Instituto Politécnico de Lisboa

Escola Superior de Educação de Lisboa

OS CONCEITOS DOS ALUNOS DE 2º E 4º ANOS SOBRE TRIÂNGULOS E AS DEFINIÇÕES QUE UTILIZAM

Maria Helena Neves

Dissertação apresentada à Escola Superior de Educação de Lisboa para obtenção do grau de Mestre em Educação Matemática na Educação Pré-escolar e nos 1º e 2º Ciclos do Ensino Básico

2014

Instituto Politécnico de Lisboa

Escola Superior de Educação de Lisboa

OS CONCEITOS DOS ALUNOS DE 2º E 4º ANOS SOBRE TRIÂNGULOS E AS DEFINIÇÕES QUE UTILIZAM

Maria Helena Neves

Dissertação apresentada à Escola Superior de Educação de Lisboa para obtenção do grau de Mestre em Educação Matemática na Educação Pré-escolar e nos 1º e 2º Ciclos do Ensino Básico

Orientadora: Professora Doutora Maria de Lurdes Serrazina

2014

RESUMO

Este estudo insere-se no âmbito da Educação Matemática, nomeadamente na área da Geometria. Com esta investigação pretende-se estudar e compreender quais os conceitos que os alunos têm sobre triângulos e que definições utilizam. Para aprofundar e orientar este estudo foram formuladas as seguintes questões de investigação: (i). compreender quais são os exemplos e contraexemplos intuitivos e não intuitivos para os alunos de 2º e 4º anos; (ii). compreender que propriedades os alunos de 2º e 4º anos identificam em triângulos; (iii). identificar quais as definições de triângulo utilizadas pelos alunos de 2º e 4º anos e (iv). identificar quais as diferenças de conhecimento das figuras que os alunos apresentam no 2º ano (meio do 1º ciclo) e no 4º ano (fim do 1º ciclo).

Atendendo à problemática em estudo, esta investigação tem como base o paradigma interpretativo e optou-se pela utilização de técnicas de investigação de índole qualitativa na recolha e análise de dados. Além disso, esta investigação é um estudo de caso na medida em que se foca no caso particular de dois grupos de alunos: seis do 2º ano e seis do 4º ano de escolaridade. A recolha de dados decorreu através de uma entrevista única realizada aos participantes durante o mês de janeiro de 2014, realizando-se através de dois inquéritos, um para as Professoras Titulares de Turma e outro para os alunos. Para a análise dos dados foram tidas em conta as gravações áudio e vídeo das entrevistas, bem como a análise documental dos registos realizados pelos alunos durante as entrevistas e das Planificações Trimestrais recolhidas.

Os resultados do estudo permitem afirmar que os alunos do 1º Ciclo conseguem apresentar exemplos e contraexemplos de triângulos e, na sua maioria, identificá-los em diferentes contextos. Além disso, parece haver algumas diferenças significativas nos conhecimentos e capacidades que os alunos de 2º e 4º anos apresentam ao analisar propriedades nas figuras e na apresentação de definições de triângulos.

Palavras-chave: Matemática, Geometria, exemplos e contraexemplos de triângulos, propriedades dos triângulos, definições de triângulos.

ABSTRACT

This study falls inside the scope of Mathematic Education, namely on the subject of Geometry. With this research we intend to study and understand which concepts and definitions the students have and utilize concerning triangles. To further deepen and guide this study, the following topics of investigation were enunciated: (i). to understand which are the intuitive and non-intuitive examples and nonexamples for the 2nd and 4th grade students; (ii). to understand which properties the 2nd and 4th year students indentify on triangles; (iii). to identify which are the definitions of a triangle used by 2nd and 4th year students and (iv). to identify the differences of knowledge of figures presented by 2nd (half of 1st cycle) and 4th (end of 1st cycle) years students.

Taking into account the current problematic, this investigation is based on interpretative paradigm and were used investigation techniques of qualitative nature as data analyses and collection methods. Furthermore, this investigation is a case study seeing as how it is focused on the particular case of two groups of students: six from 2nd year and six from 4th year of study. The data collection was done through a single interview to the participants during the month of January 2014, by means of two queries, one given to Class Directors and another for the students. For the data analyses the audio and video recordings of the said interviews were taken into account, together with the analysis of the given answers and the gathered trimestral planifications.

The study results allow us to state that the 1st cycle students are able to present the examples and nonexamples of triangles and, mostly, identify them in different contexts. Furthermore, there seem to be significant differences in knowledge and skills presented by 2nd and 4th year students in the analyses of properties of figures and the presentation of definition of triangles.

Key-words: Mathematics, Geometry, examples and nonexamples of triangles, properties of triangles, definition of triangles.

AGRADECIMENTOS

À minha orientadora, Professora Doutora Maria de Lurdes Serrazina, pelo seu apoio, pela sua disponibilidade e pelas críticas e sugestões que me encaminharam ao longo de todo este trabalho.

Ao meu marido e filho e a toda a restante família, que sempre acreditaram em mim e me apoiaram ao longo deste extenso processo, sem eles não teria sido possível realizar este projeto!

Aos colegas que me acompanharam durante estes dois longos anos e aos amigos que nos últimos dias ajudaram a fazer a revisão de texto.

Aos participantes neste estudo, sem a sua colaboração não teria sido possível.

ÍNDICE

RESUMO i
ABSTRACT ii
AGRADECIMENTOS iii
ÍNDICE iv
CAPÍTULO 1 1
PROBLEMA E CONTEXTO DO ESTUDO 1
1.1. Problema e objetivo do estudo 1
1.2. Questões de investigação 2
1.3. Enquadramento e pertinência do estudo 3
1.4. Organização geral 4
CAPÍTULO 2 7
REVISÃO DA LITERATURA 7
2.1. O ensino e aprendizagem da Geometria 8
2.1.1. Teorias de aprendizagem da Geometria 8
2.1.2. Conceitos em Geometria 19
2.1.3. Classificações, propriedades e definições em Geometria 22
2.1.4. Exemplos, contraexemplos e análise de protótipos 25
2.1.5. Visualização espacial 28
2.1.6. Raciocínio, argumentação e comunicação matemática 30
2.1.7. Desenhos, representações e utilização de materiais manipuláveis 34
2.2. Os conceitos geométricos envolvidos 37
2.2.1. Figuras geométricas 2D - triângulos 37
2.2.2. Conceitos de ângulos e triângulos 39
2.3. Currículo e Competências geométricas a desenvolver no 1ºciclo 41

2.3.1. Orientações curriculares gerais 41

2.3.2. Enquadramento com o Programa de Matemática 2007, as Metas Curriculares 2012 e o Programa de Matemática 2013 44

CAPÍTULO 3 47

METODOLOGIA 47

3.1. Opções metodológicas 47

3.2. Participantes e critérios de seleção 49

3.3. Instrumentos de recolha de dados 49

3.4. Procedimentos de recolha de dados 51

3.5. Procedimento de análise de dados... 53

CAPÍTULO 4 57

OS CONCEITOS E AS DEFINIÇÕES DE TRIÂNGULOS DOS ALUNOS 57

4.1. Os alunos do 2º ano 57

4.1.1. Exemplos e contraexemplos de triângulos apresentados pelos alunos 59

4.1.2. Identificação de exemplos e contraexemplos 67

4.1.3. Comparação de figuras 77

4.1.4. Descrição e definição de triângulos 85

4.1. Os alunos do 4º ano 92

4.2.1. Exemplos e contraexemplos de triângulos apresentados pelos alunos 94

4.2.2. Identificação de exemplos e contraexemplos 102

4.2.3. Comparação de figuras 108

4.2.4. Descrição e definição de triângulos 114

CAPÍTULO 5 123

SÍNTESE, CONCLUSÕES, RECOMENDAÇÕES E LIMITAÇÕES DO ESTUDO 123

5.1. Síntese do estudo 123

5.2. Conclusões do estudo 124

5.2.1. Exemplos e contraexemplos intuitivos e não intuitivos para os alunos de 2º e 4º anos ... 124

5.2.2. Propriedades que os alunos de 2º e 4º anos identificam em triângulos 131

5.2.3. Definições de triângulo utilizadas pelos alunos de 2º e 4º anos ... 137

5.2.4. Diferenças de conhecimento das figuras que os alunos apresentam no 2º ano e no 4º ano ... 140

5.3. Recomendações, extensão e limitações do estudo ... 147

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS ... 149

ANEXOS ... 155

Anexos

Anexo 1 - Pedido de autorização de Participação às Professoras e Encarregados de Educação. 156

Anexo 2 - Guião das Entrevistas realizadas às Professoras Titulares de Turma 158

Anexo 3 - Guião das entrevistas realizadas aos alunos 160

Anexo 4 - Cartões individuais com exemplos e contraexemplos de triângulos 163

Anexo 5 - Imagem (desenho) composta pelos vários exemplos e contraexemplos de triângulos. 165

Anexo 6 - Folha com diversas figuras iguais e diferentes em orientação e tamanhos 166

Anexo 7 - Cartões com duas figuras para comparação 167

Índice de tabelas

Tabela 1 - *Níveis de aprendizagem da Geometria* 9

Tabela 2 - *Reformulação dos níveis de aprendizagem de Geometria* 14

Tabela 3 - *Estádios de desenvolvimento cognitivo e descrição do tipo de respostas* 17

Tabela 4 - *Tipos de ângulos* 40

Tabela 5 - *Classificação de triângulo segundo o comprimento dos seus lados* . 41

Tabela 6 - *Classificação de triângulo segundo os ângulos* 41

Tabela 7 - *Exemplos e contraexemplos, intuitivos e não intuitivos de triângulos utilizados nas entrevistas aos alunos* 51

Índice de Figuras

Figura 1 - Geoplano e elásticos utilizados na investigação 37

Figura 2 - *Geo Strips* utilizadas na investigação (3 de cada cor e tamanho)...... 37

Figura 3 - Ângulos convexos e não convexos de acordo com Palhares (2004) . 40

Figura 4 - Exemplos e contraexemplos de triângulos apresentados por André, Filipa e Carlos respetivamente na folha de papel branco 60

Figura 5 - Exemplos e contraexemplos de triângulos apresentados por Beatriz, Diana e Emília respetivamente na folha de papel branco 61

Figura 6 - Exemplos e contraexemplos de triângulos apresentados por André, Carlos e Filipa respetivamente no geoplano.. 61

Figura 7 - Exemplos e contraexemplos de triângulos apresentados por Beatriz, Diana e Emília respetivamente no geoplano 62

Figura 8 - Exemplos e contraexemplos de triângulos apresentados por André, Filipa, Carlos e Emília respetivamente na folha de papel ponteado 62

Figura 9 - Exemplos e contraexemplos de triângulos apresentados por Beatriz e Diana respetivamente na folha de papel ponteado 63

Figura 10 - Exemplos de triângulos apresentados por Beatriz, Diana e Filipa respetivamente com as *Geo Strips* 63

Figura 11 - Contraexemplos de triângulos apresentados por André, Diana e Emília respetivamente com a *Geo Strips* 64

Figura 12 - Cartões com exemplos não intuitivos de triângulos reorientados pela Diana 68

Figura 13 - Imagem (desenho) composta com as figuras que a Diana assinalou como triângulos 73

Figura 14 - Imagem (desenho) composta com as figuras que o André assinalou como triângulos 75

Figura 15 - Figuras para comparação 77

Figura 16 – Figuras consideradas iguais por André e Emília respetivamente ... 79

Figura 17 – Definições iniciais e finais dos alunos de 2º ano 89

Figura 18 - Exemplos e contraexemplos de triângulos apresentados por Hélder, Ivo e Leonor respetivamente na folha de papel branco 95

Figura 19 - Exemplos e contraexemplos de triângulos apresentados por Gabriela, Joana e Manuel respetivamente na folha de papel branco 95

Figura 20 - Exemplos e contraexemplos de triângulos apresentados por Gabriela, Hélder, Ivo, Joana, Leonor e Manuel respetivamente no geoplano 96

Figura 21 - Exemplos e contraexemplos de triângulos apresentados por Ivo, Joana e Manuel respetivamente no papel ponteado 98

Figura 22 - Exemplos e contraexemplos de triângulos apresentados por Gabriela, Hélder e Leonor respetivamente no papel ponteado 98

Figura 23 - Exemplos de triângulos apresentados por Manuel com as *Geo Strips* 99

Figura 24 - Contraexemplos de triângulos apresentados por Gabriela, Hélder, Ivo, Joana, Leonor e Manuel respetivamente com as *Geo Strips* 99

Figura 25 - Cartões com exemplos não intuitivos de triângulos reorientados pelo Hélder 102

Figura 26 - Figuras consideradas iguais pela Joana 109

Figura 27 - Figuras consideradas iguais pelo Hélder 110

Figura 28 – Triângulos isósceles e obtuso com os ângulos assinalados pela Leonor 113

Figura 29 - Definições iniciais e finais dos alunos de 4º ano 118

CAPÍTULO 1

PROBLEMA E CONTEXTO DO ESTUDO

Este primeiro capítulo define e contextualiza o estudo, tendo início com a identificação do problema e do objetivo do estudo, seguindo-se a enumeração das questões de investigação e o enquadramento e pertinência do estudo. Por fim, é apresentada a organização geral do mesmo.

1.1. Problema e objetivo do estudo

Sendo a Matemática uma das ciências e das disciplinas escolares mais antigas do mundo (Ministério da Educação [ME], 2007) a sua importância é reconhecidamente incontestável. A Matemática é uma ciência baseada em cadeias de raciocínio lógico e que procura a sistematização em termos axiomáticos-dedutivos (Ponte & Serrazina, 2000); é uma ciência que trabalha com objetos e relações abstratas e que utiliza uma linguagem própria que leva à compreensão e representação do mundo matemático (ME, 2007).

Vivemos no século XXI, em tempos de mudança rápida e acentuada, a necessidade de compreender e usar a Matemática na vida quotidiana, enquanto parte de uma herança social, na escola, no local de trabalho e em meios comunitários, científicos e tecnológicos surge diariamente a todos os elementos da sociedade. Assim, cada vez mais, todas as pessoas precisam de conhecer e compreender a Matemática, "todos os alunos devem ter a oportunidade e o apoio necessário para aprender Matemática, com significado, com profundidade e compreensão" (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2007 p. 5). Isto não significa que todos os alunos sejam iguais, mas sim, que deverão ter igualdade de oportunidade de acesso às aprendizagens.

Os Programas de Matemática do Ensino Básico português (ME, 2007 e Ministério da Educação e Ciência [MEC], 2013), estruturam-se em quatro grandes temas: Números e Operações, Álgebra, Geometria e Organização e Tratamento de

Dados. A Geometria surge no Programa de Matemática de 2007 (ME, 2007) com o objetivo de desenvolver o sentido espacial dos alunos, através do estudo das figuras geométricas bi e tridimensionais, procura-se, entre outros objetivos, que os alunos relacionem propriedades geométricas estudando diversas transformações, primeiro de forma intuitiva e depois com crescente formalização. No Programa de 2013 (MEC, 2013) é delineada a apresentação das noções básicas de Geometria.

Relativamente à Geometria, os alunos mais novos são naturalmente crianças curiosas que demonstram interesse em observar e descrever as formas e começar a descrever as suas propriedades. O NCTM (2007) salienta que a Geometria não é só um conjunto de definições, compõe-se pela descrição de relações e pelo raciocínio, necessitando assim os alunos de construir uma compreensão da Geometria (do informal para o mais formal) ao longo dos anos.

No entanto, diversos estudos sobre as aprendizagens dos alunos nos primeiros anos de escolaridade demonstram dificuldades em aprender conceitos básicos de Geometria, apresentando dificuldades em reconhecer componentes, propriedades e relações entre estas (Clements, Swaminathan, Hannibal & Sarama, 1999).

É neste contexto que surge a necessidade de desenvolver este estudo, não sendo possível estudar os conceitos de todos os alunos sobre todas as figuras geométricas, esta investigação terá como objetivo estudar e compreender quais os conceitos que os alunos têm sobre triângulos e que definições utilizam. Sendo professora do 1º ciclo, tenho interesse em focar o estudo neste Ciclo de ensino e centrarei o estudo em alunos do 2º e 4º anos para poder ter uma perspetiva de relacionamento em diferentes níveis da aprendizagem.

1.2. Questões de investigação

Para aprofundar e orientar este estudo foram formuladas as seguintes questões de investigação:

I. Compreender quais são os exemplos e contraexemplos intuitivos e não intuitivos para os alunos de 2º e 4º anos;

II. Compreender que propriedades os alunos de 2º e 4º anos identificam em triângulos;
III. Identificar quais as definições de triângulo utilizadas pelos alunos de 2º e 4º anos;
IV. Identificar quais as diferenças de conhecimento das figuras que os alunos apresentam no 2º ano (meio do 1º ciclo) e no 4º ano (fim do 1º ciclo).

1.3. Enquadramento e pertinência do estudo

No Programa de Matemática do Ensino Básico de 2007 (ME, 2007), são delineados como objetivos gerais do ensino da Matemática:

> Os alunos devem conhecer os factos e procedimentos básicos da Matemática (…); desenvolver uma compreensão da Matemática (…); ser capazes de lidar com ideias matemáticas em diversas representações (...); ser capazes de comunicar as suas ideias e interpretar as ideias dos outros, organizando e clarificando o seu pensamento matemático (...); ser capazes de raciocinar matematicamente usando os conceitos, representações e procedimentos matemáticos (...); ser capazes de resolver problemas, capazes de estabelecer conexões entre diferentes conceitos e relações matemáticas e também entre estes e situações não matemáticas (...); ser capazes de fazer Matemática de modo autónomo (...); ser capazes de apreciar a Matemática. (p. 4-6)

Como professora do 1º ciclo do Ensino Básico, com alguns anos de experiência, e tendo sempre em mente estes objetivos gerais, tenho observado que os alunos demonstram muitas dificuldades ao nível da Geometria, nomeadamente na identificação e seleção de propriedades relevantes na classificação de figuras como os triângulos e na comunicação das suas análises, nomeadamente na utilização da linguagem formal inerente ao estudo das propriedades geométricas das figuras.

Não querendo apenas transmitir um conjunto de definições, regras e procedimentos, mas sim que os alunos partam de exemplos concretos do seu mundo para formarem conceitos e que os alunos desenvolvam capacidades espaciais (Ponte & Serrazina, 2000), surgem-me muitas vezes dúvidas sobre o que é que os alunos realmente apreendem da Geometria escolar? Que exemplos e contraexemplos identificam ou quais serão para eles intuitivos ou não? Que propriedades identificam? Que definições constroem? São questões que me assaltam e que me motivaram a empreender esta investigação.

Durante o primeiro ano do Mestrado em Educação Matemática na Educação Pré-escolar e nos 1º e 2º ciclos do Ensino Básico, estas questões ganharam ainda mais significado durante a frequência da Unidade Curricular de Geometria e Medida. Foram estudados conceitos como a classificação e propriedades das figuras geométricas, a formação e definição de conceitos em Geometria, lendo e analisando artigos relacionados com exemplos e contraexemplos (protótipos) de figuras e a análise de teorias de aprendizagem da Geometria. Assim, o estudo destes temas despertaram ainda mais o meu interesse por esta área do saber matemático e acrescentaram alguns pontos de interrogação às minhas questões sobre os conhecimentos geométricos dos alunos no 1º Ciclo.

Fazendo uma breve pesquisa, nomeadamente a nível dos Repositórios das Universidades e Politécnicos Portugueses, constatei ainda que há poucos estudos em Portugal no âmbito da Geometria, nomeadamente em relação aos triângulos no 1º ciclo, tornando-se assim pertinente um estudo que comece a preencher esta lacuna na investigação portuguesa.

1.4. Organização geral

Esta dissertação encontra-se organizada em cinco capítulos, compreendendo 1. Problema e contexto de estudo, 2. Revisão da literatura, 3. Metodologia, 4. Análise dos dados e discussão dos resultados e 5. Síntese, Conclusões, Recomendações e limitações do estudo.

Neste primeiro capítulo são delineados o problema e o objetivo do estudo, são enumeradas as questões do estudo, sendo realizado um enquadramento e a pertinência do estudo e anunciada a presente organização geral.

No segundo capítulo é realizada uma revisão da literatura que contextualiza esta investigação, iniciando com as referências ao ensino e aprendizagem da Geometria, são apresentados os conceitos geométricos envolvidos neste estudo e, por fim, é feita uma breve contextualização das orientações curriculares internacionais e nacionais a desenvolver no 1º Ciclo.

O terceiro capítulo apresenta as opções metodológicas delineadas ao longo deste estudo, apresentando, também, os participantes e os critérios de seleção utilizados, os instrumentos de recolha de dados e os procedimentos de recolha e análise dos dados.

No quarto capítulo é desenvolvida a análise dos dados e a discussão dos resultados, estando organizada de acordo com os estudos de caso delineados (ou seja, por anos de ensino, 2º e 4º anos) e por ordem dos critérios de análise estabelecidos.

Por fim, é apresentada uma síntese, bem como as conclusões, recomendações e limitações do estudo, sendo delineadas primeiramente a síntese e as conclusões do estudo, relacionando-as com a revisão da literatura efetuada e com as questões orientadoras delineadas e posteriormente as recomendações, extensão e limitações do estudo.

CAPÍTULO 2

REVISÃO DA LITERATURA

"A palavra *Geometria* é derivada das palavras gregas *geos* (significando *terra*) e *metron* (significando *medida*). Os antigos egípcios, chineses, babilónios e gregos usaram a Geometria na agrimensura, navegação, astronomia e em outras ocupações práticas." (Rich, 2003, p. 72)

No que às crianças diz respeito a Geometria é principalmente um instrumento para a criança compreender o espaço em que se mexe "pelo que se torna importante promover a aprendizagem baseada na experimentação e na manipulação (...) destacam-se como aspetos a desenvolver, as capacidades de visualização espacial e de verbalização, a intuição e a utilização destas na resolução de problemas." (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999, p. 59). No entanto, um tema matemático não se encontra isolado dos outros, pelo contrário, na Matemática evidenciam-se sempre conexões entre os temas, sendo, por isso, essencial ter em conta na educação o desenvolvimento de competências matemáticas transversais.

Neste capítulo são apresentados alguns resultados de estudos que se encontram relacionados com a Geometria escolar em estudo, bem como aspetos teóricos sobre a mesma. Para poder estabelecer um quadro teórico de referência procura-se, em primeiro lugar, enquadrar o ensino e a aprendizagem da Geometria através da apresentação de algumas teorias de aprendizagem; segue-se a construção de conceitos; a menção à aplicação de classificações, propriedades e definições em Geometria; a importância dos exemplos, contraexemplos e análise de protótipos; salienta-se a importância do desenvolvimento da visualização espacial e do raciocínio, da argumentação e da comunicação matemática e, por fim, salienta-se a utilidade dos desenhos, das representações e da utilização de materiais manipuláveis no ensino e aprendizagem da Geometria.

O segundo subcapítulo é uma breve nota sobre quais os conceitos subjacentes às figuras geométricas consideradas neste estudo, nomeadamente os conceitos relacionados com as figuras geométricas 2D e os conceito de ângulo e triângulos.

Por fim, é feita uma breve análise ao currículo e às competências geométricas a desenvolver no 1º Ciclo, primeiro fazendo referência a orientações gerais (de fontes internacionais e nacionais) e posteriormente através de uma breve análise das orientações do Programa de Matemática do 1º Ciclo Ensino Básico de 2007 (ME; 2007), das Metas Curriculares do Ensino Básico de 2012 (MEC, 2012) e do Programa de Matemática 2013 (MEC, 2013).

2.1. O ensino e aprendizagem da Geometria

2.1.1. Teorias de aprendizagem da Geometria

"Os alunos aprendem ideias matemáticas quer através de experiências informais e não estruturadas ocorridas no meio quer através do ambiente formal da sala de aula." (Matos & Serrazina, 1996, p.64) Segundo Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) pesquisas sobre o processo do pensamento geométrico evoluem de forma morosa, "desde as formas intuitivas iniciais de pensamento até às formas dedutivas finais, em que a indução e a dedução se vão articulando e desenvolvendo." (p. 61)

São vários os autores que se dedicaram ao estudo da evolução das aprendizagens em Geometria, neste subcapítulo salientam-se os níveis de entendimento geométrico de Piaget, os níveis de aprendizagem de van Hiele e a sua reformulação por Battista (2007) e, por fim, é referida a taxonomia SOLO proposta por Biggs e Collis (1982)

Segundo Hannibal (1999) os primeiros estudos sobre os conceitos das crianças sobre figuras começaram nos anos cinquenta com os estudos de psicologia de Piaget que observou o desenvolvimento de diferentes níveis de entendimento geométrico. Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) salientam os estudos de Piaget sobre o desenvolvimento espacial nas crianças, que começam antes do desenvolvimento da linguagem através das interações da criança com o meio, distinguindo "*perceção* – conhecimento dos objetos resultantes de um contacto direto com eles – de *representação* (ou *imaginário mental*) – que envolve a evocação de objetos na sua ausência." (p. 62). Ainda de acordo com estes autores, para Piaget haverá uma sequência progressiva na distinção das propriedades geométricas em termos de perceção e de representação, desde as *topológicas* (propriedades globais, independentes do tamanho e da forma), passando pelas *projetivas* (capacidade de prever como se pode ver um objeto em diferentes ângulos) e as propriedades *euclidianas* (que se relacionam com o tamanho, distância e direção).

Clements et al. (1999) criticam os estudos piagetianos salientando que estes não tiveram em conta uma componente educacional e não apoiam a ideia da existência de uma tipologia primária (em que as ideias evoluíam de uma relação topológica, passando pela projetiva até à euclidiana) porque, salientam, outros estudos já demonstraram que crianças novas já têm noções euclidianas como a duplicação ou o reconhecimento. Além disso as teorias cognitivas não tiveram em conta as relações sociais e culturais e a inter-relação entre os esquemas intuitivos e o desenvolvimento concetual.

Por outro lado, uma grande maioria dos autores (por exemplo Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999 e Ponte & Serrazina, 2000) refere a teoria que Dina e Peter van Hiele desenvolveram nos meados do séc. XX na Holanda. Esta teoria descreve a progressão das aprendizagens dos alunos em Geometria ao longo de cinco níveis de compreensão (tabela 1) que apresentam estruturas de raciocínio progressivamente mais complexas (Ceia, 2002):

Tabela 1 - *Níveis de aprendizagem da Geometria*
(Baseado em Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999 e Ponte & Serrazina, 2000).

Nível	**Designação**	**Descrição**
Nível 1	**Visualização/ Reconhecimento** (*visual level*)	Os alunos compreendem as figuras globalmente, isto é, as figuras são entendidas pela sua forma e aparência global, são reconhecidas visualmente e não pelas suas propriedades.
Nível 2	**Análise** (*discriptive level*)	Neste nível inicia-se a análise dos conceitos geométricos. Os alunos entendem as figuras como tendo partes e reconhecem-nas pelas suas componentes ou seja pelo conjunto das suas propriedades.

Nível 3	**Ordenação** (*informal deduction level*)	Os alunos conseguem de forma lógica deduzir algumas propriedades de outras, ordenam logicamente as propriedades das figuras por meio de curtas sequências de dedução e compreendem as correlações entre figuras, podendo estabelecer inter-relações entre as propriedades quer duma mesma figura, quer entre figuras.
Nível 4	**Dedução (formal)**	Os alunos entendem a Geometria como um sistema axiomático dedutivo, conseguem construir e provar e não apenas memorizar e começam a desenvolver sequências mais longas de enunciados e a entender o significado da dedução, o papel dos axiomas, teoremas e provas.
Nível 5	**Rigor**	Os indivíduos estudam diversos sistemas axiomáticos para a Geometria, podendo, por exemplo, discutir se uma determinada definição de triângulo isósceles é apropriada a uma determinada Geometria.

Matos e Serrazina (1996) salientam o facto de esta teoria ter sido desenvolvida num ambiente de trabalho onde surgiam novos materiais (como figuras de cartão, geoplano, réguas e compassos), métodos (que permitiam aos alunos desenhar, dobrar, discutir, comparar e observar), objetivos e conteúdos para o ensino na Matemática, numa altura em que nascia aquela que viria a ser conhecida como a *Matemática Moderna*. Clementes e Battista (1992) realçam como principais características desta teoria: (1) considerar a aprendizagem um processo descontinuado, ou seja, que há "saltos" no processo de aprendizagem, (2) os níveis serem sequenciais e hierárquicos, (3) os conceitos implicitamente compreendidos num nível tornarem-se explicitamente compreendidos no nível seguinte e (4) cada nível ter a sua própria linguagem. Em cada nível são utilizados códigos linguísticos específicos, pelo que poderão surgir dificuldades de comunicação entre pessoas que se encontram em níveis diferentes de compreensão.

Tendo em conta o nível de pensamento dos alunos do 1º ciclo, o ensino da Geometria deve procurar ajudá-los a progredir do nível visual para o nível de análise, enriquecendo a capacidade de visualização e de identificação das propriedades das figuras (Ponte & Serrazina, 2000).

Breyfogle e Lynch (2010) ressaltam que ao contrário dos modelos Piagetianos, estes níveis de van Hiele não são modelos de desenvolvimento mental em que as crianças têm de ter uma determinada idade para poder progredir num determinado nível. Nesta teoria a progressão é determinada pelo ensino, ou seja, através de uma sequência de fases de ensino adequadas que os professores devem propor para que os alunos possam progredir para níveis superiores de pensamento (Ponte & Serrazina, 2000). Assim, os alunos progridem através dos níveis de acordo com a sua experiência (não dependendo esta da idade ou da maturação biológica), sendo fundamental que os professores lhes proporcionem tarefas e atividades que lhes permitam um desenvolvimento continuado através dos níveis (van Hiele, 1999; Breyfogle & Lynch, 2010). O processo de aprendizagem tem de ser adequado de forma a permitir que cada indivíduo progrida ao longo dos níveis, atingindo um determinado nível depois de passar por todos os outros que o antecedem (Ceia, 2002).

van Hiele (1999) destaca que, para que os alunos progridam de um nível para outro, as sequências de atividades propostas pelos professores devem "começar com uma fase exploratória, construindo de forma gradual conceitos e linguagem correlacionada, e culminar com atividades sumárias que ajudem os alunos a integrar o que aprenderam no que já sabiam" (p. 311). Este autor propõe mesmo que os alunos comecem as atividades de Geometria de uma forma lúdica, "brincando" com materiais manipuláveis, assim, as crianças pensam que estão a brincar, quando na realidade, ao resolver, por exemplo um puzzle, estão a aprender sem saber que o estão a fazer. O autor propõe que quando as crianças desenvolvem atividades com mosaicos e outros materiais manipuláveis, podem enriquecer as suas estruturas visuais e o seu conhecimento sobre as figuras e as suas propriedades.

Não sendo a passagem de um nível para o outro um processo natural, mas sim resultante da influência de um programa de ensino-aprendizagem, os professores têm de escolher uma abordagem pedagógica ao nível dos alunos, que deverá em cada nível seguir uma sequência de fases de aprendizagem (Matos & Serrazina, 1996). Assim, Van Hiele (1999) propõe que o ensino deve seguir sequências de atividades com cinco fases: informação, orientação guiada, explicitação, orientação livre e integração.

van Hiele (1999) salienta que durante a aprendizagem ao longo destes níveis os professores têm sempre de ter em conta 3 regras fundamentais: (1) Planear atividades que direcionem a atenção das crianças para as propriedades das figuras; (2) Introduzir a terminologia correta e encorajar as crianças a utilizá-la em debates; e (3) Encorajar a resolução de problemas para que as crianças expliquem os seus pensamentos sobre a descrição de propriedades.

Segundo Ceia (2002) muitos autores criticam este modelo por os vários níveis de desenvolvimento estarem descritos de forma pouco precisa, o que impede a determinação de forma clara e inequívoca do nível de desempenho de um indivíduo. Além disso, não é definido nesta teoria de forma clara a possibilidade de um mesmo indivíduo estar (ou não) em níveis diferentes para conceitos distintos. Por fim, este autor salienta que, se o desempenho não está dependente apenas das capacidades cognitivas, pode apresentar diferentes características durante a realização de uma dada tarefa.

Clements et al. (1999) criticam a teoria de van Hiele por considerarem que embora esta teoria tenha tido em conta a componente educacional, não se referiu às aprendizagens das crianças mais novas, os seus estudos basearam-se só nas aprendizagens na educação básica e posteriores. Além disso estes autores consideram que a classificação e descrição do pensamento como principalmente "visual" não apreende toda a variedade de respostas que os alunos dão.

Clements e Battista (1992) e Clements (1999) sugerem mesmo a existência de um nível de *pré-reconhecimento,* nível antes do primeiro nível de van Hiele ("nível visual"). No nível de *pré-reconhecimento* as crianças atendem apenas a um subconjunto de características visuais das figuras e, como tal, não identificam muitas figuras dessa classe, nem distinguem diferentes figuras da mesma classe. Neste nível as crianças não identificam com segurança os triângulos, círculos ou quadrados porque as suas noções prototípicas ainda estão a ser formadas. Assim, podem considerar, por exemplo, que todas as figuras fechadas e "arredondadas" são círculos ou que todas as figuras com os lados quase todos iguais e os ângulos "mais ou menos" retos são quadrados.

Clements et al. (1999) através do seu estudo concluem que as crianças que inicialmente utilizam a visualização para reconhecer e categorizar as figuras, à medida que vão desenvolvendo os seus esquemas de análise começam a ser capazes de analisar as características e propriedades das figuras. Assim, as crianças que não conseguem distinguir exemplos de classes e contraexemplos encontram-se ainda num nível de *pré--reconhecimento*, enquanto as crianças que já se encontram a aprender a fazê-lo, estando a começar a formar esquemas de reconhecimento estão num nível de transição. Estes autores propõem uma reconceptualização do primeiro nível como um "nível sincrético" já que nesta altura, e de acordo com as suas investigações, as crianças diferenciam as figuras utilizando uma combinação entre o reconhecimento visual de protótipos e um ainda pouco sofisticado entendimento das suas propriedades. Este nível sincrético seria uma "síntese do conhecimento declarativo e imagético verbal, cada um interagindo com o outro e aumentando-o" (p. 206). Assim, neste nível as crianças facilmente utilizam o seu conhecimento declarativo para explicar porque é que uma figura não pertence a uma classe, por existir um grande contraste entre essa figura e os protótipos visuais da criança.

Battista (2007) propõe uma alternativa aos níveis propostos por van Hiele, elaborando uma descrição mais precisa da evolução dos alunos desde as conceptualizações intuitivas e informais das figuras bidimensionais até ao sistema conceptual formal e baseado nas propriedades utilizado pelos matemáticos (tabela 2). Na sua proposta Battista (2007 e 2009) salienta que os estudantes podem, para diferentes tópicos da Geometria, encontrar-se em diferentes níveis de desenvolvimento e que os padrões de pensamentos que caracterizam cada um dos níveis se podem desenvolver de forma simultânea mas com diferentes ritmos, assim, frequentemente os alunos exibem ao mesmo tempo características de diferentes níveis.

Tabela 2 - *Reformulação dos níveis de aprendizagem de Geometria*
(Baseado em Battista, 2007 e 2009)

Nível	**Designação**	**Descrição**
Nível 1	**Raciocínio visual-holístico**	Os alunos identificam, descrevem e raciocinam acerca das formas e outras configurações geométricas de acordo com a sua aparência global, salientando-se que a orientação das formas pode influenciar a sua identificação. Neste nível as justificações são vagas e holísticas (por exemplo: "porque se parecem iguais" ou "porque os retângulos são mais compridos"), referem-se muitas vezes a perceções visuais de figuras prototípicas (por exemplo: "é um retângulo porque se parece com uma porta") e podem recorrer a transformações visuais imaginativas (por exemplo: "é um quadrado, porque se o virar, parece-se com um quadrado").
1.1	**Pré-reconhecimento**	Os alunos são incapazes de identificar muitas formas comuns.
1.2	**Reconhecimento**	Os alunos identificam corretamente muitas formas comuns.
Nível 2	**Raciocínio componencial-analítico**	Os alunos explicitamente atendem, conceptualizam e especificam as formas descrevendo as suas partes e as relações espaciais entre as partes.
2.1	**Raciocínio componencial informal-visual**	Os alunos fazem descrições das partes e propriedades das formas de maneira informal e imprecisa, neste nível as descrições e o raciocínio são baseados nas perceções visuais, focando-se inicialmente em partes das formas (por exemplo, contar os vértices das formas, podendo referir-se às mesmas como cantinhos) e depois relacionando essas partes (por exemplo, referindo que uma figura tem lados retos).
2.2	**Raciocínio componencial informal e formal**	Com o início do estudo dos conceitos geométricos especificados nos currículos escolares (como ângulo e paralelismo) os alunos começam a utilizar uma combinação entre a linguagem formal e informal para a descrição das formas (por exemplo: "os lados opostos são iguais e os cantos são retos"), sendo as partes formais das descrições realizadas ainda insuficientes para especificar completamente as formas. Nesta altura as descrições e o raciocínio dos alunos ainda se baseiam nas perceções visuais e parecem ocorrer à medida que os alunos analisam a forma.

2.3	Raciocínio baseado nas propriedades suficientemente formal	Os alunos utilizam de forma explícita e exclusiva linguagem e conceitos formais para descrever e raciocinar sobre as formas de tal maneira que utilizam um conjunto de propriedades suficientes para especificar as formas. Os alunos já conseguem criar definições das formas, no entanto, estas são listas de características desconectadas umas das outras, ou seja não são descrições económicas porque ainda não relacionam as propriedades nem reconhecem que umas propriedades implicam as outras (por exemplo: "é um retângulo porque tem lados opostos iguais e quatro ângulos retos").
Nível 3	Raciocínio baseado nas propriedades relacional-inferencial	Os alunos explicitamente interrelacionam e fazem inferências sobre as propriedades geométricas das formas, no entanto estas variam progressivamente começando com associações empíricas, progridem para uma análise componencial que explica porque é que uma propriedade implica outra, depois inferem logicamente uma propriedade de outra e, por fim, utilizam inferências para organizar de forma lógica uma classificação hierárquica.
3.1	Relações empíricas	Os alunos usam evidências empíricas para concluir se uma forma tem uma propriedade então tem uma outra. (por exemplo: "se a forma tem a propriedade X, então também tem a propriedade Y").
3.2	Análise componencial	Ao analisarem como uma dada forma pode ser construída através de uma componente de cada vez, os alunos concluem que se uma propriedade ocorre, uma outra propriedade deve ocorrer (por exemplo, podem concluir que se um quadrilátero tem quatro ângulos retos, os seus lados opostos são iguais porque ao desenhar um retângulo fazendo uma sequência de perpendiculares, não podem fazer lados opostos diferentes).
3.3	Inferência lógica	Os alunos fazem inferências lógicas singulares sobre as propriedades; eles operam mentalmente nas afirmações das propriedades e não em imagens (por exemplo, porque um quadrado tem todos os lados iguais).

3.4	Classificação hierárquica baseada em inferência lógica	Os alunos utilizam o raciocínio lógico para reorganizar as classificações de formas numa hierarquia lógica (por exemplo: "um quadrado é um retângulo") assim, os alunos dão justificações lógicas para justificar as suas classificações e já são capazes de analisar e compreender definições económicas de classes de formas.
Nível 4	Dedução formal e prova	Os alunos entendem e podem construir provas geométricas formais, ou seja, dentro de um sistema axiomático, podem produzir uma sequência de declarações que de forma lógica justificam as conclusões e as sequências de dados.
Nível 5	Rigor	Os alunos entendem e podem usar e analisar, sistemas axiomáticos alternativos. Este nível geralmente corresponde a estudos geométricos universitários.

A taxonomia SOLO, proposta por Biggs e Collis (1982), propõe a análise às respostas produzidas durante o desenvolvimento de uma tarefa, em vez de refletir sobre as capacidades dos indivíduos (como sugeria van Hiele). Assim, não se pretende avaliar ou fazer inferências sobre a estrutura cognitiva do indivíduo, mas apenas avaliar o seu desempenho num determinado momento, atribuindo-se categorias às respostas que este é capaz de dar. Dependendo de diversos fatores (como a motivação, o seu estádio de desenvolvimento ou de conhecimentos prévios relacionados com a tarefa), o desempenho de um mesmo indivíduo pode ser diferente em momentos distintos e em diferentes áreas, não significando, no entanto, que as suas capacidades individuais se modificaram.

A origem da taxonomia SOLO está nas teorias Piagetianas e nas reformulações Neopiagetianas aos níveis de desenvolvimento de Piaget que se seguiram (Huerta, 1999). Deve ter-se em conta, quando se usa esta taxonomia, os estágios de desenvolvimento cognitivo apresentados por Piaget e reformulados por Collis (1975, citado por Biggs & Collis, 1982) (tabela 3). Estes estágios de desenvolvimento vão evoluindo desde as ações concretas até aos conceitos abstratos e a análise da estrutura das respostas em si (Huerta, 1999). Biggs e Collis (1982) afirmam que a progressão dos estudantes ao longo da aprendizagem segue uma sequência consistente, são um ciclo de aprendizagem que se refere a uma progressão hierárquica em que se vão tornando mais complexas as estruturas de resposta.

A taxonomia SOLO desenvolve-se em cinco níveis (ver tabela 3), definindo-se em cada um deles três tipos de características: as capacidades, o tipo de estrutura das respostas e a consciência e capacidade de elaborar conclusões (estas características possibilitam discriminar as diversas categorias de resposta ou produções).

Tabela 3 - *Estádios de desenvolvimento cognitivo e descrição do tipo de respostas* (Baseado em Ceia, 2002 e Biggs & Collis, 1982)

Estágio de desenvolvimento base (com referência à idade mínima)	**Níveis SOLO**	**Capacidades** Quantidade de memória necessária ou atenção requerida (tempo em que a atenção está mobilizada) exigidas pelos diferentes níveis.	**Relacionamento de operações** Forma como as respostas se inter-relacionam de forma adequada com as perguntas.	**Consistência e capacidade de concluir** Necessidade de chegar a uma qualquer conclusão; Elaborar conclusões consistente, ou seja, que não sejam contraditórias com os dados, nem com outras possíveis conclusões.
Pré-operacional *(Pre-operacional)* **(4-6 anos)**	**Pré-estrutural** *(Prestructural)*	Capacidade mínima de encontrar sugestões dando respostas confusas.	Nega ou repete o problema. Utiliza o senso comum para especificar.	Não sente necessidade de ser consistente. Conclui sem sequer dar a necessária atenção ao problema.
Operações concretas *(Early concrete)* **(7-9 anos)**	**Uni-estrutural** *(Unstructural)*	Fraca capacidade de encontrar sugestões ou dados relevantes.	Consegue generalizar apenas em relação a um aspeto.	Não sente necessidade de ser consistente, concluindo demasiado cedo: salta para a conclusão tendo por base apenas um aspeto, podendo ser muito inconsistente.

Operações concretas *(Middle concrete)* **(10-12 anos)**	**Multi-estrutural** *(Multistructural)*	Capacidade mediana para descobrir sugestões e reconhecer os dados relevantes.	Consegue generalizar mas apenas em termos de número limitado e independente de elementos.	Apesar de ter necessidade de ser consistente, pode ser inconsistente por concluir demasiado cedo, dado que está demasiado preocupado com os dados isoladamente, não sendo capaz de tirar conclusões distintas do mesmo grupo de dados.
Operações formais *(Concrete generalization)* **(13-15 anos)**	**Relacional** *(relational)*	Capacidade alta de encontrar sugestões, discorrer informação relevante e inter-relações.	Indução. Pode generalizar em contextos dados ou experimentados utilizando aspetos relacionados.	Não existem inconsistências dentro do sistema estabelecido, mas como a conclusão é única, poderão ocorrer inconsistências quando sai para fora do sistema.
Operações formais *(Formal operations)* **(+ 16 anos)**	**Abstrato** *(Extended abstract)*	Capacidade máxima de encontrar sugestões, discorrer informação relevante, estabelecer inter-relações e elaborar hipóteses.	Dedução e indução. Capacidade de generalizar a situações que não foram experimentadas.	Inconsistências resolvidas. Não surgem respostas fechadas – as conclusões mantêm-se abertas ou permitindo possíveis alternativas logicamente válidas.

Analisando a Taxonomia SOLO, Ceia (2002) salienta que é necessária uma maior *capacidade* de atenção, ou seja, o tempo de mobilização da atenção é maior no *nível abstrato* (que requer a recordação de vários factos ao mesmo tempo e demora mais tempo a estabelecer uma relação entre eles); enquanto no *nível pré-estrutural* as respostas muitas vezes nem fazem sentido porque não houve tempo de atenção suficiente para recordar pelo menos um aspeto relevante. Na relação entre a pergunta e a adequação das respostas (*relacionamento de operações*), enquanto no *nível pré-estrutural* não há qualquer relação lógica entre estas; num nível mais avançado haverá uma indução de uma conclusão baseada apenas num aspeto particular (*nível uni-estrutural*); numa resposta de *nível multi-estrutural* já ocorrerá a apresentação de vários aspetos relevantes (embora ainda sem qualquer relação entre eles); no *nível relacional* o indivíduo já será capaz de estabelecer relações relevantes entre os aspetos referidos e, por fim, num *nível abstrato* será capaz de ter uma visão global do conceito envolvido. Relativamente à c*onsistência e capacidade de concluir*, “quanto mais rápida for a obtenção da conclusão menos informação será utilizada e, portanto, maior será o perigo de criar contradições entre os dados e as conclusões” (Ceia, 2002, p. 247), e ao contrário, quanto mais informação for tida em conta, maior será o grau de generalização da conclusão. Assim, num *nível pré-estrutural* haverá rapidamente uma conclusão mas que será inconsistente; no *nível uni-estrutural* ocorrerão várias conclusões corretas mas que não se relacionam entre si; no *nível multi-estrutural* serão tidos em conta mais aspetos, mas que não estão relacionados entre si o que poderá levar a algumas inconsistências; a resposta num *nível relacional* apresentará uma conclusão que relaciona todos os aspetos relevantes, evidenciando uma coerência global; mas só a resposta de *nível abstrato* terá princípios que se possam adequar a qualquer situação.

Biggs e Collis (1982) realçam no seu discurso que muitas vezes as respostas dadas podem ser confusas e inconsistentes e não estar de forma evidente num único nível, isto acontece quando o aluno está a tentar lidar com mais informação do que a que a sua memória consegue gerir, ou seja, o aluno pode ainda não dominar toda a informação de que dispõe de forma adequada porque ainda não domina toda a complexidade da estrutura exigida no nível seguinte.

2.1.2. Conceitos em Geometria

“O aluno que está a «construir significados» deve estabelecer conexões entre a nova ideia e o conhecimento que possui, para que a ideia seja aprendida significativamente” (Matos & Serrazina, 1996, p. 36). O livro *Princípios e Normas para* *a Matemática Escolar* (NCTM, 2007) realça que aprender Matemática "exige compreensão e a capacidade de aplicar procedimentos, conceitos e processos" (p. 21), ou seja, para se ser matematicamente competente é necessário compreender os conceitos, conhecer os factos e dominar os procedimentos envolvidos.

Ainda antes de entrarem para o 1ºciclo, quer no pré-escolar, quer em casa e no seu dia-a-dia familiar, em interação com o mundo e com os outros, as crianças começam a desenvolver intuitiva e informalmente, muitas noções geométricas. Assim, as aprendizagens de noções matemáticas não começam com a apresentação, na escola, das definições formais, mas anteriormente quando os alunos contactam informalmente com essas noções (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999). Com a entrada para o 1º ciclo as crianças deverão continuar o seu percurso de aprendizagem, as suas experiências e conhecimentos não podem ser ignorados, deverão sim contribuir para a construção natural dos conceitos, sem que seja necessária a introdução formal de uma definição por parte do professor. As noções primitivas vão sendo nomeadas naturalmente e adquiridas e utilizadas pelos alunos progressivamente e de forma correta (Veloso, 2007), pois,

> A aprendizagem é um processo gradual de compreensão e aperfeiçoamento. À medida que se vão envolvendo em novas situações, os alunos vão relacionando aquilo que já sabiam com as exigências de novas situações. Nesta perspetiva, a aprendizagem é, em grande parte, uma questão de estabelecer relações, ver as mesmas coisas de outros ângulos ou noutros contextos.
>
> (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999, p. 22 e 23)

A adequação da linguagem e dos conceitos geométricos faz-se de um modo gradual, a partir dos seus conhecimentos e experiências prévias, os alunos vão dando novos significados às recentes experiências e aprendizagens, para tal, os alunos têm de se envolver num processo de reflexão sobre as atividades desenvolvidas (que têm de ser adequadas de forma a valorizar as capacidades de pensamento dos alunos envolvendo: construir, modelar, traçar, medir, desenhar, visualizar, comparar, transformar e classificar figuras geométricas), sendo fundamental a existência de elementos de compreensão, raciocínio e resolução de problemas a par dos conhecimentos de termos, factos e procedimentos (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999).

Robichaux e Rodrigue (2010) salientam que é fundamental que em primeiro lugar os alunos tenham experiências que lhes permitam compreender os conceitos em estudo, depois, durante os debates entre alunos poderá surgir a necessidade da introdução dos termos que os nomeiam (como os termos geométricos de isósceles, escaleno, regular ou irregular), desta forma estes conceitos podem ser mais facilmente assimilados, porque surgem como uma ajuda para os alunos explicarem os seus pensamentos. Estes alunos terão um maior e mais significativo entendimento destes termos geométricos abstratos, depois de terem tido experiências com os conceitos adjacentes e associados a esses termos.

Matos e Serrazina (1996) referem que uma das principais funções da linguagem é transmitir significado, desta forma, aprender Matemática também é aprender a dominar os termos matemáticos de modo a conseguir utilizá-los no discurso e de modo a tirar deles significados (quando os discursos são ouvidos ou lidos).

É importante que os alunos compreendam, ao longo da escolaridade básica, que é fundamental a utilização de definições e termos rigorosos para que estes possam ser utilizados no desenvolvimento das suas capacidades relacionadas com o raciocínio e a resolução de problemas. O uso de definições rigorosas e os hábitos de pensamento devem, assim, emergir das necessidades do dia-a-dia das crianças ao resolverem situações problemáticas e da necessidade de comunicarem matematicamente de forma coerente os seus argumentos (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999).

Robichaux e Rodrigue (2010) salientam mesmo que é classificando formas e resolvendo enigmas que as crianças desenvolvem o pensamento e a compreensão geométrica, promovendo-se ao mesmo tempo a comunicação matemática, a aprendizagem cooperativa e numerosas representações. van Hiele (1999) ressalta que as atividades introdutórias propostas nas salas de aula (que têm como objetivo o desenvolvimento do pensamento geométrico) devem começar por permitir uma exploração livre por parte das crianças, em seguida, ser mais orientadas pelo professor (permitindo construir conceitos e introduzir vocabulário específico) e, por fim, propõem-se atividades que permitam aos alunos integrar o que foi aprendido com o que já era conhecido.

2.1.3. Classificações, propriedades e definições em Geometria

Na Matemática as definições são a base da comunicação, da reorganização dos antigos conhecimentos e da construção de novos conhecimentos (Villiers, Gonender & Patterson, 2009), cabe ao professor ajudar os alunos a perceber que a Matemática é uma disciplina inter-relacionada (em que os diferentes temas se relacionam) e ajudar os alunos a estabelecer uma relação entre as aprendizagens anteriormente realizadas e as que se estão a realizar atualmente. As aprendizagens ganham, desta forma, sentido e, ao mesmo tempo, aumenta-se o reportório de estratégias matemáticas dos alunos (Roberts & Borum, 2012). Abrantes, Serrazina e Oliveira, (1999) salientam que "os alunos devem também compreender o que é uma definição e ter alguma experiência de situações em que se examinam as consequências de se usarem diferentes definições." (p. 31).

Para Villiers et al. (2009) os conceitos são muito concisos, contêm termos técnicos e exigem uma síntese imediata que dê uma sólida imagem do conceito, apresentando-se, por isso, como um grande desafio tanto para os alunos como para os professores. Os conceitos podem ser *transmitidos* pelo professor aos alunos através da leitura e escrita de definições apresenta-se, assim, primeiro o vocabulário e só depois é explicado o seu significado. Uma outra forma de abordagem metodológica é a *descritiva*, através do estudo prévio de conceitos e propriedades e posterior apresentação do vocabulário formal envolvido. Uma terceira abordagem à definição será a *reconstrutiva* (ou *genetic*), em que os alunos são convidados a participar num processo matemático reconstrutivo (recriando o caminho seguido pelos descobridores ou inventores originais, através da descoberta ou de uma explicação reconstituída pelo professor ou pelo manual) através do qual os alunos modificam as perceções anteriormente formadas para criar uma nova ideia, uma nova definição, tornando-se agentes ativos da construção do seu saber (Villiers, 1998)

Villiers et al. (2009) referem que quando os conceitos são apresentados aos alunos antes de estes terem sido desenvolvidos e compreendidos de forma natural e através dos conhecimentos pré-existentes, na maior parte das vezes, resultam em memorizações sem qualquer significado. Por outro lado, embora a abordagem *construtiva* seja mais morosa que as outras, esta é mais vantajosa a longo prazo uma vez que permite "aos alunos encontrarem um sentido nas suas atividades matemáticas, mas também abre possibilidades aos mesmos, para criar várias estratégias alternativas que provavelmente não viriam a acontecer sem as discussões durante o processo de definir" (Stefhen, McManus, Dickey & Arb, 2012, p. 98).

Normalmente as imagens dos conceitos iniciais das crianças baseiam-se nas representações visuais, impressões e experiências; e as definições matemáticas formais só são adicionadas numa fase posterior (Tsamir, Tirosh & Levenson, 2008).

Em Matemática para definir temos de utilizar *noções primitivas*, que são aquelas que à partida são consideradas como intuitivamente aceites. Todas as restantes noções utilizadas em definições, e que não são consideradas primitivas, são as *noções derivadas*, e devem ser definidas logicamente, recorrendo-se ou às *noções primitivas* ou a outras *noções derivadas* já utilizadas (Veloso, 2006).

Para Edwards e Harper (2010) a definição é essencial para a Matemática e os alunos devem reconhecer a necessidade de clareza nas suas definições e perceber que em todos os estudos matemáticos um pensamento preciso é essencial. Para entender como a imprecisão e ambiguidade de palavras comuns leva a erros graves no pensamento reflexivo é necessário que os professores valorizem a importância de conceitos claramente definidos e com recurso a vocabulário técnico.

"A Geometria e a visualização espacial proporcionam meios de percecionar o mundo físico e de interpretar, modificar e antecipar transformações relativamente aos objetos" (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999, p. 60) assim, surgem como processos importantes do pensamento geométrico descobrir propriedades das figuras e aplicá-las em diferentes situações. Classificar é incluir (ou excluir) um objeto num determinado conjunto (Ponte & Serrazina, 2000), no 1º ciclo os alunos devem ser capazes de classificar os objetos de acordo com as suas propriedades, reconhecendo que, por vezes, é possível classificar um mesmo objeto de diferentes maneiras, de acordo com as propriedades que se têm em conta (forma, tamanho…).

Existe, naturalmente, uma relação mútua entre classificação e definição (Villiers et al., 2009), uma vez que a classificação de conceitos envolve a definição desses mesmos conceitos e a definição desses conceitos envolve a sua classificação de alguma forma. Podemos encontrar dois tipos de classificação/definição: a *hierárquica,* que permite a inclusão de conceitos particulares como subconjuntos de conceitos mais gerais, ou a *partitiva,* quando os conceitos envolvidos são considerados separadamente (Villiers, 1994).

Villiers (1994 e 1998) salienta ainda que as classificações utilizadas podem ser de dois tipos diferentes: a *construtiva* (*a priori*) e a *descritiva* (*a posteriori*), podendo cada uma delas ser *hierárquica* ou *partitiva*. A classificação *construtiva* (*a priori*) resulta da generalização e particularização de conceitos para originar novas descobertas e conceitos, ou seja, o novo conceito é resultado de um processo de exclusão, generalização, especialização, adição ou exclusão de propriedades numa dada definição. A classificação *descritiva* (*a posteriori*) tem início num conceito particular e que generaliza para conceitos consecutivamente mais amplos, nesta classificação os conceitos e as propriedades já são conhecidos e estudados há algum tempo e as definições são feitas posteriormente.

As propriedades utilizadas nas definições podem ser essenciais ou não essenciais (Tsamir, Tirosh & Levenson, 2008). De acordo com Villiers et al. (2009) para que os alunos possam criar as suas próprias definições têm de compreender que uma definição está correta quando contem condições (propriedades) que são ao mesmo tempo *necessárias* (essenciais) e *suficientes*. Para que uma condição apresentada numa dada definição seja considerada *necessária*, tem de se aplicar a todos os elementos do conjunto que se está a definir. No entanto, para que uma condição seja considerada *suficiente,* tem de se assegurar que sempre que é utilizada, dá origem a todos os elementos do conjunto que se está a definir. Ainda de acordo com estes autores caso as propriedades apresentadas nas definições não contemplem estes dois aspetos, ou seja, que não contenham propriedades suficientes ou que contenham propriedades desnecessárias, são consideradas incorretas. As definições podem ainda ser *económicas*, delineando apenas um conjunto mínimo de propriedades necessárias e suficientes, sem que apresentem informações redundantes. As definições hierárquicas são, por norma, mais económicas ajudando ao aparecimento de propriedades de conceitos mais específicos e uma relação entre as mesmas (Villiers, 1994).

Villiers (2010) e Burger e Shaughnessy (1986) salientam os tipos de definições que são característicos em cada um dos níveis de aprendizagem propostos por van Hiele, assim no nível 1 é frequente encontrar definições baseadas em perceções visuais (por exemplo: “um retângulo parece uma porta”), no nível 2 definições não económicas (por exemplo: “um retângulo é um figura fechada com quatro lados, todos os ângulos têm noventa graus e os lados opostos são congruentes”) e no nível 3 definições económicas e corretas (por exemplo: “um retângulo é um paralelogramo com pelo menos um ângulo reto”).

Edwards e Harper (2010) sentiram durante a sua investigação necessidade de procurar diferentes definições de polígonos em livros, manuais escolares e na internet e constataram que a maioria dos exemplos encontrados é de dois tipos: ou são demasiado simplistas (embora acessíveis à compreensão de alunos mais novos, estas definições muitas vezes não eram completas, na medida em que não permitiam, por exemplo, identificar os polígonos que não fossem prototípicos) ou são inacessíveis (tendo os detalhes necessários para distinguir todo o tipo de polígonos, mas contendo terminologia demasiado abstrata e técnica para alunos mais novos).

2.1.4. Exemplos, contraexemplos e análise de protótipos

É através dos conceitos que as pessoas podem caracterizar diferentes coisas, decidindo se pertencem ou não a uma dada classe. Uma das funções do conceito é permitir que se identifiquem exemplos e contraexemplos dessa categoria. “Em Geometria, um contraexemplo de um conceito é um exemplo em que falta pelo menos um atributo fundamental do conceito que está a ser considerado.” (Tsamir, Tirosh & Levenson, 2008, p. 92)

O NCTM (1991) salienta que para a construção de conceitos é importante que os alunos analisem exemplos e contraexemplos, comparando-os e diferenciando-os, e que procurem construir e apresentar outros modelos e seus contrários. Sendo “necessário que os alunos observem muitos exemplos de figuras correspondentes ao mesmo conceito geométrico, bem como uma variedade de figuras que não sejam exemplos desse conceito” (NCTM, 2007, p. 114). Assim, há a necessidade dos alunos estudarem e debaterem as características de diversas figuras que correspondam a exemplos e contraexemplos de um mesmo conceito, para que os mesmos sejam desenvolvidos e aperfeiçoados. Para Tsamir, Tirosh e Levenson (2008) existe uma necessidade do contacto com estes exemplos e contraexemplos para uma mais rápida e completa formação dos conceitos, sendo que os contraexemplos têm como função esclarecer os limites do conceito.

No final do seu estudo Hannibal (1999) destaca que no início da escolaridade as crianças estão a definir os limites e as características das figuras e a definir os seus conceitos de figuras. Nos primeiros anos é normal que muitas crianças reconheçam um atributo essencial (como por exemplo: “um triângulo ter três lados”) mas rejeitem a figura por esta ter um outro atributo não fundamental (como por exemplo, “mas é muito comprido para ser um triângulo”). Cabe ao professores ajudar as crianças a distinguir entre os atributos fundamentais (como o número de lados e de ângulos) e os não fundamentais para a categorização (como o tamanho, a proporção, a orientação ou a simetria no caso dos triângulos); apresentando-lhe uma ampla e variedade de exemplos, em vez de apenas algumas formas prototípicas.

A psicologia cognitiva apresenta diversas teorias que descrevem os processos de categorização e de formação de conceitos, nomeadamente a *classical view* e a *prototypical view* (Smith & Medin, 1981). De acordo com a *classical view* é necessário definir quais são os atributos que são partilhados por todos os exemplos (atributos que têm de ser necessários e suficientes) para se determinar se uma figura é ou não exemplo de uma categoria, bastando, nesse caso analisar e fazer uma listagem das propriedades que todos os elementos representativos do conceito têm de ter. A *prototypical view* considera que os conceitos variam de acordo com a dimensão da partilha de certas propriedades e consequentemente o grau de representação de cada exemplo do conceito, assim, esta visão determina se as figuras apresentadas são ou não exemplos da categoria baseando-se na sua comparação com as chamadas figuras prototípicas, que são primeiramente adquiridas. Quando falamos da Matemática, estas teorias referem-se principalmente à construção de conceitos geométricos. Começa-se por construir uma ideia mental que se baseia na perceção das semelhanças entre exemplos (e dos seus elementos característicos) que leva à construção de um conceito apenas parcial, só mais tarde com estudo dos exemplos se formam os conceitos que têm em conta os atributos percetíveis e não percetíveis. (Tsamir, Tirosh & Levenson, 2008)

De entre os exemplos e contraexemplos de determinada categoria podem identificar-se alguns como sendo considerados protótipos, que são os que são intuitivamente aceites como representativos desse mesmo conceito, sem que se sinta necessidade de o justificar (Tsamir, Tirosh & Levenson, 2008), ou seja, são exemplos típicos que servem de base e padrão às aprendizagens iniciais (Edwards & Harper, 2010). Estes exemplos prototípicos têm propriedades especiais que são dominantes e chamam a nossa atenção, tendo uma lista mais longa de propriedades. Também alguns contraexemplos podem ser considerados protótipos por serem rápida e instintivamente identificados como tal (Tsamir, Tirosh & Levenson, 2008). Nos estudos iniciais da Geometria estes protótipos podem ser importantes uma vez que permitem associar, por exemplo, os nomes aos vários tipos de polígonos (por exemplo: triângulos, quadriláteros ou pentágonos) e não polígonos (por exemplo: círculo) (Edwards & Harper, 2010).

O estudo e análise de exemplos e contraexemplos prototípicos são essenciais para a formação inicial dos conceitos, mas não são suficientes, dado que podem levar a uma imagem limitada. Alguns estudos sugerem mesmo que muitos alunos só identificam imagens prototípicas como sendo exemplos dos conceitos e identificando os outros exemplos como sendo contraexemplos (Hershkowitz 1989; Schwarz & Hershkowitz 1999; Wilson 1990 citados por Tsamir, Tirosh & Levenson, 2008), ou impedindo um reconhecimento correto de quais são realmente as propriedades essenciais e não essenciais (Edwards & Harper, 2010). Estes últimos autores salientam mesmo o facto de que uma grande maioria dos manuais escolares utilizados só ter imagens de polígonos regulares e prototípicos, dando assim ênfase apenas a algumas propriedades que caracterizam algumas figuras específicas.

A utilização excessiva de protótipos pode impedir a aquisição completa dos conceitos. O uso de contraexemplos na sala de aula poderá diminuir o efeito negativo da utilização de protótipos, ao expor os alunos a contraexemplos que apresentem os mesmos atributos não significativos, poderá ajudar os alunos a começar a diferenciar os atributos que são realmente significativos. Quando falam de contraexemplos Tsamir, Tirosh e Levenson (2008) salientam ainda que estes, tal como os exemplos, podem ser intuitivos (quando são intuitivamente aceites como tal, sendo imediatamente identificados pelas crianças como tal) ou não intuitivos (quando são consideravelmente idênticos a exemplos do conceito e, consequentemente, são muitas vezes erradamente identificados como exemplos).

O NCTM (2007) dá como exemplo os triângulos recomendando que os alunos na sala de aula tenham oportunidade de observar conjuntos de triângulos que estejam posicionados de diferentes maneiras, com diferentes amplitudes de ângulos, e outras formas, que sendo semelhantes a triângulos, não o são realmente. Será no debate sobre estes exemplos e contraexemplos, protótipos e não protótipos que os alunos terão oportunidade de desenvolver e aperfeiçoar os seus conceitos geométricos.

É de salientar que de acordo com Tsamir, Tirosh e Levenson (2008) "a aquisição de conceitos geométricos é um processo complexo que inclui raciocínio visual e de atribuição. Nomear, intuir e brincar com protótipos desempenham um papel importante na conceptualização geométrica" (p. 85).

2.1.5. Visualização espacial

No Programa de Matemática de 2007 (ME, 2007) é delineado para o 1º Ciclo como propósito principal do ensino da Geometria "desenvolver nos alunos o sentido espacial, com ênfase na visualização e na compreensão de propriedades de figuras geométricas no plano e no espaço" (p. 20) considerando-se que a visualização "engloba capacidades relacionadas com a forma como os alunos percecionam o mundo que os rodeia, e envolve observação, manipulação e transformação de objetos e suas representações, e a interpretação de relações entre objetos e entre estes e as suas representações". (p. 20)

Segundo Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) visualização espacial inclui “um conjunto de capacidades relacionadas com a forma como os alunos percecionam o mundo à sua volta e como conseguem representar, interpretar, modificar e antecipar transformações relativamente aos objetos que os rodeiam.” (p. 72). Assim, a Geometria e a visualização espacial propiciam meios de perceber o mundo físico e de interpretar, alterar e antecipar transformações relativamente aos objetos.

O NCTM (2007) descreve a visualização espacial como “a construção e manipulação de representações mentais e objetos bi e tridimensionais e a perceção de um objeto a partir de diferentes perspetivas” (p. 44) que constitui um aspeto essencial do raciocínio geométrico. Para desenvolver a visualização espacial as crianças têm de começar pela construção e manipulação de representações concretas, e posteriormente passar às representações mentais de formas, relações e transformações. Os alunos deverão ter experiências que lhes permitam explorar as relações presentes entre as diversas características ou alterar uma propriedade de uma figura, conservando as outras.

É o desenvolvimento do sentido espacial e do vocabulário a ela associado que permite a descrição das relações geométricas, ou seja, comunicar sobre as posições e relações entre objetos. Assim, é este sentido espacial que permite, por exemplo, comparar duas figuras com diferentes orientações em que mentalmente se faz a rotação de uma delas para ajudar à comparação (Ponte & Serrazina, 2000).

Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) e Matos e Gordo (1993) distinguem diversas capacidades relacionadas com a visualização espacial, salientam-se aqui as que estão diretamente relacionadas com este estudo:

Perceção figura-fundo – capacidade de identificar figuras geométricas em desenhos complexos ou em fotografias, o que implica que os alunos consigam distinguir e isolar essa figura de um fundo; trata-se de uma capacidade visual que implica identificar um componente específico numa determinada situação e envolve a mudança de perceção de figuras contra fundos complexos.

Constância percetual – também chamada *constância de forma e tamanho*, capacidade de reconhecer figuras geométricas em diferentes posições, tamanhos e contextos.

P*erceção da posição no espaço* – capacidade de reconhecer figuras iguais em diferentes posições (ou seja, com orientações diferentes). Esta distingue-se da *perceção figura-fundo* ou da *constância percetual* porque enquanto nestas duas se procura identificar diversos exemplos geométricos numa diversidade de contextos, posições e tamanhos, na p*erceção da posição no espaço* procuramos discriminar quais as figuras que sendo iguais do ponto de vista da *perceção figura-fundo* ou da *constância percetual* estão dispostas com uma orientação diferente.

Descriminação visual – capacidade de comparar duas figuras iguais ou diferentes, sendo necessário neste último caso identificar quais são as diferenças. Procura-se assim as características em que se assemelham ou que as distinguem.

2.1.6. Raciocínio, argumentação e comunicação matemática

O Programa de Matemática de 2007 (ME, 2007) estabelece objetivos gerais para o ensino da Matemática, valorizando as dimensões da sua aprendizagem que se relacionam com "representação, comunicação e raciocínio em Matemática, a resolução de problemas e as conexões matemáticas" (p. 4), do mesmo modo, o Programa do Ensino Básico de 2013 (MEC, 2013) estabelece que as grandes finalidades do ensino da Matemática (estruturação do pensamento, análise do mundo natural e interpretação da sociedade) devem concorrer "para a aquisição de conhecimento de factos e de procedimentos, para a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático, para uma comunicação (oral e escrita) adequada à Matemática, para a resolução de problemas em diversos contextos…" (p. 4).

Para os alunos compreenderem a Matemática, é fundamental que aprendam a raciocinar, sendo o raciocínio Matemático um hábito intelectual. A Matemática deverá fazer sentido para os alunos, o que poderá ser conseguido através do desenvolvimento de ideias, da exploração de fenómenos, da justificação de resultados e da utilização de conjeturas nas diversas áreas de conteúdo (NCTM, 2007). É nas salas de aulas, na interação entre colegas e com os professores através do questionar e do argumentar, que se explicarão e clarificarão as ideias em estudo e as interpretações de cada um (Matos & Serrazina, 1996).

O NCTM (2007) salienta que para que os alunos reconheçam o raciocínio e a demonstração como aspetos fundamentais da Matemática, é importante que desde cedo nas aulas desta disciplina os alunos compreendam que as suas afirmações devem ser justificadas e aprendam a chegar a acordo com os seus colegas sobre os argumentos que são aceites como válidos. No que diz respeito ao 1º Ciclo, os alunos desta idade já conseguem formular, aperfeiçoar e testar conjeturas (hipótese informal que estabelece um caminho essencial para a descoberta matemática). Os alunos mais novos começam por verbalizar e descrever as suas conjeturas através do seu próprio vocabulário e através de objetos e exemplos concretos, à medida que forem avançando na escolaridade deverão utilizar, cada vez mais, símbolos e representações matemáticas. É através das discussões realizadas em turma, que os alunos aprenderão a justificar as suas conjeturas, inicialmente com tendência a recorrer a casos específicos e mais tarde a casos mais gerais e baseados em conhecimentos matemáticos.

Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) salientam a importância do desenvolvimento de competências que se relacionam com o "saber avaliar criticamente a validade de um argumento" (p. 18). Os alunos mais novos já podem ponderar sobre as suas próprias experiências matemáticas, nos dois primeiros anos de escolaridade é normal que os alunos tentem generalizar através de alguns exemplos concretos, mas os professores podem ajudá-los a verificar as suas conjeturas e generalizações (e as dos colegas) através de vários métodos, nomeadamente através dos exemplos e contraexemplos.

> Os alunos devem aprender a justificar as suas afirmações desde o início da escolaridade recorrendo a exemplos específicos. À medida que os alunos progridem nos diversos ciclos de ensino as suas justificações devem ser mais gerais, distinguindo entre exemplos e argumentos matemáticos gerais para toda uma classe de objetos. (ME, 2007, p. 5)

No que à Geometria diz respeito o NCTM (2007) salienta que os alunos do 2º ano já "têm a noção de que as formas possuem múltiplas propriedades e deverão sugerir modos de as agrupar que incluem essas propriedades diversas" (p. 144), nesta altura os alunos observam as características gerais dos objetos geométricos. Os alunos do 3º ao 5º ano já têm uma capacidade de raciocínio mais desenvolvida que lhes permite "investigar problemas geométricos de complexidade crescente e estudar as propriedades geométricas (...) Os alunos podem desenvolver conhecimentos sobre o modo como as formas geométricas se relacionam entre si e começar a articular argumentos geométricos acerca das propriedades dessas formas" (NCTM, 2007, p. 191), assim, nestes anos os alunos ampliam os seus conhecimentos para a identificação e descrição de propriedades, aprendendo vocabulário próprio associado a essas figuras e propriedades. Nestes anos os alunos deixam de considerar os objetos matemáticos como individuais (por exemplo: *este triângulo*) e começam a conseguir ponderar sobre classes de objetos (por exemplo: *todos os triângulos*) desenvolvendo o raciocínio fundamentado nas relações e nas propriedades, os alunos podem aprender a descrever as relações encontradas em vários exemplos, e a desenvolver e a sustentar argumentos que justifiquem a generalização (ou não) dessas relações.

Os processos de desenvolvimento e aperfeiçoamento do pensamento estão relacionados com os da linguagem, dependendo da capacidade dos alunos de explicar o seu raciocínio, em vez de apresentarem somente respostas. Os professores devem, assim, estimular a apresentação de justificações que incluam progressivamente nos seus argumentos propriedades e relações matemáticas. "Os alunos precisam de aprender que os argumentos matemáticos são lógicos e associados a relações matemáticas". (NCTM, 2007, p. 230).

"Comunicação é a capacidade de trocar ideias, negociar significados, desenvolver argumentos" (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999, p. 74), "é uma forma de partilhar ideias e de clarificar a compreensão matemática" (NCTM, 2007, p. 66) e "é um importante processo matemático, transversal a todos os outros" (Ponte & Serrazina, 2000, p. 59). A partilha de ideias na sala de aula deverá ser um meio de comunicação, reflexão, aperfeiçoamento, discussão e correção de ideias contribuindo, assim, para a construção, consolidação e divulgação das ideias entre alunos (NCTM, 2007).

Ao longo da escolaridade, deverá surgir como uma necessidade a utilização de afirmações não ambíguas e adequadas às situações, ou seja a necessidade da utilização da terminologia matemática específica na comunicação oral e escrita, nomeadamente através das discussões com os outros (em contexto de sala de aula com o professor e entre os alunos) na comunicação de descobertas e ideias matemáticas (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999). À medida que vão praticando a comunicação os alunos deverão expressar-se de forma cada vez mais clara, coerente e precisa (utilizando, por exemplo, termos como *ângulos* em vez de *cantos*) (NCTM, 2007).

Os alunos começam por pensar nas ideias matemáticas através da sua linguagem natural (Ponte & Serrazina, 2000). É a linguagem familiar do dia-a-dia utilizada inicialmente pelas crianças mais pequenas nas suas comunicações, que deve servir de base e ponte à aprendizagem de uma linguagem matemática formal. No entanto esta linguagem formal não deve ser imposta, mas sim surgir de necessidades comunicativas. "Ao escrever e ao falar com outros, aprendem a usar, com maior precisão, a linguagem matemática e, de forma gradual, os símbolos convencionais para exprimir as suas ideias matemáticas" (NCTM, 2007, p. 148). Assim, é necessário que os alunos interiorizem aos poucos as características da linguagem matemática. No que ao 1º Ciclo diz respeito, segundo Ponte e Serrazina (2000), esta linguagem matemática não pode ser demasiado formal, uma vez que é necessário permitir aos alunos a utilização de meios de expressão próprios de maneira a permitir que se apropriem e envolvam na Matemática em estudo. Ao mesmo tempo, é importante promover debates que permitam esclarecer algumas imprecisões que possam surgir, dando ênfase à necessidade da utilização de definições precisas e argumentos coerentes em Matemática.

Os alunos "comunicam para aprender Matemática e aprendem a comunicar matematicamente" (NCTM, 2007, p. 66), ou seja, a comunicação matemática é não só uma competência a desenvolver, como também um meio de aprendizagem e à medida que os alunos avançam nos anos de escolaridade deverão comunicar com uma linguagem cada vez mais complexa e abstrata.

Será também importante ressaltar que a comunicação de ideias matemáticas utiliza não só a linguagem matemática mas também a linguagem natural e corporal, e que pode recorrer a desenhos, figuras, dramatizações e outras formas de representação (Ponte & Serrazina, 2000).

2.1.7. Desenhos, representações e utilização de materiais manipuláveis

A experiência informal que os alunos trazem à entrada para a escola deve "ter continuidade através da manipulação e ordenação de objetos, da dobragem de papéis, do uso de espelhos, de jogos envolvendo a construção de padrões, de experiências com itinerários, da realização de construções geométricas" (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999, p. 62). Atividades de composição e decomposição de figuras, combinadas com a sua descrição, representação e do raciocínio sobre o que acontece, levam os alunos a desenvolver o seu pensamento visual. Assim, para classificar, investigar propriedades geométricas e relações entre figuras, as crianças necessitam de recorrer à manipulação e construção, são essas experiências e as suas explicações e justificações que levam à utilização de uma linguagem geométrica significativa e contextualizada.

Veloso (2006) considera que, tal como acontece nos primeiros anos de vida (quando as crianças fazem de forma natural aprendizagens como andar e falar), as aprendizagens no 1º e 2º ciclo devem acontecer de forma natural, sem um grande esforço para as formalizar. Nestes ciclos é desejável que os alunos vão construindo de forma natural os seus conceitos, sem que haja uma necessidade por parte do professor de fazer apresentações de definições formais. Assim, os novos termos podem ser introduzidos durante as atividades de exploração dos materiais manipuláveis, em contexto de aprendizagem, o professor poderá, por exemplo, introduzir de forma natural, e sem receio que os alunos não o compreendam, termos como "vértice" em vez de "cantinho" ou "bico".

Nas suas indicações metodológicas o Programa de Matemática de 2007 (ME, 2007) salienta que no 1º Ciclo o ensino e a aprendizagem da Geometria deve "privilegiar a exploração, a manipulação e a experimentação, utilizando objetos do mundo real e materiais específicos, de modo a desenvolver o sentido espacial" (p. 20) recomendando como recursos a utilização de materiais manipuláveis (estruturados e não estruturados) como por exemplo o geoplano, tangrans, modelos de sólidos geométricos, réguas, esquadros e compassos, uma vez que "estes materiais permitem estabelecer relações e tirar conclusões, facilitando a compreensão de conceitos" (p. 21).

Embora as Metas Curriculares (MEC, 2012) sejam assumidas pelos autores como apenas uma sequência de "objetivos gerais, completados por descritores mais precisos" (p. 1), no Caderno de Apoio ao 1º Ciclo (ME, 2012b) elaborado como complemento às Metas Curriculares, podem encontrar-se muitas referências e sugestões à utilização de objetos de uso corrente, como por exemplo, diferentes objetos e processos (réguas, lápis, palmos), modelos de sólidos geométricos, desenhos, instrumentos auxiliares (réguas) e compasso.

No entanto Clements e McMillen (1996) salientam que embora os materiais manipuláveis sejam sem duvidada úteis, não são por si só uma garantia de sucesso, uma vez que sozinhos não transmitem os conteúdos das ideias matemáticas. Assim, os materiais manipuláveis devem ser utilizados antes da introdução formal dos conceitos e definições, sendo um meio ativo e concreto de representação que ajuda as ideias a terem sentido. Com a ajuda do professor, os alunos utilizam estes materiais como ferramentas para pensar sobre a Matemática e desenvolver representações significativas, o que só é possível, fazendo conexões entre as representações dos materiais e as ideias matemáticas em estudo. Estes autores salientam que é fundamental que os materiais manipuláveis sejam realmente utilizados com frequência pelos alunos, sejam utilizados na resolução de diferentes e variados problemas e que posteriormente seja realizada uma reflexão que ajude a justificar as soluções encontradas.

Do mesmo modo, Gravemeijer (1991) salienta que não são os materiais manipuláveis que transmitem determinado conhecimento, não basta as crianças utilizarem estes materiais para resolver determinados problemas em determinados contextos (sendo neste caso os materiais utilizados apenas como modelos em cada situação). Os materiais têm de ser utilizados de forma a ajudar as crianças a desenvolver os conceitos matemáticos e a relacioná-los entre si.

> Uma boa parte da construção de objetos geométricos é uma matematização do real que possibilita a compreensão de e a interação sobre ideias geométricas. Ao construir um paralelogramo com barras geométricas, no geoplano ou no papel, o aluno tem de pôr em jogo os diversos atributos dos paralelogramos.
>
> (Matos & Serrazina, 1996, p. 270)

Clements (1999, citando Piaget & Inhelder, 1967) salienta que as aprendizagens das crianças sobre as figuras não acontecem através de um olhar passivo mas sim através dos seus olhos, mãos e mentes em ação, assim, as crianças têm de explorar as figuras de forma extensiva para as poder compreender completamente. Por outro lado, fazer um desenho (no papel ou com materiais manipuláveis) é uma forma de fazer uma representação, não de perceção, pelo que também ilustra a forma como as crianças compreendem as ideias que estão a ilustrar. Assim, uma vez mais se revela a importância da experiência e da exploração, havendo benefícios na aprendizagem quando as crianças tentam representar figuras de diferentes formas, quer através dos desenhos livres, quer através das representações específicas com materiais manipuláveis.

Na recolha de dados desta investigação foram utilizados alguns materiais manipuláveis, dos quais se destacam:

- Geoplano: de acordo com Matos e Serrazina (1996b) "há diversos tipos de geoplano (...) consiste numa placa de madeira e pregos dispostos de modo a formarem uma malha que pode ter diversas texturas" (p. 13); hoje em dia já se encontram no mercado à venda geoplanos de plástico como os utilizados neste estudo (figura1). Assim há geoplano de 3x3 (pregos), geoplano de 5x5, geoplanos de 10x10, geoplanos "isométricos" (ou "triangulares") e geoplanos "circulares". Para "desenhar" no geoplano são utilizados elásticos de diversas cores e as atividades podem depois ser representadas em papel ponteado. As grandes vantagens da utilização do geoplano prendem-se com a sua mobilidade que permite aos alunos ver as figuras desenhadas em diferentes posições, além disso, o geoplano é um instrumento dinâmico que permite "desenhar" e "apagar" facilmente as figuras possibilitando uma aferição rápida de conjeturas.

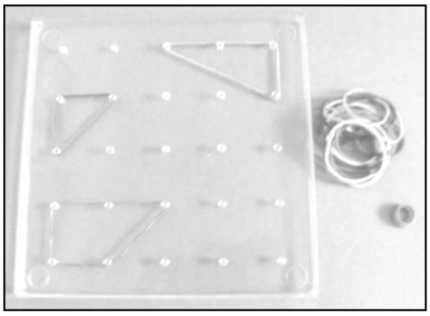


Figura 1 - Geoplano e elásticos utilizados na investigação

Geo Strips: de acordo com as instruções destes materiais, as *Geo Strips* são barras plásticas que se apresentam em quatro cores diferentes (vermelho, azul, amarelo e branco) e com diferentes comprimentos (figura 2), sendo que em cada cor a diferença de comprimento entre as barras pode ser realizada através da comparação dos buracos que nelas se encontram. Estas barras permitem a construção dinâmica de modelos de figuras bidimensionais através da junção das diferentes barras com ataches.

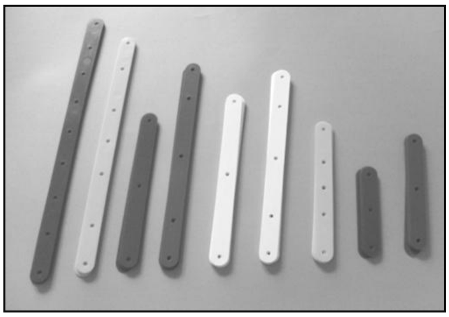


Figura 2 - *Geo Strips* utilizadas na investigação (3 de cada cor e tamanho)

2.2. Os conceitos geométricos envolvidos

2.2.1. Figuras geométricas 2D - triângulos

Veloso (2006) salienta no seu artigo *Sobre as definições (I)* que "em Matemática, se estamos a escrever um livro em que vamos apresentar resultados sobre polígonos, devemos ter o cuidado de dizer qual é a definição que adotamos"(p. 9), assim, o presente subcapítulo serve para fazer uma breve síntese dos conceitos matemáticos implicados neste estudo. São aqui tidos em conta os conceitos que de acordo com o Ministério da Educação, no presente ano letivo de 2013/2014, os alunos de 2º e 4º anos (ao qual pertencem as crianças do estudo) devem adquirir, estando estes explícitos no Programa de Matemática de 2007 (ME, 2007) e encontrando-se em transição para as Metas Curriculares do Ensino Básico Matemática de 2012 e para o Programa de Matemática de 2013 (MEC, 2012, 2013). Assim, têm-se em conta diversas fontes nomeadamente autores conceituados e manuais escolares que se encontram a ser utilizados atualmente nas escolas portuguesas.

Quando falamos de polígonos e figuras geométricas são muitas e diversificadas as definições encontradas. Por exemplo a noção de polígono pode ser expressa por:

- "um polígono é uma figura plana fechada, limitada por segmentos de reta, como lados" (Rich, 2003, p.80)
- "um polígono é uma figura plana limitada por uma linha poligonal fechada. Os principais elementos de um polígono são: os lados, os ângulos e os vértices." (Rodrigues & Azevedo, 2011, p. 120).

Saliente-se que uma "linha poligonal é formada por sucessivos segmentos de reta, tendo os segmentos consecutivos um extremo comum, não estando na mesma reta dois segmentos consecutivos e não tendo os segmentos de reta pontos comuns para além dos extremos." (Palhares, 2004, p. 263)

Podendo estas definições ser mais ou menos explícitas, é importante que no universo da sala de aula as crianças experienciem a construção e a comparação entre diversas figuras, podendo ser aberto um diálogo sobre as características de cada uma das figuras propostas pelos alunos e a sua classificação, é importante a análise de exemplos e contraexemplos intuitivos e não intuitivos para que o conceito tenha as suas limitações bem definidas (Ponte & Serrazina, 2000).

As figuras planas podem ser agrupadas em classes de acordo com as suas características, assim, podem-se encontrar a classe dos triângulos, quadriláteros, pentágonos, etc.

Ponte e Serrazina (2000) salientam a necessidade de os alunos adquirirem um conceito de triângulo o mais amplo possível; uma vez mais, as definições encontradas podem ser amplas e diversificadas sendo todas elas válidas para o conceito de triângulo:

- “um triângulo é um polígono que tem três lados. Um vértice de um triângulo é um ponto, no qual dois dos lados se encontram” (Rich, 2003, p. 80)
- “um triângulo é uma figura fechada com três vértices e três lados retos” (Tsamir, Tirosh & Levenson, 2008, p.87)
- “os polígonos podem classificar-se segundo o seu número de lados: o triângulo tem três lados” (Rodrigues & Azevedo, 2012, p.56)

O fundamental é mesmo que os alunos contactem com o maior número possível de figuras representativas da classe, “é importante que desde o início, o conceito de triângulo que os alunos adquiram seja o mais alargado possível não se limitando a um triângulo equilátero” (Ponte & Serrazina, 2000, p. 173), os alunos devem contactar com diferentes triângulos em diferentes posições.

2.2.2. Conceitos de ângulos e triângulos

Segundo Ponte e Serrazina (2000) a perceção do conceito de ângulo pela criança ocorre de forma muito lenta, isto apesar de a criança estar desde muito cedo em contacto com modelos dos mesmos, por exemplo, ao abrir uma porta (*conceito dinâmico de ângulo* que está ligado ao movimento de uma semirreta em torno de um ponto ou como uma rotação). Mais tarde, ao identificar as propriedades e ao classificar as figuras geométricas as crianças têm oportunidade de contactar com a noção *estática de ângulo*. Assim, em relação à definição de ângulo pode-se dar como exemplos:

- “espaço limitado por um par de semirretas com a mesma origem” (Ponte & Serrazina, 2000, p. 175)
- “é a figura formada por duas semirretas com uma extremidade comum. As semirretas são os lados do ângulo, enquanto que a extremidade é seu vértice.” (Rich, 2003, p. 76)
- “um ângulo é uma das regiões limitadas por duas semirretas com a mesma origem. Os lados dos ângulos são as duas semirretas e … à origem das duas semirretas chama-se vértice do ângulo” (Rodrigues & Azevedo, 2011, p.75).

De acordo com Palhares (2004) duas semirretas delimitam duas regiões planas definindo um ângulo convexo e um ângulo não convexo (de acordo com a figura 3).

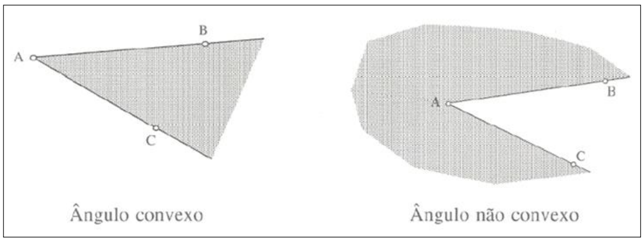


Figura 3 - Ângulos convexos e não convexos de acordo com Palhares (2004)

A amplitude de um ângulo pode ser medida em grados, radianos ou em graus. Designando-se que "o tamanho de um ângulo depende da extensão que um lado do ângulo deve ser rodado, ou girado em torno do vértice, até encontrar o outro lado" (Rich, 2003, p. 77).

Tal como se pode ver na tabela 4, de acordo com a amplitude dos ângulos estes podem ser classificados como:

Tabela 4 - *Tipos de ângulos*
(Adaptado de Rich, 2003).

Tipo de ângulo	**Descrição**
Ângulo agudo	Um ângulo agudo é um ângulo cuja amplitude é inferior a 90º.
Ângulo reto	Um ângulo reto é um ângulo de amplitude 90º.
Ângulo obtuso	Um ângulo obtuso é um ângulo cuja amplitude é maior do que 90º e menor do que 180º.
Ângulo raso	Um ângulo raso é um ângulo de amplitude 180º.
Ângulo reflexo	Um ângulo reflexo é um ângulo cuja amplitude é maior do que 180ª e menor do que 360ª.

Ponte e Serrazina (2000) salientam que no 1º Ciclo as crianças começam por identificar a existência de ângulos através da observação e comparação de diferentes figuras, começam então a identificar a existência de ângulos retos (aqueles em que os lados são perpendiculares) nos quadrados e retângulos; posteriormente, por comparação, descobrem os ângulos que têm maior amplitude que os ângulos retos (ângulos obtusos) e menor amplitude (ângulos agudos). Nas Metas Curriculares Ensino Básico

Matemática (ME, 2012) está definido que os alunos do 4º ano devem "reconhecer ângulos retos, agudos, obtusos, convexos e côncavos" (p. 25).

Como se pode ver na tabela 5, os triângulos podem ser classificados de acordo com o comprimento dos seus lados:

Tabela 5 - *Classificação de triângulo segundo o comprimento dos seus lados*
(De acordo com Palhares, 2004).

Classificação do triângulo	**Descrição**
Triângulo escaleno	Quando todos os seus lados tiverem comprimentos diferentes.
Triângulo isósceles	Quando dois dos seus lados tiverem comprimentos iguais.
Triângulo equilátero	Quando todos os seus lados tiverem o mesmo comprimento.

Os triângulos podem ser classificados quanto aos seus ângulos internos (tabela 6):

Tabela 6 - *Classificação de triângulo segundo os ângulos*
(De acordo com Palhares, 2004).

Classificação do triângulo	**Descrição**
Triângulo acutângulo	Quando todos os seus ângulos são agudos.
Triângulo retângulo	Quando um dos seus ângulos é um ângulo reto.
Triângulo obtusângulo	Um dos seus ângulos é um ângulo obtuso.

2.3. Currículo e Competências geométricas a desenvolver no 1ºciclo

2.3.1. Orientações curriculares gerais

De acordo com o NCTM (2007) "um currículo escolar de Matemática determina (...) aquilo que os alunos terão oportunidade de aprender e aquilo que, de facto, aprendem" (p. 15), assim, os currículos deverão ser articulados de forma a preparar os alunos para progredirem nos seus estudos e para resolverem problemas em diferentes contextos (como a escola, casa e trabalho) estruturando e incentivando os alunos a construir conhecimentos matemáticos cada vez mais aprofundados e complexos. À medida que os alunos vão progredindo nos seus estudos é expectável que os seus conhecimentos e capacidades se desenvolvam, devendo lidar de forma cada vez mais profunda com os conceitos matemáticos.

Em relação à Geometria os alunos "poderão aprender as formas e estruturas geométricas e o modo de analisar as suas características e relações" (NCTM, 2007, p. 44), sendo o ensino e aprendizagem da Geometria um terreno natural para o desenvolvimento de capacidades transversais como o raciocínio e a argumentação dos alunos. Matos e Serrazina (1996) propõem que a aprendizagem da Geometria deve solicitar e desenvolver nos alunos a utilização de múltiplas capacidades como a visualização, a capacidade de verbalização (entendida como a capacidade de trocar ideias, negociar significados e desenvolver argumentos), a capacidade de construir ou manipular objetos geométricos (uma matematização do real que possibilita a compreensão e a interação de ideias geométricas), a capacidade de organização lógica do pensamento matemático (um processo gradual que tem início nas experiências concretas, passa pela diferenciação dos objetos geométricos, por uma organização das propriedades e por fim globaliza estas num sistema axiomático) e a capacidade de aplicar os conhecimentos geométricos noutras situações. Segundo estes autores a aprendizagem da Geometria é *gradual* porque subentende que a linguagem geométrica, o raciocínio e a intuição são adquiridos progressivamente; *global* porque se estabelecem relações entre as figuras e as suas propriedades, porque tem diferentes níveis de significação e porque permite o estabelecimento de conexões com outras áreas; *construtiva* porque devem ser os alunos a construir os seus próprios conceitos e *social* porque "deve ser um ato *social*, exercido entre o professor e os seus alunos, entre alunos, e entre os alunos e a comunidade envolvente da escola." (p. 264)

No que diz respeito à organização das aprendizagens o NCTM (2007) divide as mesmas em quatro níveis de aprendizagem distintos, salientando-se no contexto deste estudo os dois primeiros: do pré-escolar até ao 2º ano e do 3º ao 5º ano. Esta identidade realça que nos primeiros quatro anos de vida "ocorre um desenvolvimento matemático muito importante nas crianças" (p. 83), desenvolvendo-se muitas aprendizagens de forma intuitiva, mesmo antes do início da vida escolar. Desta forma, quando iniciam a escola, os alunos já possuem muitos conhecimentos matemáticos informais; as aprendizagens deverão continuar a ocorrer através da curiosidade e entusiasmo inato das crianças e das suas experiências, ampliando os seus conhecimentos e dando novos significados às suas práticas.

Relativamente à Geometria o NCTM (2007) estabelece objetivos transversais que se aplicam a todos os anos de escolaridade, salientando a importância de os alunos analisarem as características e propriedades de formas geométricas bidimensionais e de usarem a visualização, o raciocínio espacial e a modelação geométrica para resolverem problemas. Este organismo estabelece posteriormente objetivos específicos para cada nível de aprendizagem, que começam no primeiro nível escolar com a iniciação formal à Geometria salientando-se como fundamental que os alunos devem reconhecer, designar, construir, desenhar, comparar e classificar figuras bidimensionais, descrever as suas propriedades e partes componentes e criar imagens mentais das figuras usando a memória espacial e a visualização espacial, reconhecendo e representando as figuras em diferentes perspetivas. Avançando depois no segundo nível para identificar, comparar e analisar os atributos das formas bidimensionais e desenvolver vocabulário para descrever esses atributos, classificar as formas através das suas propriedades e criar definições formulando e testando conjeturas sobre as propriedades e as relações geométricas, justificando as suas conclusões com argumentos lógicos.

Da mesma forma Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) salientam competências no domínio da Geometria a desenvolver em todos os ciclos da educação básica, salientando como fundamentais o desenvolvimento da aptidão para realizar construções geométricas e para reconhecer e analisar propriedades de figuras geométricas, para utilizar a visualização e o raciocínio espacial na análise de situações e na resolução de problemas em Geometria, para formular argumentos válidos recorrendo à visualização e ao raciocínio espacial, explicitando-os em linguagem corrente. Estes autores salientam que no 1º Ciclo é fundamental que os alunos reconheçam as formas geométricas simples, descrevendo-as e utilizando-as para completar e inventar padrões e que desenvolvam a aptidão para realizar construções geométricas simples, assim como para identificar propriedades de figuras geométricas.

2.3.2. Enquadramento com o Programa de Matemática 2007, as Metas Curriculares 2012 e o Programa de Matemática 2013

Numa investigação como a que é proposta neste projeto, é fundamental perceber quais os objetivos que os alunos trabalharam ao longo dos anos em que frequentaram o 1º Ciclo, para se conseguir analisar os dados recolhidos da forma mais completa possível. Assim, deverão ser tidos em conta os objetivos gerais e específicos bem como as orientações metodológicas dos documentos oficiais que se encontram em utilização: o Programa de Matemática 2007 (ME, 2007) em vigor e que se encontra em fase de transição para as Metas Curriculares 2012 (MEC, 2012) e o Programa de Matemática 2013 (MEC, 2013).

Inicialmente o Programa de Matemática 2007 (ME, 2007) assume-se como um reajustamento dos Programas de Matemática anteriores, no entanto, salienta que esse facto não obstruiu a necessidade de se estabelecerem novas Finalidades e Objetivos Gerais comuns aos três Ciclos em que o Ensino Básico Português se encontra estruturado. Este Programa dá orientações metodológicas, de gestão curricular e avaliação gerais e comuns a todos os Ciclos. Encontra-se organizado por Ciclos (e não por anos), no entanto, no caso do 1º Ciclo está estruturado em duas etapas (1º e 2º anos e 3º e 4º anos) "por se entender que é uma forma mais adequada para este nível de ensino" (p. 2), estabelecendo-se assim duas etapas de aprendizagem que correspondem às sugeridas pelo NCTM (2007).

Em termos estruturais o Programa 2007, encontra-se dividido em quatro grandes temas: Números e Operações, Álgebra, Geometria e Organização e Tratamento de Dados. No que à Geometria diz respeito, no 1º Ciclo, e em relação aos objetivos deste estudo, estabelece como objetivo geral de aprendizagem: "desenvolver a visualização e ser capazes de representar, descrever e construir figuras no plano e no espaço e identificar propriedades que as caracterizem" (ME, 2007, p. 20). Posteriormente são organizados em tabela e por tópicos os objetivos específicos, salientando-se a anexação de notas metodológicas. Ainda em relação às indicações metodológicas é de salientar as orientações dadas a esta área no 1º Ciclo privilegiando-se "a exploração, a manipulação e a experimentação, utilizando objetos do mundo real e materiais específicos, de modo a desenvolver o sentido espacial" (p. 20) e o recurso a materiais manipuláveis (estruturados e não estruturados) e do computador.

Contrariamente ao Programa (ME, 2007) o Programa de Matemática 2013 (MEC, 2013) e as Metas Curriculares do Ensino Básico (MEC, 2012) encontram-se organizadas por anos de escolaridade, assumindo-se que nas Metas Curriculares 2012 encontram-se elencados "objetivos gerais que são especificados por descritores, redigidos de forma concisa e que apontam para desempenhos precisos e avaliáveis. Em termos estruturais as Metas Curriculares (MEC, 2012) e o Programa (MEC, 2013) para além da organização por anos, estabelecem os mesmos quatro domínios do Programa de 2007.

Relativamente à metodologia e no que ao 1º Ciclo diz respeito, o Programa de Matemática 2013 salienta que neste Ciclo "os assuntos são introduzidos de forma progressiva, começando-se por um tratamento experimental e concreto, caminhando-se faseadamente para uma conceção mais abstrata" (p. 6). Assim, relativamente à Geometria diretamente relacionada com este estudo, contrariamente ao Programa de Matemática 2007 que estabelece como ponto de partida a exploração, manipulação e experimentação de objetos do mundo real e materiais manipuláveis, o Programa de Matemática 2013 estabelece como ponto de partida a apresentação das "noções básicas da Geometria, começando-se pelo reconhecimento visual de objetos e conceitos elementares como pontos, colinearidade de pontos, direções, retas (...) a partir dos quais se constroem objetos mais complexos como polígonos, circunferências, sólidos e ângulos" (ME, 2013, p. 6).

Ainda em relação à metodologia as Metas Curriculares 2012 estabelecem que deve ser o professor a "selecionar uma estratégia de ensino adequada à respetiva concretização, incluindo uma adaptação da linguagem aos diferentes níveis de escolaridade" (p. 1), no entanto, foi elaborado um Caderno de Apoio ao 1º Ciclo (ME, 2012b) que contém "várias sugestões de exercícios, problemas e atividades, alguns com propostas de resolução, esclarecimentos relativos a algumas opções tomadas no documento principal e informações complementares para os professores" (p. 1). De salientar que os exemplos apresentados neste Caderno de Apoio são apresentados com três níveis de desempenho progressivo (do regular ao mais avançado).

CAPÍTULO 3

METODOLOGIA

O presente capítulo pretende apresentar as opções metodológicas delineadas ao longo da investigação, aqui são também apresentados os participantes e os critérios de seleção, os instrumentos e os procedimentos de recolha e análise dos dados.

3.1. Opções metodológicas

Esta investigação tem como base de orientação o paradigma interpretativo "em que os fenómenos são olhados com o objetivo de criar uma teoria que os explique" (Matos & Carreira, 1994, p. 21) e tendo como opção a utilização de técnicas de investigação de índole qualitativa na recolha e análise de dados.

O principal objetivo foi empreender num estudo indutivo onde as conclusões e a compreensão dos dados recolhidos têm como base padrões e interligações provenientes da recolha dos dados. (Carmo & Ferreira, 2008).

Assim houve, na recolha e análise de dados, um interesse "pelo significado conferido pelos «atores» às ações nas quais se empenharam" (Lessard-Hebert, Goyette, & Boutin, 1990, p. 32), ou seja, no final o conjunto de dados apresentados são produto de uma interpretação das ações e do significado que os participantes no estudo e eu, como investigadora, damos aos dados recolhidos. Além disso, este é um estudo de investigação em educação, preocupando-se com os significados que os alunos criam para originar as aprendizagens.

De acordo com a proposta de classificação e análise das condições de investigação propostas por Yin (1989) esta investigação será um estudo de caso dada a natureza da problemática e das questões de investigação que se preocupam com o "como" e o "porquê", sendo o foco da investigação acontecimentos contemporâneos. Para além disso, esta investigação é um estudo de caso na medida em que se foca nos casos particulares de um conjunto de alunos de um determinado ano de escolaridade. Os casos são um grupo de 6 alunos do 2.º ano de escolaridade e um grupo de 6 alunos do

4.º ano de escolaridade. Tem como produto final uma descrição dos fenómenos em estudo e procura compreendê-los (Merrian, citada por Carmo & Ferreira, 2008). Este estudo de caso é múltiplo, dado que compreende a análise e interpretação de dados obtidos através de entrevistas a grupos de alunos de dois anos escolares diferentes, compreendendo assim dois casos diferentes de análise (Yin, 1989).

Dado que um estudo de caso "visa conhecer em profundidade o seu «como» e os seus «porquês», evidenciando a sua unidade e identidade próprias" (Ponte, 1994, p. 3), as questões orientadoras delineadas não conduzem a uma mera apresentação da frequência e incidência dos dados, mas a uma operacionalização de ligações que precisam de ser traçadas ao longo do tempo (Yin, 1989).

Tendo como objetivo o estudo de acontecimentos contemporâneos, sem que o normal comportamento da amostra seja manipulado pelo investigador, recorri à observação direta durante as entrevistas sistemáticas realizadas e à análise documental resultante dessas entrevistas (Yin, 1989). Este estudo debruça-se sobre as características desta amostra específica, assim, sendo realizada uma descrição factual, literal, sistemática e da forma mais completa possível. Tem-se como objetivo não o estudo isolado dos dados recolhidos, mas o seu significado no contexto real, ou seja, "pretende-se conhecer a realidade tal como ela é vista pelos seus diversos atores" (Ponte, 1994, p. 9) mas analisando os dados também do meu ponto de vista como investigadora.

Como estudo empírico esta investigação teve uma sequência lógica que relaciona as questões iniciais, os dados empíricos e as suas conclusões. Assim, de acordo com Yin (1989) e com o processo vivido neste estudo de caso, foram tidas em conta as seguintes etapas: i) delineação das questões do estudo; ii) definição de proposições teóricas; iii) estabelecimento de unidades de análise e iv) estabelecimento de conexões entre os dados recolhidos e as proposições teóricas.

O cariz interpretativo desta investigação permitiu a comparação dos dados recolhidos e analisados com outras situações já estudadas e com as teorias existentes e apreendidas durante a pesquisa bibliográfica. Os objetivos deste estudo não compreenderam a generalização dos resultados obtidos, mas sim a produção de conhecimentos sobre a temática em estudo, ajudando a confirmar ou não teorias já existentes (Matos, 1994). No final surgem, ainda, novas hipóteses de trabalho que poderão conduzir a novas investigações.

3.2. Participantes e critérios de seleção

Não sendo possível fazer incidir este estudo em toda a população ou universo dos alunos do 1º Ciclo do Ensino Básico portugueses e sendo esta uma dissertação que deverá ser desenvolvida ao longo de um ano, optei por um estudo de caso, selecionando um reduzido número de participantes, de forma a permitir, em tempo útil, a recolha e análise dos dados. Assim, decidi incidir o meu estudo em alunos do 2º e 4º anos, por serem estes os anos que são também apontados pelo NCTM (2007) e pelo Programa de Matemática de 2007 (ME) como os correspondentes a dois níveis de aprendizagem ou etapas de aprendizagem diferentes.

Neste estudo participaram duas Professoras Titulares de Turma e doze alunos, seis de 2º ano e outros seis de 4º ano, pertencentes a uma escola e Agrupamento dos arredores de Lisboa, sendo esta uma amostragem por conveniência, dado que foram selecionados porque as professoras se disponibilizaram a colaborar no estudo.

Os alunos participantes foram escolhidos pelas Professoras Titulares de Turma (tendo sido devidamente autorizada a sua colaboração pelas respetivas Professoras e Encarregados de Educação, anexo 1) e tendo sido por mim indicado que tinha preferência por alunos comunicativos, que apresentassem diferentes níveis de conhecimentos, nomeadamente de nível bom e médio (não foram contemplados alunos com níveis de conhecimento baixo, por se considerar que poderiam não conseguir comunicar de forma clara e fornecer os dados necessários a esta investigação). Este estudo terá assim um carácter exploratório que não poderá ser generalizado à população à qual pertence o grupo de conveniência (Carmo & Ferreira, 2008).

3.3. Instrumentos de recolha de dados

A recolha de dados deste estudo foi realizada oralmente por mim (investigadora) em interação direta com os participantes e de forma presencial. Assim, foram elaborados dois inquéritos que tomaram a forma de entrevistas (uma para as professoras e outra para os alunos) e que foram orientados para o tema específico em estudo (Lessard-Hebert, Goyette, & Boutin, 1990). A recolha de dados decorreu através de uma única entrevista, realizada a cada professora e aluno individualmente, implicou a gravação áudio e vídeo, na qual a face dos entrevistados nunca foi gravada, sendo a confidencialidade de todos os participantes mantida através da alteração do seu nome.

Além disso foram recolhidos e analisados documentos escritos, nomeadamente, as Planificações Trimestrais elaboradas pelo Agrupamento para os respetivos anos a que pertencem os participantes deste estudo e as produções realizadas pelos alunos ao longo das entrevistas.

Foi realizada primeiramente uma entrevista estruturada às duas Professoras Titulares das Turmas dos alunos da amostra, que teve como objetivo a contextualização das aprendizagens realizadas em grupo turma, as metodologias utilizadas e a caracterização dos alunos. Esta entrevista foi estruturada dado que pretendia minimizar a variação das questões colocadas e uma uniformização da informação recolhida, uma vez que o objetivo era apenas fazer uma pequena entrevista para obter algumas informações necessárias para a contextualização do estudo que se seguiu (anexo 2).

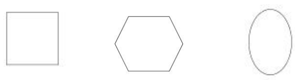
No que diz respeito ao estudo propriamente dito e às entrevistas realizadas aos alunos do 2º e 4º anos, foi realizada uma estruturação prévia da entrevista (anexo 3), mas esta não era demasiado rígida e permitia eventuais pequenas alterações que possibilitassem a recolha de outras informações importantes e que não estivessem à partida previstas, sendo assim uma entrevista pouco estruturada (Carmo & Ferreira, 2008). O guião da entrevista continha também algumas pequenas sugestões sobre a forma de continuar a entrevista perante algumas previsíveis respostas dos alunos.

De acordo com Powney e Watts (citados por Lessard-Hebert, Goyette, & Boutin, 1990) esta entrevista foi orientada para a resposta, dado que fui eu (investigadora) que mantive o controlo durante todo o processo e que mantive um quadro de referência pré-estabelecido, podendo a ordem de aparição das diferentes perguntas ser alterada de acordo com o desenvolvimento do processo e o surgimento das informações.

De acordo com a tipologia de Madelaine Grawitz (citada por Carmo & Ferreira, 2008) no caso do presente estudo foram realizadas entrevistas clínicas, havendo uma liberdade quase total aos entrevistados nas suas respostas e havendo uma grande abundância e profundidade de informação e termos técnicos específicos partilhados, além disso, eu como investigadora, fui-me orientando pelas minhas questões de investigação, tentando promover a revelação das informações à medida que as entrevistas decorriam (Pourtois & Desmet, citados por Lessard-Hebert, Goyette, & Boutin, 1990).

De salientar que a entrevista foi delineada com base na revisão da literatura realizada e tendo em conta o objetivo traçado e as questões de investigação que orientam este estudo. Ao longo de toda a entrevista, foram utilizadas as figuras representadas na tabela 7, baseadas no estudo de Tsamir, Tirosh e Levenson (2008) estas compreendem, segundo estes autores, exemplos e contraexemplos, intuitivos e não intuitivos de triângulos. Nesta tabela poderão ser consultados os nomes que serão utilizados para a referenciação destes exemplos e contraexemplos de triângulos ao longo de toda a dissertação.

Tabela 7 - *Exemplos e contraexemplos, intuitivos e não intuitivos de triângulos utilizados nas entrevistas aos alunos*
(Baseados em Tsamir, Tirosh & Levenson, 2008)

	Intuitivos	Não intuitivos
Exemplos	 Triângulo isósceles; Triângulo equilátero	 *Triângulo isósceles de lado*; *Triângulo equilátero ao contrário*; Triângulo retângulo; Triângulo acutângulo; Triângulo obtusângulo
Contraexemplos	 Quadrado; Hexágono; Elipse	 *Triângulo zig zag*; Pentágono; *Triângulo aberto*; *Triângulo arredondado*

3.4. Procedimentos de recolha de dados

As entrevistas realizadas tanto às professoras como aos alunos tiveram uma duração entre 20 a 50 minutos cada e foram realizadas durante as últimas três semanas de Janeiro de 2014, numa sala onde apenas nos encontrávamos eu (investigadora) e o entrevistado.

A entrevista realizada às Professoras Titulares de Turma era estruturada, tendo sido seguido de forma rigorosa o guião elaborado. No final destas entrevistas foi pedido às professoras que facilitassem as Planificações Trimestrais de Matemática.

No caso das entrevistas aos alunos, as perguntas tinham um padrão progressivo de facilidade (do mais simples para o mais complexo) e foram construídas com base numa aprofundada revisão da literatura, no entanto, o conjunto de perguntas não tinha uma ordenação rígida (podendo ser alterada de acordo com as necessidades). As perguntas tinham uma forma quase sempre aberta e eram focadas nas vivências pessoais das crianças sobre a Geometria em estudo (Carmo & Ferreira, 2008).

Esta entrevista tinha como objetivo a recolha do discurso direto dos alunos, de forma a permitir uma análise fiel dos seus conhecimentos e formas de raciocínio. Assim, foi importante ter cuidado ao longo da realização das mesmas para que eu como investigadora não influenciasse as respostas dos entrevistados; para que não se sobrepusessem as nossas diferenças (género e idade) e para que não houvesse sobreposição de canais de comunicação (nomeadamente tendo em conta que a forma como se coloca a questão poderá influenciar a resposta) (Carmo & Ferreira, 2008). Sendo esta amostra composta por crianças, foi necessário estabelecer uma relação de empatia com os sujeitos para que estes se sentissem à vontade para transmitir as informações. Tal como previsto no próprio guião da entrevista, por vezes, foi necessário insistir e reformular as perguntas várias vezes até eles começarem a responder ou a justificar as suas escolhas.

Para facilitar a recolha dos dados foram realizadas gravações áudio e vídeo das entrevistas, que foram posteriormente transcritas, incluindo-se nestas transcrições os gestos que os alunos utilizaram para ilustrar os seus pontos de vista. Foi também realizada a recolha de todas as produções que os alunos utilizaram para responder ou explicar algumas respostas ao longo da entrevista.

3.5. Procedimento de análise de dados

Sendo esta uma investigação que tem como base de orientação o paradigma interpretativo, com a utilização de técnicas de investigação de índole qualitativa, a análise dos dados teve como objetivo a compreensão dos conhecimentos dos alunos tendo em conta os seus "quadros de referência" (Carmo & Ferreira, 2008), pretendendo-se, neste caso e de acordo com as questões de investigação delineadas, (i). compreender quais são os exemplos e contraexemplos intuitivos e não intuitivos para os alunos de 2º e 4º anos; (ii). compreender que propriedades os alunos de 2º e 4º anos identificam em triângulos; (iii). identificar quais as definições de triângulo utilizadas pelos alunos de 2º e 4º anos e (iv). identificar quais as diferenças de conhecimento das figuras que os alunos apresentam no 2º ano (meio do 1º ciclo) e no 4º ano (fim do 1º ciclo).

Durante todo o processo de análise de dados foi fundamental continuar a revisão da literatura, não só relendo a que foi previamente elaborada mas também procurando nova bibliografia que ajudou significativamente à análise dos dados recolhidos (Bogdan & Biklen, 1994).

Para a realização da análise de conteúdos foi percorrido um percurso que compreendeu a junção e organização de todos os dados recolhidos no campo, a utilização de auxiliares visuais (diagramas e tabelas), o desenvolvimento de um sistema de codificação e organização de dados (por cores e símbolos), a definição das categorias de análise segundo as quais os conteúdos foram classificados e quantificados, a reorganização dos dados de acordo com as categorias estabelecidas (Bogdan & Biklen, 1994), seguindo-se a análise das suas principais características e das suas relações, interpretando-as e relacionando-as com as questões de investigação estabelecidas (Lankshear & Knobel, 2004).

Assim, foi realizada primeiramente uma junção e organização de todos os dados recolhidos. No caso dos dados recolhidos através das entrevistas, gravadas em vídeo, foi necessário fazer a sua transcrição (Lankshear & Knobel, 2004) havendo o cuidado de assinalar os gestos ilustrativos utilizados pelas crianças, e uma seleção dos dados pertinentes, uma vez que sendo a recolha de dados realizada através de entrevistas semidiretivas, existiam registos sem interesse, por não terem relação com os objetivos da investigação (Esteves, 2006, p. 109). A junção de todos os dados recolhidos (Esteves, 2006) compreendeu os guiões de entrevista, as transcrições de entrevistas, os registos que os alunos fizeram durante as entrevistas e as Planificações Trimestrais recolhidas, organizadas em documentos individuais de forma a serem manuseados, manipulados em unidades independentes e poderem ser reorganizados de acordo com as necessidades (Bogdan & Biklen, 1994).

Com a análise das entrevistas de contextualização realizadas às Professoras Titulares de Turma e das Planificações Trimestrais foram delineadas algumas expectativas, pretendia-se verificar se estas hipóteses formuladas à partida se verificariam no fim da análise dos dados.

No caso das entrevistas realizadas aos alunos senti necessidade de as organizar em tabelas, que colocaram lado a lado as diferentes respostas que cada aluno, de cada ano, deu às mesmas perguntas da entrevista.

Com sucessivas leituras de todos os dados destacaram-se as “palavras, frases, padrões de comportamento, formas dos sujeitos pensarem e acontecimentos” (Bogdan & Biklen, 1994, p. 221). Ao longo de toda a análise, fui criando diversos sistemas de categorização e codificação por cores e símbolos que permitiram começar a selecionar, organizar e relacionar dados que se encontram nos diferentes registos. Deste modo foi sendo construído o caso correspondente a cada um dos anos de escolaridade.

O presente estudo, enquanto investigação qualitativa, compreendeu uma análise de dados flexível (Carmo & Ferreira, 2008) e de conteúdo temático e categorial (Esteves, 2006), pelo que, compreendeu um quadro de análise por categorias pré-definidas, mas com a análise dos registos surgiram, também, novos dados que levaram a um reajustamento das categorias de análise e outras emergentes dos dados recolhidos.

A análise dos dados, a discussão dos resultados e as conclusões efetuadas tiveram em primeiro lugar como objetivo a resposta às questões iniciais do estudo, mas também foram realizadas à luz da revisão da literatura efetuada. Assim, compreendem não só uma descrição e enumeração resumida após o tratamento dos dados obtidos, mas também, uma interpretação desses dados, atribuindo um significado mais abrangente às informações recolhidas à luz da pesquisa bibliográfica (Esteves, 2006) e recorrendo a processos de inferência que permitiram a interpretação desses dados. Pretendeu-se fazer uma articulação entre o texto recolhido através das entrevistas (devidamente descrito e analisado) e os factos que determinam as características observadas, através de dedução lógica (Carmo, 2008) e interligando-os com as teorias e conceitos já existentes. Assim, foi realizada uma análise indireta dos dados que procurou interpretar as informações recolhidas, não se limitando à análise dos conteúdos mas procurando através da inferência chegar a conclusões (Carmo, 2008). Procurou-se, posteriormente, juntar tudo o que foi considerado relevante para incluir em cada um dos casos.

CAPÍTULO 4

OS CONCEITOS E AS DEFINIÇÕES DE TRIÂNGULOS DOS ALUNOS

Neste capítulo, serão apresentados os dois casos em análise, primeiro o dos alunos do 2º ano e depois o dos alunos do 4º ano. Para cada um dos casos é feita uma contextualização sobre o ambiente de aprendizagem em sala de aula de cada um dos grupos, a partir das entrevistas realizadas às Professoras Titulares de Turma e da análise das Planificações Trimestrais. Estas são analisadas à luz dos Programas de Matemática em vigor. É também apresentada uma caracterização dos alunos.

Para cada um dos casos são analisados e discutidos os conceitos e as definições de triângulos dos alunos através da análise dos dados obtidos pelas entrevistas individuais, de acordo com os seguintes critérios de análise: exemplos e contraexemplos de triângulos apresentados, identificação de exemplos e contraexemplos, comparação de figuras e descrição e definição de triângulos. Os casos, correspondentes a cada um dos subcapítulos encontram-se organizados em tópicos correspondentes aos critérios de análise delineados, apresentando-se os dois pela mesma ordem.

4.1. Os alunos do 2º ano

A Professora Titular da Turma de 2º ano pertence ao Quadro do Agrupamento, é licenciada e tem dezassete anos de serviço, durante a entrevista admitiu que a Geometria não é uma área que goste de lecionar, embora tenha referido que com a introdução do Programa de Matemática de 2007 tenha adquirido um pouco mais de gosto por esta área.

De acordo com a entrevista realizada, nas aulas dedicadas à Geometria costuma ser privilegiado o trabalho a pares, havendo propostas de resolução de problemas, desenvolvimento de projetos e trabalho com o manual. Além disso, embora não haja na sala de aula um cantinho especificamente organizado para a Matemática, os alunos têm disponível e utilizam frequentemente nas aulas de Geometria materiais manipuláveis como geoplanos, tangrans, pentaminós, réguas e esquadros. Na sala de aula há computadores, no entanto os alunos nunca os utilizaram para a Geometria, não tendo nunca tido contacto com programas de Geometria Dinâmica. Dado que na sala há um projetor de parede a professora admite utilizá-lo muitas vezes para projetar em Power Point atividades que são desenvolvidas em grande grupo.

Relativamente aos objetivos de aprendizagem, embora estes não estejam afixados na sala, a professora afirmou que no início de cada atividade partilha com os alunos quais os objetivos da mesma. Apesar de não ter conseguido dar exemplos práticos, esta professora também afirmou que costuma relacionar as aprendizagens de Geometria com outras áreas da Matemática e com outras áreas disciplinares como a Língua Portuguesa e a Expressão Plástica. Além disso, a professora teve alguma dificuldade em definir a quantidade de tempo que dedica por ano ao estudo da Geometria, acabando por definir que talvez dedique uma aula por semana ao estudo desta área da Matemática. Nas planificações das aulas foram tidos em conta os objetivos programáticos do Programa de Matemática de 2007 mas também as Metas Curriculares de 2012 e o Programa de 2013. Não tendo total certeza do que falta abordar na sala de aula, a professora confirmou já ter falado de triângulos este ano letivo e disponibilizou a Planificação Trimestral seguida no 1º Período.

No que concerne às aprendizagens dos alunos do 2º ano entrevistados, tendo em consideração as orientações curriculares gerais estabelecidas na Revisão da Literatura é expectável que estes alunos que já têm pelo menos um ano e meio de iniciação formal à Geometria, já sejam capazes de reconhecer, designar, construir, desenhar e comparar a maioria das figuras apresentadas, descrevendo pelo menos algumas das suas propriedades, e tendo já desenvolvido alguma memória e visualização espacial para reconhecer e representar figuras em diferentes perspetivas. No que à linguagem diz respeito, dado que os alunos deste ano ainda se encontram no início da escolaridade formal, é expectável que recorram a uma linguagem mais informal que formal e que recorram frequentemente a exemplos concretos para justificar as suas argumentações, dado que ainda terão alguma dificuldade em agrupar as figuras por classes por terem dificuldade em relacionar e comparar simultaneamente as diferentes propriedades das figuras.

De acordo com os Programas de Matemática (ME, 2007 e MEC, 2013) que estão presentes na Planificação Trimestral fornecida pela professora, em termos formais e relativamente aos conteúdos abordados nas entrevistas, já foram abordados no presente ano letivo conteúdos relacionados com os “domínios/subdomínios das figuras geométricas”, tendo como “objetivo geral: reconhecer e apresentar formas geométricas”, nomeadamente através do estudo dos seguintes conteúdos: “retas e semirretas, polígonos e linhas poligonais, parte interna e externa de linhas planas fechadas, quadriláteros e distinção entre atributos geométricos e não geométricos”, salientando-se ainda que num dos “descritores de desempenho” apresentados é delineado o objetivo de “identificar figuras geométricas numa composição”, pelo que seria expectável que os alunos recorressem a estes conhecimentos durante o desenvolvimento das entrevistas.

Dos seis alunos de 2º ano entrevistados, dois eram rapazes e quatro eram raparigas, apresentam-se aqui por ordem cronológica de acordo com a idade que tinham à data da entrevista: Carlos (6 anos e 11 meses), Emília (7 anos e 3 meses), Beatriz (7 anos e 6 meses), Diana (7 anos e 7 meses), Filipa (7 anos e 10 meses) e André (8 anos) (nomes fictícios). Embora tenha sido inicialmente pedido à Professora Titular de Turma que selecionasse três alunos de nível bom e três de nível médio, quando os caracterizou de forma individual a professora considerou que o André, a Beatriz e o Carlos eram alunos muito bons, a Diana e a Emília alunas boas e a Filipa uma aluna de nível médio.

4.1.1. Exemplos e contraexemplos de triângulos apresentados pelos alunos

De acordo com o previsto no guião da entrevista, depois de estabelecida a definição inicial de triângulo, pedi a cada entrevistado que apresentasse dois exemplos diferentes e um contraexemplo (uma figura que não fosse um triângulo) em quatro suportes diferentes (desenhos numa folha de papel branco, representações no geoplano, desenhos em papel ponteado e construções com barras *Geo Strips*).

Todos os exemplos e contraexemplos desenhados pelos alunos de 2º ano em folhas de papel branco estavam corretos, no entanto, foram sempre desenhados sem rigor, uma vez que nenhum destes alunos recorreu à régua para desenhar as linhas retas. De salientar que o André utilizou o esquadro como modelo e o contornou para desenhar o seu segundo exemplo de triângulo (figuras 4 e 5).

Dos doze exemplos de triângulos apresentados, dez são acutângulos e apenas dois são retângulos: o apresentado pelo André (desenhado através do contorno do esquadro) e um apresentado pela Filipa (figura 4). No que diz respeito à classificação quanto ao comprimento dos lados, só o André apresentou triângulos isósceles, todos os outros apresentaram triângulos escalenos.

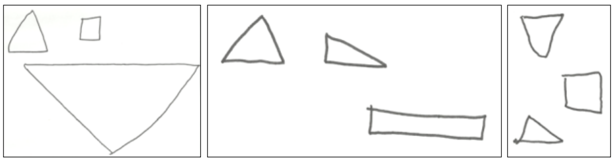


Figura 4 - Exemplos e contraexemplos de triângulos apresentados por André, Filipa e Carlos respetivamente na folha de papel branco

Quando foi pedido que justificassem porque é que os dois exemplos de triângulos eram diferentes, por exemplo, a Beatriz explicou "um é maior e o outro é mais pequeno", a Emília salientou "este aqui é mais comprido que este", a Filipa afirmou "porque um está de pé e o outro está deitado" e o Carlos ao desenhar os seus triângulos salientou "eu vou fazer um assim (…) e outro assim" (desenhando os dois triângulos com orientações invertidas) (figura 4). Assim, estes alunos recorreram a perceções visuais para justificar as diferenças entre os triângulos.

Relativamente aos contraexemplos apresentados nas folhas de papel branco, a Beatriz, o Carlos e a Diana apresentaram quadrados, a Filipa apresentou um retângulo, a Beatriz um círculo e a Emília um coração (figuras 4 e 5). Nas suas fundamentações o André nomeou o "quadrado" e acrescentou "tem quatro partes compridas" (referindo-se de forma informal aos lados da figura, tal como fez ao longo de toda a entrevista), a Beatriz afirmou que o seu círculo não era um triângulo "porque é uma bola" e os restantes alunos sublinharam o número de lados das suas figuras (salientando-se que a Emília considerou que o coração apresentado tem "quatro lados").

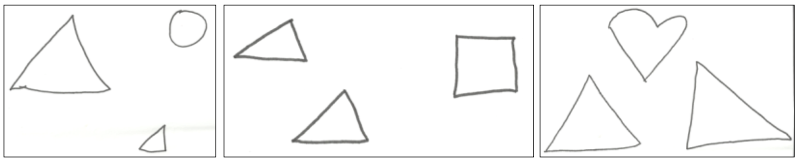


Figura 5 - Exemplos e contraexemplos de triângulos apresentados por Beatriz, Diana e Emília respetivamente na folha de papel branco

No geoplano os exemplos apresentados contemplam cinco triângulos retângulos (mais do que na folha de papel branco) e sete acutângulos. Nos exemplos apresentados neste suporte, podem-se encontrar seis triângulos isósceles e seis triângulos escalenos. De salientar que o André e o Carlos desenharam triângulos iguais mas desenhados de forma invertida (figura 6), tendo o Carlos justificado que os seus triângulos eram diferentes "porque um está de pernas para o ar e o outro não está de pernas para o ar". A Filipa apresentou dois triângulos retângulos (um escaleno e o outro isósceles) justificando as suas diferenças com "um está de pé e o outro está deitado". Assim, uma vez mais, as justificações apresentadas foram baseadas em perceções visuais.

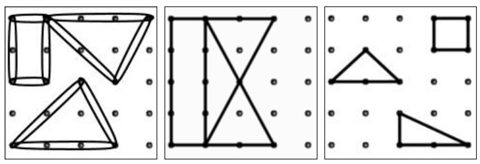


Figura 6 - Exemplos e contraexemplos de triângulos apresentados por André, Carlos e Filipa respetivamente no geoplano

Relativamente aos contraexemplos apresentados no geoplano, todos os alunos mudaram a figura apresentada relativamente à folha de papel branco, no entanto neste suporte surgiram apenas quadriláteros: dois retângulos, três quadrados e um trapézio (figuras 6 e 7). Embora ao desenhar, o André e o Carlos tenham nomeado as figuras (retângulos) para justificar o facto de estas não serem triângulos, todos os alunos recorreram ao número de lados: a Beatriz, o Carlos, a Diana e a Emília afirmaram porque "tem quatro lados", a Filipa "porque não tem três lados" e o André "tem quatro partes (lados)… Não! Tem duas partes compridas e duas partes… pequenas". Assim, embora o André tenha salientado também o tamanho dos lados (a que chama de partes) o que é um atributo não fundamental, todos se referiram ao número de lados para se justificarem, recorrendo a uma característica fundamental das figuras.

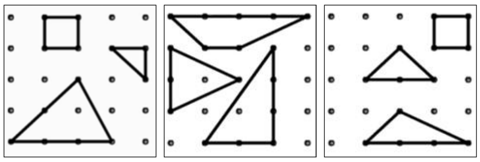


Figura 7 - Exemplos e contraexemplos de triângulos apresentados por Beatriz, Diana e Emília respetivamente no geoplano

Nos exemplos de triângulos apresentados no papel ponteado, uma vez mais, os alunos não repetem os exemplos que já haviam apresentado nos outros suportes. Todos os desenhos foram realizados sem rigor (sem recurso à régua para desenhar as linhas retas). De realçar que a Emília em duas figuras (figura 8) não respeitou os pontos do papel ponteado nem as possibilidades de correspondência entre o papel ponteado e o geoplano, pelo que, os seus desenhos não são possíveis de reproduzir com os elásticos. Analisando este facto fiquei com algumas dúvidas sobre o real domínio desta aluna sobre estes materiais manipuláveis e do seu manuseamento e interrogo-me se terá a noção da sua correspondência.

Neste suporte, continuam a prevalecer os triângulos acutângulos, sendo apresentados apenas dois triângulos retângulos, um pelo André e outro pela Filipa (figura 8). Relativamente ao comprimento dos lados todos os exemplos apresentados são de triângulos escalenos, exceto os do Carlos que são ambos isósceles (figura 8). Para justificar as diferenças entre os triângulos os alunos continuaram a recorrer a perceções visuais tendo, por exemplo, a Diana e a Emília referido o tamanho: "porque têm os dois três lados mas… Só que um é maior e o outro é mais pequenino" e "porque este é maior do que este" e a Filipa repetiu a sua perceção relativamente à orientação das figuras "porque um está em pé e o outro está deitado".

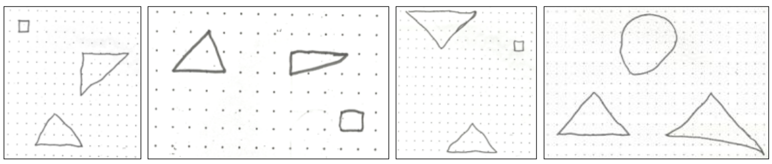


Figura 8 - Exemplos e contraexemplos de triângulos apresentados por André, Filipa, Carlos e Emília respetivamente na folha de papel ponteado

No que aos contraexemplos diz respeito continuam a prevalecer os quadriláteros, tendo sido desenhados três quadrados, dois retângulos e um círculo (desadequado ao suporte, por não respeitar os pontos do papel ponteado e não ser possível de reproduzir no geoplano) (figuras 8 e 9). Nas suas fundamentações os alunos também recorreram maioritariamente ao número de lados das figuras (característica fundamental), por terem "quatro lados" ou por "não tem três lados" (no caso da Filipa). No entanto o André continuou a salientar o tamanho desses lados (afirmando que as "quatro partes" do seu quadrado são "pequenas") e a Diana salientou que o seu retângulo "é mais comprido" (que os triângulos) realçando, assim, características não fundamentais. A Emília justificou que o seu círculo não era um triângulo "porque é redondo", referindo, embora de forma implícita, a necessidade de os lados dos triângulos serem retos.

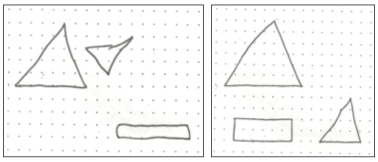


Figura 9 - Exemplos e contraexemplos de triângulos apresentados por Beatriz e Diana respetivamente na folha de papel ponteado

Com a *Geo Strips* os exemplos apresentados foram diferentes dos apresentados nos suportes anteriores. Neste caso todos os exemplos apresentados foram triângulos acutângulos, no entanto, surgiram pela primeira vez triângulos equiláteros (cinco), sendo os restantes quatro isósceles e três escalenos. De salientar que as afirmações sobre as diferenças entre os triângulos continuaram a basear-se em perceções visuais, por exemplo, a Beatriz apresentou dois triângulos equiláteros tendo afirmado que eram diferentes "porque um é maior e o outro é mais pequeno", a Diana justificou que os seus triângulos escaleno e isósceles são triângulos porque "uma é mais baixinha e um bocado mais comprida e esta é mais alta e um bocado mais curta" e a Filipa continuou a realçar que os seus triângulos são diferentes porque "um está em pé e o outro está deitado" (figura 10).

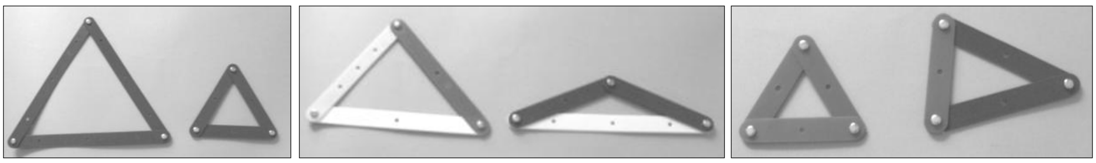


Figura 10 - Exemplos de triângulos apresentados por Beatriz, Diana e Filipa respetivamente com as *Geo Strips*

Todos os contraexemplos apresentados são quadriláteros, sendo dois quadrados e quatro quadriláteros irregulares (dos quais dois são retângulos e dois com os quatro lados de comprimentos diferentes). Para justificar as diferenças todas os alunos continuaram a recorrer à contagem do número de lados (atributo fundamental), para além disso, continuaram a recorrer a perceções visuais tendo o André continuado a salientar o tamanho dos lados ("quatro partes pequenas"), a Diana afirmado que o retângulo para além dos quatro lados é uma figura "mais comprida do que um triângulo" e a Emília nomeado o seu retângulo (figura 11).

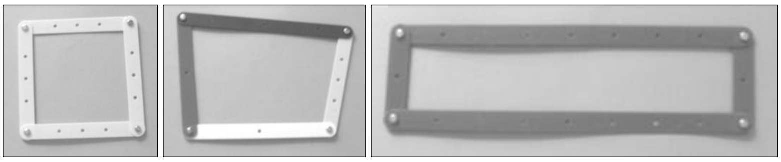


Figura 11 - Contraexemplos de triângulos apresentados por André, Diana e Emília respetivamente com a *Geo Strips*

Em síntese, considerando todos os exemplos apresentados nos diferentes suportes, a maioria dos triângulos apresentados foram acutângulos, aparecendo alguns triângulos retângulos e não tendo sido apresentado nenhum triângulo obtusângulo. No que ao comprimento dos lados diz respeito foram apresentados muitos triângulos isósceles e escalenos, mas, como já foi referido, só nas *Geo Strips* surgiram triângulos equiláteros.

Como pedi para desenharem estes exemplos e contraexemplos de figuras logo no início da entrevista, considero que estes desenhos são representações dos conhecimentos e perceções que os alunos têm das figuras, não estando ainda nesta altura influenciados pelas restantes perguntas da entrevista e pelas análises e pensamentos que estas possam ter levado os alunos a fazer.

Assim, as primeiras figuras que os alunos apresentaram desenhadas nas folhas de papel branco (suporte que permite um desenho totalmente livre sem influências ou limitações) serão as que poderão ser consideradas à partida como intuitivas. Como tal, os exemplos intuitivos para este grupo de alunos parecem ser os triângulos acutângulos e escalenos. No entanto, embora os triângulos apresentados sejam maioritariamente escalenos, recordo que foram todos desenhados sem rigor e sem recorrer ao material auxiliar de desenho presente na mesa (régua e esquadro), parecendo-me, de uma forma geral, que a maioria destas figuras têm um desenho muito perto do de triângulos isósceles, aproximando-os muito de triângulos que se podem considerar prototípicos pela sua simetria.

Relativamente aos sucessivos exemplos de triângulos que foram posteriormente apresentados nos restantes suportes, é importante considerar que a maioria dos alunos demonstrou preocupações em não repetir os exemplos apresentados. Continuaram a ser predominantes os triângulos acutângulos aparecendo apenas alguns exemplos de triângulos retângulos, sendo a sua maioria apresentados no geoplano. Estes podem ter surgido por influência do material utilizado, dado que o geoplano é formado por pontos de suporte aos elásticos organizados em malha quadrada.

Nestes suportes também continuaram a ser predominantes os triângulos escalenos, embora muitos já não tenham um desenho tão próximo da simetria como os apresentados nas folhas de papel branco, surgiram no entanto, em maior número que anteriormente os triângulos isósceles, havendo uma predominância dos mesmos no geoplano. Os triângulos equiláteros só foram apresentados nos desenhos representados com as *Geo Strips* que permitiam facilmente a procura de três barras iguais podendo, uma vez mais, ter sido o material a influenciar os exemplos apresentados.

Não apareceram em nenhum dos suportes triângulos obtusângulos, pelo que, se poderá concluir que estes não são intuitivos para nenhum destes alunos.

A maioria dos exemplos apresentados podem ser considerados prototípicos encontrando-se com uma orientação típica. Salientando-se, no entanto, que os alunos desenharam deliberadamente algumas figuras "de lado", "deitadas" ou "de pernas para o ar" para que fossem diferentes das que anteriormente tinham apresentado, evidenciando assim que consideram que ao mudar a orientação das figuras as tornavam triângulos diferentes.

Relativamente aos contraexemplos, não surgiram grandes diferenças nos apresentados nos diferentes suportes, a grande maioria são quadriláteros, prevalecendo os quadrados e os retângulos e surgindo apenas um trapézio e mais duas figuras irregulares (quadriláteros com os lados todos diferentes). Para além dos quadriláteros foram apresentadas três figuras que não eram polígonos: dois círculos e um coração.

Ao analisar os contraexemplos apresentados nas folhas de papel branco (já anteriormente considerado como o suporte que permite a maior liberdade de escolha) parece ser intuitivo para estes alunos que os quadriláteros e as figuras com linhas curvas não são triângulos.

No entanto, nos restantes suportes deixaram de surgir as figuras com linhas curvas, aparecendo apenas quadriláteros como exemplos (exclui-se aqui o contraexemplo apresentado pela Emília no papel ponteado que, como já foi referido, não foi considerado como adequado ao material), o que poderá indicar que são os quadriláteros que são mais intuitivamente aceites como contraexemplos, no entanto, esta prevalência de quadriláteros também poderá ter acontecido por influência dos materiais utilizados, relembro que o geoplano e o papel ponteado eram compostos por malha quadrada e as *Geo Strips* não permitem o desenho de figuras com linhas curvas.

Nas explicações utilizadas para justificar as suas escolhas todos os alunos recorreram à contagem do número de lados das figuras em diversas ocasiões para justificar as suas opções, salientando-se que o André se referiu aos lados sempre como "partes". Assim, todos os alunos de 2º ano desde o início conseguiram identificar o número de lados como sendo uma propriedade essencial das figuras, reconhecendo que os triângulos têm três lados e caso a figura não tenha esses três lados não pode ser um triângulo. Por outro lado, recorreram também à nomeação dos quadriláteros (quadrados e retângulos) para justificar que não eram triângulos, parecendo assim, que para alguns destes alunos, o simples facto de salientarem que a figura tem um nome diferente é suficiente para justificarem que não é um triângulo.

Além disso, todos os alunos durante as justificações dos seus desenhos, em alguma altura, deram ênfase a alguma característica não fundamental como o tamanho (por exemplo, quando a Diana explica que os seus triângulos no papel ponteado são diferentes porque "um é maior e o outro é mais pequeno") ou a orientação da figura (por exemplo, a Filipa justificou várias vezes que os triângulos que apresentou eram diferentes "porque um está de pé e o outro está deitado") recorrendo, assim, a linguagem informal e a perceções visuais. Analisando as entrevistas, esta linguagem informal parece surgir principalmente quando o número de lados não lhes permitia fazer uma justificação (como quando pergunto porque é que os dois triângulos apresentados são diferentes) e quando os alunos não sabem nomear de forma correta as figuras apresentadas (por exemplo, a Beatriz chamou ao seu círculo "bola").

4.1.2. Identificação de exemplos e contraexemplos

Por uma questão de organização, a identificação das figuras apresentadas em cartões individuais e as fundamentações dos alunos serão aqui analisados, não pela ordem que foram apresentadas (anexo 4) que se baseou, tal como as figuras, em Tsamir, Tirosh e Levenson (2008), mas sim pela sua organização (tabela 6) em exemplos intuitivos e não intuitivos e contraexemplos intuitivos e não intuitivos.

Relativamente aos exemplos intuitivos (triângulos isósceles e equilátero) todos os alunos do 2º ano os identificaram corretamente e para o justificar todos recorreram à contagem dos lados ("tem três lados"), salientando-se que o André chamou de forma informal aos lados "partes compridas". Além disso a Diana considerou que os dois triângulos são "altos", dando assim relevância a uma característica não essencial e que resulta de uma perceção visual.

Os triângulos *isósceles de lado*, *equilátero ao contrário*, retângulo, acutângulo e obtusângulo (exemplos não intuitivos) foram corretamente identificados por todos os alunos, menos pela Emília que considerou que nenhum deles era um triângulo. O André, a Beatriz, o Carlos e a Filipa justificaram sempre a sua identificação dos exemplos recorrendo ao número de lados das figuras ("tem três lados"), sendo que o André lhes continuou a chamar "partes compridas". A Diana embora tenha identificado corretamente as figuras como sendo triângulos, para além de o justificar com o número de lados foi referindo que os triângulos *isósceles de lado* e *equilátero ao contrário* "também é alto", que o triângulo retângulo "é um bocadinho mais baixo", o triângulo acutângulo "é um bocadinho mais fininho" e o triângulo obtusângulo "tem três lados só que um é um bocado mais baixo e uma parte é mais comprida e outra é um bocadinho mais curta", dando assim relevância a atributos que resultam da sua aparência global. A

Diana foi sempre virando os cartões que lhe eram apresentados, colocando-os com uma orientação prototípica (figura 12).

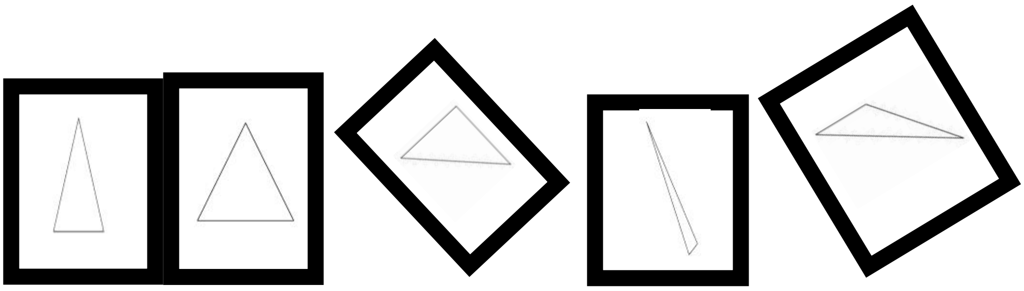


Figura 12 - Cartões com exemplos não intuitivos de triângulos reorientados pela Diana

A Emília não considerou nenhum dos triângulos não intuitivos como sendo triângulos.

> Investigadora - E esta (mostra o triângulo *isósceles de lado*)?
> Emília - Não (pega no cartão, vira-o e coloca no lado dos não triângulos). Só se fosse assim (vira o cartão para a posição prototípica para mostrar).
> Inv. - Só se fosse assim? Então não é um triângulo, porquê? Explica-me lá.
> (volta a pôr o cartão na posição original e coloca-o no lado dos não triângulos).
> Emília - Porque está deitado.

Assim, a Emília vai justificando que o triângulo *isósceles de lado* não é um triângulo "porque está deitado", o triângulo *equilátero ao contrário* "porque está deitado para baixo", o triângulo retângulo "porque está virado para o lado", o triângulo acutângulo "porque é muito fino" e o triângulo obtusângulo "porque está a apontar para aquele lado e é fininha", baseando todas as suas justificações na orientação das figuras (atributo não fundamental) e em perceções visuais através da comparação com triângulos intuitivos e prototípicos, utilizando para se justificar linguagem informal.

Todos os alunos identificaram corretamente que os contraexemplos intuitivos (quadrado, hexágono e elipse) não são triângulos.

Para justificar o facto de o quadrado não ser um triângulo cinco alunos referiram que a figura apresentada "tem quatro lados", por outro lado, a Filipa viu que "não tem três lados" e a Diana considerou que "é mais comprida".

Relativamente ao hexágono o André considerou que "não tem três partes compridas" (lados) e a Filipa que "não tem três lados", por outro lado, a Beatriz, o

Carlos, a Emília e a Diana que "tem seis lados", tendo a última acrescentado "e é um bocadinho mais larga".

No que à elipse diz respeito as justificações variaram entre "não tem três lados" (Filipa), "não tem nenhuma parte comprida (lado)" (André), "parece uma bola" (Beatriz), "porque é redonda" (Carlos e Emília) e "não tem nenhuma parte bicuda e é redondo" (Diana).

Relativamente aos contraexemplos não intuitivos, todos os alunos reconheceram que o *triângulo zig zag* não era um triângulo, o pentágono e o *triângulo aberto* só foi incorretamente identificado como um triângulo pelo André e todos consideraram erradamente que o *triângulo arredondado* era um triângulo.

Sobre o *triângulo zig zag* a Beatriz considerou que tem "nove pontas", o Carlos que "é aos altos e baixos", a Diana que "tem nove partes e é muito mais bicuda", a Emília "porque tem aqui bicos (aponta vários vértices)", a Filipa que "não tem três lados" e o André mostrou muitas dúvidas relacionadas com a imagem e foi preciso insistir várias vezes até tomar um decisão, referiu que não lhe parecia um triângulo "por causa da forma" e acabou por decidir que não era um triângulo porque "não tem … três partes compridas".

Investigadora - E esta (mostra o *triângulo zig zag*)?
André - Não sei… Não é um triângulo.
Inv. - Não é um triângulo, porquê?
André - Não sei, essa não sei…
Inv. - Achas que é um triângulo ou não?
André - Eu acho que é, mas eu também acho que não é por causa da forma.
Inv. - Então é ou não é? Onde ponho?
André - Não sei. Fica no meio.
Inv. - Fica no meio? Não pode ser. Tens de decidir se achas que é um triângulo ou não.
André - Não.
Inv. - Não é um triângulo. Explica-me lá porque é que achas que não é um triângulo.
André - Porque não tem quatro… Três partes compridas.

Em relação ao pentágono o Carlos, a Diana e a Emília salientaram que "tem cinco lados", a Filipa que "não tem três lados" e a Beatriz, embora tenha de forma correta reconhecido que não é um triângulo, considerou que o pentágono tem seis lados.

O André mostrou-se uma vez mais muito indeciso acabando por decidir incorretamente que é um triângulo porque “tem três partes compridas (lados) ”.

O André considerou o *triângulo aberto* um triângulo “porque tem três lados”, a Filipa considerou que a figura não era um triângulo porque “não tem três lados” e os restantes consideraram que faltava alguma coisa à figura para ser um triângulo: “ainda falta uma ponta” (Beatriz), “porque falta aqui um bocadinho” (Carlos), “tem dois lados e não fecha” (Diana) e “porque está aberta” (Emília).

Por fim o *triângulo arredondado* foi considerado por todos um triângulo por ter três lados, sendo que a Diana ainda acrescentou à sua justificação “só que não tem é as três partes bicudas”.

Em resumo, os triângulos considerados intuitivos foram corretamente identificados por todos os alunos do 2º ano, tendo estes, na sua maioria, privilegiado a sua identificação com base no número de lados, apenas a Diana acrescentou à sua justificação uma perceção visual (“e é alto”). Assim, estas figuras parecem ser realmente intuitivas para estes alunos que rapidamente as identificaram como triângulos e o justificaram apenas com base no número de lados não tendo tentado analisar mais nenhuma propriedade.

Nos triângulos considerados à partida como não intuitivos quatro alunos identificaram-nos corretamente justificando o seu reconhecimento na análise do número de lados, a Diana também identificou corretamente as figuras mas teve sempre necessidade de as colocar em posição prototípica e baseou as suas justificações, uma vez mais, não só no número de lados mas também em perceções visuais, por fim, a Emília não reconheceu nenhum destes exemplos como triângulos. Assim, estes triângulos também parecem ser intuitivos para o André, a Beatriz, o Carlos e a Filipa, que continuaram a identificá-los rapidamente e a justificar as suas opções apenas com base na propriedade do número de lados, não foram intuitivos para a Diana que sentiu necessidade de os colocar em posição prototípica e em justificar a sua identificação não apenas no número de lados, mas também em outros atributos não fundamentais como o tamanho (por exemplo: “é um bocadinho mais baixo”) ou a sua aparência global (por exemplo: “é um bocadinho mais fininho”); a Emília, que na identificação dos triângulos intuitivos refere sempre o número de lados, no caso dos triângulos não intuitivos dá sempre relevo primordial à orientação (por exemplo: “porque está deitado para baixo”) e à aparência global (por exemplo: “e é fininha”) das figuras por comparação com a sua imagem mental de uma figura prototípica de triângulo.

Os contraexemplos intuitivos foram devidamente identificados por todos como não sendo triângulos, no caso do quadrado e do hexágono as justificações foram, uma vez mais, baseadas no número de lados (quer porque a figura não tinha três lados, quer porque tinha mais do que três lados ou por terem 4 e 6 lados), no entanto, as explicações relativamente à elipse dividiram-se entre a figura não ter lados e a sua aparência global. Assim, parece que o quadrado e o hexágono são contraexemplos realmente intuitivos para todos os alunos, que rapidamente os identificaram justificando apenas com o número de lados das figuras, propriedade que desde o início da entrevista utilizaram para identificar (ou não) os triângulos. Relativamente à elipse, tenho dúvidas sobre se poderá ou não ser classificada como um contraexemplo intuitivo com base nos dados recolhidos, embora tenha sido devidamente identificada por todos como não sendo um exemplo de triângulo, nas suas justificações só dois dos alunos se referiram à ausência dos lados, tendo as restantes sentido necessidade de recorrer a linguagem informal para explicar as suas perceções visuais da figura (por exemplo: “parece uma bola”) e aparecendo aqui, pela primeira vez, a referência a vértices, quando a Diana salienta que a figura “não tem nenhuma parte bicuda”.

Os contraexemplos não intuitivos foram as figuras que mais dúvidas suscitaram e algumas foram identificadas de forma incorreta como sendo triângulos. O *triângulo zig zag* foi devidamente avaliado pelo seu número de lados, vértices e pela sua aparência global. O pentágono foi reconhecido como não sendo um triângulo por cinco alunos pelo facto de ter mais lados que os triângulos (o André privilegiou a contagem “das partes compridas” não dando relevância ao facto de estas não serem retas). O *triângulo aberto* foi considerado pelo seu número de lados e pela sua aparência global tendo muitos alunos considerado a figura inacabada (o André optou por não dar relevância a este pormenor e privilegiou apenas a contagem do número de lados). O *triângulo arredondado* foi erradamente identificado por todos como sendo um triângulo dado que privilegiaram a contagem do número de lados ignorando o facto de a figura não ter vértices. Assim, estas figuras parecem realmente ser contraexemplos não intuitivos para estes alunos que mostraram muitas dúvidas nas suas decisões e sentiram necessidade de justificar as suas escolhas não só pelo número de lados (propriedade privilegiada até então) mas também pelo número de vértices (por exemplo, no caso do *triângulo zig zag* e do *triângulo aberto*) e pela sua aparência global (por exemplo no caso do pentágono, do *triângulo aberto* e do *triângulo arredondado*).

Ao longo da identificação destes exemplos e contraexemplos de triângulos foi uma vez mais privilegiada a identificação das figuras com base no número de lados, no entanto, quando sentiram necessidade disso a Beatriz, a Diana e a Emília analisaram também os vértices das figuras, embora referindo-se sempre aos mesmos de forma informal (chamando-lhes "ponta", "partes bicudas" e "bicos").

A análise destas perguntas e respostas evidencia, tal como aconteceu na análise dos exemplos e contraexemplos apresentados pelos alunos, que quando a análise das propriedades que conhecem não chega para justificar as suas perceções, os alunos recorrem às perceções visuais (por exemplo: é um bocadinho mais fininho") e a atributos não fundamentais, como a orientação (por exemplo: "porque está virado para o lado") e o tamanho (por exemplo: "uma parte é mais comprida e outra é um bocadinho mais curta") para se justificarem e, nestes casos, recorrem fundamentalmente a linguagem informal.

Quando lhes apresentei a imagem (desenho) composta pelos mesmos vários exemplos e contraexemplos de triângulos (anexo 5), pedi aos alunos que assinalassem com um X os triângulos.

O Carlos, a Diana e a Filipa assinalaram de forma correta todos e apenas os triângulos (figura 13), justificando as suas escolhas principalmente recorrendo à contagem dos lados das figuras.

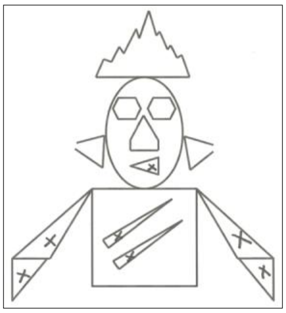


Figura 13 - Imagem (desenho) composta com as figuras que a Diana assinalou como triângulos

Salientando-se que o Carlos considerou também que o *triângulo zig zag* "está aos altos e baixos", que a elipse "é redonda" e, no caso do *triângulo aberto* "falta um bocadinho de risco".

A Diana ao longo de todo o diálogo, para além do número de lados das figuras, foi sempre acrescentando expressões como "só que alguns são mais compridos do que outros", "é um bocadinho mais larga" ou "é muito mais larga". Além disso salientou que o *triângulo aberto* "não se fecha", a elipse "é só uma parte redonda" e tentou comparar os passos de desenho de um triângulo com os do pentágono ao dizer "não é um triângulo porque os triângulos são só assim (simula com o lápis que está a desenhar três lados) e esta aqui faz assim, assim, assim, assim e assim (simula com o lápis que está a desenhar os cinco lados)".

A Filipa também optou sempre por se referir ao número de lados das figuras, salientando principalmente que as que não são triângulos não têm três lados, no entanto, ao analisar o *triângulo aberto* mostrou algumas dúvidas. Primeiro considerou que não era um triângulo porque não tinha os três lados, mas quando lhe pedi para os contar constatou que eram três e considerou então que era um triângulo.

Investigadora - De certeza? Conta lá os lados.
Filipa - (conta e assinala os dois *triângulos abertos* com cruzinhas).
Inv. - Então?
Filipa - Tem três lados.

Nesta altura, tal como previsto no guião da entrevista, voltei a mostrar-lhe o cartão individual com o *triângulo aberto* utilizado anteriormente e confrontei-a com as suas diferentes identificações. Então a Filipa salientou que faltava alguma coisa à figura, acabando por a nomear como "bico".

Filipa - Mas este não tem isto (aponta a abertura).
Investigadora - Não tem isso? O que é isso aí?
Filipa - É um bico.
Inv. - Ah! Não tem um bico? (…) Então não é um triângulo porque…?
Filipa - Não tem um bico.

A Beatriz assinalou todos os triângulos e inicialmente também assinalou os *triângulos abertos*, no entanto mostrou algumas dúvidas na sua justificação:

Investigadora - E esta (aponta para o *triângulo aberto*) porque é que não é um triângulo?
Beatriz - Porque só tem três… dois lados.
Inv. - Dois lados?
Beatriz - Humhum.
Inv. - Conta lá comigo (vai apontando para os lados):
Beatriz - Um, dois, três…
Inv. - Então?
Beatriz - É um triângulo.

Nesta altura confrontei-a com a diferença de identificação relativamente à questão anterior, depois de muita insistência e de muitas perguntas minhas a que não foi respondendo porque se mostrava sempre muito pensativa e indecisa, acabou por mudar de ideias e voltar a considerar que o *triângulo aberto* não era um triângulo.

Beatriz - Eu conto pelos biquinhos…
Investigadora - Tu contas pelos biquinhos? (…) Conta lá os biquinhos para eu ver.
Beatriz - (Aponta e conta) Um, Dois.
Inv. - Então é um triângulo ou não?
Beatriz - Não.

Assim a Beatriz ao longo da análise das suas escolhas sobre esta imagem (desenho) composta analisou o número de lados da maioria das figuras, mas quando sentiu necessidade, como no caso do *triângulo aberto*, também identificou que os triângulos têm de ter três vértices (a que chamou de "biquinhos").

O André manteve as suas identificações das figuras, assim, assinalou todos os triângulos da imagem (desenho) composta e também assinalou o pentágono e o *triângulo aberto* (figura 14), mantendo as suas justificações de que todas estas figuras têm "três partes compridas (lados)". O André optou por analisar o número de lados da maioria das figuras, no entanto, no caso do quadrado e da elipse optou por nomear as figuras, embora no caso da última lhe tenha chamado "círculo".

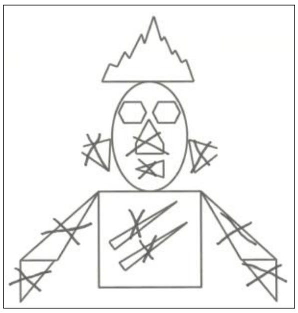


Figura 14 - Imagem (desenho) composta com as figuras que o André assinalou como triângulos

A Emília não assinalou nenhuma das figuras.

Emília - Não há nenhum.
Investigadora - Não há aqui nenhum triângulo?
Emília - (acena que não com a cabeça)
Inv. - Não? Explica-me lá porque é que esta (aponta *triângulo zig zag*) não é um triângulo?
Emília - Porque tem bicos no meio.
Inv. - E aquela (aponta o hexágono)?
Emília - Porque tem seis lados. (…)
Inv. - E esta (aponta *triângulo aberto*)?
Emília - Porque está aberta.
Inv. - E aquela (aponta *triângulo isóscele de lado*)?
Emília - Porque está virada para aquele lado.
Inv. - E esta (aponta triângulo obtusângulo)?
Emília - Porque é muito fininha.(…)
Inv. - E esta (aponta elipse)?
Emília - Porque é muito redonda.

Embora a Emília tenha identificado anteriormente os triângulos isósceles e equilátero, tendo dado evidências que reconhecia pelo menos alguns dos triângulos como figuras de três lados, nesta questão rejeita todos os triângulos baseando-se em perceções visuais como "está virada para aquele lado" ou "é muito fininha". Assim esta aluna mantem-se consistente nas suas identificações já que anteriormente havia rejeitado os triângulos considerados à partida como não intuitivos (alguns dos quais se diferenciavam dos intuitivos apenas pela sua orientação) baseando-se em perceções visuais (por exemplo: "é muito bicuda") e na sua orientação (por exemplo: "está virada para aquele lado"), comparando as figuras com a sua ideia das figuras prototípicas. Relativamente aos contraexemplos a Emília justificou-se referindo o número de lados no caso do quadrado, do pentágono e do hexágono, considerou que o *triângulo zig zag* "tem bicos no meio" (identificando assim os vértices da figura de forma informal), que o *triângulo aberto* não era um triângulo "porque está aberta" e a elipse "porque é muito redonda".

Resumindo, de uma maneira geral foram mantidas as identificações realizadas anteriormente pelos alunos nas figuras desenhadas em cartões individuais.

O Carlos, a Diana, a Filipa e a Beatriz continuaram a identificar corretamente as mesmas figuras como exemplos e contraexemplos de triângulos e a recorrer à contagem do número de lados (exclusivamente no caso dos triângulos) mas também a perceções visuais (no caso dos contraexemplos) para justificar as suas escolhas. A Beatriz e a Filipa mostraram algumas dúvidas relativamente aos *triângulos abertos*, mas acabaram por considerar corretamente que estes não eram triângulos, surgindo nesta altura a evidência de que os triângulos têm de ter três vértices. O André também manteve as suas identificações, no entanto para se justificar recorreu, para além da contagem dos lados, à nomeação de algumas figuras (tal como havia feito no início da entrevista para justificar a escolha do seu contraexemplo apresentado na folha de papel branco).

Assim estes alunos foram consistentes nas suas análises comparando com as realizadas anteriormente nos cartões individuais e recorrendo a propriedades essenciais como o número de lados e de vértices (esta última propriedade apenas referida pela Filipa e pela Beatriz através de linguagem informal) para justificar as suas escolhas. Uma vez mais foram os contraexemplos, nomeadamente a elipse (considerada inicialmente como intuitiva) e os contraexemplos não intuitivos (*triângulo zig zag*, *triângulo aberto* e pentágono) que levantaram mais dúvidas e levaram os alunos a recorrer a linguagem informal (por exemplo: "é só uma parte redonda"), a perceções visuais (por exemplo: "está aos altos e baixos") e a considerar atributos não fundamentais como o tamanho (por exemplo: "só que alguns são mais compridos que outros") para justificar as suas identificações.

Tal como anteriormente, a Emília manteve a sua avaliação das figuras, assim, na imagem (desenho) composta não identificou nenhum triângulo, para justificar as suas opções recorreu a propriedades essenciais como o número de lados e vértices, mas também privilegiando em detrimento destes a orientação das figuras e perceções visuais, fazendo assim uma comparação com as orientações prototípicas em detrimento da análise de propriedades.

Os dados analisados relativamente a esta imagem composta parecem evidenciar que quase todos estes alunos já desenvolveram as capacidades de visualização espacial relativas à *perceção figura-funda*, dado que conseguiram isolar e analisar cada uma das figuras do fundo complexo que era o total da imagem, embora a sua identificação como exemplos e contraexemplos de triângulos nem sempre tenha sido correta. Analisando cuidadosamente a entrevista, fico com dúvidas relativamente ao desenvolvimento desta capacidade no caso da Emília, dado que ela à partida não identifica nenhuma das figuras como triângulo e quando justifica as suas opções referindo-se às figuras individualmente sou eu e não ela que aponta as figuras.

4.1.3. Comparação de figuras

Perante a folha composta por diversas figuras dispersas (anexo 6) perguntei a cada aluno "achas que estas figuras são todas diferentes ou há algumas que são iguais?", pedindo depois a cada um que assinalasse com os lápis as que consideravam iguais. Para facilitar a transcrição, a descrição e a análise das entrevistas relativamente a esta imagem foram considerados os triângulos obtusângulos A, B e C, o triângulo retângulo grande e os triângulos retângulos pequenos A e B respetivamente e de acordo com o assinalado na figura 15:

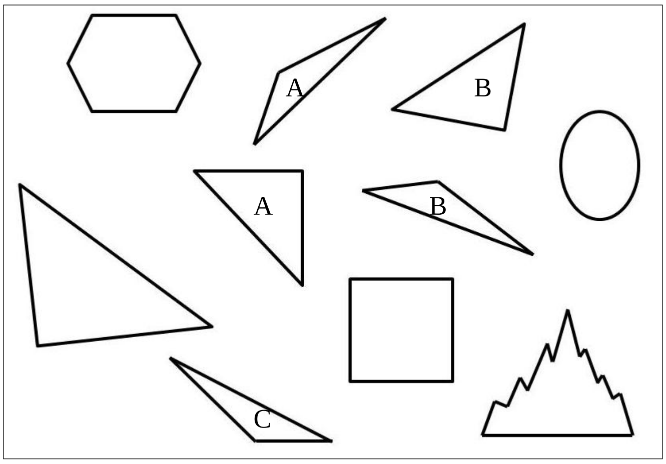


Figura 15 - Figuras para comparação

O André mostrou algumas dúvidas sobre o termo "iguais", tal como evidencia o seguinte diálogo:

> André - Algumas são iguais e outras são diferentes.
> Investigadora. - Então quais é que são iguais? Põe uma cruzinha nas que são iguais.
> André - Também tem de ser o tamanho igual?
> Inv. - Não sei, diz-me tu. O que é que achas?
> André - Que sim.
> Inv. - Sim? Então?
> André - Então não há nenhuma.
> Inv. - Não há aí nenhuma figura que seja igual?
> André - Só há estas (aponta o triângulo retângulo grande e o triângulo retângulo pequeno A) mas o tamanho um é pequeno e o outro é grande.

Neste diálogo inicial sobre a questão da igualdade o André parece apresentar dúvidas sobre o termo "igual", considerando que os triângulos retângulos são iguais (parecendo referir-se à forma) mas que têm tamanhos diferentes (parecendo querer indicar que o tamanho tem relevância para a questão da igualdade).

Numa outra perspetiva a Beatriz, o Carlos e a Filipa consideraram logo à partida que todos os triângulos da folha eram figuras iguais, tal como exemplifica o seguinte diálogo com a Beatriz:

> Beatriz - Há aqui figuras que são iguais.
> Investigadora - Então será que me podes assinalar as que são iguais? (…)
> Beatriz - (Assinala todos os triângulos)
> Inv. - Essas são todas iguais porquê?
> Beatriz - Porque têm três lados.
> Inv. - Três lados, são todas…
> Beatriz - Triângulos.

Assim, logo à partida estes três alunos consideraram que o termo "igual" se poderia referir à classe das figuras com a mesma forma, tendo assinalado todos os triângulos como sendo figuras iguais.

Mais tarde, no decorrer das entrevistas, a Beatriz, o Carlos, a Diana e a Filipa conseguiram identificar os três triângulos obtusângulos como sendo figuras iguais, no entanto o André apenas identificou os triângulos obtusângulos A e B e a Emília (que, ao contrário dos outros alunos, só as conseguiu identificar com a ajuda da folha de papel vegetal) assinalou como iguais os triângulos obtusângulos A e C (figura 16).

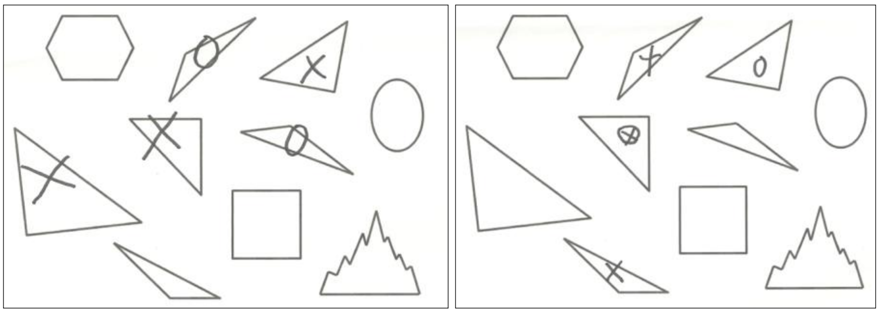


Figura 16 – Figuras consideradas iguais por André e Emília respetivamente

Analisando estas identificações, a Beatriz, o Carlos, a Diana e a Filipa conseguiram encontrar os três triângulos obtusângulos com diferentes orientações pelo que já terão desenvolvido as suas *perceções da posição espaço*, o André e a Emília não tendo conseguido identificar todas estas figuras não terão ainda esta capacidade de visualização totalmente desenvolvida.

É no entanto interessante comparar estas identificações, em que estes alunos consideram que as figuras embora com orientações diversas são iguais, com as explicações que deram anteriormente sobre os exemplos de triângulos que apresentaram no início da entrevista, altura em que a maioria considerou que o facto de as figuras terem diversas orientações era suficiente para serem consideradas diferentes. Nessa altura, por exemplo, a Filipa considerou que os dois exemplos de triângulos que apresentou nas folhas de papel branco eram diferentes porque "um está de pé e o outro está deitado" e o Carlos considerou que os triângulos que apresentou no papel ponteado eram diferentes "porque um está de pernas para o ar e o outro não está de pernas para o ar". Assim, estes alunos não são congruentes nas suas explicações, parecendo que as mesmas mudam ao longo da entrevista de acordo com as necessidades sentidas.

Relativamente aos triângulos retângulos o Carlos, a Diana e a Emília consideraram apenas os pequenos como sendo iguais. O André, a Beatriz e a Filipa consideraram os três triângulos retângulos como iguais, salientando todos que apesar de um ser maior era igual aos outros, tal como demonstra o seguinte diálogo com a Filipa:

Filipa - Este é igual a este (assinala os dois triângulos retângulos pequenos com setas).
Investigadora - Há mais algum igual?
Filipa - Não.
Inv. - De certeza?
Filipa - Este (aponta triângulo retângulo grande) é igual a este (aponta triângulo retângulo pequeno A).
Inv. - É?
Filipa - Mas é grande.

A Diana tentou explicar porque é que considerava os triângulos assinalados iguais:

Investigadora - Porque é que são iguais? Sabes-me explicar?
Diana - Porque estas três (aponta triângulos obtusângulos) têm as três partes e são uma parte mais curta e outra mais comprida (aponta os lados).
Inv. - E estas duas (aponta triângulos retângulos pequenos).
Diana - São iguais porque também têm as três partes e têm estas três partes (aponta lados dos dois triângulos) mesmo iguais.

Na análise das respostas dadas pelos alunos relativamente à identificação dos triângulos retângulos como sendo ou não iguais, parecem surgir aqui duas formas diferentes de encarar o termo "igual". Por um lado o Carlos, a Diana e a Emília consideram que são iguais apenas os triângulos retângulos pequenos, parecendo assim dar relevância não só à forma da figura, mas também ao seu tamanho, pelo que parece que nestes casos o termo "igual" é considerado como um sinónimo de "congruente". Por outro lado, o André, a Beatriz e a Filipa consideraram todos os triângulos retângulos como sendo iguais, ou seja, parecem considerar que apenas a forma é relevante para essa comparação, salientando mesmo que embora haja uma diferença de tamanho entre as figuras, estas são iguais.

A comparação entre estas figuras parece evidenciar que só o André, a Beatriz e a Filipa já têm alguma *constância percetual*, dado que conseguiram identificar os três triângulos retângulos, salvaguardando a sua diferença de tamanho.

Se, uma vez mais, compararmos estas decisões dos alunos com as justificações que apresentaram no início da entrevista sobre as diferenças entre os exemplos de triângulos apresentados num mesmo suporte, encontramos contradições. Por exemplo, a Beatriz que aqui considera que todos os triângulos retângulos são iguais, apesar da diferença de tamanho, quando apresentou os seus exemplos na folha de papel branco e com as *Geo Strips* considerou que os triângulos eram diferentes porque “um é maior e o outro é mais pequeno”. Por outro lado há alunos que se mantêm congruentes nas suas considerações, por exemplo a Emília considerou inicialmente que os triângulos desenhados no papel ponteado eram diferentes “porque este é maior que este” e manteve a sua opinião nesta atividade, não tendo identificado o triângulo retângulo grande como sendo igual aos outros mais pequenos.

Na comparação do triângulo isósceles com o hexágono (comparação de um triângulo e de um contraexemplo prototípicos) (anexo 7) todos os alunos do 2º ano consideraram em primeiro lugar que as figuras eram diferentes, referindo sempre que uma figura tinha três lados e a outra tinha mais lados (inicialmente a Beatriz, a Diana e a Emília identificaram seis lados, a Filipa referiu apenas que eram mais do que os dos triângulos e o André e o Carlos identificaram cinco lados, durante o diálogo sobre estas imagens pedi-lhes para voltarem a contar e ambos identificaram então os seis lados).

Além do número de lados, a Filipa (uma vez mais) e o André (pela primeira vez) identificaram o diferente número de vértices das figuras, embora referindo-se aos mesmos de forma informal como “bicos” e “partes bicudas”, além disso, a Beatriz (pela primeira vez) e o André (uma vez mais) recorreram à nomeação das figuras como triângulo e hexágono.

Para a além da referência ao número de lados o Carlos teve dificuldades em encontrar mais propriedades e vocabulário formal para expressar as diferenças entre as figuras:

> Carlos - Uma tem cinco lados e a outra tem três…
> Investigadora - E mais? O que é que tem mais de diferente?
> Carlos - Esta (aponta hexágono) é mais na diagonal do que esta (aponta triângulo)… Porque tem quatro em diagonal (aponta para quatro lados do hexágono) uma vai assim e assim e outra vai assim e assim (vai mostrando com as mãos) …
> Inv. - E esta (aponta o triângulo)?
> Carlos - É diferente porque vai menos vezes em diagonal e tem um biquinho (aponta o vértice de cima do triângulo)… E… tem um biquinho no fim. E esta (aponta o hexágono) não tem um biquinho lá no alto.

Assim, recorreu às suas perceções visuais (por exemplo: “tem um biquinho no fim”), a vocabulário informal (por exemplo: “porque vai menos vezes em diagonal e tem um biquinho") e até a vocabulário incorreto (utilizando "diagonal" em vez de "oblíquo") para se explicar.

A Diana e a Emília conjugaram o número de lados das figuras com impressões visuais para se expressar relativamente às diferenças entre as figuras:

Diana - Diferentes.
Investigadora - Porquê?
Diana - Porque o triângulo (aponta) tem três lados e é mais estreito, e este aqui (aponta hexágono) tem cinco lados…
Inv. - Cinco?
Diana - (aponta e conta) seis lados e é um bocadinho mais largo.
Inv. - E mais coisas que sejam diferentes?
Diana - O triângulo (aponta) é mais alto e este aqui (aponta hexágono) é um bocado mais baixo.

Investigadora - São diferentes, porquê?
Emília - Porque esta (aponta o hexágono) tem seis e esta (aponta o triângulo) só tem três lados.
Inv. - Mais coisas, têm mais coisas diferentes?
Emília - Aqui (aponta vértice do triângulo) é mais bicuda do que esta (aponta hexágono).
Inv. - Mais coisas que sejam diferentes?
Emília - Esta aqui (aponta triângulo) tem lados maiores do que esta (aponta hexágono). E não vejo mais nada.

Assim, a Diana e a Emília voltaram a recorrer a impressões visuais para explicar as diferenças entre as figuras, recorrendo a vocabulário informal (por exemplo: "é um bocadinho mais largo") e dando relevância a propriedades não fundamentais como o tamanho das figuras (por exemplo: "tem lados maiores do que esta").

Depois de analisarem as diferenças pedi a todos os alunos que identificassem semelhanças entre as figuras. A Diana e a Filipa não encontraram nenhuma semelhança, o André, a Beatriz e a Emília voltaram a referir os vértices das figuras reconhecendo que ambas as figuras têm vértices (referindo-se aos mesmos como "partes bicudas" (André) e "biquinhos" (Beatriz e Emília), o André identificou ainda que ambas têm "partes longas" (lados) e o Carlos, uma vez mais, recorreu às suas impressões visuais e a vocabulário informal para explicar as semelhanças entre as figuras:

Investigadora - Será que têm alguma coisa igual?
Carlos - Sim. A parte de baixo (aponta a base do triângulo) menos a parte… o resto, só a parte de baixo.
Inv. - E mais?
Carlos - E assim (aponta dois lados do hexágono) só tem dois em diagonal a mais.

Na comparação entre o triângulo isósceles e o triângulo obtusângulo (comparação de um triângulo intuitivo com um não intuitivo) (anexo 7) à partida a Beatriz, a Diana e a Filipa consideraram que as duas figuras eram iguais, o Carlos e a Emília consideraram-nas diferentes e o André embora tenha primeiro dito que eram iguais, logo a seguir considerou-as diferentes e acabou por declarar que não sabia. Independentemente da posição inicial questionei os alunos sobre ambos os pontos de vista, pelo que todas acabaram por assinalar igualdades e diferenças entre as figuras.

No que diz respeito às igualdades o André, a Beatriz, o Carlos, a Diana e a Emília reconheceram que ambas as figuras tinham três lados ("partes compridas" para o André). O André, a Beatriz, a Filipa e o Carlos (este pela primeira vez na entrevista) também se referiram ao número de vértices comum entre os triângulos (continuando a utilizar linguagem informal para se referir aos mesmos: "partes bicudas" e "bicos"). O André e o Carlos referiram ainda através da nomeação das figuras que ambas tinham o mesmo nome ("triângulos"). Por fim, a Diana considerou que ambas as figuras são "compridas".

No entanto, a Emília considerou que apenas o triângulo isósceles era um triângulo, considerando que o triângulo obtusângulo não era um triângulo, mas apenas uma parte de um triângulo:

> Emília - Este (aponta triângulo obtusângulo) parece-se muito com este (aponta triângulo isósceles).
> Investigadoras - Parecem-se uma com a outra, em quê?
> Emília - Em… Eu acho que esta aqui (aponta triângulo obtusângulo) dá para fazer um triângulo.
> Inv. - Achas? Então porquê?
> Emília - Porque assim… Assim é um triângulo meio cortado ao meio, depois basta fazer o resto.

Assim, a Emília é aqui consistente com as suas identificações iniciais de triângulos, já que tanto nos cartões individuais como na análise da imagem (desenho) composta considerou que o triângulo obtusângulo não era um triângulo. Apenas as justificações mudaram dado que aqui considerou que "assim é um triângulo meio cortado ao meio, depois basta fazer o resto" e anteriormente havia considerado que não era um triângulo "porque está a apontar para aquele lado e é fininha" e "porque é muito fininha".

Os alunos tiveram mais dificuldades em encontrar e explicar as diferenças entre as figuras. O André identificou que uma das figuras está "inclinada" e a outra "está em pé" e salientou as diferenças de tamanho dos lados das figuras:

Investigadora -Então e em que é que elas são diferentes?
André - Uma está inclinada…
Inv. - Sim…?
André - E a outra está em pé. (…)Tem uma parte mais pequena (aponta para o triângulo obtusângulo) aquele triângulo.
Inv. - Então? Onde está a parte mais pequena?
André - Aqui (aponta o lado mais pequeno do triângulo obtusângulo).
Inv. -É mais pequena?
André - Sim do que estas partes (aponta o triângulo isósceles).
Inv. - E esta (aponta o triângulo isósceles)?
André - São compridas.

A Beatriz considerou o triângulo obtusângulo uma figura "mais esticadinha" enquanto o triângulo isósceles é "mais gordinha". O Carlos considerou que "uma (aponta triângulo isósceles) é mais larga e a outra é um bocadinho mais apertada", além disso, embora ambas tenham "bicos" o do triângulo obtusângulo "é mais bicuda (…) está mais afiada". A Filipa considerou que o triângulo isósceles "é direito" e o triângulo obtusângulo "é deitado". Por fim, a Emília distinguiu que uma figura "está torta" e a outra não.

Emília - Diferentes.
Investigadora - Diferentes. Em que é que são diferentes?
Emília - Esta (aponta triângulo obtusângulo) está torta e esta (aponta triângulo isósceles) não.
Inv. - E mais?
Emília - Este biquinho (aponta vértice do triângulo obtusângulo) é mais que este (aponta vértice do triângulo isósceles)
Inv. - Tem o bico mais…?
Emília - Fininho que este.
Inv. - Sim?
Emília - Tem partes maiores (aponta lados do triângulo obtusângulo).

Assim, para explicar as diferenças entre os dois triângulos todos os alunos recorreram a perceções visuais (por exemplo: "uma está inclinada (…) e a outra está de pé") e a vocabulário familiar e informal (por exemplo: "este biquinho é mais (…) fininho que este").

Resumindo, os alunos começaram as suas comparações relacionando, uma vez mais, as propriedades fundamentais que conhecem: número de lados e vértices e/ou a nomeação das figuras, no entanto, ao sentirem dificuldade em explicar os seus pontos de vista, prosseguiram sempre as suas análises sobre as semelhanças e diferenças com base em propriedades não fundamentais como o tamanho (por exemplo: “tem uma parte mais pequena”) e baseadas em impressões visuais (por exemplo: “é mais estreito”) recorrendo a vocabulário informal para se expressar.

Embora todos tenham conseguido analisar semelhanças e diferenças entre as figuras apresentadas e, como tal, pareçam já possuir a capacidade de *discriminação visual* desenvolvida, todos demonstraram algumas dificuldades em explicar as suas impressões, por um lado recorreram à descrição de propriedades fundamentais (como o número de lados e vértices), por outro, continuaram a utilizar vocabulário informal para se referir às componentes das figuras (chamando, por exemplo, “bicos” aos vértices) e a recorrer a impressões visuais e a propriedades não fundamentais (como o tamanho).

4.1.4. Descrição e definição de triângulos

Pedi a cada aluno que descrevesse um triângulo retângulo, triângulo considerado inicialmente como não intuitivo, (não o nomeei mas voltei a mostrar o cartão individual com a figura) de forma a explicar a um colega como era a figura para ele a desenhar sem a ver.

O André, a Beatriz, a Emília e a Filipa deram a sua descrição inicial referindo logo que a figura era um triângulo, recorreram assim à nomeação. De salientar que aqui a Emília entra em contradição, dado que anteriormente não havia identificado esta figura como um triângulo “porque está virado para o lado”.

Na descrição inicial o André foi o único que só recorreu a propriedades essenciais da figura utilizando, no entanto, linguagem informal: “tinha três partes compridas (lados), três partes bicudas (vértices) e também chama-se triângulo”.

A Beatriz para além da nomeação apenas considerou na sua descrição inicial perceções visuais, comparando a figura com um objeto e recorrendo a linguagem informal: “diria que parece um triângulo, mas meio ao contrário (…) e parece uma escada…”.

A Emília e a Filipa para além da nomeação, consideraram características essenciais das figuras (como o número de lados e vértices), misturando linguagem formal com informal, e perceções visuais "quase com o bico (vértice) para baixo (…) como se fosse uma (…) rampa" (Emília) ou "que tinha de ser deitado… que tinha que ter três bicos (vértices)" (Filipa).

O Carlos e a Diana não nomearam a figura na sua descrição, ambos apontaram o número de lados e depois recorreram a perceções visuais:

> Carlos - Tem três lados, é bicudo em cima, e na esquerda e na direita, é como o telhado de uma casa (gira o cartão), só que é uma seta, quer dizer, uma seta (…) mas podia fazer a apontar uma diagonal para baixo ou assim (gira o cartão).
>
> Diana - Tem três lados e uma parte é assim (mostra com o dedo a inclinação do lado) e as outras duas são assim (mostra com o dedo os lados e o ângulo reto). (…) Uma é em comprido só que está para o lado e as outras duas, a que está ao outro lado e a que está em baixo, é… são as duas iguais, só que uma está ao lado e a outra está em baixo.

Assim, o Carlos utiliza linguagem informal (por exemplo: "é bicudo em cima") para explicar as suas perceções visuais, compara a figura com objetos (por exemplo: "como o telhado (…) é uma seta") e volta a recorrer a termos incorretos (utilizando "diagonal" em vez de "oblíquo") para se expressar. A Diana mostrou alguma dificuldade em perceber o objetivo da pergunta, na sua descrição utilizou muitos gestos esquecendo-se do pormenor de que o colega não a estaria a ver, mesmo depois de lhe ter explicado esse pormenor várias vezes. Esta aluna acabou por salientar que "são as duas iguais, só que uma está ao lado e a outra está em baixo", parecendo assim, embora não o tenha verbalizado de outra forma, reconhecer que ambas as figuras são triângulos, e tendo utilizado linguagem informal para se tentar expressar.

Aos alunos que na sua descrição inicial utilizaram a nomeação da figura, pedi que voltassem a fazer a descrição da figura mas sem utilizar a palavra "triângulo".

O André que inicialmente só descreveu a figura através de características essenciais desta vez utilizou apenas perceções visuais e linguagem informal, tendo comparado a figura a objetos:

> André - Dizia que era como se pudesse se pôr uma coisa em cima da casa, como se desenhasse um telhado e também dizia que quando se virasse ao contrário podia fazer um barco e também se pudéssemos fazer outro triângulo podia fazer uma estrela…

A Beatriz, a Emília e a Filipa voltaram a apontar o número de lados e/ou vértices da figura (propriedades essenciais) e a repetir as suas perceções visuais recorrendo à comparação das figuras com objetos e a utilizar linguagem informal:

> Beatriz - Dizia que tinha três lados e parecia uma escada e que podíamos andar de skate para descer (demonstra a descida com as mãos).
>
> Emília - Tinha de ser tipo uma rampa, com os lados todos iguais e três bicos.
>
> Filipa - Que tinha que ter três bicos. (…) Que era deitado.

Depois da descrição do triângulo retângulo pedi a cada aluno que fizesse a descrição de um triângulo isósceles, triângulo intuitivo (voltei a mostrar o cartão individual com a figura e a não a nomear).

Na sua descrição a Filipa foi a única que utilizou inicialmente a nomeação da figura, quando lhe pedi para não utilizar a palavra triângulo disse a mesma frase mas substituindo a nomeação por "uma coisa": "uma coisa em pé e que tinha que ter três lados".

A Beatriz, o Carlos, a Diana e a Emília aliaram características fundamentais (lados e vértices) e perceções visuais (nomeadamente comparando a figura com objetos e referindo as diferenças de tamanho dos lados das figuras).

> Beatriz - Dizia que tinha três lados e parece um chapéu de um palhaço. (…) Que era uma forma geométrica.
>
> Carlos -Um bico na esquerda e outro na direita e um no topo, e tem… Tem três lados e é direito, não como a setinha.
>
> Diana - Esta forma tem três lados e tem dois lados mais compridos do que outro… os dois dos lados são mais compridos e o de baixo é mais curto. E é comprido.
>
> Emília - Dizia que tinha de ter o lado debaixo mais pequeno que os outros dois iguais. Tinha três lados e três bicos. E parecia uma rampa maior.

O André descreveu o triângulo isósceles da mesma forma que havia descrito o triângulo retângulo, quando o confrontei com as duas imagens lado a lado reconheceu que não eram iguais e tentou então acrescentar às suas descrições (baseada em propriedades fundamentais como os lados e os vértices) as diferenças (recorrendo a perceções visuais e à comparação com objetos):

> André - Três partes bicudas, três partes compridas, podia-se fazer um telhado, um arco e se fizéssemos outro podia fazer uma estrela (demonstra com os modelos construídos com as barras *Geo Strips* os dois triângulos sobrepostos).
> Investigadora - Então mas achas que são iguais? Olha lá para elas (mostra os cartões com os dois triângulos ao lado um do outro). Elas não são iguais, pois não?
> André - Não.
> Inv. - Então como é que o teu amigo sabia que de uma vez tinha de desenhar esta (aponta o triângulo isósceles) e da outra vez tinha de desenhar esta (aponta o triângulo retângulo)?
> André - Esta (aponta o triângulo retângulo) dizia que era inclinada, uma parte, e dizia o resto)…
> Inv. - (…) E naquela (aponta triângulo isósceles)?
> André - Dizia que estava direita.

Resumindo, para descrever as duas figuras, os alunos continuaram a nomear as figuras e a referir as propriedades fundamentais como o número de lados e de vértices (neste caso continuando a utilizar linguagem informal), no entanto, uma vez mais, ao tentarem aprofundar e continuar as suas explicações, voltaram a recorrer a perceções visuais, neste caso, comparando as figuras com objetos (por exemplo, escadas, setas e telhados) e recorrendo a linguagem de uso corrente. Será também importante salientar que nesta fase da entrevista a pergunta era menos diretiva e objetiva, dando espaço a respostas mais longas. Analisando as explicações dos alunos, estas são realmente maiores mas também mais confusas, tendo todos mostrado muitas hesitações, parando muitas vezes a meio das frases e recomeçando-as modificando e retificando alguns pormenores do que iam dizendo.

Pedi a todos os alunos no início da entrevista que me dissessem o que era para eles um triângulo e escrevi numa folha a sua definição, no final da entrevista voltei a pegar nessa definição e perguntei-lhes se queriam ou não alterar ou acrescentar alguma coisa, na figura 17 encontram-se lado a lado as definições inicias e finais de cada aluno do 2º ano, salientando-se as diferenças entre elas através da letra a negrito.

Definições iniciais de triângulo	Definições finais de triângulo
Um triângulo tem 3 partes compridas. (André)	Um triângulo tem 3 partes compridas **é bicudo, podia-se fazer um telhado, pode-se virar o triângulo ao contrário e fazer um barco e acrescentar outro triângulo para fazer uma estrela.** (André)
Um triângulo tem 3 lados e serve de chapéu para um palhaço. (Beatriz)	Um triângulo tem 3 lados e serve de chapéu para um palhaço**, é uma forma geométrica**. (Beatriz)
Um triângulo é uma forma com três partes: um risco de lado que vai para cima, outro em baixo e outro que também é em diagonal do outro lado para cima. (Carlos)	
Um triângulo é uma forma com três lados. (Diana)	Um triângulo é uma forma com três lados**, é alto e estreito e tem as duas partes de lado compridas e a de baixo curta**. (Diana)
Um triângulo é uma coisa bicuda. (Emília)	Um triângulo é uma coisa bicuda**, tem 3 lados e o de baixo é mais pequeno que os outros.** (Emília)
Um triângulo é uma forma geométrica que tem 3 lados. (Filipa)	Um triângulo é uma forma geométrica que tem 3 lados **e pode ser deitado ou em pé**. (Filipa)

Figura 17 – Definições iniciais e finais dos alunos de 2º ano

Quase todos os alunos identificaram os três lados dos triângulos nas suas definições inicias, embora nem sempre se referindo aos mesmos de forma formal. A exceção foi a Emília que na sua definição incluiu apenas vocabulário informal e perceções visuais considerando que "um triângulo é uma coisa bicuda" Também recorreram a perceções visuais o Carlos que considerou que "um triângulo é uma forma com três partes: um risco de lado que vai para cima, outro em baixo e outro que também é em diagonal do outro lado para cima" e a Beatriz que sentiu necessidade de recorrer à comparação dos triângulos com imagens do quotidiano para se expressar: "um triângulo tem três lados e serve de chapéu para um palhaço".

O Carlos, a Diana e a Filipa ainda referiram que os triângulos são "formas" geométricas," esta é uma noção derivada e nenhum dos alunos explicou o seu significado. No entanto analisando a Planificação Trimestral fornecida pela Professora

Titular de Turma pode-se encontrar que o "Domínio/Subdomínio das Figuras geométricas" tem como "Objetivo Geral – Reconhecer e representar formas geométricas", embora nos "conteúdos" venha designado o estudo de "polígonos e linhas poligonais", questiono se este termo "formas" não será o que é utilizado diariamente na sala de aula.

Analisando estas definições iniciais apresentadas pelos alunos de 2º ano, pode-se considerar que as definições iniciais da Diana e da Filipa são definições com informações aceitáveis, contêm propriedades suficientes para dar origem a todos os elementos do conjunto que se está a definir e limitar os exemplos dos mesmos.

Por outro lado a definição do André é uma definição insuficiente, embora contenha uma característica necessária (o número de lados) e que, como tal, se aplica a todos os triângulos, não é correta, uma vez que não contem informações suficientes para identificar todos os elementos do conjunto em estudo e excluir os restantes elementos, nomeadamente alguns dos contraexemplos apresentados neste estudo como os *triângulos aberto e arredondado*.

As definições da Beatriz e do Carlos embora também contenham informações necessárias (número de lados), não podem ser consideradas corretas, dado que recorrem a perceções visuais baseadas em protótipos que não incluem todos os triângulos existentes, nomeadamente através da referência a objetos "serve de chapéu para um palhaço" (no caso da Beatriz) e a descrição recorrendo a linguagem informal da orientação dos lados dos triângulos: "um risco de lado que vai para cima, outro em baixo e outro que também é em diagonal do outro lado para cima".

Por fim a definição da Emília é baseada apenas numa perceção visual explicada através de linguagem informal ("é uma coisa bicuda"), pelo que, não pode ser considerada correta.

Considerando que estas definições foram apresentadas pelos alunos logo no início da entrevista, ainda antes de qualquer outra pergunta ter sido efetuada e, como tal, de poder ter sido dada qualquer influência pela minha parte enquanto investigadora e das perguntas realizadas (que poderão ter levado a algum aprofundamento dos conceitos em estudo), estas definições poderão ser consideradas como aquelas que mais fielmente espelham os conhecimentos destes alunos. Assim, parece-me importante salientar que em três destas definições aparece o termo “forma” (geométrica), dando a entender que para estes alunos este é um termo normal e recorrente, teria sido importante para esta análise ter perguntado aos alunos o que significava esta noção derivada, no entanto, isso não me ocorreu durante a entrevista. Por outro lado, logo à partida, cinco destes alunos referiram que os triângulos têm três lados, parecendo ser esta a propriedade que é por eles mais reconhecida e a principal característica que identificam nos triângulos, salientando-se, no entanto, que em duas destas definições os alunos se referem ao lados com linguagem informal: “partes compridas” (André) e “partes” (Carlos). Em algumas das definições é utilizada uma mistura de linguagem formal com informal, dando-se relevância a já referida propriedade fundamental (o número de lados) mas também a propriedades não fundamentais como o tamanho (por exemplo: “partes compridas”) e a perceções visuais que resultam da comparação dos triângulos com objetos (por exemplo: “chapéu de palhaço”) ou da tentativa de descrever a orientação dos lados das figuras (“um risco de lado que vai para cima, outro em baixo e outro que também é em diagonal do outro lado para cima”).

No final da entrevista só o Carlos não quis alterar a sua definição inicial, os restantes alunos acrescentaram às suas definições iniciais informações.

Das informações acrescentadas a Beatriz salientou que “é uma forma geométrica” e a Emília que “tem três lados”, acrescentando assim informações necessárias e essenciais. Por outro lado, o André, a Diana, a Emília e a Filipa tiveram necessidade de incluir as suas perceções visuais dos triângulos, no caso do André salientando que os triângulos são “bicudos” e de com diferentes orientações poderem representar diferentes objetos (telhado, barco e estrela), a Diana considerou que “é alto e estreito e tem as duas partes de lado compridas e a de baixo curta”, a Emília “tem 3 lados e o de baixo é mais pequeno que os outros” e a Filipa que “pode ser deitado ou em pé”. Nestes casos as características acrescentadas às definições relacionam-se com um reconhecimento visual de triângulos prototípicos, tornando as definições não corretas, dado que não contém informação essencial nem suficiente para o reconhecimento de todos os triângulos.

Assim, todas as definições finais referem o número de lados dos triângulos, propriedade fundamental que todos os alunos reconhecem, mas nenhuma refere o número de vértices, embora ao longo da entrevista alguns dos alunos os tenham reconhecido como importantes na caracterização dos triângulos. Por outro lado, dois alunos referem que os triângulos são "bicudos" não referindo necessariamente os vértices ou o seu número, mesmo que de forma informal. Todas as definições finais incluem para além da nomeação e do número de lados impressões visuais ou por comparação da figura com objetos (por exemplo, telhado e chapéu de palhaço) ou por comparação com imagens prototípicas de triângulos que se relacionam com os triângulos isósceles e com a sua orientação típica. Todas as definições apresentadas parecem ser partitivas, dado que se limitam a fazer uma lista de perceções visuais e/ou a apontar propriedades dos triângulos, sendo assim, as características apontadas foram consideradas separadamente e sem que haja uma relação entre elas.

4.1. Os alunos do 4º ano

A Professora Titular de Turma do 4º ano pertence ao Quadro do Agrupamento, é licenciada e tem catorze anos de serviço. Durante a entrevista admitiu que já houve uma fase que não gostava de lecionar a área de Geometria, mas que, com o Programa de Matemática de 2007 e a formação que teve, aprendeu a gostar mais.

De acordo com a entrevista realizada, nas aulas dedicadas à Geometria costuma ser privilegiado o trabalho individual e a pares, havendo propostas de resolução de problemas, trabalho de investigação, com o manual e jogos. Na sala de aula não há especificamente um cantinho organizado de Matemática, há um placard para a Matemática onde são afixados trabalhos dos alunos e estão disponíveis na sala de aula materiais manipuláveis como geoplanos, tangrans, compassos, réguas e esquadros. Na sala de aula há dois computadores, no entanto, os alunos nunca os utilizaram para a Geometria, não tendo nunca tido contacto com programas de Geometria Dinâmica.

Relativamente aos objetivos de aprendizagem, estes estão afixados na sala de aula e a professora costuma lê-los com os alunos no início de cada período letivo para saberem os temas que vão ser abordados, além disso, todos os dias escrevem na sala de aula o sumário, havendo assim uma partilha dos objetivos diários. A professora afirmou que costuma relacionar as aprendizagens da Geometria com outras áreas da Matemática e com outras áreas disciplinares, nomeadamente com a Língua Portuguesa. Além disso, a professora teve alguma dificuldade em definir a quantidade de tempo que dedica por ano ao estudo da Geometria, acabando por definir que talvez dedique quatro semanas por ano, ou pelo menos, mais do que 12 aulas por ano ao estudo desta área. Nas planificações das aulas foram tidos em conta os objetivos programáticos do Programa de Matemática de 2007 mas também as Metas Curriculares de 2012 e o Programa de 2013, havendo a preocupação de procurar nestes últimos documentos alguns dos objetivos previstos para os primeiros anos do 1º Ciclo e de os ensinar a estes alunos que estão já no 4º ano, para que toda a disciplina faça sentido. Não tendo total certeza do que falta abordar na sala de aula relativamente aos programas de Geometria, a professora disponibilizou a Planificação Trimestral seguida no 1º Período.

No que concerne às aprendizagens dos alunos de 4º ano entrevistados, tendo em consideração as orientações curriculares gerais estabelecidas na Revisão da Literatura seria expectável que estes alunos que já estão a frequentar o 4º ano de escolaridade formal, já fossem capazes de analisar as características e propriedades de formas geométricas bidimensionais e de usarem a visualização, o raciocínio espacial e a modelação geométrica na análise de situações e para resolverem problemas em Geometria. Assim, estes alunos deverão ser capazes de identificar, comparar e analisar os atributos das figuras apresentadas neste estudo, utilizando mais vocabulário formal e menos linguagem corrente para descrever esses atributos, classificar as formas através das suas propriedades, criar definições e descrever as suas relações geométricas. Neste ano os alunos deverão ter ampliado os seus conhecimentos deixando de considerar os objetos matemáticos como individuais (por exemplo: *este triângulo*) e começando a conseguir ponderar sobre classes de objetos (por exemplo: *todos os triângulos*) expressando-se de forma mais clara, coerente e precisa (utilizando, por exemplo, termos como *ângulos* em vez de *cantos*).

De acordo com os Programas de Matemática de 2007 e 2013 que estão presentes na Planificação Trimestral fornecida pela professora, em termos formais e relativamente aos conteúdos abordados nas entrevistas, já foram abordados no presente ano letivo conteúdos relacionados com o “domínios/subdomínios das figuras geométricas”, tendo como “objetivos gerais: identificar e comparar ângulos e reconhecer propriedades geométricas”, nomeadamente através do estudo dos seguintes conteúdos: “ângulos convexos e ângulos côncavos; ângulos verticalmente opostos; ângulos nulos, rasos e giros; critérios de igualdade de ângulos; ângulos adjacentes; comparação das amplitudes de ângulos e ângulos retos, agudos e obtusos; retas concorrentes, perpendiculares e paralelas; retângulos como quadriláteros de ângulos retos; polígonos regulares e polígonos geometricamente iguais”, salientando-se ainda que num dos “descritores de desempenho” apresentados é delineado o objetivo de “saber que dois polígonos são geometricamente iguais quando tiverem os lados e os ângulos correspondentes geometricamente iguais”.

Entre os seis alunos de 4º ano entrevistados três eram rapazes e três eram raparigas, apresentam-se aqui por ordem cronológica de acordo com a idade que tinham à data da entrevista: Ivo (9 anos e 2 meses), Leonor (9 anos e 4 meses) Hélder e Manuel (9 anos e 5 meses), Joana (9 anos e 7 meses) e Gabriela (10 anos e 4 meses) (nomes fictícios). Quando os caracterizou de forma individual a Professora Titular de Turma considerou que a Leonor e o Manuel eram alunos muito bons, o Ivo, o Hélder e a Joana eram alunos bons e a Gabriela uma aluna de nível médio.

4.2.1. Exemplos e contraexemplos de triângulos apresentados pelos alunos

Após ter enunciado a definição inicial de triângulo, cada aluno apresentou dois exemplos diferentes e um contraexemplo nos quatro suportes diferentes disponibilizados (desenhos numa folha de papel branco, representações no geoplano, desenhos em papel ponteado e construções com barras *Geo Strips*).

Para desenhar nas folhas de papel branco, quatro dos seis alunos de 4º ano (Gabriela. Ivo, Joana e Leonor), recorreram ao auxílio da régua para desenhar os seus exemplos e contraexemplos de triângulos.

Analisando os exemplos de triângulos apresentados nas folhas brancas podemos ver que, no que à classificação por ângulos diz respeito, a maioria dos triângulos apresentados são acutângulos (nove), no entanto o Hélder e o Ivo apresentaram um triângulo obtusângulo e a Leonor apresentou um triângulo retângulo (figura 18). Relativamente ao comprimento dos lados oito dos triângulos são isósceles, três são escalenos e apenas um é equilátero.

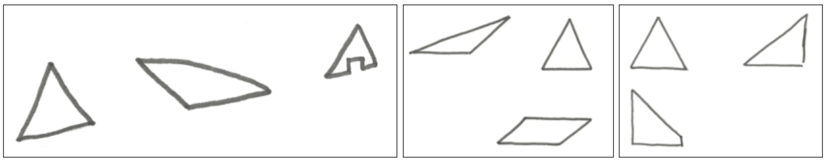


Figura 18 - Exemplos e contraexemplos de triângulos apresentados por Hélder, Ivo e Leonor respetivamente na folha de papel branco

Para justificar as suas escolhas a Gabriela, o Hélder, a Leonor e a Joana salientaram que os triângulos "têm três lados", sendo que a Joana ainda acrescentou "e têm linhas retas". O Manuel e o Ivo preferiram salientar que os triângulos "têm três bicos" (referindo-se aos vértices) e o Ivo salientou ainda que "os triângulos podem se virar mas que tenham os três bicos são triângulos". Para justificar porque eram diferentes os triângulos desenhados o Manuel apontou que "aqui este, é mais comprido e este não" (figura 19). Assim, a maioria dos alunos referiu nas suas justificações atributos fundamentais como o número de lados e de vértices (mas utilizando vocabulário informal referindo-se aos mesmos como "bicos") das figuras, embora o Manuel se tenha referido também ao tamanho, uma característica não essencial.

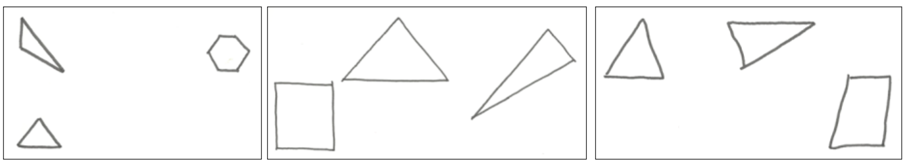


Figura 19 - Exemplos e contraexemplos de triângulos apresentados por Gabriela, Joana e Manuel respetivamente na folha de papel branco

Relativamente aos contraexemplos foram apresentados quatro quadriláteros irregulares (dois retângulos, um paralelogramo e um quadrilátero com os lados todos diferentes) e dois hexágonos (um regular, com os lados todos iguais, e outro não). De salientar que nem todos os contraexemplos apresentados são prototípicos, como é o caso do hexágono do Hélder e o quadrilátero da Leonor (figura 18).

Para explicar as suas escolhas dos contraexemplos todos referiram características essenciais, a Gabriela salientou que o seu hexágono não era um triângulo “porque não tem três lados”, o Hélder considerou que o seu hexágono “tem mais do que três lados”, o Ivo afirmou “tem quatro bicos e quatro lados é um quadrilátero”, a Joana declarou que o seu retângulo tem “mais do que três lados e também tem linhas retas, mas tem mais do que três lados”, a Leonor referiu apenas que o seu quadrilátero não era um triângulo “porque tem quatro lados” e, por fim, o Manuel salientou que o seu retângulo era um contraexemplo “porque não tem três bicos e aqui é igual aqui e aqui também (aponta lados opostos do retângulo) e aqui é diferente de aqui (aponta lados adjacentes)”, acrescentando assim uma característica particular e não essencial do retângulo à sua justificação.

Nos exemplos apresentados no geoplano são todos diferentes dos apresentados nas folhas de papel branco, prevalecem os triângulos retângulos (sete), havendo ainda três exemplos de triângulos obtusângulos e dois acutângulos. A maioria dos triângulos apresentados neste suporte são escalenos (sete) e os restantes (cinco) são isósceles (figura 20).

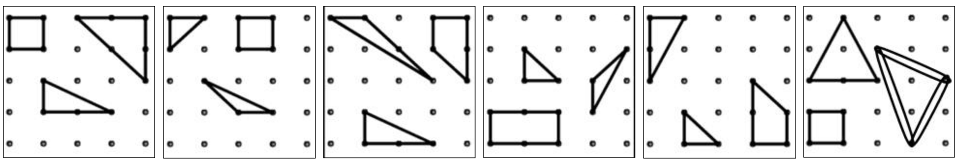


Figura 20 - Exemplos e contraexemplos de triângulos apresentados por Gabriela, Hélder, Ivo, Joana, Leonor e Manuel respetivamente no geoplano

Uma vez mais, todos os alunos se referiram ao número de lados ou de vértices (chamando-lhes “bicos”) para justificar as suas escolhas, de salientar que a Leonor referiu ainda que as suas figuras eram diferentes “porque uma é maior e a outra é mais pequena”. Além disso o Manuel, no seu diálogo, deu relevo a perceções visuais relativamente a figuras prototípicas:

Investigadora - Porque é que são triângulos?
Manuel - Tem esta forma (contorna com o dedo um dos triângulos) e estas partes (aponta os lados) são iguais. Não. Esta e esta (aponta os lados mais pequenos do triângulo da direita) são iguais e esta (o terceiro lado) é diferente.
Inv. - E este (aponta triângulo da esquerda) porque é que é um triângulo?
Manuel - Porque estas duas (aponta os dois lados iguais) são iguais, tem os três bicos e este (aponta o lado maior) é diferente destas (volta a apontar dois lados iguais).

Relativamente aos contraexemplos representados no geoplano, todos são quadriláteros: três quadrados, um retângulo e dois trapézios retângulos (figura 20). Nas suas explicações todos os alunos referiram o número de lados, o Ivo acrescentou ainda "em vez dos três bicos tem… quatro bicos", a Joana considerou que o seu retângulo "tem mais do que três lados mas à mesma, também tem as linhas retas" e o Manuel salientou que para além dos quatro lados o seu quadrado tem "quatro biquinhos (vértices) e estas partes (aponta os lados) são todas iguais".

No que ao papel ponteado diz respeito, apenas a Gabriela, o Ivo e a Joana utilizaram a régua como ajuda para desenhar as linhas retas. De salientar que a Joana desenhou figuras que não respeitam a referência dos pontos e, como tal, não podem ser reproduzidas com os elásticos no geoplano, assim, fiquei com algumas dúvidas relativamente ao real domínio desta aluna sobre estes materiais manipuláveis e se terá a noção da sua correspondência. Uma vez mais, os exemplos apresentados não são repetidos dos desenhados nos suportes anteriores.

Assim, no papel ponteado foram representados nove triângulos acutângulos, dois triângulos retângulos e um triângulo obtusângulo (figuras 21 e 22). A maioria dos triângulos apresentados (oito) são isósceles e os restantes quatro são escalenos. Uma vez mais, os alunos recorreram ao número de lados e vértices (características fundamentais) para justificar a escolha dos seus desenhos. O Ivo voltou a salientar que a orientação da figura não é uma característica fundamental afirmando que "tem três bicos… os três lados e como eu já disse pode-se virar que na mesma que tenha três bicos é um triângulo", a Joana voltou a salientar a importância dos lados serem retos: "têm três lados e têm linhas retas" e o Manuel continuou a salientar de forma incorreta que o tamanho dos lados é essencial dizendo "têm três lados, têm três biquinhos, e estas partes (aponta dois lados iguais) são iguais e esta é diferente (aponta o terceiro lado).

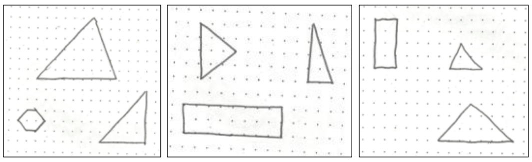


Figura 21 - Exemplos e contraexemplos de triângulos apresentados por Ivo, Joana e Manuel respetivamente no papel ponteado

Como contraexemplos no papel ponteado foram apresentados cinco quadriláteros (quatro retângulos e um quadrilátero não convexo) e um hexágono (figuras 21 e 22). As justificações continuaram a incidir sobre o número de lados ou de vértices, sendo que o Ivo também nomeou o seu hexágono e o Manuel continuou a salientar o tamanho e a igualdades dos lados opostos do retângulo: "porque tem quatro bicos, quatro lados e estas duas são iguais (aponta dois lados opostos) e tem duas diferentes (aponta os outros lados opostos) ".

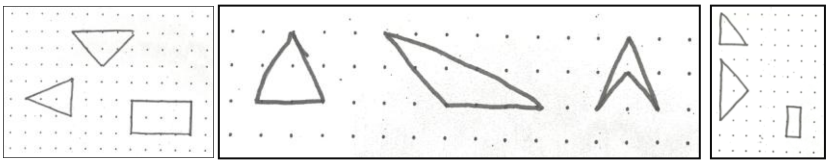


Figura 22 - Exemplos e contraexemplos de triângulos apresentados por Gabriela, Hélder e Leonor respetivamente no papel ponteado

Por fim, nas *Geo Strips,* os alunos do 4º ano continuaram a apresentar diferentes exemplos de triângulos em relação aos suportes anteriores. Todos os exemplos apresentados são triângulos acutângulos, destes sete são escalenos e cinco são isósceles. Para justificar as suas escolhas todos continuaram a referir o número de lados ou de vértices, a Joana continuou a dar ênfase aos lados retos e a Leonor distinguiu os seus dois exemplos afirmando que eram diferentes "porque um é maior do que o outro", o Manuel continuou a tentar comparar o tamanho dos lados dos seus triângulos (figura 23) "porque tem três lados cada um, têm três pontos (vértices) e esta (aponta um dos lados do triângulo) não é igual a nenhuma! (…) Este é um triângulo porque tem três lados, três pontas (vértices) e tem estas duas são iguais (aponta dois lados do triângulo) e esta não" (confiando na perceção visual, embora os lados sejam todos diferentes já que o triângulo é escaleno).

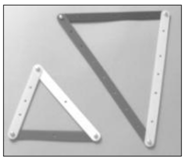


Figura 23 - Exemplos de triângulos apresentados por Manuel com as *Geo Strips*

Todos os contraexemplos construídos com as *Geo Strips* são quadriláteros, sendo dois não convexos e quatro irregulares (com os lados de tamanhos diferentes) (figura 24) justificando a escolha do mesmo modo que haviam feito para os exemplos e contraexemplos apresentados no papel ponteado. De salientar que a Joana, embora tenha construído o seu quadrilátero com cinco barras, considerou que duas estavam alinhadas e correspondiam a um único lado.

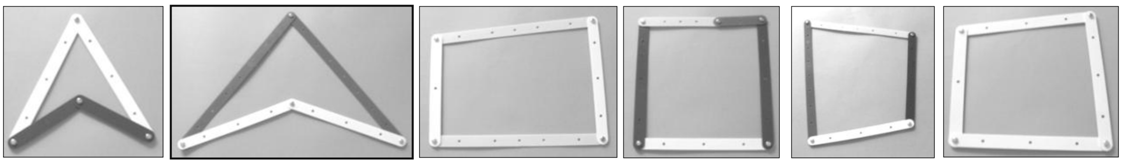


Figura 24 - Contraexemplos de triângulos apresentados por Gabriela, Hélder, Ivo, Joana, Leonor e Manuel respetivamente com as *Geo Strips*

Durante a apresentação dos seus desenhos o Ivo tentou explicar de forma informal o que era um triângulo prototípico (sem o nomear):

Ivo - Este é um daqueles triângulos normais…
Investigadora - Normais?
Ivo - Pois que são aqueles originais que as crianças sempre gostam deles…
Inv. - Sim.
Ivo - Tem os seus amigos os três bicos…
Inv. - Sim.
Ivo - E os três lados.
Inv.- E este?
Ivo - Este é a mesma coisa.
Inv. - O que é que é a mesma coisa? Tens de me dizer…
Ivo - Tem os três bicos, os três lados como sempre eles têm e acrescentei uma barra é maior e prontos.

Em síntese, de todos os exemplos apresentados nos diferentes suportes a maioria dos triângulos são acutângulos, aparecendo alguns triângulos retângulos e apenas cinco triângulos obtusângulos. No que ao comprimento dos lados diz respeito, foram apresentados muitos triângulos isósceles e escalenos, mas apenas um triângulo equilátero. Foram apresentados muitos exemplos diferentes de triângulos e embora muitos destes possam ser considerados prototípicos, há também uma grande variedade de exemplos não prototípicos e apresentados com diferentes orientações.

Tal como anteriormente, considero que estes desenhos apresentados logo no início da entrevista são representações dos conhecimentos e perceções que os alunos têm das figuras, não estando ainda nesta altura influenciados pelas restantes perguntas da entrevista.

Assim, as primeiras figuras apresentadas pelos alunos nas folhas de papel branco (suporte que permite total liberdade de desenho sem limites ou influências) serão as que poderão ser consideradas à partida como as intuitivas para estes alunos. Como tal os exemplos intuitivos para este grupo parecem ser os triângulos acutângulos e isósceles. De salientar que muitos destes triângulos se apresentam com orientações variadas nas folhas, não se apresentando todos em posições consideradas prototípicas.

Relativamente aos consecutivos exemplos de triângulos que foram depois apresentados nos demais suportes, é importante salientar que, tal como os alunos de 2º ano, estes alunos demonstraram preocupação em não repetir os exemplos apresentados.

Continuaram a ser predominantes os triângulos acutângulos, surgindo também alguns exemplos de triângulos obtusângulos e retângulos, salientando-se que estes últimos apareceram maioritariamente no geoplano, pelo que o seu surgimento poderá ter acontecido por influência do material manipulável utilizado, dado que o geoplano era formado por pontos de suporte dos elásticos organizados em malha quadrada.

Os exemplos de triângulos isósceles e escalenos ocorrem quase em igual número, pelo que parecem ser igualmente intuitivos para estes alunos. No entanto surge apenas um exemplo de triângulo equilátero, parecendo ser este o menos intuitivo para este grupo de alunos.

Embora haja exemplos de triângulos apresentados em posições prototípicas, há também muitos exemplos que aparecem com outras orientações, salientando-se a preocupação do Manuel em explicar sempre que os seus triângulos tinham dois lados iguais e um terceiro mais pequeno fazendo, assim, sempre referência à sua imagem mental de triângulos prototípicos e dando relevância ao tamanho dos lados.

Relativamente aos contraexemplos, foram maioritariamente apresentados quadriláteros e um pequeno número de hexágonos e um heptágono. De salientar que dos quadriláteros, para além do quadrado e do retângulo (que surgem em maior número), foram também apresentados alguns exemplos não prototípicos como outros quadriláteros irregulares (com todos os lados de tamanhos diferentes) e não convexos, trapézios retângulos e um paralelogramo.

Analisando os contraexemplos apresentados na folha de papel branco (suporte que permite a maior liberdade de desenho) parece ser intuitivo para estes alunos que os quadriláteros não são triângulos, no entanto, tem de se salientar que foram também apresentados dois hexágonos (um regular com os lados iguais e outro irregular) como contraexemplos. No entanto, analisando os contraexemplos apresentados nos restantes suportes, confirma-se que são os quadriláteros que parecem ser os contraexemplos intuitivos para este grupo de alunos, já que são estes os que são apresentados em maior número. Continuam também a surgir alguns hexágonos, parecendo ser esta também uma figura intuitiva para estes alunos.

Nas explicações utilizadas para justificar as suas escolhas todos os alunos recorreram à contagem do número de lados das figuras e/ou dos vértices (propriedades essenciais), no entanto os que se referiram aos vértices utilizaram sempre linguagem informal como “bicos”, “biquinhos” ou “pontas”. Assim, todos os alunos desde o início conseguiram identificar o número de lados e/ou de vértices como sendo as propriedades essenciais das figuras, reconhecendo que os triângulos têm de ter três lados e/ou três vértices e caso a figura não tenha estas características não pode ser um triângulo. Além disso, a Joana deu sempre grande importância aos lados dos triângulos terem de ser retos (por exemplo: “têm três lados e têm linhas retas”) e o Manuel teve sempre necessidade de comparar os tamanhos dos lados das figuras apresentadas (por exemplo: “têm três lados, têm três biquinhos (vértices), e estas partes (aponta dois lados iguais) são iguais e esta é diferente (aponta o terceiro lado)”), demonstrando a necessidade de incluir nas suas explicações as suas perceções visuais de figuras prototípicas.

4.2.2. Identificação de exemplos e contraexemplos

Tal como na análise realizada para o 2º ano, relativamente à identificação das figuras apresentadas em cartões individuais (anexo 4) e as fundamentações dos alunos, por uma questão de organização, serão analisados primeiramente os exemplos intuitivos e não intuitivos e posteriormente os contraexemplos intuitivos e não intuitivos.

Todos os alunos de 4º ano identificaram corretamente os exemplos intuitivos de triângulo (triângulos isósceles e equilátero), para ambos os triângulos a Gabriela, o Hélder e a Leonor explicaram "porque tem três lados", o Ivo e o Manuel, para além do número de lados, consideraram o número de vértices, embora se tenham referido aos mesmos de forma informal como "três bicos" e "três pontas" e a Joana referiu para além do número de lados o facto de estes serem retos. Foram assim consideradas características essenciais por todos os alunos para justificarem as suas identificações.

Relativamente aos exemplos não intuitivos (triângulos *isósceles de lado*, *equilátero ao contrário*, retângulo, acutângulo e obtusângulo) também foram todos corretamente identificados por todos os entrevistados. Uma vez mais a Gabriela, o Hélder e a Leonor justificaram as suas identificações sempre com "porque tem três lados". De salientar que o Hélder pegou nos cartões dos triângulos *isósceles de lado* e *equilátero ao contrário* e os colocou em posição prototípica (figura 25).

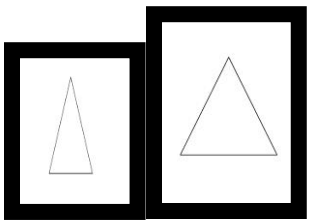


Figura 25 - Cartões com exemplos não intuitivos de triângulos reorientados pelo Hélder

A Joana considerou sempre o número de lados da figura e o facto de esses lados serem linhas retas ("tem três lados e linhas retas").

O Ivo e o Manuel também consideraram o número de lados para explicar que as figuras apresentadas são triângulos, no entanto referiram-se também ao número de vértices utilizando linguagem informal ("três bicos" e "três pontas"). O Manuel sentiu necessidade de orientar o triângulo *isósceles de lado* para a posição prototípica e a sua explicação relativamente ao triângulo *equilátero ao contrário* foi confusa:

> Investigadora - E este (mostra cartão com triângulo *equilátero ao contrário*)?
> Manuel - Sim.
> Inv. - Porquê?
> Manuel - Porque tem estes (aponta) lados, este é igual a este e este é diferente e tem três pontas.

Assim, uma vez mais, o Manuel considerou o número de lados e vértices ("pontas") considerando duas propriedades fundamentais para identificar o triângulo, no entanto, continuou também a considerar a necessidade de o triângulo ter de ter dois lados iguais e um terceiro lado menor, considerando, assim, fundamental a sua perceção de triângulo prototípico.

O Ivo considerou as suas perceções visuais sobre o triângulo acutângulo, no entanto, preferiu basear-se nas características essenciais da figura para justificar a sua identificação:

> Investigadora - E esta (mostra cartão com triângulo acutângulo)?
> Ivo - Essa é est… Também é um triângulo.
> Inv. - Porque…?
> Ivo - Em vez de ser fininha e não parece um triângulo… Mas é!
> Inv. - Porque…?
> Ivo - Tem os três bicos e os três lados ao mesmo tempo.

Os contraexemplos intuitivos apresentados (quadrado, hexágono e elipse) também foram corretamente identificados como não sendo exemplos de triângulos por todos os entrevistados do 4º ano. Relativamente ao quadrado todos os alunos salientaram que esta figura não era um triângulo porque "tem quatro lados", além disso, a Joana voltou a salientar "também tem linhas retas" e o Manuel referiu "e quatro pontas (vértices)".

Quando analisaram o hexágono, só o Ivo considerou os vértices e nomeou a figura ("porque tem seis bicos (vértices) e é um hexágono") todos os outros consideraram o número de lados, no entanto, referiram-se aos mesmos de forma diferente: "não tem três lados" (Gabriela), "tem mais (lados)" (Hélder), "tem mais de três lados mas também tem as linhas retas" (Joana), "porque tem mais de três lados" (Leonor) e "tem seis lados e já não pode ser um triângulo" (Manuel).

Relativamente à elipse os alunos tentaram analisar a figura através do seu aspeto visual e também tentando considerar os "lados", tal como haviam feito com todas as figuras até então apresentadas. Assim, a Gabriela considerou que a elipse não era um triângulo porque "não tem três lados", o Hélder considerou que "só tem um (lado)", o Ivo explicou "porque os triângulos têm os lados sempre retos e esta figura tem os lados redondos", a Joana salientou que a figura "não tem linhas retas", a Leonor que "não tem lados" e o Manuel explicou "porque é redondo e os triângulos têm pontas e este não".

Por fim, no que aos contraexemplos não intuitivos (*triângulo zig zag*, pentágono, *triângulo aberto* e *triângulo arredondado*) diz respeito, todos consideraram de forma correta que estes não eram triângulos, exceto o Hélder que considerou que o *triângulo arredondado* era um triângulo.

Cinco dos seis alunos analisaram os lados do *triângulo zig zag* e concluíram que este não era um triângulo porque "não tem três lados" (Gabriela), "tem mais (lados)" (Hélder) e "tem mais do que três lados" (Joana e Leonor), sendo que o Manuel também considerou os vértices da figura "tem muitas pontas (vértices) e tem muitos lados" e o Ivo apenas considerou os vértices da figura "porque tem muitos bicos (vértices) mas não é como um triângulo que só tem três (vértices)".

Tal como anteriormente a análise ao pentágono compreendeu a referência ao número de lados quer por comparação com o triângulo, realizada pela Gabriela, o Hélder, a Joana e a Leonor ("não tem três lados", "tem mais (lados)" e "tem mais do que três lados") quer por análise da figura apresentada pelo Ivo e pelo Manuel ("tem os cinco bicos (vértices) e cinco lados" e "tem cinco lados, quatro pontas (vértices)").

Quanto ao *triângulo aberto*, que foi por todos identificado como não sendo um triângulo, a Gabriela, o Hélder, o Ivo e a Joana referiram o facto de a figura não estar fechada, a Leonor considerou que a figura "não está encaixada". Relativamente aos vértices o Manuel considerou que "falta uma ponta (vértice) para ser um triângulo" e o Ivo ainda salientou que a figura "só tem dois bicos (vértices)".

Por fim, relativamente ao *triângulo arredondado*, apenas o Hélder o considerou um triângulo porque "tem três lados", os restantes alunos afirmaram que a figura não era um triângulo porque verificaram que a figura não tem vértices, embora se tenham referido a este facto de forma informal: "Porque não tem… tem aquelas coisas redondas" (Gabriela), "porque os bicos (vértices) deviam ser retos e ali são redondos" (Hélder), "os vértices são redondos" (Joana, referindo-se pela primeira vez aos vértices e utilizando a denominação formal), "porque os lados não são retos … Não são direitos" (Leonor) e "porque aqui não faz pontas (vértices) é redondo" (Manuel).

Resumindo, todos os triângulos (intuitivos) foram corretamente identificados por todos os alunos do 4º ano, tendo estes, na sua maioria, privilegiado a sua identificação com base apenas no número de lados e/ou vértices, características essenciais e que já anteriormente haviam sido consideradas pelos alunos para justificar os seus desenhos iniciais. Assim, estes exemplos parecem ser realmente intuitivos para todos estes alunos.

No que aos triângulos considerados não intuitivos diz respeito, estes foram corretamente identificados por todos os alunos como sendo exemplos de triângulos, tendo todos, uma vez mais, se baseado no número de lados e/ou vértices para se justificar. Embora estes triângulos pareçam ter sido intuitivos para a Gabriela, a Leonor, a Joana e o Ivo que rapidamente os identificaram, o Hélder e o Manuel sentiram necessidade de colocar alguns destes triângulos considerados não intuitivos (triângulos *isósceles de lado* e *equilátero ao contrário*) em posição prototípica, pelo que para estes alunos estes exemplos não parecem ser intuitivos.

Os contraexemplos intuitivos também foram devidamente identificados por todos os alunos como não sendo triângulos. No caso do quadrado e do hexágono as justificações foram baseadas no número de lados e/ou vértices, tendo surgido aqui, pela primeira vez, uma nomeação de figura (o Ivo nomeou o hexágono), parecendo que estas foram identificações intuitivas e baseadas nas propriedades já anteriormente apontadas como fundamentais. No entanto, as explicações relativamente à elipse dividiram-se entre a figura não ter lados e o seu aspeto visual (por exemplo: "porque é redondo e os triângulos têm pontas (vértices) e este não"). Assim, embora todas as identificações deste contraexemplo estejam, corretas, as justificações parecem ter sido mais diversificadas não recorrendo apenas e só ao número de lados e/ou vértices, pelo que fico com dúvidas se este será ou não um contraexemplo intuitivo para estes alunos..

Os contraexemplos não intuitivos também foram corretamente identificadas por todos os alunos do 4º ano, exceto o *triângulo arredondado* que foi incorretamente identificado pelo Hélder como um exemplos de triângulo.

No caso do *triângulo zig zag* e do pentágono as identificações continuaram a basear-se apenas no número de lados e/ou vértices, analisando as entrevistas estas figuras não parecem ter suscitado dúvidas aos alunos que rapidamente as rejeitaram como triângulos, pelo que, aparentemente serão tão intuitivas como o quadrado e o hexágono para estes alunos.

No caso do *triângulo aberto* foi principalmente referido o facto de a figura não estar fechada mas também a falta de um vértice e no caso do *triângulo arredondado* quase todos identificaram a falta de vértices da figura. No entanto, claramente, estas figuras suscitaram mais dúvidas a estes alunos que variaram mais as suas justificações recorrendo mais vezes a linguagem informal para se justificarem. Assim, parece confirmar-se que para estes alunos os *triângulos aberto* e *arredondado* não são intuitivos.

A análise destas perguntas e respostas evidencia, tal como aconteceu na análise dos exemplos e contraexemplos apresentados pelos alunos, que estes privilegiam a análise do número de lados e/ou vértices para identificar os exemplos e contraexemplos de triângulos. No entanto, quando esta informação é insuficiente ou mais difícil de analisar, estes alunos têm tendência a recorrer a perceções visuais (por exemplo: “em vez de ser fininha”). De salientar, também, a utilização de muita linguagem informal (por exemplo: “porque tem muito bicos (vértices)”) ao longo de todas estas respostas.

Na imagem (desenho) composta (anexo 5) todos os alunos do 4º ano assinalaram de forma correta todos os triângulos e nenhuma das outras figuras, exceto a Leonor que inicialmente assinalou também os *triângulos abertos*, no entanto, quando analisou as suas escolhas mudou rapidamente de opinião, considerando que a figura “não está toda feita”.

Investigadora - E porque é que assinalaste aquela (aponta *triângulo isósceles de lado*)?
Leonor - Porque tem três lados.
Inv. - E esta (aponta *triângulo aberto*) porque é que assinalaste?
Leonor - (pega na borracha e apaga as cruzes)
Inv. - Então, porque é que estás a apagar?
Leonor - Porque não está toda feita.

Todos os alunos deste ano se referiram ao número de lados das figuras para justificar serem ou não triângulos, no caso dos triângulos "porque tem três lados" e no caso dos contraexemplos "porque não tem três lados", "porque tem mais do que três lados" ou "porque tem X lados". Além disso o Ivo e o Manuel referem-se muitas vezes ao número de vértices, como se pode ver, por exemplo, no seguinte diálogo com o Ivo:

Investigadora - Não assinalaste esta (aponta *triângulo zig zag*) porquê?
Ivo - Porque essa aí em vez de ter os seus três bicos (vértices) e os seus três lados tem muitos bicos e não é um triângulo.
Inv. - E esta (aponta *triângulo aberto*).
Ivo - Essa aí pode parecer um triângulo e tem figura de um triângulo só que quando chega ao último bico para e não fecha a figura.
Inv. - Então e aquela (aponta hexágono) porque é que não é um triângulo?
Ivo - Porque tem seis bicos (vértices) e seis lados e chama-se hexágono que é uma comparação diferente para o triângulo.
Inv. - E aquela (aponta pentágono)?
Ivo - Tem a mesmas estruturas de um triângulo, só que depois tem mais… acrescentaram-lhe dois bicos (vértices). (…)
Inv. - E aquela (aponta quadrado) porque é que não é um triângulo?
Ivo - Porque (…) é um quadrilátero tem quatro bicos e quatro lados (…).

O único a nomear contraexemplos foi o Ivo que nomeou o hexágono e considerou o quadrado um "quadrilátero".

Uma vez mais, as diferenças nas justificações surgem no *triângulo aberto* quando os alunos referem que "não é fechado" (Gabriela), "não fecha" (Hélder e Ivo), "não está fechado" (Leonor) ou "falta uma ponta (vértice) para ser um triângulo" (Manuel). No caso da elipse também surgiram algumas justificações diferentes, por exemplo, a Joana considerou que "é redonda", a Leonor voltou a afirmar por duas vezes que a figura "não tem lados" e o Manuel constatou que "não tem pontas (vértices) ".

Resumindo, de uma maneira geral foram mantidas as identificações realizadas anteriormente pelos alunos nas figuras desenhadas em cartões individuais, estes recorreram à contagem de propriedades essenciais das figuras como o número de lados e dos vértices para justificar as suas escolhas na maioria das imagens, além disso o Ivo nomeou duas figuras. Uma vez mais, foram nos contraexemplos não intuitivos que surgiram algumas justificações diferentes, como no caso do *triângulo aberto* que surgiram justificações relacionadas com o facto de a figura não ser fechada.

Os dados analisados relativamente a esta imagem composta parecem evidenciar que todos estes alunos conseguiram isolar e analisar cada uma das figuras do fundo complexo que era o total da imagem, assim, parece que já desenvolveram as capacidades de visualização espacial relativas à *perceção figura-funda*.

4.2.3. Comparação de figuras

Perante a folha composta por diversas figuras dispersas (anexo 6 e figura 15) perguntei a cada aluno "achas que estas figuras são todas diferentes ou há algumas que são iguais?", pedindo depois a cada um que assinalasse com os lápis as que consideravam iguais.

À partida a Gabriela e o Manuel assinalaram todos os triângulos e a Joana assinalou cinco dos seis triângulos, considerando-os figuras iguais por serem todos triângulos, tal como se pode ver no seguinte diálogo com o Manuel.

Manuel - Há figuras iguais.
Investigadora - Quais?
Manuel - Esta, esta, esta, esta, esta e esta (aponta todos os triângulos).
Inv. - Porque é que são iguais?
Manuel - Porque têm todas três bicos (vértices) e três… e três lados. ... São todas triângulos.

Assim, estes três alunos logo à partida consideraram que o termo "igual" se poderia referir à classe das figuras, assinalando os vários triângulos como figuras iguais.

Mais tarde, com uma análise mais detalhada das figuras, todos os alunos conseguiram discriminar todos, ou pelo menos parte, dos dois tipos de triângulos presentes na folha, assinalando-os com O ou com X.

O Ivo, a Joana, a Leonor e o Manuel (figura 26) conseguiram facilmente identificar todos os triângulos obtusângulos, a Gabriela também conseguiu identificá-los todos mas precisou de recorrer à ajuda da folha de papel vegetal e o Hélder identificou apenas os triângulos obtusângulos B e C como sendo iguais.

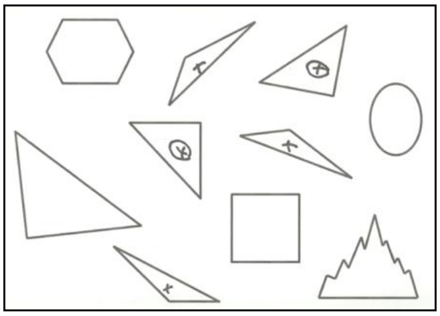


Figura 26 - Figuras consideradas iguais pela Joana

Desta forma o Ivo, a Joana, a Leonor e o Manuel conseguiram encontrar sem dificuldade os três triângulos obtusângulos com diferentes orientações pelo que já terão desenvolvido a sua capacidade de *perceção da posição espaço*. A Gabriela só o conseguiu fazer com a ajuda da folha de papel vegetal e o Ivo só identificou dois dos triângulos obtusângulos pelo que não terão ainda esta capacidade de visualização totalmente desenvolvida.

Por outro lado, relativamente aos triângulos retângulos, a Gabriela, o Ivo, a Joana, a Leonor e o Manuel consideraram iguais os dois triângulos retângulos pequenos, mas não o triângulo retângulo grande, parecendo assim, que dão relevância não só à forma mas também ao tamanho da figura, pelo que parecem encarar como iguais apenas as figuras que são congruentes, como se pode ver no seguinte diálogo da Joana.

Investigadora - E esta (aponta um triângulo retângulo pequeno).
Joana - É igual a esta (aponta o outro triângulo retângulo pequeno).
Inv. - Então vamos pôr uma bolinha nestas (assinala os dois triângulos retângulos com bolinhas) para fazermos a diferença.
(…)
Joana - Este (aponta triângulo retângulo grande) também é.
Inv. - Também é o quê?
Joana - Também é triângulo.
Inv. - E é igual àqueles (triângulos retângulos pequenos) ou não?
Joana - É maior, mas também é triângulo.

A Gabriela que considerou inicialmente que as figuras iguais eram todos os triângulos, teve muita dificuldade em agrupá-los de acordo com as suas características particulares, para tal necessitou da folha de papel vegetal, (os outros alunos do 4º ano apenas a utilizaram para confirmar as suas descobertas).

Gabriela - Porque não têm o mesmo espaço… lá dentro.
Investigadora - Lá dentro não têm o mesmo espaço? Então afinal são todos iguais ou não?
Gabriela - Não.
Inv. - Não, então? Será que são todos diferentes ou há alguns que são iguais?
Gabriela - Há alguns que são iguais. Este (aponta triângulo obtusângulo B) é igual a este (aponta triângulo obtusângulo A).
Inv. - Queres experimentar a folha para ver mais?(…)
Gabriela - (manipula a folha de papel vegetal) (…) (assinala todos os triângulos obtusângulos e assinala os dois triângulos retângulos pequenos)
Inv. - São iguais porque, explica-me lá. (…)
Gabriela - Porque têm o mesmo espaço lá dentro.

Por fim, o Hélder considerou que o triângulo retângulo grande era igual ao triângulo retângulo B (figura 27), não encontrando outro que lhe fosse igual.

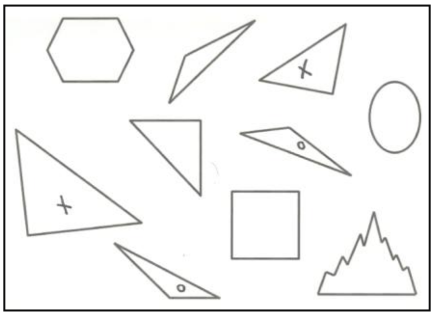


Figura 27 - Figuras consideradas iguais pelo Hélder

Hélder - Esta (aponta triângulo retângulo grande) é igual a esta (aponta triângulo retângulo pequeno B).
Investigadora - Põe duas cruzes, uma aqui (aponta triângulo retângulo grande) e outra ali (aponta triângulo retângulo pequeno B).
Hélder - (assinala com as cruzes).
Inv. - Dizes que são iguais porque…?
Hélder - Têm… Porque esta (aponta triângulo retângulo pequeno B) está mais pequena do que esta (aponta triângulo retângulo grande).
Inv. - Pronto. Então apesar de ser mais pequena é igual?
Hélder - Sim.
Inv. - E o que é que há mais igual aí?
Hélder - Têm três lados e têm um ângulo reto.

Assim, o Hélder parece reconhecer que estes dois triângulos retângulos, embora de tamanhos diferentes, são iguais, considerando assim, que a igualdade neste caso se refere apenas à forma, neste caso, ao facto de serem dois triângulos retângulos. Nesta pergunta surge pela primeira vez, a referência a um ângulo interno dos triângulos, neste caso um ângulo reto.

A comparação entre estas figuras evidência que só o Hélder já tem alguma *constância percetual*, dado que conseguiu identificar dois triângulos retângulos como iguais salvaguardando a sua diferença de tamanho.

Se compararmos estas decisões dos alunos com as justificações que apresentaram no início da entrevista, quando deram as explicações para as diferenças entre os exemplos de triângulos apresentados, verificamos que estes alunos são consistentes. Por exemplo, a Leonor que neste exercício considerou que a diferença de tamanho era relevante, também o fez no início da entrevista ao afirmar que os triângulos apresentados no geoplano eram diferentes porque “uma é maior e a outra é mais pequena”.

Na comparação do triângulo isósceles com o hexágono todos os alunos do 4º ano consideraram inicialmente que as figuras eram diferentes e identificaram logo à partida o número de lados de cada uma das figuras como sendo uma desigualdade entre elas. Além disso, a Gabriela identificou o número de vértices (utilizando a denominação formal) das figuras, tal como o Ivo (que lhes chamou “bicos”) e o Manuel (que lhes chamou “biquinhos”). Alguns alunos também reconheceram que os nomes das figuras apresentadas são diferentes, a Gabriela nomeou-os corretamente como sendo um triângulo e um hexágono e a Joana e o Manuel nomearam as figuras mas consideraram-nas um triângulo e um pentágono.

A Gabriela, quando a questionei sobre os ângulos, identificou-os de forma correta, o Hélder referiu-se aos mesmos, uma vez mais, de forma espontânea:

> Hélder - Diferentes.
> Investigadora - Diferentes, em que é que são diferentes?
> Hélder - Porque um tem seis lados e o outro tem três.
> Inv. - E têm mais alguma coisa diferente?
> Hélder - Ah… Não.
> Inv. - Não têm mais nada que seja diferente?
> Hélder - A não ser os ângulos…
> Inv. – Então (…) qual é a diferença nos ângulos?
> Hélder - É que este (aponta o hexágono) é só ângulos agu… obtusos e este (aponta triângulo) é só ângulos agudos.

Além destas características a Gabriela ainda salientou que “o espaço lá dentro é diferente” e a Joana referiu que as figuras eram diferentes na “forma”.

Depois de refletirem sobre as diferenças pedi a todos os alunos que procurassem semelhanças entre as duas figuras, a Gabriela, o Hélder, a Joana e o Manuel não encontraram qualquer igualdade entre as duas figuras. o Hélder e a Leonor afirmaram que as duas figuras têm lados e o Hélder ainda salientou que as duas têm "bicos" (vértices).

A quando da comparação entre os triângulos isósceles e obtusângulo todos os alunos do 4º ano consideraram inicialmente que as figuras eram iguais por terem o mesmo número de lados, além disso a Gabriela, o Ivo, a Joana e a Leonor nomearam as figuras como sendo triângulos e o Ivo e o Manuel ainda consideraram que ambas as figuras tinham o mesmo número de "bicos" (vértices).

Depois de apontar as semelhanças, analisaram as diferenças e todos consideraram também que estas eram diferentes recorrendo a linguagem informal para se expressar:

> Gabriela - Só que não são iguais quanto ao espaço lá dentro.
>
> Hélder - Esta (aponta triângulo obtusângulo) está mais inclinada para cá e esta aqui (aponta triângulo isósceles) é a direito.
>
> Ivo - Esta aqui (aponta triângulo isósceles) é estr… é… prontos, normal. E esta aqui (aponta triângulo obtusângulo) fechou um bocado desta (aponta triângulo isósceles).
>
> Joana – Triângulos e têm uma forma parecida. (…) São diferentes em tamanhos. (…) Esta (aponta triângulo obtusângulo) é um pouco mais pequena e esta (aponta triângulo isósceles) é maior.
>
> Leonor – Esta não é igual à outra. (…) Esta (aponta triângulo obtusângulo) está torta e esta (aponta triângulo isósceles) está direita.
>
> Manuel – Têm um bocadinho diferente. Esta (aponta triângulo obtusângulo) é maior aqui e aqui (aponta os lados maiores) e esta (aponta triângulo isósceles) não.

Por iniciativa própria a Gabriela apontou também os diferentes ângulos das figuras para explicar as suas diferenças.

> Gabriela - Esta aqui (aponta triângulo obtusângulo) tem um ângulo obtuso e dois agudos e esta aqui (aponta triângulo isósceles) tem três ângulos agudos.

Todos os outros alunos (incluindo o Hélder que já anteriormente havia falado nos ângulos das figuras por iniciativa própria) só identificaram os ângulos das figuras depois de eu sugerir a sua análise. Todos identificaram os ângulos de forma correta, embora o Ivo e a Joana tenham mostrado algumas dificuldades em identificar todos os ângulos das figuras. De salientar que a Leonor assinalou-os mesmo no cartão das figuras (figura 28).

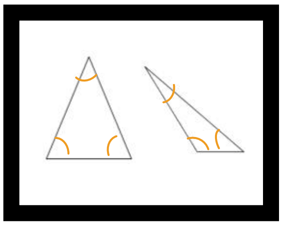


Figura 28 – Triângulos isósceles e obtuso com os ângulos assinalados pela Leonor

Resumindo, os alunos começaram as suas comparações relacionando atributos fundamentais das figuras: número de lados e/ou vértices e/ou a nomeação das figuras. No entanto, ao sentirem dificuldade em explicar os seus pontos de vista relativamente às diferenças entre os dois triângulos, a maioria prosseguiu as suas análises com base em propriedades não fundamentais como o tamanho (por exemplo: "Esta é um pouco mais pequena e esta é maior") e baseadas em impressões visuais (por exemplo: "Esta está mais inclinada para cá e esta aqui é a direito") recorrendo a vocabulário informal para se expressar. A maioria só recorreu à comparação dos ângulos dos dois triângulos para explicar a diferença entre eles quando sugerido por mim, embora o tenham realizado de forma correta.

Embora todos tenham conseguido analisar semelhanças e diferenças entre as figuras apresentadas e, como tal, parecessem possuir a capacidade de *discriminação visual* desenvolvida, demonstraram algumas dificuldades em explicar as suas impressões, por um lado recorreram à descrição de propriedades fundamentais (como o número de lados e de vértices), por outro, continuaram a utilizar vocabulário informal para se referir às componentes das figuras (dizendo, por exemplo "bicos" em vez de "vértices") e a recorrer a impressões visuais (por exemplo: "esta está torta e esta está direita") e a propriedades não fundamentais (como o tamanho).

4.2.4. Descrição e definição de triângulos

Perante o pedido de descrição do triângulo retângulo (triângulo não intuitivo) o Ivo baralhou as características da figura com algumas instruções de desenho, o Manuel apenas tentou dar instruções de desenho:

> Ivo - Dizia-lhe primeiro para desenhar um ângulo reto e a seguir para fechar a figura virando a folha e depois (vira o cartão) fazendo… Não, faço um ângulo reto primeiro e depois digo-lhe a ele para fechar a figura… (…) Depois digo-lhe a ele para confirmar se tem os três bicos (vértices) e três lados.
>
> Manuel - Dizia que tinha de desenhar três… Não. Uma linha reta na vertical, outra linha reta na horizontal e outra linha reta na vertical (acena que não com a cabeça), ah… Na diagonal. E depois tinha de desenhar três pontas no fim.

Assim, o Ivo embora referencie características essenciais para descrever a figura, salientando que o triângulo teria de conter um ângulo reto, ser uma figura fechada e ter três vértices ("bicos") e três lados, utiliza um discurso confuso, começando as suas indicações mas alterando-as a meio. Por outro lado, o Manuel parece querer referir-se ao desenho dos três lados, no entanto, fá-lo de uma forma confusa referindo-se a "linhas retas" e à sua orientação que considera "vertical, horizontal e diagonal" utilizando, assim, termos incorretos e inadequados ao contexto, no fim o Manuel parece ainda querer referir-se ao número de vértices da figura (aos quais se refere informalmente como "pontas").

A Gabriela e a Leonor recorreram à nomeação da figura na sua descrição inicial aliada a características essenciais das figuras:

> Gabriela - Dizia que tinha um ângulo reto e dois agudos, tinha três lados e que era um triângulo.
> Investigadora - (…) E se não pudesses dizer que era um triângulo? Se a palavra triângulo fosse proibida, o que é que dizias? (…)
> Gabriela - Dois ângulos agudos, um reto, tinha três lados…

e perceções visuais no caso da Leonor.

> Leonor - Tem três lados, é uma forma geométrica e é da família dos triângulos. (…) Que não era um triângulo normal. (…) É assim inclinado.

Assim, a Gabriela para além da nomeação, dá ênfase a características essenciais da figura como o número de lados e salienta os ângulos do triângulo, classificando-os de forma correta como um ângulo reto e dois agudos. Quando lhe pedi para não utilizar a palavra triângulo, a Gabriela, limitou-se a repetir a sua descrição anterior, eliminando apenas a palavra "triângulo" parecendo, assim, considerar que apenas as características mencionadas bastavam para que o colega soubesse desenhar a figura. Por outro lado, a Leonor para além da nomeação, a que recorreu através do reconhecimento da classe das figuras em estudo (a que chama de "família dos triângulos) e de salientar o número de lados (característica essencial da figura), refere-se ao facto de a mesma ser uma "forma geométrica" (considerado aqui, uma vez mais, como um sinónimo de polígono) e recorre a linguagem informal para expressar as suas impressões visuais sobre a figura ("Que não era um triângulo normal. (…) É assim inclinado."). Assim, esta aluna parece recorrer às suas impressões visuais quando o vocabulário formal não lhe permitiu descrever todas as características essenciais da figura.

O Hélder e a Joana recorreram apenas a características essenciais das figuras nas suas descrições, não nomeando nunca a figura:

> Hélder - Tem um ângulo reto e dois agudos e tem três lados… (…) E tem três vértices.
>
> Joana - Eu dizia para desenhar um ângulo reto. (…) E depois em cima desenhava uma linha para baixo (aponta). (…) E tinha que depois ter três lados no fim e tinha que ter linhas retas.

Deste modo, tanto o Hélder como a Joana, apontam o ângulo reto da figura e os três lados do triângulo (características essenciais). Além disso, o Hélder refere os dois ângulos agudos e o número de vértices e a Joana salienta também a necessidade dos lados serem retos ("tinha que ter linhas retas"). De realçar que no meio da sua descrição a Leonor dá uma orientação de desenho algo confusa referindo que "depois em cima desenhava uma linha para baixo".

Na descrição do triângulo isósceles (triângulo intuitivo) a Gabriela e o Hélder recorreram à enumeração de características essenciais, nomeadamente lados (que o Hélder confundiu com arestas), ângulos e vértices (apenas o Hélder):

> Gabriela - Tinha três ângulos agudos, três lados e pronto, acho que era só isso.
>
> Hélder - Tem três ângulos agudos, três… três arestas e três vértices. E mais nada.

A Leonor aliou as características essenciais a perceções visuais:

> Leonor – Tem três lados, é uma figura geométrica, é dos triângulos e está direito.

Desta forma, a Leonor reconhece que o triângulo isósceles apresentado é uma "figura geométrica" e que tem três lados, mas depois recorre a vocabulário informal para descrever as suas características específicas: "está direito".

A Joana e o Manuel optaram por combinar as características essenciais da figura com instruções de desenho:

> Joana - Para desenhar um ângulo agudo e para desenhar outro ângulo agudo, assim (contorna a figura com o dedo). (…) E depois ao lado, colado, outro ângulo agudo até lá acima. Depois tinha de ter três lados e não podia ter retas longas (…).
>
> Manuel - Duas linhas… não, uma linha na horizontal e duas linhas… pois… Duas linhas um bocadinho tortas assim (mostra com o dedo).

Assim, a Joana reconhece que a figura tem três ângulos agudos e três lados, no entanto, o seu discurso é confuso, inclui vocabulário informal que se refere a perceções visuais relacionadas com o tamanho ("não podia ter retas longas") e para além da descrição das características da figura parece querer dar instruções de desenho ("para desenhar um ângulo agudo e para desenhar outro ângulo agudo (…) depois ao lado, colado, outro ângulo agudo até lá acima"). O Manuel não conseguiu referir nenhuma característica essencial da figura, optando apenas por tentar explicar instruções de desenho baseadas em perceções visuais da orientação dos lados ("uma linha na horizontal (…) duas linhas um bocadinho tortas").

O Ivo inicialmente recorreu a uma combinação entre as características da figura (referindo os ângulos agudos, os lados e os vértices ("bicos")), a nomeação e dar algumas instruções de desenho:

> Ivo - Dizia-lhe a ele para fazer (…) um ângulo agudo, mas não muito agudo, só um bocadinho agudo. Primeiro fazia num lado e depois fazia no outro, e depois se lhe parecia um triângulo e perguntava-lhe se tinha os três lados e os três bicos.

Quando pedi ao Ivo para não utilizar a palavra "triângulo", ele optou apenar por recorrer às características da figura.

> Ivo - Perguntava-lhe também se tinha os três bicos e os três lados e depois se lhe parecia alguma figura conhecida. (…)

Assim, embora o discurso inicial do Ivo relativamente ao triângulo isósceles apresentado seja algo confuso e misture diversas perspetivas, quando lhe peço para não utilizar a palavra triângulo ele opta por apenas referir características essenciais como o número de lados e de vértices ("bicos"). No entanto, analisando as suas palavras, fico com dúvidas se ele terá percebido que era para recomeçar todo o exercício de novo ou se o aluno terá apenas reformulado a parte final do seu discurso onde mostra intenção de questionar o amigo sobre a figura resultante. Assim, não sei se terá apenas repetido as características essenciais da figura por as considerar importantes.

Resumindo, na descrição destas duas figuras a maioria dos alunos continuou a recorrer à nomeação e/ou a salientar características fundamentais das figuras como o número de lados e de vértices. No entanto apenas o Ivo, a Gabriela, o Hélder e a Joana referiram e classificaram os ângulos internos dos triângulos para salientar as suas especificidades. Para além disso, tal como aconteceu com os alunos do 2º ano, nesta fase da entrevista em que foi dada uma maior liberdade de resposta aos alunos, o discurso destes tornou-se mais longo e mais confuso, havendo muitos que interrompiam as suas frases e raciocínios para as alterar e recomeçar. Quando as características essenciais e o vocabulário formal utilizado até então pelos alunos, não lhes chegava para descrever as figuras e continuar a explicar as suas impressões, os alunos pareciam recorrer a vocabulário informal (por exemplo: não era um triângulo normal (…) é assim inclinado"), a dar instruções de desenho utilizando vocabulário informal e até incorreto (por exemplo: "uma linha reta na vertical, outra linha reta na horizontal e outra linha reta na vertical (acena que não com a cabeça), ah… Na diagonal") e, no caso da Leonor, até a recorrer a impressões visuais (por exemplo: "é dos triângulos e está direito").

Os alunos do 4º ano demonstraram também alguma tendência nesta tarefa a não apresentarem apenas as características da figura, mas tentarem dar instruções de desenho, referindo-se a cada uma das componentes da figura (como os lados ou os ângulos internos) de forma separada e unitária, o que me deixa dúvidas acerca da compreensão destes alunos sobre os objetivos da tarefa e a sua capacidade de organizar de forma explícita a resolução e a resposta de tarefas mais complexas.

Relativamente às definições iniciais e finais de triângulos, apenas o Hélder não quis fazer alterações no final da entrevista, todos os outros alunos do 4º ano demonstraram vontade de fazer alterações e/ou acrescentar informação.

Nas definições iniciais de triângulo todos os alunos consideraram que um triângulo é uma "figura geométrica" ("forma" no caso da Leonor), não tendo nenhum dos alunos explicado o significado destas noções derivadas. Analisando a Planificação Trimestral fornecida pela Professora Titular de Turma, pode-se encontrar que o "Domínio/Subdomínio das Figuras geométricas" planeia, entre outros, como "Objetivo Geral – Reconhecer propriedades geométricas" e nos "conteúdos" aponta o estudo de "polígonos regulares e polígonos geometricamente iguais". Assim, embora se fale nas "figuras geométricas", não aparece o termo "forma", fico na dúvida sobre a origem da utilização deste termo, será que é o que é utilizado diariamente na sala de aula?

Para além disso a Gabriela identificou que têm "três vértices" e o Ivo e o Manuel que têm "três bicos (vértices)". O Hélder, a Joana e a Leonor, por seu lado, referiram que os triângulos têm "três lados". De salientar ainda que a Joana referiu que o triângulo "tem linhas retas" (figura 29).

Definições iniciais de triângulo	Definições finais de triângulo
Um triângulo é uma figura com 3 vértices. (Gabriela)	Um triângulo é uma figura com 3 ~~vértices~~ **lados**. (Gabriela)
Um triângulo é uma figura de 3 lados. (Hélder)	
Um triângulo é uma figura que tem 3 bicos. (Ivo)	Um triângulo é uma figura que tem 3 bicos **e 3 lados**. (Ivo)
Um triângulo é uma figura geométrica, tem 3 lados e tem linhas retas. (Joana)	Um triângulo é uma figura geométrica, tem 3 lados e tem linhas retas **e tem 3 ângulos que podem ser retos, agudos ou obtusos.** (Joana)
Um triângulo tem 3 lados e é uma forma geométrica. (Leonor)	Um triângulo tem 3 lados**,** ~~e~~ é uma forma geométrica**, não pode ter mais do que 3 lados e os lados têm de estar todos encaixados**. (Leonor)
Um triângulo é uma figura geométrica com 3 bicos. (Manuel)	Um triângulo é uma figura geométrica com 3 bicos **e 2 lados iguais e 1 diferente**. (Manuel)

Figura 29 - Definições iniciais e finais dos alunos de 4º ano

Analisando as definições iniciais apresentadas pelos alunos de 4º ano, pode-se considerar que todas são definições aceitáveis, dado que contêm propriedades suficientes para dar origem a todos os elementos do conjunto que se está a definir e limitar os exemplos dos mesmos. A definição da Joana, embora aceitável, não é económica, uma vez que apresenta informações redundantes, se considera que os triângulos são "figuras geométricas com 3 lados" não seria necessário referir que os mesmos têm de ser retos.

De salientar também que nas definições inicias, os alunos não estão ainda influenciados por toda a entrevista, pelo que esta será a informação mais fiel aos conhecimentos que estes alunos tinham à partida. Assim, nesta fase parece que os alunos para além de considerar que os triângulos são "figuras (ou formas) geométricas" reconhecem pelo menos uma característica fundamental referindo que têm de ter três lados (Hélder, Joana e Leonor) ou três vértices (Gabriela, e "bicos" no caso do Ivo e do Manuel).

Uma vez que no final da entrevista só o Hélder não quis alterar a sua definição e os restantes alunos acrescentaram às suas definições iniciais informações, todas estas definições finais se tornaram mais complexas.

Na sua definição final a Gabriela substitui o número de vértices pelo número de lados, o Ivo acrescentou ao número de vértices ("bicos") o número de lados, A Joana acrescentou à sua definição "e tem 3 ângulos que podem ser retos, agudos ou obtusos", a Leonor também acrescentou informação "não pode ter mais do que 3 lados e os lados têm de estar todos encaixados" e o Manuel acrescentou informações relativas às suas perceções visuais considerando os triângulos prototípicos "2 lados iguais e 1 diferente" (figura 29).

Analisando as definições finais de triângulo apenas a definição da Gabriela é uma definição simultaneamente aceitável e económica, dado que contem propriedades necessárias e suficientes para definir todos os elementos do conjunto dos triângulos, sem apresentar informações redundantes, sendo assim considerada uma definição correta.

A definição do Ivo contem informação aceitável, no entanto não é económica, dado que não delimita apenas um conjunto mínimo de propriedades necessárias e suficientes, bastaria nesta definição referir apenas o número de lados ou de vértices e não ambas as características.

A definição da Joana continua a ser uma definição com informação aceitável mas não económica, para além da informação redundante já existente na inicial, acrescentou-lhe ainda a informação relativamente aos ângulos, sendo uma figura geométrica composta por lados, teria de ser fechada, pelo que teria obrigatoriamente de formar ângulos internos convexos.

Na definição final de triângulo a Leonor para além da linguagem formal já utilizada na definição inicial, utiliza linguagem informal, dado que ao dizer que "os lados têm de estar todos encaixados" queria referir-se ao facto de os triângulos terem de ser figuras fechadas. Nesta definição a informação acrescentada é redundante, dado que já tinha referido que "um triângulo tem três lados", referir que "não pode ter mais do que três lados" é repetir informação. Assim, não foram acrescentadas novas propriedades à definição. As informações contidas nesta definição final de triângulo são necessárias e suficientes para definir o conceito, no entanto, esta não é uma definição económica, dado que há informação repetida na mesma.

Por fim, a definição final do Manuel, não é uma definição correta, dado que contem perceções visuais que se referem apenas a triângulos prototípicos, pelo que esta definição não dá origem a todos os elementos do conjunto dos triângulos que se estava a tentar definir.

Resumindo e analisando de uma maneira geral a informação contida nestas definições finais de triângulos dos alunos de 4º ano, todos os alunos para além de referirem o facto de os triângulos serem "figuras (ou formas) geométricas" reconhecem características fundamentais dos triângulos, como o número de lados e/ou de vértices (embora continue a haver alunos que se referem aos mesmos de forma informal como "bicos"). Além disso, alguns alunos, provavelmente influenciados pala análise dos triângulos realizada ao longo da entrevista, quiseram acrescentar à sua definição outras informações, como no caso da Joana que quis referir os ângulos e as suas possíveis classificações e a Leonor que quis salientar que os triângulos têm de ser figuras fechadas. Além disso, o Manuel quis salientar que os triângulos têm “2 lados iguais e 1 diferente”, sendo que esta informação que se deve basear nas suas perceções visuais de triângulo prototípicos, não deixa de ser contraditória com muitas das identificações que o aluno fez ao longo da entrevista, dado que considerou que os exemplos apresentados de triângulos equiláteros e escalenos também eram triângulos e que, ele próprio, no início da entrevista apresentou triângulos destes como exemplos.

Estas definições utilizam classificações partitivas, listando diversas propriedades dos triângulos mas não estabelecendo qualquer relação entre eles, sendo assim os seus atributos considerados separadamente.

CAPÍTULO 5

SÍNTESE, CONCLUSÕES, RECOMENDAÇÕES E LIMITAÇÕES DO ESTUDO

Neste capítulo é primeiramente apresentada uma pequena síntese dos princípios orientadores deste estudo, seguindo-se a apresentação das principais conclusões do mesmo, sendo estas delineadas de modo a responder às questões de investigação traçadas inicialmente, apresentando-se uma descrição e enumeração resumida dos dados analisados, mas também uma interpretação desses dados quer através de inferências realizadas pela sua análise quer à luz da pesquisa bibliográfica efetuada. Por fim são referidas algumas limitações deste estudo e são lançadas algumas ideias e sugestões decorrentes dos resultados obtidos para futuras investigações.

5.1. Síntese do estudo

Esta investigação teve como principal objetivo estudar e compreender quais os conceitos que os alunos de 1º Ciclo têm sobre triângulos e que definições utilizam. Tendo em conta este objetivo foram delineadas as seguintes questões de investigação:

I. Compreender quais são os exemplos e contraexemplos intuitivos e não intuitivos para os alunos de 2º e 4º anos;
II. Compreender que propriedades os alunos de 2º e 4º anos identificam em triângulos;
III. Identificar quais as definições de triângulo utilizadas pelos alunos de 2º e 4º anos;
IV. Identificar quais as diferenças de conhecimento das figuras que os alunos apresentam no 2º ano (meio do 1º ciclo) e no 4º ano (fim do 1º ciclo).

Atendendo à sua natureza este estudo teve como base de orientação o paradigma interpretativo e a utilização de técnicas de investigação de índole qualitativa na recolha e análise de dados. Esta investigação tem o formato de um estudo de caso múltiplo, apresentando dois casos, de seis alunos cada – o dos alunos do 2º ano e o dos alunos do 4º ano. O cariz interpretativo desta investigação permite não só a análise dos conteúdos recolhidos, mas também a sua análise através de inferências que procuram analisar e comparar os dados recolhidos e analisados com outras situações já estudadas e com teorias existentes e apreendidas na revisão da literatura.

5.2. Conclusões do estudo

5.2.1. Exemplos e contraexemplos intuitivos e não intuitivos para os alunos de 2º e 4º anos

Para que as crianças construam conceitos geométricos, o NCTM (1991) salienta que é fundamental que os alunos analisem exemplos e contraexemplos de uma dada categoria. Sendo que em Geometria um contraexemplo de uma categoria, será uma figura em que falte pelo menos um atributo fundamental do conceito que está a ser estudado e tendo os contraexemplos como função esclarecer os limites do conceito (Tsamir, Tirosh & Levenson, 2008). Além disso, de entre os exemplos e contraexemplos de uma dada categoria, podem identificar-se alguns que são considerados prototípicos, por serem considerados rápida e intuitivamente aceites como representativos (ou não) de um conceito, sem que haja necessidade de o justificar. De salientar que embora o estudo de figuras prototípicas seja importante no início do estudo das categorias, por permitir rápidas associações (por exemplo, das figuras aos nomes que as categorizam), não são suficientes, dado que podem levar a uma imagem muito limitada do conceito em estudo (Hershkowitz 1989; Schwarz & Hershkowitz 1999; Wilson 1990 citados por Tsamir, Tirosh & Levenson, 2008) ou impedir o reconhecimento de quais são realmente as propriedades essenciais que definem a categoria (Edwards & Harper, 2010).

No início das entrevistas realizadas todos os alunos conseguiram apresentar diferentes exemplos e contraexemplos de triângulos (não tendo sido utilizada a palavra "contraexemplo" mas sim a expressão "uma figura que não seja um triângulo") em quatro suportes diferentes (desenhos numa folha de papel branco, representações no geoplano, desenhos em papel ponteado e construções com barras *Geo Strips*).

Tendo em conta a análise de todos os exemplos de triângulos apresentados pelos alunos nas folhas de papel branco no início das entrevistas, numa altura em que os alunos não se encontravam ainda influenciados pelas restantes perguntas da entrevista, os triângulos acutângulos parecem ser os mais intuitivos tanto para os alunos de 2º como para os do 4º ano entrevistados, dado que foram estes os que foram apresentados em maior número. No entanto, enquanto os alunos de 2º ano apresentaram maioritariamente triângulos escalenos, os alunos de 4º ano desenharam mais triângulos isósceles. É importante salientar que os desenhos dos alunos de 2º ano realizados em folhas de papel branco foram realizados sem o auxílio de material de desenho (régua e esquadro) e tinham um traçado muito próximo de triângulos isósceles, triângulos que poderiam ser considerados prototípicos pela sua simetria.

Analisando os exemplos e contraexemplos apesentados em todos os diferentes suportes, a maioria dos triângulos apresentados pelos alunos do 2º ano encontravam-se com uma orientação típica, enquanto os dos alunos de 4º ano se apresentavam com diferentes orientações nos diferentes materiais. Enquanto apresentavam os seus exemplos os alunos de 2º ano mostraram muitas vezes preocupação em salientar que iam desenhar os seus triângulos “deitados”, “de lado” ou “de pernas para o ar” para que estes fossem diferentes dos que já haviam desenhado anteriormente, evidenciando assim que consideravam que ao mudar de orientação as figuras se tornavam diferentes.

No que à classificação dos seus ângulos internos diz respeito além da maioria dos triângulos acutângulos apresentados, os alunos de 2º ano apresentaram também alguns exemplos de triângulos retângulos no geoplano. Nenhum aluno do 2º ano apresentou como exemplo um triângulo obtusângulo, pelo que, parece que estes triângulos não são intuitivos para estes alunos. Os alunos de 4º ano para além dos predominantes exemplos de triângulos acutângulos, apresentaram exemplos de triângulos retângulos e obtusângulos nos diferentes suportes utilizados nas entrevistas. Em ambos os anos só apareceram exemplos de triângulos retângulos no geoplano o que pode ter acontecido por influência do material manipulável utilizado, já que o geoplano utilizado na entrevista tinha uma malha quadrada.

Se for tida em conta a classificação segundo o comprimento dos lados dos triângulos, os alunos de 2º ano apresentaram também, para além dos triângulos escalenos, alguns triângulos isósceles, nomeadamente no geoplano. No caso dos alunos de 4º ano, aparecem quase em igual número exemplos de triângulos isósceles e escalenos, pelo que parece que ambos os tipos de triângulos são igualmente intuitivos para estes alunos. Os alunos de 2º ano só apresentaram exemplos de triângulos equiláteros com as barras *Geo Strips* e no caso dos alunos de 4º ano apenas um aluno apresentou um exemplo destes triângulos no mesmo material, sendo que este facto poderá ter ocorrido, uma vez mais, por influência do material manipulável utilizado. Saliente-se que este tipo de triângulos só era possível de apresentar com as barras *Geo Strips* ou nas folhas de papel branco, não sendo possível nem no geoplano nem nas folhas de papel ponteado, cujas malhas eram quadradas.

Relativamente aos contraexemplos apresentados pelos alunos, a grande maioria são quadriláteros, havendo uma predominância dos quadrados e retângulos, embora nos diferentes suportes surjam também outros quadriláteros irregulares. Assim, parece que para a maioria dos alunos os quadriláteros serão os contraexemplos de triângulos mais intuitivos. De salientar que nas folhas de papel branco os alunos de 2º ano apresentaram algumas figuras que não são polígonos (dois círculos e um coração), que não se repetiram nos outros suportes, embora isso possa ter acontecido porque os restantes três materiais utilizados não o permitiam. No caso dos alunos de 4º ano, foram apresentados alguns hexágonos nos diferentes suportes, parecendo que para estes alunos também estas figuras são intuitivamente contraexemplos de triângulos.

Saliente-se que a utilização de materiais manipuláveis é um meio concreto que ajuda as ideias a terem sentido (Clements & McMillen, 1996) e, no caso do presente estudo, permitiu aos alunos representarem as suas ideias geométricas (Gravemeijer, 1991) nomeadamente sobre exemplos e contraexemplos de triângulos. Embora a utilização de diferentes suportes de representação das figuras tenha ajudado à diversificação das escolhas dos alunos, os mesmos suportes podem também ter, de alguma forma, influenciado as suas escolhas dado que apenas a folha de papel branco dava uma total liberdade de desenho. Saliente-se, uma vez mais, que o geoplano e as folhas de papel ponteado utilizadas eram de malha quadrada e que as barras de *Geo Strips*, embora oferecessem um variado número de barras de diferentes cores e tamanhos, eram em número limitado.

Depois da apresentação inicial de exemplos e contraexemplos de triângulos, as entrevistas passaram a focar-se na identificação de figuras, em primeiro lugar em cartões individuais e seguidamente em imagens compostas. As figuras apresentadas foram baseadas em Tsamir, Tirosh e Levenson (2008) e compreendiam, segundo estes autores sete exemplos e sete contraexemplos de triângulos intuitivos e não intuitivos.

Os triângulos isósceles e equilátero (considerados intuitivos devido a serem muitas vezes utilizados como protótipos de triângulos e devido à sua simetria) foram devidamente identificados nos cartões individuais como exemplos tanto pelos alunos de 2º como pelos de 4º ano. Para se justificarem os alunos de 2º ano recorreram apenas à contagem do número de lados e os de 4º ano à contagem do número de lados e/ou vértices, não tendo necessidade de analisar qualquer outra propriedade. Assim, parece que estes triângulos são realmente exemplos intuitivos para todos os alunos entrevistados. Estes alunos mantiveram posteriormente as suas identificações e justificações durante a análise das imagens compostas, com exceção da Emília, que não identificou nenhum triângulo na imagem (desenho) composta. Esta aluna, que anteriormente na apresentação dos seus próprios exemplos de triângulos privilegiou a contagem do número de lados para identificar as figuras e embora tenha conseguido identificar os lados e os vértices das figuras em análise, privilegiou em detrimento destas propriedades, a orientação das figuras e perceções visuais, optando por fazer uma comparação com as figuras prototípicas em detrimento da análise de propriedades. Hannibal (1999) salienta que este é um acontecimento normal no início da escolaridade, havendo nesta altura alunos que reconhecem um atributo fundamental, mas rejeitam a figura por esta ter um outro atributo não fundamental.

Relativamente aos triângulos *isósceles de lado, equilátero ao contrário*, retângulo, acutângulo e obtusângulo considerados não intuitivos (quer pela sua forma diferente da dos protótipos, quer pela sua orientação), quatro alunos de 2º ano e quatro alunos de 4º ano não mostraram qualquer dificuldade em os identificar como exemplos de triângulos nos cartões individuais, recorrendo apenas, e uma vez mais, à contagem do número de lados (e/ou de vértices no caso dos alunos de 4º ano) para se justificarem. No entanto, a aluna Diana (2º ano) sentiu necessidade de colocar todas estas figuras em posição prototípica e recorreu para além da contagem do número de lados a perceções visuais para se justificar (recorrendo a atributos não fundamentais como o tamanho "é um bocadinho mais baixa" ou à sua aparência global "é um bocadinho mais fininho"), pelo que parece que para ela estas figuras não parecem ser intuitivas. Também os alunos Hélder e Manuel (4º ano) sentiram necessidade de rodar os cartões e colocar os *triângulos isósceles de lado* e *equilátero ao contrário* em posição prototípica, pelo que, para eles estas duas figuras não terão tido uma análise intuitiva. Por fim, é de salientar que a aluna Emília (2º ano) não identificou nenhuma destas figuras como sendo exemplos de triângulos, preferindo tal como na já referida análise das imagens compostas, dar relevo primordial à orientação das figuras por comparação com a sua imagem mental de triângulos prototípicos (assim, explicou que as figuras não eram triângulos porque, por exemplo, "está deitado para baixo" ou "é muito fininha"). No caso da identificação destes exemplos de triângulos não intuitivos na imagem (desenho) composta todos os alunos mantiveram as suas identificações e justificações.

Relativamente aos contraexemplos quadrado, hexágono e elipse considerados por Tsamir, Tirosh e Levenson (2008) como intuitivos (incluindo-se aqui dois polígonos prototípicos e intuitivos que não são triângulos e um figura que não é um polígono) todos os alunos os identificaram corretamente como não sendo triângulos. No entanto, analisando as justificações dadas pelos alunos de 2º e 4º anos, apenas o quadrado e o hexágono parecem ser intuitivos, dado que para os identificarem os alunos recorreram apenas, tal como anteriormente, ao número de lados (e/ou vértices no caso dos alunos de 4º ano), apontando assim propriedades já anteriormente consideradas fundamentais, com exceção do Ivo que nomeou o hexágono. No caso da elipse, embora esta tenha sido corretamente identificada como não sendo um triângulo, tenho dúvidas se será uma figura intuitiva para estes alunos, dado que nas suas fundamentações os alunos se dividiram entre referir o facto de esta não ter lados e recorrer a linguagem informal para explicar as suas perceções visuais (por exemplo: "parece uma bola" ou "não tem nenhuma parte bicuda"). Mais tarde durante a análise da imagem (desenho) composta todos os alunos mantiveram as suas identificações e continuou a ser relativamente à elipse que surgiram as principais dúvidas na forma de justificar a escolha. De salientar que ao longo das entrevistas há vários alunos que justificam as suas opções recorrendo à nomeação das figuras, parecendo que para eles isso é justificação suficiente, por exemplo, para além da nomeação do Ivo já referida, o aluno André (2º ano) na análise da imagem (desenho) composta optou por nomear o quadrado e a elipse (figura a que chamou de “círculo”), parecendo que para estes alunos o facto de a figura ter outro nome é justificação suficiente para não ser um triângulo.

Os contraexemplos não intuitivos *triângulo zig zag*, pentágono, *triângulo aberto* e *triângulo arredondado* (que compreendem figuras que visualmente podem parecer triângulos e figuras que “são quase” triângulos mas a que faltam um atributo para o serem) foram as figuras que mais dúvidas suscitaram aos alunos, tanto nos cartões individuais como na imagem (desenho) composta, tendo alguns sido erradamente identificados como triângulos. O *triângulo zig zag e o pentágono* foram devidamente identificados como não sendo um triângulo por quase todos os alunos (a exceção foi o André, do 2º ano, que considerou que o pentágono tinha “três partes compridas” não dando relevância ao facto de estas não serem retas). Os alunos de 4º ano continuaram apenas a basear a sua identificação no número de lados e/ou vértices, parecendo assim que estas figuras também têm uma identificação intuitiva para eles; no caso dos alunos de 2º ano a avaliação foi pelo seu número de lados, vértices ou pela sua aparência global, não parecendo ser, por isso, intuitivas para estes alunos a identificação destas figuras. O *triângulo aberto* também foi devidamente identificado como não sendo um triângulo pela maioria dos alunos (a exceção foi, uma vez mais o André do 2º ano, que privilegiou a contagem dos três lados em detrimento do facto de a figura não ser fechada), tendo os alunos de 2º ano referenciado o seu número de lados e considerado que a figura estava inacabada enquanto que os alunos do 4º ano referiram que a figura não era fechada ou que lhe faltava um vértice. Esta figura suscitou mais dúvidas nas alunas Beatriz e Filipa (2º ano) durante a análise da imagem (desenho) composta, no entanto acabaram por identificar que a figura não era um triângulo porque lhe faltava um vértice (embora se referindo ao mesmo com linguagem informal: “bico” e “biquinhos”). O *triângulo arredondado* foi erradamente identificado como sendo um triângulo por todos os alunos de 2º ano (que privilegiaram a contagem de três lados e ignoraram o facto de a figura não ter vértices) e devidamente identificada como não sendo um triângulo pela maioria dos alunos de 4º ano que identificaram a falta de vértices na figura (a exceção foi o Hélder que considerou apenas que a figura tinha três lados). De salientar que, independentemente da identificação correta ou não, estas foram as figuras que mais dúvidas suscitaram aos alunos, não parecendo, por isso, ser intuitivos.

Assim, a maioria dos alunos entrevistados já parecem ter algumas noções de classificação, no que aos triângulos diz respeito, dado que conseguem incluir (ou excluir) na classe dos triângulos as diferentes figuras apresentadas e em diferentes situações, recorrendo à análise das suas propriedades (Ponte & Serrazina, 2000). Há no entanto muitos alunos que recorrem a atributos não fundamentais para avaliar as figuras e alguns que ainda não conseguem ter em atenção vários atributos ao mesmo tempo, privilegiando a análise de apenas um ou recorrendo apenas às suas perceções visuais.

Comparando os exemplos de triângulos apresentados pelos alunos com as identificações que fizeram dos triângulos apresentados para análise, pode verificar-se que é coincidente a identificação dos triângulos acutângulos com um desenho prototípico como sendo aqueles que os alunos mais intuitivamente identificam. No entanto, é interessante verificar que embora os alunos tenham apresentado muito poucos triângulos equiláteros como exemplos de triângulos, não apresentaram qualquer dificuldade em o identificar como sendo um exemplo de triângulo, independentemente da sua orientação nos cartões individuais e na imagem composta (a única exceção foi a Emília). No entanto, é de salientar também que a maioria dos alunos não apresentou dificuldades em identificar os restantes triângulos (não intuitivos) apresentados para análise, embora só alguns alunos tenham apresentado exemplos idênticos, nomeadamente apresentando exemplos com orientações e formas diferentes das prototípicas.

Já no que aos contraexemplos diz respeito, efetivamente é coincidente a apresentação e a identificação de quadriláteros e hexágonos (no caso do 4º ano) como sendo os mais intuitivos. No entanto, embora os alunos de 2º ano tenham apresentado alguns contraexemplos de triângulos que não eram polígonos, todos os alunos, não tendo dificuldade em perceber que a elipse não é um triângulo, demonstraram dificuldade em explicar o porquê. Os contraexemplos não intuitivos apresentados nos cartões individuais e na imagem composta serão efetivamente pouco intuitivos para os alunos dado que nenhum apresentou figuras idênticas quando no início da entrevista lhes foram pedidos.

5.2.2. Propriedades que os alunos de 2º e 4º anos identificam em triângulos

Hannibal (1999) destaca que é no início da escolaridade formal que os alunos definem os limites e as características das figuras para definir os seus conceitos de figuras. Assim, ao longo dos primeiros anos de escolaridade os alunos têm de aprender a distinguir entre os atributos fundamentais para classificar uma figura, como o número de lados e ângulos, dos não fundamentais para a categorização, como o tamanho, a proporção, a orientação ou a simetria no caso dos triângulos.

No início da entrevista, enquanto desenhavam os exemplos e contraexemplos de triângulos, os alunos de 2º ano optaram por justificar as suas escolhas recorrendo maioritariamente ao número de lados, caso as figuras tivessem três lados eram triângulos, caso não tivessem não eram. Assim, desde o início da entrevista estes alunos parecem identificar o número de lados como uma propriedade fundamental das figuras. De salientar que todos os alunos utilizaram a linguagem formal ("lado") para dominar esta propriedade, exceto o aluno André que se referiu aos lados, ao longo de toda a entrevista como "partes compridas" ou "partes curtas". No caso dos alunos de 4º ano, para além de recorreram ao número de lados para justificar as suas escolhas, houve alunos que também se referiram ao número de vértices (embora, nesta altura, todos tenham utilizado linguagem informal referindo-se aos mesmos como "bicos", "biquinhos" ou "pontas"), identificando assim uma outra propriedade fundamental das figuras. Além disso, alguns alunos de 2º ano recorreram à nomeação de alguns dos quadriláteros apresentados, parecendo que para eles o simples facto de as figuras terem um nome diferente já era uma justificação suficiente para não serem triângulos. No caso da aluna Joana (4º ano) houve também desde o início uma grande preocupação em referir que os lados dos triângulos tinham de ser retos (por exemplo: têm três lados e têm linhas retas").

Também desde o início da entrevista todos os alunos do 2º ano, durante a apresentação dos seus desenhos, foram dando relevância a características não fundamentais como o tamanho (por exemplo, quando a Diana explicou que os seus triângulos no papel ponteado eram diferentes porque "um é maior e o outro é mais pequeno" ou quando diz que os triângulos isósceles e equilátero apresentados como exemplos intuitivos "e é alto") ou a orientação da figura (por exemplo, a Filipa justificou várias vezes que os triângulos que apresentou eram diferentes "porque um está de pé e o outro está deitado") recorrendo, assim, a linguagem informal e a perceções visuais. Analisando as entrevistas, esta linguagem informal parece surgir principalmente quando o número de lados não lhes permitia fazer uma justificação (como quando pergunto porque é que os dois triângulos apresentados são diferentes) e quando os alunos não sabem nomear de forma correta as figuras apresentadas (por exemplo, a Beatriz chamou ao seu círculo "bola").

Mais tarde, enquanto analisavam cada um dos cartões individuais e a imagem (desenho) composta com os exemplos e contraexemplos de triângulos, quando a contagem do número de lados não chegou para realizar as identificações dos triângulos, as alunas Beatriz, Diana e Emília do 2º ano referiram-se pela primeira vez aos vértices das figuras, embora recorrendo a linguagem informal como "ponta", "partes bicudas", "biquinhos" ou "bicos". Uma vez mais, quando a identificação das propriedades que conhecem não lhes chegava, estes alunos de 2º ano, voltaram a recorrer a perceções visuais (por exemplo: é um bocadinho mais fininho") e a atributos não fundamentais, como a orientação (por exemplo: "porque está virado para o lado") e o tamanho (por exemplo: "uma parte é mais comprida e outra é um bocadinho mais curta") para se justificarem e, nestes casos, recorreram fundamentalmente a linguagem informal. Durante a identificação dos exemplos e contraexemplos de triângulos os alunos de 4º ano continuaram a privilegiar a contagem do número de lados e/ou vértices, no entanto, quando esta informação era insuficiente ou mais difícil de analisar os alunos também tiveram tendência a recorrer a algumas perceções visuais (por exemplo: "em vez de ser fininha") e continuaram a utilizar alguma linguagem informal, nomeadamente para se referirem aos vértices (por exemplo: "porque tem muitos bicos"). Na identificação destas figuras alguns alunos recorreram à nomeação parecendo dar a entender que o simples facto de a figura ter um nome diferente era justificação suficiente para não ser considerada um triângulo.

Ao analisarem e compararem as diferentes figuras dispersas numa folha, surgiu pela primeira vez a referência a um ângulo interno dos triângulos, neste caso, o Hélder identificou o ângulo reto dos triângulos retângulos, "têm três lados e têm um ângulo reto".

Para a comparação do triângulo isósceles com o hexágono (exemplo e contraexemplo intuitivo), os alunos de 2º ano recorreram inicialmente à comparação dos lados. Além disso a Filipa e o André (pela primeira vez) identificaram um diferente número de vértices (a que se referiram com linguagem informal "bicos" e "biquinhos") e a Beatriz e o André (uma vez mais) recorreram à nomeação das figuras para justificar as suas diferenças. Mostrando dificuldades em continuar as suas análises, todos estes alunos recorreram depois a vocabulário informal (e até incorreto) como "porque vai menos vezes na diagonal e tem um biquinho" e a impressões visuais como "é um bocadinho mais largo". Estes alunos de 2º ano demonstraram muitas dificuldades em encontrar semelhanças entre as figuras e apenas alguns identificaram que ambas tinham "partes bicudas" ou "biquinhos" (vértices) e o André identificou que ambas tinham "partes longas". Os alunos de 4º ano também consideraram todos inicialmente que estas figuras eram diferentes, identificando o número de lados como sendo uma diferença entre elas. Além disso, três alunos identificaram o número de vértices de cada figura (uma utilizando vocabulário correto e dois informal) e três alunos recorreram à nomeação das figuras (embora dois deles tenham nomeado o hexágono de pentágono). Além disso o Hélder (de forma espontânea) e a Gabriela (quando questionada) identificaram de forma correta os ângulos internos dos dois triângulos, a Gabriela e a Joana recorreram a vocabulário informal para salientarem que "o espaço lá dentro é diferente" e que as figuras são diferentes na "forma". Relativamente às semelhanças, quatro alunos do 4º ano não encontraram igualdades entre as figuras, apenas dois referiram que ambas têm lados e um deles acrescentou ainda que ambas têm "bicos" (vértices).

Na comparação do triângulo isósceles e com o triângulo obtusângulo (exemplos intuitivo e não intuitivo) as opiniões dos alunos de 2º ano foram divididas entre considerar inicialmente as figuras iguais ou diferentes. Independentemente da posição inicial, todos os alunos compararam as suas semelhanças e diferenças, a maioria dos alunos identificou que ambas tinham o mesmo número de lados e quatro alunos (o Carlos pela primeira vez) referiram-se à igualdade do número de vértices (continuando a utilizar linguagem informal para se referirem aos mesmos), dois alunos referiram o facto de ambas as figuras terem o mesmo nome ("triângulos"). De salientar que a Emília foi consistente com as suas identificações de exemplos e contraexemplos de triângulos, e considerou que apenas o triângulo isósceles era um triângulo, considerando que o triângulo obtusângulo era "um triângulo meio cortado ao meio, depois basta fazer o resto". Para além da identificação destas propriedades, os alunos de 2º ano recorreram, uma vez mais, a impressões visuais e a vocabulário informal para se expressar considerando, por exemplo, que "uma está inclinada (…) e a outra está de pé" (André), ou que "este biquinho (…) é mais fininho que este" (Emília). Relativamente à comparação entre os dois triângulos todos os alunos do 4º ano as consideraram iguais por terem o mesmo número de lados, além disso, quatro alunos nomearam as figuras como sendo triângulos e dois alunos referiram o facto de terem o mesmo número de "bicos" (vértices), considerando assim, inicialmente atributos fundamentais. Para analisar as suas diferenças todos os alunos de 4º ano recorreram inicialmente a linguagem informal como, por exemplo, "esta (…) está torta e esta (…) está direita" (Leonor) ou " esta (…) está inclinada para cá e esta aqui (…) é a direito" (Ivo). Apenas uma aluna analisou os ângulos internos por iniciativa própria, os restantes só o fizeram depois de eu lhes sugerir essa análise. Todos os alunos de 4º ano identificaram e classificaram então os ângulos internos da figura, tendo dois alunos demonstrado algumas dificuldades nesta tarefa.

Por fim, durante a descrição dos triângulos retângulo e isósceles, os alunos de 2º ano continuaram a recorrer à nomeação das figuras e a apontar características fundamentais como o número de lados e de vértices (embora continuando a utilizar vocabulário informal para esta propriedade). A maioria dos alunos continuou a apontar perceções visuais relacionadas, por exemplo, com o tamanho dos lados, e a recorrer a linguagem de uso corrente e informal para se expressar, nomeadamente comparando os triângulos com objetos (por exemplo, escadas, setas e telhados). De salientar que a Emília que anteriormente havia considerado que o triângulo retângulo não era um triângulo "porque está virado para o lado", desta vez o considerou um triângulo. Relativamente às descrições realizadas pelos alunos de 4º ano dos triângulos retângulo e isósceles, continuaram a ser salientadas propriedades fundamentais como o número de lados e vértices e a nomeação das figuras. Quatro alunos classificaram os ângulos internos dos triângulos apresentados para especificar as suas características. Depois de salientarem as características formais que conheciam, muitos alunos recorreram a perceções visuais (por exemplo, "está direito") e a vocabulário informal e até incorreto para continuar a sua descrição (por exemplo, "uma linha reta na vertical, uma linha reta na horizontal e outra linha reta (…) na diagonal"). Além disso, estes alunos, mostraram tendência não só a apresentar características das figuras, mas também a dar instruções de desenho, referindo-se às diferentes componentes da figura (como os lados ou os ângulos internos) de forma separada e unitária, deixando-me algumas dúvidas sobre a compreensão destes alunos sobre os objetivos da tarefa e a sua capacidade de organizar de forma explícita a resolução e a resposta de tarefas mais complexas.

Ao longo de toda a entrevista o Manuel (4º ano) mostrou grande preocupação em salientar diversas vezes que os triângulos tinham dois lados iguais e um terceiro mais pequeno, demonstrando necessidade de incluir sempre nas suas explicações as suas perceções visuais e enfatizando sempre a sua imagem mental de triângulo prototípico, dando relevância ao tamanho dos lados.

Analisando os conhecimentos que os alunos demonstraram sobre as figuras é claro que os alunos de 2º ano ainda utilizam muita linguagem informal e perceções visuais que desenvolveram intuitiva e informalmente ao longo dos primeiros anos de vida, nomeadamente, ainda antes de entrarem para o ensino formal (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999), já possuem no entanto alguns conhecimentos formais que terão aprendido nos primeiros anos de escolaridade, conseguindo identificar propriedades fundamentais das figuras como o número de lados e de vértices. Por outro lado, os alunos de 4º ano demonstram um maior conhecimento formal das propriedades das figuras (reconhecendo atributos fundamentais como o número de lados e vértices e conseguindo identificar e classificar os ângulos internos das figuras) embora, muitas vezes, ainda recorram à linguagem informal e às perceções visuais para se expressar. Assim, parece que a adequação da linguagem e dos conceitos geométricos será realmente realizada de um modo gradual, havendo uma crescente formalização da linguagem à medida que os conceitos vão sendo compreendidos ao longo dos anos de escolaridade (Robichaux & Rodrigue, 2010).

É também possível verificar com os dados recolhidos, que os alunos de 2º ano já têm consciência de que as figuras têm propriedades, embora ainda se concentrem muito nas características gerais das figuras (NCTM, 2007) e tenham dificuldades em distinguir quais são as propriedades fundamentais e as que não o são. Por outro lado, os alunos do 4º ano já têm uma capacidade de raciocínio mais desenvolvida, já conseguem identificar e descrever mais propriedades fundamentais e utilizam mais vocabulário próprio associado a estas figuras e propriedades. No entanto, estes alunos, ao longo das entrevistas, oscilaram muitas vezes entre a utilização de vocabulário formal e informal para se referirem a cada uma das propriedades. Ou seja, embora estes alunos em diversas alturas da entrevista tenham recorrido à linguagem formal que nomeia as propriedades, continuaram muitas vezes a recorrer a linguagem informal para nomear essas mesmas propriedades (por exemplo, embora muitos alunos tenham referido no início da entrevista a existência de "bicos" e "biquinhos", mais tarde referiram-se aos mesmos como "vértices", ou seja, com vocabulário formal).

Assim, no que à linguagem e comunicação diz respeito ao contrário do que seria expectável não há grandes diferenças, tanto os alunos de 2º como os de 4º ano, demonstraram dificuldades na verbalização das suas ideias, nomeadamente em organizar e comunicar as suas ideias quando as perguntas eram menos diretivas e objetivas e permitiam uma maior liberdade de resposta, nomeadamente perante a comparação de duas figuras (triângulo isósceles e hexágono, e triângulos isósceles e obtusângulo) e a descrição dos triângulos (retângulo e isósceles). Nesta altura os alunos alongaram os seus discursos, tornando-os mais confusos, nomeadamente porque não tentaram primeiro analisar as propriedades e organizar o seu discurso. Assim, iniciavam logo as suas respostas e à medida que iam analisando as figuras mostravam um discurso com muitas hesitações: iniciavam uma frase e a meio tentavam mudá-la ou voltavam várias vezes atrás para corrigir a informação que já tinham transmitido.

Os dados recolhidos neste estudo vão também de encontro ao que o NCTM (2007) salienta como essencial para estes anos de escolaridade relativamente às capacidades de raciocínio e argumentação. Tal como é apontado por esta identidade, os alunos mais novos demonstraram já alguma capacidade de verbalizar e descrever as suas conjeturas, embora ainda recorrendo muito ao seu próprio vocabulário e recorrendo a exemplos concretos, enquanto os alunos mais velhos já conseguiram recorrer a mais vocabulário formal e baseado em conhecimentos matemáticos.

5.2.3. Definições de triângulo utilizadas pelos alunos de 2º e 4º anos

Villiers, Gonender e Petterson (2009) apresentam as definições como sendo a base da comunicação, da reorganização dos antigos conhecimentos e da construção dos novos conhecimentos, pelo que, é ao estabelecer as conexões entre o que já se sabe com as novas aprendizagens que estas fazem sentido (Roberts & Borum, 2012). Villiers et al. (2009) salienta, no entanto, que os conceitos matemáticos são um grande desafio para alunos e professores, dado que requerem a utilização de termos técnicos e exigem uma síntese imediata e sólida do conceito. Além disso, Edwards e Harper (2010) salientam que é importante que os alunos compreendam a importância das definições em Matemática e consigam reconhecer a necessidade de ser claros nas suas definições, percebendo que é importante recorrer a linguagem técnica e formal em detrimento das imprecisas e ambíguas palavras comuns que podem levar a erros de interpretação.

Todos os alunos apresentaram no início da entrevista uma definição de triângulo (que foi registada numa folha) e a todos foi dada a oportunidade de a modificar ou manter no final da entrevista, apenas dois alunos, um do 2º e outro do 4º ano, optaram por não fazer alterações.

Relativamente às definições iniciais dos alunos de 2º ano, cinco dos alunos referem logo à partida que os triângulos têm três lados, parecendo que para estes alunos esta é a principal característica de um triângulo, no entanto, será importante salientar que dois destes alunos recorrem a linguagem informal ("partes compridas" e "partes") para se referirem aos lados. Para além da referenciação ao número de lados muitos alunos recorrem a linguagem informal e dão relevância nas suas definições a propriedades não fundamentais como o tamanho ("partes compridas") e a perceções visuais que resultam da comparação de triângulos com objetos ("chapéu de palhaço") ou da tentativa de descrever a orientação dos lados das figuras ("um risco de lado que vai para cima, outro em baixo e outro que também é em diagonal do outro lado para cima"). Em três destas definições iniciais dos alunos do 2º ano aparece o termo "forma" (geométrica), não tendo sido explicado por nenhum aluno o significado desta forma derivada (que segundo Veloso (2006) é um noção que não é intuitivamente aceite e que poderia ser explicada através de noções primitivas, essas sim intuitivamente aceites e que, como tal, não precisam de ser explicadas), no entanto, dado a sua frequente utilização fico com a perceção de que esta talvez seja recorrente na sala de aula. Assim, apenas duas destas definições podem ser consideradas aceitáveis dado que contêm elementos suficientes para dar origem a todos os elementos do conjunto que se está a definir e limitar os elementos dos mesmos (Villiers et al., 2009) e económicas dado que não apresentam informações redundantes (Villiers, 1994). As restantes são todas incorretas ou por não apresentarem informação suficiente para identificar todos os elementos em estudo (Villiers et al, 2009), ou porque contêm informações baseadas em perceções visuais de triângulos prototípicos que não se adequam a todos os triângulos existentes.

Relativamente às definições finais de triângulo todos os alunos do 2º ano recorrem à nomeação da figura ("triângulo") e referem o número de lados dos triângulos (propriedade essencial) mas nenhum refere o número de vértices, embora muitos os tenham referido ao longo da entrevista. Por outro lado, dois alunos referem que os triângulos são "bicudos", não parecendo, no entanto, que relacionam esta característica com os vértices propriamente ditos ou o seu número mesmo que de forma informal. Todas as definições finais, para além da nomeação e do número de lados, incluem perceções visuais e linguagem informal por comparação da figura com objetos (por exemplo, "telhado") ou por comparação com imagens prototípicas que se relacionam com os triângulos isósceles e a sua orientação típica. Assim, nenhuma destas definições pode ser considerada aceitável.

Relativamente às definições iniciais de triângulo dos alunos de 4º ano, todos os alunos referem que os triângulos são "figuras (ou formas) geométricas" e reconhecem propriedades essenciais nestas figuras, como o número de lados e/ou vértices (embora para os vértices haja vários alunos que utilizam linguagem informal como "bicos"). Cinco destas definições iniciais podem ser consideradas aceitáveis e económicas. Assim, apenas uma das definições iniciais das apresentadas pelos alunos do 4º ano, embora seja aceitável, não pode ser considerada económica por conter informação redundante.

Relativamente às definições finais de triângulos dos alunos de 4º ano apresentam para além da nomeação das figuras, a referenciação a propriedades fundamentais como o número de lados e/ou de vértices (embora continue a haver alunos que se referem aos vértices de forma informal, por exemplo, como "bicos"). Além disso todos os alunos referem que os triângulos são "figuras (ou formas) geométricas". Além destas características fundamentais, muitos alunos sentiram necessidade de acrescentar outras informações às suas definições relacionadas, por exemplo, com os ângulos, com o facto de os triângulos serem figuras fechadas ou com perceções visuais baseadas em figuras prototípicas, possivelmente influenciados pelas análises realizadas ao longo das entrevistas. Assim, analisando as definições finais de triângulos dos alunos de 4º ano, apenas duas podem ser consideradas aceitáveis e económicas, três são aceitáveis mas não económicas porque apresentam informação redundante e uma não é uma definição correta dado que contem perceções visuais que se referem apenas aos triângulos prototípicos.

Todas as definições apresentadas pelos alunos de 2º e 4º anos parecem ser partitivas (Villiers et al., 2009), dado que se limitam a fazer uma lista de perceções visuais e/ou a apontar propriedades dos triângulos mas não estabelecendo qualquer relação entre eles, sendo assim todos os atributos considerados separadamente.

Analisando as definições iniciais apresentadas pelos alunos, parece evidente que a maioria dos alunos de 2º ano teve inicialmente alguma dificuldade em expressar-se tendo recorrido, na sua maioria, apenas a uma propriedade fundamental e utilizando depois linguagem informal para expressar impressões visuais, enquanto os alunos de 4º ano forneceram maioritariamente definições económicas e aceitáveis, referindo apenas propriedades que são fundamentais. No entanto parece evidente que as informações acrescentadas às definições no final da entrevista o foram pela influência das análises realizada durante a mesma, uma vez mais, surge mais linguagem informal e perceções visuais relacionadas com as figuras prototípicas nos alunos de 2º ano do que nos de 4º ano. Assim, parece que os alunos de 4º ano já têm um maior domínio sobre os termos matemáticos, conseguindo utilizá-los no seu discurso e dando-lhes significado (Matos & Serrazina, 1996).

Embora a maioria das definições contenha informações idênticas, referenciando as mesmas propriedades fundamentais, não se encontram estruturadas da mesma forma, nem apresentam a mesma linguagem, pelo que parecem não ser o resultado da memorização de uma definição apresentada pelo professor, parecendo sim, que resultam da compreensão e do sentido que os alunos dão aos seus conhecimentos (Villiers et al., 2009). Além disso, se atendermos às definições apresentadas pelos alunos de 2º e 4º anos, no caso dos alunos mais novos parece ainda haver uma grande tendência à procura da generalização com base em exemplos concretos, enquanto os alunos mais velhos já apresentam generalizações mais abrangentes a toda a classe dos triângulos em estudo (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999).

5.2.4. Diferenças de conhecimento das figuras que os alunos apresentam no 2º ano e no 4º ano

Matos e Serrazina (1996) salientam que as crianças aprendem ideias matemáticas não só no ambiente formal da sala de aula, como também através de experiências informais e não estruturadas ocorridas no seu dia-a-dia. No que à aprendizagem da Geometria diz respeito, Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) salientam que este é um processo demorado que tem início nas formas intuitivas iniciais e termina nas formas dedutivas finais. Um dos grandes objetivos delineados no Programa de Matemática do 1º Ciclo de 2007 (ME, 2007) é desenvolver o sentido espacial, nomeadamente a visualização e a compreensão das propriedades das figuras. No que à visualização diz respeito, pretende-se que os alunos desenvolvam as suas capacidades de representar, interpretar, modificar e antecipar transformações relativamente aos objetos do mundo que os rodeia (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999). Com o desenvolvimento do sentido espacial e do vocabulário a ele associado, os alunos adquirem a capacidade de, por exemplo, comparar duas figuras com diferentes orientações em que mentalmente se faz a rotação de uma delas para ajudar à comparação (Ponte & Serrazina, 2000).

Ao observar a figura (desenho) composta, parece que quase todos os alunos de 2º e 4º anos conseguiram isolar e analisar cada uma das figuras do fundo complexo que era o total da imagem, assim, parece que já desenvolveram as capacidades de visualização espacial relativas à *perceção figura-funda*, embora a sua identificação como exemplos e contraexemplos de triângulos nem sempre tenha sido correta. Analisando cuidadosamente a entrevista, fico com dúvidas relativamente ao desenvolvimento desta capacidade no caso da Emília (aluna de 2º ano), dado que ela à partida não identifica nenhuma das figuras como triângulo e quando justifica as suas opções referindo-se às figuras individualmente sou eu e não ela que aponta as figuras.

Perante a folha com as diferentes figuras dispersas e o pedido de identificação de quais eram as figuras iguais surgiram diferentes interpretações sobre o significado do termo "iguais". À partida três alunos do 2º ano (Beatriz, Carlos e Filipa) e três alunos do 4º ano (Gabriela, Manuel e Joana) consideraram que o termo "igual" se referia à classe dos triângulos e, como tal, identificaram todos (ou quase todos) os triângulos presentes na folha (três triângulos obtusângulos e três triângulos retângulos) como sendo figuras iguais. Mais tarde com uma análise mais detalhada da figura e com o aprofundamento do diálogo sobre a imagem todos os alunos conseguiram diferenciar dois tipos de triângulos diferentes (embora nenhum aluno os tenha classificado) e os assinalar em grupos.

Assim, quatro alunos do 2º ano (Beatriz, Carlos, Diana e Filipa) identificaram os três triângulos obtusângulos iguais (com diferentes orientações na folha) e o André e a Emília (esta última com ajuda da folha de papel vegetal) dois desses triângulos. Cinco alunos do 4º ano conseguiram identificar todos os triângulos obtusângulos (embora a Gabriela tenha recorrido à ajuda do papel vegetal para o fazer) e o Hélder identificou dois dos três triângulos obtusângulos. De salientar aqui, no entanto, que estas identificações entram em contradição com as declarações que alguns alunos de 2º ano deram, no início da entrevista ao dar os seus exemplos de triângulos, já que nessa altura vários alunos afirmaram diversas vezes que os triângulos apresentados eram diferentes porque, por exemplo, "um está de pé e outro está deitado", salientando nessa altura que a orientação das figuras era um elemento relevante para as tornar diferentes.

Relativamente à identificação dos triângulos retângulos (dois pequenos e um grande) as opiniões já foram mais divididas, por um lado três alunos do 2º ano (Carlos, Diana e Emília) e cinco do 4º ano (Gabriela, Ivo, Joana, Leonor e Manuel) consideraram que apenas os dois triângulos retângulos pequenos eram iguais, parecendo encarar, desta maneira, que o termo "igual" se referia não só à forma das figuras mas também ao seu tamanho, considerando-o assim como um sinónimo de "congruente". Enquanto três alunos do 2º ano (André, Beatriz e Filipa) e o Hélder do 4º ano consideraram os três triângulos retângulos como iguais, dando assim relevância apenas à forma da figura e não ao seu tamanho, a maioria salientou mesmo que embora haja uma diferença de tamanho as figuras são iguais. Uma vez mais, alguns alunos do 2º ano entram aqui em contradição com o que afirmaram no início da entrevista, altura em que consideravam que o tamanho era uma característica que justificava a diferença dos exemplos apresentados. Havendo no entanto outros que se mantêm fieis e continuam a afirmar que o tamanho não é uma característica fundamental para diferenciar os triângulos. Por outro lado, a maioria dos alunos do 4º ano mostraram-se consistentes nestas decisões considerando, uma vez mais, que o tamanho era uma característica relevante e indo de encontro à Planificação Trimestral do 4º ano onde estava planeado o estudo de "polígonos geometricamente iguais", considerando-se que "dois polígonos são geometricamente iguais quando tiverem os lados e os ângulos correspondentes geometricamente iguais".

Analisando estas identificações, quatro alunos do 2º ano (Beatriz, Carlos, Diana e Filipa) e quatro alunos do 4º ano (Ivo, Joana, Leonor e Manuel) conseguiram encontrar os três triângulos obtusângulos com diferentes orientações pelo que já terão desenvolvido as suas *perceções da posição espaço*. Os restantes alunos Gabriela (que só conseguiu identificar os triângulos com a ajuda do papel vegetal) André, Emília e Ivo não tendo conseguido identificar todas estas figuras não terão ainda esta capacidade de visualização totalmente desenvolvida. Por outro lado, a comparação entre as figuras parece evidenciar que só o André, a Beatriz, a Filipa e o Hélder já desenvolveram alguma *constância percetual*, dado que conseguiram identificar os três triângulos retângulos, salvaguardando a sua diferença de tamanho.

Embora todos os alunos de ambos os anos tenham conseguido analisar semelhanças e diferenças entre as figuras apresentadas para comparação (triângulo isósceles com hexágono e triângulo isósceles com triângulo obtusângulo) e, como tal, pareçam já possuir a capacidade de *discriminação visual* desenvolvida, todos demonstraram algumas dificuldades em explicar as suas impressões, por um lado recorreram à descrição de propriedades fundamentais (como o número de lados e/ou vértices), por outro, continuaram a utilizar vocabulário informal para se referir às componentes das figuras (chamando, por exemplo, "bicos" aos vértices) e a recorrer a impressões visuais e a propriedades não fundamentais (como o tamanho).

Assim, no que às capacidades de visualização diz respeito parecem existir poucas diferenças entre os alunos dos dois anos de escolaridade, já que a maioria dos alunos parece já ter desenvolvido todas as capacidades em investigação. Salienta-se, no entanto, que este não era um dos principais objetivos desta investigação, pelo que, as observações realizadas se baseiam na análise de poucos elementos, seria interessante em futuros estudos aprofundar esta questão.

Analisando os resultados obtidos neste estudo à luz da teoria de aprendizagem de Dina e Peter van Hiele e os conhecimentos que os alunos de 2º e 4º anos evidenciaram ter sobre os triângulos, parece não haver uma grande diferença nas estruturas de raciocínio destes alunos, dado que a maioria destes alunos parece se encontrar no segundo nível de conhecimento (Análise ou *discriptive level*) dado que já conseguem analisar as figuras e pelo menos algumas das suas propriedades. Salientando-se, no entanto, que os alunos de 2º ano, embora já consigam analisar propriedades nas figuras, recorrem ainda muitas vezes ao reconhecimento visual das figuras pela sua aparência global parecendo, por vezes, estar na transição entre os dois primeiros níveis de aprendizagem

No entanto, se tivermos em conta a reformulação dos níveis de aprendizagem da Geometria e os seus subníveis propostos por Battista (2007) é evidente uma maior diferenciação entre os subníveis em que os alunos dos diferentes anos se encontram. Assim, com exceção da Emília que parece encontrar-se num nível inicial de Raciocínio visual-holístico dado que ainda apresenta dificuldades em identificar muitas formas comuns de triângulos, os alunos de 2º ano parecem encontrar-se já no nível 2 de Raciocínio componencial-analítico, encontrando-se num nível de transição entre os dois primeiros subníveis (Racional componencial informal-visual e Racional componencial informal e formal). Alguns destes alunos ainda fazem muitas descrições das propriedades das figuras de forma informal e imprecisa, baseando-se em perceções visuais e focando-se apenas em partes das formas (contam, por exemplo, os vértices das figuras mas referem-se aos mesmos como “biquinhos”), no entanto, alguns destes alunos também já evidenciam alguns conhecimentos obtidos através do estudo formal e curricular de conceitos geométricos (identificando, por exemplo, os lados das figuras) e utilizam uma combinação entre a linguagem formal e informal para descreverem as formas, sendo que, quando a informação formal não lhes chega, os alunos voltam a recorrer às suas perceções visuais.

Por outro lado, os alunos de 4º ano, parecem encontrar-se igualmente no nível 2 de Raciocínio componencial-analítico, mas entre os subníveis dois e três (Racional componencial informal e formal e Raciocínio baseado nas propriedades suficientemente formal) dado que embora muitos ainda utilizem uma combinação entre a linguagem formal e informal para descreverem as propriedades das figuras e, por vezes, recorram a algumas perceções visuais, muitos já utilizam de forma explícita linguagem e conceitos formais, realçando propriedades suficientes para identificar as formas. Estes alunos conseguiram na sua maioria apresentar definições de triângulos aceitáveis, embora ainda sejam listagens de características desconectadas umas das outras, não sendo económicas por não relacionarem as propriedades nem reconhecerem que a ocorrência de uma dada propriedade implica outra.

Os dados recolhidos por este estudo, parecem indicar que estes alunos que se encontram no meio e no fim do seu 1º Ciclo, se encontram efetivamente em níveis ligeiramente diferentes de aprendizagem da Geometria, indo de encontro ao que Ponte e Serrazina (2000) realçam que deve ser o objetivo do 1º Ciclo do Ensino Básico, que é ajudar os alunos a progredir do nível visual para o nível de análise, aumentando ao longo dos anos as suas capacidades de visualização e a identificação das propriedades das figuras.

Se, por outro lado, tivermos em conta a análise do desempenho que os alunos demonstraram ao dar as suas respostas ao longo da entrevista, e não os conhecimentos efetivos que estes alunos demonstraram ter sobre Geometria, tal como sugerem Biggs e Collis (1982) com a taxonomia SOLO, as diferenças entre os tipos de respostas dadas pelos alunos dos dois anos escolares parecem ser igualmente evidentes e encontrar-se igualmente entre dois níveis consecutivos. Assim, os alunos de 2º ano parecem dar respostas que podem ser classificadas entre o nível Pré-estrutural (*Prestructural*) e o nível Uni-estrutural (*Unstructural*), parecendo ter uma fraca ou mínima capacidade de mobilização de atenção, dando respostas rápidas e curtas, ou, em caso de estas terem de ser mais longas muito confusas. Na relação entre a pergunta e a adequação da resposta (relacionamento de operações) os alunos parecem muitas vezes apenas repetir as respostas já anteriormente dadas, utilizam o senso comum para especificar as características encontradas e quando conseguem fazer uma generalização têm em conta apenas um atributo. Por fim, relativamente à consistência e capacidade de concluir a maioria dos alunos deste ano faz pequenas conclusões que nem sempre são consistentes com as suas observações anteriores ou tendo apenas em atenção um aspeto, renegando outros anteriormente referidos.

Os alunos de 4º ano, por seu lado, parecem dar respostas que se encontram entre os níveis Uni-estrutural (*Unstructural*) e o Multi-estrutural (*Multistructural*) havendo alunos com uma ainda fraca capacidade de atenção e que, como tal, dão respostas curtas e rápidas e outros com uma maior capacidade de atenção que lhes permite analisar e reconhecer os dados relevantes. Na relação entre a pergunta e a adequação das respostas surgem alunos que conseguem generalizar tendo em conta apenas um dos atributos em estudo e outros que já conseguem ter em conta mais alguns elementos relevantes em simultâneo. Por fim, relativamente à consistência e capacidade de concluir alguns alunos tentaram chegar às conclusões muito rapidamente, tendo como base apenas um aspeto relevante e não sentindo necessidade de ser consistentes, ou seja fazem várias pequenas conclusões sem sentir necessidade de as relacionar entre si, enquanto outros tentam ter em conta os diversos aspetos em estudo, não conseguindo no entanto, relacioná-los a todos entre si.

Analisando as respostas mais longas dadas pelos alunos de 2º e 4º anos (por exemplo, na pergunta mais aberta que pedia para descreverem os triângulos retângulo e isósceles), é evidente, tal como realçam Biggs e Collis (1982), que muitas vezes as respostas destes, alunos não se encontram especificamente num só nível da taxonomia, o que poderá acontecer porque os alunos já conseguem analisar muitos atributos diferentes nas figuras, mas não têm ainda nem capacidade nem memória para gerir tanta informação ao mesmo tempo.

Relativamente às expectativas delineadas de acordo com a Revisão da literatura efetuada, verifica-se que a maioria dos alunos de 2º ano já conseguem reconhecer, designar, construir, desenhar e comparar a maioria das figuras apresentadas, descrevendo pelo menos algumas das suas propriedades (nomeadamente o número de lados e/ou vértices), além disso, já possuem também alguma memória de visualização espacial para reconhecer figuras em diferentes perspetivas. Tal como expectável, estes alunos que ainda se encontram no início da escolaridade formal, recorreram a mais linguagem informal que formal e recorreram a exemplos concretos e a perceções visuais para justificar as suas argumentações, dado que apresentaram dificuldade em relacionar e comparar diversas propriedades simultaneamente e em distinguir as propriedades fundamentais das não fundamentais. Os alunos de 4º ano, tal como era expectável, conseguiram identificar, comparar e analisar um maior número de propriedades fundamentais nas figuras, utilizando também mais vocabulário formal, no entanto, estes alunos recorrem ainda a muita linguagem corrente, não sendo muito claros, coerentes e precisos nessa linguagem. Além disso, estes alunos conseguiram criar definições de triângulos aceitáveis, o que evidencia que já não consideram os objetos matemáticos como individuais (por exemplo, “este triângulo”) conseguindo ponderar sobre a classe em estudo (por exemplo, “todos os triângulos”).

Por fim, tendo em conta os objetivos delineados nas Planificações Trimestrais disponibilizadas pelas Professoras Titulares de Turma e os Programas de Matemática (ME, 2007 e MEC, 2013) verifica-se que maioria dos alunos de 2º ano conseguiram efetivamente “reconhecer e apresentar formas geométricas”, embora alguns alunos tenham erradamente reconhecido alguns contraexemplos de triângulos e uma aluna do 2º ano (Emília) tenha demonstrado muitas dificuldades neste objetivo dado que não identificou muitos dos triângulos apresentados. Além disso a maioria destes alunos conseguiram identificar as figuras na imagem (desenho) composta. Por outro lado, nenhum aluno se referiu às figuras identificando que eram “polígonos” ou as suas “linhas poligonais”, os alunos de 2º ano demonstraram ainda algumas dificuldades em distinguir os atributos geométricos fundamentais dos não fundamentais. Os alunos de 4º ano, por seu lado, parecem já ter as “capacidades de identificar e comparar ângulos” (embora a maioria não o tenha realizado por iniciativa própria, mas apenas quando isso lhes foi solicitado) e “reconhecer propriedades geométricas”. De salientar no entanto que os alunos apenas identificaram ângulos agudos e obtusos, não tendo referido mais nenhum ângulo ou tentado estabelecer comparações entre os mesmos. Por outro lado, nenhum aluno identificou as figuras estudadas como sendo “polígonos”, tentou classificar as figuras apresentadas como regulares ou irregulares ou utilizou a linguagem formal estabelecida nos objetivos para justificar a igualdade entre figuras (“saber que dois polígonos são geometricamente iguais quando tiverem os lados e os ângulos correspondentes geometricamente iguais”).

5.3. Recomendações, extensão e limitações do estudo

Sendo esta investigação um estudo de caso, com base no paradigma interpretativo, que recorreu à utilização de técnicas de índole qualitativa na recolha e análise de dados, foca os casos particulares dos alunos participantes no estudo, não pretendendo a generalização dos resultados obtidos, mas sim a produção de conhecimentos sobre a temática em estudo. Assim, os resultados obtidos estão diretamente ligados aos alunos que nele participaram, estando inevitavelmente associados às suas experiências particulares no contexto em que vivem.

Considero que seria interessante realizar um outro estudo que avaliasse os conhecimentos destes mesmos alunos depois de mais alguns anos de escolaridade, de forma a poder avaliar as suas efetivas progressões ao longo dos anos. Além disso, poderá ser interessante realizar estudos semelhantes com outros alunos de outras escolas e até de outros anos de escolaridade, de forma a permitir uma real comparação de resultados e perceber se as conclusões deste estudo podem ser mais fundamentadas e até generalizadas. Poderá ser igualmente interessante aferir os conhecimentos que estes e outros alunos demonstram sobre outras figuras que não os triângulos.

Sendo este um estudo realizado no âmbito do Mestrado em Educação Matemática na Educação Pré-escolar e nos 1º e 2º Ciclos do Ensino Básico, teve como principais condicionantes o curto espaço de tempo em que teve de ser desenvolvido, bem como alguma dificuldade em encontrar participantes que se disponibilizassem a colaborar na investigação.

Uma outra limitação foi o abrangente objetivo de estudo delineado e as questões de investigação a ele associadas, na tentativa de abranger muitos subtemas, acabou por haver alguns que foi impossível aprofundar com base numa única entrevista realizada aos participantes. O elevado número de perguntas das entrevistas realizadas aos alunos e o consequente elevado número de dados recolhidos (nomeadamente porque muitas das perguntas eram pouco diretivas), dificultou também a sua análise. Além disso, a forma como algumas questões foram colocadas permitiu uma visão geral dos conhecimentos dos alunos mas não aprofundar a análise de algumas categorias, nomeadamente no que diz respeito à aferição das capacidades de visualização dos alunos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abrantes, A., Serrazina, L. & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843-908). Charlotte, NC: Information Age & National Council of Teachers of Mathematics.

Battista, M. T. (2009). Highlights of research on learning school geometry. *Understanding Geometry for a Changing World* (pp. 91-108). Reston, VA: NCTM.

Biggs, J. B., & Collis, K. F. (1982). *Evaluating the quality of learning*. New York: Academic Press.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora. (Obra original em inglês publicada em 1991).

Breyfogle, M. L. & Lynch, C. M. (2010). van Hiele revisited. *Mathematics Teaching in Middle School,* 16 (4), 232-238.

Burger, W. F., & Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education*, *17*(1), 31-48.

Carmo, H. & Ferreira, M. M. (2012). *Metodologias da Investigação, Guia para a Auto-Aprendizagem*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ceia, M. J. M (2002). A taxonomia SOLO e os níveis de van Hiele. *Atas do XI Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 241-255). Coimbra: Secção de Educação e Matemática - Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 420–464). New York: Macmillan.

Clements, D. H. (1999) Geometric and Spatial Thinking in Young Children. In Copley, J. V. (Ed) *National Association for the Education of Young Children* (pp. 66-79). Reston: VA.

Clements, D. H. & McMillen, S. (1996). Rethinking Concrete Manipulatives. *Teaching Children Mathematics*, 2(5), 270-279.

Clements. D. H., Swaminathan, S., Hannibal, M. A. Z, & Sarama, J. (1999). Young Children's Concepts of Shape. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(2), 192-212.

Clements, D. H. & Sarama, J. (2000). The Earliest Geometry. *Teaching Children Mathematics,* 7(2), 82.

Edwards, M. T. & Harper, S. R. (2010). Paint bucket polygons. *Teaching Children Mathematics,* 16(8), 420-428.

Esteves, M. (2006). Análise de Conteúdo. In Ávila de Lima, J. & Pacheco, J. A. (Coords), *Contributos para a elaboração de dissertações e teses* (pp. 105-126). Porto: Porto Editora.

Gravemeijer, K. (1991). An instruction-theoretical reflection on the use of manipulatives. Streefland, L. (Ed.), *Realistic mathematics education in primary school: on the occasion of the opening of the Freudenthal Institute* (pp. 55-75). Utrecht: Freudhental Institute.

Hannibal, M. A. (1999) Young Children's Developing Understanding of Geometric Shapes. *Teaching Children Mathematics,* 5(6), 353-357.

Huerta, M. P. (1999). Los niveles de van Hiele y la taxonomia SOLO: una análisis comparado, una integración necessária. *Enseñanza de las ciências,* 17(2), 291-309.

Lankshear, C. & Knobel, M. (2004). *A handbook for teacher research: From design to implementation.* New York: Open University Press.

Lessard-Hebert, M., Goyette, G., & Boutin, G. (1990). *Investigação Qualitativa: Fundamentos e Práticas*. Lisboa: Instituto Piaget.

Loureiro, C., & Bastos, R. (2002). Demonstração – uma questão polémica. *Ensino e Aprendizagem da Geometria*, 105-128, Covilhã: Secção de Educação Matemática e Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação (SPCE).

Matos, J. F. & Carreira, S. P. (1994). Estudos de caso em Educação Matemática – Problemas actuais. *Quadrante*, 3(1), 19-53.

Matos, J. M. & Gordo, M. F. (1993). Visualização espacial: algumas actividades. *Educação em Matemática*, 26, 13-17.

Matos, J. M. & Serrazina, M. L. (1996a). *Didática da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

Matos, J. M., & Serrazina, L. (1996b). *O Geoplano na sala de aula*. Associação de Professores de Matemática.

ME (2007). *Programa de Matemática do 1º Ciclo*. Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC.

MEC (2012). *Metas Curriculares Ensino Básico Matemática*. Lisboa: Ministério de Educação e Ciência, DGE.

MEC (2012b). *Caderno de Apoio 1º Ciclo*. Lisboa: Ministério de Educação e Ciência, DGE.

MEC (2013). *Programa do Ensino Básico Matemática*. Lisboa: Ministério de Educação e Ciência, DGE.

National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar* (APM, Trad). Lisboa: APM e IIE. (Obra original publicada em 1989).

National Council of Teachers of Mathematics (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (2ª Edição) (APM, Trad). Lisboa: APM. (Obra original publicada em 2000).

Palhares, P. (coord.) (2004). *Elementos de Matemática para professores do Ensino Básico*. Lisboa: LIDEL.

Ponte, J.P (1994). O estudo de caso na investigação em Educação Matemática. *Quadrante*, 3(1), 3-17.

Ponte, J. P. & Serrazina, M. L. (2000). *Didática da Matemática do 1º Ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.

Rich, B. (2003). *Teorias e Problemas de Geometria*. São Paulo: Boockman.

Roberts, S. K. & Borum, V. O. (2012). Coming full circle. *Mathematics teaching in the Middle School*, 18(2), 110-116.

Robichaux, R. R. & Rodrigue, P. R. (2010). Polygon Properties: What Is Possible?. *Teaching Children Mathematics*, *16*(9), 524-531.

Rodrigues, A. & Azevedo, L. (2011). *Pasta Mágica, Matemática, 4º ano*. Maia: Areal Editores.

Rodrigues, A. & Azevedo, L. (2012). *Pasta Mágica, Matemática, 3º ano*. Maia: Areal Editores.

Schfter, D. (1999). Learning Geometry: Some Insights Drawn from Teacher Writing. *Teaching Children Mathematics*, 5(6), 360-366.

Smith, E. & Medin, D. (1981). *Categories and concepts*. Cambridge, MA: Harvard University.

Stefhen, M. L., McManus, G. E., Dickey, A.L. & Arb, M. S. (2012). Defining Supports geometry. *Mathematics teaching in the Middle School*, 18(2), 93-98.

Tsamir, P., Tirosh, D., & Levenson, E. (2008). Intuitive nonexamples: The case of triangles. *Educational Studies in Mathematics*, *69*(2), 81-95.

van Hiele, P. M (1999). Developing Geometric Thinking through Activities That Begin With Play. *Teaching Children Mathematics*, 5(6), 310-316.

Veloso, E. (2006). Sobre as definições (I). *Educação e Matemática*, 90, 7-9.

Veloso, E. (2007). Sobre as definições (II). *Educação e Matemática*, 93, 19-93.

Villiers, M. (1994). The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics*, *14*(1), 11-18.

Villiers, M. (1998). To teach definitions in geometry or teach to define?. In Olivier, A. & Newstead (Ed), *Proceedings of the Twenty-second International Conference for the Psychology of Mathematics Education: Vol. 2*. (p. 248-255). Stellenbosch: University of Stellenbosh.

Villiers, M. D., Govender, R. & Patterson, N. (2009). *Defining in Geometry, Understanding geometry for a changing world*. Reston: VA, National Council of Teachers of Mathematics.

Villiers, M. (2010). Algumas reflexões sobre a Teoria de van Hiele. *Educação Matemática Pesquisa*. *12*(3), 400 - 431.

Yin, R. (1989). *Case study research: Design and methods*. Newbury Park: Sage Publications.

Zazkis, R & Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: a case of a square. *Educational Studies in* Mathematics, *69*, 131-148.

ANEXOS

Anexo 1 - Pedido de autorização de Participação às Professoras e Encarregados de Educação.

Janeiro de 2014

Exma. Sr.(a) professor(a) do Agrupamento [redacted]

Eu, Maria Helena Neves, no âmbito do Mestrado em Educação Matemática na Educação Pré-Escolar e nos 1º Ciclo e 2º Ciclo do Ensino Básico da Escola Superior de Educação de Lisboa, estou a elaborar uma dissertação onde procuro compreender o tipo de conhecimentos dos alunos do 2º e 4º anos de escolaridade sobre triângulos.

A recolha de dados, será por mim realizada e irá decorrer numa única entrevista realizada a cada professora e aos alunos individualmente, implica a gravação áudio e vídeo, na qual a cara do entrevistado nunca será focada. Os dados recolhidos serão apenas usados na elaboração da dissertação, será mantida a confidencialidade dos mesmos, sendo o nome dos participantes alterado, de modo a preservar a sua identidade.

Deste modo solicito a sua colaboração, permitindo-me realizar a recolha de dados, para este estudo.

Agradeço a atenção dispensada,

Com os melhores cumprimentos

____

Maria Helena Neves

- -

Eu, ______________________________________, na qualidade de professor(a) do ____ autorizo a recolha de dados na realização deste estudo, na área da Matemática.

____

________/________/_________

Janeiro de 2014

Exmo(a). Srº/Srª Encarregado(a) de Educação:

Eu, Maria Helena Neves, no âmbito do Mestrado em Educação Matemática na Educação Pré-Escolar e nos 1º Ciclo e 2º Ciclo do Ensino Básico da Escola Superior de Educação de Lisboa, estou a elaborar uma dissertação onde procuro compreender o tipo de conhecimentos dos alunos do 2º e 4º anos de escolaridade sobre triângulos.

A recolha de dados, será por mim realizada e irá decorrer numa única entrevista realizada a cada professora e aos alunos individualmente, implica a gravação áudio e vídeo, na qual a cara do entrevistado nunca será focada. Os dados recolhidos serão apenas usados na elaboração da dissertação, será mantida a confidencialidade dos mesmos, sendo o nome dos participantes alterado, de modo a preservar a sua identidade.

Deste modo solicito a sua autorização, permitindo-me realizar a recolha de dados, para este estudo, junto do seu educando.

Agradeço a atenção dispensada,

Com os melhores cumprimentos

____

Maria Helena Neves

- -

Eu, ____, encarregado de educação do (a) aluno (a)____, autorizo a participação do(a) meu(inha) educando(a) na realização deste estudo, na área da Matemática.

____

________/________/_________

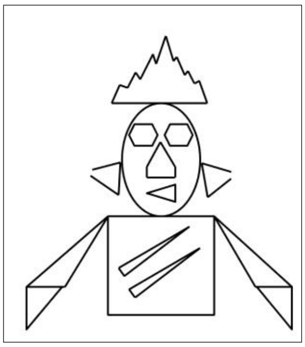
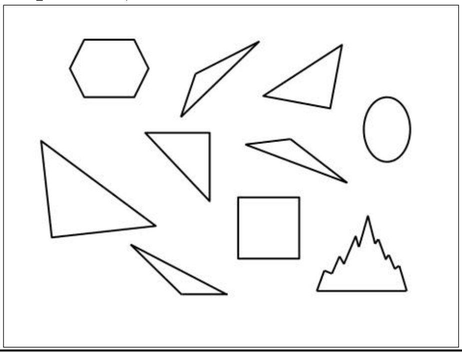
Anexo 2 - Guião das Entrevistas realizadas às Professoras Titulares de Turma

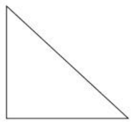
- Qual a atual situação profissional? (contratado, efetivo)
- Quantos anos de serviço tem?
- Grau académico? (bacharelato, licenciatura, mestrado)
- De que forma se encontram dispostas as mesas na sala de aula? (U, individual, pares em grupo)
- A Geometria, é uma matéria que gosta de ensinar? Porquê?
- Que tipo de organização privilegia nas aulas de Geometria? (individual, pares, pequenos grupos e/ou grande grupo)
- Qual o tipo de trabalho que privilegia nas aulas de Geometria? (estudo autónomo, trabalho de projeto, trabalho no manual, fichas de trabalho, trabalhos de pesquisa/descoberta, trabalho experimental, trabalho com ficheiros, debates)
- Que tipo de tarefas costuma propor aos alunos? (resolução de problemas, investigações, resolução de exercícios do manual ou outros com que se identifica mais)
- Que materiais manipuláveis se encontram ao dispor dos alunos para o trabalho com a Geometria (régua, esquadro, compasso, tangram, geoplano, modelos de figuras geométricas, polidrons, …)?
- Existem computadores na sala de aula? Quantos? Os alunos utilizam-nos para as aprendizagens da Geometria? Já utilizaram algum programa de Geometria Dinâmica? Qual? (geogebra, *sketchpad*, cabri)
- Na sala de aula há um cantinho/área da Matemática? Com que materiais? De que forma é utilizada essa área?
- Os objetivos programáticos da área da Matemática, especificamente os de Geometria, encontram-se afixados na sala de aula? De que forma os utiliza com os alunos?
- Costuma informar os alunos acerca dos objetivos de aprendizagem das aulas de Geometria? De que forma/como?

- Costuma relacionar as aprendizagens de Geometria com outras áreas da Matemática? De que forma/como? (Dê um exemplo)
- Costuma relacionar as aprendizagens de Geometria com aprendizagens de outras áreas disciplinares? De que forma/como? (Dê um exemplo)
- Em média quanto tempo por ano dedica ao estudo da Geometria? (número de semanas e de que forma são distribuídas ao longo do ano)
- Relativamente a esta turma, de uma maneira geral, qual considera ser o nível de conhecimentos de Geometria dos alunos? (excelente, bom, médio, mau…)
- Considera que já foram abordados todos os conteúdos/objetivos de Geometria relativos aos triângulos/quadriláteros previstos no Programa de 2007? Se não o que falta abordar?
- Tem tido em conta as Metas Curriculares de 2012 na planificação das aulas?
- Poderá disponibilizar as Planificações deste ano elaboradas e relacionadas com a Geometria?

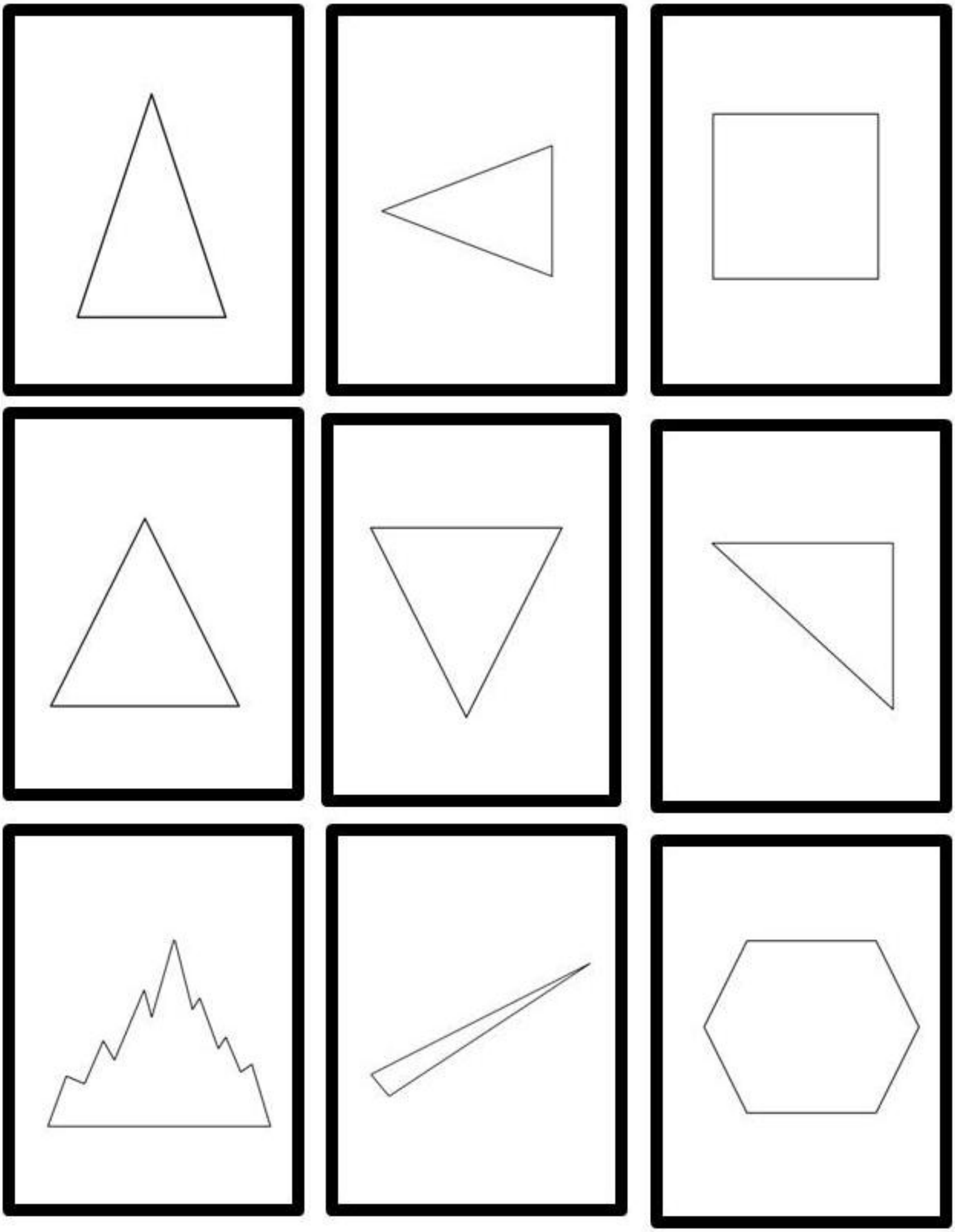
Anexo 3 - Guião das entrevistas realizadas aos alunos

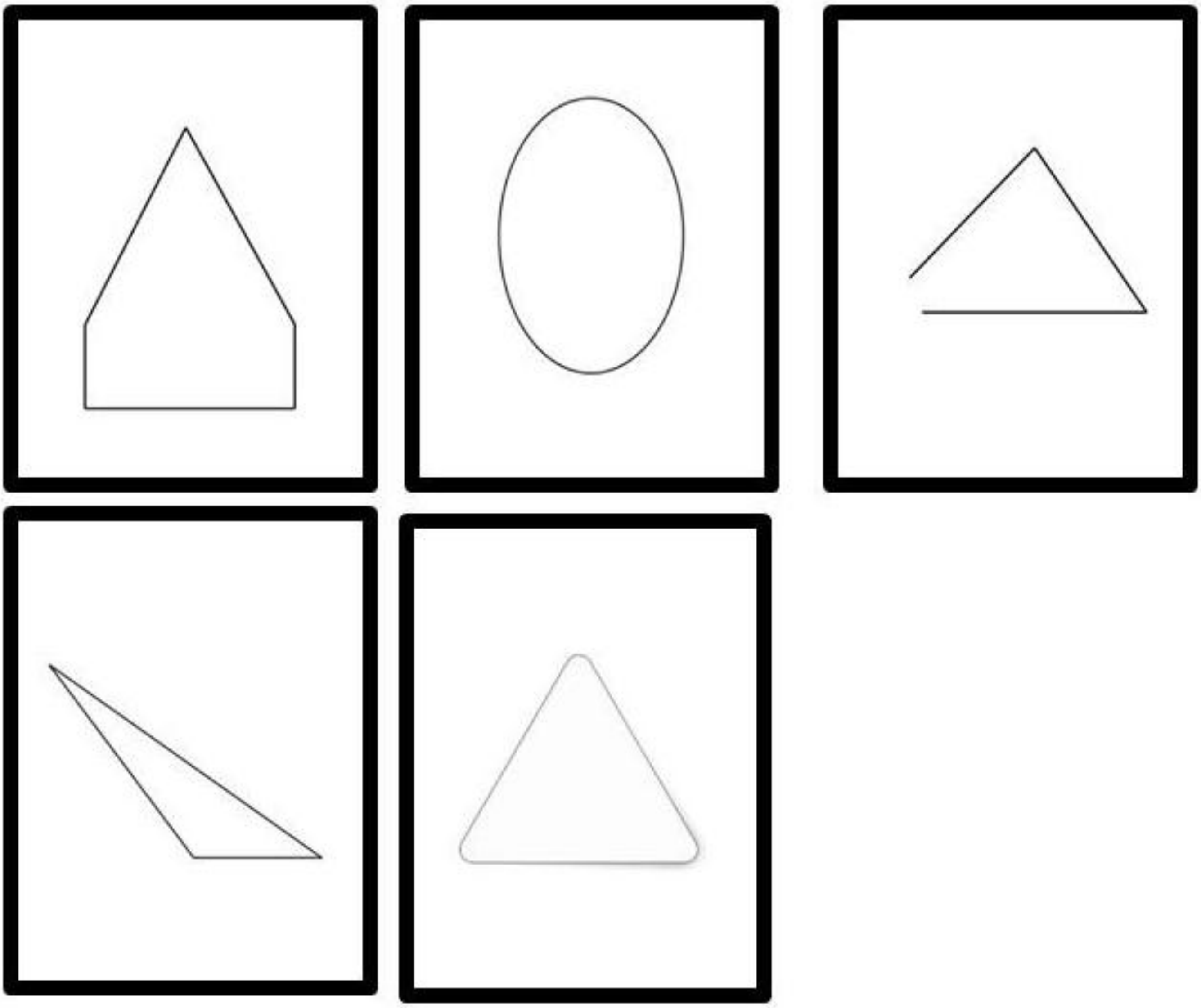
Material disponível	Perguntas
Materiais disponíveis em cima da mesa durante toda a entrevista: • Lápis, borracha, afia, régua e esquadro, folhas de papel brancas e papel ponteado; • Geoplano e vários elásticos de diferentes cores; • Outro material manipulável – barras.	O entrevistador apresenta-se ao aluno e explica que está ali para conversar com ele sobre triângulos… • Sabes dizer o que é um triângulo? (entrevistador escreve a definição que o aluno der numa folha de papel, em letra grande e deixa em cima da mesa de forma bem visível) (Explicar e mostrar que durante toda a entrevista estarão disponíveis os materiais que se encontram em cima da mesa (certificar-se de que o aluno conhece todos)).
• Lápis, borracha, régua e esquadro e folha de papel branca.	• Podes desenhar nesta folha branca dois triângulos diferentes? • E agora podes desenhar uma figura que não seja um triângulo? (Caso seja dado um exemplo errado, conversar com a criança para perceber porque é que acha que a figura é ou não um triângulo)
• Geoplano e elásticos.	• Podes desenhar neste geoplano dois triângulos diferentes? • E agora podes desenhar uma figura que não seja um triângulo? (Caso seja dado um exemplo errado, conversar com a criança para perceber porque é que acha que a figura é ou não um triângulo)
• Folha de papel ponteado.	• Podes desenhar neste geoplano dois triângulos diferentes? • E agora podes desenhar uma figura que não seja um triângulo? (Caso seja dado um exemplo errado, conversar com a criança para perceber porque é que acha que a figura é ou não um triângulo)
• Outro material manipulável – barras.	• Podes construir com este material dois triângulos diferentes? • E agora podes desenhar uma figura que não seja um triângulo? (Caso seja dado um exemplo errado, conversar com a criança para perceber porque é que acha que a figura é ou não um triângulo)
• Exemplos e contraexemplos de triângulos (cartões individuais, cada um com uma figura desenhada).	• Vamos dividir as imagens destes cartões em dois grupos: triângulos e não triângulos. Deste lado vamos pôr os triângulos e deste lado os que não são triângulos. • Esta figura é um triângulo? Porquê? • E esta? E esta? E esta? E esta?

Imagem (desenho) composta pelos vários exemplos e contraexemplos de triângulos intuitivos e não intuitivos. 	• Observa bem esta imagem e diz-me onde estão os triângulos, podes assinalá-los com um X? Outras perguntas que podem ajudar a esclarecer dúvidas, ou para confirmar as escolhas dos alunos: • Porque é que achas que esta figura é um triângulo? • Vejo que escolheste esta figura, porquê? • Porque marcaste aquela figura? • Como é que sabes que esta figura é um triângulo? • Vejo que não escolheste esta, porquê? • Porque é que achas que esta figura não é um triângulo? • E esta, porque não é um triângulo? (Caso surjam classificações diferentes da questão anterior, confrontar com essa diferença para se decidir)
Mostrar uma folha que tem diversas figuras entre as quais 3 triângulos iguais em diferentes posições e 3 triângulos retângulos em diferentes posições e um deles de tamanho diferente. (Ter também as figuras desenhadas e papel vegetal de maneira a poderem ser manipuladas). 	• Achas que estas figuras são todas diferentes ou há algumas que são iguais? Caso o aluno chegue à conclusão de que há várias que são triângulos perguntar: • Então e triângulos iguais há ou são todos diferentes? (Caso o aluno mostre dúvidas disponibilizar as figuras desenhadas em papel vegetal, para que as possa manipular) • Caso o aluno pergunte o que são iguais, devolver a pergunta: O que é que achas que as figuras têm de ter para serem iguais?
Um cartão com duas figuras (um exemplo e um contraexemplo de triângulos). 	• Achas que estas duas figuras são iguais ou diferentes? • Em que é que elas são iguais? • No que é que são diferentes?
Um cartão com dois triângulos. 	• Achas que estas duas figuras são iguais ou diferentes? • Em que é que elas são iguais? • No que é que são diferentes?

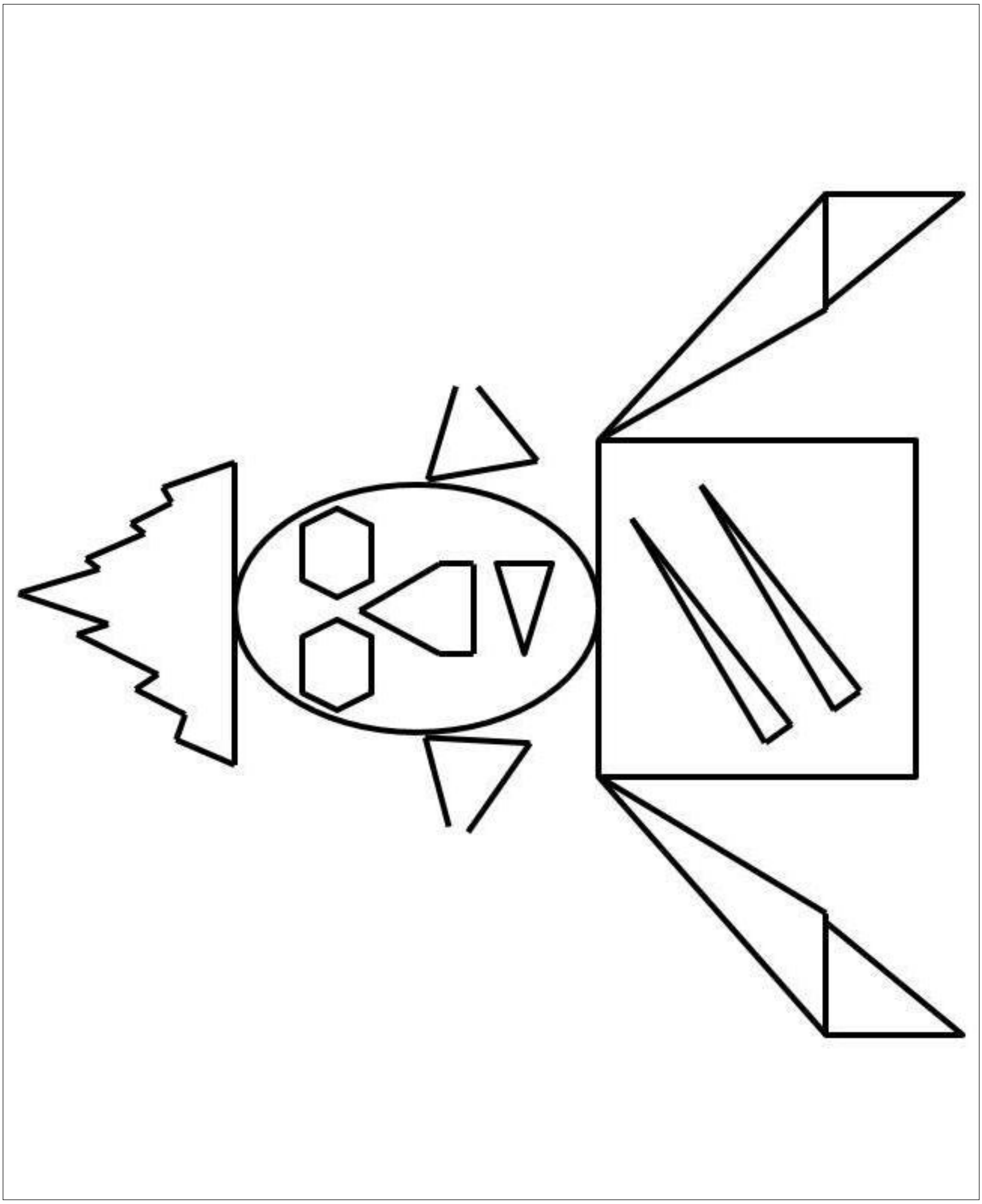
Cartão com um triângulo retângulo. 	• Observa bem esta figura. Se tivesses de explicar esta figura a um colega para ele a desenhar sem a ver, o que é que lhe dizias? • E se não pudesses usar a palavra triângulo, como lhe descrevias a imagem? (caso na primeira descrição o aluno utilize a palavra)
Cartão com um triângulo isósceles. 	• Observa bem esta figura. Se tivesses de explicar esta figura a um colega para ele a desenhar sem a ver, o que é que lhe dizias? • E se não pudesses usar a palavra triângulo, como lhe descrevias a imagem? (caso na primeira descrição o aluno utilize a palavra)
Folha com definição inicial de triângulo.	• Vamos voltar ao que me disseste no início que era um triângulo. Ainda achas que um triângulo é (ler a definição)? (alterar o que o aluno desejar)

Anexo 4 - Cartões individuais com exemplos e contraexemplos de triângulos

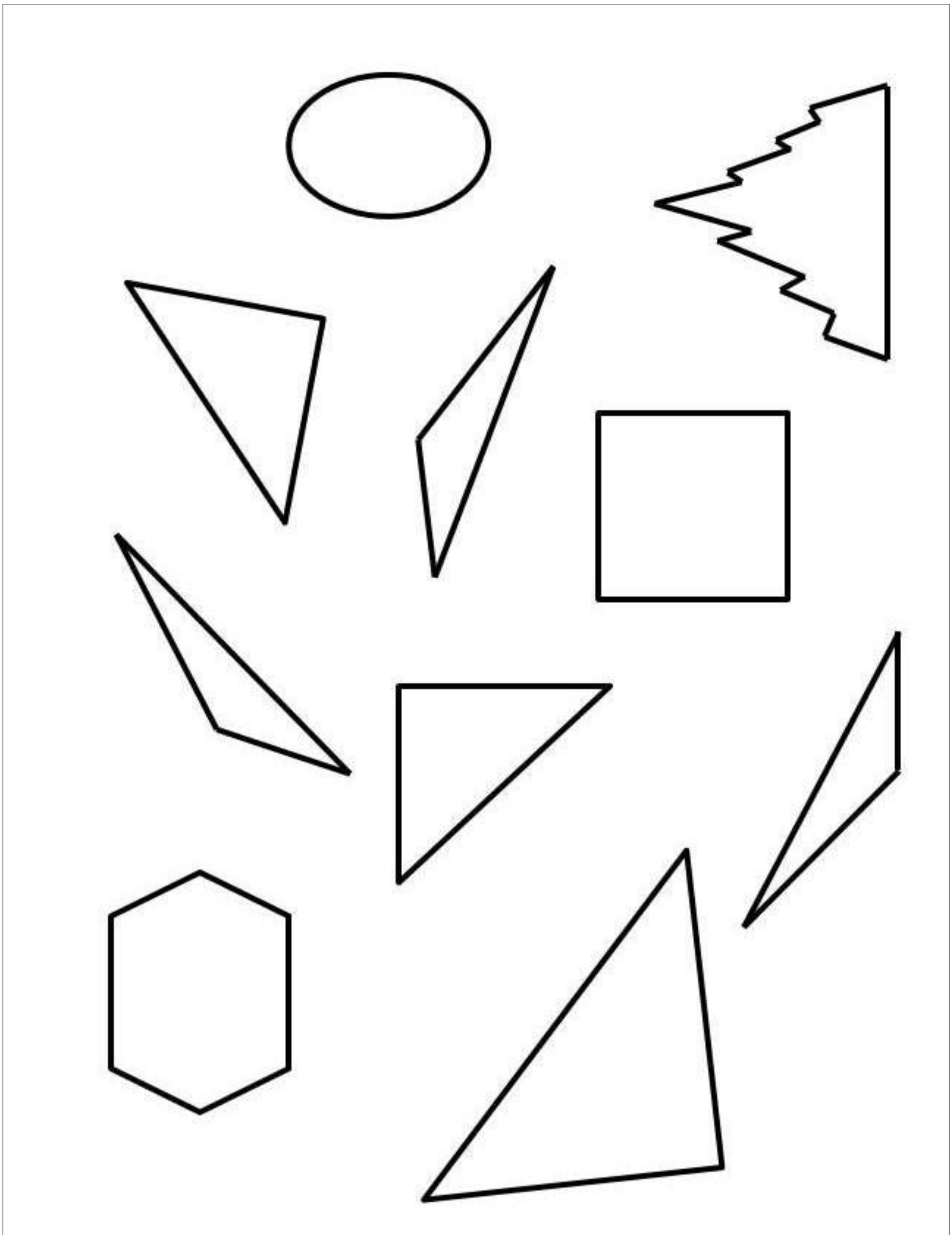




Anexo 5 - Imagem (desenho) composta pelos vários exemplos e contraexemplos de triângulos.



Anexo 6 - Folha com diversas figuras iguais e diferentes em orientação e tamanhos.



Anexo 7 - Cartões com duas figuras para comparação.