. Malkevitch (Ed.), *Geometry's Future* (pp. 15-21). USA: COMAP.
- Sheffield, L. J., & Cruikshank D. E. (2000). *Teaching and Learning Elementary and Middle School Mathematics*, New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Smith, E. E. (1995). Concepts and categorization. In D. N. Osherson, & L. R. Gleitman (Eds.), *An invitation to cognitive science, Vol.3, Thinking*. Cambridge, MA: MIT Press.
- Stylianou, D. A. (2010). Teachers' Conceptions of Representation in the Context of Middle School Mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13(4), 325-343.
- Van de Walle, J. (2004). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally* (5th ed.). Boston, MA.: Pearson Education, Inc.
- Van Hiele-Geldof, D. (1984). The didactics of geometry in the lowest class of secondary school. Em D. Fuys, D. Geddes e R. Tischler (Eds.), *English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele* (pp.1-214). Brooklyn, New York: Brooklyn College, School of Education.
- Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight. A theory of mathematics education*. Orlando, Florida: Academic Press.
- Van Hiele, P. M. (1999). Developing geometric thinking through activities that begin with play. *Teaching Children Mathematics*, 5(6), 310-316.
- Veloso, E. (2006). Sobre as definições (I). Notas sobre o Ensino da Geometria. *Educação e Matemática*, 90, 7-9.
- Villiers, M. (1994). The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 11-18.

- Villiers, M. (1996). *The future of secondary school geometry*. Consultado em 19/09/2010, de <http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/future.pdf>
- Villiers, M. (2007). Some pitfalls of dynamic geometry software, *From Teaching & Learning Mathematics*, 46-52.
- Villiers, M. (2010). Some reflections on the Van Hiele Theory, tradução de Celina A. A. P. Abar. *Educação Matemática Pesquisa, São Paulo*, v.12, n.3, pp.400-43.
- Villiers, M., & Njisane, R. M. (1987). The development of geometric thinking among black high school pupils in Kwazulu (Republic of South Africa). In J. C. Bergeron, N. Herscovics, & C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the Eleventh International Conference Psychology of Mathematics Education PME-XI* (Vol. 3, pp. 117-123). Montréal: Université de Montréal.
- Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall, (Ed). *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer.
- Vinner, S., & Hershkowitz, R. (1983). On concept formation in geometry. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 15, 20-25.
- Wong, W.-K., Yin, S.-K., Yang, H.-H., & Cheng, Y.-H. (2011). Using Computer-Assisted Multiple Representations in Learning Geometry Proofs. *Educational Technology & Society*, 14 (3), 43–54.
- Yerushalmy, M., & Chazan, D. (1990). Overcoming visual obstacles with the aid of the supposer. *Educational Studies in Mathematics*. 21, 199-219.
- Yin, R. (1994). *Estudo de caso. Planejamento e Métodos*. (2.^a ed.) Porto Alegre: Bookman.
- Zimmermann, W., & Cunningham, S. (1991). Editors Introduction: What is Mathematical Visualization? In W. Zimmermann e S. Cunningham (Eds.). *Visualization in Teaching and Learning Mathematics* (pp 1-7). Washington: MAA.

Docente: Maria da Graça Bruno Pereira - Prof. QA – grupo 110 – 1.º Ciclo

Escola:

Exma. Sr.ª Dr.ª Sílvia Lemos
Diretora do Agrupamento de Escolas de Alapraia

Assunto: Pedido de autorização

Venho, por este meio, solicitar a V. Ex.ª autorização para realizar, na turma do 3.º/4.º C, um estudo que se enquadra no tema matemático “Geometria”, no tópico “Figuras no plano e sólidos geométricos”. Este estudo integra o 2.º ano do mestrado em Educação Matemática na Educação Pré -Escolar e nos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico, iniciado no ano letivo anterior.

Com os melhores cumprimentos

Bicesse, 12 de Setembro de 2011

A Professora

(Maria da Graça Bruno Pereira)



Agrupamento de Escolas de Alapraia

Código 170690

Exmo.(a) Sr.(a) Encarregado(a) de Educação

Por me encontrar a desenvolver um trabalho de Mestrado na área da Didática da Matemática, pretendo recolher dados no âmbito do tema “Geometria – Figuras no plano e sólidos geométricos”. Para esta investigação e já com consentimento da diretora do Agrupamento, irei propor um conjunto de atividades, nesta área, necessitando registar em áudio e vídeo as aulas em que essas atividades serão realizadas e entrevistar alguns alunos. Informo, desde já, que será preservada a identidade de todos os intervenientes e que, no final do estudo, os registos efetuados serão destruídos.

Para mais esclarecimentos estarei ao seu dispor.

Agradeço desde já a sua atenção e solicito a sua colaboração.

Com os melhores cumprimentos.

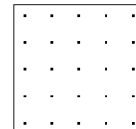
A Professora

.....

Tomei conhecimento de que o meu Educando irá participar na realização de um conjunto de atividades e entrevistas no âmbito da área de Matemática. Assim, e nos termos supracitados, autorizo / não autorizo o seu registo em áudio e vídeo. (Riscar o que não interessa)

O Enc. Educação: _____
do aluno: _____

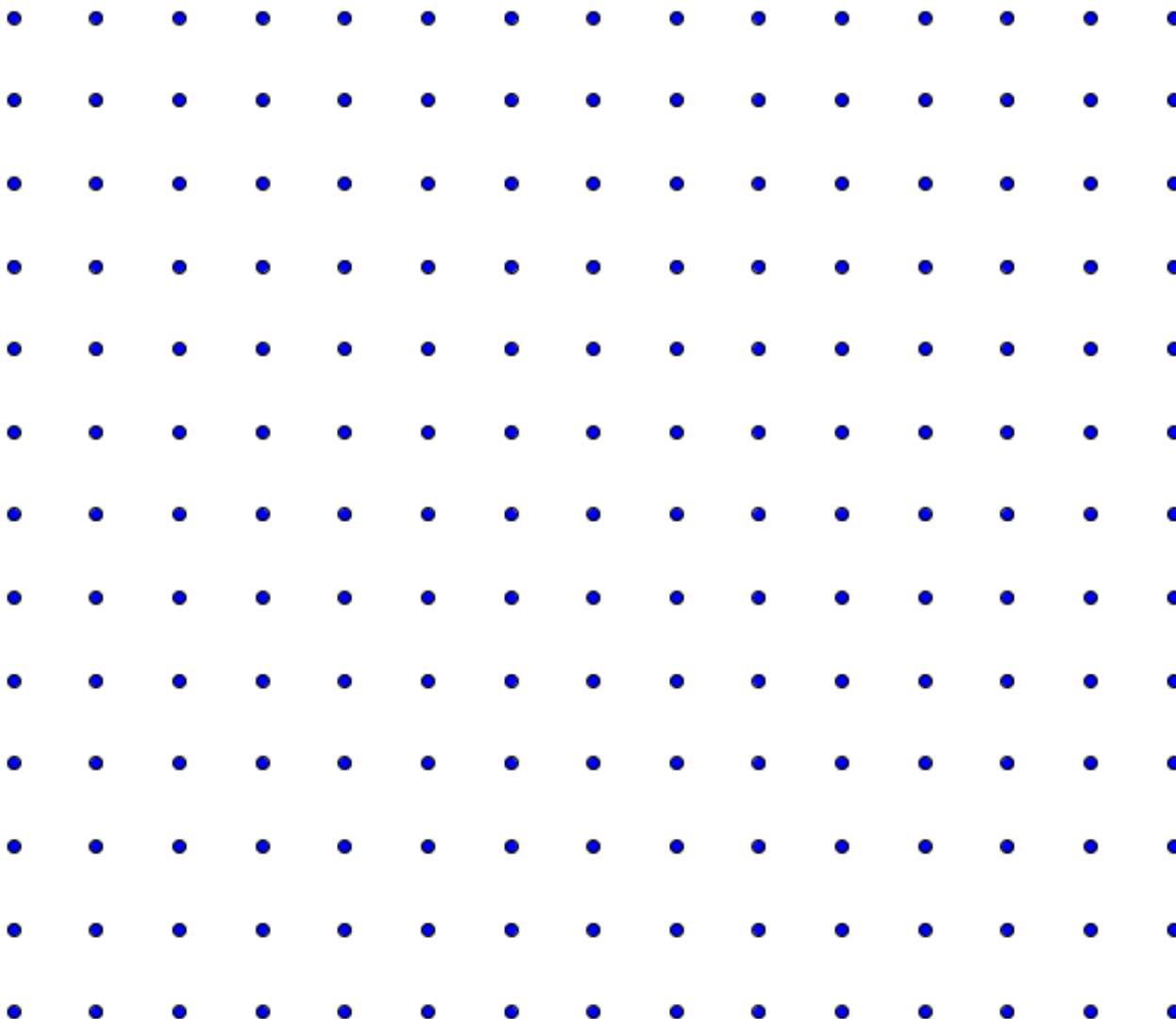
Data: ____/____/____



MATEMÁTICA – TRABALHO NO GEOPLANO

TAREFA 1 – Desenho de quadriláteros e diagonais

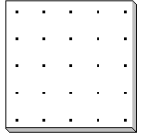
1. Constrói, no geoplano, figuras de quatro lados (quadriláteros) de diferentes tipos.
2. Desenha os quadriláteros que descobriste:



1. Desenha linhas retas unindo os vértices opostos (diagonais).
2. Regista o número de linhas retas (diagonais) que desenhaste, o número de vértices e o número de ângulos, em cada uma das figuras.
3. Escreve o nome dos quadriláteros que conheces.

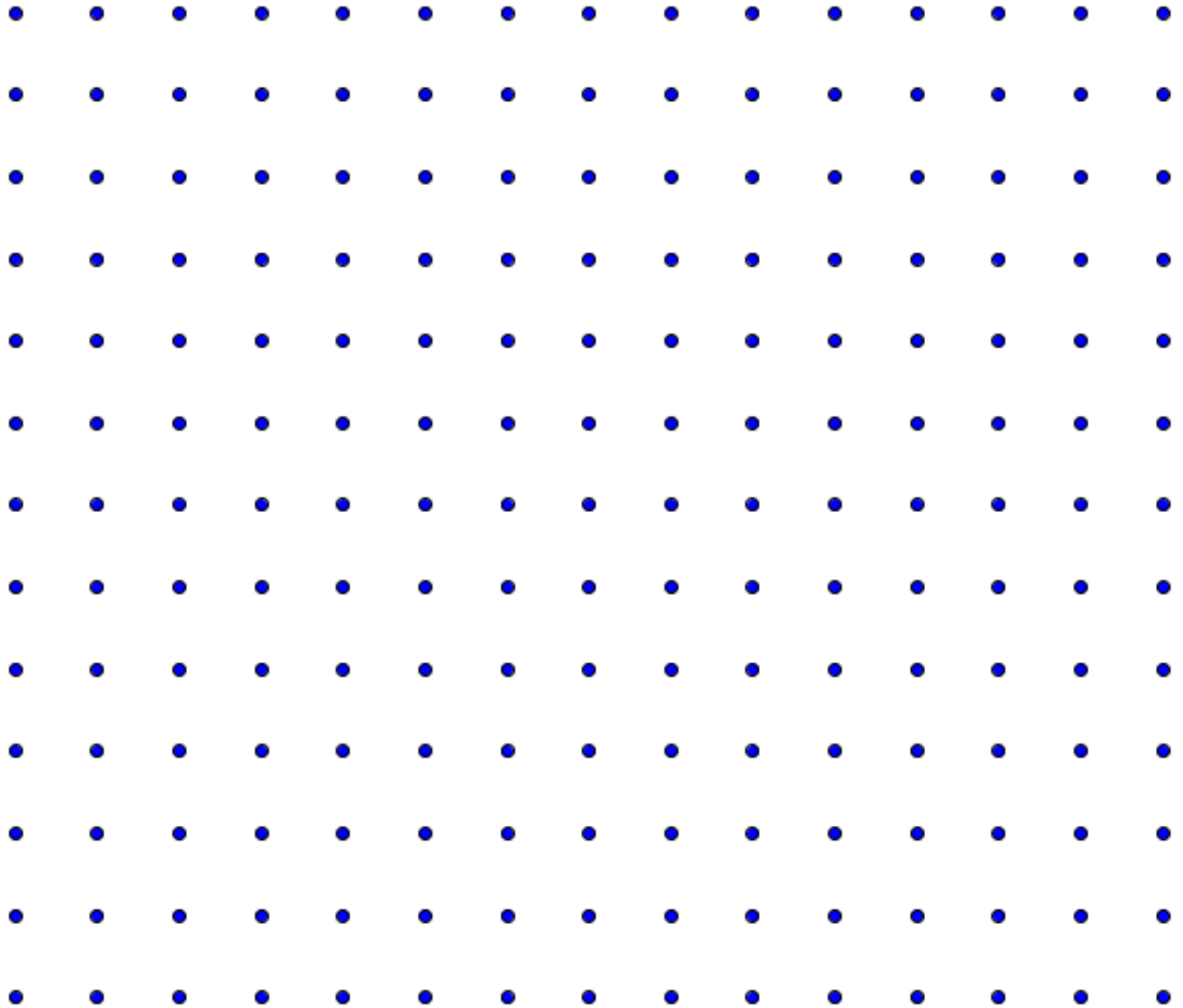
Trabalhei com: _____

MATEMÁTICA – TRABALHO NO GEOPLANO



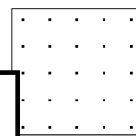
TAREFA 2 – Descoberta de quadrados

1. Descobre todos os quadrados diferentes que se podem construir no geoplano.
2. Desenha-os no papel ponteadado.



Trabalhei com: _____

Nome: _____ Data: _____

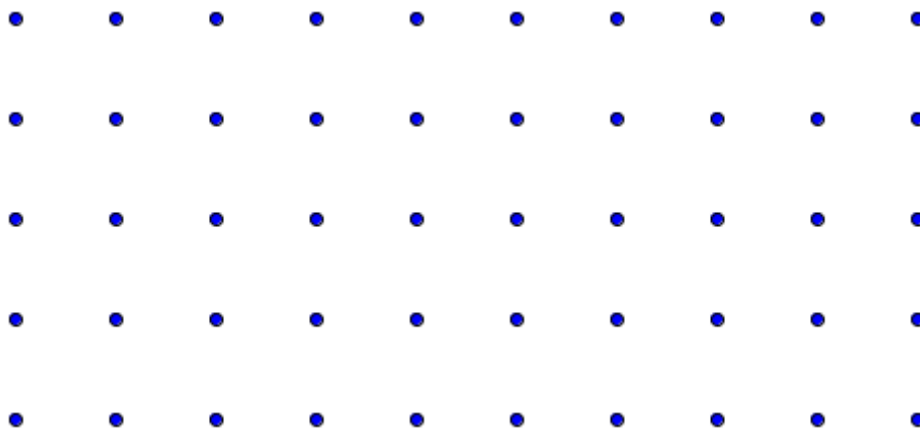


MATEMÁTICA – TRABALHO NO GEOPLANO

TAREFA 3 – Quadriláteros com todos os lados iguais

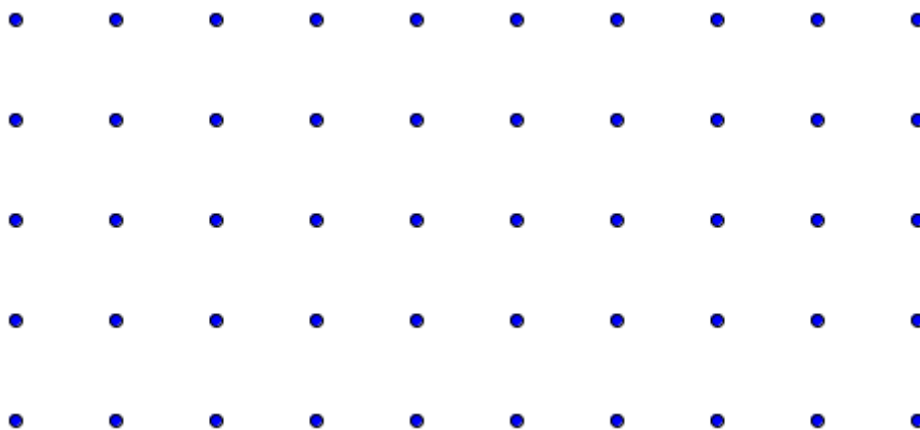
1. Constrói, no geoplano, quadriláteros diferentes, na forma, que tenham todos os lados iguais.

1.1. Desenha os quadriláteros que descobriste:



2. Além do quadrado, encontras algum outro tipo de quadrilátero? _____

2.1. Desenha-o.

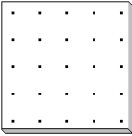


3. Quais são as diferenças que encontras entre o quadrado e o quadrilátero que descobriste?

Trabalhei com: _____

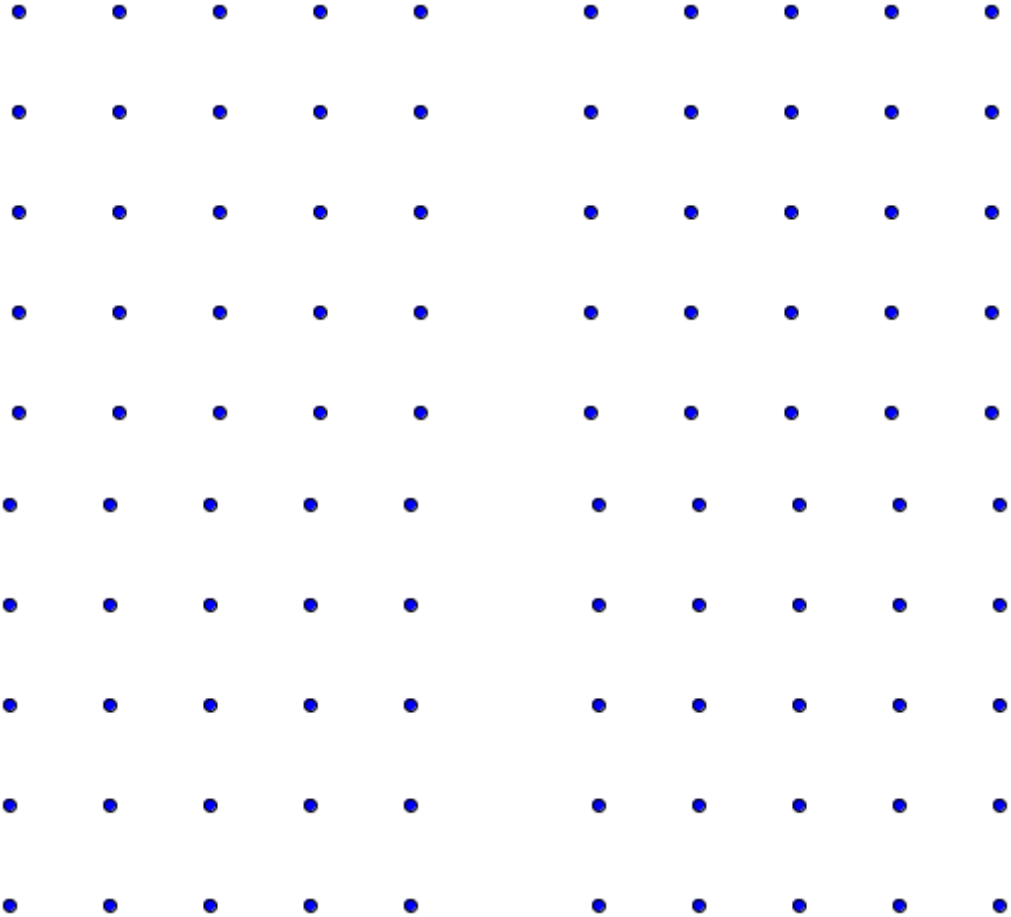
Nome: _____ Data: _____

MATEMÁTICA – TRABALHO NO GEOPLANO

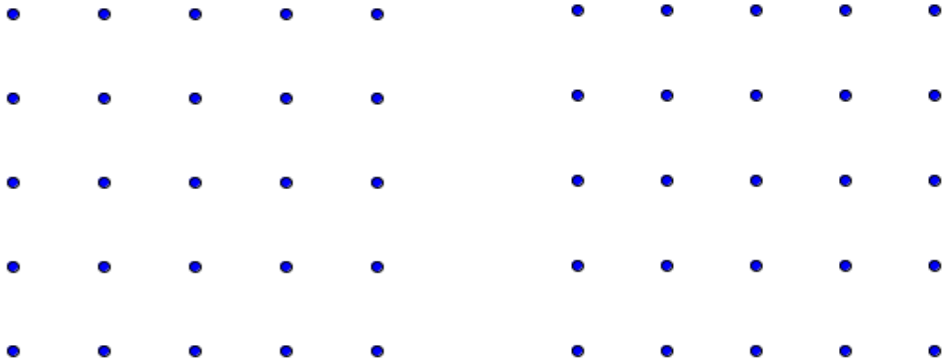


TAREFA 4 – Quadriláteros com lados iguais dois a dois

- 1. Constrói quadriláteros que tenham lados iguais dois a dois. Quantos tipos diferentes, na forma, encontras? _____
Desenha os quadriláteros que descobriste:

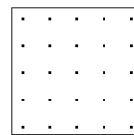


- 2. Constrói quadriláteros que tenham lados iguais dois a dois e todos os ângulos iguais. Desenha os quadriláteros que descobriste:



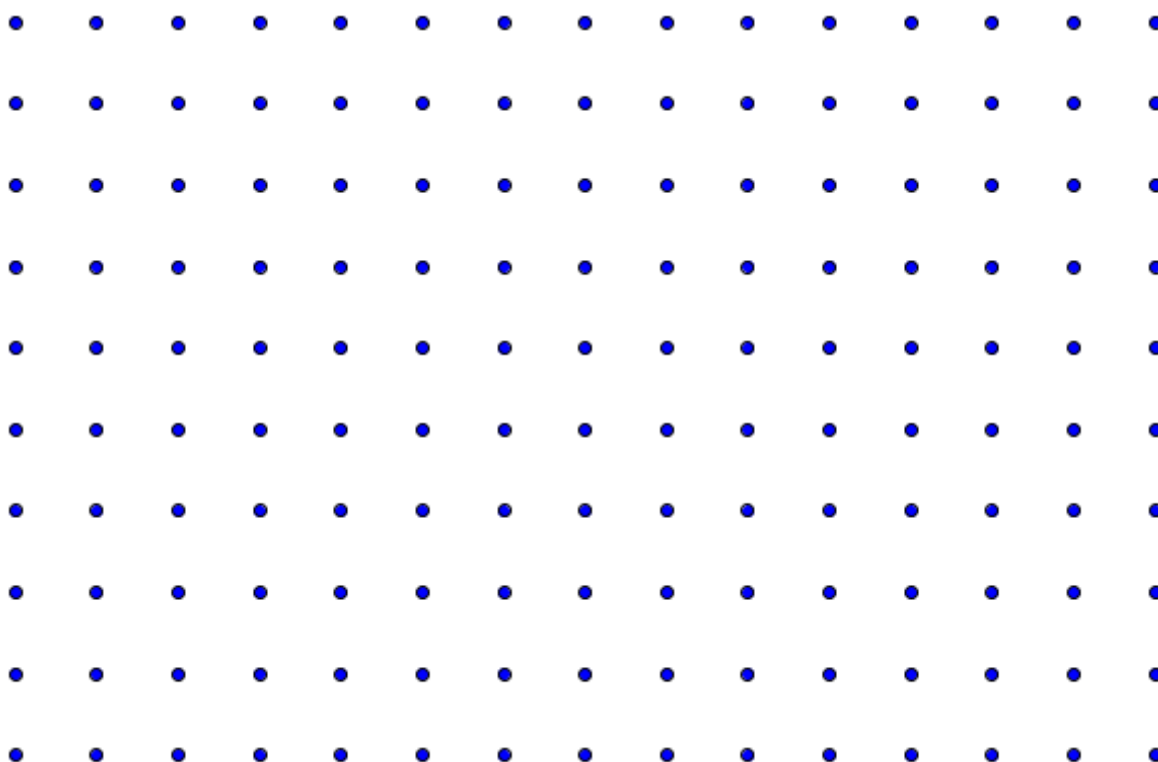
Trabalhei com: _____

MATEMÁTICA – TRABALHO NO GEOPLANO



TAREFA 5 – Quadriláteros com apenas dois lados paralelos

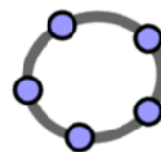
1. Constrói, no geoplano, quadriláteros diferentes na forma que tenham apenas dois lados paralelos.
2. Desenha os quadriláteros que descobriste:



Trabalhei com: _____

Nome: _____ Data: _____

MATEMÁTICA – TRABALHO NO GEOGEBRA



TAREFA 6 – Explorar o GeoGebra

Abre o GeoGebra e realiza as seguintes atividades:

GeoGebra

Desenha 3 pontos **A**, **B** e **C**.

Constrói o triângulo **ABC**.

Move os pontos. O que observas? _____

Procura 'ponto médio' no menu. Constrói o meio do lado **AB** e nomeia-o **I** e o meio do lado **AC** e nomeia-o **J**.

Move os pontos novamente. O que observas? _____

Constrói o segmento **IJ**.

Mede os segmentos **IJ** e **AC**.

Mede os ângulos internos do triângulo.

Move os pontos. Que observas? _____

Regista outras descobertas:

Podes alterar as propriedades (cor, estilo...) dos objetos representados. (Vai ao menu “Editar” e clica nas “Propriedades”)

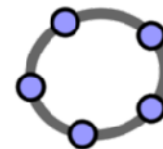
Grava o teu trabalho (tarefa 6)

Trabalhei com: _____

MATEMÁTICA – TRABALHO NO GEOGEBRA

TAREFA 7– Explorar o GeoGebra

Abre o GeoGebra e realiza as seguintes atividades:



GeoGebra

1. Desenha dois pontos **A** e **B**

Constrói uma reta que passe pelos pontos **A** e **B**

Procura “reta paralela” no menu. Constrói uma reta paralela à desenhada e muda-lhe a cor.

Move as retas. O que observas? _____

Consegues desenhar outras retas paralelas? _____

Se conseguires, desenha-as.

Grava o teu trabalho (tarefa 7-1)

2. Desenha dois pontos **C** e **D**

Constrói uma reta que passe pelos pontos **C** e **D**

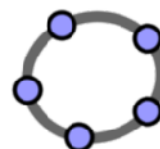
Procura “reta perpendicular” no menu. Constrói uma reta perpendicular à desenhada e muda-lhe a cor.

Desenha outras retas perpendiculares.

Podes alterar as propriedades (cor, estilo...) dos objetos representados. (Vai ao menu “Editar” e clica nas “Propriedades”)

Grava o teu trabalho (tarefa 7-2)

Trabalhei com: _____



TAREFA 8 – Desenho de um quadrilátero qualquer

Abre o GeoGebra e realiza as seguintes atividades:

Desenha 4 pontos A, B, C e D

Constrói os segmentos de reta AB, BC, CD e DA.

Mede os ângulos internos do quadrilátero ABCD.

Mede os lados do quadrilátero.

Arrasta um vértice qualquer de modo a obter um novo quadrilátero. O que observas?

Movimenta os pontos de modo a obter:

- um retângulo;

O que se alterou?

- um paralelogramo;

O que se alterou?

Grava o trabalho com o nome “quadrilátero1”.

Trabalhei com: _____

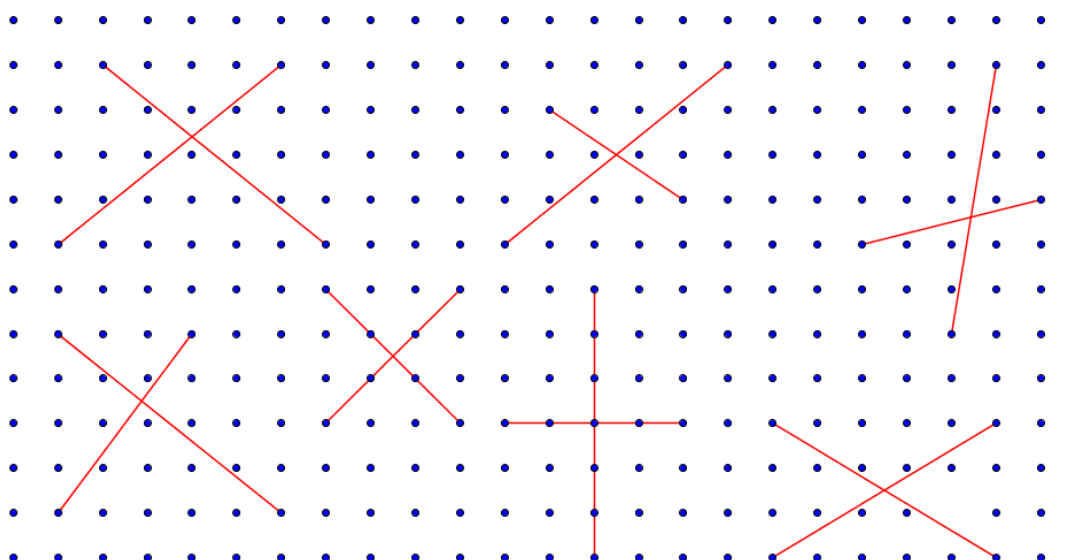



TAREFA 9 – Desenho de quadriláteros a partir de diagonais dadas

1. **Abre o ficheiro “Ponteadado 1” onde estão desenhados pares de diagonais de quadriláteros.**

2. **Completa o trabalho, desenhando os quadriláteros.** (Usa a ferramenta )

Na figura seguinte estão desenhados pares de diagonais de quadriláteros.
Descobre esses quadriláteros e escreve o nome dos que conheces.



3. **Escreve o nome dos quadriláteros que conheces** (Com o botão direito do rato, clica no interior do quadrilátero e procura  Renomear)

4. O que podes dizer sobre as diagonais de cada quadrilátero?

Grava as alterações ao ficheiro.

Trabalhei com: _____




TAREFA 10 – Desenho de quadriláteros (soma dos ângulos internos)

Abre o GeoGebra e realiza as seguintes atividades:

1. Desenha 3 quadriláteros diferentes.


2. Usando o botão  mede o comprimento dos lados.

3. Usando o botão  mede a amplitude dos ângulos internos de cada quadrilátero que desenhaste.

4. Soma as medidas dos ângulos internos de cada um dos quadriláteros.

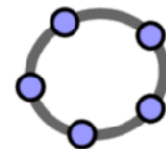
5. Se achares necessário podes desenhar mais quadriláteros e somar as medidas dos seus ângulos internos

6. O que podes concluir? Regista.

Escreve o nome dos quadriláteros que conheces. (Com o botão direito do rato, clica no interior do quadrilátero e procura  Renomear)

Grava o trabalho com o nome “ângulos”.

Trabalhei com: _____



TAREFA 11 – Construção de um trapézio.

Marca dois pontos A e B .

Constrói a reta AB .

Marca um terceiro ponto C .

Constrói uma reta paralela à reta AB , que passe por C .

Marca na reta anterior um ponto D .

Constrói o polígono $ABCD$

Mede a amplitude dos ângulos internos.

Desenha as diagonais e mede o seu comprimento.

Regista as características do trapézio.

Quadrilátero	Ângulos	Lados	Diagonais

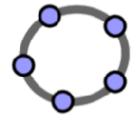
Movimenta os pontos de modo a obter um:

- polígono com dois pares de lados paralelos.

Com esta construção é fácil obter retângulos? e quadrados?

Grava o trabalho com o nome “trapézio”

Trabalhei com: _____



MATEMÁTICA – TRABALHO NO GEOGEBRA

TAREFA 12 - Construção de um paralelogramo.

Marca dois pontos A e B.

Constrói a reta AB.

Marca um terceiro ponto C.

Constrói uma reta paralela à reta AB, que passe por C.

Constrói a reta CA. Constrói uma paralela a reta CA que passe por B.

Marca o ponto D na interseção das retas.

Constrói o polígono ABDC definido pela interseção das retas.

Mede o comprimento dos lados e os ângulos internos.

Desenha as diagonais e mede o seu comprimento.

Regista as características do paralelogramo.

Quadrilátero	Ângulos	Lados	Diagonais

Movimenta os pontos de modo a obter um:

➤ retângulo;

O que se manteve?	O que se alterou?

O que podes concluir?

➤ quadrado;

O que se manteve?	O que se alterou?

O que podes concluir?

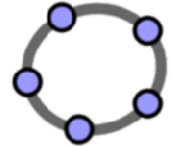
➤ losango.

O que se manteve?	O que se alterou?

O que podes concluir?

Grava o trabalho com o nome “paralelogramo”

Trabalhei com: _____



MATEMÁTICA – TRABALHO NO GEOGEBRA

TAREFA 13 - Construção de um retângulo.

Marca dois pontos A e B .
 Constrói a reta AB .
 Constrói uma perpendicular à reta AB que passe por A .
 Na reta anterior marca um ponto C .
 Constrói uma paralela à reta AB que passe por C .
 Constrói uma perpendicular à reta AB que passe por B .
 Marca o ponto D na interseção das duas retas.
 Constrói o polígono $ABDC$ definido pela intersecção das retas.
 Mede o comprimento dos lados e os ângulos internos.
 Desenha as diagonais e mede o seu comprimento.

Regista as características do retângulo.

Quadrilátero	Ângulos	Lados	Diagonais

Movimenta os pontos de modo a obter um quadrado.

Regista as características do quadrado.

Quadrilátero	Ângulos	Lados	Diagonais

O que se alterou?

Grava o trabalho com o nome “retângulo”

Trabalhei com: _____



TAREFA 14 – Análise da construção do quadrado

Abre o ficheiro “quadrado”

Mede o comprimento dos lados e os ângulos internos.
Desenha as diagonais e mede o seu comprimento.

Regista as características do quadrado.

Quadrilátero	Ângulos	Lados	Diagonais

Movimenta os pontos e verifica se obténs sempre um quadrado.

O que observas? _____

Tens a certeza que é um quadrado? _____ Porquê? _____

Grava as alterações ao ficheiro.

Trabalhei com: _____



TAREFA 15 – Análise da construção do losango

Abre o ficheiro “losango”

Mede o comprimento dos lados e os ângulos internos.
Desenha as diagonais e mede o seu comprimento.

Regista as características do losango.

Quadrilátero	Ângulos	Lados	Diagonais

Movimenta os pontos e verifica se obténs sempre um losango.

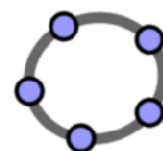
O que observas?

Existem características semelhantes entre o quadrado e o losango? _____

Quais?

Grava as alterações ao ficheiro.

Trabalhei com: _____



TAREFA 16 – *Elaborar um plano de construção*

Abre o teu ficheiro “retângulo”

A figura que observas é mesmo um retângulo? _____

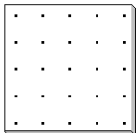
Descobre como foi construído e regista:

Troca o teu registo com outro grupo.

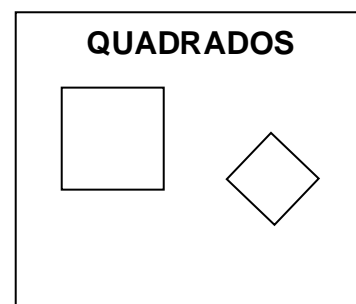
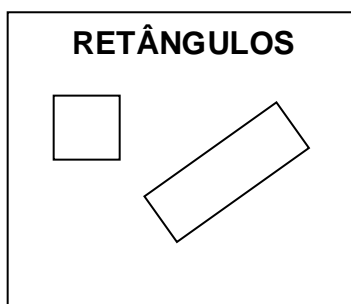
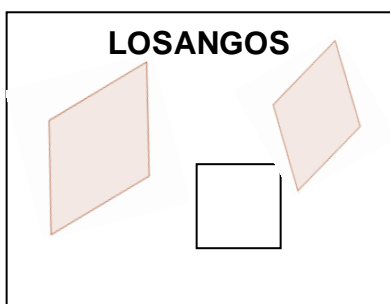
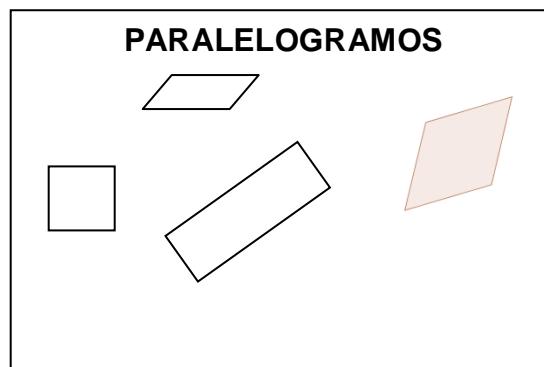
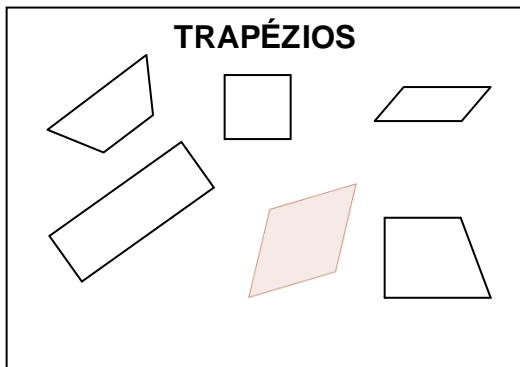
Abre um novo documento e constrói a figura seguindo as indicações do registo que recebeste.

Grava o teu trabalho com o nome “plano”.

Trabalhei com: _____



TAREFA 18 – Classificar quadriláteros



1. Escreve o critério usado em cada grupo.
2. Concordas com esta classificação dos quadriláteros? Justifica a tua opinião.

Trabalhei com: _____

Nome: _____

Data: _____

REGISTO DE OPINIÃO

Tarefa _____

Gostaste desta atividade? _____

O que mais te agradou? Justifica a tua opinião.

E o que menos gostaste? Justifica.

Sentiste dificuldades na realização da atividade? _____ Tenta explicar onde e porquê.

Nome: _____ Data: _____

REGISTO DE OPINIÃO

Gostaste mais de trabalhar com o geoplano ou com o GeoGebra? Justifica a tua opinião.

Aconselhavas um amigo a realizar estas atividades? _____

Porquê?

Nome: _____ Data: _____