Estratégias de cálculo mental utilizadas por alunos do 1.º ano de escolaridade

Cristina Morais

Externato da Luz
morais.cristina@gmail.com

Resumo

Neste artigo será apresentada parte de um estudo que tem como objetivo compreender que estratégias de cálculo mental são utilizadas por alunos de 1.º ano de escolaridade na resolução de problemas de adição e subtração, procurando compreender qual a influência do significado da operação presente no problema na estratégia utilizada.

Foi seguida uma metodologia qualitativa e realizados três estudos de caso. O estudo foi realizado numa turma do 1.º ano de escolaridade aos quais foram propostas duas cadeias de problemas, resolvidas a pares. No início do 2.º ano de escolaridade, os participantes do estudo resolveram, individualmente, uma terceira cadeia de problemas.

As conclusões deste estudo apontam que, na resolução dos problemas de adição, parece existir uma preferência por estratégias aditivas do tipo 1010. Quanto aos problemas de subtração, foram usadas estratégias subtrativas do tipo 1010 em problemas com o significado de retirar e, nos problemas com os significados de comparar e completar, foram geralmente utilizadas estratégias aditivas do tipo A10, pertencentes à categoria N10.

Neste artigo serão apresentadas e discutidas as estratégias utilizadas pelos três alunos participantes do estudo em problemas de subtração, pertencentes às três cadeias de problemas, com o significado de comparar.

Palavras-chave: sentido de número, cálculo mental, adição, subtração, resolução de problemas.

ISBN: 978-989-95733-4-5

INTRODUÇÃO

O cálculo mental está intimamente relacionado com um dos objetivos centrais da aprendizagem de Matemática, o desenvolvimento do sentido de número. Este, embora de difícil definição, uma vez que inclui vários domínios da Matemática, é caracterizado por McIntosh Reys e Reys (1992) como:

> a compreensão geral dos números e das operações, em paralelo com a capacidade e inclinação para utilizar este conhecimento de forma flexível de forma a fazer julgamentos matemáticos e a desenvolver estratégias eficazes para lidar com os números e as operações (p.3).

O cálculo mental é assim fundamental para o desenvolvimento do sentido de número, uma vez que se caracteriza como um "movimento rápido e flexível no mundo dos números" (Buys, 2008) e "encoraja a procura de processos mais fáceis baseados nas propriedades dos números e das operações" (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999).

CÁLCULO MENTAL

Buys (2008) caracteriza o cálculo mental como: a) o trabalho com números e não com dígitos, uma vez que os números são vistos como um todo; b) com utilização de propriedades de cálculo elementares e de relações numéricas; c) apoiado num bom conhecimento dos números e de factos numéricos básicos com números até 20 e até 100; e d) podendo ser utilizadas notas intermédias de acordo com a situação. Este é também o modo como é descrito no Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) e será esta a caracterização de cálculo mental tomada como orientação ao longo deste artigo.

O registo de notas intermédias nem sempre é associado ao cálculo mental, no entanto, tal como Noteboom, Bokhove e Nelissen (2008) referem, o cálculo mental não deve ser visto como oposto ao cálculo escrito, uma vez que calcular mentalmente "não é o mesmo que calcular na cabeça, mas sim com a cabeça e registar determinados passos, se necessário." (p. 90).

Deste modo, o foco não deverá incidir na diferença entre cálculo mental e escrito, mas sim nas diferenças a nível das estratégias usadas (Beishuizen, 2009). É a própria natureza das entidades matemáticas e das ações que constituem a diferença entre cálculo mental e os cálculos escritos assentes em procedimentos mecanizados (Verschaffel, Greer & De Corte, 2007).

Estratégias de cálculo mental

As estratégias de cálculo mental utilizadas para a adição e subtração, dependem e evoluem a partir das que são utilizadas nestas operações com números menores que 20 (Fuson, Wearne, Hiebert, Murray, Human, Olivier, Carpenter & Fennema, 1997), cujo domínio é fundamental para o desenvolvimento de estratégias cada vez mais eficientes (Baroody, 2006; Beishuizen & Anghileri, 1998; Fosnot & Dolk, 2001; Sowder, 1992).

ISBN: 978-989-95733-4-5

Assim, no domínio dos números menores que 20, são identificadas diferentes estratégias de cálculo, progressivamente mais complexas, apresentadas no Quadro 1. Estas não são consideradas estratégias de cálculo mental neste estudo, uma vez que não apresentam as características do cálculo mental, já descritas segundo Buys (2008), no entanto, são essenciais para esta investigação uma vez que foi realizada no 1.º ano.

Quadro 1. Estratégias de cálculo para a adição e subtração, com números menores que 20 (adaptado de Thompson, 2009; Verschaffel, Greer & De Corte, 2007)

Adição	**Subtração**
Contar todos (*count all*)[1]	Contagem dos que sobram (*count out*)
Contagem a partir do primeiro número (*count on from the first number*)	Contagem para trás a partir de um número (*count back from*)
Contagem a partir do número maior (*count on from the larger number*)	Contagem para trás até (*count back to)*
Utilização de factos numéricos de adição	Contagem a partir de (*count up*)
Cálculo com base em factos numéricos	Utilização de factos numéricos de subtração e cálculo com base em factos numéricos

Thompson (1999) e Treffers (2008) destacam ainda a importância da estratégia de saltos através do 10, em que à primeira parcela é adicionada ou subtraída uma parte da segunda, de modo a obter 10, sendo depois adicionada ou subtraída a parte restante.

Para a adição e subtração com números superiores a 20, são identificadas na literatura holandesa diferentes tipos de estratégias[2] organizadas em duas categorias, denominadas por N10 e 1010 (ver, por exemplo, Beishuizen, 1993; 1997; 2009), apresentadas e complementadas com exemplos no Quadro 2.

Na categoria das estratégias N10, à primeira parcela é adicionado ou subtraído um múltiplo de 10. Nesta categoria, distingue-se um nível mais complexo, a estratégia N10C, onde à primeira parcela é adicionado ou subtraído um número aproximado da segunda parcela, correspondente a um múltiplo de 10, facilitando o cálculo. Obtido o resultado, este é depois compensado.

[1] Em itálico de Thompson (2009)
[2] Assumindo que possivelmente esteja a atribuir o termo "estratégia" ao que Beishuizen (1997) denomina por procedimento de cálculo, ao longo deste artigo este termo dirá respeito às estratégias do tipo N10, 1010 e variantes.

ISBN: 978-989-95733-4-5

Noutro tipo de estratégia, ainda do tipo N10, identificado como A10 (*adding on*[3]), à primeira parcela é adicionado ou subtraído um número correspondente a uma parte da segunda parcela, de modo a que seja obtido um múltiplo de 10, sendo depois adicionada ou subtraída a outra parte.

Na categoria das estratégias 1010, os números são decompostos nas suas ordens, estas são adicionadas ou subtraídas e o resultado é obtido através da recomposição do número. Uma variante desta estratégia é a denominada por 10S, onde os números são inicialmente divididos nas suas ordens para a adição ou subtração, que são adicionadas ou subtraídas sequencialmente.

Quadro 2. Estratégias de cálculo mental para a adição e subtração, com números superiores a 20 (adaptado de Beishuizen, 1993; 2009; Beishuizen & Anghileri, 1998)

Estratégias		**65 + 27 =**	**74 – 38 =**
N10	N10	65 + 20 = 85 , 85 + 7 = 92	74 – 30 = 44 , 44 – 8 = 36
	N10C	65 + 30 = 95 95 – 3 = 92	74 – 40 = 34 34 + 2 = 36
	A10	65 + 5 = 70, 70 + 22 = 92	74 – 4 = 70, 70 – 34 = 36
1010	1010	60 + 20 = 80, 5 + 7 = 12 80 + 12 = 92	70 – 30 = 40 , 4 – 8 = – 4 40 – 4 = 36
	10S	60 + 20 = 80, 80 + 5 = 85 , 85 + 7 = 92	70 – 30 = 40 40 + 4 = 44 , 44 – 8 = 36

Beishuizen (2009) destaca a dificuldade da estratégia do tipo 1010 numa situação de subtração com empréstimo[4], uma vez que as crianças poderão não conseguir calcular 4-8, ou calcular, de modo incorreto, 8-4. A autora acrescenta que a dificuldade na utilização deste tipo de estratégia está na correta recomposição dos números, de modo a obter o resultado final.

Beishuizen refere que estratégias do tipo N10 são menos vulneráveis a este tipo de erro, considerando-as mais eficientes. Contudo, a utilização deste tipo de estratégias exige o domínio da adição ou subtração de múltiplos de 10 a partir de qualquer número.

Evidências de investigações empíricas (por exemplo, Beishuizen, 2001; Carpenter, Franke, Jacobs, Fennema & Empson, 1998; Thompson & Smith, 1999), revelam que os alunos parecem preferir estratégias pertencentes à categoria N10 perante cálculos de subtração e estratégias da categoria 1010 na resolução de adições. Revelam também que o sucesso na utilização de estratégias N10 é mais elevado do que no uso de estratégias 1010, o que parece confirmar a fragilidade deste tipo de

[3] Em itálico de Beishuizen (2001)
[4] Designo por subtração com empréstimo a situação em que o número de unidades de uma ordem no subtrativo é maior que o correspondente do aditivo (Ponte & Serrazina, 2000).

ISBN: 978-989-95733-4-5

estratégias, nomeadamente no que diz respeito à perda de sentido de número durante a sua utilização.

Resolução de Problemas

Nos primeiros anos, o contexto constitui-se como uma base concreta para o cálculo (Treffers, 2008), como suporte ao pensamento dos alunos (ME, 2007) e também como o meio privilegiado para que os alunos compreendam a relação existente entre a adição e a subtração (Fosnot & Dolk, 2001), operações centrais no 1.º e 2.º ano de escolaridade.

Uma vez que estas operações surgem em diferentes situações, que lhes poderão conferir significados diferentes, os problemas fornecem o contexto em que podem ser utilizadas. Para a realização deste estudo, foram considerados os significados de adição e subtração identificados em Ponte e Serrazina (2000) e no Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), sintetizados no Quadro 3.

Quadro 3. Diferentes significados das operações de adição e subtração
(adaptado de Ponte & Serrazina, 2000; ME, 2007)

Adição	**Combinar:** duas ou mais quantidades são transformadas noutra quantidade.
	Acrescentar: uma quantidade é aumentada.
Subtração	**Retirar:** a uma quantidade é retirada outra.
	Comparar: são comparadas duas quantidades, pretendendo-se encontrar a diferença entre as quantidades ou ver quanto é que uma é maior ou menor que outra.
	Completar: é calculado quanto se deverá juntar a uma quantidade para se obter um determinado valor.

Devido à íntima relação existente entre a adição e a subtração, apesar do professor planear um contexto, com um determinado significado de uma das operações, não significa que os alunos o irão interpretar do mesmo modo. Fosnot e Dolk (2001) salientam que "é provável que um determinado contexto afete os modelos e estratégias utilizados pelas crianças" (p. 90).

METODOLOGIA

Neste estudo procurou compreender-se: i) que estratégias de cálculo mental são utilizadas por alunos do 1.º ano de escolaridade, na resolução de problemas de adição e subtração; ii) como evoluem essas estratégias; e iii) qual a influência do significado da operação presente no problema na estratégia utilizada.

ISBN: 978-989-95733-4-5

Foi seguida uma metodologia qualitativa com carácter interpretativo, com o design de estudo de caso. O estudo foi realizado numa escola de ensino particular, em Lisboa, numa turma de 1.º ano de escolaridade, da qual sou professora. Dos 25 alunos que constituem a turma foram selecionados três para o estudo aqui designados por Miguel, Cátia e André.

Foram elaboradas e aplicadas três cadeias[5] de problemas de adição e subtração, num total de 20 problemas, considerando os seus diferentes significados. As duas primeiras cadeias foram resolvidas entre janeiro e junho de 2010, por todos os alunos da turma, a pares, que foram mudando ao longo do tempo. A terceira cadeia de problemas foi resolvida apenas pelos três participantes do estudo, individualmente e no início do 2.º ano, no ano letivo de 2010/2011. Este momento foi importante para melhor compreender as estratégias usadas por cada aluno, procurando complementar os dados até então recolhidos. Estes foram recolhidos com o recurso a registo áudio e vídeo, registos dos trabalhos dos alunos, observação participante e notas de campo.

Para a análise e categorização das estratégias, foram seguidas as enumeradas por Thompson (1999; 2009) e Treffers (2008) para cálculos com números até 20 e as estratégias de cálculo mental identificadas por Beishuizen (1993; 1997; 2001; 2009) e Beishuizen e Anghileri (1998) para cálculos com números superiores a 20.

Dada a limitação de espaço do artigo, serão apresentadas as estratégias utilizadas pelos três alunos participantes no estudo na resolução de três problemas de subtração com o significado de comparar, um de cada cadeia. Estes foram selecionados de modo a permitir a análise e discussão de aspetos significativos identificados no estudo mais amplo.

RESULTADOS

Resolução do problema da primeira cadeia (fevereiro, 1.º ano)

"A irmã da Leonor e da Rita tem 20 anos. Quantos anos a mais tem a irmã?" (Leonor e Rita, irmãs gémeas da turma, têm 6 anos.)

Miguel e Cátia resolveram em conjunto este problema. Miguel reconhece que o pode resolver calculando quanto terá que adicionar a 6 para obter 20. Olha fixamente para a régua de madeira que tem na mesa e exclama:

> Miguel – Ah, é 6 mais 9! Não é… ah… 14!

Cátia tenta pedir a sua colaboração para a resolução do problema, mas acabam por resolvê-lo individualmente. Com dificuldade em registar a sua estratégia, Miguel pede a minha ajuda:

---

[5] O termo "cadeia" é utilizado para designar o conjunto de problemas com os diferentes significados das operações que foram planificados e depois resolvidos pelos alunos.

ISBN: 978-989-95733-4-5

> Miguel – É que eu já pensei uma coisa e depois não dá… Eu pensei assim na cabeça, mas eu não consigo bem registar. É que eu pensei na cabeça assim, este 6 e depois pus logo 10, e 10 mais 10 é vinte, mas como elas têm 6, eu pus esses 10 que ela tem dos 20, e depois pus… mais 4 que ela tem porque é 6, e 6 como tem os 4, porque 6 mais 4 é 10, é estes 4, e depois 4… e como… e depois… como… eu agarrei nos 10, mais 10… nos 20, e depois nos 20 mais 4, 24… ai, eu não sei explicar!

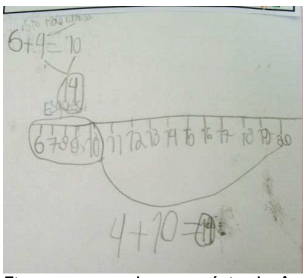
Pedi que voltasse a explicar à medida que ia assinalando a lápis de carvão os saltos que ia dando na sua régua de madeira:

> Miguel – (…) eu esqueci estes aqui… [referindo-se à diferença entre 6 e 10]
> Professora – Começaste aí do 10…
> Miguel – Sim, nestes dois… Esqueci estes 4… Estes 6, 7, 8 e o 9… (…) E depois fiz um salto enorme... (…) Até ao 20… E depois… aqui já tenho 10.
> Professora – Sim…
> Miguel – 10 coisas… com mais estes 4… 10 mais 4 é 14!

De seguida, registou a sua estratégia recorrendo à reta numérica (Figura 1). Miguel resolve este problema recorrendo a factos numéricos da adição do seu domínio: se 10+10=20, então a 6 (diferença de 10-4) terá que ser adicionado 14.

Figura 1. Resolução do problema "A mana das gémeas" - Miguel

Após Miguel ter dito inicialmente que o resultado seria 14, Cátia concordou com o resultado, no entanto, também sente dificuldade em fazer o seu registo e explica:



> Cátia – Eu fiz assim… Fiz como aquela estratégia da Ana de ir para o 10. Sei que 6 mais 4 é 10. Depois dei um salto de 3, que era até ao 13.
> Professora – Porque é que deste um salto de 3? E não um de 4 ou de 2…?
> Cátia – Porque… eu resolvi dar um de 3 porque pensei que era uma conta boa também para fazer este cálculo. Fiz 4 mais 3 que é 7. Depois dei outro salto de 3, que é como se não houvesse este 1 e não houvesse este 1, que era… 3 e 6, que era como aquela

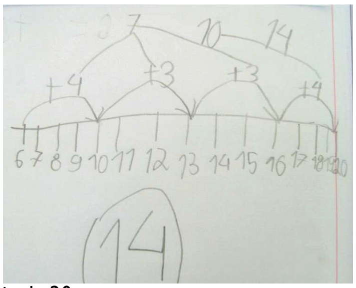
ISBN: 978-989-95733-4-5

> contagem de 3 em 3. E depois fiz o 7 mais 3 que era 10, e depois só era mais 4, e 10 mais 4 é 14.

Por "estratégia da Ana", Cátia refere-se a uma tarefa de cálculo mental resolvida na turma, onde era apresentada uma estratégia de saltos através do 10. A aluna recorre a esta estratégia, adicionando primeiro 4 a 6, obtendo 10 e depois calculando com base em factos numéricos que conhecia (Figura 2).

Figura 2. Resolução do problema "A mana das gémeas" – Cátia

André sentiu dificuldade na resolução do problema. Ao aproximar-me reparei que calculou 20+6,

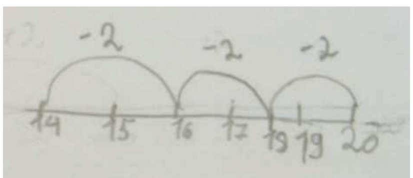


dando três saltos de +2 a partir de 20:

> Professora – Então quer dizer que 26… Ela é 26 anos mais velha que as irmãs? Oh coitada, ela só tem 20 anos! E é 26 anos mais velha?
> André – Não… Ah! É que eu fiz os saltos para a frente, mas era para trás!

André contou, por ordem decrescente, de 20 até 14, levantando um dedo por cada número dito, até ter levantado um total de seis dedos. Contudo, o seu registo não reflete esta contagem (Figura 3), André traça três saltos de -2, a partir de 20.

Figura 3. Resolução do problema "A mana das gémeas" – André



Resolução do problema da segunda cadeia (maio, 1.º ano)

"No intervalo da manhã, a Rita saltou à corda e a Patrícia contou 48 saltos. No intervalo da tarde, a Rita fez 75 saltos. Quantos saltos a mais fez a Rita?"

De novo, Miguel e Cátia resolvem o problema a pares. Miguel recorre à linha numérica onde regista todos os valores de que necessita, 48, 50, 60, 70 e 75, o que parece sugerir um cálculo como 48+?=75. De seguida, assinala os saltos de adição. É de realçar a utilização de números de referência para estes saltos.

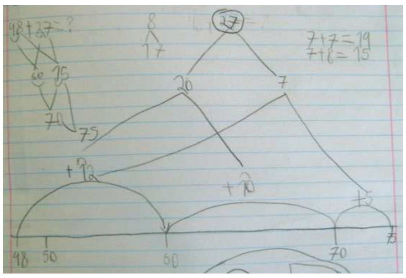
No seu registo (Figura 4), o aluno assinala um salto de 48 para 60, contudo, manteve a marca relativa ao número 50, explicando:

> Miguel – Porque mais 2, 50, mais 10, 60. Eu dei logo um salto de 12 porque 48 mais 2, 50. Mais 10, 60…

Para verificar o resultado, como sugerido por Cátia, utiliza uma estratégia aditiva 1010 para confirmar que 48+27=75. Miguel resolve o cálculo com rapidez e demonstra grande compreensão das relações numéricas envolvidas:

> Miguel – 48 mais 27 igual a… Então, 40 mais 20… 60. 8… vou dividir o 8 em 1 e em 7… então…
> Cátia – Eu não estou a fazer assim.
> Miguel – Eu quero… então 7 mais 7 igual a 14… se fosse mais 8, igual a 15… 10 [de 15] mais 60 igual a 70. E 5 mais 70, 75. Está certo.

Figura 4. Resolução do problema "Saltos à corda" – Miguel



Miguel recorre a uma estratégia aditiva do tipo A10 na resolução do problema e a uma estratégia, também aditiva, do tipo 1010 na verificação do resultado.

Cátia resolve o problema utilizando também uma estratégia aditiva do tipo A10 (Figura 5), efetuando saltos semelhantes a Miguel, com apenas uma diferença: Miguel deu um salto inicial de +12 e Cátia divide este salto em +2 e +10.

ISBN: 978-989-95733-4-5

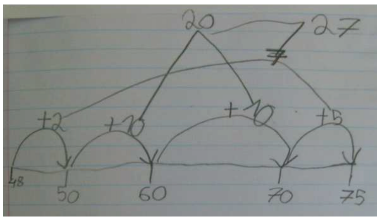


Figura 5. Resolução do problema "Saltos à corda" – Cátia

Como foi referido, Cátia verifica sempre os resultados, e utilizou também uma estratégia aditiva do tipo 1010 (Figura 6), utilizada por ela e pela primeira vez na turma na resolução de um problema de adição da primeira cadeia.

É sem dificuldade que calcula que 40+20=60, no entanto, a adição 8+7 não se constitui como um facto numérico para a aluna. Para a resolver, recorre ao dobro de 8:

> Cátia – Se 8 mais 8… 16… 8 mais 7… é só menos… 1. Se 8 mais 8 é 16, 8 mais 7 é só… menos 1.

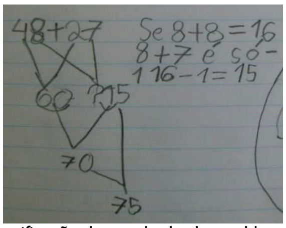


Figura 6. Estratégia para verificação do resultado do problema "Saltos à corda" – Cátia

André traduziu o problema por um cálculo como 48+?=75, tal como Miguel e Cátia. Segue uma estratégia aditiva do tipo A10, semelhante à que já tinha utilizado num problema anterior, pertencente a esta cadeia. Ao contrário do que tinha feito anteriormente, André tenta aproximar os resultados intermédios a múltiplos de 10, reconhecendo a eficácia de números de referência no cálculo.

Como se pode observar na Figura 7, há uma situação em que André não aproxima o resultado a um múltiplo de 10: não adiciona 50+10, mas sim 50+9 e depois 59+1. Quando perguntei por que o fez, apenas encolheu os ombros, o que parece sugerir a insegurança que ainda sente neste tipo de cálculos.

ISBN: 978-989-95733-4-5

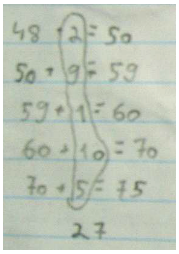


Figura 7. Resolução do problema "Saltos à corda" – André

Para calcular a soma dos valores adicionados a 48, partiu do primeiro até chegar ao último, sem considerar os números que poderia adicionar de modo a obter múltiplos de 10, facilitando o cálculo.

Resolução do problema da terceira cadeia (outubro, 2.º ano)

"O Miguel e a Cláudia jogaram o "Parar ou Avançar". No final, a Cláudia teve 157 pontos e o Miguel teve 43 pontos a menos. Quantos pontos teve o Miguel?"

Miguel calcula primeiro 157-40 e por fim retira 3. Para o fazer, recorre à linha numérica (Figura 8). Começa por registar que 157-40 seria igual a 107, erro que corrige rapidamente:

> Miguel – Ah não, é 117, porque senão era menos 50. Agora menos 3, este já é mais fácil. Menos 3… igual… (…) Já está… 115.

De novo, ao explicar-me como tinha pensado, Miguel identifica o seu erro:

> Miguel – Porque 5 mais 3 é 7 e 7… Ah não! Eu estou sempre a enganar-me com o 3, do 7 penso que é 8, aqui penso que o 7 é… 5 mais 3, mas é mais 2!

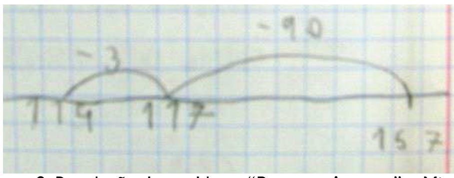


Figura 8. Resolução do problema "Parar ou Avançar" – Miguel

Miguel recorre a uma estratégia subtrativa do tipo N10 e, apesar de cometer alguns erros, é capaz de os identificar e corrigir com grande facilidade.

Cátia recorre a uma estratégia subtrativa do tipo 1010 para calcular 157-43. Provavelmente devido à diferença de algarismos que constituem as duas parcelas, começa por subtrair as dezenas (50-40), depois as unidades (7-3) e só no fim opera com as centenas, contudo, a 100 subtrai 14, obtendo 86.

Logo de seguida, sem colocar qualquer questão, calcula 86+43, usando uma estratégia aditiva do tipo 1010, obtendo 129. Calcula de novo 157-43, agora adicionando 100 a 14 (terceiro cálculo da Figura 9), explicando:

> Cátia – É que eu tentei, mas eu não sabia se tinha de fazer neste [primeiro cálculo da Figura 9, referindo-se às parcelas 100 e 14] de menos ou de mais, então fiz de menos mas depois quando eu confirmei não me deu certo. Então eu estou a fazer outra vez.

Quando terminou a adição 114+43 referiu que "agora já deu certo".

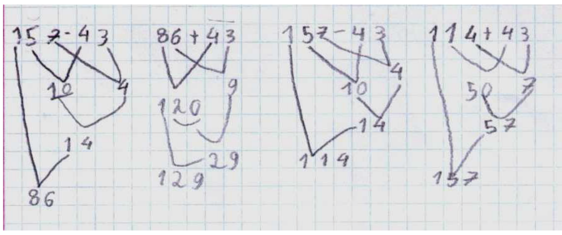


Figura 9. Tentativa e resolução do problema "Parar ou Avançar" – Cátia

Apesar de Cátia revelar dificuldade na correta recomposição do número na utilização deste tipo de estratégia, demonstra grande compreensão relativamente à relação entre as operações, à qual recorre de modo a verificar os resultados.

André começou por utilizar uma estratégia subtrativa do tipo 1010, tal como Cátia. Também começou por subtrair as dezenas, depois as unidades e no fim subtraiu 10 (resultado de 50-40) a 100, obtendo 90 (Figura 10).

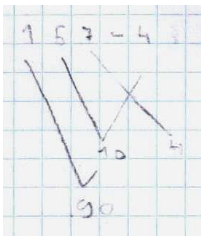


Figura 10. Resolução inicial do problema "Parar ou Avançar" – André

ISBN: 978-989-95733-4-5

Parou, observou o cálculo por instantes e apagou-o. Pedi-lhe que explicasse porquê:

> André – Porque, eu fiz 157 menos 43… Quando eu digo 50 é um bocado… é mais do que 40… Eu acho que estava mal porque como do 40 para 50 é 10, no problema estava a sair o 90. Se vamos tirar 50 e depois… É que eu não sei explicar muito bem.

André foi capaz de rever os dados e o resultado obtido revelando um sentido crítico perante o resultado. André procurou explicar que se 50 é maior que 40, ao efetuar 157-43 não poderia obter um resultado menor que 100.

Tenta resolver o problema novamente, recorrendo a uma estratégia aditiva do tipo A10. Começa por aproximar 43 a um valor de referência, o 50, tentando depois aproximá-lo de 157.

Calculou a soma dos valores que foi adicionando a 43, sem qualquer registo (Figura 11) e disse inseguro:

> André – Agora deu 114, não sei porquê… Se juntar isto, 114.
> Professora – Como é que juntaste?
> (…)
> André – Fiz 50… Este 5 [50] para este 5 [de 57] é 100. Depois este 7 e este 7 [de 57] é 14. Então é 114.
> Professora – E estás em dúvida?
> André – É que agora acho que sim… porque se nós estamos a tirar… Eu já percebi que estamos a tirar.

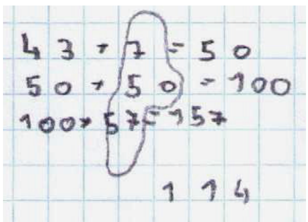


Figura 11. Resolução do problema "Parar ou Avançar" – André

André reconhece neste problema uma situação subtrativa, tentando inicialmente resolvê-lo através de uma estratégia subtrativa, mas, devido à dificuldade sentida na sua utilização, acaba por recorrer a uma estratégia aditiva do tipo A10.

DISCUSSÃO

No Quadro 4 apresentam-se as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução dos problemas analisados:

ISBN: 978-989-95733-4-5

Quadro 4. Estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de problemas de subtração com o significado de comparar

Problema (Cadeia)	**Estratégias utilizadas**		
	Miguel	**Cátia**	**André**
"A mana das gémeas" (1)	Utilização de factos numéricos de adição	Estratégia aditiva de saltos através do 10	Contagem para trás a partir de um número
"Saltos à corda" (2)	Estratégia aditiva do tipo A10	Estratégia aditiva do tipo A10	Estratégia aditiva do tipo A10
"Parar ou Avançar" (3)	Estratégia subtrativa do tipo N10	Estratégia subtrativa do tipo 1010	Estratégia aditiva do tipo A10

A maioria destes problemas foi traduzida pelos três alunos por uma expressão do tipo a+?=b, sendo resolvida principalmente através de estratégias aditivas do tipo A10. Este tipo de estratégia foi também o mais utilizado pelos alunos na resolução dos problemas de subtração, com o significado de completar (Morais, 2011), o que parece confirmar os resultados de Carpenter *et al.* (1998) e De Corte e Verschaffel (1987) que apontam este tipo de estratégia como das mais utilizadas na resolução de problemas de subtração.

Porém, no último problema analisado, os alunos usaram estratégias subtrativas (embora André tenha recorrido depois a uma estratégia aditiva do tipo A10), o que talvez esteja relacionado com o enunciado do problema, pois este refere que "(…) o Miguel teve 43 pontos a menos", o que parece sugerir a operação de subtração.

Relativamente a este problema, é importante destacar a dificuldade sentida por Cátia e André na utilização da estratégia do tipo 1010 na subtração de valores com diferente número de algarismos. Apesar de ambos terem ultrapassado as suas dificuldades, este aspeto evidencia a fraqueza que Beishuizen (2001) associa a este tipo de estratégia, nomeadamente a nível da correta recomposição do resultado final, podendo existir perda de sentido de número durante o procedimento de cálculo.

Outra dificuldade associada a este tipo de estratégia é em situações de subtração com empréstimo. Embora tenham existido estas situações em problemas com o significado de comparar e completar, estes não foram resolvidos por estratégias subtrativas do tipo 1010. Foi na resolução de problemas com o significado de retirar que a operação de subtração pareceu ter sido reconhecida pelos alunos e que estratégias subtrativas do tipo 1010 foram mais utilizadas.

ISBN: 978-989-95733-4-5

Tendo em conta a análise do estudo mais amplo, é de realçar a facilidade com que os alunos utilizaram a estratégia subtrativa do tipo 1010. Ao contrário do que refere a literatura (por exemplo, Beishuizen, 2009; Fuson *et al.*, 1997; Thompson, 2000; Verschaffel, Greer & De Corte, 2007), de um modo geral, a utilização deste tipo de estratégia em situações de subtração com empréstimo não trouxe dificuldades para os alunos, o que indica a compreensão que estes possuem sobre esta operação, particularmente a nível da falta de comutatividade desta operação, e do conhecimento e domínio dos números negativos que Thompson (2000) atribui aos alunos com maior facilidade de cálculo.

Considerando os resultados do estudo aprofundado, é ainda possível constatar que as estratégias utilizadas pelos três alunos evoluíram de estratégias assentes em contagens e utilização de factos numéricos para estratégias do tipo 1010 e N10, sem que estas lhes tenham sido formalmente ensinadas; utilizaram, principalmente, estratégias do tipo 1010 na resolução de adições; e parece ter existido uma preferência por estratégias do tipo 1010 na resolução de problemas de subtração com o significado de retirar e estratégias aditivas do tipo A10, pertencentes à categoria N10, em problemas com os significados de comparar e completar.

Referências Bibliográficas

Abrantes, P., Serrazina, L. & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.

Baroody, A. J. (2006). Why children have difficulties mastering the basic number combinations and how to help them. *Teaching Children Mathematics, 13*(1), 22-31.

Beishuizen, M. (1993). Mental strategies and materials or models for addition and subtraction up to 100 in Dutch second grades. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*(4), 294-323.

Beishuizen, M. (1997). Development of mathematical strategies and procedures up to 100. In M. Beishuizen, K. P. E. Gravemeijer & E. C. D. M. van Lieshout (Eds.), *The role of contexts and models in the development of mathematical strategies and procedures* (pp. 127-162). Utrecht: Freudenthal Institute.

Beishuizen, M. (2001). Different approaches to mastering mental calculation strategies. In J. Anghileri (Ed.), *Principles and Practices in Arithmetic Teaching – Innovative Approaches for the Primary Classroom*, pp. 119–130. Buckingham: Open University Press.

Beishuizen, M. (2009). The empty number line as a new model. In I. Thompson (Ed.), *Issues in Teaching Numeracy in Primary schools*, pp. 157–168. Open University Press.(Reimpressão de 1999)

Beishuizen, M. & Anghileri, J. (1998). Which mental strategies in the early number curriculum? A comparison of British ideas and Dutch views. *British Educational Research Journal*, *24*(5), 519-538.

Buys, K. (2008). Mental Arithmetic. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Children Learn Mathematics: A Learning-Teaching Trajectory with Intermediate Attainment Targets for*

ISBN: 978-989-95733-4-5

Calculation with Whole Numbers in Primary School (pp. 121-146) Netherlands: Sense Publishers. (Obra original publicada em 2001)

Carpenter, T. P., Franke, M. L., Jacobs, V. R., Fennema E. & Empson, S. B. (1998). A longitudinal study of invention and understanding in children's multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(1), 3-20.

De Corte, E. & Verschaffel, L. (1987). The effect of semantic structure on first graders' strategies for solving addition and subtraction word problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 18*(5), 363-381.

Fosnot, C. T. & Dolk, M. (2001). *Young Mathematicians at Work – Constructing Number Sense, Addition, and Subtraction.* Portsmouth NH: Heinemann.

Fuson, K. C., Wearne, D., Hiebert, J. C., Murray, H. G., Human, P. G., Olivier, A. I., Carpenter, T. P. & Fennema, E. (1997). Children's conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(2), 130-162.

McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics, 12*(3), 2-8. British Columbia: Canada.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica.

Morais, C. M. S. (2011). O cálculo mental na resolução de problemas: Um estudo no 1.º ano de escolaridade. *Colecção Teses.* Associação de Professores de Matemática.

Noteboom, A., Bokhove, J. & Nelissen, J. (2008). Glossary Part I. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Children Learn Mathematics: A Learning-Teaching Trajectory with Intermediate Attainment Targets for Calculation with Whole Numbers in Primary School* (pp. 89-91) Netherlands: Sense Publishers.(Obra original publicada em 2001)

Ponte, J. P. & Serrazina, M. L. (2000). *Didáctica da Matemática do 1º Ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.

Sowder, J. (1992). Estimation and number sense. In D. C. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 371-389). New York: Macmillan Publishing Company.

Thompson, I. (1999). Mental calculation strategies for addition and subtraction: Part 1. *Mathematics in School, 28*(5), 2-5.

Thompson, I. (2000). Mental calculation strategies for addition and subtraction: Part 2. *Mathematics in School, 29*(1), 24-26.

Thompson, I. (2009). Getting your head around mental calculation. In I. Thompson (Ed.), *Issues in Teaching Numeracy in Primary schools*, pp. 145–156. Open University Press.(Reimpressão de 1999)

Thompson, I. & Smith, F. (1999). *Mental calculation strategies for addition and subtraction of 2-digit numbers* (Report for the Nuffield Foundation), Department of Education, University of Newcastle upon Tyne.

Treffers, A. (2008). Grade 1 (and 2) – Calculation up to 20. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Children Learn Mathematics: A Learning-Teaching Trajectory with Intermediate Attainment Targets for Calculation with Whole Numbers in Primary School* (pp. 43-60) Netherlands: Sense Publishers.(Obra original publicada em 2001)

Verschaffel, L., Greer, B. & De Corte, E. (2007). Whole number concepts and operations. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 557-628). Reston, VA: NCTM.