



INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DE LISBOA
Departamento de Engenharia Mecânica

ISEL



Estudo de falha em placas laminadas usando métodos analíticos e numéricos

DEMÓCRITO CARDOSO CAKIOA
(Licenciado em Engenharia Mecânica)

Trabalho Final de Mestrado para obtenção do grau de Mestre
em Engenharia de Manutenção

Orientadores:

Doutora Maria Amélia Ramos Loja
Mestre Afonso Manuel da Costa de Sousa Leite

Júri:

Presidente: Doutor João Manuel Ferreira Calado

Vogais:

Doutora Inês de Carvalho Jerónimo Barbosa
Doutora Maria Amélia Ramos Loja

Novembro de 2015



INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DE LISBOA
Departamento de Engenharia Mecânica

ISEL



Estudo de falha em placas laminadas usando métodos analíticos e numéricos

DEMÓCRITO CARDOSO CAKIOA
(Licenciado em Engenharia Mecânica)

Trabalho Final de Mestrado para obtenção do grau de Mestre
em Engenharia de Manutenção

Orientadores:

Doutora Maria Amélia Ramos Loja
Mestre Afonso Manuel da Costa de Sousa Leite

Júri:

Presidente: Doutor João Manuel Ferreira Calado

Vogais:

Doutora Inês de Carvalho Jerónimo Barbosa
Doutora Maria Amélia Ramos Loja

Novembro de 2015

... ao Pai, ao Filho, e ao Espírito Santo.

AGRADECIMENTO

Concretizada mais uma fase importante do meu percurso académico, importa evidenciar a valiosa contribuição de todos os que, direta ou indiretamente, serviram-me como uma “bengala”, expressando o meu profundo reconhecimento e agradecimento.

À Orientadora, Prof.^a Maria Amélia Ramos Loja, pela maneira sábia com que me transmitiu as ideias-chave, e por ter acreditado no meu potencial para a realização deste trabalho. Ao Coorientador, Prof. Afonso Manuel da Costa de Sousa Leite, pelas valiosas sugestões e disponibilidade.

À minha Esposa e ao meu filho pela estabilidade emocional e carinho dado ao longo desta caminhada.

Aos meus pais e aos meus irmãos, pela força e confiança. Mesmo distantes estiveram sempre muito próximo.

Aos meus camaradas d’Armas e colegas de Mestrado pela força.

RESUMO

O presente trabalho pretende ser uma contribuição para o estudo de falha de materiais compósitos poliméricos. Este trabalho incide sobre o estudo de falha em placas laminadas usando métodos analíticos e numéricos, e tem como principais objetivos desenvolver um estudo comparativo das previsões de falha de laminados, obtidas através dos critérios de Tsai-Wu e Hashin 2D, partindo do pressuposto de que a integridade do material é determinada a partir do critério de falha da primeira camada (*first ply failure*). Foi também necessário prever a rotura da camada pelos critérios da Tensão Máxima e Hashin-Rotem. Fez-se paralelamente a caracterização para essas previsões, de diferentes características de um laminado, como por exemplo da sua sequência de empilhamento. Neste caso, foram analisados quatro esquemas de laminação como sejam o laminado Quase Isotrópico, Cross-Ply, Unidirecional, e Angle-ply. Os estudos foram realizados no programa computacional de modelação matemática MAPLE 17, e no programa de modelação numérica ANSYS 14. A formulação matemática para resolução analítica é feita com base na Teoria Clássica de Placas Laminadas.

PALAVRAS-CHAVE

Critério de falha, primeira camada a falhar, placas laminadas, simulação em ANSYS, simulação em MAPLE.

ABSTRACT

The present work is a contribution to the study of polymeric composite materials failure. This work focuses on the study of failure in laminated plates using analytical and numerical methods, and has as its main objectives to develop a comparative study of laminate failure predictions, obtained through the criteria of Tsai-Wu and Hashin, on the assumption that the integrity of the material is determined from the first ply failure. It was also necessary to provide for the layer break by criteria of maximum tension and Hashin-Rotem. Made in parallel with the characterization to these predictions, of different characteristics of a laminated, as for example their stacking sequence. In this case, were analyzed four lamination schemes such as Quasi Isotropic laminated, Cross-Ply, Unidirectional, and Angle-ply. The studies were performed in computational mathematical modelling program MAPLE 17, and numerical modelling program ANSYS 14. The mathematical formulation for analytical resolution based on Classical Laminated Plate Theory.

KEY-WORDS

Failure criteria, first ply failure, laminated plates, ANSYS simulation, MAPLE simulation.

NOMENCLATURA

Abreviaturas:

R	Strength Ratio
FF	Fibre Failure
IFF	Inter Fibre Failure
NF	Normal Fracture
SF	Shear Fracture
FC	Failure Criteria
WWFE	World Wide Failure Exercise
FRP	Fibre Reinforced Polymer
CFRP	Composite Fibre Reinforced Polymer
QI	Quase Isotrópico
CP	Cross-Ply
UD	Unidirecional
AP	Angle-Ply
TC	Test Case
PEEK	Poli-éter-éter-cetona
BMI	Bismaleimida
CLPT	Classical Laminated Plate Theory

Símbolos:

I_F	Failure Index
xyz	Referencial do laminado
123	Referencial da lâmina
E_1	Módulo de elasticidade longitudinal, na direção 1
E_2	Módulo de elasticidade transversal, na direção 2
E_3	Módulo de elasticidade transversal, na direção 3
ν_{ij}	Coefficiente de Poisson
G_{ij}	Módulo de corte nos planos de corte 23, 13, 12
F_{it}	Parâmetro de resistência a tração
F_{ic}	Parâmetro de resistência a compressão

X	Tensão última de resistência segundo x
Y	Tensão última de resistência segundo y
E_f	Módulo de elasticidade da fibra
E_m	Módulo de elasticidade da matriz
ν_f	Coefficiente de Poisson da fibra
ν_m	Coefficiente de Poisson da matriz
A_f	Área da fibra
A_m	Área da matriz
σ_f	Tensão da fibra
σ_m	Tensão da matriz
$S1, S2, S6$	Tensões no referencial do material obtidas no Maple [MPa]
Sx, Sy, Sxy	Tensões no referencial do material obtidas no Ansys [MPa]
ε_f	Deformação da fibra
ε_m	Deformação da matriz
P	Carga aplicada
P_{ult}	Carga última
A	Área da secção transversal
L	Comprimento
w	Espessura da célula elementar
E_x, E_y	Módulos de elasticidade do laminado, nas direções x, y .
C_{ij}	Coefficientes de rigidez elástica
S_{ij}	Coefficientes de flexibilidade
τ_{12}	Tensão de corte
ε_{ij}	Extensão de corte
γ_{ij}	Distorção
Q_{ij}	Coefficientes de rigidez elástica
\overline{Q}_{ij}	Coefficientes de rigidez elástica transformados
$\{\sigma\}^{(k)}$	Vetor das tensões na lâmina k de um laminado
$\{\varepsilon\}^{(k)}$	Vetor das deformações na lâmina k de um laminado
$\{\varepsilon^0\}$	Vetor de deformações de membrana
$\{k\}$	Vetor de curvaturas
$\{N\}$	Vetor de esforços normais resultantes
$\{M\}$	Vetor de momentos resultantes
h, t	Espessura total do laminado

h_c	Espessura da camada
n	Número de camadas de um laminado
z_k	Quota superior da lâmina k
z_{k-1}	Quota inferior da lâmina k
θ	Ângulo de orientação de uma camada em relação à direção x ao sistema xyz
β	Rotação da superfície média na direção x
u_0	Deslocamento de membrana na direção x
v_0	Deslocamento de membrana na direção y
δ	Varição infinitesimal
$[A]$	Matriz de rigidez de membrana
$[B]$	Matriz de rigidez de acoplamento entre flexão e membrana
$[D]$	Matriz de rigidez de flexão do laminado
c	Cosseno
s	Seno

ÍNDICE GERAL

AGRADECIMENTO	III
RESUMO.....	V
PALAVRAS-CHAVE	V
ABSTRACT.....	VII
KEY-WORDS	VII
CAPÍTULO I – INTRODUÇÃO	1
1.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS	1
1.2 MECANISMO DE FALHA.....	2
1.3 WORLD WIDE FAILURE EXERCISE.....	3
1.3.1 WWFE – I.....	4
1.3.2 WWFE - II	6
1.3.3 WWFE - III	6
1.4 OBJETIVOS DO TRABALHO	7
1.5 ESTRUTURA DO TRABALHO	8
CAPÍTULO II – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	9
2.1 INTRODUÇÃO.....	9
2.2 MATERIAIS COMPÓSITOS	9
2.2.1 <i>Classificação dos materiais compósitos</i>	10
2.2.2 <i>Compósitos Laminados</i>	12
2.2.3 <i>Tipos de laminados e Código Padrão de Laminação</i>	13
2.2.4 <i>Aplicação dos Materiais Compósitos</i>	14
2.3 ESTUDO DO COMPORTAMENTO MECÂNICO DE UMA LÂMINA	20
2.3.1 <i>Material Ortotrópico</i>	20
2.3.2 <i>Macromecânica de uma lâmina</i>	20
2.3.3 <i>Micromecânica de uma lâmina</i>	25
2.4 COMPORTAMENTO MACROMECÂNICO DE UM LAMINADO.....	30
2.4.1 <i>Teoria Clássica de Placas Laminadas (CLPT)</i>	30
2.4.2 <i>Propriedades Elásticas no Referencial do Laminado</i>	37
2.5 TRANSFORMAÇÃO DAS TENSÕES	38
2.6 CRITÉRIOS DE ROTURA DE MATERIAIS COMPÓSITOS.....	39
2.6.1 <i>Critérios Não Fenomenológicos</i>	40
2.6.2 <i>Critérios Fenomenológicos</i>	43
CAPÍTULO III – MODELAÇÃO DOS LAMINADOS	45
3.1 INTRODUÇÃO.....	45
3.2 PROPRIEDADES ELÁSTICAS E PARÂMETROS DE RESISTÊNCIA. PARÂMETROS DA GEOMETRIA	45
3.3 SOLUÇÃO NUMÉRICA (ANSYS 14).....	46
3.3.1 <i>Elemento de Placa</i>	46

3.3.2 Geometria da Placa	46
3.3.3 Malha.....	47
3.3.4 Sequências de Empilhamento	47
3.3.5 Condições de Fronteira - Placa Simplesmente Apoiada	48
3.3.6 Situação de Carga de Tração Longitudinal (N_x).....	49
3.3.7 Situação de Carga de Tração Transversal (N_y)	50
3.3.8 Situação de Carga de Tração Biaxial ($N_x = N_y$).....	51
3.3.9 Critério de Falha.....	51
3.4 RESOLUÇÃO ANALÍTICA (MAPLE 17).....	53
CAPÍTULO IV – VALIDAÇÃO DOS CRITÉRIOS DE FALHA	55
4.1 INTRODUÇÃO.....	55
4.2 VALIDAÇÃO DOS CRITÉRIOS DA TENSÃO MÁXIMA E DO CRITÉRIO DE TSAI-WU	55
4.3 VALIDAÇÃO DO CRITÉRIO DE HASHIN-ROTEM.....	57
CAPÍTULO V – ANÁLISE DE RESULTADOS	61
5.1 INTRODUÇÃO.....	61
5.2 SIMULAÇÃO EM TRAÇÃO LONGITUDINAL (N_x)	61
5.2.1 Estado de Tensão em cada Camada dos Quatro Laminados.....	61
5.2.2 Índice de Falha (IF) em cada Laminado	65
5.3 SIMULAÇÃO EM TRAÇÃO TRANSVERSAL (N_y).....	72
5.3.1 Estado de Tensão em cada Camada dos Quatro Laminados.....	72
5.3.2 Índice de Falha (IF) em cada Laminado	75
5.4 SIMULAÇÃO EM TRAÇÃO LONGITUDINAL E TRANSVERSAL ($N_x = N_y$)	82
5.4.1 Estado de Tensão em cada Camada dos Quatro Laminados.....	82
5.4.2 Índice de Falha (IF) em cada Laminado	85
5.5 ANÁLISE DA RESISTÊNCIA DOS LAMINADOS ATRAVÉS DAS SUAS PROPRIEDADES ELÁSTICAS	91
5.5.1 Simulação em Tração Longitudinal (N_x)	91
5.5.2 Simulação em Tração Transversal (N_y).....	93
5.6 ANÁLISE DA EVOLUÇÃO DO ÍNDICE DE FALHA	94
5.6.1 Evolução do Índice de Falha (N_x).....	95
5.6.2 Análise da Evolução do Índice de Falha (N_y).....	99
5.6.3 Análise da Evolução do Índice de Falha ($N_x = N_y$)	102
CAPÍTULO VI – CONCLUSÕES.....	105
DESENVOLVIMENTO FUTURO - RECOMENDAÇÕES	109
BIBLIOGRAFIA	111
ANEXO – A	115
ANEXO – B	117
ANEXO – C	119
ANEXO – D	129
ANEXO - E	139

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1: Modos básicos de sollicitação da camada e consequentes modos de rotura.....	2
Figura 1.2: Casos de teste: laminados, materiais e carga.....	4
Figura 1.3: Classificação total das teorias no WWFE- I.....	5
Figura 2.1: Fases de um material compósito.....	9
Figura 2.2: Compósitos de fibras.....	11
Figura 2.3: Compósitos de partículas.....	11
Figura 2.4: Construção de um compósito laminado.....	12
Figura 2.5: Comparação de alguns compósitos com materiais convencionais.....	16
Figura 2.6: Exemplos da aplicação dos materiais compósitos.....	19
Figura 2.7: Ortotropia material.....	20
Figura 2.8: Provete de material compósito usado para a determinação de propriedades elásticas.....	21
Figura 2.9: Carregamento uniaxial na direção 1.....	22
Figura 2.10: Carregamento uniaxial na direção 2.....	23
Figura 2.11: Carregamento uniaxial a 45° em relação a direção 1.....	24
Figura 2.12: Questão-chave da micromecânica.....	25
Figura 2.13: Célula elementar sob sollicitação na direção longitudinal para determinação do módulo de elasticidade longitudinal.....	26
Figura 2.14: Célula elementar sob sollicitação na direção longitudinal para determinação do coeficiente de Poisson.....	27
Figura 2.15: Célula elementar sob sollicitação na direção transversal para determinação do módulo de elasticidade transversal.....	28
Figura 2.16: Célula elementar sob sollicitação no plano 12.....	29
Figura 2.17: Geometria da deformação no plano x-z.....	31
Figura 2.18: Esforços membrana e momentos fletores e torsões que podem atuar numa placa.....	34
Figura 2.19: Geometria de um laminado com N camadas.....	35
Figura 3.1: Geometria da placa em 2D.....	47
Figura 3.2: Definição da malha.....	47
Figura 3.3: Sequências de empilhamento.....	48
Figura 3.4: Condições de fronteira: apoio simples (<i>simply supported</i>).....	49
Figura 3.5: Condições de fronteira e aplicação de esforço na direção longitudinal.....	49
Figura 3.6: Condições de contorno e aplicação de esforço na direção longitudinal.....	50
Figura 3.7: Condições de fronteira e aplicação de esforço na direção longitudinal e transversal.....	51

Figura 3.8: Condições de fronteira e aplicação de esforço na direção longitudinal.....	54
Figura 3.9: Condições de fronteira e aplicação de esforço na direção transversal.....	54
Figura 3.10: Condições de fronteira e aplicação de esforço na direção longitudinal e transversal.....	54
Figura 5.1: Tensão (σ_1) por lâmina, nos quatro laminados por ação de N_x	62
Figura 5.2: Tensão (σ_2) por lâmina, nos quatro laminados por ação de N_x	62
Figura 5.3: Tensão (σ_6) por lâmina, nos quatro laminados por ação de N_x	63
Figura 5.4: Previsão dos critérios da Tensão Máxima, Tsai-Wu, Hashin e Hashin-Rotem no laminado Quase Isotrópico por ação de N_x	65
Figura 5.5: Previsão dos critérios da Tensão Máxima, Tsai-Wu, Hashin e Hashin-Rotem: Cross-Ply por ação de N_x	66
Figura 5.6: Previsão dos critérios da Tensão Máxima, Tsai-Wu, Hashin e Hashin-Rotem no laminado Unidirecional por ação de N_x	66
Figura 5.7: Previsão dos critérios da Tensão Máxima, Tsai-Wu, Hashin e Hashin-Rotem: Angle-Ply por ação de N_x	67
Figura 5.8: Previsão dos critérios da Tensão Máxima, Tsai-Wu, Hashin e Hashin-Rotem: Angle-Ply por ação de N_x (Ampliação da Figura 5.7).....	67
Figura 5.9: Tensão (σ_1) em cada lâmina, nos quatro laminados por ação de N_y	72
Figura 5.10: Tensão (σ_2) em cada lâmina, nos quatro laminados por ação de N_y	73
Figura 5.11: Tensão (σ_6) em cada lâmina, nos quatro laminados por ação de N_y	73
Figura 5.12: Previsão dos critérios da Tensão Máxima, Tsai-Wu, Hashin e Hashin-Rotem no laminado Quase Isotrópico por ação de N_y	76
Figura 5.13: Previsão dos critérios da Tensão Máxima, Tsai-Wu, Hashin e Hashin-Rotem no laminado Cross-Ply por ação de N_y	76
Figura 5.14: Previsão dos critérios da Tensão Máxima, Tsai-Wu, Hashin e Hashin-Rotem no laminado Unidirecional por ação de N_y	77
Figura 5.15: Previsão dos critérios da Tensão Máxima, Tsai-Wu, Hashin e Hashin-Rotem no laminado Angle-Ply por ação de N_y	77
Figura 5.16: Tensão (σ_1) por lâmina, nos quatro laminados por ação de $N_x = N_y$	82
Figura 5.17: Tensão (σ_2) por lâmina, nos quatro laminados por ação de $N_x = N_y$	83
Figura 5.18: Tensão (σ_6) em cada lâmina, nos quatro laminados por ação de $N_x = N_y$	83
Figura 5.19: Previsão dos critérios da Tensão Máxima, Tsai-Wu, Hashin e Hashin-Rotem no laminado Quase Isotrópico por ação de $N_x = N_y$	85
Figura 5.20: Previsão dos critérios da Tensão Máxima, Tsai-Wu, Hashin e Hashin-Rotem no laminado Cross-Ply por ação de $N_x = N_y$	85

Figura 5.21: Previsão dos critérios da Tensão Máxima, Tsai-Wu, Hashin e Hashin-Rotem no laminado Unidirecional por ação de $N_x = N_y$	86
Figura 5.22: Previsão dos critérios da Tensão Máxima, Tsai-Wu, Hashin e Hashin-Rotem no laminado Unidirecional por ação de $N_x = N_y$ (Ampliação da Figura 5.21).....	86
Figura 5.23: Previsão dos critérios da Tensão Máxima, Tsai-Wu, Hashin e Hashin-Rotem no laminado Angle-Ply por ação de $N_x = N_y$	87
Figura 5.24: Evolução do IF em cada laminado pelo critério da Tensão Máxima, devido N_x	95
Figura 5.25: Evolução do IF em cada laminado pelo critério da Tsai-Wu, devido N_x	95
Figura 5.26: Evolução do IF em cada laminado pelo critério de Hashin, devido N_x	96
Figura 5.27: Evolução do IF em cada laminado pelo critério de Hashin-Rotem, devido N_x	96
Figura 5.28: Rotura dos laminados por ação de N_x	98
Figura 5.29: Evolução do IF em cada laminado pelo critério da Tensão Máxima, devido N_y	99
Figura 5.30: Evolução do IF em cada laminado pelo critério da Tsai-Wu, devido N_y	99
Figura 5.31: Evolução do IF em cada laminado pelo critério de Hashin, devido N_y	100
Figura 5.32: Evolução do IF em cada laminado pelo critério de Hashin-Rotem, devido N_y	100
Figura 5.33: Rotura dos laminados por ação de N_y	101
Figura 5.34: Evolução do IF em cada laminado pelo critério da Tensão Máxima, devido $N_x = N_y$	102
Figura 5.35: Evolução do IF em cada laminado pelo critério da Tsai-Wu, devido $N_x = N_y$	102
Figura 5.36: Evolução do IF em cada laminado pelo critério de Hashin, devido $N_x = N_y$	103
Figura 5.37: Evolução do IF em cada laminado pelo critério de Hashin-Rotem, devido $N_x = N_y$	103
Figura 5.38: Rotura dos laminados por ação de $N_x = N_y$	104

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 2.1: Tipos de materiais compósitos.....	10
Tabela 2.2: Tipos de laminados e código padrão.....	14
Tabela 2.3: Propriedades de fibras e de materiais na sua forma maciça.....	16
Tabela 3.1: Propriedades elásticas e parâmetros de resistência.....	45
Tabela 3.2: Parâmetros da geometria.....	46
Tabela 4.1: Propriedades elásticas e parâmetros de resistência.....	55
Tabela 4.2: Parâmetros do laminado.....	56
Tabela 4.3: Índices de falha e índice de resistência para cada lâmina, obtidos no Maple e Ansys.....	56
Tabela 4.4: Índices de falha e índice de resistência para cada lâmina obtidos por Barbero.....	57
Tabela 4.5: Propriedades elásticas e Parâmetros de resistência.....	57
Tabela 4.6: Parâmetros do laminado.....	58
Tabela 4.7: Índices de falha de Tsai-Wu Hashin-Rotem.....	59
Tabela 4.8: Índices de falha de Tsai-Wu Hashin-Rotem obtidos pela literatura.....	59
Tabela 5.1: Estado de tensão no laminado Quase Isotrópico por ação de N_x	64
Tabela 5.2: Estado de tensão no laminado Cross-Ply por ação de N_x	64
Tabela 5.3: Estado de tensão no laminado Unidirecional por ação de N_x	64
Tabela 5.4: Estado de tensão no laminado Angle-Ply por ação de N_x	64
Tabela 5.5: IF da Tensão Máxima e Tsai-Wu em MAPLE e ANSYS no laminado Quase Isotrópico por ação de N_x	68
Tabela 5.6: IF de Hashin e Hashin-Rotem em MAPLE no laminado Quase Isotrópico por ação de N_x	68
Tabela 5.7: IF da Tensão Máxima e Tsai-Wu em MAPLE e ANSYS no laminado Cross-Ply por ação de N_x	69
Tabela 5.8: IF de Hashin e Hashin-Rotem em MAPLE: Cross-Ply por ação de N_x	70
Tabela 5.9: IF da Tensão Máxima e Tsai-Wu em MAPLE e ANSYS no laminado Quase Isotrópico por ação de N_x	70
Tabela 5.10: IF de Hashin e Hashin-Rotem em MAPLE no laminado Unidirecional por ação de N_x	70
Tabela 5.11: IF da Tensão Máxima e Tsai-Wu em MAPLE e ANSYS no laminado Angle-Ply por ação de N_x	71

Tabela 5.12: IF da Hashin e Hashin-Rotem em MAPLE no laminado Angle-Ply por ação de N_x	71
Tabela 5.13: Estado de tensão no laminado Quase Isotrópico por ação de N_y	74
Tabela 5.14: Estado de tensão no laminado Cross-Ply por ação de N_y	75
Tabela 5.15: Estado de tensão no laminado Unidirecional por ação de N_y	75
Tabela 5.16: Estado de tensão no laminado Angle-Ply por ação de N_y	75
Tabela 5.17: IF da Tensão Máxima e Tsai-Wu em MAPLE e ANSYS no laminado Quase Isotrópico por ação de N_y	78
Tabela 5.18: IF de Hashin e Hashin-Rotem em MAPLE no laminado Quase Isotrópico por ação de N_y	78
Tabela 5.19: IF da Tensão Máxima e Tsai-Wu em MAPLE e ANSYS no laminado Cross-Ply por ação de N_y	79
Tabela 5.20: IF de Hashin e Hashin-Rotem em MAPLE no laminado Cross-Ply por ação de N_y	80
Tabela 5.21: IF da Tensão Máxima e Tsai-Wu em MAPLE e ANSYS no laminado Unidirecional por ação de N_y	80
Tabela 5.22: IF de Hashin e Hashin-Rotem em MAPLE no laminado Unidirecional por ação de N_y	80
Tabela 5.23: IF da Tensão Máxima e Tsai-Wu em MAPLE e ANSYS no laminado Angle-Ply por ação de N_y	81
Tabela 5.24: IF de Hashin e Hashin-Rotem em MAPLE no laminado Angle-Ply por ação de N_y	81
Tabela 5.25: Estado de tensão no laminado Quase Isotrópico por ação de $N_x = N_y$	84
Tabela 5.26: Estado de tensão no laminado Cross-Ply por ação de $N_x = N_y$	84
Tabela 5.27: Estado de tensão no laminado Unidirecional por ação de $N_x = N_y$	84
Tabela 5.28: Estado de tensão no laminado Angle-Ply por ação de $N_x = N_y$	84
Tabela 5.29: IF da Tensão Máxima e Tsai-Wu em MAPLE e ANSYS no laminado Quase Isotrópico por ação de $N_x = N_y$	88
Tabela 5.30: IF de Hashin e Hashin-Rotem em MAPLE no laminado Quase Isotrópico por ação de $N_x = N_y$	88
Tabela 5.31: IF da Tensão Máxima e Tsai-Wu em MAPLE e ANSYS no laminado Cross-Ply por ação de $N_x = N_y$	89
Tabela 5.32: IF de Hashin e Hashin-Rotem em MAPLE no laminado Cross-Ply por ação de $N_x = N_y$	89
Tabela 5.33: IF da Tensão Máxima e Tsai-Wu em MAPLE e ANSYS no laminado Quase Isotrópico por ação de $N_x = N_y$	89

Tabela 5.34: IF de Hashin e Hashin-Rotem em MAPLE no laminado Unidirecional por ação de $N_x = N_y$90

Tabela 5.35: IF da Tensão Máxima e Tsai-Wu em MAPLE e ANSYS no laminado Angle-Ply por ação de $N_x = N_y$90

Tabela 5.36: IF de Hashin e Hashin-Rotem em MAPLE no laminado Angle-Ply por ação de $N_x = N_y$90

Capítulo I – INTRODUÇÃO

Pretende-se neste capítulo fazer um enquadramento geral do presente trabalho, destacando desde logo a importância deste estudo, até à estrutura e conteúdo desta dissertação. São abordados nesta secção aspetos relacionados com o mecanismo de falha dos materiais compósitos, com o organismo internacional responsável pelo estudo de falha destes materiais, e setores de aplicação. São ainda apresentados os objetivos que motivaram a execução deste trabalho.

1.1 Considerações gerais

O estudo de falha de placas laminadas requer a compreensão de conceitos importantes no âmbito dos compósitos laminados e dos critérios de falha. Quanto aos laminados o estudo passará por sua vez pela compreensão do comportamento micromecânico e macromecânico de uma lâmina e de um laminado. Quanto aos critérios de falha, é necessário primeiramente que se compreenda os modos básicos de solitação da camada, os mecanismos de falha destes materiais, e por fim a aplicabilidade das previsões de falha.

Como se compreende, o processo que conduz a rotura da camada é geralmente um processo complexo, que pode envolver deformação e plasticidade, bem como o crescimento de fendas localizadas, sendo portanto muito difícil de prever. Apesar da complexidade deste processo, numerosas teorias e modelos de falha foram propostos. A maior parte destas teorias admitem que o laminado é inicialmente livre de defeitos e comparam os valores de tensão ou deformação em uma lâmina com valores permitidos. Tais critérios podem ser classificados como critérios fenomenológicos e não fenomenológicos¹. Nesta dissertação serão estudados o critério fenomenológico de Tsai-Wu, e os não fenomenológicos da Tensão Máxima, Hashin, e Hashin-Rotem.

Dada a abrangência e importância deste tema considera-se relevante desenvolver um estudo comparativo entre diferentes abordagens.

¹ Critérios fenomenológicos: não explicam o mecanismo de falha. Apenas indicam a sua ocorrência.
Critérios não fenomenológicos: estão associados aos modos de rotura do material.

Pretende-se assim em diferentes condições de solicitação, caracterizar o comportamento de um laminado à luz de diferentes critérios de falha. Para a implementação deste estudo, foram usados o Ansys e o Maple.

1.2 Mecanismo de falha

De um modo geral, a falha de um material pode ser definida como sendo o instante em que parte da estrutura cessa a aptidão para cumprir uma função requerida. Em compósitos a falha ocorre quando se verificam danos na fibra (rotura da fibra), danos na matriz (rotura da matriz), deformação limite, delaminação, etc. [Cuntze, 2014].

A falha de uma lâmina de material compósito com reforço de fibras unidirecionais ocorre segundo uma abordagem micromecânica, através de diversos mecanismos. O mecanismo pela qual a falha ocorre depende do tipo de carregamento e está ligado às propriedades dos seus constituintes (fibras, matriz) e interface [Talreja *et. al*, 2012]. A Figura 1.1 ilustra os modos básicos de solicitação da camada e consequentes modos de rotura.

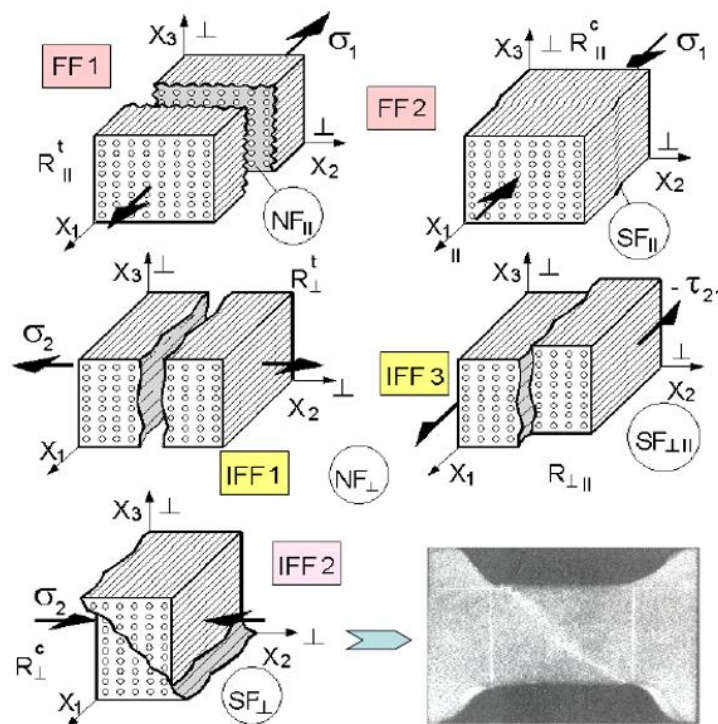


Figura 1. 1: Modos básicos de solicitação da camada e consequentes modos de rotura [Cuntze, 2014].

Os termos FF (Fibre Failure) e IFF (Inter Fibre Failure), na Figura 1.1, representam os modos de rotura da fibra e da matriz, respetivamente. Como se percebe, existem dois modos de rotura da fibra que estão relacionados com as tensões normais longitudinais de tração e de compressão (σ_1). Por outro lado, verifica-se três modos de rotura associados a matriz e estão relacionados com a tensão normal de tração e de compressão (σ_2), e a tensão de corte (σ_6).

De acordo com os tipos de fratura, pode-se constatar que elas ocorrem de duas formas: fratura normal e fratura devido o efeito de corte, e aparecem representadas pelas siglas NF (Normal Fracture) e SF (Shear Fracture).

1.3 World Wide Failure Exercise

O exercício internacional denominado World Wide Failure Exercise (WWFE) surgiu no Reino Unido (St Albans) em 1991, com o propósito de desenvolver estudos de falha de materiais compósitos de matriz polimérica reforçados com fibras (CFRP), analisando mais propriamente os mecanismos e critérios para a previsão do seu desempenho. O projeto teve como alvo específico estabelecer o nível de confiança dentro das comunidades de pesquisa e de projeto nos métodos atuais para a previsão de falha destes materiais, e identificou dois pontos-chave [Hinton *et al.*, 2004]:

- A falta de fé/confiança nos atuais critérios de falha - os participantes concluíram que, a nível da lâmina ou do laminado, havia uma falta de evidências para mostrar se algum critério poderia fornecer previsões precisas e significativas de falha;
- Inexistência de uma definição universal daquilo que constitui a falha de materiais compósitos – Este ponto deve-se ao fato de o conceito de falha ser definido de acordo com cada área de aplicação.

O desenvolvimento da atividade do WWFE consiste essencialmente na identificação das principais teorias de falha de laminados FRP, testar a aplicabilidade geral das teorias através de uma série de problemas, comparar as teorias de uns autores com os outros, comparar as teorias contra a evidência experimental, e tirar conclusões e recomendar o caminho correto a seguir [Hinton *et al.*, 2011].

1.3.1 WWFE – I

O exercício I é essencialmente uma abordagem 2D, em que foram analisados catorze casos de teste (TC²) conforme se apresenta na Figura 1.2. Neste “Pack”, os TC1 a TC3 correspondem a análise de uma lâmina unidirecional, para validação de modelos unidirecionais. Os TC4 a TC14 foram realizados em vários tipos de laminados com lâminas unidirecionais, para análise da influência da sequência de empilhamento, envelopes, e curvas de tensão e deformação. Os laminados analisados são do tipo Quase Isotrópico, Angle-Ply e Cross-Ply [Cuntze, 2014; Hinton, 2000].

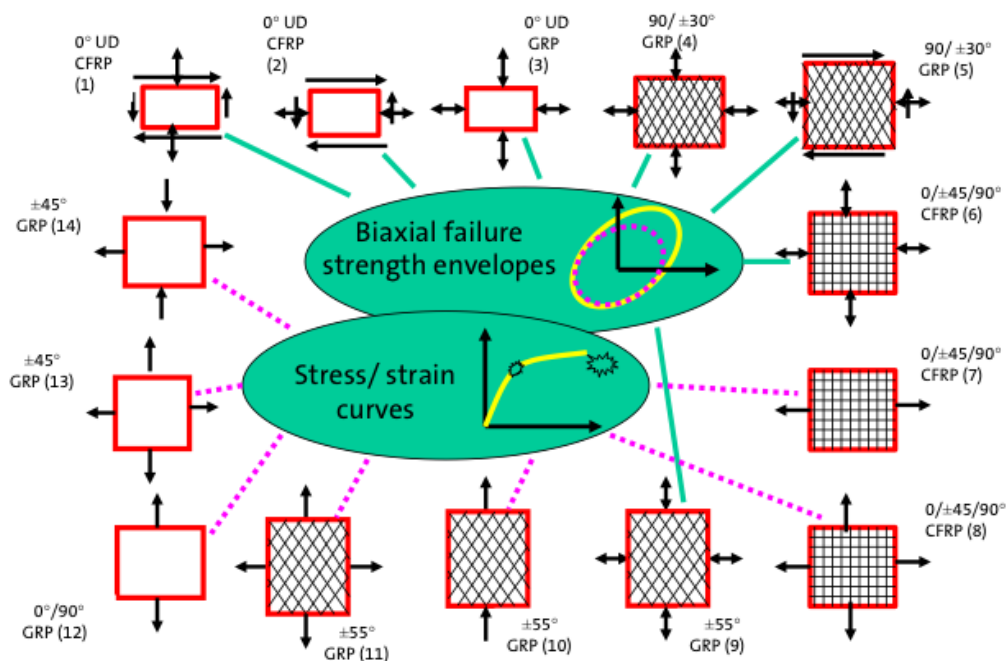


Figura 1. 2: Casos de teste: laminados, materiais e cargas [Hinton *et al.*, 2011].

A classificação total das teorias de acordo com as suas capacidades de satisfazer os objetivos definidos pelo WWFE é apresentada na Figura 1.3. Os resultados são apresentados com base em “intervalos de confiança” em que a cor verde significa que as previsões diferem das medidas experimentais menos de 10%. Em branco, as previsões diferem das medidas experimentais entre 10% e 50%. E em vermelho as previsões diferem das medidas experimentais acima de 50%.

² TC: Teste case

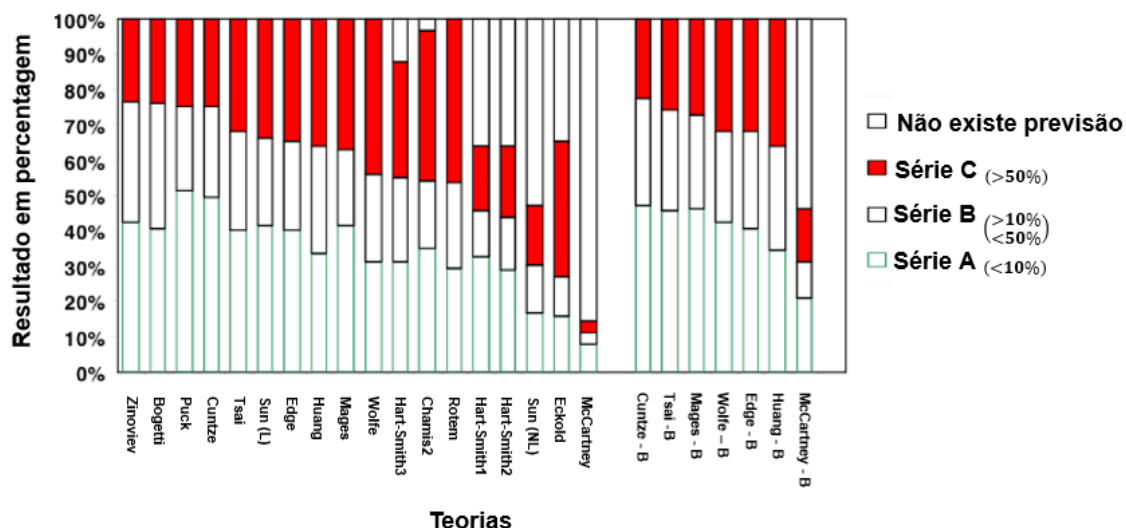


Figura 1. 3: Classificação total das teorias no WWFE- I, adaptado de [Hinton *et al.*, 2004] e [Hinton *et al.*, 2011].

Como se pode observar na Figura 1.3 o critério de Puck é o critério que mais se aproximou das medidas experimentais. Outros critérios como os de Cuntze, Tsai-B, Zinoviev e Bogetti também apresentaram bons resultados face aos objetivos predefinidos.

Sendo os critérios de Hashin [Hashin *et al.* 1973, Hashin 1980], critérios que se encontram entre os mais credíveis na previsão de falha sobretudo ao nível de fundamento físico, e por conseguinte dois dos critérios em análise neste estudo pode-se constatar a sua ausência na classificação total dos resultados das teorias. Este facto deve-se ao declínio de Hashin aquando do convite feito pelo organismo, apresentando o seguinte posto de vista:

“my only work in this subject relates to failure criteria of fibre composites, not to laminates. I do not believe that even the most complete information about failure of single plies is sufficient to predict the failure of a laminate, consisting of such plies. A laminate is a structure which undergoes a complex damage process (mostly of cracking) until it finally fails. The analysis of such a process is a prerequisite for failure analysis. While significant advances have been made in this direction we have not yet arrived at the practical goal of failure prediction. I must say to you that I personally do not know how to predict the failure of a laminate (and furthermore, that I do not believe that anybody else does)”.

Este parecer reforçou a ideia existente acerca da validade e aplicabilidade (ou não) das teorias de falha e providenciou mais um ímpeto para completar o WWFE.

1.3.2 WWFE - II

O segundo exercício é uma abordagem essencialmente 3D, onde doze participantes (individuais e grupos) aceitaram o desafio e um total de doze abordagens teóricas foram empregues. Cuntze refere que este “Pack” consiste numa avaliação comparativa de critérios de falha sob estados triaxiais de tensões para CFRP, envolvendo análises de pressão hidrostáticas acima $10000 \text{ bar} = 1000 \text{ MPa}$. Neste exercício, analisam-se estruturas sob pressão hidrostática, menos usuais, nomeadamente submarinos, raízes das pás de rotores, juntas/articulações aparafusadas, rolamentos, etc. Casos de impacto e balística, e outras aplicações, como vasos de alta pressão, pontos de ancoragem dos cabos de tensão em engenharia civil, pontos de introdução de carga em pás de helicóptero, tubos de CFRP para umbilicais em águas profundas, e situações de explosão subaquática. Estes estudos resultam da forte necessidade de validar as condições de falha sob força multiaxial [Cuntze, 2014].

Neste exercício doze casos de teste foram analisados. O primeiro caso (TC1), com matriz de resina epoxídica, foi testado para a validação de modelo isotrópico. Do segundo ao sétimo caso (TC2 – TC7) foram testadas lâminas unidireccionais, para validação de modelos unidireccionais. Do oitavo ao décimo segundo caso (TC8 – TC12) foram testados laminados para verificação da influência do esquema de laminação [Cuntze, 2014].

1.3.3 WWFE - III

O exercício III foi introduzido para preservar a integridade (i.e. *blind predictions*) que é a chave do WWFE [Hinton *et al.*, 2004]. Neste “Pack”, os objetivos principais consistem na aplicação de modelos avançados de falha com base em danos e modos de falha da Mecânica da Fratura. Pretende-se, ainda, a validação e aferição das teorias de falha capazes de prever danos, como sejam [Cuntze, 2014], [Kaddour *et al.*, 2007].

- Aparecimento e desenvolvimento de fendas na matriz;
- Início de delaminação devido ao surgimento de fendas transversais, e
- Evolução do processo de deformação até a fratura final.

Neste “Pack” os casos de teste envolverão estudos de falha nas seguintes áreas: um único modo de falha, vários modos de falha, falha da matriz por esforço transversal, falha da matriz por esforço de corte, influência da espessura, influência da localização da camada e restrições (condições de contorno), efeito da falha inicial no carregamento e subsequentes características no descarregamento, efeitos de não-linearidade do material, efeitos de não-linearidade geométrica, efeitos das características da resina, efeitos das características da fibra, e diferentes processos de produção do compósito [Kaddour *et al.*, 2007].

De um modo geral, a criação do exercício II e III é justificada com a necessidade de se colmatar algumas lacunas identificadas durante o exercício I. Note-se que no WWFE II analisa-se a falha triaxial e teorias associadas. No WWFE III analisa-se os danos e as técnicas de modelação associadas.

Este trabalho enquadra-se mais propriamente no âmbito do WWFE I onde de um modo geral estudam-se laminados sob sollicitação uniaxial e biaxial. Nestas situações de carga, a tensão máxima admissível nos laminados é de aproximadamente 1035 MPa. Como se referiu acima, estudam-se situações de tensão plana.

1.4 Objetivos do Trabalho

A delaminação de um material compósito laminado pode ficar a dever-se a diferentes mecanismos de falhas, em que a tensão interlaminar normal transversal e as tensões interlaminares de corte transversais, desempenham um papel de efetiva relevância.

Para o desenvolvimento deste trabalho foram propostos os seguintes objetivos:

- Desenvolver um estudo comparativo das previsões de falha de laminados, obtidas através dos critérios da Tensão Máxima, Tsai-Wu, Hashin-Rotem e Hashin 2D, partindo do pressuposto de que a integridade do material é determinada a partir do critério de falha da primeira camada (*first ply failure*).
- Pretende-se paralelamente caracterizar a influência para essas previsões, de diferentes características de um laminado, como por exemplo da sua sequência de empilhamento, da anisotropia material, etc.
- Avaliar e validar os critérios de falha no MAPLE e ANSYS.

1.5 Estrutura do Trabalho

O trabalho está dividido em seis capítulos, conforme o objetivo enunciado e a metodologia utilizada para o alcançar.

O presente capítulo é marcado pelo enquadramento do trabalho realçando conceitos importantes relacionados com o mecanismo de falha de materiais compósitos, critérios de rotura, World Wide Failure Exercise, e aplicação destes materiais. Nesta secção, são apresentados os objetivos do presente estudo e a estrutura da dissertação.

No segundo capítulo é feita uma revisão bibliográfica onde são abordados os conceitos relacionados com a micromecânica e macromecânica de uma lâmina e macromecânico de um laminado. São também apresentados os critérios de previsão de falha utilizados neste estudo.

No terceiro capítulo, é feita a modelação das várias situações que se pretende estudar, nos dois programas computacionais.

O quarto capítulo é marcado pela validação dos critérios utilizados. Nesta secção são realizados estudos de falha no MAPLE 17 e ANSYS 14, com vista a validar a correta formulação matemática utilizada para prever a falha do laminado.

No quinto capítulo são apresentados e discutidos os resultados.

Por fim, no sexto capítulo, são apresentadas as conclusões do trabalho e são ainda sugeridos desenvolvimentos futuros

Capítulo II – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Introdução

Neste capítulo são abordados os conceitos gerais sobre os materiais compósitos e formulações matemáticas que estão na base do estudo de placas laminadas. Será feita uma abordagem sobre os compósitos laminados e seus constituintes, o comportamento mecânico de uma lâmina e de um laminado a partir da análise micromecânica e macromecânica da lâmina, e macromecânica do laminado. São também apresentados nesta secção os critérios de falha usados neste trabalho.

2.2 Materiais Compósitos

Um material diz-se compósito quando resulta da combinação de dois ou mais materiais numa escala macroscópica a fim de se obter melhores propriedades materiais em relação às propriedades dos materiais convencionais. Esta combinação produzirá propriedades desejáveis que não podem ser obtidas com qualquer um dos componentes sozinho [Reddy, 1997]. Estes materiais deverão ser imiscíveis³, compatíveis quimicamente e possuir propriedades mecânicas complementares, de modo a proporcionar aos materiais resultantes características ímpares [Smith, 1998].

O conceito de material compósito refere-se, por outro lado, à combinação das propriedades desejadas das suas fases constitutivas, com vista à obtenção de propriedades construídas “à medida” do pretendido. Para este efeito incorpora-se a uma fase contínua, corretamente designada de *matriz*, uma fase descontínua, que funciona como reforço. A Figura 2.1 ilustra as fases de um material compósito.

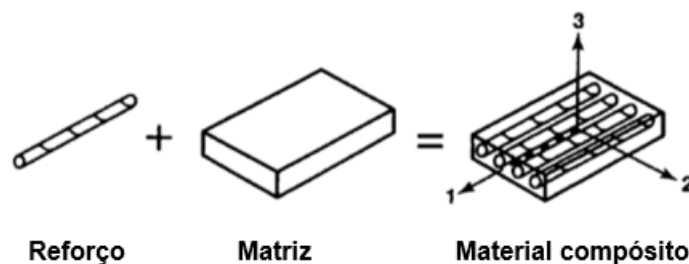


Figura 2.1: Fases de um material compósito, adaptado de [Jones, 1999].

³ Imiscíveis: materiais que ao misturarem-se mantêm a sua individualidade.

2.2.1 Classificação dos materiais compósitos

Os materiais compósitos podem ser classificados segundo vários critérios. Estes critérios estão relacionados precisamente com os tipos de reforços e tipos de matrizes.

De acordo com o tipo de matriz, os materiais compósitos comumente utilizados são: compósitos de matriz polimérica, metálica, cerâmica e carbono. Na Tabela 2.1 são apresentados alguns tipos de materiais compósitos.

No compósito, a fase matricial é responsável pela transferência de solicitações, proteção das fibras, manutenção da posição relativa das fibras, prevenção da propagação da falha de uma fibra a outras adjacentes.

Tabela 2.1: Tipos de materiais compósitos, adaptado de [Daniel *et al.*, 1994], [Mukhopadhyay, 2004].

Tipos de matriz	Matriz	Feliz
Polímero	Epóxi	Vidro E
	Poliamida	Vidro S
	Poliéster	Carbono (grafite)
	Termoplásticos	Aramida (Kevlar)
	(PEEK, polisulfureto, etc.)	Boro
Metal	Alumínio	Boro
	Magnésio	Borsic
	Titânio	Carbono (grafite)
	Cobre	Carbeto de silício
		Alumina
Cerâmica	Carbeto de silício	Carbeto de silício
	Alumina	Alumina
	Vidro-cerâmica	Nitreto de silício
	Nitreto de silício	
Carbono	Carbono	Carbono

No que diz respeito a fase de reforço, podemos classificar estes materiais, como compósitos de fibras, curtas ou longas, e compósitos de partículas. Esta fase ocupa a maior fração do volume de um compósito e está sujeita a maior parte da carga que atua sobre estrutura.

Os compósitos de fibras curtas, encontram-se com maior frequência em aplicações onde se pretendem propriedades mecânicas semelhantes nas diferentes direções do plano. Nestes compósitos, a orientação das fibras na camada pode ser unidirecional ou de forma aleatória. As fibras longas por sua vez conferem melhores características na direção longitudinal das fibras, e podem ser orientadas na camada de forma unidirecional, bidirecional e multidirecional. Na Figura 2.2 são apresentados alguns tipos de compósitos de fibras curtas e longas.

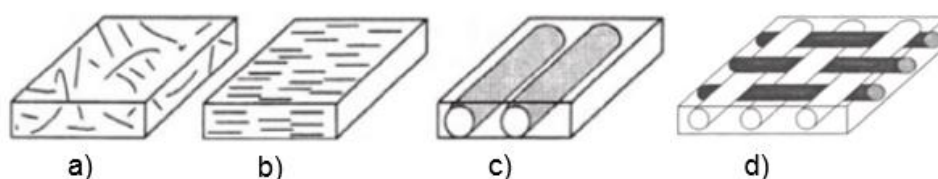


Figura 2.2: Compósitos de fibras: a) Fibras curtas aleatórias; b) Fibras curtas unidirecional; c) Fibras longas unidirecional; d) Fibras longas bidirecional (tecidos entrelaçados). Adaptado de [Staab, 2015].

Nos compósitos de partículas estas encontram-se dispersas no interior de uma matriz de outro material, e podem apresentar formas, tamanhos ou configurações variáveis. As partículas podem ser metálicas, cerâmicas ou poliméricas. Entre os compósitos de partículas largamente conhecidos destacam-se o concreto⁴, asfalto, painéis de partículas de madeira⁵. As partículas podem ser divididas em duas subclasses: ocas e sólidas. Na Figura 2.3 são apresentados alguns tipos de compósitos de partículas.

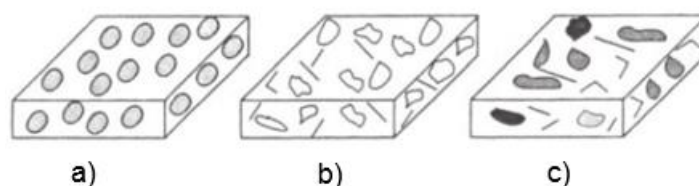


Figura 2.3: Compósitos de partículas: a) Partículas em geral; b) Partículas frágeis (ocas); c) Partículas sólidas (dúcteis). Adaptado de [Staab, 2015].

⁴ Concreto (Betão): considerado compósito cerâmico feito a partir de uma mistura de granulado (brita + areia) com matriz a partir de pasta de cimento

⁵ Painéis de Partículas de madeira: produtos fabricados com pequenos fragmentos de madeira, sendo o conjunto prensado a quente por tempo suficiente para que a cura da resina se efetue.

Os laminados, objeto de estudo deste trabalho, resultam do empilhamento de camadas de diferentes materiais, incluindo compósitos dos anteriores tipos [Reddy, 1997; Jones, 1999].

2.2.2 Compósitos Laminados

Um compósito laminado é constituído por um empilhamento de camadas de material compósito com reforço de fibras longas em que os ângulos de orientação das fibras poderão variar de camada para camada. Os laminados podem ainda ser constituídos por camadas de diferentes materiais [Jones, 1999]. Neste empilhamento as lâminas são normalmente ligadas entre si com o mesmo material da matriz como que numa lâmina.

Estes materiais são tratados como elementos de placa, e muitas vezes utilizados em aplicações que exigem forças axiais e de flexão.

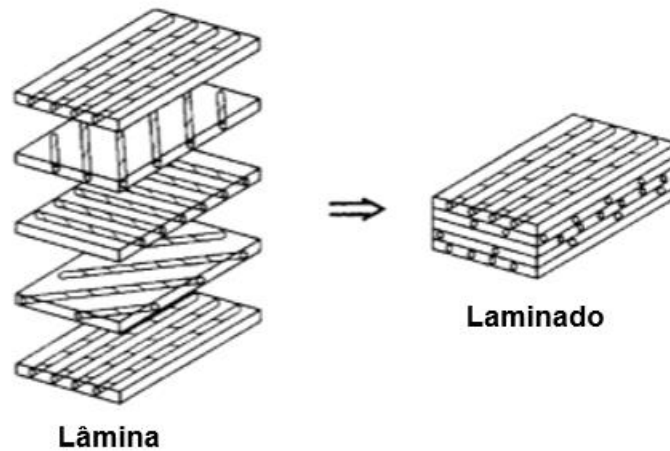


Figura 2.4: Construção de um compósito laminado [Jones, 1999].

Na Figura 2.4 podemos observar em vista explodida as diferentes camadas de um laminado em que as fibras possuem diferentes ângulos de orientação. Note-se que, o ângulo de orientação da fibra é de extrema importância na análise do comportamento do laminado.

2.2.3 Tipos de laminados e Código Padrão de Laminação

Nesta subsecção convém antes de mais introduzir a terminologia mais comum para designar um laminado, de forma expedita. Assim:

Laminados Quase Isotrópicos (Quasi-Isotropic Laminates): são laminados formados por três ou mais camadas de espessura e material idêntico. Estes laminados podem ser, por exemplo, do tipo $[+45/0/-45/90]$, $[60/0/-60]$.

Laminados Cruzados (Cross-Ply Laminates): Nestes laminados a orientação dos ângulos das fibras nas lâminas alternadas são $.../0/90/0/90 ...$

Laminados unidirecionais (Unidirectional Laminates): o ângulo de orientação das fibras é igual em todas camadas; por exemplo, $\theta = 0^\circ$ em todas as camadas.

Laminados Angulados (Angle-Ply Laminates): são laminados em que os ângulos de orientação das fibras nas lâminas alternadas são $.../\theta/-\theta/\theta/-\theta/ ...$ quando $\theta \neq 0$ ou 90 . Estes laminados podem ser, por exemplo, do tipo $[(\pm 55)_3]$.

O índice junto dos ângulos significa que o referido número aparece esse número de vezes correspondentes ao índice.

Laminados simétricos: a orientação da camada é simétrica em relação ao eixo central do laminado; isto é, para cada camada acima do plano médio, há uma camada idêntica (incluindo material, espessura, e ângulo de orientação das fibras), situada a uma distância igual abaixo do eixo do laminado; ou seja, $\theta(z) = \theta(-z)$, onde z é a distância a partir do centro. Estas estruturas aparecem na forma $[\theta / -\theta / -\theta / \theta]$.

De acordo com o código padrão de laminação os laminados simétricos são representados pela letra “s”, que indica simetria em relação ao centro do compósito.

Outro aspeto relacionado com o código de laminação dos laminados em geral é a barra acima dos ângulos indica que o plano de simetria passa a meio daquela lâmina.

Laminados Antissimétricos: Nestes laminados a orientação da camada é antissimétrica em relação ao eixo do laminado; ou seja, para cada uma das camadas com ângulo de orientação das fibras, θ , acima do plano médio, existe uma camada com ângulo de orientação da fibra, $-\theta$, com material e espessura idêntica a uma distância abaixo do plano médio. Assim, para um laminado antissimétrico verifica-se

$$\theta(z) = -\theta(-z).$$

Laminados Assimétricos: são laminados em que os ângulos de orientação das fibras nas lâminas alternadas são, por exemplo, do tipo [0 / 0 / 0 / 90 / 90 / 90].

A Tabela 2.2 mostra alguns exemplos de diferentes tipos de laminados e respectivos códigos padrão de laminação.

Tabela 2.2: Tipos de laminados e código padrão, adaptado de [Jones, 1999], [Mallick, 2007]

Tipos de laminados	Angulo de Orientação	Código
Quase Isotrópico simétrico	[0/90/+45/-45/-45/+45/90/0]	[0/90/±45] _s
	[60/0/-60/60/0/-60/-60/0/60/-60/0/60]	[(60/0/-60) ₂] _s
Cruzado simétrico	[0/90/90/0]	[0/90] _s
	[0/90/0]	[0/90] _s
Unidirecional	[0/0/0/0/0/0]	[0] ₆
	[0/0/0/0/0/0]	[0] ₃ _s
Angulado simétrico	[+45/-45/-45/+45]	[±45] _s
	[+30/-30/+30/-30/-30/+30/-30/+30]	[(±30) ₂] _s
Angulado Antissimétrico	[+30/-30/+30/-30/+30/-30/+30/-30]	[±30] ₄
	[+55/-55/+55/-55/+55/-55/+55/-55]	[±55] ₄

2.2.4 Aplicação dos Materiais Compósitos

Os materiais compósitos têm vindo a mostrar-se mais popular do que os materiais tradicionais para uma série de aplicações que incluem indústrias de grande exigência e visibilidade tecnológica como é o caso da aeronáutica e as indústrias espaciais e de defesa, ou outras como a indústria naval, automóvel, artigos desportivos, componentes elétricos e eletrónicos, construção civil, etc.

Esta vasta expansão e aplicabilidade dos materiais compósitos deve-se ao facto destes materiais apresentarem melhores propriedades materiais do que os materiais

convencionais das quais nomeiam-se a rigidez, força, redução de peso, boa resistência a corrosão e ataques químicos, propriedades térmicas, vida a fadiga, resistência ao desgaste, etc. Devido a este facto, é visível o grande impacto económico e ambiental quando se pretende reduzir ao máximo, por exemplo, o elevado consumo de combustível e conseqüente diminuição da poluição ambiental, como é o caso da indústria aeronáutica e aeroespacial onde, como se pode imaginar o custo em combustível para colocação em órbita de qualquer estrutura é elevadíssimo, pelo que qualquer ganho em peso é um fator decisivo na escolha. Neste setor objetiva-se conseguir estruturas onde a elevada resistência específica (resistência por unidade de peso ou densidade) e a grande leveza se associam a uma enorme liberdade de conceção do produto.

A Figura 2.5 e a Tabela 2.3, ilustram de forma clara a importância das fibras na obtenção das elevadas propriedades mecânicas dos compósitos fibrosos em relação aos materiais idênticos na forma maciça.

Se analisarmos por exemplo a resistência específica $\left(\frac{\sigma}{\rho}\right)$ e o módulo específico $\left(\frac{E}{\rho}\right)$ dos materiais compósitos em relação aos materiais convencionais constatamos que os valores obtidos pelos primeiros são maiores do que os obtidos pelos materiais na forma maciça. Note-se que, quanto maior for a resistência específica e o módulo específico dos compósitos em relação aos materiais na forma maciça significa que há uma significativa redução no peso dos componentes podendo traduzir-se, em termos de desempenho, numa melhor performance para um determinado peso, o que leva a uma poupança energética.

Outro fator que evidencia a importância dos compósitos na engenharia deve-se ao facto de se poder alcançar um novo material em função das necessidades de cada aplicação, com características diferentes e controlar as suas propriedades mecânicas em diferentes direções (possibilidade de introduzir rigidez e resistência onde se quer), como é o caso dos chamados materiais ortotrópicos. Esta última pode ser entendida como sendo uma grande liberdade do mundo dos compósitos.

Por outro lado, os compósitos apresentam algumas desvantagens. São materiais de difícil reparação, e a sua produção requer normalmente custos elevados. Nos compósitos de matriz termoplástica existe uma maior dificuldade em impregnar completamente os reforços. Os compósitos de matriz termoendurecíveis não podem ser reprocessados. A temperaturas elevadas degradam-se de forma irreversível.

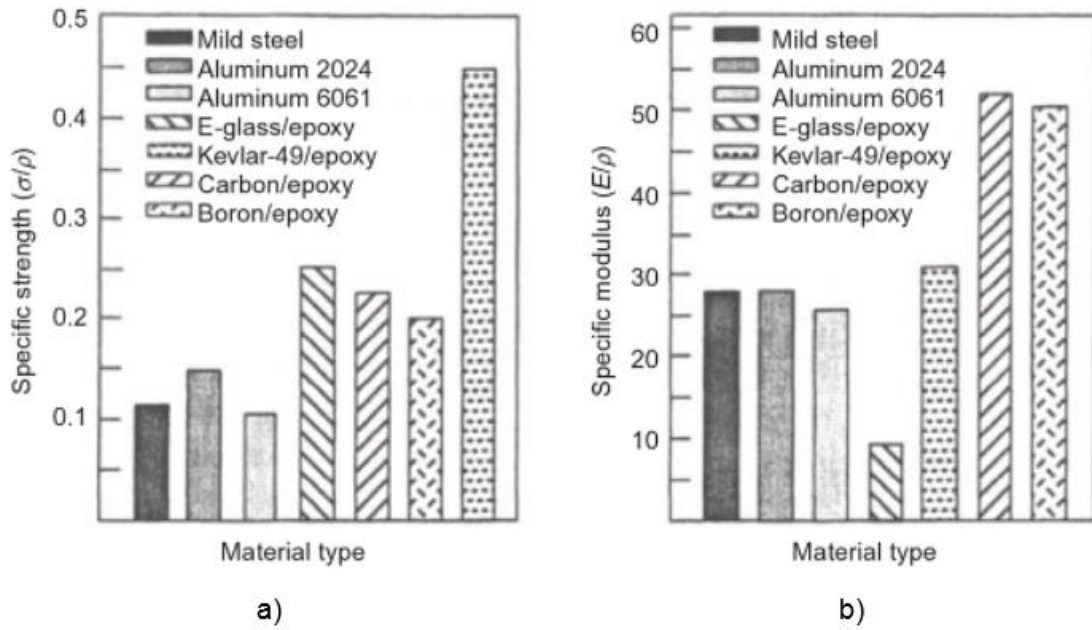


Figura 2.5: Comparação de alguns compósitos com materiais convencionais: a) Resistência específica; b) Módulo de Young específico [Staab, 2015].

Tabela 2.3. Propriedades de fibras e de materiais na sua forma maciça, adaptada de [Moura et al., 2005].

Material	Módulo de elasticidade, E (GPa)	Resistência à tração, σ_u (GPa)	Densidade, ρ (kg/dm^3)	Módulo específico, E/ρ	Resistência específica, σ_u/ρ
Fibras:					
Vidro E	72	3.5	2.54	28.5	1.38
Vidro S	87	4.3	2.49	35.0	1.70
Carbono (Pitch CP-)	690	2.2	2.15	321	1.00
Carbono (PAN C)	345	2.3	1.85	186	1.24
Boro	393	3.1	2.70	146	1.15
Sílica	72.4	5.8	2.19	33	2.65
Tungstênio	414	4.2	19.3	21	0.22
Berílio	240	1.3	1.83	131	0.71
Kevlar 49	131	3.6	1.45	90	2.48
Materiais convencionais:					
Aço	210	0.34 - 2.1	7.8	26.9	0.043-0.27
Ligas de AL	70	0.14-0.62	2.7	25.9	0.052- 0.23
Vidro	70	0.7 - 2.1	2.5	28	0.28 - 0.84
Tungstênio	350	1.1 - 4.1	19.3	18.1	0.057- 0.21
Berílio	300	0.7	1.83	164	0.38

A incorporação de fibras para melhorar as propriedades dos materiais tradicionais começou nos primórdios da história da humanidade, sendo um dos primeiros exemplos, no tempo dos egípcios a sensivelmente 4000 a.C., os tijolos de argila reforçados com fibras de palha. Outra grande referência são as fibras de plantas usadas pelos Incas⁶ nos seus potes, para evitar que rachassem ao secarem rapidamente no verão.

Na natureza encontramos a madeira, um compósito formado por um arranjo de células de celulose reforçadas por uma substância polimérica, lenhina e outros compostos. Devido à sua formação, a resistência da madeira é anisotrópica (propriedades diferentes em função dos eixos) e apresenta uma maior resistência mecânica segundo o eixo longitudinal.

Na indústria automóvel, a Ford começou a introduzir os materiais compósitos nos seus modelos por volta dos anos 30. A Chevrolet nos anos 50 com a concessão de uma estrutura em fibra de vidro para o modelo Chevrolet Corvette. A McLaren International nos anos 80 tornou-se a primeira equipa a introduzir os compósitos de carbono nos chassis do modelo MP4-1 [Moura *et al.*, 2005]. Atualmente os compósitos são utilizados numa vasta gama de veículos ligeiros e pesados.

Na indústria naval começaram a ser introduzidos compósitos modernos em aplicações estruturais por volta de 1940. Nesta altura os materiais compósitos começam, também, a ser utilizados no setor aeroespacial. Neste setor, objetiva-se com o uso destes materiais garantir uma alta estabilidade dimensional e boa conectividade elétrica das antenas incorporadas em veículos espaciais a fim de se poder obter um bom desempenho no envio do sinal, sendo conseguido através de estruturas em carbono-epóxico [Moura *et al.*, 2005].

No setor aeronáutico o uso dos materiais compósitos iniciou-se por volta dos anos 60, podendo realçar aplicações em aeronaves militares (*U.S. Air Force*), caso da cobertura dos estabilizadores horizontais dos F-14 e, posteriormente, por ordem histórica, nos estabilizadores verticais e leme dos F-15 e F-16, cobertura das asas do F-18, asa completa, estabilizadores e parte da fuselagem exterior do AV-8B. Mais recentemente, no conflito com o Iraque, a indústria aeronáutica surpreendeu o setor tecnológico com o lançamento da aeronave F-117, construída em compósitos de fibras

⁶ Império Inca: foi um Estado criado pela civilização inca, resultado de uma sucessão de civilizações andinas e que se tornou o maior império da América pré-colombiana.

de carbono com matrizes epóxi e bismaleimida (BMI)⁷, apresentando ainda a característica de baixa detecção por radares.

No mercado de construção de aeronaves comerciais, um dos mais recentes e significativos projetos que representa uma completa revolução dos compósitos é o *Boeing 787 Dreamliner* produzido com 50% de material compósito, 20% de alumínio, 15% de titânio, 10% de aço e 5% de outros materiais.

Na indústria de componentes elétricos e eletrônicos, as exigências de segurança relacionadas com isolamento elétrico justificam o uso dos materiais compósitos em vários componentes, nomeadamente circuito impresso (com aplicação de uma resina de epóxido reforçadas com fibras de vidro), cablagens em fibras óticas, blindagens (tambor de máquina de lavar em polipropileno reforçados com fibras de vidro) [Moura *et al.*, 2005].

No setor da engenharia civil, o betão pode ser considerado um compósito cerâmico feito a partir de uma mistura de um granulado (brita+ areia) com uma matriz a partir de pasta de cimento. Este compósito apresenta uma resistência à compressão muito superior à de tracção (esta é cerca de 15 vezes inferior). No entanto, para aumentar a sua capacidade de tracção é colocado no seu interior varões de aço, sendo então denominado Betão Armado, usado numa vasta gama de estruturas como sejam edifícios, pontes, estádios desportivos, etc.

Aplicações de materiais compósitos em quadros de bicicletas, raquetes de ténis, materiais têxteis, barcos, canoas, radares, comboios, desempenham papéis relevantes, com tendência clara para aumentarem a sua influência.

⁷ Resinas Bismaleimidadas: sua principal aplicação é estrutural. Capacidade térmica que lhe permite suportar temperaturas de serviço superiores às da epóxi (~ 150°C). Excelente compatibilidade com outros polímeros. Elevada resistência a humidade. Não são inflamáveis. Baixa toxicidade [Costa *et al.*, 2001]



a)



b)



c)



d)



e)

Figura 2.6: Exemplos da aplicação dos materiais compósitos: a) Bicicleta [Mallick, 2007]; b) Ponte de Kolding (1997) 100% GFRP [Moura *et al.* 2005]; c) F117 [1]; d) Energia Eólica [Harvey, 2012]; e) Aeronave Boeing 787 *Dreamliner* [2].

2.3 Estudo do Comportamento Mecânico de uma Lâmina

2.3.1 Material Ortotrópico

Um material é ortotrópico quando tem três planos mutuamente ortogonais de simetria, como se mostra na Figura 2.7, facto que no contexto da lei constitutiva que estabelece uma relação entre estado de tensão e estado de deformação, permite diminuir o número de constantes elásticas independentes para nove (9) [Barbero, 2008; Branco, 2011].

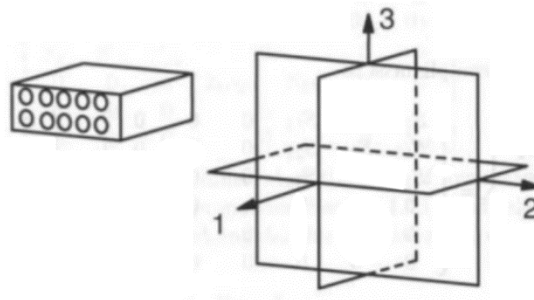


Figura 2.7: Ortotropia material [Barbero, 2008].

A matriz constitutiva $[C]$, no referencial desse material, é então descrita por:

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Em que C_{ij} são os coeficientes de rigidez elástica, dessa matriz.

2.3.2 Macromecânica de uma lâmina

Numa análise macromecânica assume-se que é possível proceder ao estudo do comportamento de um material compósito, considerando que o material é homogéneo⁸ e os efeitos dos materiais constituintes são detetados apenas como propriedades médias aparentes do material compósito [Jones, 1999].

⁸ Material homogéneo: as suas propriedades são idênticas em todos os pontos.

2.3.2.1 Propriedades mecânicas de uma lâmina de material ortotrópico

As propriedades mecânicas são comumente determinadas em laboratórios, que procedem a ensaios normalizados, para o efeito. As normas ASTM⁹ são um padrão muito importante neste domínio.

Estas propriedades são obtidas com recurso a ensaios como os de tracção uniaxial e de corte com provetes normalizados, por exemplo pela ASTM D 3039/D 3039M¹⁰ e ASTM D 3518/D 3518M¹¹. A Figura 2.8 é representativa de um provete de material compósito.

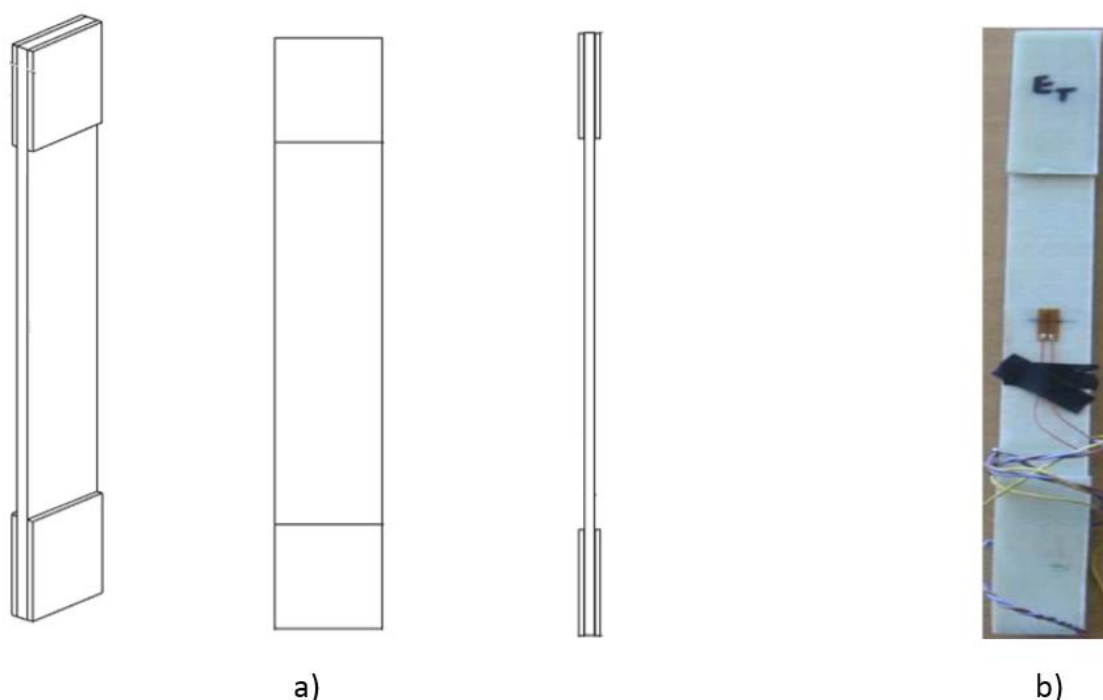


Figura 2.8: Provede de material compósito usado para a determinação de propriedades elásticas: a) Provede em perspetivas; b) Provede ensaiado. Adaptado de [Casado, 2011].

A Figura 2.8 – b, é ilustrativa de um ensaio para a obtenção das propriedades mecânicas de uma lâmina, por meio de provedes normalizados. Como se compreende, este ensaio foi realizado para determinar o módulo de elasticidade transversal (E_T). O provede ensaiado foi fabricado com pré-impregnados de fibras de vidro E,

⁹ ASTM - American Society for Testing and Materials. Desenvolve e publica normas técnicas para uma ampla gama de materiais, produtos, sistemas e serviços.

¹⁰ ASTM D 3039/D 3039M – *Standard Test Method for Tensile Properties of Polymer Matrix Composite Materials.* (E_L, E_T, ν_{LT})

¹¹ ASTM D 3518/D 3518M - *Standard Test Method for In-Plane Shear Response of Polymer Matrix Composite Materials by Tensile Test of a $\pm 45^\circ$ Laminate.* (G_{LT})

unidirecional, em resina epoxídica. A norma recomenda pelo menos 1mm de espessura do provete.

De acordo com a Figura 2.8, se considerarmos um carregamento uniaxial de tracção na direcção 1 de uma peça plana, em que a lâmina é reforçada unidireccionalmente, a secção de medição é esquematicamente mostrada na Figura 2.9.

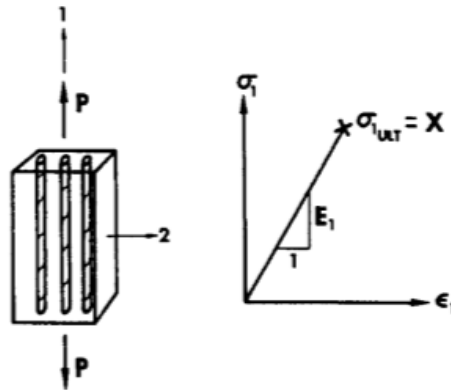


Figura 2.9: Carregamento uniaxial na direcção 1 [Jones, 1999].

Note-se que nesta análise a espessura da amostra não é apenas uma lâmina, mas várias lâminas com o mesmo ângulo de orientação, i.e., $\theta = 0^\circ$ (uma única lâmina seria demasiado frágil para manusear). As deformações ϵ_1 e ϵ_2 são obtidas a partir das relações:

$$\epsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1} \quad \epsilon_2 = -\frac{\nu_{12}\sigma_1}{E_1} \quad (2.2)$$

As constantes são definidas como:

$$\sigma_1 = \frac{P}{A} \quad E_1 = \frac{\sigma_1}{\epsilon_1} \quad \nu_{12} = -\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \quad X = \frac{P_{ult}}{A} \quad (2.3)$$

onde A é a área da secção transversal da região de medição perpendicular a direcção de aplicação da carga; P_{ult} é a carga última de resistência do provete.

De igual modo, consideramos agora um carregamento uniaxial de tracção na direcção 2 duma peça plana, como se mostra na Figura 2.10.

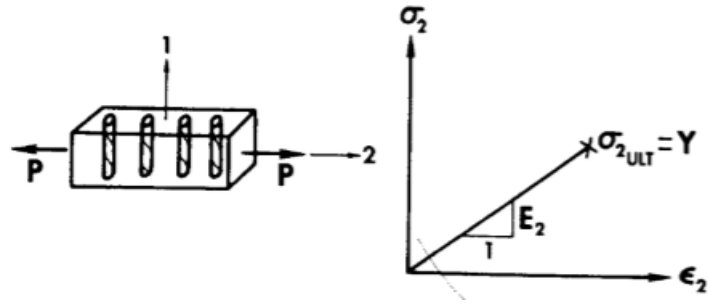


Figura 2.10: Carregamento uniaxial na direção 2 [Jones, 1999].

Como na primeira análise, as deformações ϵ_1 e ϵ_2 são obtidas a partir de relações semelhantes:

$$\epsilon_1 = -\frac{\nu_{21}\sigma_2}{E_2} \qquad \epsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E_2} \qquad (2.4)$$

As constantes são definidas como

$$\sigma_2 = \frac{P}{A} \qquad E_2 = \frac{\sigma_2}{\epsilon_2} \qquad \nu_{21} = -\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \qquad Y = \frac{P_{ult}}{A} \qquad (2.5)$$

onde A é novamente a área da secção transversal da região de medição perpendicular a direção de aplicação da carga; P_{ult} é a carga última de resistência do provete.

As propriedades de rigidez devem satisfazer as relações recíprocas como se mostra na Equação (2.6). Caso não se verifique, uma das três possibilidades existe:

- Os dados foram medidos incorretamente;
- Os cálculos foram realizados incorretamente;
- O material não obedece a teoria da elasticidade para pequenas deformações.

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2} \qquad (2.6)$$

Uma terceira grandeza importante diz respeito ao módulo de corte G_{12} . Assim, considera-se um carregamento uniaxial de tracção aplicado a 45° em relação a direcção 1 (direcção da fibra), i.e., a 45° fora do eixo de teste, como se mostra na Figura 2.11.

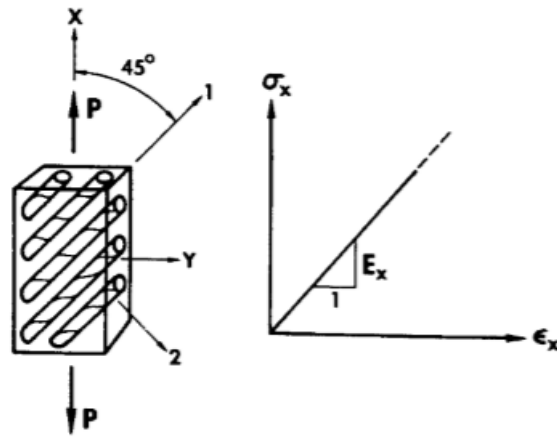


Figura 2.11: Carregamento uniaxial a 45° em relação a direcção 1 [Jones, 1999].

O módulo de corte é definido por

$$G_{12} = \frac{1}{\frac{4}{E_x} - \frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2} + \frac{2\nu_{12}}{E_1}} \quad \text{para} \quad E_x = \frac{P/A}{\epsilon_x} \quad (2.7)$$

Por definição, o módulo de corte é o quociente entre uma tensão de corte única e a deformação de corte de engenharia resultante (distorção) [Reddy, 1997]:

$$G_{12} = \frac{\tau_{12}}{\gamma_{12}} \quad (2.8)$$

2.3.3 Micromecânica de uma lâmina

A análise micromecânica diz respeito ao estudo do comportamento de um material compósito no qual a interação dos seus constituintes é examinada numa escala microscópica para se determinar os seus efeitos nas propriedades do material compósito [Jones, 1999]; ou seja, a micromecânica pretende saber qual a relação entre as propriedades do material compósito e as propriedades dos seus constituintes.

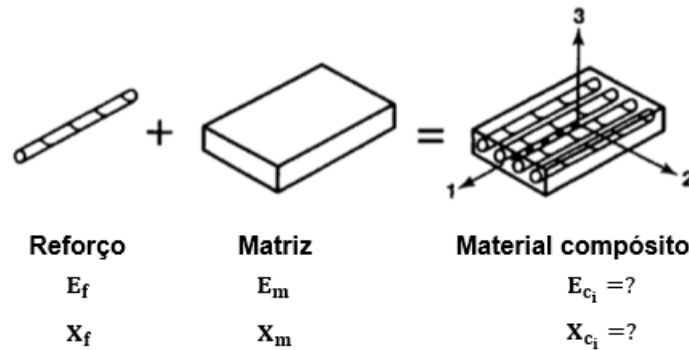


Figura 2.12: Questão-chave da micromecânica [Jones, 1999].

Na micromecânica assume-se que o material compósito é heterogéneo¹², que há uma perfeita adesão entre as fibras e a matriz; as fibras são paralelas e uniformemente distribuídas; a matriz e as fibras são isotrópicas e obedecem à lei de Hooke. A aplicação da carga deverá ser paralela ou perpendicular a direção das fibras. Por outro lado, estudam-se ainda os modelos capazes de prever as propriedades da camada a partir do teor e propriedades dos constituintes [Moura *et al.*, 2005].

¹² Material heterogéneo: as propriedades do material são função da posição.

2.3.3.1 Modelo de Voigt

2.3.3.1.1 Determinação do Módulo de Elasticidade Longitudinal (E_1)

O módulo de elasticidade longitudinal E_1 é determinado a partir da análise de uma célula elementar bidimensional (Figura 2.13) solicitada na direção longitudinal. As suas dimensões devem reproduzir a fração de volume de fibra (V_f) e da matriz (V_m), como se mostra definido nas expressões da Eq. (2.9) [Moura *et al.*, 2005]

$$V_f = \frac{A_f}{A_f + A_m} \quad V_m = \frac{A_m}{A_f + A_m} \quad (2.9)$$

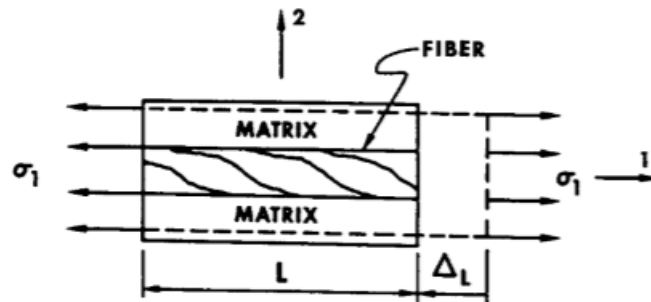


Figura 2.13: Célula elementar sob solicitação na direção longitudinal para determinação do módulo de elasticidade longitudinal [Jones, 1999].

Assim, quando solicitada nesta direção, a célula elementar sofre uma deformação longitudinal (Δl). Assume-se que nas zonas suficientemente afastadas dos pontos de aplicação da carga, a extensão longitudinal é igual para a fibra e para a matriz, conforme se mostra na Eq. (2.10) [Jones, 1999],

$$\varepsilon_{f1} = \varepsilon_{m1} = \varepsilon_1 = \frac{\Delta l}{L} \quad (2.10)$$

A força total sob a célula elementar é repartida pela fibra e pela matriz, assim,

$$\sigma_1(A_f + A_m) = \sigma_{f1} \cdot A_f + \sigma_{m1} \cdot A_m \quad (2.11)$$

Onde

$$\sigma_1 = E_1 \cdot \varepsilon_1 \quad \sigma_{f1} = E_f \cdot \varepsilon_{f1} \quad \sigma_{m1} = E_m \cdot \varepsilon_{m1} \quad (2.12)$$

Substituindo as expressões (2.12) na equação (2.11), obtemos a expressão conhecida por *Lei das Misturas* ou *Rule of Mixtures*.

$$E_1 = E_f \cdot V_f + E_m \cdot V_m \quad (2.13)$$

2.3.3.1.2 Determinação do Coeficiente de Poisson (ν_{12})

O cálculo de ν_{12} é feito a partir da análise da célula elementar bidimensional da Figura 2.14. Parte-se do pressuposto de que as extensões longitudinais são iguais para a fibra e para a matriz como para E_1 . A variação total na direcção transversal às fibras é dada pela expressão (2.14) [Jones, 1999].

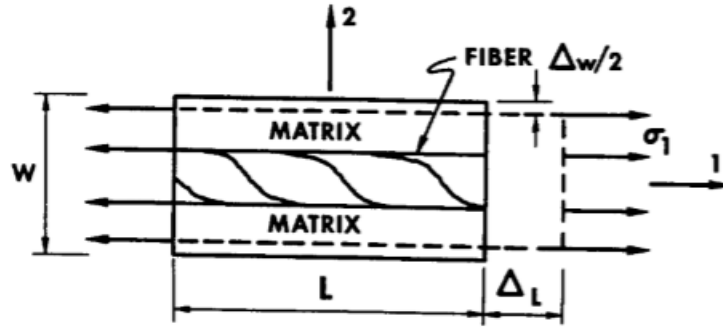


Figura 2.14: Célula elementar sob solicitação na direcção longitudinal para determinação do coeficiente de Poisson [Jones, 1999].

$$\Delta W = W_f \cdot \varepsilon_{f2} + W_m \cdot \varepsilon_{m2} \quad (2.14)$$

onde

$$\varepsilon_{f2} = -\nu_f \cdot \varepsilon_1 \quad \varepsilon_{m2} = -\nu_m \cdot \varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 = -\nu_{21} \cdot \varepsilon_1 \quad (2.15)$$

A extensão transversal é dada pela expressão (2.16). Substituindo esta expressão na Eq. (2.14) obtemos a Eq. (2.17). Usando a expressão ε_2 da Eq. (2.15) na Eq. (17) obtemos a Eq. (2.18). Refazendo esta última equação chegamos à expressão do coeficiente de Poisson

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta W}{W} \quad (2.16)$$

$$\varepsilon_2 = V_f \cdot \varepsilon_{f2} + V_m \cdot \varepsilon_{m2} \quad (2.17)$$

$$\nu_{12} = - \left(V_f \cdot \frac{\varepsilon_{f2}}{\varepsilon_1} + V_m \cdot \frac{\varepsilon_{m2}}{\varepsilon_1} \right) \quad (2.18)$$

$$\nu_{12} = V_f \cdot \nu_f + V_m \cdot \nu_m = V_f \cdot \nu_f + (1 - V_f) \nu_m \quad (2.19)$$

2.3.3.2 Modelo de Reuss

2.3.3.2.1 Determinação do Módulo de Elasticidade Transversal (E_2)

O modelo de Reuss considera a mesma célula elementar, agora sob solicitação na direcção transversal (Figura 2.15), i.e., direcção perpendicular às fibras. Neste caso, admite-se que a tensão transversal é igual na fibra e na matriz, e é expressa pela equação (2.20). A extensão total da célula elementar devido aquela solicitação é dada pela expressão (2.21) [Jones, 1999].

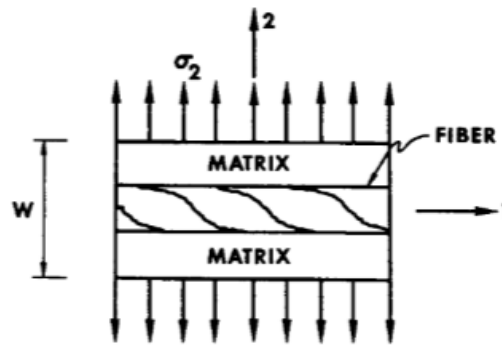


Figura 2.15: Célula elementar sob solicitação na direcção transversal para determinação do módulo de elasticidade transversal [Jones, 1999].

$$\sigma_{f2} = \sigma_{m2} = \sigma_2 \quad (2.20)$$

$$\varepsilon_2 = V_f \cdot \varepsilon_f + V_m \cdot \varepsilon_m \quad (2.21)$$

onde

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E_2} \quad \varepsilon_f = \frac{\sigma_{f2}}{E_f} \quad \varepsilon_m = \frac{\sigma_{m2}}{E_m} \quad (2.22)$$

Substituindo as equações (2.22) na (2.21), obtém-se a expressão conhecida como *Modelo de Reuss*

$$\frac{1}{E_2} = \frac{V_f}{E_f} + \frac{1 - V_f}{E_m} \quad E_2 = \frac{E_f \cdot E_m}{E_f \cdot V_m + E_m \cdot V_f} \quad (2.23)$$

2.3.3.2 Determinação do Módulo de Corte Longitudinal (G_{12})

O módulo de corte é deduzido a partir da situação de carga que se mostra na Figura 2.16. Assume-se que as tensões de corte são iguais na fibra e na matriz como se mostra na Eq. (2.24), e a deformação total causada pelo efeito da tensão de corte é dada pela expressão (2.25). A partir da equação (2.8) definem-se as deformações de corte resultantes, de acordo com a equação (2.26) [Jones, 1999].

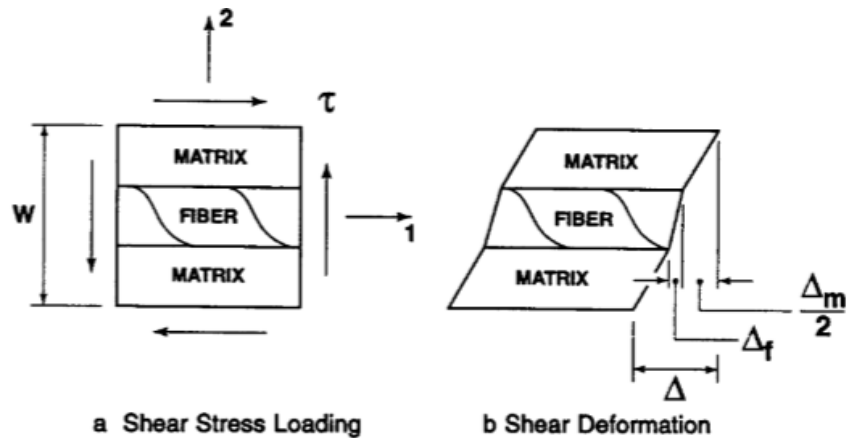


Figura 2.16: Célula elementar sob solicitação no plano 12 [Jones, 1999].

$$\tau_{f12} = \tau_{m12} = \tau_{12} \quad (2.24)$$

$$\Delta = \gamma \cdot W = W_f \cdot \gamma_{f12} + W_m \cdot \gamma_{m12} \quad (2.25)$$

$$\gamma_{f12} = \frac{\tau_{f12}}{G_{f12}} \quad \gamma_{m12} = \frac{\tau_{m12}}{G_m} \quad (2.26)$$

A partir das relações anteriores, define-se portanto,

$$\gamma_{12} = \frac{\tau_{12}}{G_{12}} \Leftrightarrow \frac{\gamma_{12}}{\tau_{12}} = \frac{1}{G_{12}} \quad (2.27)$$

Substituindo as expressões da Eq. (2.26) e (2.27) em (2.25), obtemos a expressão do módulo de corte longitudinal

$$\frac{1}{G_{12}} = \frac{V_f}{G_{f12}} + \frac{V_m}{G_m} \quad \text{ou} \quad G_{12} = \frac{G_{f12} \cdot G_m}{G_{f12} \cdot V_m + G_m \cdot V_f} \quad (2.28)$$

2.4 Comportamento Macromecânico de um Laminado

No contexto do presente trabalho, a análise do comportamento macromecânico de um laminado consiste então na determinação da resposta de um laminado em função da condição das lâminas, quando sujeito a determinados esforços, i.e., forças e momentos aplicados.

No laminado, as várias lâminas são orientadas com a direcção da fibra em diferentes ângulos em relação ao eixo x global do laminado para produzir um elemento estrutural capaz de melhor resistir às solicitações previstas. A rigidez e a resistência de um laminado depende da configuração estrutural do compósito e das propriedades dos constituintes das camadas, como se mostrará neste capítulo.

2.4.1 Teoria Clássica de Placas Laminadas (CLPT)

A Teoria Clássica de Placas Laminadas é uma extensão da Teoria Clássica dos Laminados (CLT). Esta teoria de placas laminadas assenta essencialmente nos pressupostos de Kirchhoff, que postula [Reddy, 1997], [Campilho, 2012], [Jones, 1999]

- O laminado é uma placa retangular relativamente fina, ou seja, que a espessura (h), é muito inferior às restantes dimensões da placa.
- As secções normais ao plano da placa (considere-se o plano (x,y)) permanecem retilíneas após carregamento, o que implica que as deformações de corte transversais são nulas ($\gamma_{xz} = 0, \gamma_{yz} = 0$), onde z é a direcção normal ao plano médio como se mostra na Figura 2.17.
- Assume-se que a espessura (h) se mantem constante e que as secções normais ao plano da placa são inextensíveis;
- As tensões normais σ_z são reduzidas, quando comparadas com as restantes componentes e, como tal, podem ser desprezadas;

2.4.1.1 Deslocamentos e Deformações

As implicações das hipóteses de Kirchhoff sobre os deslocamentos no laminado u , v e w , no plano (xy) e direção z são derivadas com base na deformação da secção transversal do laminado como se mostra na Figura 2.17. O deslocamento do ponto B na direção x a partir da superfície média indeformada à superfície média deformada é u_0 ¹³. Como se constata nesta figura, a linha reta ABCD perpendicular à superfície média antes da deformação permanece perpendicular após a aplicação dos esforços. Por esta razão, o deslocamento do ponto C é dado pela Eq. (2.29), em que β é a rotação da superfície média na direção x , e é definido pela Eq. (2.30).

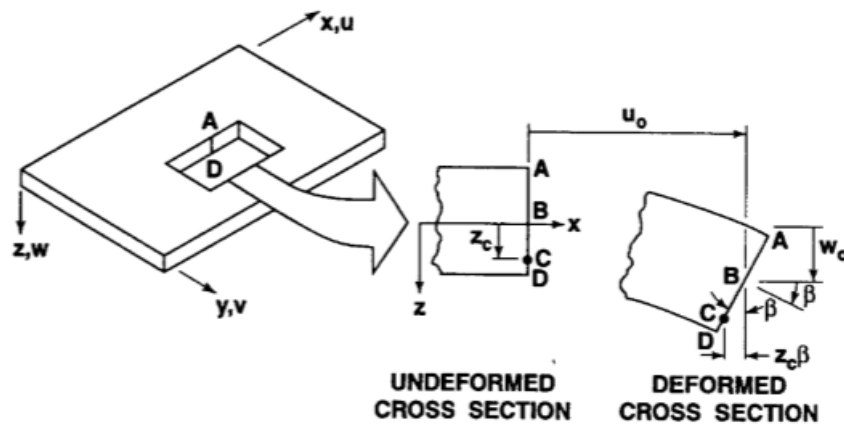


Figura 2.17: Geometria da deformação no plano x-z [Jones, 1999].

$$u_c = u_0 - z_c \beta \quad (2.29)$$

$$\beta = \frac{dw}{dx} \quad (2.30)$$

Com base nestas premissas, qualquer ponto z apresenta um deslocamento u e v (no plano da placa) devido a uma rotação β definidos da seguinte forma

$$u = u_0 - z \left(\frac{dw_0}{dx} \right) \quad (2.31)$$

$$v = v_0 - z \left(\frac{dw_0}{dy} \right) \quad (2.32)$$

¹³ (0): índice usado para designar os valores das variáveis em relação a superfície média.

As deformações do laminado são então $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ e γ_{xy} em virtude dos pressupostos de Kirchhoff. Isto é, $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$. Em regime linear elástico, as deformações são dadas por:

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\delta u}{\delta x} \\ \frac{\delta v}{\delta y} \\ \left(\frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta x} \right) \end{Bmatrix} \quad (2.33)$$

Assim, procedendo a derivação dos deslocamentos u e v nas equações (2.31) e (2.32), obtém-se a equação base das deformações da Teoria Clássica de Placas Laminadas,

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.34)$$

$$\varepsilon = \varepsilon^0 + zk$$

Onde as curvaturas¹⁴ (k) da superfície média são

$$k = \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\delta^2 w_0}{\delta x^2} \\ -\frac{\delta^2 w_0}{\delta y^2} \\ -2\frac{\delta^2 w_0}{\delta x \delta y} \end{Bmatrix} \quad (2.35)$$

2.4.1.2 Relações Constitutivas da Lâmina (tensão plana)

A relação constitutiva para uma lâmina ortotrópica no referencial do material numa situação de tensão plana ($\sigma_3 = 0, \sigma_4 = 0, \sigma_5 = 0$ ($\sigma_{33} = 0, \tau_{32} = 0, \tau_{31} = 0$)), é dada por (2.36) [Reddy, 1997],

¹⁴ Curvaturas: a taxa de variação dos deslocamentos angulares das normais.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.36)$$

Onde Q_{ij} são os coeficientes de rigidez elástica, reduzidos:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}} & Q_{12} &= \frac{\nu_{12} \cdot E_2}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}} = \frac{\nu_{21} \cdot E_1}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}} \\ Q_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}} & Q_{66} &= G_{12} \end{aligned} \quad (2.37)$$

Após a transformação (ver 2.5) para o referencial do laminado as relações tensão-deformação são dadas por

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.38)$$

onde \overline{Q}_{ij} são coeficientes de rigidez elástica reduzidos transformados, obtidos de acordo com as seguintes equações:

$$\begin{aligned} \overline{Q}_{11} &= Q_{11} \cdot \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2 \cdot Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cdot \sin^4 \theta \\ \overline{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ \overline{Q}_{22} &= Q_{11} \cdot \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2 \cdot Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cdot \cos^4 \theta \\ \overline{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\ \overline{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \\ \overline{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \end{aligned} \quad (2.39)$$

A equação (2.38) pode ainda ser escrita de forma mais compacta, como:

$$\{\sigma\}^{(k)} = [\overline{Q}_{ij}]^{(k)} \{\varepsilon\}^{(k)} \quad (2.40)$$

2.4.1.3 Forças e Momentos Resultantes

As resultantes das forças e momentos que atuam no laminado são obtidas pela integração das tensões em cada camada através da espessura do laminado, como se mostra nas Equações (2.41) e (2.42)

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^n \int_{z_{x-1}}^{z_x} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad (2.41)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^n \int_{z_{x-1}}^{z_x} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad (2.42)$$

A Teoria de Placas de Kirchhoff estabelece relações entre as curvaturas da placa (k) e os momentos flectores (M_x, M_y) e torsor ($M_{xy} = M_{yx}$) internos, que são normalmente gerados por cargas transversais concentradas ou distribuídas. Para além dos esforços de flexão (momentos fletor e torsor), as placas podem ainda estar sujeitas aos chamados esforços de membrana, que podem também ser provocados por cargas no plano da placa. Estes esforços contribuirão para às forças normais N_x e N_y , e as forças de corte $N_{xy} = N_{yx}$. A Figura (2.18) mostra os esforços e momentos que atuam no laminado. Note-se que as forças e momentos são por unidade de comprimento.

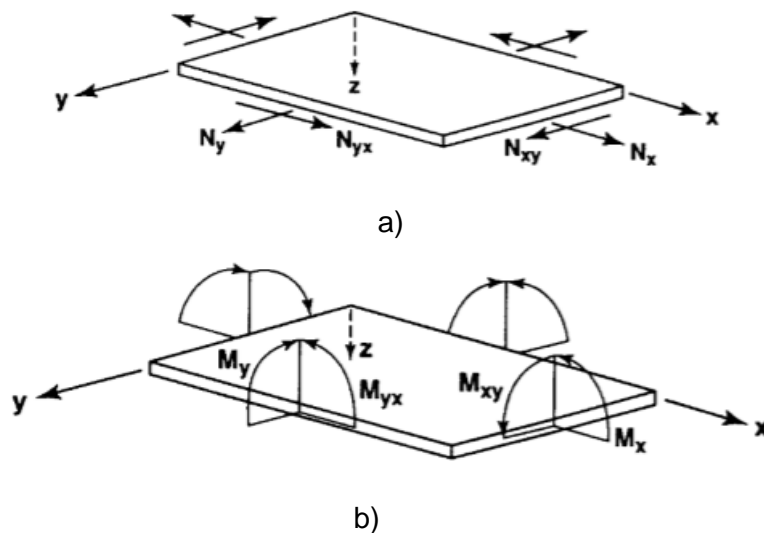


Figura 2.18: Esforços membrana e momentos flectores e torsões que podem atuar numa placa [Jones, 1999].

Contudo, de acordo com a CLPT só são consideradas solicitações transversais ao plano da placa.

O cálculo das resultantes por unidade de comprimento é efetuado camada a camada. Os termos z_k e z_{k-1} nas Eqs. (2.41) e (2.42) são então definidos como base na geometria do laminado que se apresenta na Figura 2.19.

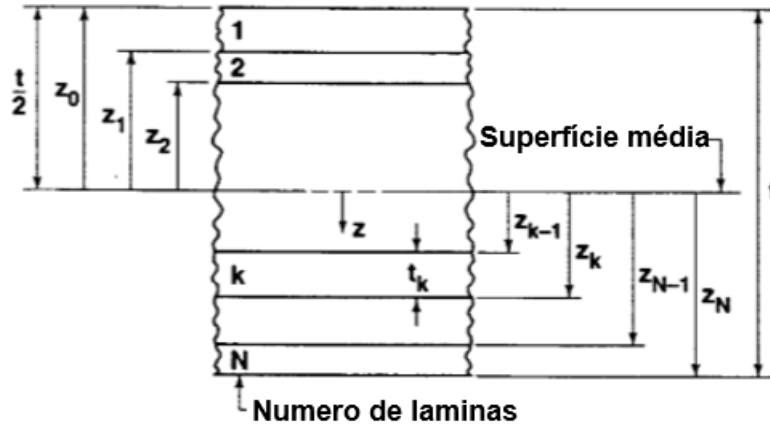


Figura 2.19: Geometria de um laminado com N camadas [Jones, 1999].

Procedendo à substituição da Eq. (2.38) nas Eqs. (2.41) e (2.42) resultam as equações fundamentais da Teoria Clássica de Placas Laminadas, expressas em termos de resultantes por unidade de comprimento,

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} zk_x \\ zk_y \\ \gamma_{xy}^0 + zk_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad (2.43)$$

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}$$

e resultante dos momentos

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} zk_x \\ zk_y \\ \gamma_{xy}^0 + zk_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad (2.44)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}$$

Os termos, A_{ij}, B_{ij}, D_{ij} são as matrizes de rigidez de membrana, acoplamento membrana-flexão, e matriz de rigidez de flexão, respetivamente. E os seus termos são definidos a partir de coeficientes de rigidez reduzidos transformados do laminado ($\overline{Q}_{ij}^{(k)}$) como

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^n \overline{Q}_{ij}^{(k)} (z_k - z_{k-1}) \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \overline{Q}_{ij}^{(k)} (z_k^2 - z_{k-1}^2) \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \overline{Q}_{ij}^{(k)} (z_k^3 - z_{k-1}^3) \end{aligned} \quad (2.45)$$

As Eqs. (2.43) e (2.44) podem ser escritas como

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.46)$$

E na forma simplificada

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon^0\} \\ \{k\} \end{Bmatrix} \quad (2.47)$$

Em muitas situações, são conhecidos os esforços e pretende-se calcular as deformações e curvaturas. Isto pode ser feito invertendo a equação (2.47)

$$\begin{Bmatrix} \{\varepsilon_0\} \\ \{k\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} \quad (2.48)$$

2.4.2 Propriedades Elásticas no Referencial do Laminado

A determinação do módulo de elasticidade associado a direcção x de um laminado unidirecional (E_x) depende necessariamente das propriedades elásticas das camadas. Para um laminado sob uma solicitação esforço de N_x , estabelecem-se as relações dada pela Eq. (2.49), onde ε_{0x} e ε_{0y} são as extensões nas direcções x e y , respetivamente, e h a espessura do laminado. Sob esta solicitação sabe-se que a relação força-deformação é dada pela Eq. (2.50) [Daniel *et al.*, 1994].

$$E_x = \frac{N_x}{h\varepsilon_x^0} \quad v_{xy} = -\frac{\varepsilon_y^0}{\varepsilon_x^0} \quad (2.49)$$

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.50)$$

Não há deformação de corte pelo fato de o laminado ser balanceado. As equações (2.50) na forma expandida resultam nas expressões da Eq. (2.51). Substituindo as Equações (2.51) na (2.49) obtemos a (2.52).

$$N_x = A_{11}\varepsilon_x^0 + A_{12}\varepsilon_y^0 \quad (2.51)$$

$$0 = A_{12}\varepsilon_x^0 + A_{22}\varepsilon_y^0$$

$$E_x = \frac{1}{h} \left[A_{11} - \frac{A_{12}^2}{A_{22}} \right] \quad v_{xy} = \frac{A_{12}}{A_{22}} \quad (2.52)$$

De modo similar, para um carregamento uniaxial, N_y , obtemos a Eq. (2.53). E para o esforço de corte N_{xy} , obtemos a Eq. (2.54).

$$E_y = \frac{1}{h} \left[A_{22} - \frac{A_{12}^2}{A_{11}} \right] \quad v_{xy} = \frac{A_{12}}{A_{11}} \quad (2.53)$$

$$G_{xy} = \frac{A_{66}}{h} \quad (2.54)$$

2.5 Transformação das Tensões

A transformação do tensor de tensões, consiste em obter a descrição do estado de tensão num outro referencial que resulta de uma rotação em torno de um dos três eixos xyz do referencial inicial. A transformação pode ser feita usando as Eqs (2.55) a (2.56) para obtenção das tensões no referencial do laminado e do material, respetivamente [Reddy, 1997]. Ver em detalhe no ANEXO - A.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & 0 & 0 & -2cs \\ s^2 & c^2 & 0 & 0 & 0 & 2cs \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ cs & -cs & 0 & 0 & 0 & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.55)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & 0 & 0 & 2cs \\ s^2 & c^2 & 0 & 0 & 0 & -2cs \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & c & 0 \\ -cs & cs & 0 & 0 & 0 & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.56)$$

Com

$$c = \cos\theta \quad s = \sin\theta \quad 2cs = \sin(2\theta) \quad (2.57)$$

Como se viu no 2.4.1.2, a matriz transformação também é usada quando se pretende passar dos coeficientes de rigidez elástica para os coeficientes de rigidez elástica reduzidos transformados.

2.6 Critérios de Rotura de Materiais Compósitos

Os critérios de falha permitem caracterizar os estados de tensões em que a falha ocorre, e são apresentados como expressões matemáticas denominadas funções do critério de rotura (f). As funções do critério de rotura são definidas de tal forma que, quando nenhuma carga é aplicada, a função tem o valor "0". O valor "1" corresponde à rotura do material [Moura *et al.*, 2005], [Pinho, 2005].

Todos os critérios de falha apresentados nesta secção são utilizados para determinar a falha da primeira camada de acordo com a carga aplicada. Não são utilizados para prever falhas sucessivas que ocasionam falha total do laminado.

No caso da análise da resistência mecânica, os critérios de falha são definidos em função de variáveis que quantificam a resistência dos materiais empregues e as solicitações aplicáveis sobre a estrutura. Isto ocorre frequentemente pela relação de algumas das suas variáveis, podendo assim definir-se o critério de falha (de tensão) como sendo a relação entre a tensão gerada pelo carregamento na estrutura e a tensão de rotura do material utilizado para fabricação da estrutura.

Assim, o aparecimento de falha pode ser previsto por meio do índice de falha, a qual é definido como [Barbero, 2014]:

$$I_F = \frac{\textit{tensão (gerada pelo carregamento)}}{\textit{tensão de rotura}} \quad (2.58)$$

Em que a falha irá ocorrer sempre que $I_F \geq 1$. O inverso do índice de falha é denominado índice de resistência

$$R = \frac{1}{I_F} = \frac{\textit{tensão de rotura}}{\textit{tensão (gerada pelo carregamento)}} \quad (2.59)$$

Em que a falha está prevista quando $R \leq 1$.

2.6.1 Critérios Não Fenomenológicos

Diz-se que um critério é não fenomenológico quando está associado aos modos de rotura do material. Estes critérios de rotura consideram a natureza heterogénea do material e preveem a possibilidade de ocorrência de cada um dos Modos de rotura separadamente. Compreendem aos critérios não fenomenológicos, os critérios da tensão máxima, deformação máxima, Hashin, Hashin-Rotem, Puck, Hart-Smith, etc.

De acordo com a interatividade, os critérios interativos são aqueles em que há interação entre todos os componentes de tensão, através duma fórmula quadrática de ajuste. Estes critérios são do tipo Tsai-Hill e Tsai-Wu.

2.6.1.1 Critério da Tensão Máxima

O critério da tensão máxima é um critério não-interativo¹⁵, uma vez que não tem em conta os efeitos combinados das várias componentes de tensão. Neste tipo de critério as previsões não são geralmente conservadoras, sobretudo perante estados de tensão que se desviam bastante da uniaxialidade [Moura *et al.*, 2005].

O critério da tensão máxima prevê a rotura quando uma das componentes do tensor das tensões atinge a tensão de rotura correspondente. O índice de falha é definido como [Barbero, 2014]:

$$I_F = \max \left\{ \begin{array}{ll} \sigma_1/F_{1t} & \text{se } \sigma_1 > 0 \text{ ou } -\sigma_1/F_{1c} \text{ se } \sigma_1 < 0 \\ \sigma_2/F_{2t} & \text{se } \sigma_2 > 0 \text{ ou } -\sigma_2/F_{2c} \text{ se } \sigma_2 < 0 \\ \sigma_3/F_{3t} & \text{se } \sigma_3 > 0 \text{ ou } -\sigma_3/F_{3c} \text{ se } \sigma_3 < 0 \\ \text{abs}(\sigma_{12}/F_{12}) \\ \text{abs}(\sigma_{23}/F_{23}) \\ \text{abs}(\sigma_{13}/F_{13}) \end{array} \right. \quad (2.60)$$

O parâmetro F representa os valores de rotura. Nota-se que os parâmetros de resistência a compressão (F_{1c}, F_{2c}, F_{3c}) que como é do conhecimento geral são negativos devem ser usados com o sinal positivo.

¹⁵ Critérios não-interativos: não há interação entre as componentes de tensão.

2.6.1.2 Critério de Hashin-Rotem

O critério de Hashin-Rotem é um critério parcialmente interativo que visa atingir um compromisso entre a interatividade e a capacidade de distinguir modos de rotura, sobretudo a nível de rotura da fibra e rotura de matriz. A rotura da fibra ocorrerá devido às cargas de tração, ou pela microencurvadura devido às cargas de compressão. Este critério é idêntico ao critério da tensão máxima no que toca à rotura das fibras; ou seja, a condição de integridade é [Hashin *et al*, 1973], [Moura *et al*, 2005].

$$-F_{1c} < \sigma_1 < F_{1t} \quad (2.65)$$

Por outro lado, as falhas na matriz são assumidas paralelas às fibras, sendo previstas quando

$$\left(\frac{\sigma_2}{F_2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_6}{F_6}\right)^2 = 1 \quad (2.66)$$

em que

$$F_1 = F_{1t} \text{ se } \sigma_1 > 0 \quad F_1 = F_{1c} \text{ se } \sigma_1 < 0 \quad (2.67)$$

$$F_2 = F_{2t} \text{ se } \sigma_2 > 0 \quad F_2 = F_{2c} \text{ se } \sigma_2 < 0$$

Pese embora este critério distinga a rotura da fibra e da matriz separadamente, não distingue no entanto se a falha da matriz ocorre exatamente na interface ou no seu interior. Assim, propõe que tanto a tensão σ_2 e σ_6 contribuem para o aparecimento da falha (a proposta é em forma quadrática) [París, 2001].

A importância histórica desta proposta é que ela inicia uma maneira diferente de abordar a geração de critérios de falha de compósitos. Os autores procuraram reconhecer primeiramente os modos de falha, e em seguida, reconhecer as variáveis associadas a estes modos e propõem uma interação entre eles. No entanto, pese embora a ideia parece adequada para o tipo de materiais em análise (materiais fibrosos), também não é claro que as variáveis que propõem para cada caso sejam as mais adequadas ou de que maneira elas devem ser combinadas. É nesta vertente que surge o critério de Hashin 3D (ver Anexo B). Em 1980, Hashin (Hashin, 1980) voltou a analisar a proposta (Hashin *et al*, 1973) e estabeleceu algumas modificações. Há também quatro expressões envolvidas na proposta que Hashin desenvolveu para o caso 3D e, em seguida, particularizado para o caso 2D, apresentado no (2.6.1.3) [París, 2001].

2.6.1.3 Critério de Hashin 2D

O critério de falha de Hashin 2D é, a semelhança do critério de Hashin-Rotem, um critério parcialmente iterativo. Este critério propõe quatro tipos de modos de falha, e são previstos por quatro equações como se segue [París,2001; Altenbach, 2015]:

- Falha da fibra a tração

$$\left(\frac{\sigma_1}{F_{1t}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_6}{F_6}\right)^2 = 1 \quad se \quad \sigma_1 \geq 0 \quad (2.61)$$

- Falha da fibra a compressão

$$|\sigma_1| = F_{1c} \quad se \quad \sigma_1 < 0 \quad (2.62)$$

- Falha da matriz a tração

$$\left(\frac{\sigma_2}{F_{2t}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_6}{F_6}\right)^2 = 1 \quad se \quad \sigma_2 \geq 0 \quad (2.63)$$

- Falha da matriz a compressão.

$$\left(\frac{\sigma_2}{2F_4}\right)^2 + \left[\left(\frac{F_{2c}}{2F_4}\right)^2 - 1\right] \frac{\sigma_2}{F_{2c}} + \left(\frac{\sigma_6}{F_6}\right)^2 = 1 \quad se \quad \sigma_2 < 0 \quad (2.64)$$

Devido a ser compressão, deve ser mencionado que nesta última expressão, F_{2c} tem de ser tomada em valor absoluto, enquanto que σ_2 mantém o seu sinal. Esta condição é relevante no caso de o segundo termo da expressão.

Com referência à falha na fibra, a única diferença deste critério em relação o critério de Hashin-Rotem, que consiste no facto de que, de acordo com a rotura da fibra por tração Hashin considerar o efeito da tensão de corte (σ_6), e na rotura por compressão descartar a possibilidade do contributo de σ_6 . Uma modificação sem base clara [París, 2001].

Convém aqui referir que este critério será muitas vezes apresentado ao longo deste trabalho apenas como critério de Hashin.

2.6.2 Critérios Fenomenológicos

Os critérios fenomenológicos são aqueles nos quais se prevê apenas o fenômeno de ocorrência de falha; não o modo de falha. Estes critérios também recebem a designação de não fisicamente baseados (“non physically based”). Os critérios Tsai-Hill e Tsai-Wu são alguns exemplos destes critérios, e baseiam-se em curvas de ajustamento, normalmente definidos por uma fórmula polinomial quadrática de ajuste (“fitting”) que fornece o fator de segurança de imediato. Neste polinômio, há interação entre todos os componentes das tensões. São rápidos e diretos de usar, mas têm de ser usados com precaução, pois podem dar resultados imprevistos.

2.6.2.1 Critério de Tsai-Wu

O índice de falha de Tsai-Wu é definido por [Barbero, 2014]:

$$I_F = \frac{1}{R} = \left[-\frac{B}{2A} + \sqrt{\left(\frac{B}{2A}\right)^2 + \frac{1}{A}} \right]^{-1} \quad (2.68)$$

em que

$$A = \frac{\sigma_1^2}{F_{1t}F_{1c}} + \frac{\sigma_2^2}{F_{2t}F_{2c}} + \frac{\sigma_3^2}{F_{3t}F_{3c}} + \frac{\sigma_{12}^2}{F_{12}^2} + \frac{\sigma_{23}^2}{F_{23}^2} + \frac{\sigma_{13}^2}{F_{13}^2} \\ + c_{12} \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{F_{1t}F_{1c}F_{2t}F_{2c}}} + c_{23} \frac{\sigma_2\sigma_3}{\sqrt{F_{2t}F_{2c}F_{3t}F_{3c}}} + c_{13} \frac{\sigma_1\sigma_3}{\sqrt{F_{1t}F_{1c}F_{3t}F_{3c}}} \quad (2.69)$$

$$B = (F_{1t}^{-1} - F_{1c}^{-1})\sigma_1 + (F_{2t}^{-1} - F_{2c}^{-1})\sigma_2 + (F_{3t}^{-1} - F_{3c}^{-1})\sigma_3$$

onde c_{12} , c_{23} , c_{13} são os coeficientes de acoplamento de Tsai-Wu, que por norma recebem o valor de -1.

Dado ao facto dos valores dos parâmetros de resistência F_{3t} e F_{3c} raramente estarem disponíveis na literatura, é prática comum usar-se, para estes parâmetros, os valores dos parâmetros de resistência do plano transversal. Para a resistência intralaminar F_5 assume-se comumente o valor do parâmetro de resistência no plano de corte, i.e., F_6 . O parâmetro F_4 pode ser estimado como sendo o parâmetro de resistência ao corte da matriz.

Capítulo III – MODELAÇÃO DOS LAMINADOS

3.1 Introdução

Pretende-se neste capítulo fazer a modelação dos laminados que serão analisados neste trabalho. Serão definidas as propriedades elásticas e mecânicas (de resistência), geometria das placas, malha, sequências de empilhamento, condições de fronteira, situação de carga e critério de falha. Será também apresentado a sequência de passos essenciais para o estudo no Maple.

3.2 Propriedades Elásticas e Parâmetros de Resistência. Parâmetros da Geometria

Neste trabalho serão analisados os compósitos por laminas pre-impregnadas de carbono com fibras de grafite do tipo IM (*intermediate modulus*) e resina epoxídica. As propriedades elásticas e parâmetros de resistência são apresentados na Tabela 3.1. Na Tabela 3.2 são apresentados os parâmetros da geometria.

Tabela 3.1: Propriedades elásticas e parâmetros de resistência [Barbero, 2008]

Propriedades	Unidade	Designação	T300/5208
E_1	[GPa]	Módulo de Elasticidade Longitudinal	136
$E_2 = E_3$	[GPa]	Módulo de Elasticidade Transversal	9,8
$G_{12} = G_{13}$	[GPa]	Módulo de Distorção	4,7
G_{23}	[GPa]	Módulo de Distorção	5,2
$\nu_{12} = \nu_{13}$		Coeficiente de Poisson	0,28
ν_{23}		Coeficiente de Poisson	0,15
F_{1t}	[MPa]	Tensão de Rotura Longitudinal a Tração	1550
F_{1c}	[MPa]	Tensão de Rotura Longitudinal a Compressão	1090
$F_{2t} = F_{3t}$	[MPa]	Tensão de Rotura Transversal a Tração	59
$F_{2c} = F_{3c}$	[MPa]	Tensão de Rotura Transversal a Compressão	59
$F_5 = F_6$	[MPa]	Tensão de Rotura no plano de Corte	75
F_4	[MPa]	Tensão de Rotura no plano de Corte	58

Tabela 3.2: Parâmetros da geometria

Parâmetros do Laminado		Designação	
Nº de Lâminas		16	
Esp. Camada (t)	[mm]	0.14	
Laminado Quase Isotrópico	(<i>Quasi Isotropic Laminate</i>)	$[(0/90/\pm 45)_2]_s$	
Laminado Cruzado	(<i>Cross-Ply Laminate</i>)	$[(0/90)_4]_s$	
Laminado Unidirecional	(<i>Unidirectional Laminate</i>)	$[(0)_8]_s$	
Laminado Angulado	(<i>Angle-Ply Laminate</i>)	$[(\pm 45)_4]_s$	
Plano médio (z)		0	
$a_x = a_y$	[mm]	Dimensões das placas	100
Carga		Descrição	Valor (N/mm)
N_x	[N/mm]	Situação de carga de tração longitudinal	500
N_y	[N/mm]	Situação de carga de tração transversal	500
$N_x = N_y$	[N/mm]	Situação de carga de tração biaxial	500

3.3 Solução Numérica (ANSYS 14)

3.3.1 Elemento de Placa

O elemento de placa usado neste estudo é o elemento linear ortotrópico *shell181: 4-Node Finite Strain Shell*. Este tipo de elemento é apropriado para analisar estruturas de espessura relativamente fina. Pode ser usado para aplicações em camadas para a modelação de cascas laminadas ou construção em sanduíche. É suportado um máximo de 250 camadas. O elemento é adequado para aplicações lineares e não-lineares, e tem grandes capacidades de deformação [Manual ANSYS; Barbero, 2008].

3.3.2 Geometria da Placa

As placas em análise correspondem aos quatro tipos de laminados (Quase Isotrópico, Cross-Ply, Unidirecional e Angle-Ply) e consistem num elemento de placa fina quadrada, conforme se apresenta na Figura 3.1.

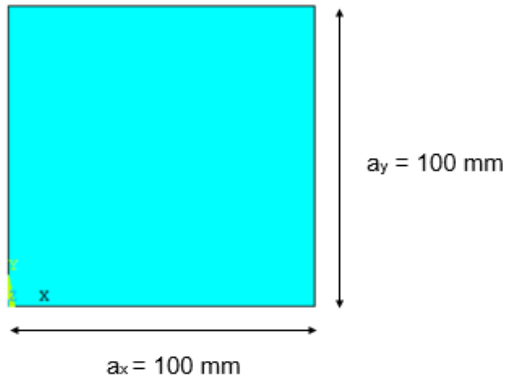


Figura 3.1: Geometria da placa em 2D

3.3.3 Malha

A malha considerada é de 10×10 elementos nas direções x e y respectivamente, como se apresenta na Figura 3.2. Esta malha será utilizada em todos os laminados.

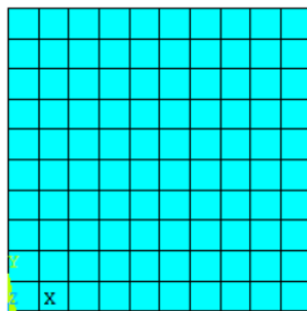
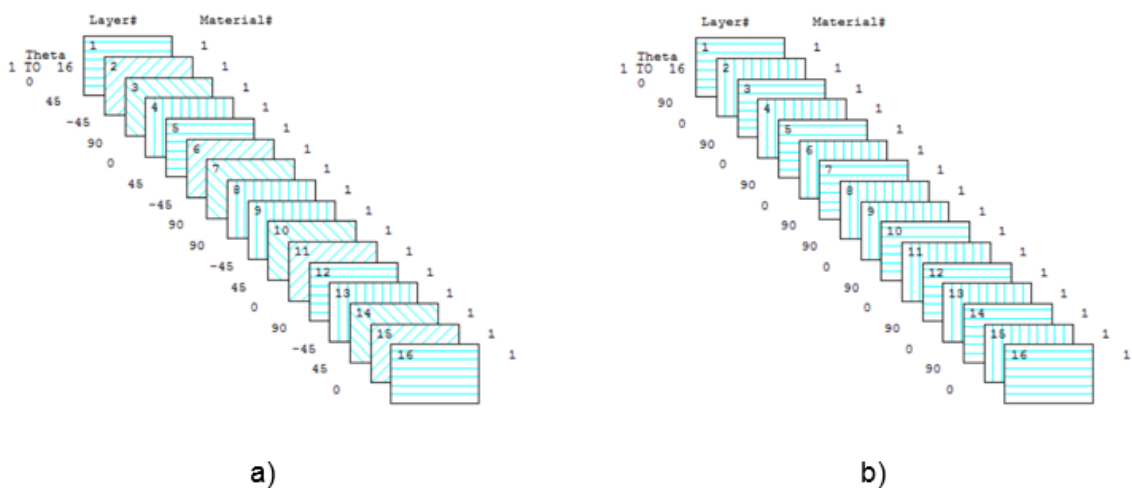


Figura 3.2: Definição da malha

3.3.4 Sequências de Empilhamento

Na Figura 3.3 são ilustrados os esquemas de laminação definidos na Tabela 3.2



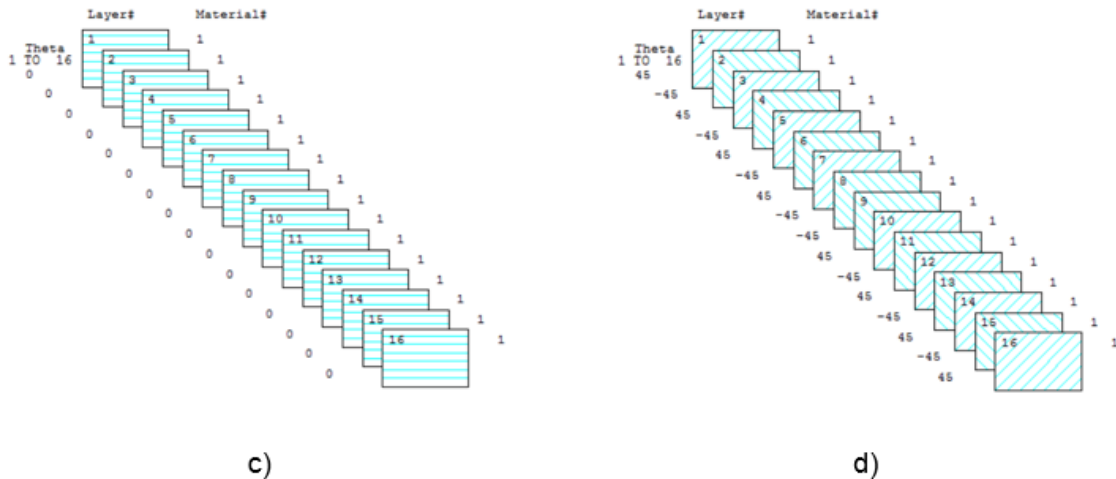


Figura 3.3: Sequências de empilhamento: a) Laminado Quase Isotrópico; b) Cross-ply; c) Unidirecional; d) Angle-Ply.

Os gráficos ilustrados na Figura 3.3 são obtidos, do ANSYS, a partir do seguinte código:

```
LAYPLOT,1 ! Sequência de empilhamento (Elemento 1)
/GROPTS,VIEW,1
```

3.3.5 Condições de Fronteira - Placa Simplesmente Apoiada

As condições de contorno são os valores dos graus de liberdade (DOF – *degrees of freedom*) na fronteira. Na análise estrutural, os DOF são deslocamentos e rotações. Estes valores são determinantes no tipo de estudo que se pretende fazer; ou seja, a condição de fronteira deve ser definida de acordo com os objetivos do estudo, a fim de se evitar erros na análise e interpretação de resultados.

O estudo foi feito em placas simplesmente apoiadas. Enquanto o termo simplesmente apoiado significa sempre restringir a deflexão transversal $w(x,y)$ na fronteira, não define exclusivamente as condições de contorno sobre os deslocamentos no plano normal e tangente à fronteira, respetivamente.

A Figura 3.4 é representativa das condições de contorno nas placas laminadas usadas neste estudo. Restringe-se, assim, a deflexão transversal, i.e., $\frac{dw_0}{dy} = \frac{dw_0}{dx} = 0$. Será analisado 1/4 da geometria devido à simetria.

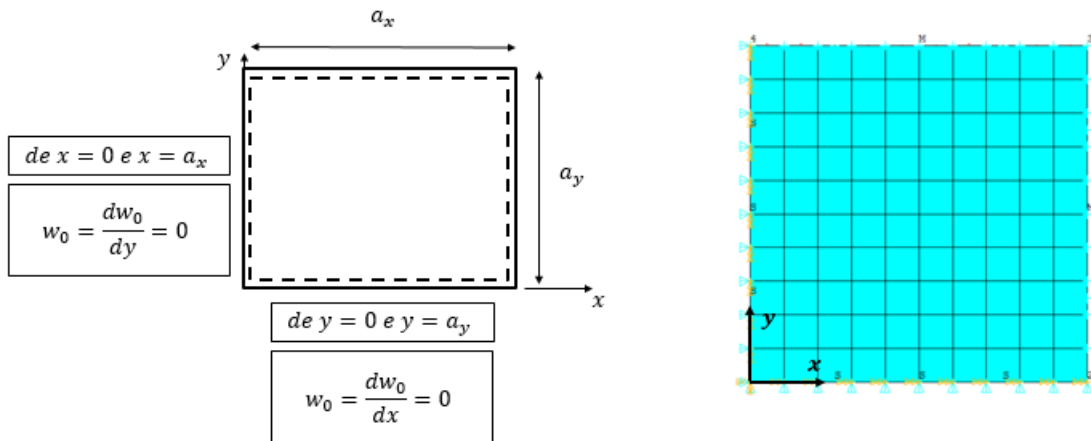


Figura 3.4: Condições de fronteira: apoio simples (*simply supported*). Adaptado de [Reddy, 1997].

Assim, no Ansys foram impostas as seguintes restrições, e condições de simetria: [Barbero, 2008]:

```

DL, 2, 1, UZ, 0           ! Definir apoios simples
DL, 3, 1, UZ, 0
DL, 1, 1, SYMM           ! Definir simetria
DL, 4, 1, SYMM

```

3.3.6 Situação de Carga de Tração Longitudinal (N_x)

As situações de carga incluem as condições de fronteira e as solicitações exteriores aplicadas.

O elemento de placa estará assim sob uma solicitação uniaxial de tração longitudinal (força por unidade de comprimento) conforme definido na Tabela 3.5. A Figura 4.5 ilustra as condições de fronteira e aplicação da carga.

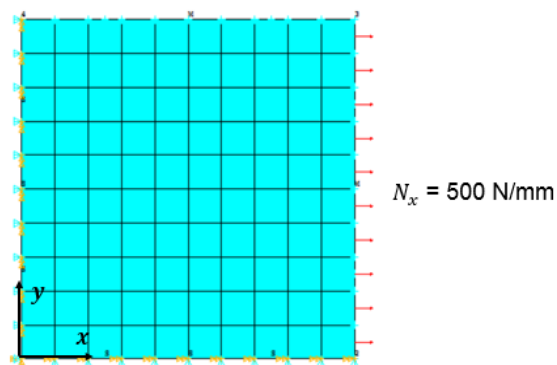


Figura 3.5: Condições de fronteira e aplicação de esforço na direção longitudinal

Para a definição da carga, no ANSYS, utilizou-se o seguinte código:

```
! Esforço Nx
SFL,2,PRES,-500      ! Pressão uniforme de 500 N/mm, de tração
/PSF,PRES,NORM,2,0,1 ! Mostrar a carga linearmente distribuída
```

3.3.7 Situação de Carga de Tração Transversal (N_y)

Neste caso, o elemento de placa estará sob uma solicitação de tração transversal de tração (força por unidade de comprimento) conforme definido na Tabela 3.2. A Figura 3.6 ilustra as condições de fronteira e aplicação da carga.

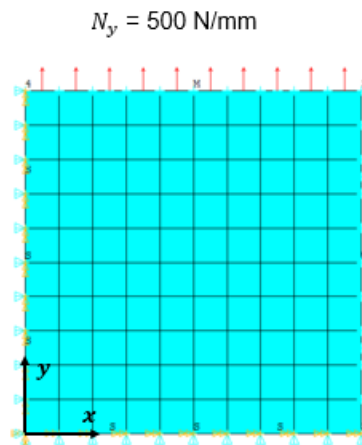


Figura 3.6: Condições de contorno e aplicação de esforço na direção transversal

Para definição da carga, utiliza-se o mesmo código como em (3.3.6). No entanto, dever-se-á apenas substituir o número 2 pelo número 3. Estes números referem-se às faces da placa onde são aplicadas a carga distribuída de forma uniforme.

```
! Esforço Ny
SFL,3,PRES,-500      ! Pressão uniforme de 500 N/mm, de tração
/PSF,PRES,NORM,2,0,1 ! Mostrar a carga linearmente distribuída
```

3.3.8 Situação de Carga de Tração Biaxial ($N_x = N_y$)

Neste caso de tração biaxial, o elemento encontra-se sujeito, ao mesmo tempo, sob solitação longitudinal e transversal de tração, conforme se apresenta na Figura 3.7.

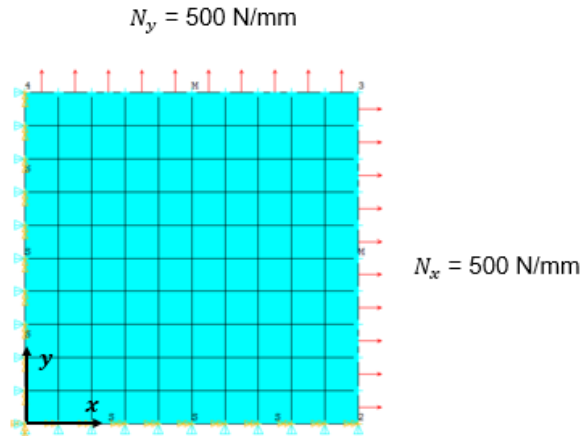


Figura 3.7: Condições de fronteira e aplicação de esforço na direção longitudinal e transversal

Neste caso, utiliza-se simultaneamente o mesmo código de (3.3.6) e (3.3.7) para definição da carga. Ficando deste modo:

```
SFL,2,PRES,-500      ! Esforço Nx e Ny
                       ! Pressão uniforme de 500 N/mm, de tração
SFL,3,PRES,-500      ! Pressão uniforme de 500 N/mm, de tração
/PSF,PRES,NORM,2,0,1 ! Mostrar a carga linearmente distribuída
```

3.3.9 Critério de Falha

Os critérios de rotura podem ser definidos a partir do comando FC (FC, FCDEL, FCLIST), no módulo de Pós-processamento (POST1). Antes da definição dos parâmetros dos critérios de falha, o sistema de coordenadas da camada deve estar ativo, usando (RSYS, SOLU). Assim, a camada em que se pretende saber o índice de falha é selecionada a partir do comando da lâmina (LAYER command) [Imaoka, 2009].

Os Critérios de falha podem ser avaliados a nível nodal (PLESOL, PRESOL, PLNSOL, PRNSOL, etc) ou ao nível do elemento. Os resultados disponíveis incluem tensões, deformações, índice de falha de Tensão Máxima (MAXF) definido nas Eqs.(2.60). Índice de falha da Deformação Máxima, índice de falha de Tsai-Wu, índice inverso de Tsai-Wu definido na Eq. (2.68).

```

/POST1                ! Módulo Pós-processamento
RSYS,LSYS             ! Sistema de coordenadas da lâmina

FC,1,S,XTEN,1550      ! Mat1, Pressão, tensão admissível em x
FC,1,S,XCMP,-1090
FC,1,S,YTEN,59
FC,1,S,YCMP,-59
FC,1,S,ZTEN,59
FC,1,S,ZCMP,-59
FC,1,S,XY,75
FC,1,S,YZ,58
FC,1,S,XZ,75
FC,1,S,XYCPCP,-1
FC,1,S,YZCP,-1
FC,1,S,XZCP,-1

LAYER,1              ! Apresentar o resultado da lâmina #1
PRNSOL,S,FAIL        ! Apresenta a tabela com índice de falha
PLNSOL,S,MAXF        ! MAXF é o IF para Tensão Máxima
PLNSOL,S,TWSR        ! TWSR é o IF para inversa de TSAI-WU

FINISH               ! Fim do módulo Pós-processamento

```

3.4 Resolução Analítica (Maple 17)

O estudo de falha a partir do MAPLE 17 consiste essencialmente no modelo matemático que assenta na Teoria Clássica de Placas laminadas (CLTP) definida no (2.4.1), e nos critérios de falha definidos no (2.6); e segue o seguinte procedimento:

- Determinar a matriz dos coeficientes de rigidez elástica, de acordo com as expressões da Eq. (2.37).
- Determinar a matrizes dos coeficientes de rigidez elástica transformados, i.e., no referencial do material, a partir das Eqs. (2.39).
- Calcular as matrizes de rigidez do laminado (A, B, D), usando as Eqs. (2.45). Neste caso em que os laminados são simétricos $B = 0$.
- Determinar a inversa de A, i.e., A^{-1} . De acordo com a natureza dos carregamentos ($M_x = M_y = M_{xy} = 0$) não será necessário analisar o efeito de rigidez de flexão.
- Definir a carga. Calcular as deformações a partir da Eq. (2.48).
- Calcular as tensões no referencial do laminado (xyz), usando a Eq. (2.40).
- Calcular as tensões no referencial do material, recorrer a transformação de referencial, a partir das Eq. (2.49) a (2.51).
- Aplicar os critérios de rotura conforme definidos na secção (2.6).

Os cálculos efetuados no ANSYS e MAPLE foram remetidos para ANEXO – E.

Nas Figuras (3.8) a (3.10) são apresentados os três casos de carregamento a serem estudados neste trabalho. Trata-se de uma representação 3D das placas laminadas, com as respetivas dimensões e condição de fronteira. Note-se que nas três situações são analisados os laminados Quase Isotrópico, Cross-Ply, Unidirecional, e Angle-Ply, definidos na Tabela 3.2.

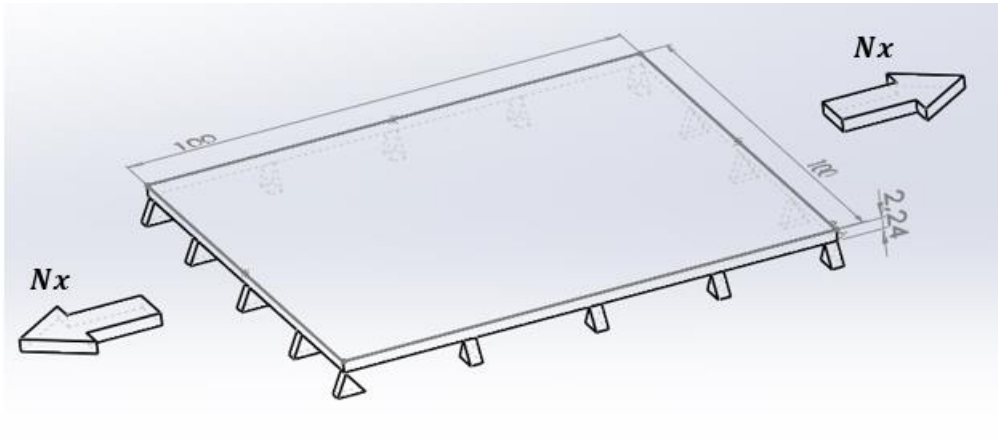


Figura 3.8: Condições de fronteira e aplicação de esforço na direção longitudinal

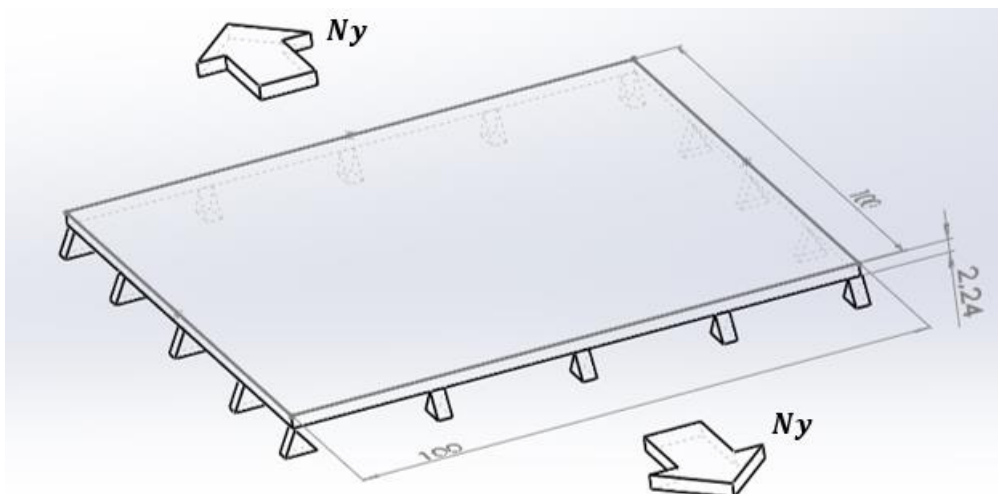


Figura 3.9: Condições de fronteira e aplicação de esforço na direção transversal

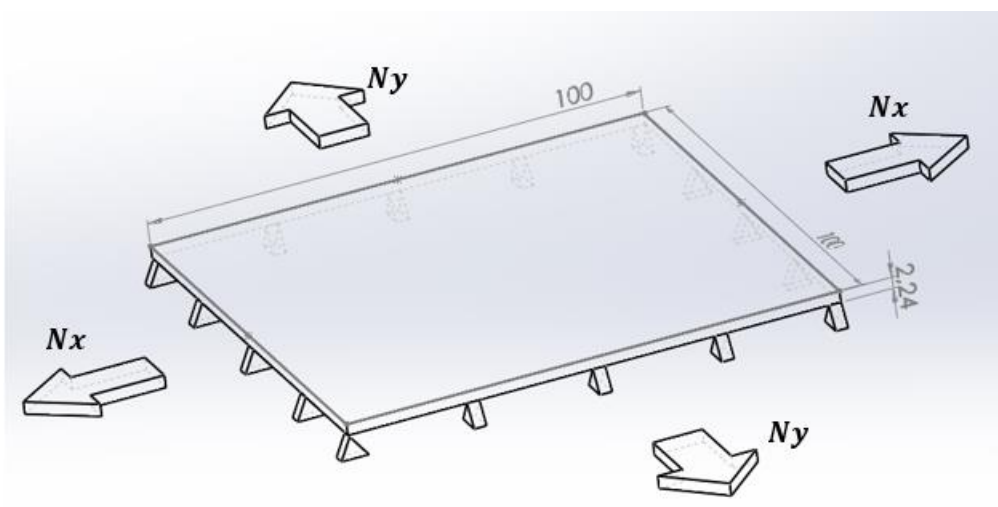


Figura 3.10: Condições de fronteira e aplicação de esforço na direção longitudinal e transversal

Capítulo IV – VALIDAÇÃO DOS CRITÉRIOS DE FALHA

4.1 Introdução

Nesta secção é feita a validação da formulação matemática necessária ao estudo de placas laminadas. Este estudo consistirá na resolução de dois exercícios realizados em que foram analisados os critérios de falha da Tensão Máxima, Tsai-Wu, Hashin e Hashin-Rotem. Os critérios da Tensão Máxima e de Tsai-Wu são validados no ANSYS e MAPLE. Os critérios de Hashin-Rotem e Hashin 2D são analisados apenas pelo método analítico, no MAPLE.

4.2 Validação dos Critérios da Tensão Máxima e do Critério de Tsai-Wu

A validação critérios da Tensão Máxima e Tsai-Wu foi feita a partir de um estudo realizado por Barbero. Trata-se do exercício 3.12 desta referência [Barbero, 2008] onde pretende-se de um modo geral determinar os índices de falha e índices de resistência de cada camada de um laminado Quase Isotrópico, cujo as propriedades elásticas e parâmetros de resistência são apresentados na Tabela 4.1. Na Tabela 4.2 constam os parâmetros do laminado.

Tabela 4.1: Propriedades elásticas e parâmetros de resistência [Barbero, 2008].

<i>Propriedades</i>	<i>Unidade</i>	<i>Designação</i>	<i>AS4D/9310</i>
E_1	[GPa]	Módulo de Elasticidade Longitudinal	133,86
$E_2 = E_3$	[GPa]	Módulo de Elasticidade Transversal	7,706
$G_{12} = G_{13}$	[GPa]	Módulo de Distorção no plano 12, 13	4,306
G_{23}	[GPa]	Módulo de Distorção no plano 23	2,76
$\nu_{12} = \nu_{13}$		Coeficiente de Poisson no plano 12, 13	0,301
ν_{23}		Coeficiente de Poisson no plano 23	0,396
F_{1t}	[MPa]	Tensão de Rotura Longitudinal a Tração	1830
F_{1c}	[MPa]	Tensão de Rotura Longitudinal a Compressão	1096
$F_{2t} = F_{3t}$	[MPa]	Tensão de Rotura Transversal a Tração	57
$F_{2c} = F_{3c}$	[MPa]	Tensão de Rotura Transversal a Compressão	22
F_6	[MPa]	Tensão de Rotura no plano de Corte	71

Tabela 4.2: Parâmetros do laminado

Parâmetros do Laminado		Designação
Nº de Lâminas		8
Esp. Camada (hc)	[mm]	1.25
Laminado Quase Isotrópico		[0/90/±45] _s
Plano médio (z)		0
$a_x = a_y$	[mm]	2000
N_x	[N/mm]	100

Na Tabela 4.3 são apresentados os resultados obtidos no Maple e Ansys para efeito de validação dos critérios de falha da Tensão Máxima e Tsai-Wu. Estes valores foram comparados com os fornecidos pela literatura (Barbero, 2008), apresentados na Tabela 4.4.

Tabela 4.3: Índices de falha e índice de resistência para cada lâmina, obtidos no Maple e Ansys

Camada		MAPLE			
		Tensão Máxima		Tsai - Wu	
		I_F	R	I_F	R
#1	0°	0,0144	69,3427	0,0144	69,3852
#4	90°	0,0243	41,1557	0,0294	34,0397
#2	45°	0,0157	63,8394	0,0199	50,1810
#3	-45°	0,0157	63,8394	0,0199	50,1810
Camada		ANSYS			
		I_F	R	I_F	R
		#1	0°	0,0144	69,3433
#4	90°	0,0243	41,1557	0,0294	34,0402
#2	45°	0,0157	63,8407	0,0199	50,1807
#3	-45°	0,0157	63,8407	0,0199	50,1807

Onde I_F corresponde ao índice de falha, e R ao índice de resistência.

Tabela 4.4: Índices de falha e índice de resistência para cada lâmina obtidos por Barbero

Camada		ANSYS			
		Tensão Máxima		Tsai - Wu	
		I_F	R	I_F	R
#1	0°	0,0144	69,34	0,0144	69,38
#4	90°	0,0243	41,16	0,0294	34,04
#2	45°	0,0157	63,84	0,0199	50,18
#3	-45°	0,0157	63,84	0,0199	50,18

A partir das Tabelas (4.3) e (4.4) é possível verificar que os valores obtidos nos dois programas são semelhantes aos fornecidos pela literatura.

A programação deste exercício no Maple e Ansys foi remetida na íntegra para o ANEXO - C.

4.3 Validação do critério de Hashin-Rotem

A validação dos critérios de Hashin-Rotem foi feita com base no exercício 7.5 da seguinte referência [Moura *et al.* 2005]. Neste exercício pretende-se de um modo geral determinar os valores dos esforços conducentes à primeira rotura de camada (ou índices de resistência). Na Tabela 4.5 constam as propriedades elásticas e parâmetros de resistência. Os parâmetros do laminado são apresentados na Tabela 4.6.

Tabela 4.5: Propriedades elásticas e Parâmetros de resistência [Moura *et al.* 2005].

Propriedades	Unidade	Designação	AS4D/9310
E_1	[GPa]	Módulo de Elasticidade Longitudinal	177
E_2	[GPa]	Módulo de Elasticidade Transversal	11
G_{12}	[GPa]	Módulo de Distorção	7.6
ν_{12}		Coefficiente de Poisson	0,327
F_{1t}	[MPa]	Tensão de Rotura Longitudinal a Tração	1600
F_{1c}	[MPa]	Tensão de Rotura Longitudinal a Compressão	1600
F_{2t}	[MPa]	Tensão de Rotura Transversal a Tração	50
F_{2c}	[MPa]	Tensão de Rotura Transversal a Compressão	160
F_6	[MPa]	Tensão de Rotura no plano de Corte	70

Tabela 4.6: Parâmetros do laminado

<i>Parâmetros do Laminado</i>	<i>Designação</i>
Nº de Lâminas	8
Esp. Camada (t) [mm]	0.14
Laminado Quase Isotrópico	[0/90/±45] _s
Plano médio (z)	0
$N_x = N_y$ [N/mm]	
$N_{xy} = 0.25N_x$ [N/mm]	

A par do critério de Hashin-Rotem, validou-se também neste exercício o critério de Tsai-Wu. Esta resolução foi de certa forma importante, pelo facto de ter sido possível verificar uma gralha nos resultados do livro. Isto é, os valores dos esforços conducentes à primeira rotura de camada apresentados no livro são:

$$\begin{aligned} (N_x)_{u0} &= 564.6 \text{ N/mm} & (N_x)_{u90} &= 564.6 \text{ N/mm} \\ (N_x)_{u45} &= 765.6 \text{ N/mm} & (N_x)_{u-45} &= 447.3 \text{ N/mm} \end{aligned}$$

No entanto os valores corretos são apresentados nas Tabelas (4.7) e (4.8). Refere-se o facto de os resultados terem sido confirmados com um dos autores do livro, o Professor Doutor Alfredo de Moraes a quem desde já muito agradeço que confirmou por escrito dizendo:

*“ Antes de mais, agradeço o interesse no nosso livro, que espero estar a ser útil para os seus estudos. Agradeço também ter verificado os resultados dos exercícios. **Não abri o ficheiro que enviou, mas detetei erros nos resultados dos exercícios 7.5 e 7.6. Concretamente, no exercício 7.5 obtenho para o critério de Tsai-Wu:***

$$N_{xu0} = N_{xu90} = 371.8 \text{ N/mm}$$

$$N_{xu45} = 468.6 \text{ N/mm}$$

$$N_{xu-45} = 325.4 \text{ N/mm},$$

sendo que esta última seria a carga de 1ª rotura de camada”.

Os resultados dos esforços conducentes à primeira rotura de camada obtidos para efeito de validação dos critérios de Hashin-Rotem e Tsai-Wu são apresentados na Tabela 4.7. Estes valores foram comparados com os valores fornecidos pela literatura

(Moura *et al.* 2005), no caso do critério de Hashin-Rotem, e com os valores corrigidos, no caso do critério de Tsai-Wu, como se apresenta na Tabela 4.8.

Pese embora, neste caso, se pretenda determinar os índices de resistência, achou-se relevante recorrer também ao cálculo dos índices de falha.

Tabela 4.7: Índices de falha de Tsai-Wu Hashin-Rotem.

Camada		Tsai - Wu		Hashin-Rotem - Matriz		Hashin-Rotem - Fibra	
		I_F	R	I_F	R	I_F	R
#1	0°	0,003	371,776	0,003	366,507	0,001	965,531
#4	90°	0,003	371,776	0,003	366,507	0,001	965,531
#2	45°	0,002	468,604	0,002	527,081	0,001	669,748
#3	-45°	0,003	325,415	0,003	307,887	0,0006	1729,206

Tabela 4.8: Índices de falha de Tsai-Wu e Hashin-Rotem obtidos pela literatura.

Camada		Tsai - Wu		Hashin-Rotem - Matriz		Hashin-Rotem - Fibra	
		I_F	R	I_F	R	I_F	R
#1	0°	0,003	371,8	0,003	366,5	0,001	965,6
#4	90°	0,003	371,8	0,003	366,5	0,001	965,6
#2	45°	0,002	468,6	0,002	527,1	0,001	669,8
#3	-45°	0,003	325,4	0,003	307,9	0,001	1729

A programação deste exercício no Ansys e Maple foi remetida para o ANEXO -D.

A par dos casos abordados nesta secção, outros estudos foram também realizados com sucesso no âmbito da previsão de falha da primeira camada o que permitiu reforçar a correta modelação usada neste trabalho [Mukhopadhyay, 2004], [Hyer, 2009].

Capítulo V – ANÁLISE DE RESULTADOS

5.1 Introdução

Nesta secção são apresentados os resultados obtidos por cada uma das diferentes teorias de previsão de falha: teoria de Tensão Máxima, Tsai-Wu, Hashin e Hashin-Rotem. Estes resultados consistem nos valores das tensões, índices de falha (I_F) e índice de resistência (R) previsto por cada teoria nas quatro sequências de empilhamento: Quase Isotrópico, Cross-ply, Unidirecional e Angle-ply.

Os resultados obtidos são apresentados primeiramente na forma de gráficos de radar e posteriormente (nas mesmas subsecções), de maneira mais detalhada, na forma de tabelas. Relativamente aos gráficos, os números que se encontram na parte exterior (de 1 a 16) correspondem às camadas dos laminados. As camadas seguem uma ordem crescente começando da parte superior do laminado até a parte inferior.

5.2 Simulação em Tração Longitudinal (N_x)

5.2.1 Estado de Tensão em cada Camada dos Quatro Laminados

Dado o facto de os critérios de rotura poderem ser definidos como sendo a relação entre a tensão gerada pelo carregamento na estrutura e a tensão última de resistência do material, é de todo importante a análise das tensões em cada camada dos laminados, uma vez que é um indicador pelo qual podemos saber se algum laminado irá falhar, e qual o laminado. No entanto, a partir deste indicador não é possível quantificar a falha.

As Figuras (5.1), (5.2), (5.3) mostram os valores das tensões (σ_1), (σ_2), e (σ_6) a partir das quais podemos verificar se existem valores de tensões superiores às tensões limite do material (definidos na Tabela 3.1).

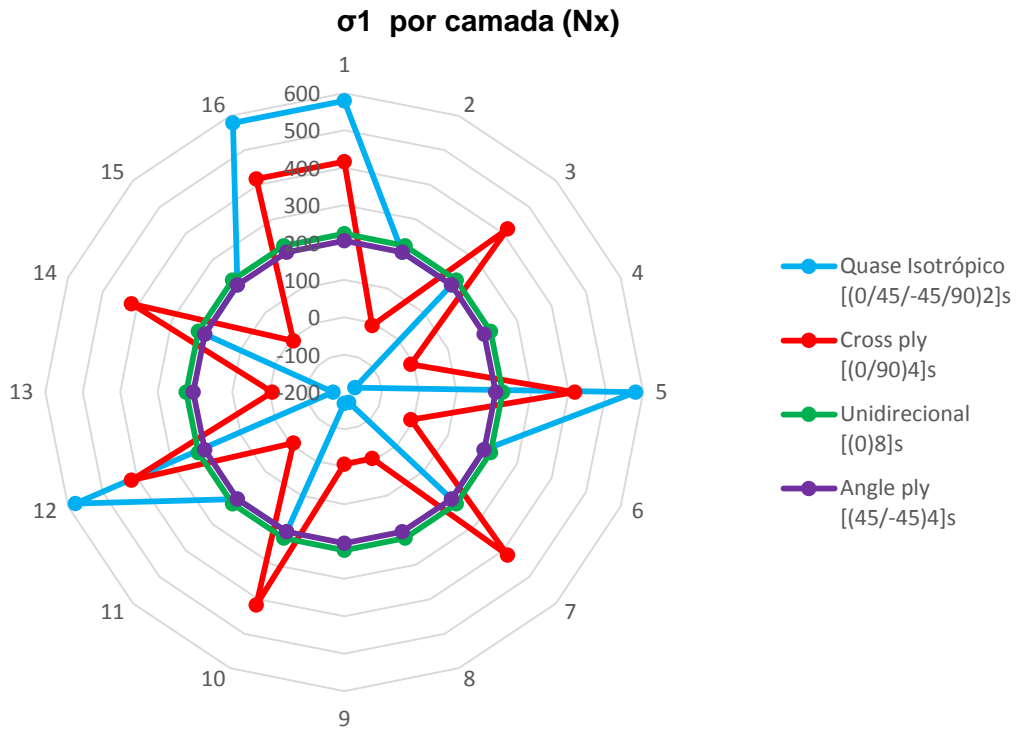


Figura 5.1: Tensão (σ_1) por lâmina, nos quatro laminados por ação de Nx

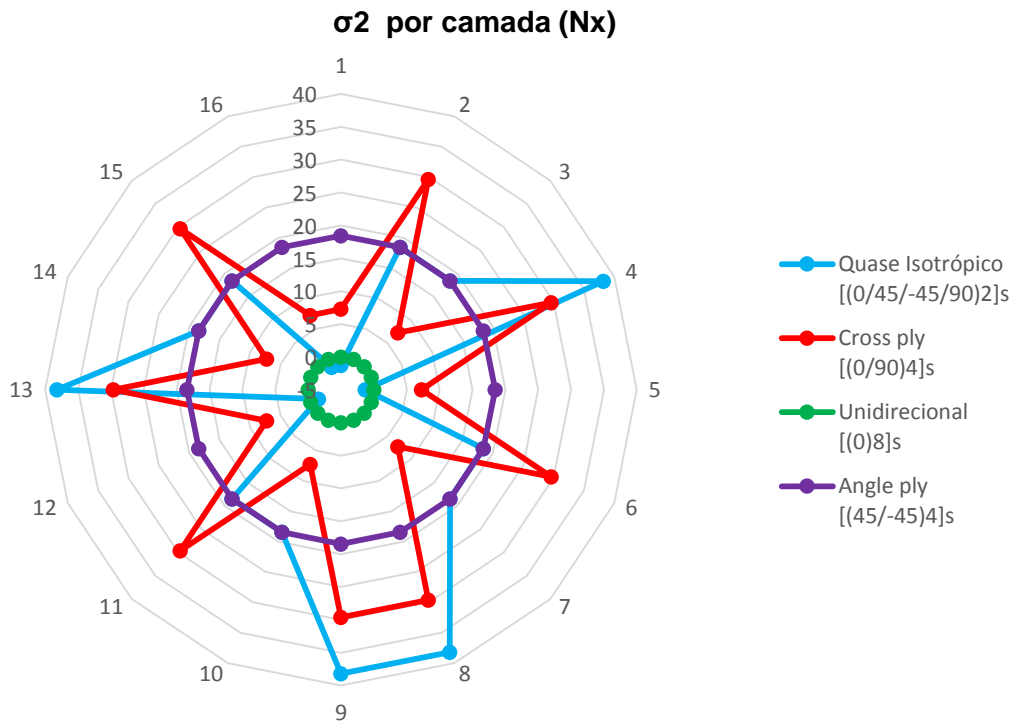


Figura 5.2: Tensão (σ_2) por lâmina, nos quatro laminados por ação de Nx

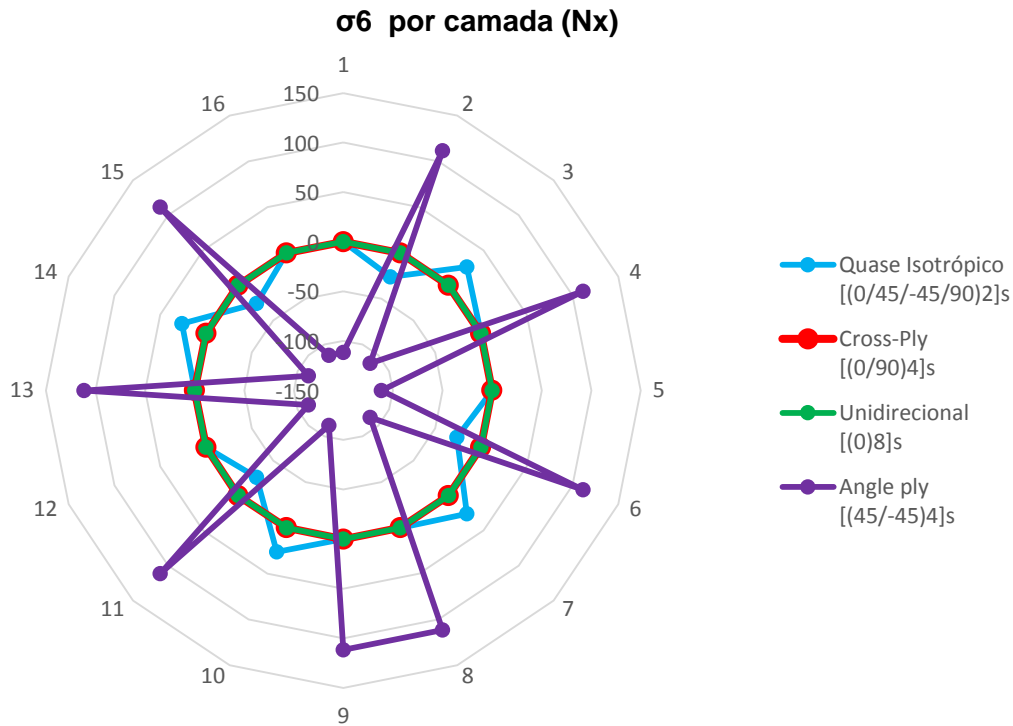


Figura 5.3: Tensão (σ_6) por lâmina, nos quatro laminados por ação de N_x

Nas Tabelas (5.1) a (5.4) são apresentados mais detalhadamente os valores das tensões originadas pela ação do esforço aplicado na direção longitudinal, calculados numérica e analiticamente.

Se compararmos o valor da tensão (σ_1) de cada uma das 16 camadas dos quatro laminados com o valor dos parâmetros de resistência segundo a direção 1 do material ($F_{1t} = 1550$ MPa, e $F_{1c} = 1090$ MPa) constatamos que a tensão (σ_1) em cada camada gerada por ação do esforço aplicado é bastante inferior às tensões limite do material. Por essa razão, podemos aferir que para este carregamento uniaxial de tração ($N_x = 500$ N/mm) não ocorrerá rotura da camada.

De acordo com a direção 2 do material, podemos constatar que a tensão (σ_2) em cada uma das lâminas é inferior aos valores de tensão última de resistência do material naquela direção ($F_{2t} = 59$ MPa, e $F_{2c} = 59$ MPa). Assim, não haverá falha do material.

No caso das tensões no plano 12, podemos observar a existência de valores superiores ao valor da tensão última de resistência do material naquele plano ($F_6 = 75$ MPa). Como se compreende a partir da Tabela 5.4, a aplicação da carga N_x provocará uma tensão de corte de $\sigma_6 = 111.6$ MPa, superior a tensão limite do

material, no laminado com lâminas orientadas a $\pm 45^\circ$. Podemos assim aferir que para este carregamento uniaxial de tração ($N_x = 500 \text{ N/mm}$) o laminado Angle-Ply é menos resistente, e por isso irá falhar.

Tabela 5.1: Estado de tensão no laminado Quase Isotrópico por ação de N_x

	<i>Quase Isotrópico</i>	MAPLE			ANSYS		
		S1	S2	S6	Sx	Sy	Sxy
#1	0°	578,839	-1,303	0	579,126	-1,302	0
#2	45°	204,707	18,508	-26,243	204,768	18,447	-26,161
#3	-45°	204,707	18,508	26,243	204,768	18,447	26,161
#4	90°	-169,426	38,318	0	-169,591	38,195	0

Tabela 5.2: Estado de tensão no laminado Cross-Ply por ação de N_x

	<i>Cross-Ply</i>	MAPLE			ANSYS		
		S1	S2	S6	Sx	Sy	Sxy
#1	0°	416,696	7,283	0	416,797	7,262	0
#2	90°	-7,283	29,733	0	-7,262	29,632	0

Tabela 5.3: Estado de tensão no laminado Unidirecional por ação de N_x

	<i>Unidirecional</i>	MAPLE			ANSYS		
		S1	S2	S6	Sx	Sy	Sxy
#1	0°	223,214	0	0	223,214	0	0

Tabela 5.4: Estado de tensão no laminado Angle-Ply por ação de N_x

	<i>Angle-Ply</i>	MAPLE			ANSYS		
		S1	S2	S6	Sx	Sy	Sxy
#1	45°	204,707	18,508	-111,607	204,768	18,447	-111,607
#2	-45°	204,707	18,508	111,607	204,768	18,447	111,607

Os termos S1, S2 e S6 correspondem às tensões no referencial do material, obtidas no Maple. Os termos Sx, Sy e Sxy representam os valores das tensões no referencial do material, obtidas no Ansys. Todos os valores das tensões são expressos em [MPa].

5.2.2 Índice de Falha (I_F) em cada Laminado

A partir da análise das tensões, como se viu acima não é possível saber exatamente quando é que se dá a rotura da camada. O indicador normalmente utilizado para quantificar a rotura da camada é o índice de falha (I_F).

As Figuras (5.4) a (5.7) ilustram os índices de falha dos laminados Quase Isotrópico, Cross-Ply, Unidirecional e Angle-Ply, previstos pelos quatro critérios em estudo. Para tornar mais fácil a leitura gráfica do laminado que irá falhar (Angle-ply) e mais simples a identificação do critério mais conservador, fez-se uma ampliação na Figura 5.7, resultando assim a Figura 5.8. O valor crítico que aparece nos gráficos é o valor de referência pelo qual conclui-se que ocorrerá ou não rotura da camada para valores acima ou abaixo desse valor, i.e., $I_F = 1$.

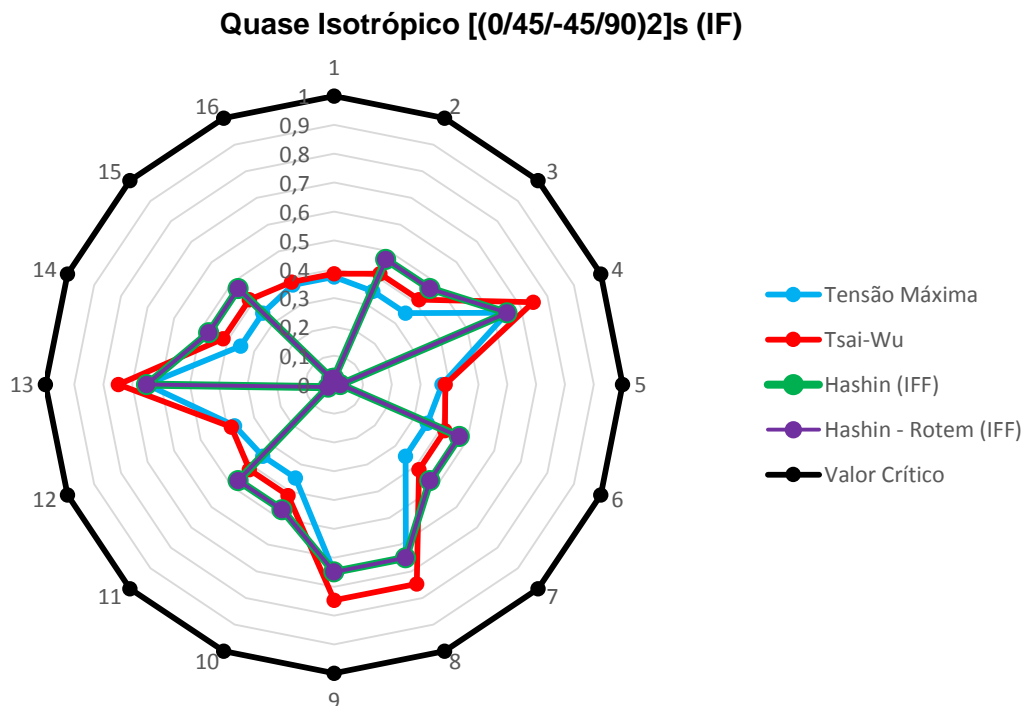


Figura 5.4: Previsão dos critérios da Tensão Máxima, Tsai-Wu, Hashin e Hashin-Rotem no laminado Quase Isotrópico por ação de Nx

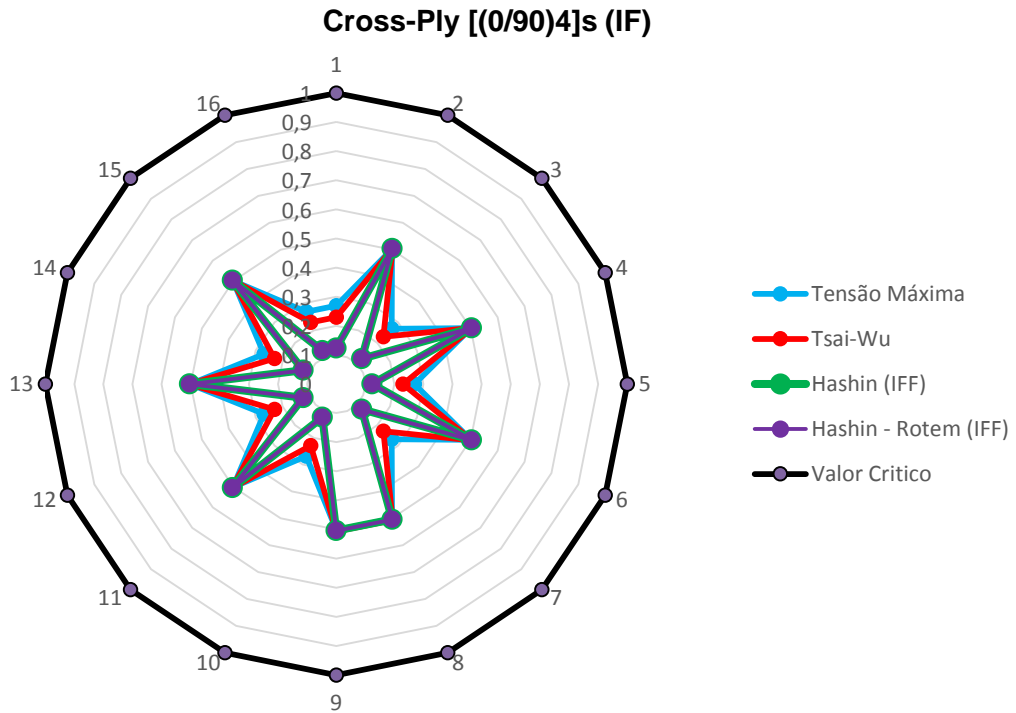


Figura 5.5: Previsão dos critérios da Tensão Máxima, Tsai-Wu, Hashin e Hashin-Rotem: Cross-Ply por ação de N_x

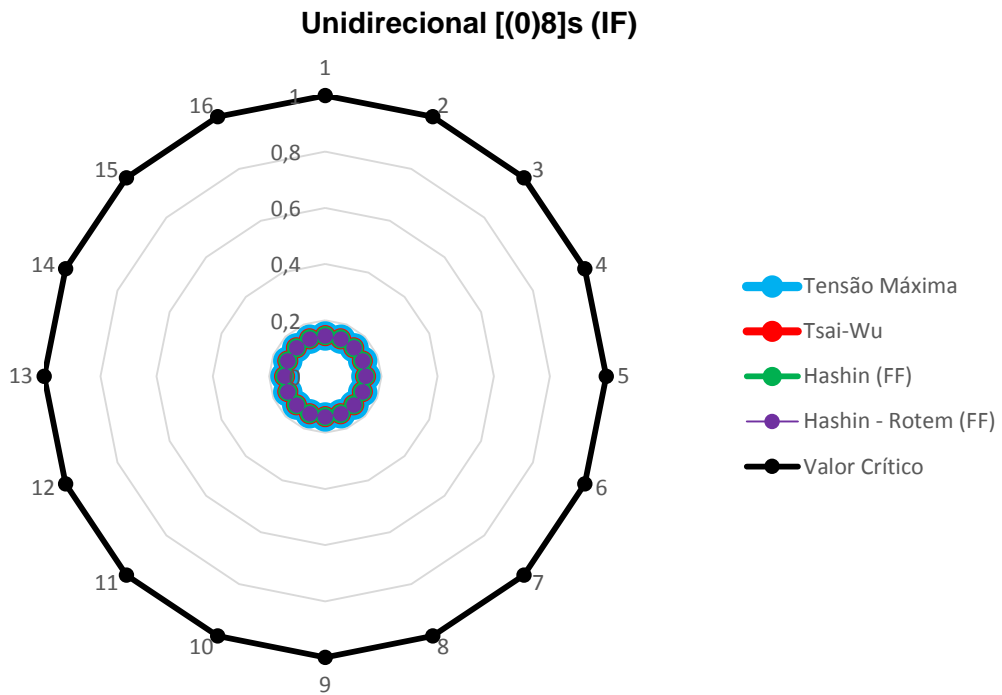


Figura 5.6: Previsão dos critérios da Tensão Máxima, Tsai-Wu, Hashin e Hashin-Rotem no laminado Unidirecional por ação de N_x

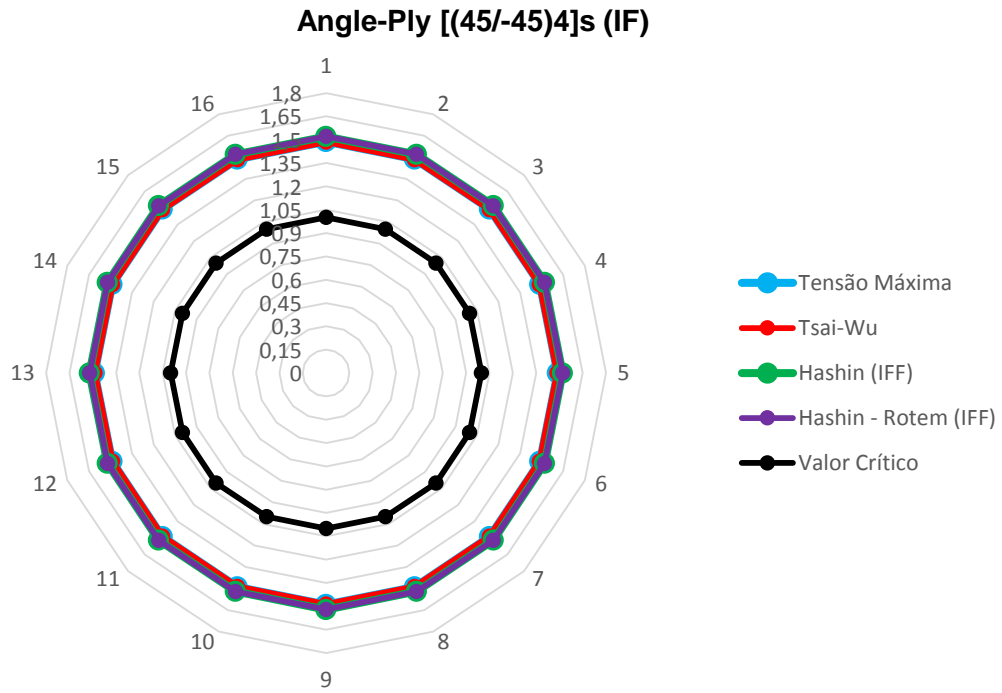


Figura 5.7: Previsão dos critérios da Tensão Máxima, Tsai-Wu, Hashin e Hashin-Rotem: Angle-Ply por ação de N_x

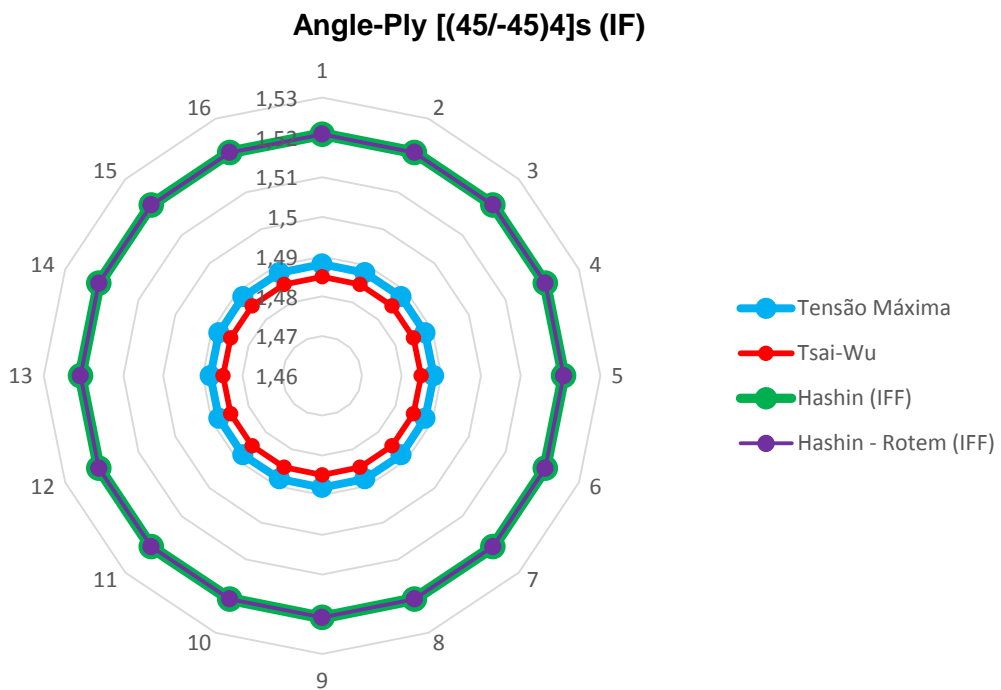


Figura 5.8: Previsão dos critérios da Tensão Máxima, Tsai-Wu, Hashin e Hashin-Rotem: Angle-Ply por ação de N_x (Ampliação da Figura 5.7)

Nas Tabelas (5.5) a (5.12) são apresentados mais detalhadamente os valores dos índices de falha para aquelas previsões nos quatro laminados.

Tabela 5.5: IF da Tensão Máxima e Tsai-Wu em MAPLE e ANSYS no laminado Quase Isotrópico por ação de Nx

		MAPLE			
Quase Isotrópico		Tensão Máxima		Tsai-Wu	
		I_F	R	I_F	R
#1	0°	0,373	2,678	0,385	2,599
#2	45°	0,350	2,858	0,416	2,404
#3	-45°	0,350	2,858	0,416	2,404
#4	90°	0,650	1,540	0,747	1,339

		ANSYS			
Quase Isotrópico		Tensão Máxima		Tsai-Wu	
		I_F	R	I_F	R
#1	0°	0,374	2,676	0,385	2,598
#2	45°	0,349	2,867	0,415	2,412
#3	-45°	0,349	2,867	0,415	2,412
#4	90°	0,647	1,545	0,745	1,342

Tabela 5.6: IF da Hashin e Hashin-Rotem em MAPLE no laminado Quase Isotrópico por ação de Nx

		MAPLE							
Quase Isotrópico		Hashin (IFF)		Hashin (FF)		H-R (IFF)		H-R (FF)	
		I_F	R	I_F	R	I_F	R	I_F	R
#1	0°	0,022	45,286	0,373	2,678	0,022	45,286	0,373	2,678
#2	45°	0,470	2,128	0,374	2,674	0,470	2,128	0,109	9,146
#3	-45°	0,470	2,128	0,374	2,674	0,470	2,128	0,109	9,146
#4	90°	0,649	1,540	0,155	6,434	0,649	1,540	0,155	6,434

Como se previa pela análise das tensões, os índices de falha do laminado Quase Isotrópico estão abaixo do valor crítico ($I_F < 1$), pelo que naturalmente se conclui que neste laminado não ocorre a rotura da camada para o carregamento uniaxial de tração ($N_x = 500 \text{ N/mm}$).

De acordo com os índices de falha do laminado Quase-Isotrópico obtidos nos dois programas, pese embora nenhuma camada irá falhar, podemos constatar que as lâminas orientadas a 90° são as menos resistentes. Isto quer dizer, que se aumentarmos a carga até que ocorra rotura do material, as lâminas com as fibras orientadas a 90° serão as primeiras a falhar. Neste laminado, para estas lâminas, o critério da Tensão Máxima prevê a falha para o valor de 0.65. O critério de Tsai-Wu, prevê para o valor de 0,75. As previsões para os critérios de Hashin e de Hashin-Rotem são de 0.65 (i.e. falha da matriz) e 0,16 (falha da fibra).

Note-se que, os valores dos índices de falha previstos pelos critérios de Hashin e de Hashin-Rotem são semelhantes, no que toca a falha da matriz. O mesmo não se verifica com a falha das fibras. Se observarmos com atenção os índices de falha das fibras nas camadas orientadas a $\pm 45^\circ$ (do laminado Quase Isotrópico), contataremos que as previsões relativas às fibras são diferentes. O critério de Hashin é mais conservador que o critério de Hashin-Rotem uma vez que tem em conta os efeitos da tensão de corte.

Com base nestes índices de falha podemos aferir que, entre as quatro previsões, o critério de Tsai-wu é o critério mais conservador.

Tabela 5.7: IF da Tensão Máxima e Tsai-Wu em MAPLE e ANSYS no laminado Cross-Ply por ação de N_x

Cross-Ply		MAPLE			
		Tensão Máxima		Tsai-Wu	
		I_F	R	I_F	R
#1	0°	0,269	3,720	0,229	4,362
#2	90°	0,504	1,984	0,508	1,969
Cross-Ply		ANSYS			
		Tensão Máxima		Tsai-Wu	
		I_F	R	I_F	R
#1	0°	0,269	3,719	0,229	4,364
#2	90°	0,502	1,991	0,506	1,976

Tabela 5.8: IF de Hashin e Hashin-Rotem em MAPLE: Cross-Ply por ação de Nx

		MAPLE							
Cross-Ply		Hashin (IFF)		Hashin (FF)		H-R (IFF)		H-R (FF)	
		I_F	R	I_F	R	I_F	R	I_F	R
#1	0°	0,123	8,101	0,269	3,720	0,123	8,101	0,269	3,720
#2	90°	0,504	1,984	0,007	149,678	0,504	1,984	0,007	149,678

Relativamente ao laminado cruzado, constata-se que as camadas orientadas a 90° serão as primeiras a falhar (como se mostra nas Tabelas 5.7 e 5.8). Neste caso, os critérios da Tensão Máxima, Hashin e Hashin-Rotem preveem a rotura da camada para o valor de 0.50. No entanto, o critério de Tsai-wu prevê a rotura da camada no valor de 0.51. Assim, de acordo com estas previsões podemos concluir que o critério de Tsai-Wu é o mais conservador.

Tabela 5.9: IF da Tensão Máxima e Tsai-Wu em MAPLE e ANSYS no laminado Quase Isotrópico por ação de Nx

		MAPLE			
Unidirecional		Tensão Máxima		Tsai-Wu	
		I_F	R	I_F	R
#1	0°	0,144	6,944	0,144	6,944

		ANSYS			
Unidirecional		Tensão Máxima		Tsai-Wu	
		I_F	R	I_F	R
#1	0°	0,144	6,944	0,144	6,944

Tabela 5.10: IF de Hashin e Hashin-Rotem em MAPLE no laminado Unidirecional por ação de Nx

		MAPLE							
Unidirecional		Hashin (IFF)		Hashin (FF)		H-R (IFF)		H-R (FF)	
		I_F	R	I_F	R	I_F	R	I_F	R
#1	0°	0	0	0,144	6,944	0	0	0,144	6,944

Quanto ao laminado Unidirecional, os I_F obtidos nas quatro previsões são semelhantes. Nesta situação, foram obtidos I_F bastante baixos no valor de 0,14. Isto quer dizer, que este laminado é bastante forte naquela situação de carga (N_x). Note-se que pese embora a fibra é bastante mais resistente do que a matriz neste caso os critérios de Hashin e de Hashin-Rotem preveem a rotura da fibra e não da matriz.

Tabela 5.11: IF da Tensão Máxima e Tsai-Wu em MAPLE e ANSYS no laminado Angle-Ply por ação de N_x

		MAPLE			
Angle-Ply		Tensão Máxima		Tsai-Wu	
		I_F	R	I_F	R
#1	45°	1,488	0,672	1,477	0,677
#2	-45°	1,488	0,672	1,477	0,677

		ANSYS			
Camada		Tensão Máxima		Tsai-Wu	
		I_F	R	I_F	R
#1	45°	1,488	0,672	1,484	0,674
#2	-45°	1,488	0,672	1,484	0,674

Tabela 5.12: IF da Hashin e Hashin-Rotem em MAPLE no laminado Angle-Ply por ação de N_x

		MAPLE							
Angle-Ply		Hashin (IFF)		Hashin (FF)		H-R (IFF)		H-R (FF)	
		I_F	R	I_F	R	I_F	R	I_F	R
#1	45°	1,521	0,658	1,494	0,669	1,521	0,658	0,132	7,572
#2	-45°	1,521	0,658	1,494	0,669	1,521	0,658	0,132	7,572

No caso do laminado Angle-Ply, podemos constatar a partir das Figuras (5.7), (5.8) e das Tabelas (5.11) e (5.12) que todos os critérios de falha apontam para $I_F > 1$. Os critérios da Tensão Máxima e de Tsai-Wu, preveem a rotura da camada para os valores de 1,49 e 1,48, respetivamente. Os critérios de Hashin e de Hashin-Rotem preveem a falha da camada por rotura da matriz para o valor de 1,52. Conclui-se portanto, nesta situação, que os critérios de Hashin e de Hashin-Rotem são os critérios mais conservadores.

5.3 Simulação em Tração Transversal (N_y)

5.3.1 Estado de Tensão em cada Camada dos Quatro Laminados

Nesta situação de carregamento uniaxial segundo a direção y , a análise das tensões para se avaliar a resistência dos quatro laminados faz-se como em (5.2.1).

As Figuras (5.9), (5.10), (5.11), mostram os valores das tensões (σ_1), (σ_2), e (σ_6) geradas por aquele carregamento. Se analisarmos estes valores de tensão constataremos a existência de elevados valores das tensões (σ_2) e (σ_6), associadas aos laminados Unidirecional e Angle-Ply, respetivamente.

A partir destas análises (N_x e N_y), podemos constatar que os maiores valores de tensão ocorrerão sempre nas camadas orientadas na direção do carregamento; isto é, no carregamento longitudinal as camadas orientadas a 0° estão sujeitas a elevadas tensões quando comparadas com as camadas com orientação da fibra diferente de 0° . Note-se que, nesta situação, as camadas desfasadas 90° da direção de aplicação da carga têm por sua vez valores de tensão bastante baixos. O mesmo acontece com o carregamento transversal.

Pese embora isto se verifique, a rotura da camada dificilmente ocorrerá naquelas camadas (orientadas na direção do carregamento), uma vez que na direção do carregamento a resistência das referidas camadas é determinada pela rigidez da fibra.

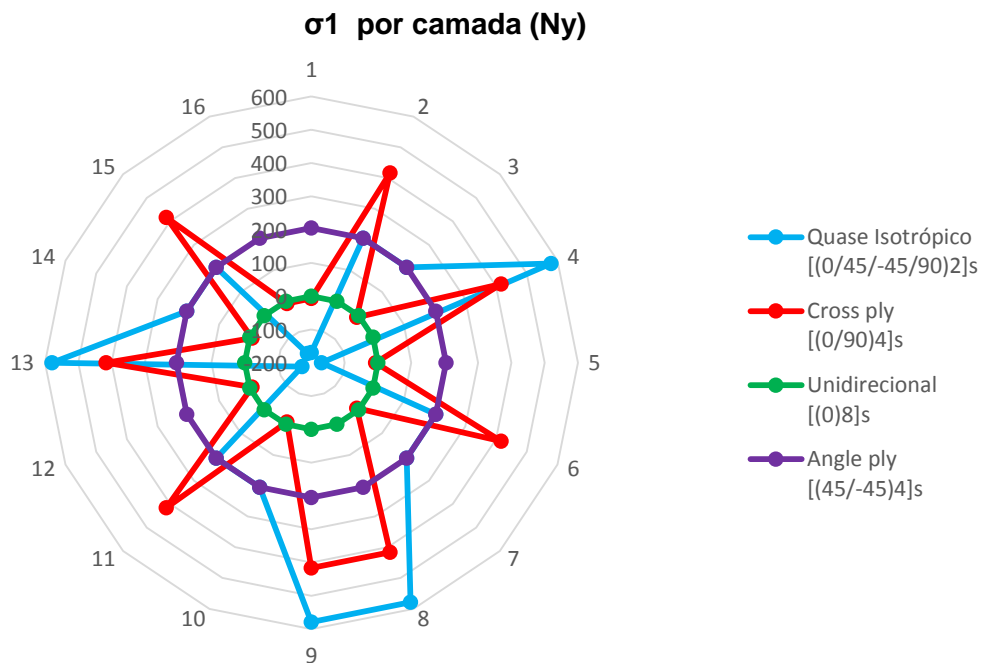


Figura 5.9: Tensão (σ_1) em cada lâmina, nos quatro laminados por ação de N_y

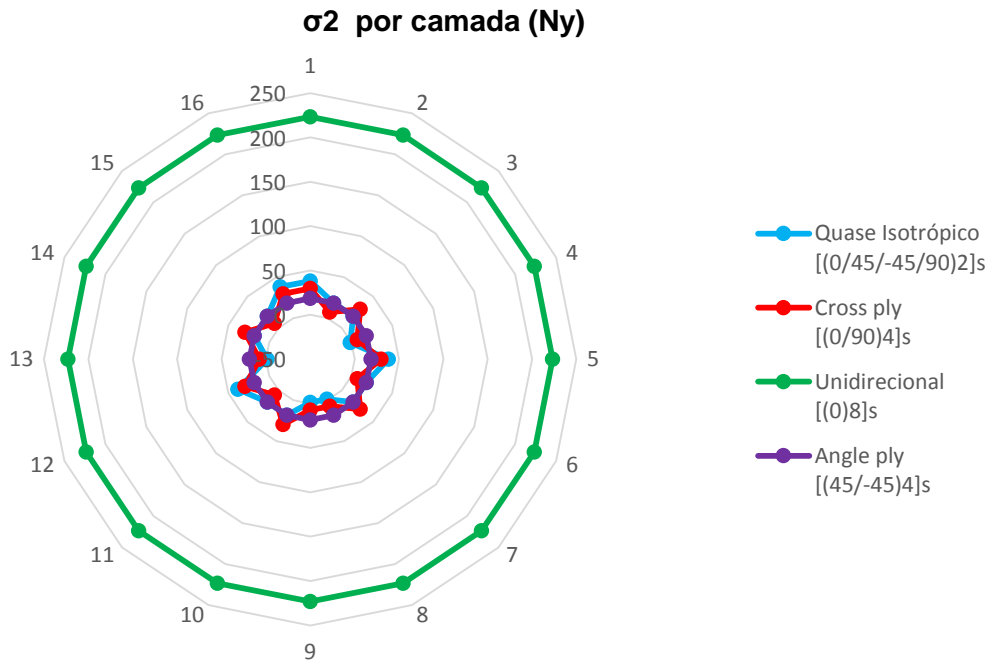


Figura 5. 10: Tensão (σ_2) em cada lâmina, nos quatro laminados por ação de Ny

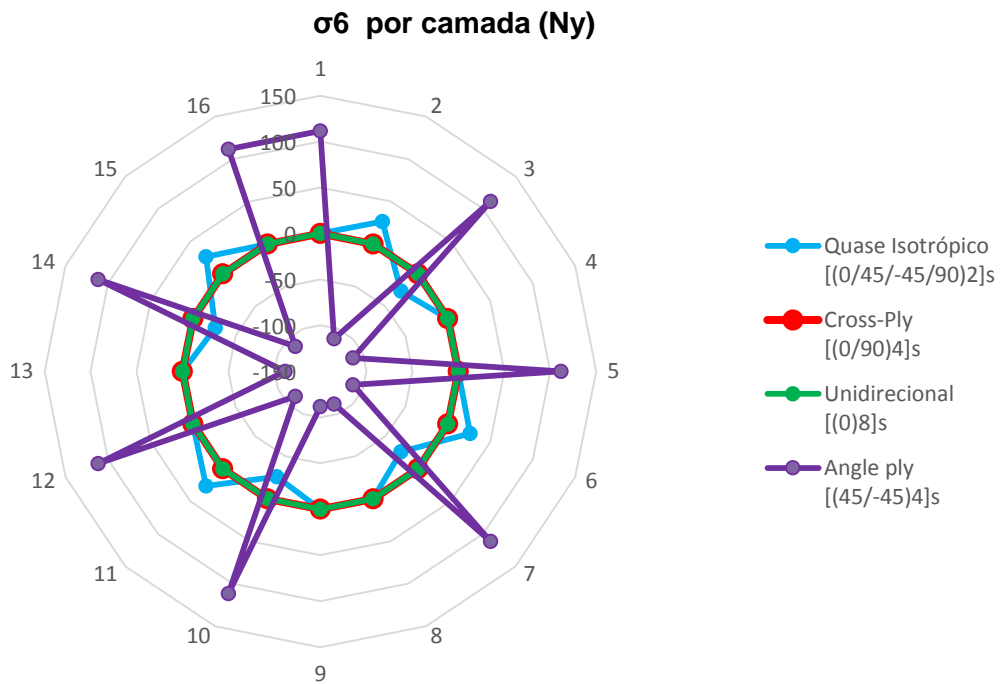


Figura 5.11: Tensão (σ_6) em cada lâmina, nos quatro laminados por ação de Ny

Nas Tabelas (5.13) a (5.16) são apresentados mais detalhadamente os valores das tensões originadas pela ação do esforço aplicado segundo a direção y , calculados numérica e analiticamente.

Se compararmos os valores das tensões ($\sigma_2 = 223,2$ MPa) e ($\sigma_6 = 111,6$ MPa) geradas, respetivamente, nos laminados Unidirecional e Angle-Ply (como se mostra nas Tabelas 5.15 e 5.16), com o valor da tensão última de resistência na direção 2 ($F_{2t} = 59$ MPa, e $F_{2c} = 59$ MPa) e no plano 12 ($F_6 = 75$ MPa), verificaremos que as tensões (σ_2) e (σ_6) serão responsáveis pela falha daqueles laminados.

De acordo com a análise das tensões no laminado Unidirecional constatamos que quando solicitado na direção longitudinal são geradas nas camadas apenas tensões na direção do carregamento (direção 1). As tensões da direção transversal e no plano de corte 12 são nulas. Por outro lado, é possível verificar que quando solicitado na direção transversal às fibras são geradas nas camadas apenas tensões na direção da aplicação da carga (direção 2). As tensões da direção longitudinal e no plano de corte 12 são nulas. Contudo, podemos verificar que o valor das tensões geradas é o mesmo para as duas situações, que é de 223,2 MPa.

No caso do laminado Angle-Ply, os valores das tensões (σ_1), (σ_2), e (σ_6) são semelhantes quer para o carregamento longitudinal, quer para o carregamento transversal (como se mostra nas Tabelas 5.4 e 5.16). No entanto, é possível constatar que, enquanto que no carregamento N_x se verificavam elevados picos de tensão de compressão-tração no plano 12, neste caso verifica-se o contrario (tração-compressão).

Tabela 5.13: Estado de tensão no laminado Quase Isotrópico por ação de N_y

Quase Isotrópico		MAPLE			ANSYS		
		S1	S2	S6	Sx	Sy	Sxy
#1	0°	-169,426	38,318	0	-169,591	38,195	0
#2	45°	204,707	18,508	26,243	204,768	18,447	-26,161
#3	-45°	204,707	18,508	-26,243	204,768	18,447	26,161
#4	90°	578,839	-1,303	0	579,126	-1,302	0

Tabela 5.14: Estado de tensão no laminado Cross-Ply por ação de N_y

Cross-Ply		MAPLE			ANSYS		
		S1	S2	S6	Sx	Sy	Sxy
#1	0°	-7,283	29,733	0	-7,262	29,632	0
#2	90°	416,696	7,283	0	416,797	7,262	0

Tabela 5.15: Estado de tensão no laminado Unidirecional por ação de N_y

Unidirecional		MAPLE			ANSYS		
		S1	S2	S6	Sx	Sy	Sxy
#1	0°	0	223,214	0	0	223,214	0

Tabela 5.16: Estado de tensão no laminado Angle-Ply por ação de N_y

Angle-Ply		MAPLE			ANSYS		
		S1	S2	S6	Sx	Sy	Sxy
#1	45°	204,707	18,508	111,607	204,768	18,447	111,607
#2	-45°	204,707	18,508	-111,607	204,768	18,447	-111,607

5.3.2 Índice de Falha (I_F) em cada Laminado

As Figuras (5.12) a (5.15) mostram os índices de falhas dos laminados Quase Isotrópico, Cross-Ply, Unidirecional e Angle-Ply, previstos pelos quatro critérios em estudo.

Nesta situação de carregamento N_y , podemos constatar que nos laminados Quase Isotrópico e Cross-Ply não irá ocorrer rotura da camada, uma vez que os índices de falha previstos são inferiores a 1, como se pode constatar nas Figuras (5.12) e (5.13). O mesmo não acontece com os laminados Unidirecional e Angle-Ply, apresentados nas Figuras (5.14) e (5.15).

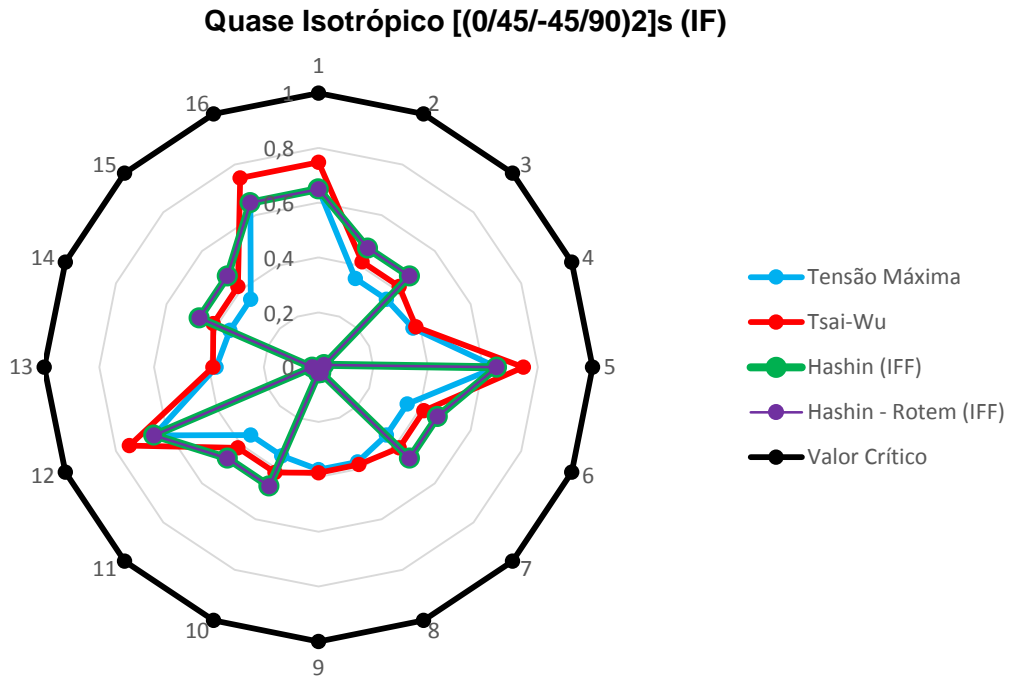


Figura 5.12: Previsão dos critérios da Tensão Máxima, Tsai-Wu, Hashin e Hashin-Rotem no laminado Quase Isotrópico por ação de N_y

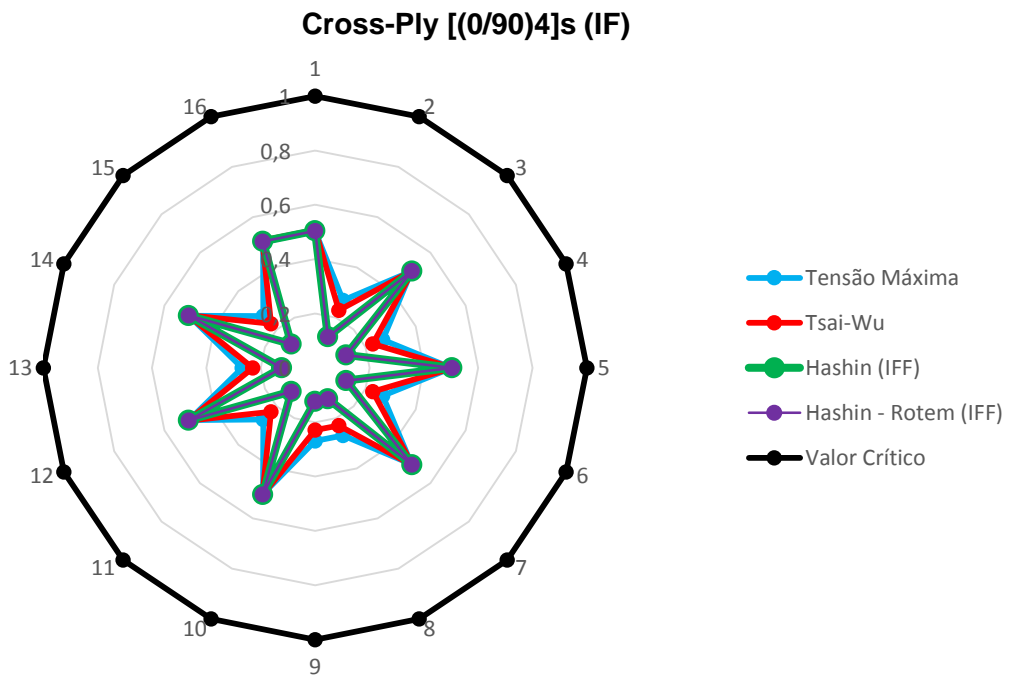


Figura 5.13: Previsão dos critérios da Tensão Máxima, Tsai-Wu, Hashin e Hashin-Rotem no laminado Cross-Ply por ação de N_y

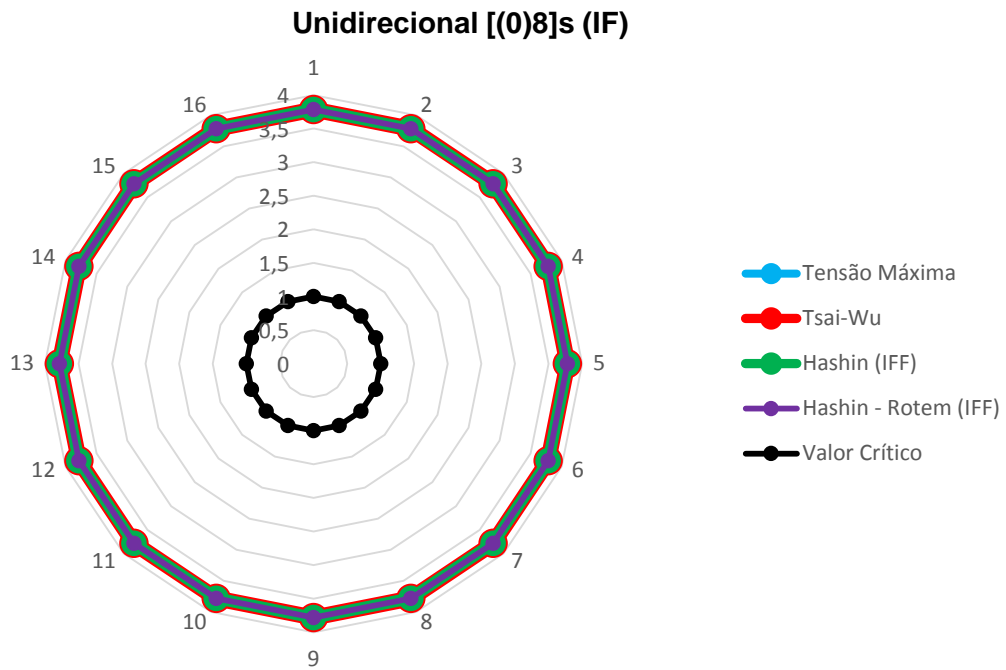


Figura 5.14: Previsão dos critérios da Tensão Máxima, Tsai-Wu, Hashin e Hashin-Rotem no laminado Unidirecional por ação de N_y

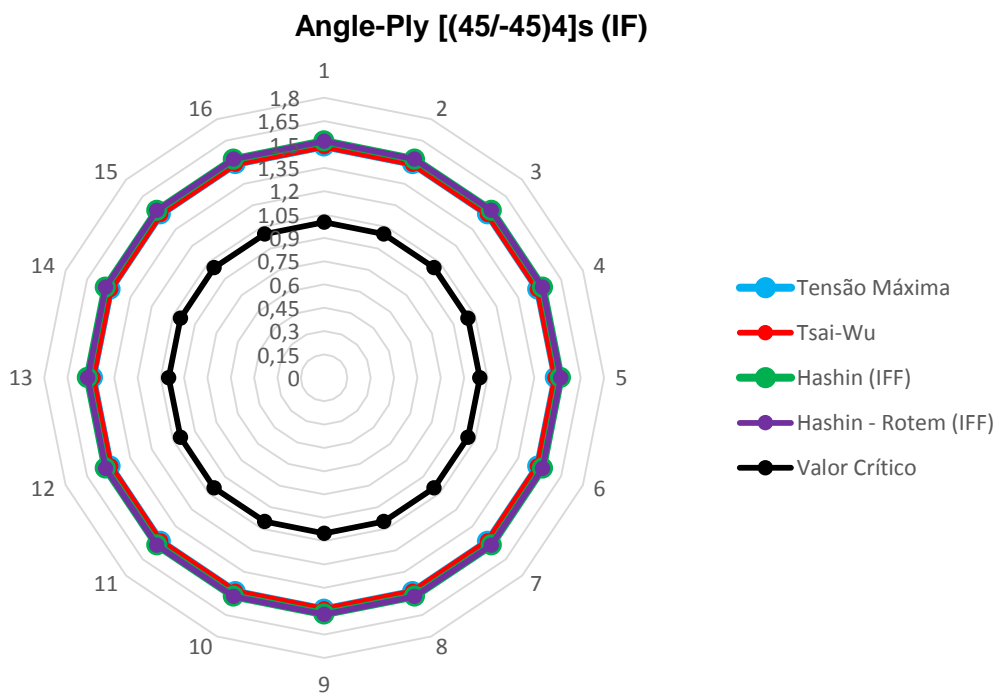


Figura 5.15: Previsão dos critérios da Tensão Máxima, Tsai-Wu, Hashin e Hashin-Rotem no laminado Angle-Ply por ação de N_y

Nas Tabelas (5.17) a (5.24) são apresentados mais detalhadamente os valores dos índices de falha previstos por cada um dos critérios nos vários laminados.

Tabela 5.17: IF da Tensão Máxima e Tsai-Wu em MAPLE e ANSYS no laminado Quase Isotrópico por ação de N_y

		MAPLE			
Quase Isotrópico		Tensão Máxima		Tsai-Wu	
		I_F	R	I_F	R
#1	0°	0,649	1,540	0,747	1,339
#2	45°	0,350	2,858	0,416	2,404
#3	-45°	0,350	2,858	0,416	2,404
#4	90°	0,373	2,678	0,385	2,600

		ANSYS			
Quase Isotrópico		Tensão Máxima		Tsai-Wu	
		I_F	R	I_F	R
#1	0°	0,647	1,545	0,745	1,343
#2	45°	0,349	2,867	0,415	2,413
#3	-45°	0,349	2,867	0,415	2,413
#4	90°	0,374	2,676	0,385	2,599

Tabela 5.18: IF de Hashin e Hashin-Rotem em MAPLE no laminado Quase Isotrópico por ação de N_y

		MAPLE							
Quase Isotrópico		Hashin (IFF)		Hashin (FF)		H-R (IFF)		H-R (FF)	
		I_F	R	I_F	R	I_F	R	I_F	R
#1	0°	0,649	1,540	0,155	6,434	0,649	1,540	0,155	6,434
#2	45°	0,470	2,128	0,374	2,674	0,470	2,128	0,109	9,146
#3	-45°	0,470	2,128	0,374	2,674	0,470	2,128	0,109	9,146
#4	90°	0,022	45,286	0,373	2,678	0,022	45,286	0,373	2,678

Analisando os índices de falha do laminado Quase-Isotrópico, como se apresenta nas Tabelas (5.17) e (5.18), podemos constatar que as lâminas orientadas a 0° são as menos resistentes, significando assim que se aumentarmos a carga até que ocorra rotura do material, as lâminas com as fibras orientadas a 0° serão as primeiras a falhar. Neste laminado, para estas lâminas, o critério da Tensão Máxima prevê a falha para o valor de 0.65. O critério de Tsai-Wu, prevê para o valor de 0,75. As previsões para os critérios de Hashin e de Hashin-Rotem são de 0.65 (I.e. falha da matriz) e 0,16 (falha da fibra).

Importa referir que estas foram exatamente as previsões obtidas no carregamento anterior em que as lâminas orientadas a 90° eram as menos resistentes. Este fato leva-nos a aferir que as camadas de um laminado com as fibras orientadas transversalmente à direção do carregamento serão as primeiras a atingir a rotura.

De acordo com os índices de falha obtidos nesta situação de carga Ny, podemos aferir que, entre as quatro previsões, o critério de Tsai-wu é o critério mais conservador.

Tabela 5.19: IF da Tensão Máxima e Tsai-Wu em MAPLE e ANSYS no laminado Cross-Ply por ação de Ny

		MAPLE			
Cross-Ply		Tensão Máxima		Tsai-Wu	
		I_F	R	I_F	R
#1	0°	0,504	1,984	0,508	1,969
#2	90°	0,269	3,720	0,229	4,362
		ANSYS			
Cross-Ply		Tensão Máxima		Tsai-Wu	
		I_F	R	I_F	R
#1	0°	0,502	1,991	0,506	1,976
#2	90°	0,269	3,719	0,229	4,364

Tabela 5.20: IF de Hashin e Hashin-Rotem em MAPLE no laminado Cross-Ply por ação de Ny

		MAPLE							
Cross-Ply		Hashin (IFF)		Hashin (FF)		H-R (IFF)		H-R (FF)	
		I_F	R	I_F	R	I_F	R	I_F	R
#1	0°	0,504	1,984	0,007	149,678	0,504	1,984	0,007	149,678
#2	90°	0,123	8,101	0,269	3,720	0,123	8,101	0,269	3,720

Relativamente ao laminado Cross-Ply, constata-se que as camadas orientadas a 0° serão as primeiras a falhar (como se mostra nas Tabelas 5.19 e 5.20). Neste caso, os critérios da Tensão Máxima, Hashin e Hashin-Rotem preveem a rotura da camada para o valor de 0.50. No entanto, o critério de Tsai-wu 0.51. Note-se que, estas previsões são exatamente as previsões obtidas no carregamento Nx nas lâminas orientadas a 90°. Assim, de acordo com estes índices podemos concluir que o critério de Tsai-Wu é o mais conservador.

Tabela 5.21: IF da Tensão Máxima e Tsai-Wu em MAPLE e ANSYS no laminado Unidirecional por ação de Ny

		MAPLE			
Unidirecional		Tensão Máxima		Tsai-Wu	
		I_F	R	I_F	R
#1	0°	3,783	0,264	3,783	0,264

		ANSYS			
Unidirecional		Tensão Máxima		Tsai-Wu	
		I_F	R	I_F	R
#1	0°	3,783	0,264	3,783	0,264

Tabela 5.22: IF de Hashin e Hashin-Rotem em MAPLE no laminado Unidirecional por ação de Ny

		MAPLE							
Unidirecional		Hashin (IFF)		Hashin (FF)		H-R (IFF)		H-R (FF)	
		I_F	R	I_F	R	I_F	R	I_F	R
#1	0°	3,783	0,264	0	infinito	3,783	0,264	0	infinito

Quanto ao laminado Unidirecional, os índices de falha obtidos nas quatro previsões são semelhantes. Nesta situação, foram obtidos índices de falha bastante elevados no valor de 3,78. Isto quer dizer, que este laminado é bastante fraco quando solicitado transversalmente à direcção das fibras.

Tabela 5.23: IF da Tensão Máxima e Tsai-Wu em MAPLE e ANSYS no laminado Angle-Ply devido Ny

		MAPLE			
Angle-Ply		Tensão Máxima		Tsai-Wu	
		I_F	R	I_F	R
#1	45°	1,488	0,672	1,477	0,677
#2	-45°	1,488	0,672	1,477	0,677

		ANSYS			
Angle-Ply		Tensão Máxima		Tsai-Wu	
		I_F	R	I_F	R
#1	45°	1,488	0,672	1,484	0,674
#2	-45°	1,488	0,672	1,484	0,674

Tabela 5.24: IF de Hashin e Hashin-Rotem em MAPLE no laminado Angle-Ply por acção de Ny

		MAPLE							
Angle-Ply		Hashin (IFF)		Hashin (FF)		H-R (IFF)		H-R (FF)	
		I_F	R	I_F	R	I_F	R	I_F	R
#1	45°	1,521	0,658	1,494	0,669	1,521	0,658	0,132	7,572
#2	-45°	1,521	0,658	1,494	0,669	1,521	0,658	0,132	7,572

No que toca as previsões do laminado Angle-Ply, os resultados obtidos pelos quatro critérios de falha são rigorosamente os mesmos obtidos no caso anterior (de carregamento Nx). Nesta situação, os critérios de Hashin e de Hashin-Rotem são novamente os critérios mais conservadores.

De um modo geral, os resultados entre os critérios de Hashin e Hashin-Rotem obtidos nas situações de carga uniaxial longitudinal e transversal são praticamente iguais no que toca a rotura das fibras com exceção das camadas a 45° e -45°.

5.4 Simulação em Tração Longitudinal e Transversal ($N_x = N_y$)

5.4.1 Estado de Tensão em cada Camada dos Quatro Laminados

Nesta simulação de carregamento biaxial ($N_x = N_y = 500 \text{ N/mm}$), a análise da resistência dos laminados pela análise das tensões é semelhante ao exposto no (5.2.1) e (5.3.1).

A partir das Figuras (5.16), (5.17) e (5.18), é possível constatar que apenas o laminado Unidirecional irá falhar por ação do elevado valor da tensão na direção 2 ($\sigma_2 = 223,214 \text{ MPa}$); valor este, muito superior à tensão de rotura na mesma direção ($F_6 = 59 \text{ MPa}$). Nesta situação as tensões de corte são nulas, i.e., $\sigma_6 = 0$, em todos os laminados.

As tensões (σ_1), (σ_2), e (σ_6) geradas pelo carregamento biaxial são semelhantes nos laminados Quase Isotrópico, Cross-Ply e Angle-Ply, e insuficientemente capazes de provocar a rotura da camada nestes laminados. Como se compreende a partir das Tabelas (5.25), (5.26) e (5.28) as tensões ($\sigma_1 = 409,4 \text{ MPa}$; $\sigma_2 = 37 \text{ MPa}$; $\sigma_6 = 0$), nestes três laminados são bastante inferiores aos parâmetros de resistência do material nas direções 1, 2 e no plano 12, definidos na Tabela 3.1.

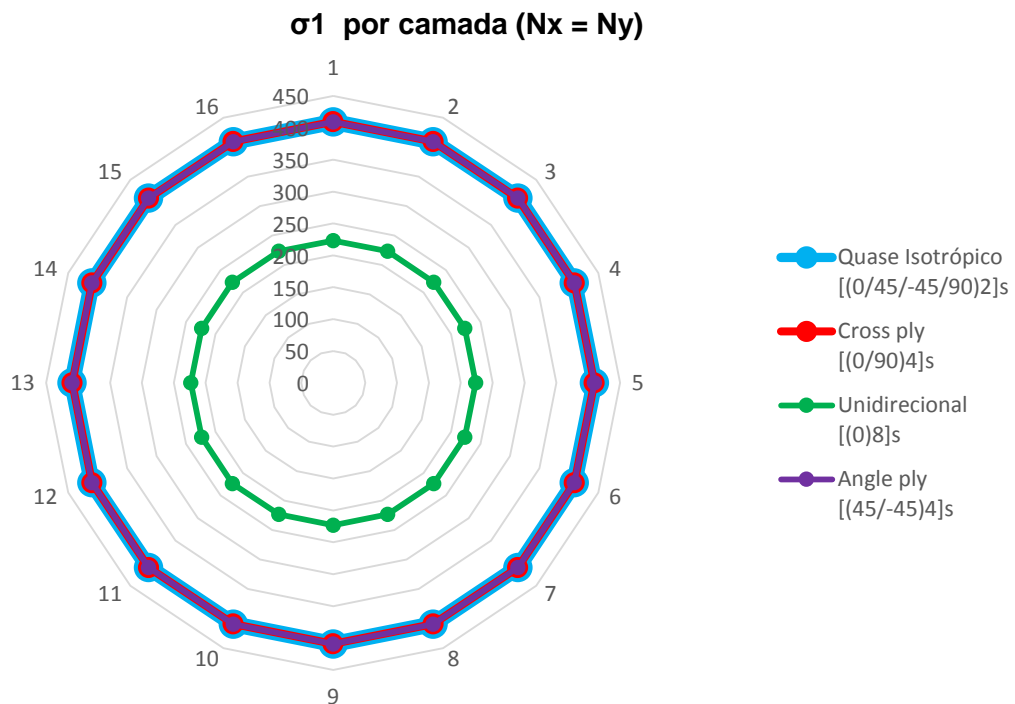


Figura 5.16: Tensão (σ_1) por lâmina, nos quatro laminados por ação de $N_x = N_y$

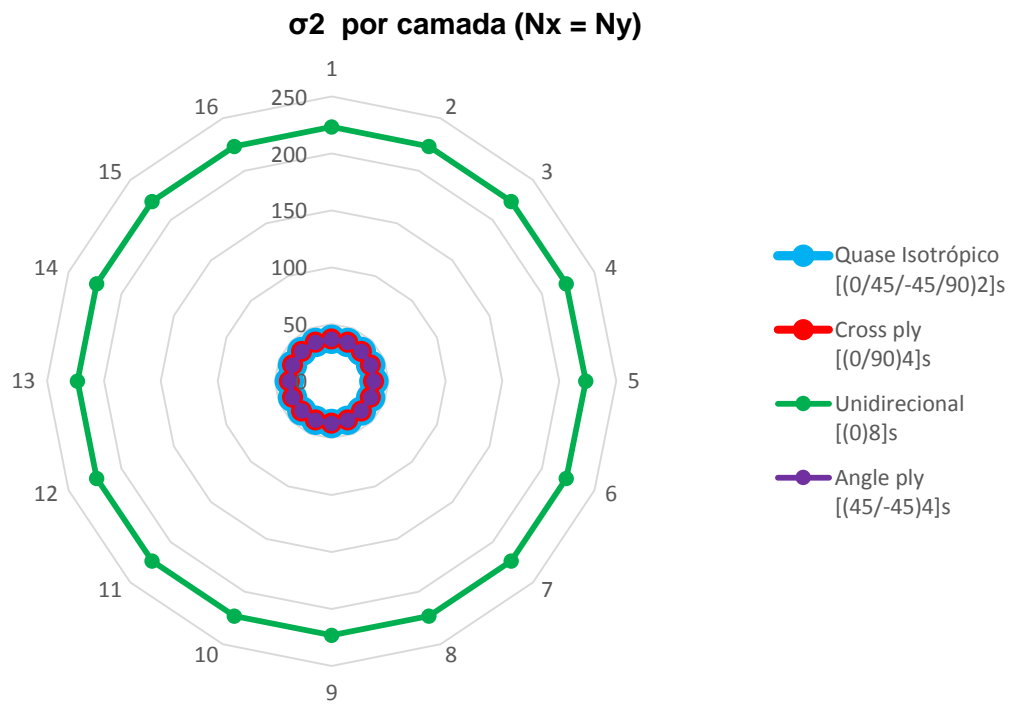


Figura 5.17: Tensão (σ_2) por lâmina, nos quatro laminados por ação de $N_x = N_y$

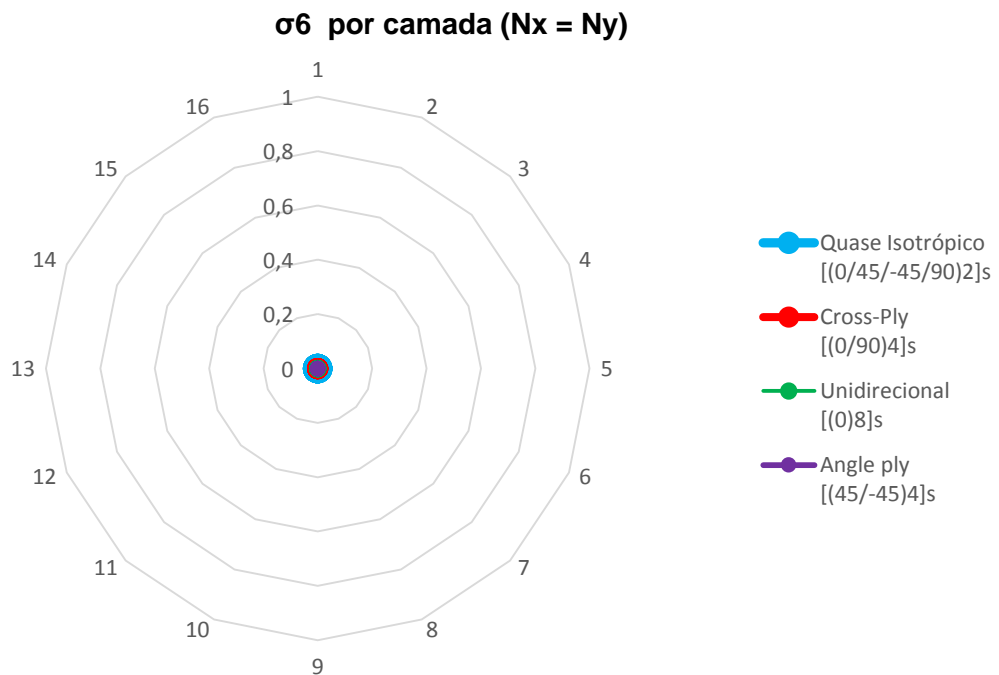


Figura 5.18: Tensão (σ_6) em cada lâmina, nos quatro laminados por ação de $N_x = N_y$

Nas Tabelas (5.25) a (5.28) são apresentados mais detalhadamente os valores das tensões obtidos pela resolução analítica e resolução numérica.

Tabela 5.25: Estado de tensão no laminado Quase Isotrópico por ação de $N_x = N_y$

<i>Quase Isotrópico</i>		<i>MAPLE</i>			<i>ANSYS</i>		
		<i>S1</i>	<i>S2</i>	<i>S6</i>	<i>Sx</i>	<i>Sy</i>	<i>Sxy</i>
#1	0°	409,413	37,016	0	409,535	36,894	0
#2	45°	409,413	37,016	0	409,535	36,894	0
#3	-45°	409,413	37,016	0	409,535	36,894	0
#4	90°	409,413	37,016	0	409,535	36,894	0

Tabela 5.26: Estado de tensão no laminado Cross-Ply por ação de $N_x = N_y$

<i>Cross-Ply</i>		<i>MAPLE</i>			<i>ANSYS</i>		
		<i>S1</i>	<i>S2</i>	<i>S6</i>	<i>Sx</i>	<i>Sy</i>	<i>Sxy</i>
#1	0°	409,413	37,016	0	409,535	36,894	0
#2	90°	409,413	37,016	0	409,535	36,894	0

Tabela 5.27: Estado de tensão no laminado Unidirecional por ação de $N_x = N_y$

<i>Unidirecional</i>		<i>MAPLE</i>			<i>ANSYS</i>		
		<i>S1</i>	<i>S2</i>	<i>S6</i>	<i>Sx</i>	<i>Sy</i>	<i>Sxy</i>
#1	0°	223,214	223,214	0	223,214	223,214	0

Tabela 5.28: Estado de tensão no laminado Angle-Ply por ação de $N_x = N_y$

<i>Angle-Ply</i>		<i>MAPLE</i>			<i>ANSYS</i>		
		<i>S1</i>	<i>S2</i>	<i>S6</i>	<i>Sx</i>	<i>Sy</i>	<i>Sxy</i>
#1	45°	409,413	37,016	0	409,535	36,894	0
#2	-45°	409,413	37,016	0	409,535	36,894	0

5.4.2 Índice de Falha (I_F) em cada Laminado

As Figuras (5.19) a (5.23) mostram os índices de falha dos laminados em estudo.

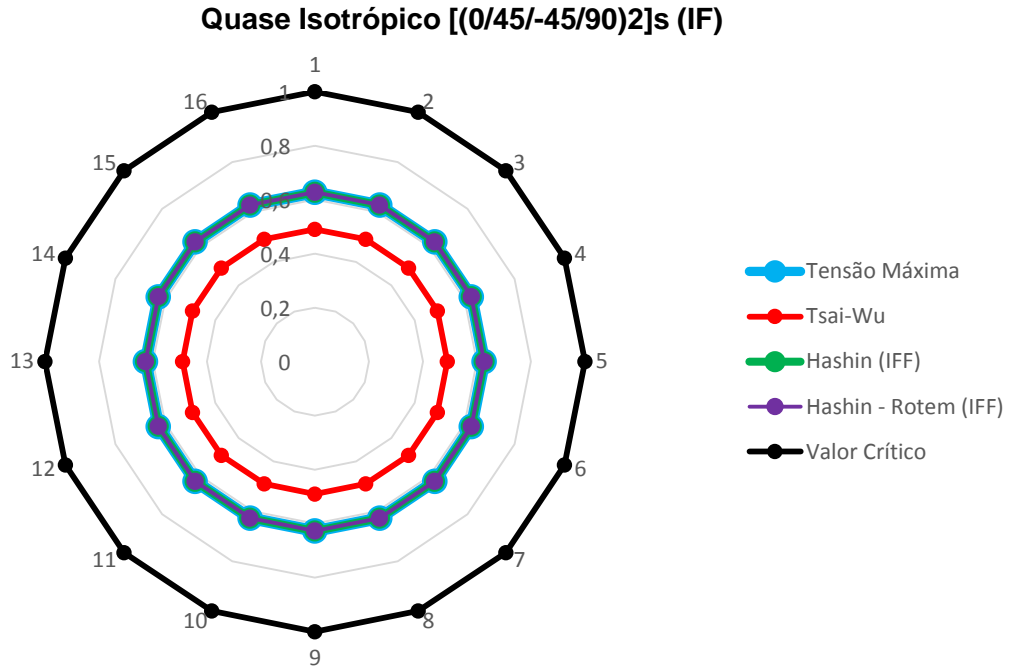


Figura 5. 19: Previsão dos critérios da Tensão Máxima, Tsai-Wu, Hashin e Hashin-Rotem no laminado Quase Isotrópico por ação de $N_x = N_y$

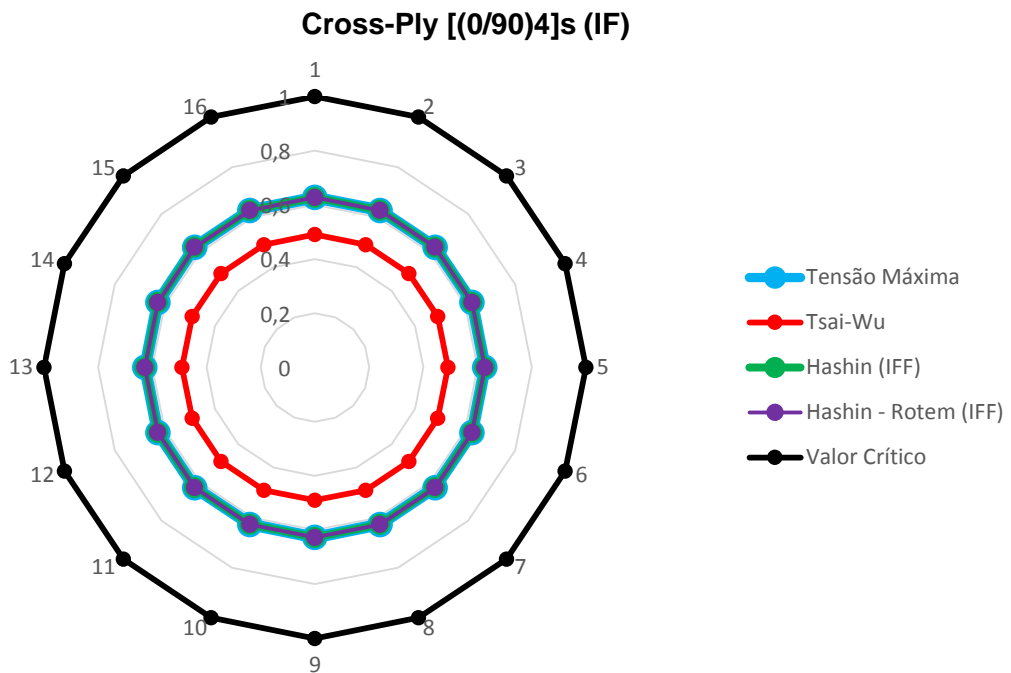


Figura 5. 20: Previsão dos critérios da Tensão Máxima, Tsai-Wu, Hashin e Hashin-Rotem no laminado Cross-Ply por ação de $N_x = N_y$

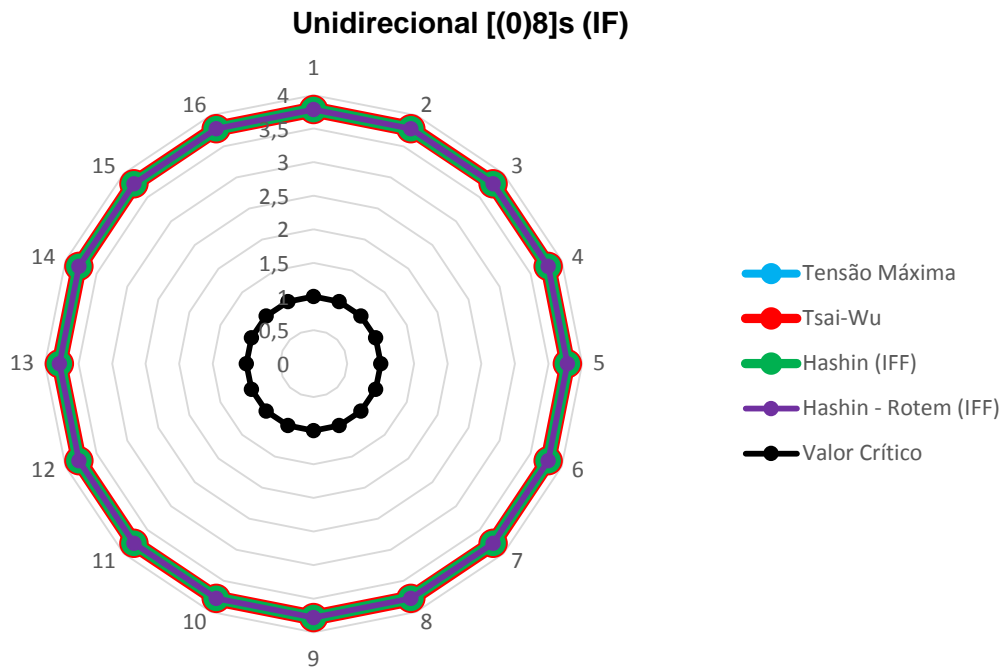


Figura 5.21: Previsão dos critérios da Tensão Máxima, Tsai-Wu, Hashin e Hashin-Rotem no laminado Unidirecional por ação de $N_x = N_y$

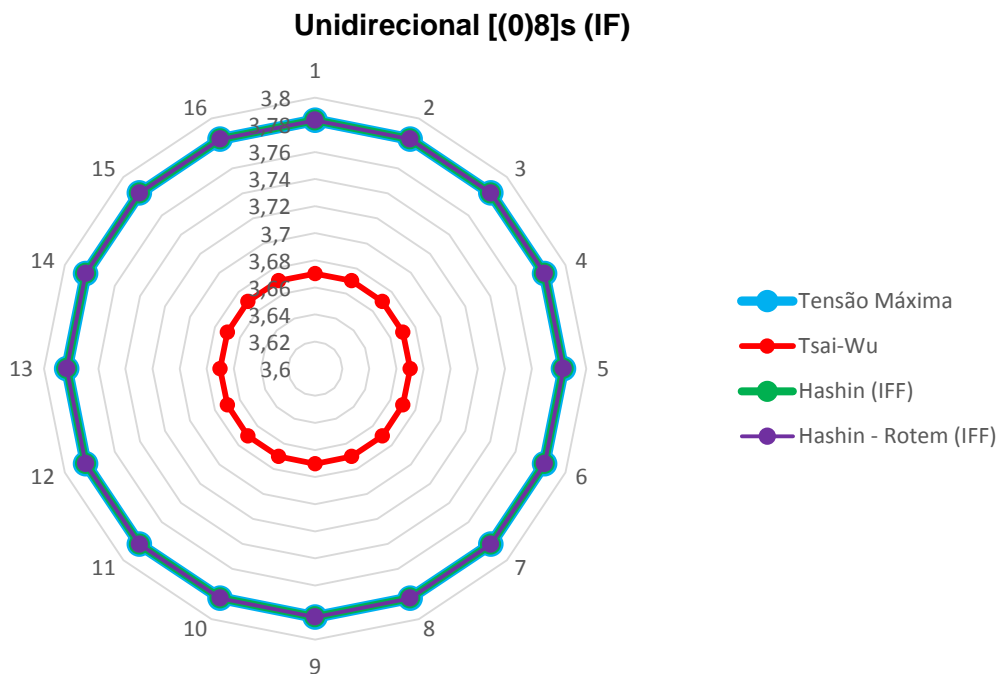


Figura 5.22: Previsão dos critérios da Tensão Máxima, Tsai-Wu, Hashin e Hashin-Rotem no laminado Unidirecional por ação de $N_x = N_y$ (Ampliação da Figura 5.21)

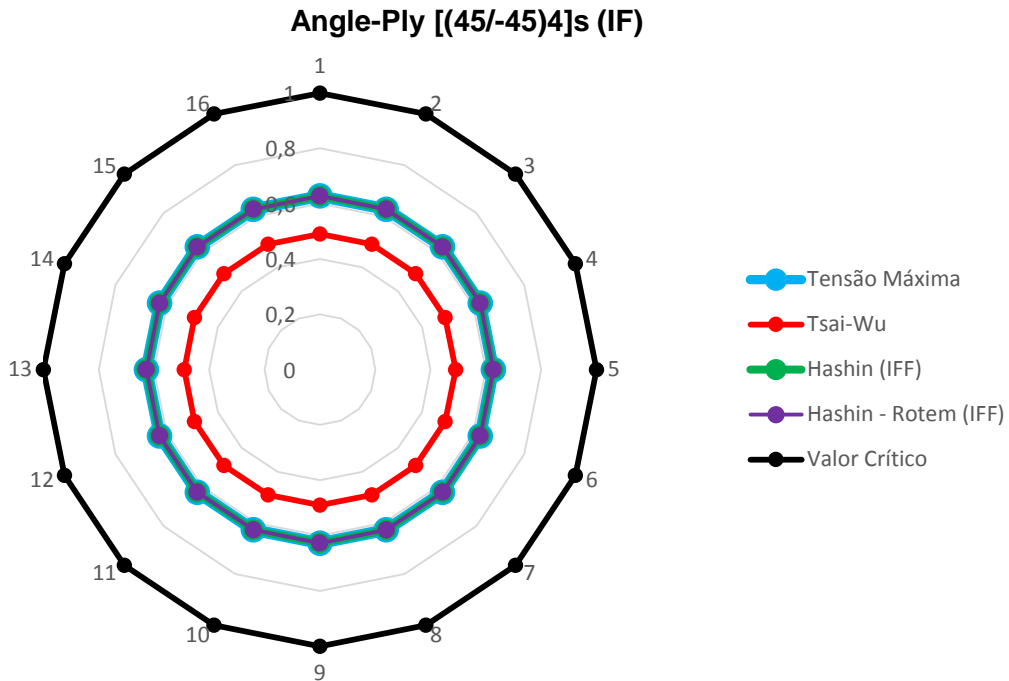


Figura 5.23: Previsão dos critérios da Tensão Máxima, Tsai-Wu, Hashin e Hashin-Rotem no laminado Angle-Ply por ação de $N_x = N_y$

Como se viu na análise das tensões, e a partir das Figuras (5.19), (5.20), (5.23) e das Tabelas (5.29) a (5.36) constata-se que os índices de falha dos laminados Quase Isotrópico, Cross-Ply e Angle-Ply são semelhantes, e inferiores a 1. Nestes laminados, o índice de falha obtido pelo critério de Tsai-Wu é de 0,49. Os critérios da Tensão Máxima, Hashin e de Hashin-Rotem preveem a falha da camada para o valor 0.63, o que lhes torna mais conservadores.

Quanto às previsões do laminado Unidirecional, para além de se constatar a ocorrência de falha para índices de falha bastante elevados, constata-se também que os critérios de Tensão Máxima, Hashin, e Hashin-Rotem têm a mesma previsão ($I_F = 3.78$). O critério de Tsai-Wu prevê no valor de 3,67 (menos conservador).

Nas Tabelas (5.29) a (5.36) são apresentados, mais detalhadamente os valores dos índices de falha calculados pela resolução analítica e resolução numérica.

Tabela 5.29: IF da Tensão Máxima e Tsai-Wu em MAPLE e ANSYS no laminado Quase Isotrópico por ação de $N_x = N_y$

		MAPLE			
Quase Isotrópico		Tensão Máxima		Tsai-Wu	
		I_F	R	I_F	R
#1	0°	0,627	1,594	0,490	2,039
#2	45°	0,627	1,594	0,490	2,039
#3	-45°	0,627	1,594	0,490	2,039
#4	90°	0,627	1,594	0,490	2,039

		ANSYS			
Quase Isotrópico		Tensão Máxima		Tsai-Wu	
		I_F	R	I_F	R
#1	0°	0,625	1,599	0,489	2,046
#2	45°	0,625	1,599	0,489	2,046
#3	-45°	0,625	1,599	0,489	2,046
#4	90°	0,625	1,599	0,489	2,046

Tabela 5. 30: IF de Hashin e Hashin-Rotem em MAPLE no laminado Quase Isotrópico por ação de $N_x = N_y$

		MAPLE							
Quase Isotrópico		Hashin (IFF)		Hashin (FF)		H-R (IFF)		H-R (FF)	
		I_F	R	I_F	R	I_F	R	I_F	R
#1	0°	0,627	1,594	0,264	3,786	0,627	1,594	0,264	3,786
#2	45°	0,627	1,594	0,264	3,786	0,627	1,594	0,264	3,786
#3	-45°	0,627	1,594	0,264	3,786	0,627	1,594	0,264	3,786
#4	90°	0,627	1,594	0,264	3,786	0,627	1,594	0,264	3,786

Tabela 5.31: IF da Tensão Máxima e Tsai-Wu em MAPLE e ANSYS no laminado Cross-Ply por ação de $N_x = N_y$

		MAPLE			
Cross-Ply		Tensão Máxima		Tsai-Wu	
		I_F	R	I_F	R
#1	0°	0,627	1,594	0,490	2,039
#2	90°	0,627	1,594	0,490	2,039

		ANSYS			
Cross-Ply		Tensão Máxima		Tsai-Wu	
		I_F	R	I_F	R
#1	0°	0,625	1,599	0,489	2,046
#2	90°	0,625	1,599	0,489	2,046

Tabela 5.32: IF de Hashin e Hashin-Rotem em MAPLE no laminado Cross-Ply por ação de $N_x = N_y$

		MAPLE							
Cross-Ply		Hashin (IFF)		Hashin (FF)		H-R (IFF)		H-R (FF)	
		I_F	R	I_F	R	I_F	R	I_F	R
#1	0°	0,627	1,594	0,264	3,786	0,627	1,594	0,264	3,786
#2	90°	0,627	1,594	0,264	3,786	0,627	1,594	0,264	3,786

Tabela 5.33: IF da Tensão Máxima e Tsai-Wu em MAPLE e ANSYS no laminado Quase Isotrópico por ação de $N_x = N_y$

		MAPLE			
Unidirecional		Tensão Máxima		Tsai-Wu	
		I_F	R	I_F	R
#1	0°	3,783	0,264	3,670	0,272

		ANSYS			
Unidirecional		Tensão Máxima		Tsai-Wu	
		I_F	R	I_F	R
#1	0°	3,783	0,264	3,670	0,272

Tabela 5.34: IF de Hashin e Hashin-Rotem em MAPLE no laminado Unidirecional por ação de $N_x = N_y$

		MAPLE							
Unidirecional		Hashin (IFF)		Hashin (FF)		H-R (IFF)		H-R (FF)	
		I_F	R	I_F	R	I_F	R	I_F	R
#1	0°	3,783	0,264	0,144	6,944	3,783	0,264	0,144	6,944

Tabela 5.35: IF da Tensão Máxima e Tsai-Wu em MAPLE e ANSYS no laminado Angle-Ply por ação de $N_x = N_y$

		MAPLE			
Angle-Ply		Tensão Máxima		Tsai-Wu	
		I_F	R	I_F	R
#1	45°	0,627	1,594	0,490	2,039
#2	-45°	0,627	1,594	0,490	2,039

		ANSYS			
Angle-Ply		Tensão Máxima		Tsai-Wu	
		I_F	R	I_F	R
#1	45°	0,625	1,600	0,489	2,046
#2	-45°	0,625	1,600	0,489	2,046

Tabela 5.36: IF de Hashin e Hashin-Rotem em MAPLE no laminado Angle-Ply por ação de $N_x = N_y$

		MAPLE							
Angle-Ply		Hashin (IFF)		Hashin (FF)		H-R (IFF)		H-R (FF)	
		I_F	R	I_F	R	I_F	R	I_F	R
#1	45°	0,627	1,594	0,264	3,786	0,627	1,594	0,264	3,786
#2	-45°	0,627	1,594	0,264	3,786	0,627	1,594	0,264	3,786

5.5 Análise da Resistência dos Laminados através das suas Propriedades Elásticas

Tendo sido feito, no decorrer da seção 5, a análise da resistência dos laminados através da análise das tensões e dos índices de falha, pretende-se neste ponto fazer uma análise da resistência dos laminados a partir da análise das propriedades elásticas do laminado.

5.5.1 Simulação em Tração Longitudinal (Nx)

De acordo com a Eq. (2.55) sabe-se que o módulo de elasticidade longitudinal do laminado depende da espessura (h) do laminado e dos termos da matriz de rigidez de membrana A_{11}, A_{12}, A_{22} . Se usarmos os termos dos laminados Quase Isotrópico (QI), Cross-Ply (CP), Unidirecional (UD) e Angle-Ply (AP) naquela expressão obtemos os valores dos módulos de elasticidade longitudinal e coeficientes de poisson de cada laminado, ou seja

$$A_{QI} = \begin{bmatrix} 129,977 & 40,428 & 0 \\ 40,428 & 129,977 & 0 \\ 0 & 0 & 44,775 \end{bmatrix} \text{ GPa} \quad A_{CP} = \begin{bmatrix} 164,224 & 6,181 & 0 \\ 6,181 & 164,224 & 0 \\ 0 & 0 & 10,528 \end{bmatrix} \text{ GPa}$$

$$A_{UD} = \begin{bmatrix} 306,371 & 6,181 & 0 \\ 6,181 & 22,077 & 0 \\ 0 & 0 & 10,528 \end{bmatrix} \text{ GPa} \quad A_{AP} = \begin{bmatrix} 95,731 & 74,675 & 0 \\ 74,675 & 95,731 & 0 \\ 0 & 0 & 79,021 \end{bmatrix} \text{ GPa}$$

$$E_{x_{QI}} = \frac{1}{h} \left[A_{11} - \frac{A_{12}^2}{A_{22}} \right] = 52,412 \text{ GPa}$$

$$v_{xy_{QI}} = \frac{A_{12}}{A_{22}} = 0,311$$

$$E_{x_{CP}} = \frac{1}{h} \left[A_{11} - \frac{A_{12}^2}{A_{22}} \right] = 73,210 \text{ GPa}$$

$$v_{xy_{CP}} = \frac{A_{12}}{A_{22}} = 0,038$$

$$E_{x_{UD}} = \frac{1}{h} \left[A_{11} - \frac{A_{12}^2}{A_{22}} \right] = 136 \text{ GPa}$$

$$v_{xy_{UD}} = \frac{A_{12}}{A_{22}} = 0,280$$

$$E_{x_{AP}} = \frac{1}{h} \left[A_{11} - \frac{A_{12}^2}{A_{22}} \right] = 16,732 \text{ GPa}$$

$$v_{xy_{AP}} = \frac{A_{12}}{A_{22}} = 0,780$$

Os valores dos módulos de elasticidade dos quatro laminados evidenciam de maneira explícita a rigidez dos laminados, que como se constatou nas análises anteriores o laminado Angle-Ply é o menos resistente. Isto ocorre porque o módulo de elasticidade do laminado $[(\pm 45)_k]_s$ é dominado pela propriedade da matriz pelo que depende do módulo de corte no plano da lamina G_{12} , ou seja

$$E_{x_{AP}} = \frac{1}{h} \left[A_{11} - \frac{A_{12}^2}{A_{22}} \right] = \frac{4(Q_{11} + Q_{22} + 2Q_{12})Q_{66}}{Q_{11} + Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66}} \quad (5.1)$$

Para compósitos com fibras de alta rigidez, em que

$$Q_{11} \gg Q_{22} \quad Q_{11} \gg Q_{12} \quad Q_{11} \gg Q_{66} \quad (5.2)$$

a Eq. (5.1) pode ser reduzida em

$$E_x \cong \frac{4Q_{11}Q_{66}}{Q_{11}} = 4Q_{66} = 4G_{12} \quad (5.3)$$

Pese embora o módulo de elasticidade do laminado Angle-Ply seja bastante baixo, este facto não é o mais relevante para que este laminado falhe. Como se constatou cima, os grandes responsáveis pela rotura da camada deste laminado são os elevados esforços de corte. Para melhor compreensão recorreremos ao cálculo do módulo de corte deste laminado.

Para tornar a análise do módulo de corte mais simples admite-se que o laminado esteja sujeito a esforços de corte (N_{xy}). Assim, para um esforço N_{xy} o módulo de corte (G_{xy}) do laminado $[(\pm 45)_k]_s$ é definido pela Eq. (5.4), onde A_{66} é obtido a partir da Eq. (5.5). Assim, a expressão do módulo de corte é definida em termos de constantes de rigidez elástica pela Eq. (5.6).

$$G_{xy} = \frac{A_{66}}{h} \quad (5.4)$$

$$A_{66} = h \overline{Q_{66}(\theta=\pm 45^\circ)} = \frac{1}{4}(Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12}) \quad (5.5)$$

$$G_{xy} = \frac{1}{4}(Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12}) \quad (5.6)$$

Para compósitos com fibras de alta rigidez,

$$G_{xy} \cong \frac{Q_{11}}{4} = \frac{E_1}{4} = 34 \text{ GPa} \quad (5.7)$$

Conclui-se portanto que o módulo de corte do laminado $[(\pm 45)_4]_s$ é dominado pela propriedade da fibra visto que depende mais significativamente do módulo de elasticidade longitudinal E_1 . Este módulo de corte é bastante elevado devido ao elevado valor das tensões de corte no material ($\sigma_6 = \pm 111 \text{ MPa}$), que por sua vez são bastante superiores ao valor da tensão de corte limite do material ($F_6 = 75 \text{ MPa}$).

5.5.2 Simulação em Tração Transversal (Ny)

De modo similar ao (5.6.1), recorrendo a expressão (2.56) obtemos os módulos de elasticidade transversal e coeficientes de poisson dos quatro laminados.

$$A_{QI} = \begin{bmatrix} 129,977 & 40,428 & 0 \\ 40,428 & 129,977 & 0 \\ 0 & 0 & 44,775 \end{bmatrix} \text{ GPa} \quad A_{CP} = \begin{bmatrix} 164,224 & 6,181 & 0 \\ 6,181 & 164,224 & 0 \\ 0 & 0 & 10,528 \end{bmatrix} \text{ GPa}$$

$$A_{UD} = \begin{bmatrix} 306,371 & 6,181 & 0 \\ 6,181 & 22,077 & 0 \\ 0 & 0 & 10,528 \end{bmatrix} \text{ GPa} \quad A_{AP} = \begin{bmatrix} 95,731 & 74,675 & 0 \\ 74,675 & 95,731 & 0 \\ 0 & 0 & 79,021 \end{bmatrix} \text{ GPa}$$

$$E_{y_{QI}} = \frac{1}{h} \left[A_{22} - \frac{A_{12}^2}{A_{11}} \right] = 52,412 \text{ GPa} \quad \nu_{xy_{QI}} = \frac{A_{12}}{A_{11}} = 0,311$$

$$E_{y_{CP}} = \frac{1}{h} \left[A_{22} - \frac{A_{12}^2}{A_{11}} \right] = 73,210 \text{ GPa} \quad \nu_{xy_{CP}} = \frac{A_{12}}{A_{11}} = 0,038$$

$$E_{y_{UD}} = \frac{1}{h} \left[A_{22} - \frac{A_{12}^2}{A_{11}} \right] = 9,8 \text{ GPa} \quad \nu_{xy_{UD}} = \frac{A_{12}}{A_{11}} = 0,020$$

$$E_{y_{AP}} = \frac{1}{h} \left[A_{22} - \frac{A_{12}^2}{A_{11}} \right] = 16,732 \text{ GPa} \quad \nu_{xy_{AP}} = \frac{A_{12}}{A_{11}} = 0,780$$

Neste caso, nota-se uma grande alteração no módulo de elasticidade do laminado Unidirecional, isto porque na direção transversal às fibras este laminado dominado pelas propriedades da matriz, que como se sabe é o “elo mais fraco”.

$$E_{y_{UD}} = E_2 = 9.8 \text{ GPa} .$$

Esta análise também é válida para o carregamento biaxial ($N_x = N_y = 500 \text{ N/mm}$).





5.6 Análise da Evolução do Índice de Falha

A análise da evolução do índice de falha consiste em avaliar a forma como evolui o índice de falha nos laminados em estudo, nas quatro previsões de falha, para os três carregamentos.

Esta análise ajuda-nos a perceber, por um lado, o comportamento do material até atingir a rotura; isto é, se o I_F tem um comportamento linear ou não linear. Por outro lado, permite-nos ter uma noção da velocidade de propagação da falha da camada, a partir da análise do declive (m), que é tanto mais baixo quanto mais forte for o laminado, e vice-versa.

Nesta abordagem, a variável de entrada é carga e a resposta é o I_F . Assim para cada incremento de carga ($\Delta N = 100 \text{ N/mm}$) teremos o valor do I_F a tender para 1.

Nos gráficos que se seguem, os laminados estão representados pelas seguintes cores:

	Laminado Quase Isotrópico
	Laminado Cross-Ply
	Laminado Unidirecional
	Laminado Angle-Ply

5.6.1 Evolução do Índice de Falha (Nx)

Nas Figuras (5.24) a (5.27) são apresentados a evolução dos índices de falha de acordo com cada uma das previsões.

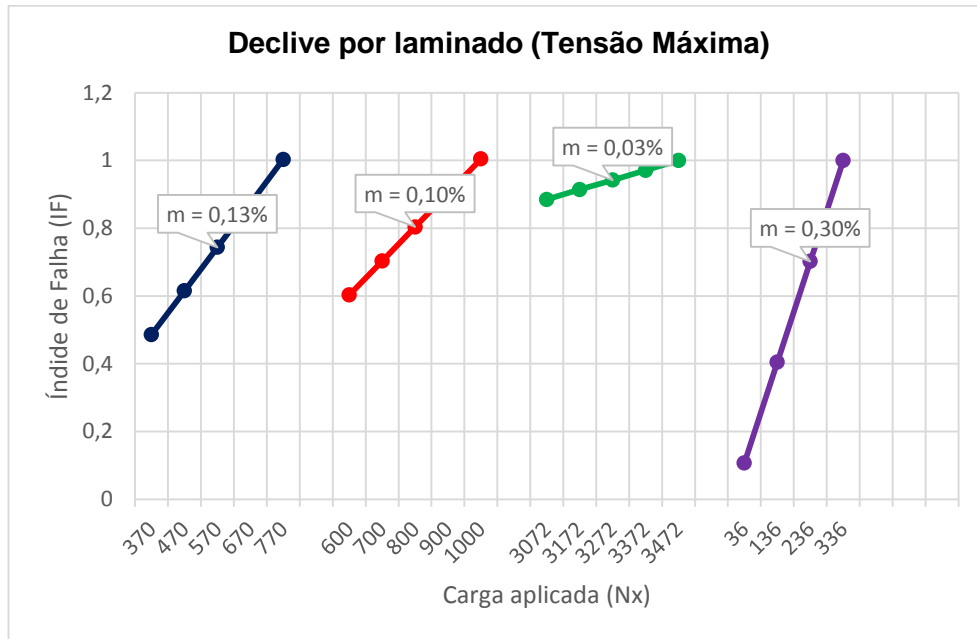


Figura 5.24: Evolução do IF em cada laminado pelo critério da Tensão Máxima, devido Nx

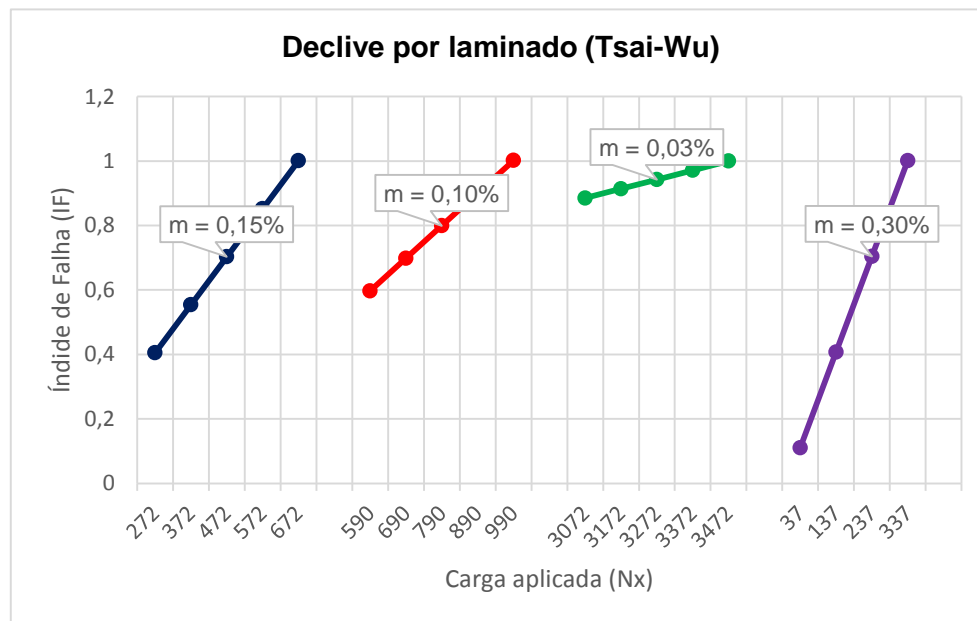


Figura 5. 25: Evolução do IF em cada laminado pelo critério da Tsai-Wu, devido Nx

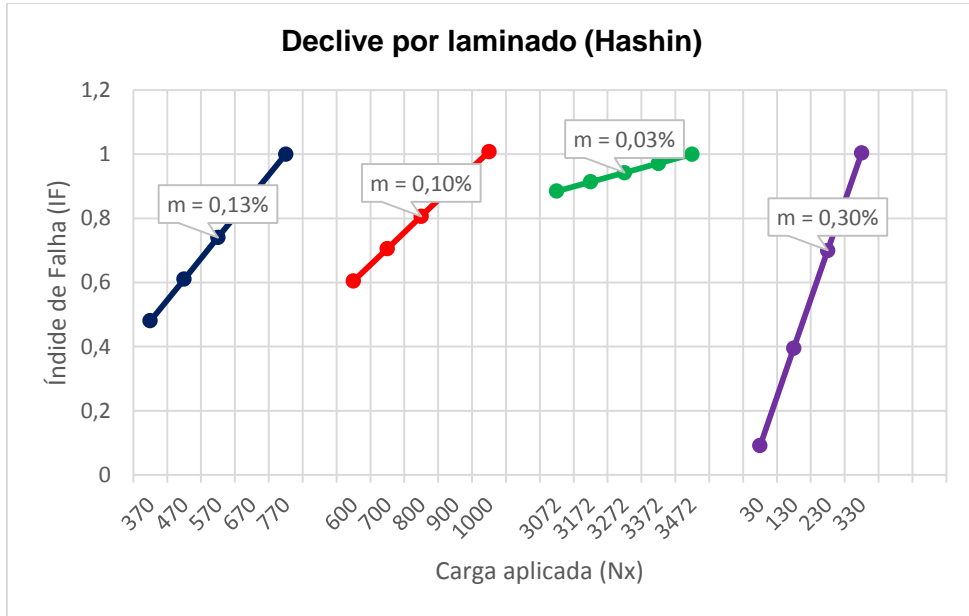


Figura 5.26: Evolução do IF em cada laminado pelo critério de Hashin, devido Nx

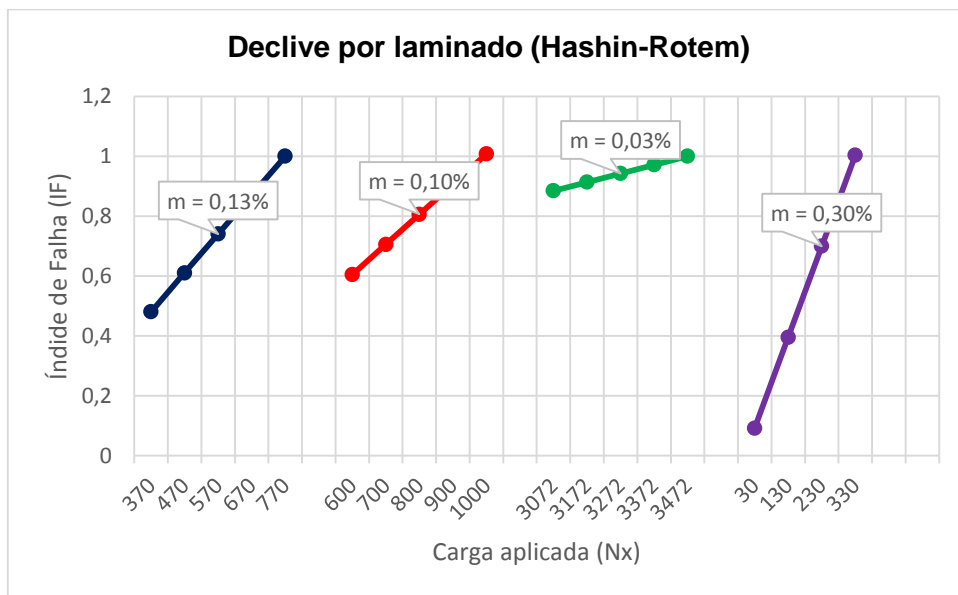


Figura 5.27: Evolução do IF em cada laminado pelo critério de Hashin-Rotem, devido Nx

De acordo com o carregamento uniaxial de tração segundo a direcção x , a medida que se for adicionando 100 N/mm, de carga, obteremos uma evolução do índice de falha nos quatro laminados a tender para o valor crítico ($I_F = 1$). Como se constata nas Figuras (5.24) à (2.27), esta evolução apresenta um comportamento linear.

Se fizermos a análise do declive, verificaremos que para esta situação de carga ($N_x = 500 \text{ N/mm}$) o laminado Angle-Ply tem um declive bastante elevado ($m = 0.30\%$) quando comparado com os outros três laminados, sobretudo quando comparado com o laminado Unidirecional cujo declive é $m = 0.03\%$. A partir destes valores podemos aferir que para o mesmo incremento de carga o laminado Angle-Ply, $[(\pm 45)_4]_s$, é aproximadamente 10 vezes mais rápido a atingir a rotura do que o laminado unidirecional, $[(0)_8]_s$.

De acordo com as previsões de falha, o critério de Tsai-Wu é o critério mais conservador do que os critérios da Tensão Máxima, Hashin e Hashin-Rotem no que toca às previsões dos laminados QI e CP. Este critério prevê a rotura da camada nestes laminados para uma carga última de 672 N/mm e 990 N/mm, respetivamente. Estes valores são mais baixos do que os 770 N/mm e 1000 N/mm obtidos nos mesmos laminados pelos critérios da Tensão Máxima, Hashin e Hashin-Rotem.

Quanto ao laminado Unidirecional, todos os critérios preveem a falha da camada para o mesmo valor de carga última (3472 N/mm). Neste caso, não existe um critério mais conservador do que os outros.

No laminado Angle-Ply, as previsões mais conservadoras foram obtidas pelos critérios de Hashin e Hashin-Rotem, que previram igualmente a rotura da camada para uma carga última de 330 N/mm; valor mais baixo quando comparado com o esforço máximo obtido pelo Critério da Tensão Máxima (336 N/mm), e Tsai-Wu (337 N/mm).

De um modo geral, constatamos que o laminado UD ($[(0)_8]_s$) apresenta uma resistência à tração, para as condições em que foram realizados os estudos, muito superior aos laminados CP ($[(0/90)_4]_s$), QI ($[(0/90/\pm 45)_2]_s$), e AP ($[(\pm 45)_4]_s$). Note-se que, o laminado UD é aproximadamente 3 vezes superior ao CP, 5 vezes superior ao QI, e 10 vezes superior ao AP.

A Figura 5.28 ilustra a ordem em que ocorre a rotura dos laminados, sob a forma de “cotovelos”.

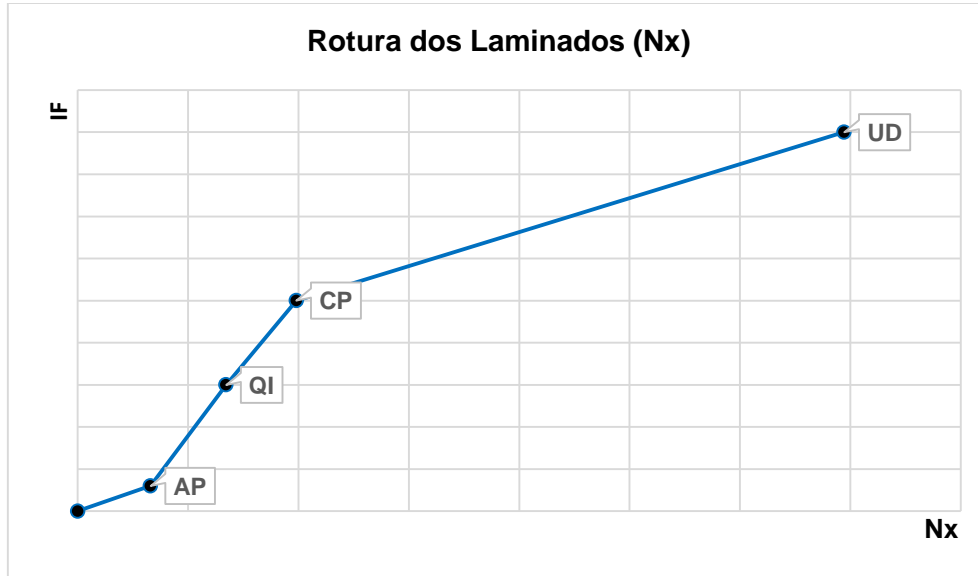


Figura 5. 28: Rotura dos laminados por ação de Nx

A partir da Figura 5.28 podemos observar que a medida que formos adicionando a carga, o laminado Angle-Ply será o primeiro a atingir a rotura. De seguida, o laminado Quase Isotrópico, seguido do laminado Cross-Ply. E por fim, para um carregamento de 3472 N/mm o laminado Unidirecional.

5.6.2 Análise da Evolução do Índice de Falha (Ny)

Nesta situação, o procedimento é semelhante ao do (5.6.2).

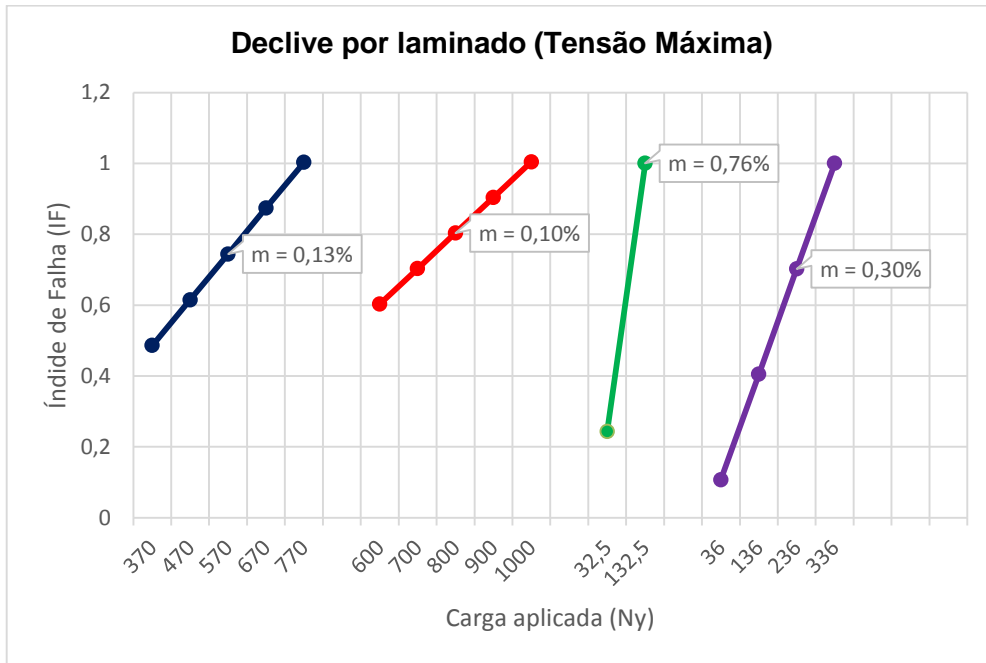


Figura 5.29: Evolução do IF em cada laminado pelo critério da Tensão Máxima, devido Ny

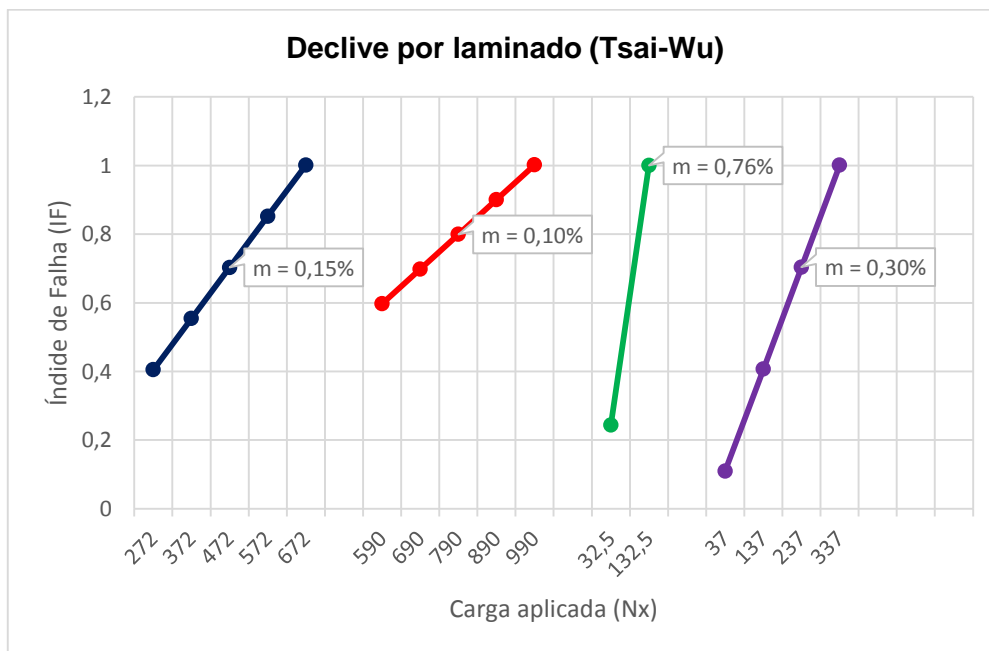


Figura 5. 30: Evolução do IF em cada laminado pelo critério da Tsai-Wu, devido Ny

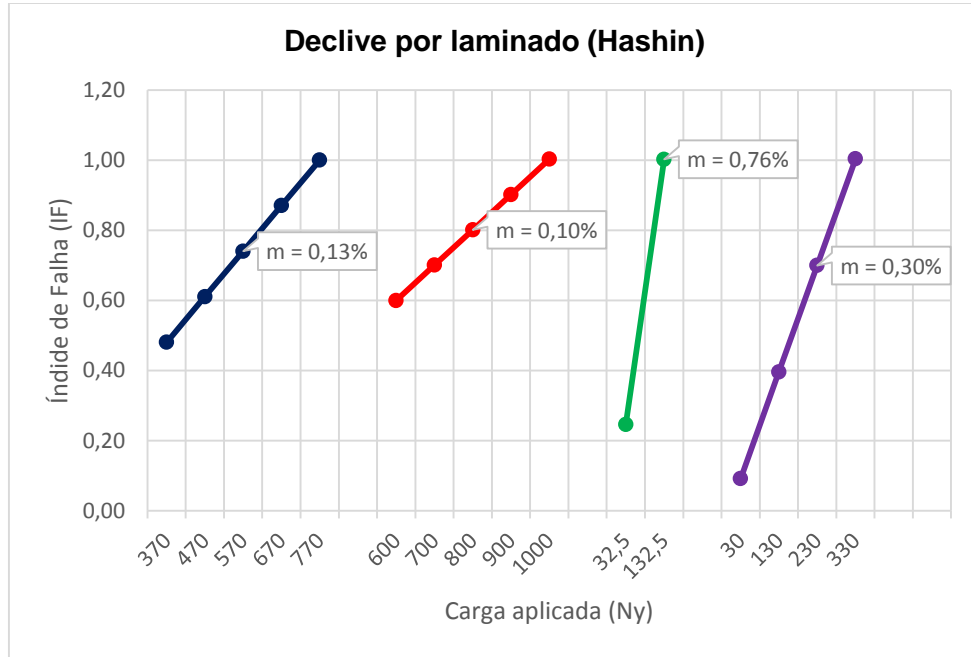


Figura 5. 31: Evolução do IF em cada laminado pelo critério de Hashin, devido Ny

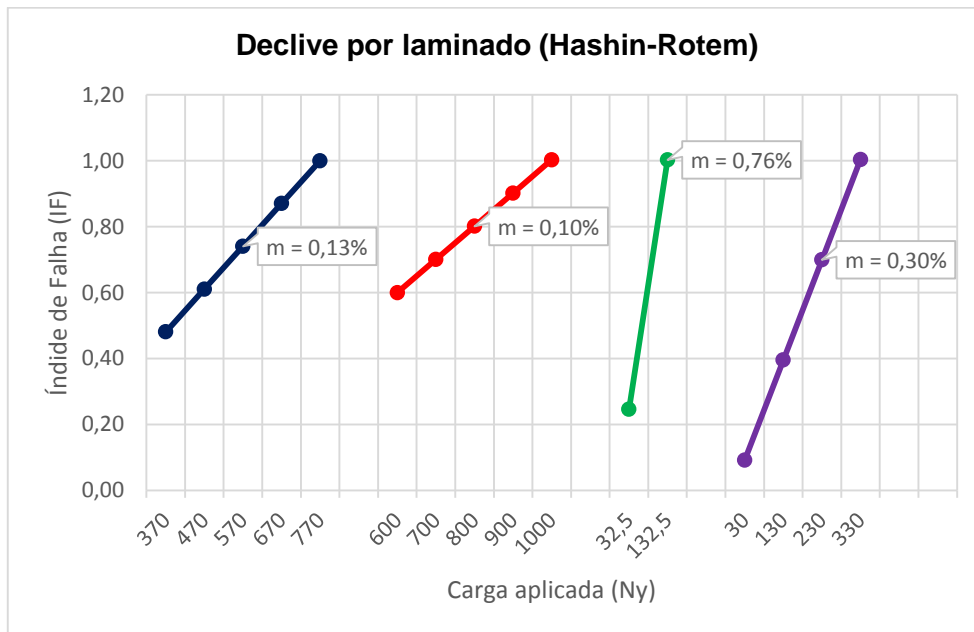


Figura 5. 32: Evolução do IF em cada laminado pelo critério de Hashin-Rotem, devido Ny

Neste caso, em que o carregamento uniaxial é feito segundo a direção y , verificamos uma grande redução da resistência do laminado UD. Esta queda brusca da resistência deste laminado é facilmente compreendida pelo elevado valor do declive ($m = 0,76\%$), e pelo baixo valor da carga última (132,5 N/mm) necessária.

Como se compreende, o laminado UD é bastante fraco quando solicitado na direção transversal às fibras.

A partir das Figuras (5.29), (5.31) e (5.32), podemos constatar que as previsões são semelhantes às obtidas na situação anterior. Os esforços aplicados permanecem inalterados. Conclui-se portanto que a análise do conservadorismo dos critérios é a mesma feita para o carregamento na direção x .

De um modo geral, constatamos que o laminado CP ($[(0/90)_4]_s$), apresenta uma resistência à tração, para as condições em que foram realizados os estudos, superior aos laminados QI ($[(0/90/\pm 45)_2]_s$), AP ($[(\pm 45)_4]_s$), e UD ($[(0)_8]_s$). Note-se que, o laminado CP é, aproximadamente, 1 vez superior ao QI, 3 vezes superior ao AP, e 8 vezes superior ao UD.

A Figura 5.33 mostra a ordem em que ocorre a rotura dos quatro laminados.

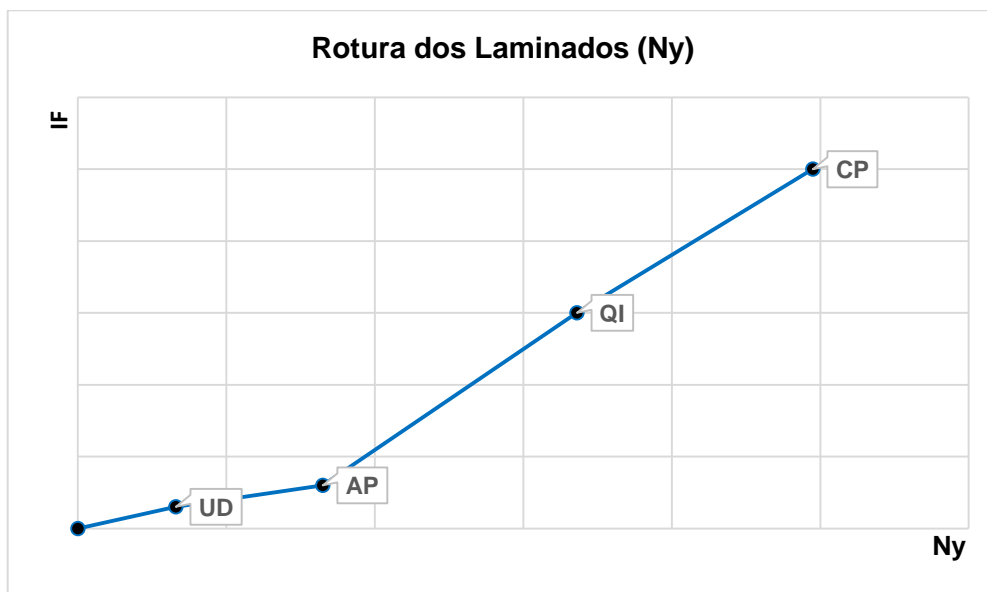


Figura 5.33: Rotura dos laminados por ação de N_y

Como foi referido nos parágrafos anteriores, na Figura 5.33 podemos observar a sequência em que os laminados falham, começando pelo laminado Unidirecional, para valores bastante baixos. Note-se que ao fim de apenas dois incrementos de carga este laminado irá falhar. Segue-se assim, o laminado Angle-Ply, Quase Isotrópico e, por fim, o Cross-Ply.

5.6.3 Análise da Evolução do Índice de Falha (Nx = Ny)

Neste último caso, faz-se de modo análogo às situações anteriores.

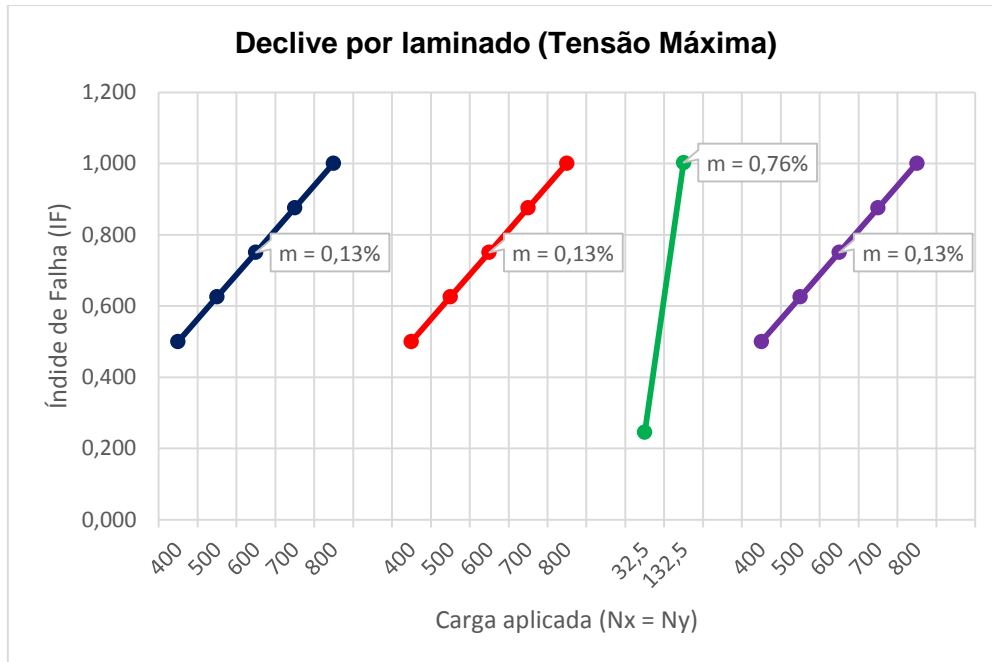


Figura 5.34: Evolução do IF em cada laminado pelo critério da Tensão Máxima, devido Nx = Ny

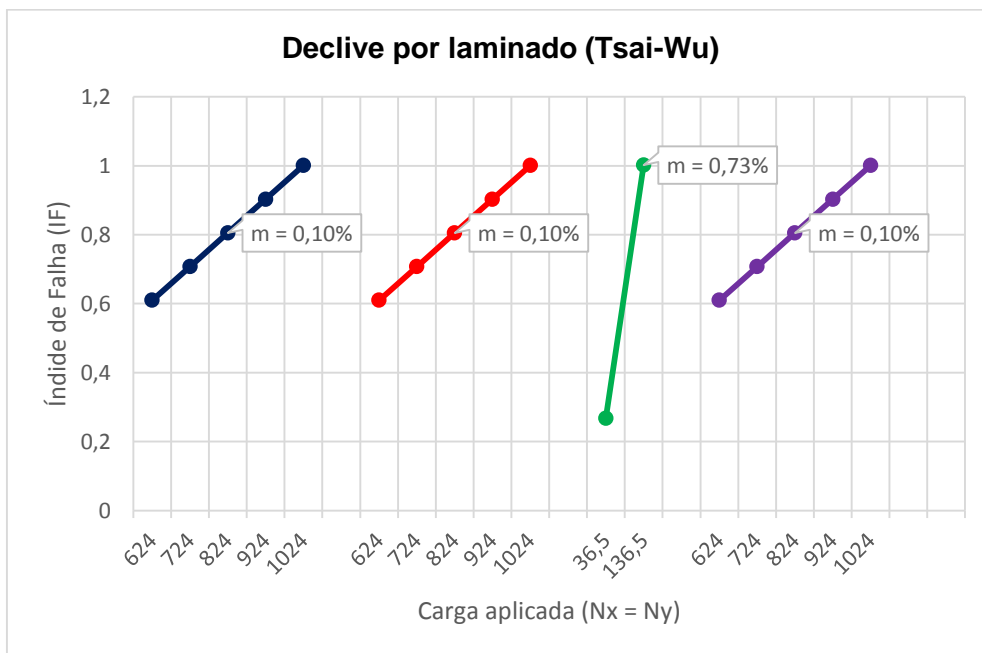


Figura 5.35: Evolução do IF em cada laminado pelo critério da Tsai-Wu, devido Nx = Ny

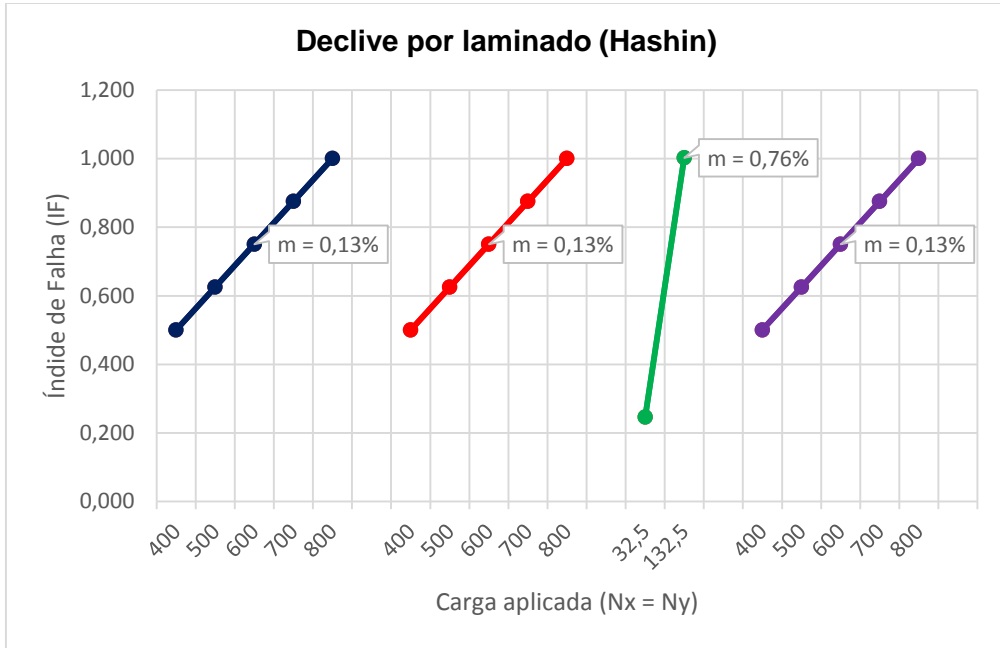


Figura 5.36: Evolução do IF em cada laminado pelo critério de Hashin, devido $N_x = N_y$

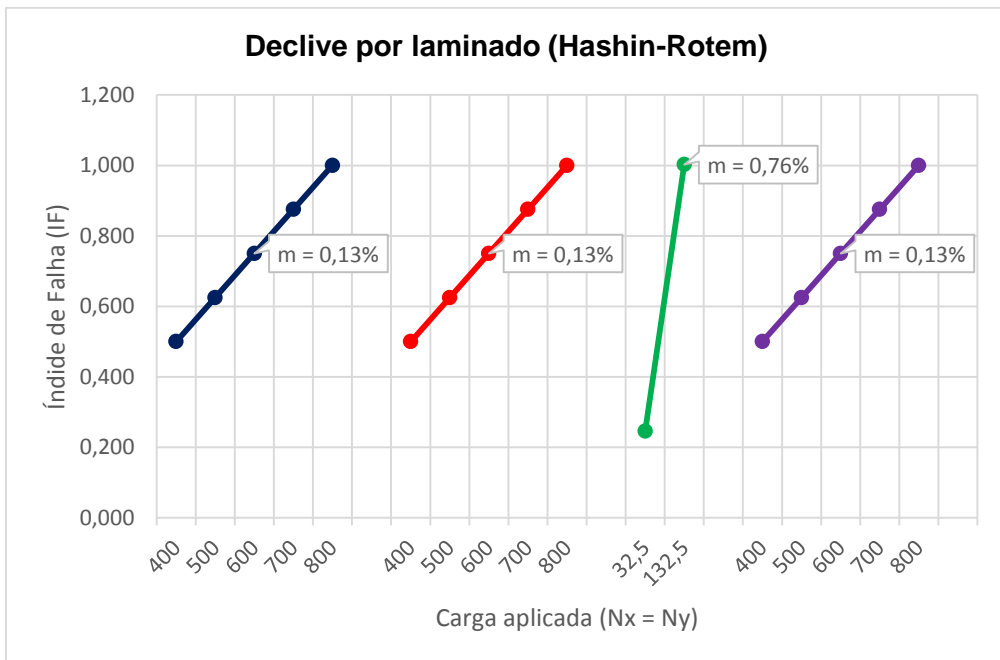


Figura 5.37: Evolução do IF em cada laminado pelo critério de Hashin-Rotem, devido $N_x = N_y$

Nesta situação de carregamento biaxial, podemos verificar a partir das Figuras (5.34) (5.36) (5.37) que os declives obtidos pelos critérios da Tensão Máxima, Hashin e Hashin-Rotem nos quatro laminados são semelhantes. Estes critérios preveem a

rotura dos laminados QI, CP, e AP para o mesmo carregamento (800 N/mm) e declive ($m = 0.13\%$). Preveem igualmente a falha do laminado UD para o esforço de 132,5 N/mm, e declive de 0.76%.

Os valores dos esforços e declives referidos no parágrafo anterior, quando comparados com os obtidos pelo critério de Tsai-Wu para os laminados QI, CP, e AP (1024 N/mm e 0.10%) são mais conservadores. O mesmo ocorre com o laminado UD, em que as previsões de Tsai-Wu são 136,5 N/mm e 0.73%.

Se analisarmos as cargas aplicadas para que a falha ocorra nos laminados QI e AP constataremos que neste carregamento (biaxial) é necessário mais esforço do que nos carregamentos uniaxiais de tração. Note-se que, nestes laminados as situações de carga (N_x) e (N_y) são mais severas do que a situação de carga ($N_x=N_y$); isto é, levam a rotura do material mais cedo. O contrário se verifica para o laminado CP.

A Figura 5.38 ilustra a ordem em que ocorre a falha dos laminados.

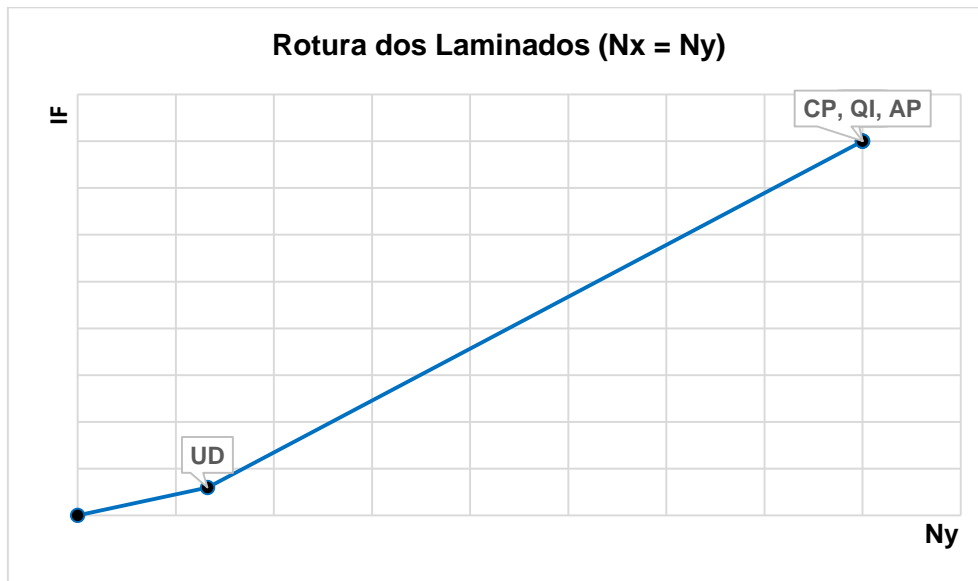


Figura 5.38: Rotura dos laminados por ação de $N_x = N_y$

A Figura 5.38 mostra o que fora apresentado em termos de carga e declive. Isto é, o laminado UD cujo coeficiente angular é bastante acentuado, será o primeiro a atingir a rotura da camada. Os laminados CP, QI e AP atingirão a rotura para a mesma carga aplicada.

Capítulo VI – CONCLUSÕES

O estudo de falha de placas finas laminadas no Maple por aplicação da Teoria Clássica de Placas Laminadas (CLPT) apresenta uma boa concordância com o estudo feito no Ansys, para as condições em que foram realizados os estudos.

Como se constatou nos vários estudos, foi de todo importante efetuar, primeiramente, a análise das tensões geradas nos laminados, uma vez que é um indicador pelo qual podemos saber se os laminados analisados iriam falhar ou não. Para além desta informação que se pode obter a partir da análise das tensões, este indicador possibilita também saber, caso haja rotura da camada, qual o laminado que irá falhar.

Como se verificou, em nenhuma das simulações de tração realizadas houve rotura das camadas por ação da tensão σ_1 . Isto verifica-se pelo facto de a rotura da primeira camada ser frequentemente uma rotura transversal, que ocorre em esforços bastante inferiores aos que provocam rotura final.

Nas situações de cargas uniaxiais de tração longitudinal (Nx) e transversal (Ny), constatou-se que os maiores valores de tensão ocorreram sempre nas camadas orientadas na direção do carregamento. No entanto, a rotura da camada dificilmente ocorrerá naquelas camadas, uma vez que na direção do carregamento a resistência das referidas camadas é determinada pela propriedade da fibra.

De acordo com a situação de carregamento longitudinal (Nx), foi possível constatar a partir dos índices de falha que, o laminado Unidirecional é bastante forte naquela situação de carga, apresentando assim o índice de falha bastante inferior a 1 ($I_F = 0,14$). Isto se verifica, pelo facto da rigidez do laminado $[(0)_8]_s$ ser dominada pela propriedade da fibra ($E_{x_{UD}} = E_1 = 136$ GPa). Nesta ordem, segue-se o laminado Cross-Ply com um índice de falha de 0.50, seguido do laminado Quase Isotrópico com um índice de falha de 0.65. Nesta situação de carga, o laminado Angle-Ply é o mais fraco, com um índice de falha acima de 1 ($I_F = 1,52$). Isto ocorre pelo facto do módulo de elasticidade deste laminado $[(\pm 45)_4]_s$ ser dominado pela propriedade da matriz

pelo que depende do módulo de corte no plano da lâmina ($E_{x_{AP}} \cong 4 G_{12}$), e pela existência de elevadas tensões de corte ($\sigma_6 = 111,6$ MPa).

No que respeita às previsões, verificou-se que na análise dos laminados Quase Isotrópico ($[(0/90/\pm 45)_2]_s$) e Cross-Ply ($[(0/90)_4]_s$) o critério de Tsai-Wu revelou-se o critério mais conservador, tendo previsto a falha destes laminados no valor de 0,75 e 0,51, respetivamente. Os índices de falha obtidos pelos critérios da Tensão Máxima, Hashin e Hashin-Rotem foram de 0,65 e 0,50. Note-se que, neste caso o índice de falha está relacionado com as camadas orientadas a 90° .

Por outro lado, no que respeita a análise do laminado Angle-Ply os critérios de Hashin e de Hashin-Rotem são os critérios mais conservadores, e preveem a rotura no valor de 1,52. O critério da Tensão Máxima ($I_F = 1,49$), e Tsai-Wu ($I_F = 1,48$).

De acordo com a análise da evolução do índice de falha, constatamos que o laminado UD apresenta uma resistência à tração, aproximadamente 3 vezes superior ao CP, 5 vezes superior ao QI, e 10 vezes superior ao AP.

Assim, se o laminado for submetido a um carregamento uniaxial de tração, as fibras em todas as camadas devem ter a mesma orientação da carga para se obter a máxima resistência possível, isto porque um laminado unidirecional será muito forte, ao longo da direção das fibras e fraco na direção transversal e em corte.

Nas situações em que o laminado é solicitado por tração transversal (N_y), o laminado Unidirecional é a pior escolha. Apresenta um índice de falha bastante acima de 1 ($I_F = 3,78$). Note-se que, na direção transversal às fibras a rigidez do laminado UD é dominado pela propriedade da matriz ($E_{y_{UD}} = E_2 = 9.8$ GPa). Constatou-se também que as camadas de um laminado com as fibras orientadas transversalmente à direção do carregamento serão as primeiras a falhar.

Quanto ao laminado Angle-Ply, podemos verificar que a rotura da camada se dá para o mesmo valor do índice de falha obtido na situação de carregamento segundo a direção x ($I_F = 1,52$), pelas mesmas razões.

Nesta situação de carga (N_y), o laminado Cross-Ply é o mais forte. No entanto, a previsão é a mesma como que para o carregamento longitudinal ($I_F = 0,50$).

No que diz respeito às previsões, na análise dos laminados Quase Isotrópico e Cross-Ply verificou-se que o critério de Tsai-Wu é mais conservador, pós prevê a rotura da camada para o valor de 0,75 e 0,51. Estas previsões assemelham-se às

previsões do estudo anterior. No entanto, neste caso não estão relacionadas com as camadas orientadas a 90° mas sim com as camadas orientadas a 0°.

Os critérios de Hashin e de Hashin-Rotem mostraram-se mais conservadores no estudo da falha do laminado Angle-Ply. As previsões são semelhantes às obtidas no estudo anterior.

Quanto a análise da evolução do índice de falha, verificamos que o laminado CP, apresenta uma resistência à tração, aproximadamente, 1 vez superior ao QI, 3 vezes superior ao AP, e 8 vezes superior ao UD. Assim, nesta situação de carga transversal aconselha-se um laminado cruzado.

No caso em que se pretende prever a rotura dos laminados sob carregamento biaxial, constatou-se que as previsões obtidas nos laminados QI, CP e AP são semelhantes. Estes laminados atingem a rotura da camada para o mesmo valor de carga última aplicada ($N_x = N_y = 800 \text{ N/mm}$). A tensão de corte é nula em todos os laminados, facto que nos leva a aferir que, este tipo de carregamento é ideal quando se pretende anular totalmente os efeitos das tensões de corte no material.

Quanto às previsões, os critérios da Tensão Máxima, Hashin e Hashin-Rotem revelaram-se mais conservadores do que o critério de Tsai-Wu, pós previram a rotura dos laminados QI, CP e AP no valor de 0,63 ao passo que o critério de Tsai-Wu previu a rotura para $I_F = 0,49$. No caso do laminado Unidirecional os três primeiros critérios previram a falha deste laminado no valor de 3,78, enquanto que o critério de Tsai-Wu previu no valor de 3,67.

Em todas as situações estudadas, foi possível verificar que os quatro critérios de rotura previram a falha do laminado Unidirecional para valores semelhantes. No primeiro caso, foi previsto o valor de 0.14. No segundo e no terceiro caso, o valor de 3,78. Assim, como se compreende, não há um critério mais conservador.

DESENVOLVIMENTO FUTURO - RECOMENDAÇÕES

Como sugestões para trabalhos futuros que possam ser desenvolvidos no âmbito do estudo de falha de materiais compósitos pode-se citar os seguintes itens:

- Estudar a falha dos critérios de Tensão Máxima, Tsai-Wu, Hashin, e Hashin-Rotem em laminados assimétricos e antissimétricos.
- Estudar a falha dos laminados em situações mais gerais em que as placas estejam sujeitas a esforços de membrana e flexão.
- Prever a rotura dos laminados considerando os efeitos da temperatura e higroscópicos.
- Prever a rotura de laminados em diferentes geometrias: tubos, elementos curvos...
- Estudar a falha progressiva.
- Estender o estudo de falha para critérios como por exemplo o de Tsai-Hill, Deformação Máxima.

BIBLIOGRAFIA

ASTM D 3039/D 3039M – Standard Test Method for Tensile Properties of Polymer Matrix Composite Materials.

ASTM D 3518/D 3518M - Standard Test Method for In-Plane Shear Response of Polymer Matrix Composite Materials by Tensile Test of a $\pm 45^\circ$ Laminate.

[**Altenbach, 2015**] – Altenbach, H., Sadowski, T. (2015). *Failure and Damage Analysis of Advanced Materials*. ISBN 978-3-7091-1834-4, ISBN 978-3-7091-1835-1.

[**Barbero, 2008**] – Barbero E.J. (2008). *Finite Element Analysis Of Composite Materials*. ISBN-10:1-4200-5434-1, ISBN-13:978-1-4200-5433-0. CRC Press: Taylor & Francis Group, LLC.

[**Branco, 2011**] - Branco, C.A.G.M. (2011). *Mecânica dos Materiais*. 5ª Edição. ISBN 978-972-31-1147-7.

[**Barbero, 2014**] – Barbero E.J. (2008). *Finite Element Analysis Of Composite Materials*. 2ª Edição. ISBN-13:978-1-4665-1689-2. CRC Press: Taylor & Francis Group, LLC.

[**Campilho, 2012**] – Campilho, R.D.S.G. (2012). *Métodos de Elementos Finitos*. ISBN: 978-989-723-028-8. Edições Técnicas, Lda. 4300-144 Porto.

[**Casado, 2011**] – Casado, L.P.C. (2011). *Experimental and computational micromechanical study of fiber-reinforced polymers*.

[**Cuntze, 2014**] – Cuntze, R. (2014). *Carbon Composites*. SSMET. Braunschweig.

[**Daniel et al., 1994**] – Daniel, Isaac M., Ishai, Ori. (1994). *Engineering Mechanics of Composite Materials*, Oxford University Press, ISBN 0-19-507506-4.

[**Hashin et al., 1973**] – Hashin, Z., Rotem, A. (1973). “A Fatigue Failure Criterion for Fibre reinforced Materials”, Technion – Israel Institute of Technology. National Technical Information Service. 5285 Port Royal Road, Springfield Va. 22151.

[**Hashin, 1980**] - Hashin, Z. (1980). *Failure Criteria for Unidirectional Fiber Composites*. J. Appl. Mech., vol. 47, pp. 32%334.

[Hinton et al., 2000] – Hinton, M.j., Kaddour, A.S., Soden P.D., (2000). *Predicting Failure in Fibre Composites: lessons learned from the world-wide failure exercises*. British Crown.

[Hinton et al., 2004] – Hinton, M.j., Kaddour, A.S., Soden P.D. (2004). *Failure Criteria in Fibre Reinforced Polymer Composites: The World Wide Failure Exercise*. A composites Science and Technology Compendium. Elsevier Ltd. The Boulevard, Langford Lane Kidlington, Oxford OX5 1GB UK.

[Hyer, 2009] – Hyer, M.W., (2009). *Stress Analysis of Fiber-Reinforced Composite Materials*. ISBN 13: 978-1-932078-86-2.

[Hinton et al., 2011] – Hinton, M.j., Kaddour, A.S., Soden P.D., (2011). *Failure Criteria in Fibre Reinforced Polymer Composites: Can any of the Predictive Theories be Trusted (?)*. NAFEMS World Congress. QinetiQ Limited Boston, 23rd-26th May.

[Harvey, 2012] – Harvey, S. (2012). *Incorporating Basic FEM Concepts in a Introductory Composites Analysis Course*. Composites Seminar. ANSYS, Inc.

[Imaoka, 2009] – Imaoka, S. (2009). *User-Defined Failure Criteria*. Memo Number: STI0904.

[Jones, 1999] – Jones, R.M., (1999). *Mechanics of Composite Materials: 2nd Ed*, Taylor & Francis. ISBN 1-56032-712-X.

[Kaddour et al., 2007] – Kaddour, A.S., Hinton, M.j., Li, S., Smith, P.A. (2007). *Damage Theories For Fibre-Reinforced Polymer Composites: The Third World-Wide Failure Exercise (WWFE-III)*. 16TH International Conference on Composite Materials. QinetiQ Ltd.

[Mukhopadhyay, 2004] – Mukhopadhyay, M. (2004). *Mechanics of Composite Materials and Structures*. Orient Longman Private Limited. ISBN 81 7371 477 0. Springer Wien.

[Moura et al., 2005] - Moura M.F.S.F, Morais A.B., Magalhães A.G. (2005). *Materiais Compósitos – Materiais, fabrico e Comportamento Mecânico*. Publindústria, Edições Técnicas. ISBN 972-8953-00-3. Praça da Carujeira 38, 4300-144 Porto.

[Mallick, 2007] – Mallick, P.K. (2007). *Fiber-Reinforced Composites: Material, Manufacturing, and Design*. Terceira Edição. ISBN-13: 978-0-8493-4205-9. ISBN-10: 0-8493-4205-8.

[París, 2001] – París, F. (2001). *A Study of Failure Criteria of Fibrous Composite Materials*. NASA/CR-2001-210661. George Washington University. Virginia 23681-2199.

[Pinho, 2005] – Pinho S.T., 2005. *Critérios de rotura em Materiais Compósitos*. Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto, Porto.

[Reddy, 1997] - Reddy, J.N. (1997). *Mechanics of Laminated Composite Plates: theory and analysis*. ISBN 0-8493-3101-3.

[Smith, 1998] - Smith, W. F. (1998). *Princípios de Ciência e Engenharia dos Materiais*. 3ª Edição, Editor: Mcgraw_Hill. ISBN: 9789728298685. C.I.: 00000040230.

[Staab, 1999] – Staab, G.H. (1999). *Laminar Compósitos*. ISBN 0-7506-7124-6. 225 Wildwood Avenue, Woburn, MA 01801 – 2041.

[Staab, 2015] – Staab, G.H. (2015). *Laminar Compósitos*. Segunda Edição. ISBN 978-0-12-802400-3.

[Talreja, 2012] – Talreja, R., Singh C.V. (2012). *Damage and Failure of Composite Materials*. ISBN 978-0-521-81942-8

[1] – U.S AIR FORCE website

<http://www.af.mil/News/ArticleDisplay/tabid/223/Article/126971/f-117-pioneer-test-pilot-passes-away-t-70.aspx> (Acedido aos 30 de Setembro de 2015)

[2] – BOEING website. <http://www.newairplane.com/787/#/design-highlights/visionary-design/composites/advanced-composite-use/> (Acedido aos 30 de Setembro de 2015)

Transformação das Tensões

A transformação de um tensor de tensões, consiste em obter uma nova descrição desse estado, que resulta de uma rotação em torno do referencial original [Reddy, 1997].

Para determinar as novas componentes de um estado de tensão de acordo com um novo sistema de coordenadas (Figura A1), faz-se a caracterização dos ângulos do referencial inicial xyz com o novo sistema de coordenadas $x_1x_2x_3$. Deste modo, para a relação entre o eixo x_1 e os eixos x, y, z , determinam-se os cossenos diretores¹⁶. O procedimento é o mesmo para os eixos x_2 e x_3 .

$$\begin{aligned} l_{x_1} &= \cos\theta_{x_1x}; & m_{x_1} &= \cos\theta_{x_1y}; & n_{x_1} &= \cos\theta_{x_1z} \\ l_{x_2} &= \cos\theta_{x_2x}; & m_{x_2} &= \cos\theta_{x_2y}; & n_{x_2} &= \cos\theta_{x_2z} \\ l_{x_3} &= \cos\theta_{x_3x}; & m_{x_3} &= \cos\theta_{x_3y}; & n_{x_3} &= \cos\theta_{x_3z} \end{aligned} \quad (A1)$$

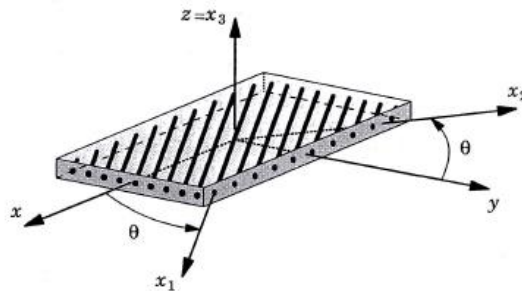


Figura A1: Rotação de referencial em torno do eixo $z = x_3$ [Reddy, 1997].

Assim, pode-se determinar a matriz de transformação **T** dada por

$$[T] = \begin{bmatrix} l_{x_1} & m_{x_1} & n_{x_1} \\ l_{x_2} & m_{x_2} & n_{x_2} \\ l_{x_3} & m_{x_3} & n_{x_3} \end{bmatrix} \quad (A2)$$

¹⁶ Cossenos diretores: caracterizam o ângulo que a nova direção, 123, faz com a direção antiga, xyz

Considerando as matrizes das tensões definidas na A3, a transformação das tensões será efetuada de acordo com as Equações (A4 – a) e (A4 - b)

$$[\sigma]_p = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad [\sigma]_m = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (A3)$$

$$[\sigma]_m = [T][\sigma]_p[T]^T \quad (A4 - a)$$

$$[\sigma]_p = [T]^T[\sigma]_m[T] \quad (A4 - b)$$

onde $(\sigma_{ij})_m$ são os componentes do tensor das tensões no referencial do material, e $(\sigma_{ij})_p$ são as componentes do tensor de tensões no referencial do laminado. Procedendo a multiplicação das equações (A4 – b), obtemos:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & 0 & 0 & -2cs \\ s^2 & c^2 & 0 & 0 & 0 & 2cs \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ cs & -cs & 0 & 0 & 0 & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (A5)$$

A relação inversa entre $\{\sigma\}_m$ e $\{\sigma\}_p$, equação (A4 - a), é dada por

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & 0 & 0 & 2cs \\ s^2 & c^2 & 0 & 0 & 0 & -2cs \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & c & 0 \\ -cs & cs & 0 & 0 & 0 & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (A6)$$

Com

$$c = \cos\theta \quad s = \sin\theta \quad 2cs = \sin(2\theta) \quad (A7)$$

Critério de Hashin 3D (1980)

O Critério de Falha de Hashin 3D propõe quatro tipos de modos de falha, e são previstos por quatro equações como se segue [París,2001]:

- Ruptura da Fibra por Tração

$$\left(\frac{\sigma_1}{F_{1t}}\right)^2 + \frac{1}{F_6^2}(\sigma_6^2 + \sigma_5^2) = 1$$

ou

$$\sigma_1 = F_{1t}$$

- Ruptura da Fibra por Compressão

$$|\sigma_1| = F_{1c}$$

- Ruptura da Matriz por Tração $(\sigma_2 + \sigma_3) > 0$

$$\frac{1}{F_{2t}^2}(\sigma_2 + \sigma_3)^2 + \frac{1}{F_4^2}(\sigma_4^2 - \sigma_2\sigma_3) + \frac{1}{F_6^2}(\sigma_6^2 + \sigma_5^2) = 1$$

- Ruptura da Matriz por Compressão $(\sigma_2 + \sigma_3) < 0$

$$\frac{1}{F_{2c}^2} \left[\left(\frac{F_{2c}}{2F_4} \right)^2 - 1 \right] (\sigma_2 + \sigma_3) + \frac{1}{4F_4^2} (\sigma_2 + \sigma_3)^2 + \frac{1}{F_4^2} (\sigma_4^2 - \sigma_2\sigma_3) + \frac{1}{F_6^2} (\sigma_6^2 + \sigma_5^2) = 1$$

Validação dos critérios de Tsai-Wu e Tensão Máxima

b1) Resolução numérica (ANSYS 14)

```

FINISH
/CLEAR
/TITLE, Placa Simplesmente Apoiada - Carga Uniforme - SHELL281
!Material é o AS4D/9310 - [0/90/45/-45]s, hc=1.25 mm por lâmina
/UNITS,MPA                ! Unidades em mm, MPa e Newtons

/PREP7
ET,1,SHELL281            ! TIPO DE ELEMENTO

KEYOPT,1,8,1             ! Escreve o resultado da lâmina

                           ! SECÇÃO DO LAMINADO
SECTYPE,1,SHELL
SECDATA,1.25,1,0         ! Camada 1: 1.25 Espessura, mat. #1, THETA 0
SECDATA,1.25,1,90
SECDATA,1.25,1,90
SECDATA,1.25,1,45
SECDATA,1.25,1,-45
SECDATA,1.25,1,-45
SECDATA,1.25,1,45
SECDATA,1.25,1,90
SECDATA,1.25,1,90
SECOFFSET,MID           ! NODES ON THE LAMINATE MIDDLE THICKNESS

                           ! PROPRIEDADES MATERIAIS
MPTEMP,,,,,,,,          ! MATERIAL ORTOTRÓPICO - GRAFITE/EPOXY
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,1,,133.86E3
MPDATA,EY,1,,7.706E3
MPDATA,EZ,1,,7.706E3
MPDATA,PRXY,1,,0.301
MPDATA,PRYZ,1,,0.396
MPDATA,PRXZ,1,,0.301
MPDATA,GXY,1,,4.306E3
MPDATA,GYZ,1,,2.76E3
MPDATA,GXZ,1,,4.306E3

                           ! Geometria da placa e Malha
RECTING,0,1000,0,1000
ESIZE,250               ! ELEMENT SIZE 250 mm
AMESH,ALL               ! MESH THE AREA
FINISH                  ! Fim do módulo Pré-processamento

```

```

/SOLU                                ! SOLUTION MODULE
ANTYPE,STATIC                         ! Análise estática
DL,2,1,UZ,0                           ! Definir apoios simples
DL,3,1,UZ,0
DL,1,1,SYMM                           ! Definir simetria
DL,4,1,SYMM
!D,ALL,ROTZ                           ! CONSTRAINT ROTATIONS ABOUT Z AXES (OPTIONAL)

SFL,2,PRES,-100                       ! Aplicar pressão uniforme em N/mm
SOLVE                                 ! SOLVE CURRENT LOAD STATE
FINISH                                ! FIM DO MÓDULO SOLUTION

/POST1                                ! Módulo Pós processamento
SET,LAST                              ! Apresenta a deformada da placa
RSYS,LSYS                             ! Sistema de coordenadas da lâmina

! Failure criteria
FC,1,S,XTEN,1830                      ! Mat1, Pressão, tensão admissível em x
FC,1,S,XCMP,-1096                    ! F1c STRENGTH
FC,1,S,YTEN,57                       ! F2t STRENGTH
FC,1,S,YCMP,-228                     ! F2c STRENGTH
FC,1,S,ZTEN,1e6                      ! F3t STRENGTH (LARGE VALUE SO IT DOES NOT COMPUTE)
FC,1,S,ZCMP,-1e6                    ! F3c= STRENGTH (LARGE VALUE SO IT DOES NOT COMPUTE)
FC,1,S,XY,71                         ! F6 STRENGTH
FC,1,S,YZ,1e6                        ! F4 STRENGTH (LARGE VALUE SO IT DOES NOT COMPUTE)
FC,1,S,XZ,1e6                        ! F5 STRENGTH (LARGE VALUE SO IT DOES NOT COMPUTE)
FC,1,S,XYCPCP,-1                    ! C6 Coeficiente de Tsai-Wu -1.0
FC,1,S,YZCP,-1                      ! C4 Coeficiente de Tsai-Wu -1.0
FC,1,S,XZCP,-1                      ! C5 Coeficiente de Tsai-Wu -1.0

LAYER,1                               ! Apresentar o resultado da lâmina #1
PRNSOL,S,FAIL                        ! Apresenta a tabela com índice de falha
PLNSOL,S,MAXF                        ! MAXF é o IF para Tensão Máxima
PLNSOL,S,TWSR                        ! TWSR é o IF para inversa de TSAI-WU

! LAYER,2                             ! Apresentar o resultado da lâmina #2
! PRNSOL,S,FAIL                      ! Apresenta a tabela com índice de falha
! PLNSOL,S,MAXF
! PLNSOL,S,TWSR

! LAYER,3                             ! Apresentar o resultado da lâmina #2
! PRNSOL,S,FAIL                      ! Apresenta a tabela com índice de falha
! PLNSOL,S,MAXF
! PLNSOL,S,TWSR

! LAYER,4                             ! Apresentar o resultado da lâmina #2
! PRNSOL,S,FAIL                      ! Apresenta a tabela com índice de falha
! PLNSOL,S,MAXF
! PLNSOL,S,TWSR
FINISH                                ! FIM DO MÓDULO POST-PROCESS

```

b2) Resolução analítica (MAPLE 17)

Inicialização do Programa

```
> restart: with(linalg): with(plots):
```

Propriedades Materiais

Constantes de Elasticidade de Cada Camada - AS4D/9310

```
E1 := 133.86e3 :
```

```
E2 := 7.706e3 :
```

```
E3 := 7.706e3 :
```

```
v12 := 0.301 :
```

```
v23 := 0.396 :
```

```
v13 := 0.301 :
```

```
G12 := 4.306e3 :
```

```
G23 := 2.76e3 :
```

```
G13 := 4.306e3 :
```

Parâmetros de resistência

```
F1t := 1830 :
```

```
F1c := 1096 :
```

```
F2t := 57 :
```

```
F2c := 228 :
```

```
F3t := 1e6 :
```

```
F3c := 1e6 :
```

```
F6 := 71 :
```

```
F4 := 1e6 :
```

```
F5 := 1e6 :
```

```
c4 := -1 :
```

```
c5 := -1 :
```

```
c6 := -1 :
```

Matriz dos Coeficientes de Rigidez

Matriz dos Coeficiente de Rigidez Elástica

```
> v21 :=  $\frac{E_2}{E_1} \cdot v_{12}$  : Q11 :=  $\frac{E_1}{1 - v_{12} \cdot v_{21}}$  :  
Q12 :=  $\frac{v_{12} \cdot E_2}{1 - v_{12} \cdot v_{21}}$  : Q22 :=  $\frac{E_2}{1 - v_{12} \cdot v_{21}}$  : Q66 := G12 :
```

```
Q_rig := Matrix([[Q11, Q12, 0], [Q12, Q22, 0], [0, 0, Q66]]) :
```

Matriz dos Coeficientes de Rigidez Elástica Transformado

>

```
nc := 8 :
theta := Vector(nc, [0, Pi/2, Pi/4, -Pi/4, -Pi/4, Pi/4, Pi/2, 0]) :

for i from 1 to nc do
m := cos(theta[i]) :
n := sin(theta[i]) :

Qb11[i] := Q11·m4 + 2·(Q12 + 2·Q66)·n2·m2 + Q22·n4;
Qb12[i] := (Q11 + Q22 - 4·Q66)·n2·m2 + Q12·(n4 + m4);
Qb22[i] := Q11·n4 + 2·(Q12 + 2·Q66)·n2·m2 + Q22·m4;
Qb16[i] := (Q11 - Q12 - 2·Q66)·n·m3 + (Q12 - Q22 + 2·Q66)·n3·m;
Qb26[i] := (Q11 - Q12 - 2·Q66)·n3·m + (Q12 - Q22 + 2·Q66)·n·m3;
Qb66[i] := (Q11 + Q22 - 2·Q12 - 2·Q66)·n2·m2 + Q66·(n4 + m4);
end:

for i from 1 to nc do
Q_rig_elast_transf[i] := Matrix([
[Qb11[i], Qb12[i], Qb16[i]],
[Qb12[i], Qb22[i], Qb26[i]],
[Qb16[i], Qb26[i], Qb66[i]]]);

print(Q_rig_elast_transf[i]) :
end:
```

Matrizes de Rigidez do Laminado (A,B e D) [mm]

>

```
h := 1.25·8;
hc := h/nc;

z[0] := 4·hc :
z[1] := 3·hc :
z[2] := 2·hc :
z[3] := 1·hc :
z[4] := 0·hc :
z[5] := -1·hc :
z[6] := -2·hc :
z[7] := -3·hc :
z[8] := -4·hc :

zk := [z[0], z[1], z[2], z[3], z[4], z[5], z[6], z[7], z[8]];
```

Matriz de Rigidez de Membrana (A) [N/mm ou Pa.mm]

>

```

A1 := evalm((z[0] - z[1])·Q_rig_elast_transf[1]) :
A2 := evalm((z[1] - z[2])·Q_rig_elast_transf[2]) :
A3 := evalm((z[2] - z[3])·Q_rig_elast_transf[3]) :
A4 := evalm((z[3] - z[4])·Q_rig_elast_transf[4]) :
A5 := evalm((z[4] - z[5])·Q_rig_elast_transf[5]) :
A6 := evalm((z[5] - z[6])·Q_rig_elast_transf[6]) :
A7 := evalm((z[6] - z[7])·Q_rig_elast_transf[7]) :
A8 := evalm((z[7] - z[8])·Q_rig_elast_transf[8]) :

```

```

A := evalm(A1 + A2 + A3 + A4 + A5 + A6 + A7 + A8);

```

Inversa da Matriz A (A_inv) [mm/N]

>

```

a := inverse(A);

```

Matriz de Acoplamento Membrana-Flexão (B) [Pa.mm² ou N]

```

B1 := evalm( $\left(\frac{1}{2}\right) \cdot (z[0]^2 - z[1]^2) \cdot Q\_rig\_elast\_transf[1]$ ) :
B2 := evalm( $\left(\frac{1}{2}\right) \cdot (z[1]^2 - z[2]^2) \cdot Q\_rig\_elast\_transf[2]$ ) :
B3 := evalm( $\left(\frac{1}{2}\right) \cdot (z[2]^2 - z[3]^2) \cdot Q\_rig\_elast\_transf[3]$ ) :
B4 := evalm( $\left(\frac{1}{2}\right) \cdot (z[3]^2 - z[4]^2) \cdot Q\_rig\_elast\_transf[4]$ ) :
B5 := evalm( $\left(\frac{1}{2}\right) \cdot (z[4]^2 - z[5]^2) \cdot Q\_rig\_elast\_transf[5]$ ) :
B6 := evalm( $\left(\frac{1}{2}\right) \cdot (z[5]^2 - z[6]^2) \cdot Q\_rig\_elast\_transf[6]$ ) :
B7 := evalm( $\left(\frac{1}{2}\right) \cdot (z[6]^2 - z[7]^2) \cdot Q\_rig\_elast\_transf[7]$ ) :
B8 := evalm( $\left(\frac{1}{2}\right) \cdot (z[7]^2 - z[8]^2) \cdot Q\_rig\_elast\_transf[8]$ ) :

```

```

B := evalm(B1 + B2 + B3 + B4 + B5 + B6 + B7 + B8);

```

Matriz de Rigidez de Flexão (D) [Nmm]

>

```

D1 := evalm( $\left(\frac{1}{3}\right) \cdot (z[0]^3 - z[1]^3) \cdot Q\_rig\_elast\_transf[1]$ ) :
D2 := evalm( $\left(\frac{1}{3}\right) \cdot (z[1]^3 - z[2]^3) \cdot Q\_rig\_elast\_transf[2]$ ) :
D3 := evalm( $\left(\frac{1}{3}\right) \cdot (z[2]^3 - z[3]^3) \cdot Q\_rig\_elast\_transf[3]$ ) :
D4 := evalm( $\left(\frac{1}{3}\right) \cdot (z[3]^3 - z[4]^3) \cdot Q\_rig\_elast\_transf[4]$ ) :
D5 := evalm( $\left(\frac{1}{3}\right) \cdot (z[4]^3 - z[5]^3) \cdot Q\_rig\_elast\_transf[5]$ ) :
D6 := evalm( $\left(\frac{1}{3}\right) \cdot (z[5]^3 - z[6]^3) \cdot Q\_rig\_elast\_transf[6]$ ) :
D7 := evalm( $\left(\frac{1}{3}\right) \cdot (z[6]^3 - z[7]^3) \cdot Q\_rig\_elast\_transf[7]$ ) :
D8 := evalm( $\left(\frac{1}{3}\right) \cdot (z[7]^3 - z[8]^3) \cdot Q\_rig\_elast\_transf[8]$ ) :

```

```

DD := evalm(D1 + D2 + D3 + D4 + D5 + D6 + D7 + D8);

```

Aplicação da carga

```
#Nx:=100· Nx:  
Ny := 0 :  
Nxy := 0 :  
N := ⟨100· Nx, Ny, Nxy⟩;
```

```
Mx := 0 :  
My := 0 :  
Mxy := 0 :  
MM := ⟨0, 0, 0⟩;
```

$$\begin{bmatrix} 100 \text{ Nx} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Deformações comuns

> $\epsilon_0 := a \cdot N;$

Tensões em Cada uma das camadas (xyz) [MPa]

>

```
Tensão_x1 := Q_rig_elast_transf[1].(ε0 + (z[1] - z[0]).kk);  
Tensão_x2 := Q_rig_elast_transf[2].(ε0 + (z[2] - z[1]).kk);  
Tensão_x3 := Q_rig_elast_transf[3].(ε0 + (z[3] - z[2]).kk);  
Tensão_x4 := Q_rig_elast_transf[4].(ε0 + (z[4] - z[3]).kk);  
#Tensão_x5 := Q_rig_elast_transf[5].(ε0 + (z[5] - z[4]).kk);  
#Tensão_x6 := Q_rig_elast_transf[6].(ε0 + (z[6] - z[5]).kk);  
#Tensão_x7 := Q_rig_elast_transf[7].(ε0 + (z[7] - z[6]).kk);  
#Tensão_x8 := Q_rig_elast_transf[8].(ε0 + (z[8] - z[7]).kk);
```

Tensões em Cada uma das camadas (123)

Matriz Transformação

```
for i from 1 to nc do
c := cos(theta[i]) :
s := sin(theta[i]) :

t11[i] := c2 :
t12[i] := s2 :
t22[i] := c2 :
t16[i] := -c·s :
t61[i] := 2·c·s :
t26[i] := c·s :
t62[i] := -2·c·s :
t66[i] := c2 - s2 :
end:

for i from 1 to nc do
transformação[i] := Matrix([
[t11[i], t12[i], t61[i]],
[t12[i], t22[i], t62[i]],
[t16[i], t26[i], t66[i]]
]) :
#print(transformação[i]);
end:
```

Tensões (1,2,3) [MPa]

```
Tensão_1 := transformação[1].Tensão_x1;
Tensão_2 := transformação[2].Tensão_x2;
Tensão_3 := transformação[3].Tensão_x3;
Tensão_4 := transformação[4].Tensão_x4;
#Tensão_5 := transformação[5].Tensão_x5;
#Tensão_6 := transformação[6].Tensão_x6;
#Tensão_7 := transformação[7].Tensão_x7;
#Tensão_8 := transformação[8].Tensão_x8;
```

$$\begin{bmatrix} 26,390684 \text{ Nx} \\ -,013551 \text{ Nx} \\ ,000000 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} -7,762116 \text{ Nx} \\ 1,384983 \text{ Nx} \\ ,000000 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 9,314284 \text{ Nx} \\ ,685716 \text{ Nx} \\ -1,112166 \text{ Nx} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 9,314284 \text{ Nx} \\ ,685716 \text{ Nx} \\ 1,112166 \text{ Nx} \end{bmatrix}$$

CRITÉRIOS DE FALHA

Critério da Tensão Máxima

Camada1 a 0°

Índice de falha

Tensão_1 :

$$\begin{bmatrix} 26,390684 \text{ Nx} \\ -,013551 \text{ Nx} \\ ,000000 \end{bmatrix}$$

$$IF_1 := \frac{26.390684}{1830}; IF_2 := \frac{0.013551}{228}; IF_6 := 0;$$

0.01442113880

0.00005943421053

0

Esforço de rotura (R)

$$R := \frac{1}{IF_1};$$

69.34265136

Proceder da mesma forma para as outras camadas

Resumo (Tensão Máxima)

Índice de resistência

R1 = 69.342651 MPa :

R2 = 41.1557398 MPa :

R3 = 63.839391 MPa :

R4 = 63.839391 MPa :

Índice de Falha

IF₁ = 0.014421 :

IF₂ = 0.024298 :

IF₃ = 0.015664 :

IF₄ = 0.015664 :

**Critério de Tsai-Wu
Camada 1 a 0 graus**

Tensão_1;

$$\begin{bmatrix} 26,390684 \text{ Nx} \\ -,013551 \text{ Nx} \\ ,000000 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_1 := 26.390684 :$$

$$\sigma_2 := -.013551 :$$

$$\sigma_3 := 0 :$$

$$\sigma_4 := 0 :$$

$$\sigma_5 := 0 :$$

$$\sigma_6 := 0 :$$

$$A := \frac{\sigma_1^2}{F_{1t} \cdot F_{1c}} + \frac{\sigma_2^2}{F_{2t} \cdot F_{2c}} + \frac{\sigma_3^2}{F_{3t} \cdot F_{3c}} + \frac{\sigma_4^2}{F_4^2} + \frac{\sigma_5^2}{F_5^2} + \frac{\sigma_6^2}{F_6^2} \\ + \frac{c4 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3}{\text{sqrt}(F_{2t} \cdot F_{2c} \cdot F_{3t} \cdot F_{3c})} + \frac{c5 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_3}{\text{sqrt}(F_{1t} \cdot F_{1c} \cdot F_{3t} \cdot F_{3c})} \\ + \frac{c6 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2}{\text{sqrt}(F_{1t} \cdot F_{1c} \cdot F_{2t} \cdot F_{2c})};$$

$$B := (F_{1t}^{-1} - F_{1c}^{-1}) \cdot \sigma_1 + (F_{2t}^{-1} - F_{2c}^{-1}) \cdot \sigma_2 + (F_{3t}^{-1} - F_{3c}^{-1}) \cdot \sigma_3;$$

$$> \text{IF} := \left[-\frac{B}{2 \cdot A} + \text{sqrt} \left(\left(\frac{B}{2 \cdot A} \right)^2 + \frac{1}{A} \right) \right]^{-1} :$$

$$R := \frac{1}{\text{IF}} :$$

$$\text{TWSR} := \frac{1}{69.38522021};$$

0.01441229122

factor

$$\frac{1}{[69.38522021]}$$

Proceder da mesma forma para as outras camadas

Resumo (Tsai-Wu)

Índice de resistência

R1 = 69.38522021 MPa :

R2 = 34.03974302 MPa :

R3 = 50.18099182 MPa :

R4 = 50.18099182 MPa :

Índice de Falha

IF₁ = 0.014413 :

IF₂ = 0.029377 :

IF₃ = 0.019928 :

IF₄ = 0.019928 :

Validação dos critérios de Hashin e Hashin-Rotem (MAPLE 17)

Inicialização do Programa

```
> restart : with(linalg) : with(plots) :
```

Propriedades Materiais

Constantes de Elasticidade de Cada Camada - AS4D/9310

```
>
E1 := 177e9 :
E2 := 11e9 :
E3 := 11e9 :
ν12 := 0.27 :
ν23 := 0.30 :
ν13 := 0.27 :
G12 := 7.6e9 :
G23 := 3.5e9 :
G13 := 7.6e9 :
```

Parâmetros de resistência

```
>
F1t := 1600 :
F1c := 1600 :
F2t := 50 :
F2c := 160 :
F6 := 70 :
c4 := -1 :
c5 := -1 :
c6 := -1 :
```

Matriz dos Coeficientes de Rigidez

Matriz dos Coeficiente de Rigidez Elástica

```
>
ν21 :=  $\frac{E_2}{E_1} \cdot \nu_{12}$  :   Q11 :=  $\frac{E_1}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}}$  :
Q12 :=  $\frac{\nu_{12} \cdot E_2}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}}$  :   Q22 :=  $\frac{E_2}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}}$  :   Q66 := G12 :
Q_rig := Matrix([[Q11, Q12, 0], [Q12, Q22, 0], [0, 0, Q66]]);
```

Matriz dos Coeficientes de Rigidez Elástica Transformado

>

```
nc := 8 :
theta := Vector(nc, [0, Pi/2, Pi/4, -Pi/4, -Pi/4, Pi/4, Pi/2, 0]) :

for i from 1 to nc do
m := cos(theta[i]) :
n := sin(theta[i]) :

Qb11[i] := Q11·m4 + 2·(Q12 + 2·Q66)·n2·m2 + Q22·n4;
Qb12[i] := (Q11 + Q22 - 4·Q66)·n2·m2 + Q12·(n4 + m4);
Qb22[i] := Q11·n4 + 2·(Q12 + 2·Q66)·n2·m2 + Q22·m4;
Qb16[i] := (Q11 - Q12 - 2·Q66)·n·m3 + (Q12 - Q22 + 2·Q66)·n3·m;
Qb26[i] := (Q11 - Q12 - 2·Q66)·n3·m + (Q12 - Q22 + 2·Q66)·n·m3;
Qb66[i] := (Q11 + Q22 - 2·Q12 - 2·Q66)·n2·m2 + Q66·(n4 + m4);
end:

for i from 1 to nc do
Q_rig_elast_transf[i] := Matrix([
[Qb11[i], Qb12[i], Qb16[i]],
[Qb12[i], Qb22[i], Qb26[i]],
[Qb16[i], Qb26[i], Qb66[i]]]);

print(Q_rig_elast_transf[i]) :
end:
```

Matrizes de Rigidez do Laminado (A,B e D) [mm]

>

```
h := 1.12;
hc := h/nc;

z[0] := 4·hc :
z[1] := 3·hc :
z[2] := 2·hc :
z[3] := 1·hc :
z[4] := 0·hc :
z[5] := -1·hc :
z[6] := -2·hc :
z[7] := -3·hc :
z[8] := -4·hc :

zk := [z[0], z[1], z[2], z[3], z[4], z[5], z[6], z[7], z[8]];
```

Matriz de Rigidez de Membrana (A) [N/mm ou Pa.mm]

```

A1 := evalm((z[0] - z[1])·Q_rig_elast_transf[1]) :
A2 := evalm((z[1] - z[2])·Q_rig_elast_transf[2]) :
A3 := evalm((z[2] - z[3])·Q_rig_elast_transf[3]) :
A4 := evalm((z[3] - z[4])·Q_rig_elast_transf[4]) :
A5 := evalm((z[4] - z[5])·Q_rig_elast_transf[5]) :
A6 := evalm((z[5] - z[6])·Q_rig_elast_transf[6]) :
A7 := evalm((z[6] - z[7])·Q_rig_elast_transf[7]) :
A8 := evalm((z[7] - z[8])·Q_rig_elast_transf[8]) :

```

```

A := evalm(A1 + A2 + A3 + A4 + A5 + A6 + A7 + A8);

```

Inversa da Matriz A (A_inv) [mm/N]

```

> a := inverse(A);

```

Matriz de Acoplamento Membrana-Flexão (B) [Pa.mm² ou N]

```

B1 := evalm( $\left(\frac{1}{2}\right) \cdot (z[0]^2 - z[1]^2) \cdot Q\_rig\_elast\_transf[1]$ ) :
B2 := evalm( $\left(\frac{1}{2}\right) \cdot (z[1]^2 - z[2]^2) \cdot Q\_rig\_elast\_transf[2]$ ) :
B3 := evalm( $\left(\frac{1}{2}\right) \cdot (z[2]^2 - z[3]^2) \cdot Q\_rig\_elast\_transf[3]$ ) :
B4 := evalm( $\left(\frac{1}{2}\right) \cdot (z[3]^2 - z[4]^2) \cdot Q\_rig\_elast\_transf[4]$ ) :
B5 := evalm( $\left(\frac{1}{2}\right) \cdot (z[4]^2 - z[5]^2) \cdot Q\_rig\_elast\_transf[5]$ ) :
B6 := evalm( $\left(\frac{1}{2}\right) \cdot (z[5]^2 - z[6]^2) \cdot Q\_rig\_elast\_transf[6]$ ) :
B7 := evalm( $\left(\frac{1}{2}\right) \cdot (z[6]^2 - z[7]^2) \cdot Q\_rig\_elast\_transf[7]$ ) :
B8 := evalm( $\left(\frac{1}{2}\right) \cdot (z[7]^2 - z[8]^2) \cdot Q\_rig\_elast\_transf[8]$ ) :

```

```

B := evalm(B1 + B2 + B3 + B4 + B5 + B6 + B7 + B8);

```

Matriz de Rigidez de Flexão (D) [Nmm]

```

D1 := evalm( $\left(\frac{1}{3}\right) \cdot (z[0]^3 - z[1]^3) \cdot Q\_rig\_elast\_transf[1]$ ) :
D2 := evalm( $\left(\frac{1}{3}\right) \cdot (z[1]^3 - z[2]^3) \cdot Q\_rig\_elast\_transf[2]$ ) :
D3 := evalm( $\left(\frac{1}{3}\right) \cdot (z[2]^3 - z[3]^3) \cdot Q\_rig\_elast\_transf[3]$ ) :
D4 := evalm( $\left(\frac{1}{3}\right) \cdot (z[3]^3 - z[4]^3) \cdot Q\_rig\_elast\_transf[4]$ ) :
D5 := evalm( $\left(\frac{1}{3}\right) \cdot (z[4]^3 - z[5]^3) \cdot Q\_rig\_elast\_transf[5]$ ) :
D6 := evalm( $\left(\frac{1}{3}\right) \cdot (z[5]^3 - z[6]^3) \cdot Q\_rig\_elast\_transf[6]$ ) :
D7 := evalm( $\left(\frac{1}{3}\right) \cdot (z[6]^3 - z[7]^3) \cdot Q\_rig\_elast\_transf[7]$ ) :
D8 := evalm( $\left(\frac{1}{3}\right) \cdot (z[7]^3 - z[8]^3) \cdot Q\_rig\_elast\_transf[8]$ ) :

```

```

DD := evalm(D1 + D2 + D3 + D4 + D5 + D6 + D7 + D8);

```

Aplicação da carga

>

```
#Nx:=1· Nx:
Ny := 0 :
Nxy := 0 :
N := ⟨ Nx, Nx, 0.25· Nx⟩;

Mx := 0 :
My := 0 :
Mxy := 0 :
MM := ⟨0, 0, 0⟩;
```

$$\begin{bmatrix} Nx \\ Nx \\ 0.25 Nx \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Deformações comuns

> $\epsilon_0 := a \cdot N;$

Tensões em Cada uma das camadas (x, y, z) [MPa]

>

```
Tensão_x1 := Q_rig_elast_transf[1].(ε0 + (z[1] - z[0]).kk);
Tensão_x2 := Q_rig_elast_transf[2].(ε0 + (z[2] - z[1]).kk);
Tensão_x3 := Q_rig_elast_transf[3].(ε0 + (z[3] - z[2]).kk);
Tensão_x4 := Q_rig_elast_transf[4].(ε0 + (z[4] - z[3]).kk);
#Tensão_x5 := Q_rig_elast_transf[5].(ε0 + (z[5] - z[4]).kk);
#Tensão_x6 := Q_rig_elast_transf[6].(ε0 + (z[6] - z[5]).kk);
#Tensão_x7 := Q_rig_elast_transf[7].(ε0 + (z[7] - z[6]).kk);
#Tensão_x8 := Q_rig_elast_transf[8].(ε0 + (z[8] - z[7]).kk);
```

Tensões em Cada uma das camadas (1, 2, 3)

Matriz Transformação

```
for i from 1 to nc do
c := cos(theta[i]) :
s := sin(theta[i]) :

t11[i] := c2 :
t12[i] := s2 :
t22[i] := c2 :
t16[i] := -c·s :
t61[i] := 2·c·s :
t26[i] := c·s :
t62[i] := -2·c·s :
t66[i] := c2 - s2 :
end:

for i from 1 to nc do
transformação[i] := Matrix([
[t11[i], t12[i], t61[i]],
[t12[i], t22[i], t62[i]],
[t16[i], t26[i], t66[i]]
]) :
#print(transformação[i]);
end:
```

Tensões (1,2,3) [MPa]

>

```
Tensão_1 := transformação[1].Tensão_x1;
Tensão_2 := transformação[2].Tensão_x2;
Tensão_3 := transformação[3].Tensão_x3;
Tensão_4 := transformação[4].Tensão_x4;
#Tensão_5 := transformação[5].Tensão_x5;
#Tensão_6 := transformação[6].Tensão_x6;
#Tensão_7 := transformação[7].Tensão_x7;
#Tensão_8 := transformação[8].Tensão_x8;
```

```
[ 1,657085 Nx
,128630 Nx
,063629 Nx ]
```

```
[ 1,657085 Nx
,128630 Nx
-,063629 Nx ]
```

```
[ 2,388915 Nx
,094862 Nx
,000000 ]
```

$$\begin{bmatrix} ,925254 \text{ Nx} \\ ,162397 \text{ Nx} \\ ,000000 \end{bmatrix}$$

CRITÉRIOS DE FALHA

Critério de Tsai-Wu

Camada1 a 0°

Tensão_1;

$$\begin{bmatrix} 1,65708466 \text{ Nx} \\ ,12862962 \text{ Nx} \\ ,06362942 \text{ Nx} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_1 := 1.65708466 :$$

$$\sigma_2 := 0.12862962 :$$

$$\sigma_3 := 0 :$$

$$\sigma_4 := 0 :$$

$$\sigma_5 := 0 :$$

$$\sigma_6 := 0.06362942 :$$

Índice de falha

$$\begin{aligned} > A := \frac{\sigma_1^2}{F_{1t} \cdot F_{1c}} + \frac{\sigma_2^2}{F_{2t} \cdot F_{2c}} + \frac{\sigma_3^2}{F_{3t} \cdot F_{3c}} + \frac{\sigma_4^2}{F_4^2} + \frac{\sigma_5^2}{F_5^2} + \frac{\sigma_6^2}{F_6^2} \\ &+ \frac{c4 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3}{\text{sqrt}(F_{2t} \cdot F_{2c} \cdot F_{3t} \cdot F_{3c})} + \frac{c5 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_3}{\text{sqrt}(F_{1t} \cdot F_{1c} \cdot F_{3t} \cdot F_{3c})} \\ &+ \frac{c6 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2}{\text{sqrt}(F_{1t} \cdot F_{1c} \cdot F_{2t} \cdot F_{2c})} ; \end{aligned}$$

$$B := (F_{1t}^{-1} - F_{1c}^{-1}) \cdot \sigma_1 + (F_{2t}^{-1} - F_{2c}^{-1}) \cdot \sigma_2 + (F_{3t}^{-1} - F_{3c}^{-1}) \cdot \sigma_3 ;$$

$$> \text{IF} := \left[-\frac{B}{2 \cdot A} + \text{sqrt} \left(\left(\frac{B}{2 \cdot A} \right)^2 + \frac{1}{A} \right) \right]^{-1} ;$$

$$R := \frac{1}{\text{IF}} ;$$

$$\text{TWSR} := \frac{1}{371.7759911} ;$$

0.002689791767

factor

$$\frac{1}{[371.7759911]}$$

Proceder da mesma forma para as outras camadas

Resumo (Tsai-Wu)

Valores obtidos

$$R1 = 371.7759911 \text{ MPa} :$$

$$R2 = 371.7759911 \text{ MPa} :$$

$$R3 = 468.595446 \text{ MPa} :$$

$$R4 = 325.425715 \text{ MPa} :$$

Resumo - Índice de Falha

$$IF_1 = 0.002690 :$$

$$IF_2 = 0.002690 :$$

$$IF_3 = 0.002134 :$$

$$IF_4 = 0.003073 :$$

Critério de Hashin

Rotura da fibra

Camada 1 a 0°

Tensão_1;

$$\begin{bmatrix} 1,65708466 \text{ Nx} \\ ,12862962 \text{ Nx} \\ ,06362942 \text{ Nx} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_1 := 1.65708466 \cdot Nx :$$

$$\sigma_6 := 0.06362942 \cdot Nx :$$

$$R1 := \left(\frac{\sigma_1}{F_{1t}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_6}{F_6} \right)^2 = 1 :$$

solve(R1, Nx);

$$IF_4 := \frac{1}{725.6873651} ;$$

$$725.6873651, -725.6873651$$

$$0.001378003873$$

Proceder da mesma forma para as outras camadas

Rotura da matriz

Camada 1 a 0 graus

Tensão_1;

$$\begin{bmatrix} 1,65708466 \text{ Nx} \\ ,12862962 \text{ Nx} \\ ,06362942 \text{ Nx} \end{bmatrix}$$

>

$$\sigma_2 := 0.12862962 \cdot Nx :$$

$$\sigma_6 := 0.06362942 \cdot Nx :$$

$$R1 := \left(\frac{\sigma_2}{F_{2t}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_6}{F_6} \right)^2 = 1 :$$

solve(R1, Nx);

$$IF_4 := \frac{1}{366.5070248} ;$$

366.5070248, -366.5070248

0.002728460663

Proceder da mesma forma para as outras camadas

Resumo (Hashin)

Fibras - Índice de resistência

R1 = 725.69 MPa :

R2 = 725.69 MPa :

R3 = 669.76 MPa :

R4 = 1729.25 MPa :

Fibras - Índice de Falha

IF₁ = 0.001378 :

IF₂ = 0.001378 :

IF₃ = 0.001493 :

IF₄ = 0.000578 :

Matriz - Índice de resistência

R1 = 366.5 MPa :

R2 = 366.5 MPa :

R3 = 527.1 MPa :

R4 = 307.9 MPa :

Matriz - Índice de Falha

IF₁ = 0.002728 :

IF₂ = 0.002728 :

IF₃ = 0.001897 :

IF₄ = 0.003248 :

Critério de Hashin-Rotem

Rotura da fibra

Camada 1 a 0 graus

Tensão_1;

$$\begin{bmatrix} 1,65708466 \text{ Nx} \\ ,12862962 \text{ Nx} \\ ,06362942 \text{ Nx} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_1 := 1.65708466 :$$

$$IF_1 := \frac{\sigma_1}{F_{1t}} ;$$

$$,0010357 |$$

$$R1 := \frac{1}{IF_1} ;$$

$$366.5070248$$

Proceder da mesma forma para as outras camadas

Rotura da matriz

Camada 1 a 0 graus

Tensão_1;

$$\begin{bmatrix} 1,65708466 \text{ Nx} \\ ,12862962 \text{ Nx} \\ ,06362942 \text{ Nx} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_2 := 0.12862962 \cdot \text{Nx} :$$

$$\sigma_6 := 0.06362942 \cdot \text{Nx} :$$

$$R1 := \left(\frac{\sigma_2}{F_{2t}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_6}{F_6} \right)^2 = 1 :$$

solve(R1, Nx);

$$IF_1 := \frac{1}{366.5070248} ;$$

$$366.5070248, -366.5070248$$

$$0.002728460663$$

Proceder da mesma forma para as outras camadas

Resumo (Hashin-Rotem)

Resumo Hashin

Fibras - Índice de resistência

R1 = 965.6 MPa :
R2 = 965.6 MPa :
R3 = 669.8 MPa :
R4 = 1729.3 MPa :

Fibras - Índice de Falha

$IF_1 = 0.001036$:
 $IF_2 = 0.001036$:
 $IF_3 = 0.001493$:
 $IF_4 = 0.000578$:

Matriz - Índice de resistência

R1 = 366.5 MPa :
R2 = 366.5 MPa :
R3 = 527.1 MPa :
R4 = 307.9 MPa :

Matriz - Índice de Falha

$IF_1 = 0.002728$:
 $IF_2 = 0.002728$:
 $IF_3 = 0.001897$:
 $IF_4 = 0.003248$:

Simulação de Tração Nx, Ny e Nx = Ny

d1) Resolução numérica (ANSYS 14)

```

FINISH
/CLEAR
/GRAPH,POWER
/udoc,1,date,0
/RGB,INDEX,100,100,100,0 ! Define a cor do Ambiente do ANSYS
/RGB,INDEX,80,80,80,13
/RGB,INDEX,60,60,60,14
/RGB,INDEX,0,0,0,15

/TITLE, Placa Simplesmente Apoiada - Carga Uniforme - SHELL181
!Material é o Grafite/Epóxi (T300/5208)
/UNITS,MPA ! Unidades em mm, MPa e Newtons

/PREP7
ET,1,SHELL281 ! Tipo de Elemento

! Opções do Elemento
KEYOPT,1,3,2 ! Integração completa
KEYOPT,1,8,2 ! Escreve o resultado da lâmina
KEYOPT,1,11,0

! SECÇÃO DO LAMINADO
! Serão definidos as secções dos quatro laminados

! QUASE ISOTRÓPICO

SECTYPE,1,SHELL
SECDATA,0.14,1,0 ! Lâmina 1: 0.14 Espessura, Theta 0
SECDATA,0.14,1,45
SECDATA,0.14,1,-45
SECDATA,0.14,1,90
SECDATA,0.14,1,0
SECDATA,0.14,1,45
SECDATA,0.14,1,-45
SECDATA,0.14,1,90
SECDATA,0.14,1,90
SECDATA,0.14,1,-45
SECDATA,0.14,1,45
SECDATA,0.14,1,0
SECDATA,0.14,1,90
SECDATA,0.14,1,-45
SECDATA,0.14,1,45
SECDATA,0.14,1,0

```

```
SECTYPE,1,SHELL
SECDATA,0.14,1,0
SECDATA,0.14,1,90
SECDATA,0.14,1,0
SECDATA,0.14,1,90
SECDATA,0.14,1,0
SECDATA,0.14,1,90
SECDATA,0.14,1,0
SECDATA,0.14,1,90
SECDATA,0.14,1,90
SECDATA,0.14,1,0
SECDATA,0.14,1,90
SECDATA,0.14,1,0
SECDATA,0.14,1,90
SECDATA,0.14,1,0
SECDATA,0.14,1,90
SECDATA,0.14,1,0
```

! CROSS-PLY

! Lâmina 1: 0.14 Espessura, Theta 90

```
SECTYPE,1,SHELL
SECDATA,0.14,1,0
SECDATA,0.14,1,0
SECDATA,0.14,1,0
SECDATA,0.14,1,0
SECDATA,0.14,1,0
SECDATA,0.14,1,0
SECDATA,0.14,1,0
SECDATA,0.14,1,0
SECDATA,0.14,1,0
SECDATA,0.14,1,0
SECDATA,0.14,1,0
SECDATA,0.14,1,0
SECDATA,0.14,1,0
SECDATA,0.14,1,0
SECDATA,0.14,1,0
SECDATA,0.14,1,0
```

! UNIDIRECIONAL

! Lâmina 1: 0.14 Espessura, Theta 0

```
SECTYPE,1,SHELL
SECDATA,0.14,1,45
SECDATA,0.14,1,-45
SECDATA,0.14,1,45
SECDATA,0.14,1,-45
SECDATA,0.14,1,45
SECDATA,0.14,1,-45
SECDATA,0.14,1,45
SECDATA,0.14,1,-45
SECDATA,0.14,1,-45
SECDATA,0.14,1,45
SECDATA,0.14,1,-45
SECDATA,0.14,1,45
SECDATA,0.14,1,-45
SECDATA,0.14,1,45
```

! ANGLE-PLY

! Lâmina 1: 0.14 Espessura, Theta 45

```
SECDATA,0.14,1,-45
SECDATA,0.14,1,45
```

```
! PROPRIEDADES MATERIAIS
! As propriedades são as mesmas em todas as
situações
```

```
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,1,,136.5E9
MPDATA,EY,1,,9.8E9
MPDATA,EZ,1,,9.8E9
MPDATA,PRXY,1,,0.28
MPDATA,PRYZ,1,,0.15
MPDATA,PRXZ,1,,0.28
MPDATA,GXY,1,,4.7E9
MPDATA,GYZ,1,,5.2E9
MPDATA,GXZ,1,,4.7E9
```

```
! MATERIAL ORTOTRÓPICO - GRAFITE/EPOXY
```

```
K,1,,,,
K,2,0.1,,,,
K,3,0.1,0.1,,
K,4,,0.1,,
```

```
! Geometria da placa
! KEYPOINTS do quadrado (Unidades em Metros)
```

```
LSTR,1,2
LSTR,2,3
LSTR,3,4
LSTR,4,1
```

```
! LINHAS
```

```
LSEL,S,,,1,4,1
AL,ALL
LSEL,ALL
```

```
! Selecciona 4 Linhas por ordem
! Constrói área
! Desfaz a seleção
```

```
LESIZE,ALL,,10,,,,
,1
```

```
! 10 Divisões de elemento em cada linha
```

```
MSHAPE,0,2D
MSHKEY,1
AMESH,ALL
```

```
! MALHA
! MALHA 0 - QUADRILATERAL; 1 - TRIANGLES
! 0 - FREE; 1 - MALHA MAPEADA
```

```
/SOLU
ANTYPE,STATIC
```

```
! SOLUTION MODULE
! Análise estática
! Condições de fronteira
```

```
DL,2,1,UZ,0
DL,3,1,UZ,0
DL,1,1,SYMM
DL,4,1,SYMM
!D,ALL,ROTZ
```

```
! Definir apoios simples
! Definir simetria
! CONSTRAINT ROTATIONS ABOUT Z AXES (OPTIONAL)
```

```
! Aplicação da Carga
! A carga é definida para os três carregamentos
```

```

SFL,2,PRES,-500,
/PSF,PRES,NORM,2,0,1

SFL,3,PRES,-500,
/PSF,PRES,NORM,2,0,1

SFL,2,PRES,-500,
SFL,3,PRES,-500,
/PSF,PRES,NORM,2,0,1

FINISH
/SOL
SBCTRAN
SAVE
/STATUS,SOLU
SOLVE
FINISH

/POST1
!LAYPLOT,1
SET,LAST
RSYS,LSYS

FC,1,S,XTEN,1550
FC,1,S,XCMP,-1090
FC,1,S,YTEN,59
FC,1,S,YCMP,-59
FC,1,S,ZTEN,59
FC,1,S,ZCMP,-59
FC,1,S,XY,75
FC,1,S,YZ,58
FC,1,S,XZ,75
FC,1,S,XYCPCP,-1
FC,1,S,YZCP,-1
FC,1,S,XZCP,-1

LAYER,1
PRNSOL,S,FAIL
PLNSOL,S,MAXF
PLNSOL,S,TWSR

!LAYER,2
!PRNSOL,S,FAIL
!PLNSOL,S,MAXF

```

```

! Nx
! Pressão uniforme de 500 N/mm, De TRAÇÃO.
! Mostra o vetor do carregamento

! Ny
! Pressão uniforme de 500 N/mm, De TRAÇÃO.
! Mostra o vetor do carregamento

! Nx e Ny
! Pressão uniforme de 500 N/mm, De TRAÇÃO.
! Pressão uniforme de 500 N/mm, De TRAÇÃO.
! Mostra o vetor do carregamento

! FIM DO MÓDULO SOLUTION

! TRANSFER LOADS TO FE

! Resolver

! Módulo PÓS PROCESSAMENTO
! SEQUÊNCIA DE EMPILHAMENTO (ELEMENTO 1)
! Apresenta a deformada da placa
! Sistema de coordenadas da lâmina

! CRITÉRIO DE FALHA
! Mat1, Pressão, Parâmetros de resistência
! F1t STRENGTH
! F1c STRENGTH
! F2t STRENGTH
! F2c STRENGTH
! F3t STRENGTH
! F3c STRENGTH
! F6 STRENGTH
! F4 STRENGTH
! F5 STRENGTH
! C6 Coeficiente de Tsai-Wu -1.0
! C4 Coeficiente de Tsai-Wu -1.0
! C5 Coeficiente de Tsai-Wu -1.0

! Apresentar o resultado da lâmina #1
! Apresenta a tabela com índice de falha
! MAXF é o IF para Tensão Máxima
! TWSR é o IF para inversa de TSAI-WU

! Apresentar o resultado da lâmina #2
! Apresenta a tabela com índice de falha

```

```
! PLNSOL, S, TWSR
```

```
! LAYER, 3
```

```
! PRNSOL, S, FAIL
```

```
! PLNSOL, S, MAXF
```

```
! PLNSOL, S, TWSR
```

```
! Apresentar o resultado da lâmina #3
```

```
! Apresenta a tabela com índice de falha
```

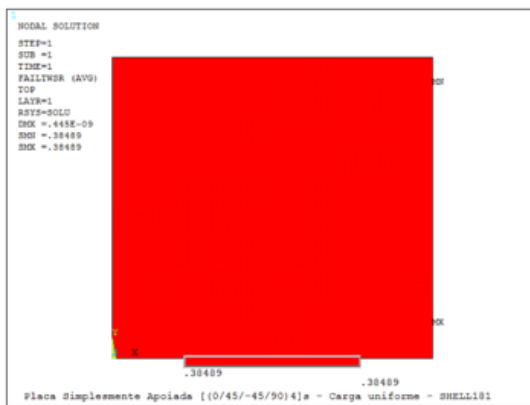
```
FINISH
```

```
! FIM DO MÓDULO PÓS PROCESSAMENTO
```

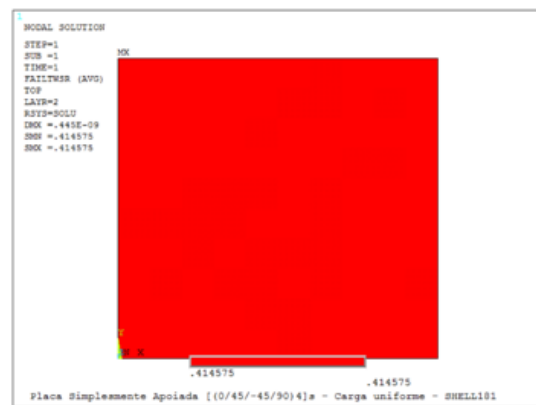
ÍNDICES DE FALHA PREVISTOS PELO CRITÉRIO DE TSAI-WU

Simulação Nx

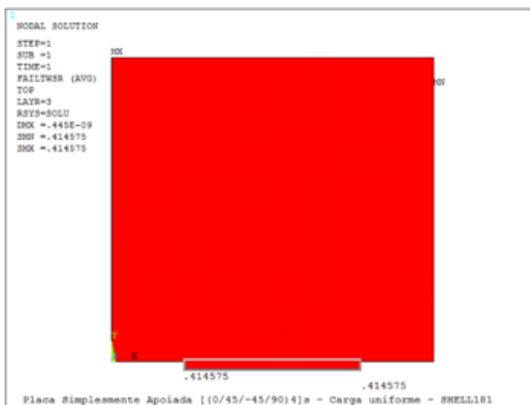
IF - Laminado Quase Isotrópico



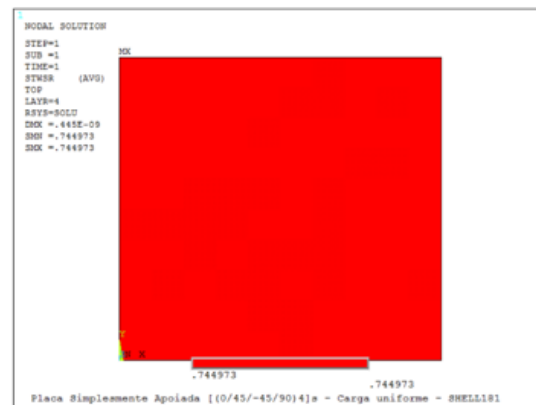
Lâminas - 0°



Lâminas - 45°

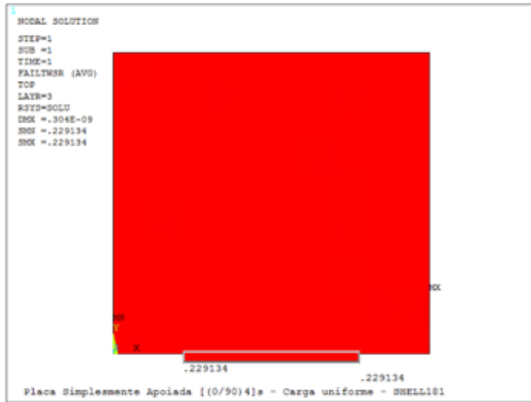


Lâminas - (-45°)

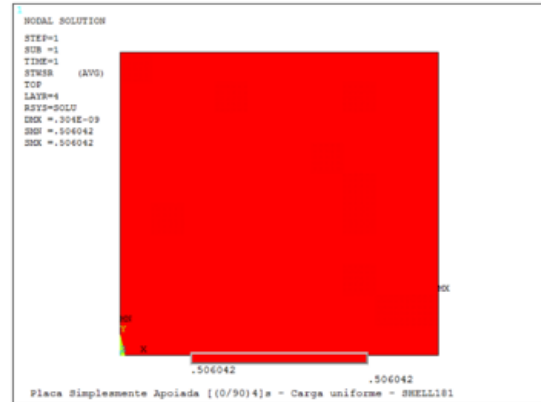


Lâminas - 90°

IF - Laminado Cross-Ply

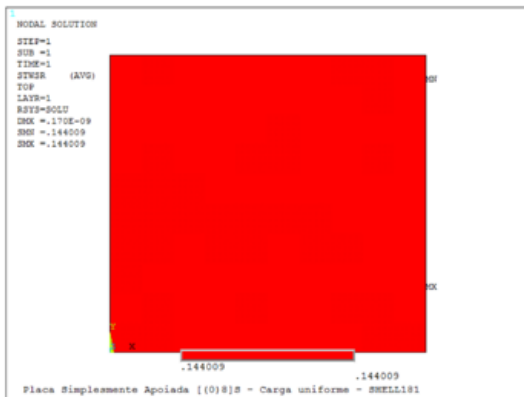


Lâminas - 0°



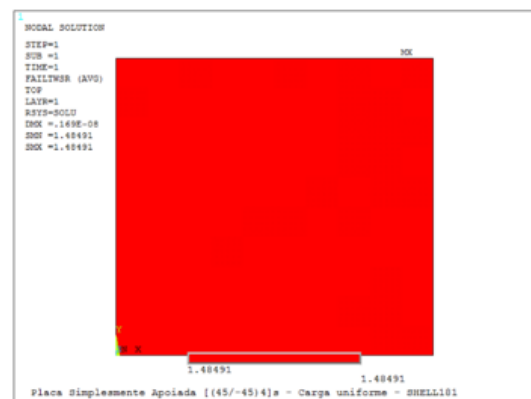
Lâminas - 90°

IF - Laminado Unidirecional

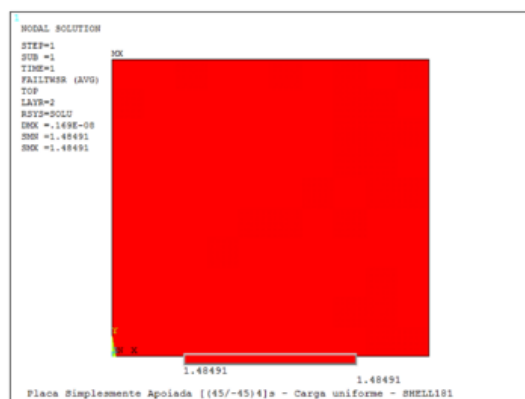


Lâminas - 0°

IF - Laminado Angle-Ply



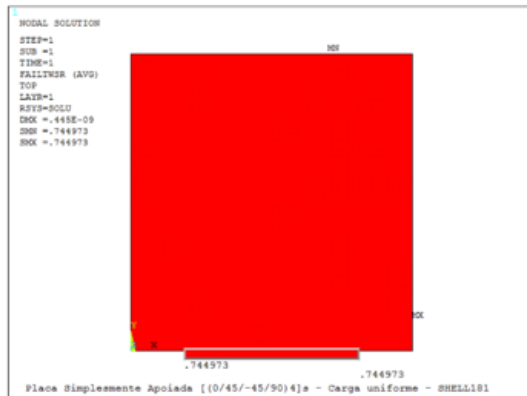
Lâminas - 45°



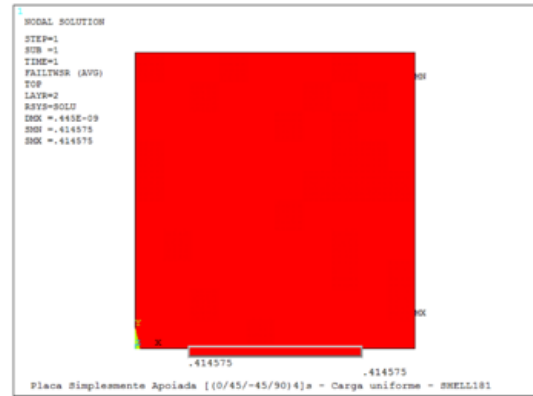
Lâminas - (-45°)

Simulação Ny

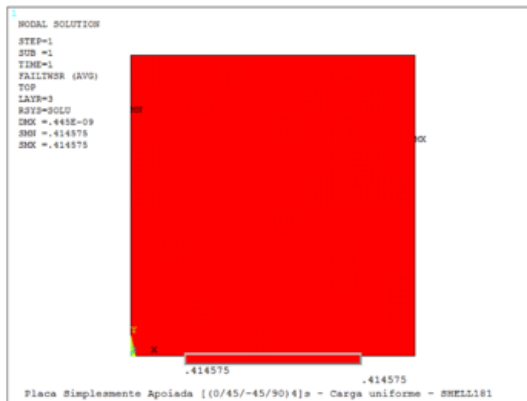
IF - Laminado Quase Isotrópico



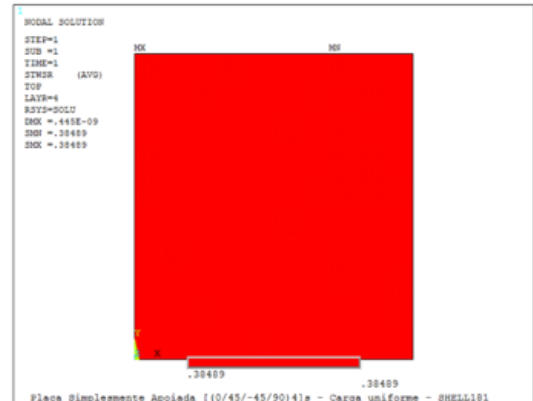
Lâminas - 0°



Lâminas - 45°

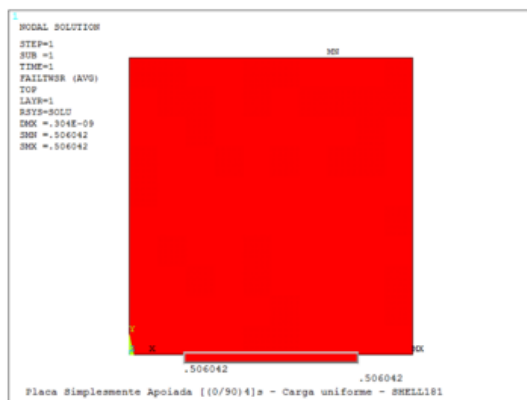


Lâminas - (-45°)

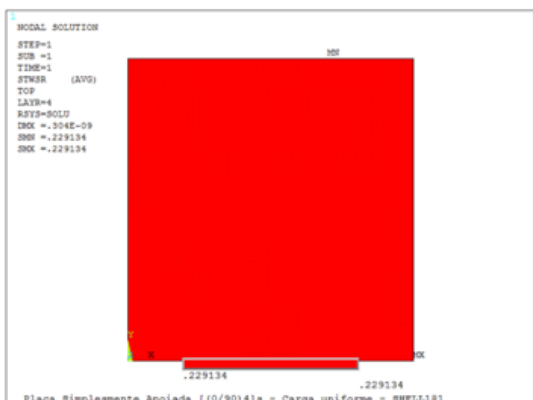


Lâminas - 90°

IF - Laminado Cross-Ply

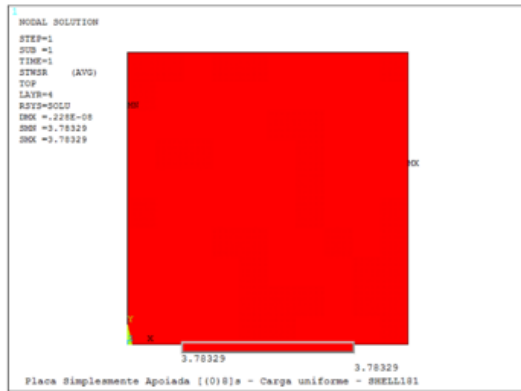


Lâminas - 0°



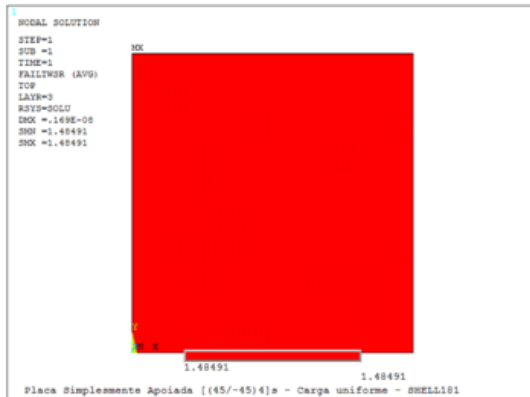
Lâminas - 90°

IF - Laminado Unidirecional

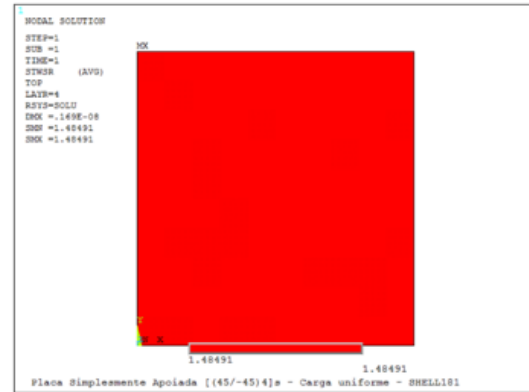


Lâminas - 0°

IF - Laminado Angle-Ply



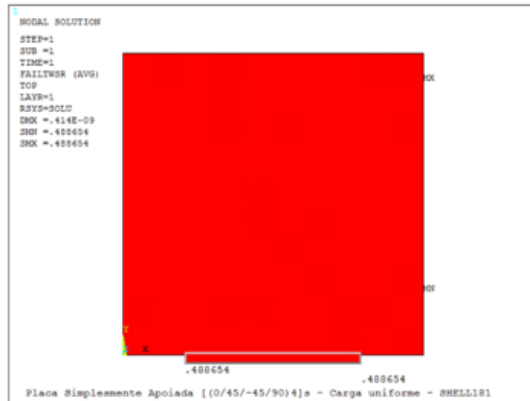
Lâminas - 45°



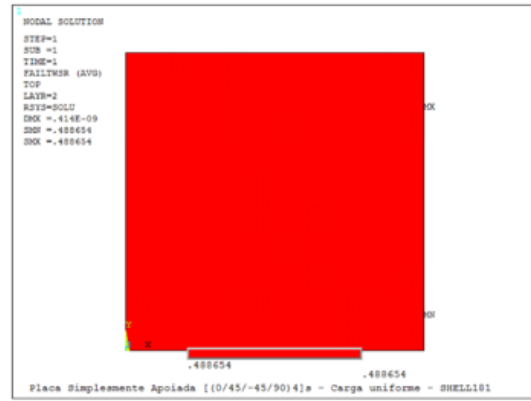
Lâminas - (-45°)

Simulação $N_x = N_y$

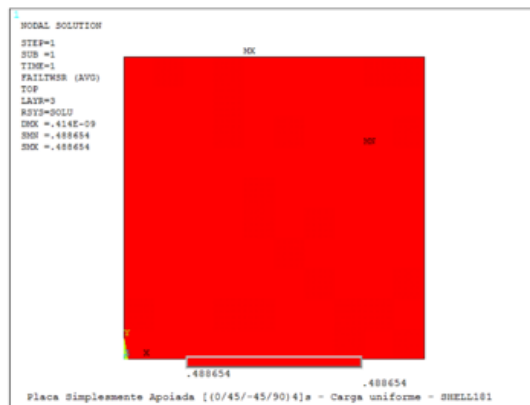
IF - Laminado Quase Isotrópico



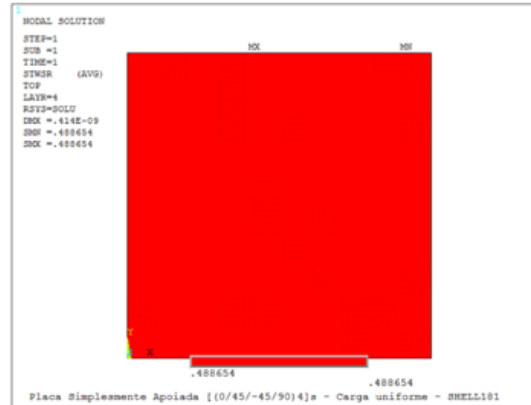
Lâminas - 0°



Lâminas - 45°

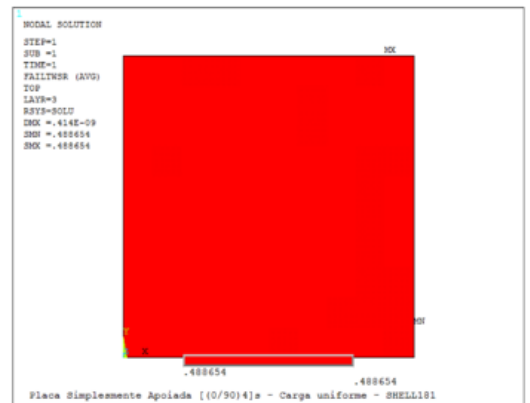


Lâminas - (-45°)

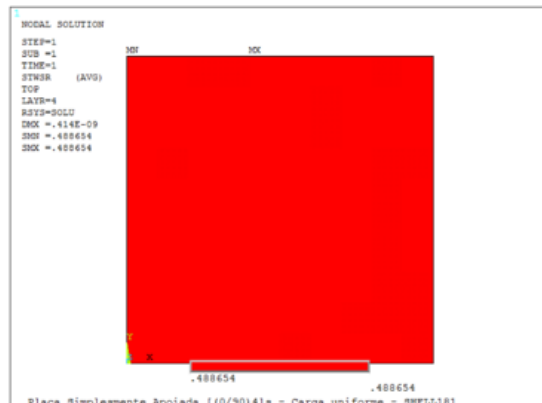


Lâminas - 90°

IF - Laminado Cross-Ply

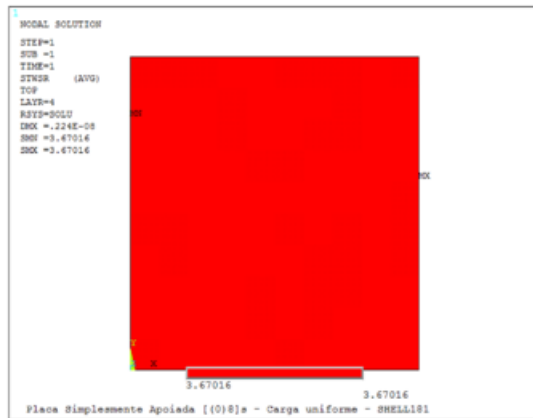


Lâminas - 0°



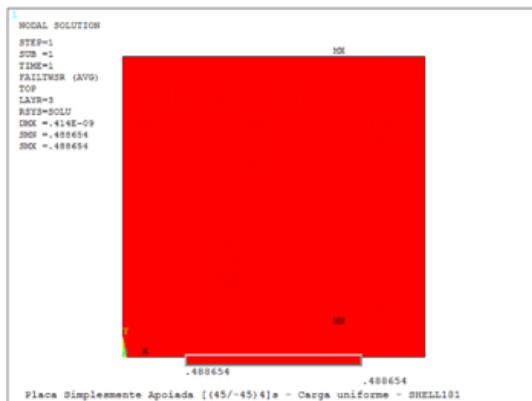
Lâminas - 90°

IF - Laminado Unidirecional

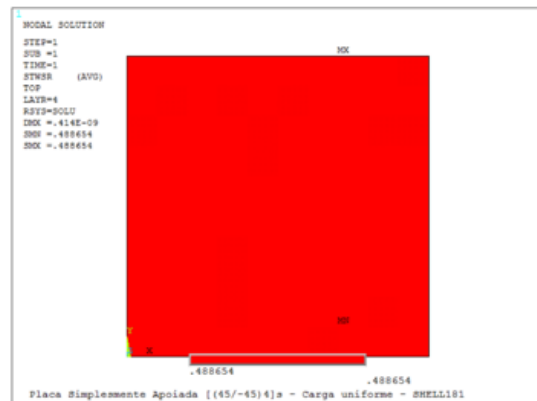


Lâminas - 0°

IF - Laminado Angle-Ply



Lâminas - 45°

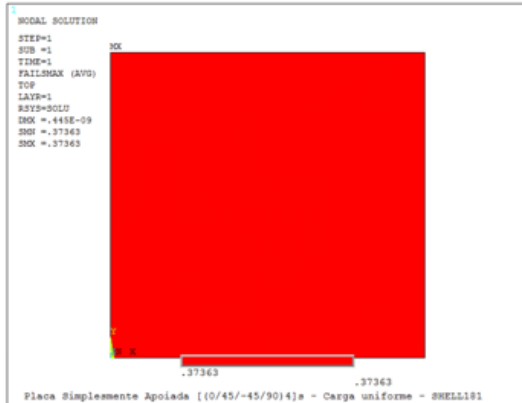


Lâminas - (-45°)

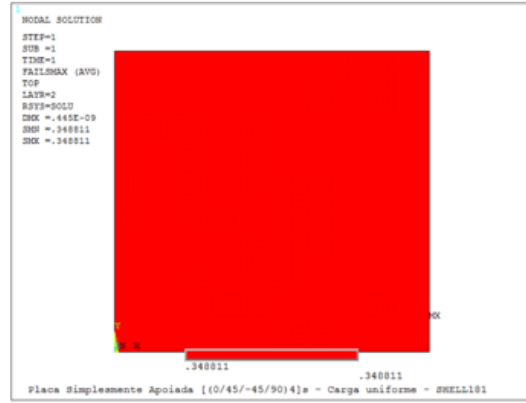
ÍNDICES DE FALHA PREVISTOS PELO CRITÉRIO DE TENSÃO MÁXIMA

Simulação Nx

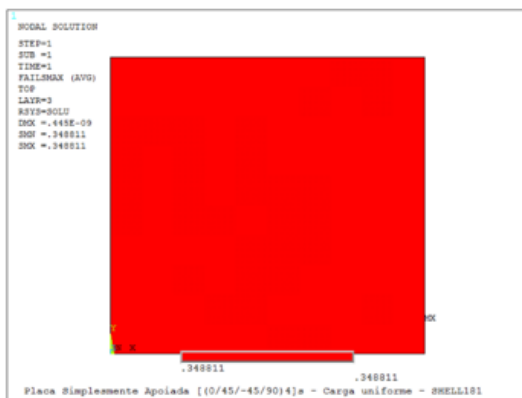
IF - Laminado Quase Isotrópico



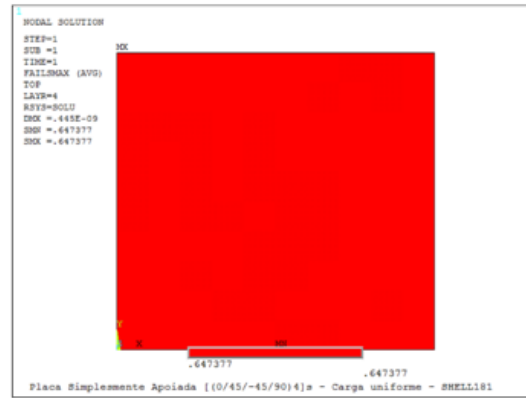
Lâminas - 0°



Lâminas - 45°

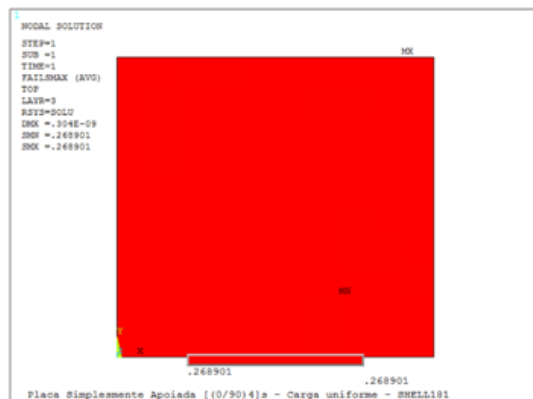


Lâminas - (-45°)

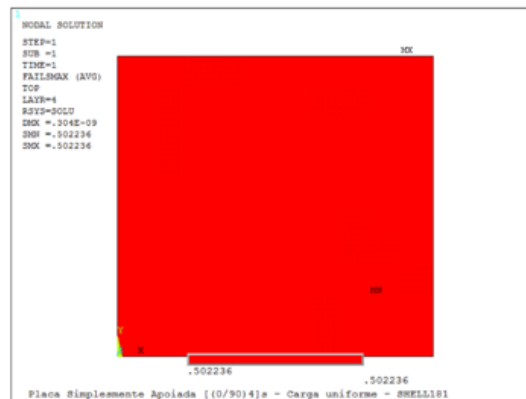


Lâminas - 90°

IF - Laminado Cross-Ply

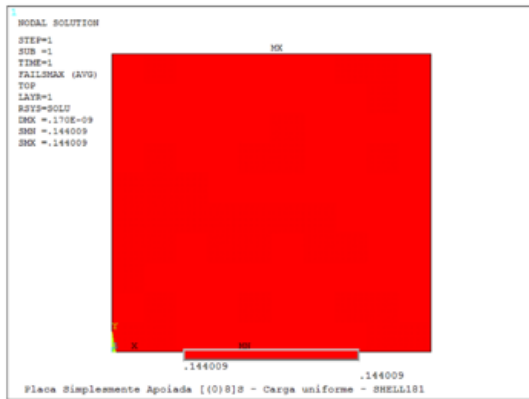


Lâminas - 0°



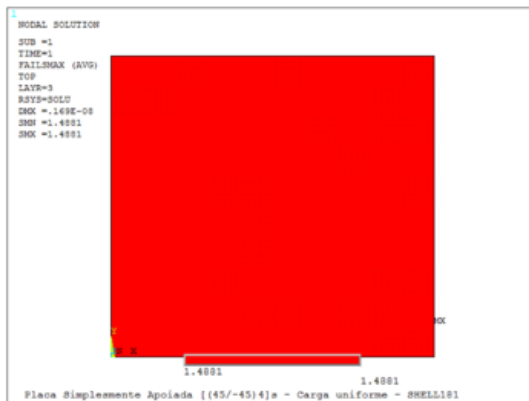
Lâminas - 90°

IF - Laminado Unidirecional

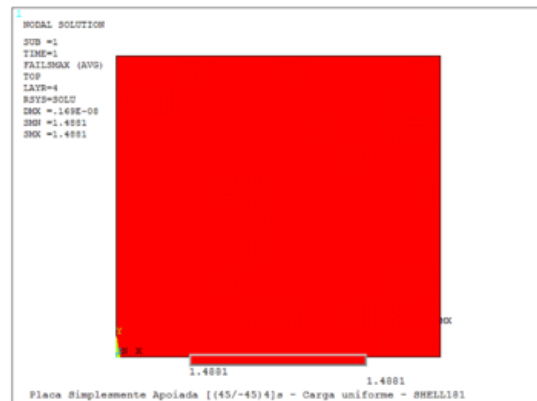


Lâminas - 0°

IF - Laminado Angle-Ply



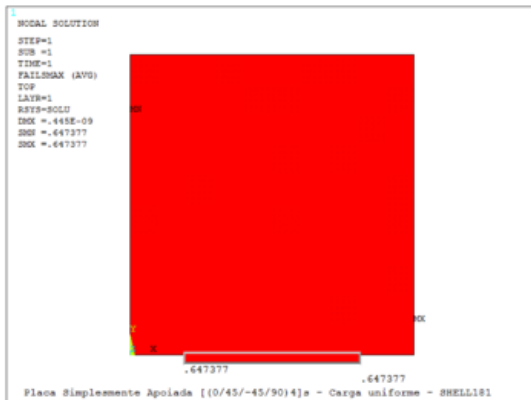
Lâminas - 45°



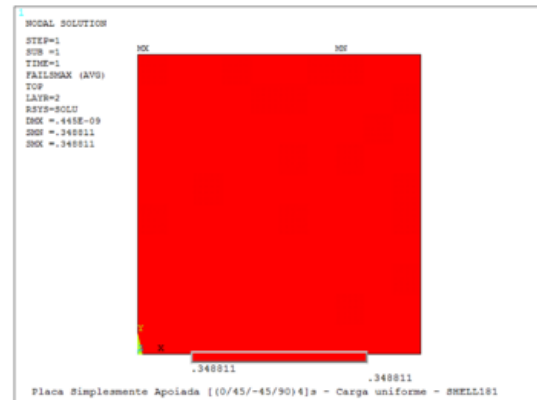
Lâminas - (-45°)

Simulação NY

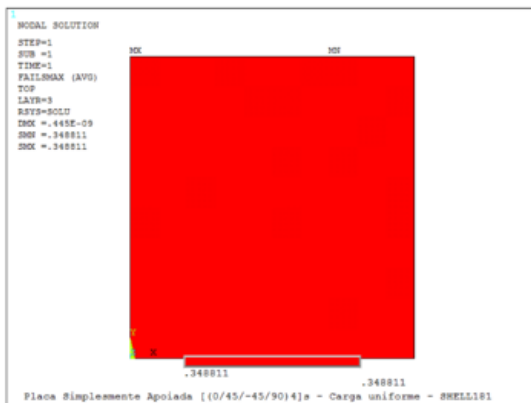
IF - Laminado Quase Isotrópico



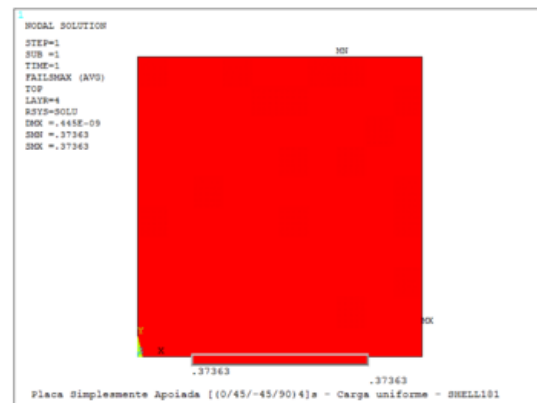
Lâminas - 0°



Lâminas - 45°

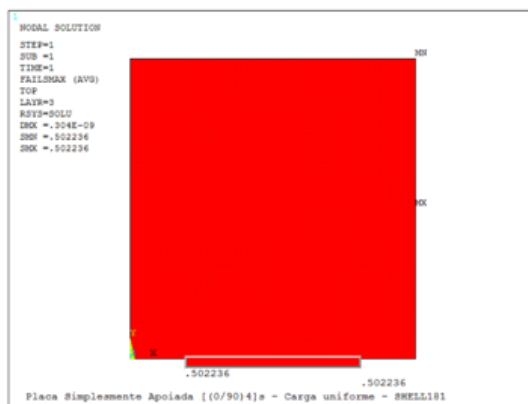


Lâminas - (-45°)

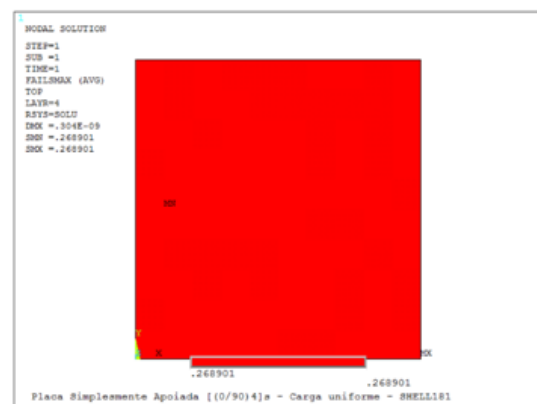


Lâminas - 90°

IF - Laminado Cross-Ply

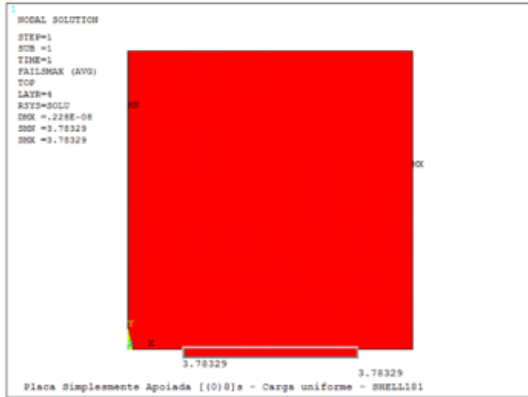


Lâminas - 0°



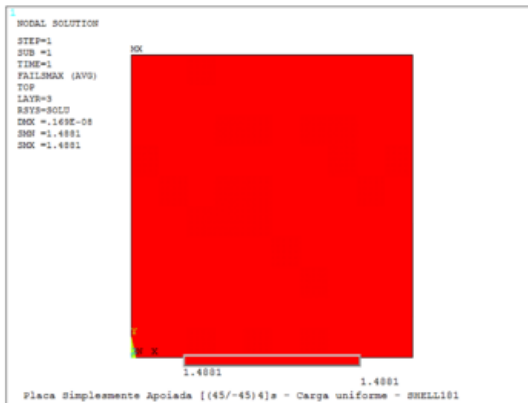
Lâminas - 90°

IF - Laminado Unidirecional

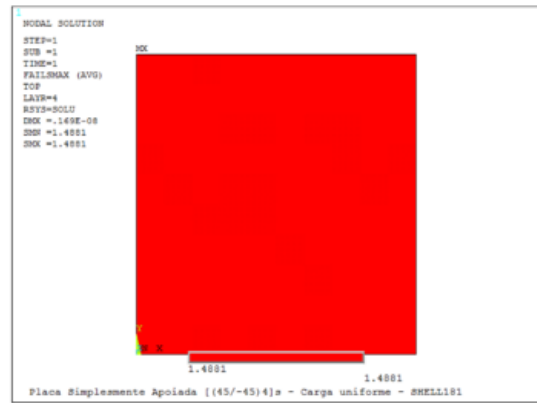


Lâminas - 0°

IF - Laminado Angle-Ply



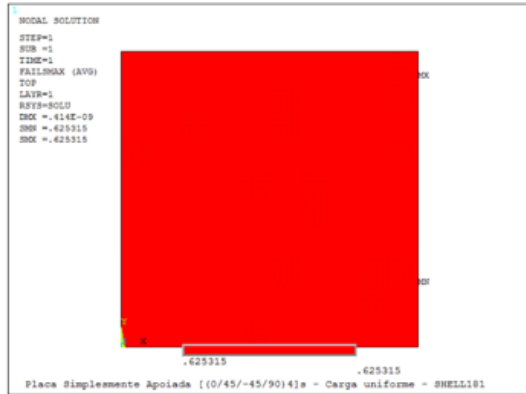
Lâminas - 45°



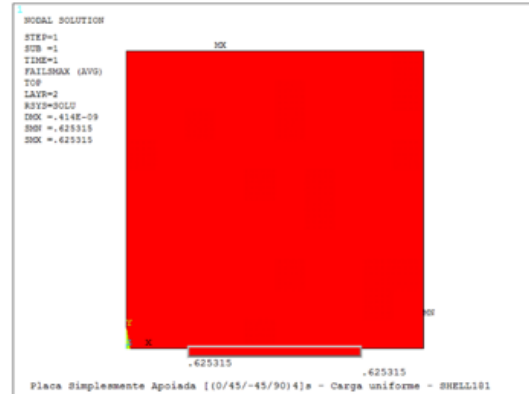
Lâminas - (-45°)

Simulação $N_x = N_y$

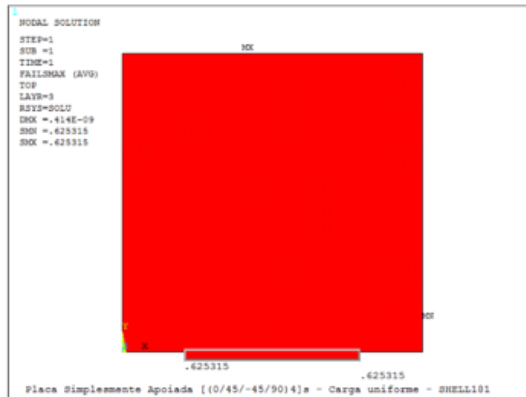
IF - Laminado Quase Isotrópico



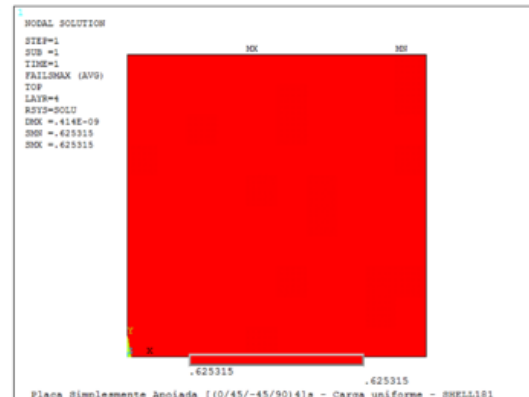
Lâminas - 0°



Lâminas - 45°

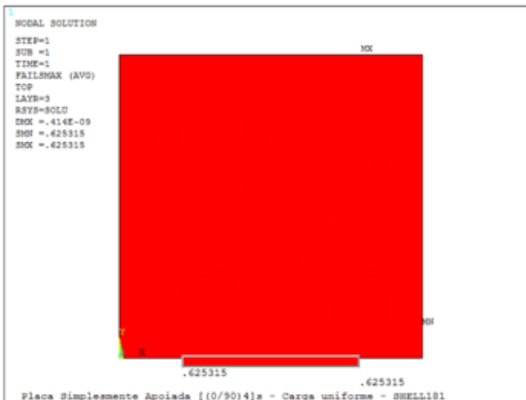


Lâminas - (-45°)

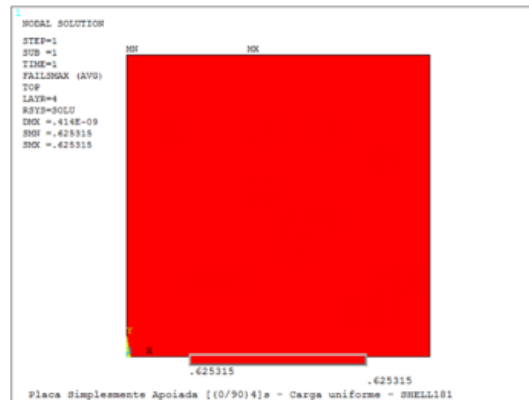


Lâminas - 90°

IF - Laminado Cross-Ply

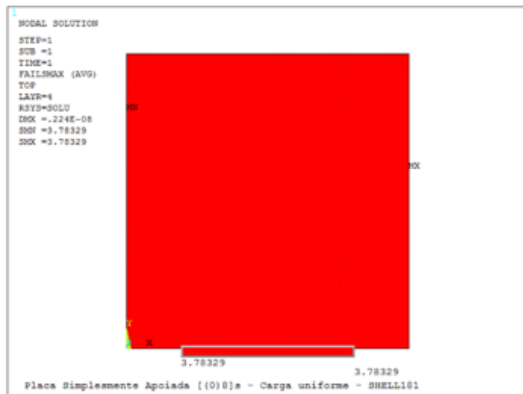


Lâminas - 0°



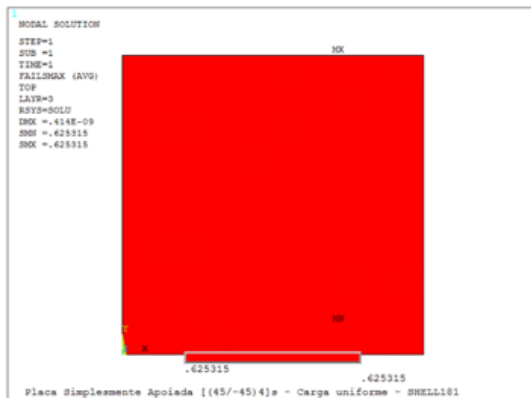
Lâminas - 90°

IF - Laminado Unidirecional

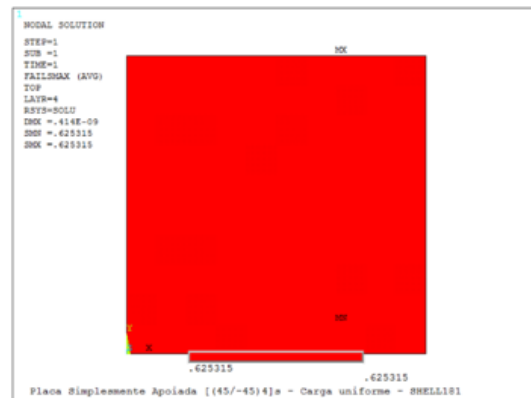


Lâminas – 0°

IF - Laminado Angle-Ply



Lâminas – 45°



Lâminas – (-45°)

d2) Resolução analítica (MAPLE 17)

Inicialização do Programa

```
> restart : with(linalg) : with(plots) :
```

Constantes de Elasticidade de Cada Camada - grafite/epóxi (T300/5208)

```
>
```

```
E1 := 136e9 :
```

```
E2 := 9.8e9 :
```

```
E3 := 9.8e9 :
```

```
v12 := 0.28 :
```

```
v23 := 0.15 :
```

```
v13 := 0.28 :
```

```
G12 := 4.7e9 :
```

```
G23 := 5.2e9 :
```

```
G13 := 4.7e9 :
```

Parâmetros de resistência

```
>
```

```
F1t := 1550 :
```

```
F1c := 1090 :
```

```
F2t := 59 :
```

```
F2c := 59 :
```

```
F3t := 59 :
```

```
F3c := 59 :
```

```
F6 := 75 :
```

```
F4 := 58 :
```

```
F5 := 75 :
```

```
c4 := -1 :
```

```
c5 := -1 :
```

```
c6 := -1 :
```

Matriz dos Coeficiente de Rigidez Elástica

```
>
```

$$v_{21} := \frac{E_2}{E_1} \cdot v_{12} : Q11 := \frac{E_1}{1 - v_{12} \cdot v_{21}} :$$

$$Q12 := \frac{v_{12} \cdot E_2}{1 - v_{12} \cdot v_{21}} : Q22 := \frac{E_2}{1 - v_{12} \cdot v_{21}} : Q66 := G_{12} :$$

```
Q_rig := Matrix([[Q11, Q12, 0], [Q12, Q22, 0], [0, 0, Q66]]);
```

Matriz Rigidez Elástica Transformado dos quatro laminados

Quase Isotrópico

nc := 16 :

$$\text{theta} := \text{Vector}\left(\text{nc}, \left[0, \frac{\text{Pi}}{4}, -\frac{\text{Pi}}{4}, \frac{\text{Pi}}{2}, 0, \frac{\text{Pi}}{4}, -\frac{\text{Pi}}{4}, \frac{\text{Pi}}{2}, \frac{\text{Pi}}{2}, -\frac{\text{Pi}}{4}, \frac{\text{Pi}}{4}, 0, \frac{\text{Pi}}{2}, -\frac{\text{Pi}}{4}, \frac{\text{Pi}}{4}, 0\right]\right) :$$

Cross-Ply

nc := 16 :

$$\text{theta} := \text{Vector}\left(\text{nc}, \left[0, \frac{\text{Pi}}{2}, 0, \frac{\text{Pi}}{2}, 0, \frac{\text{Pi}}{2}, 0, \frac{\text{Pi}}{2}, \frac{\text{Pi}}{2}, 0, \frac{\text{Pi}}{2}, 0, \frac{\text{Pi}}{2}, 0, \frac{\text{Pi}}{2}, 0\right]\right) :$$

Unidirecional

nc := 16 :

$$\text{theta} := \text{Vector}\left(\text{nc}, [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]\right) :$$

Angle-Ply

$$\text{theta} := \text{Vector}\left(\text{nc}, \left[\frac{\text{Pi}}{4}, -\frac{\text{Pi}}{4}, \frac{\text{Pi}}{4}, -\frac{\text{Pi}}{4}, \frac{\text{Pi}}{4}, -\frac{\text{Pi}}{4}, \frac{\text{Pi}}{4}, -\frac{\text{Pi}}{4}, \frac{\text{Pi}}{4}, -\frac{\text{Pi}}{4}, \frac{\text{Pi}}{4}, -\frac{\text{Pi}}{4}, \frac{\text{Pi}}{4}, -\frac{\text{Pi}}{4}, \frac{\text{Pi}}{4}, -\frac{\text{Pi}}{4}\right]\right) :$$

```

for i from 1 to nc do
m := cos(theta[i]) :
n := sin(theta[i]) :

Qb11[i] := Q11·m4 + 2·(Q12 + 2·Q66)·n2·m2 + Q22·n4;
Qb12[i] := (Q11 + Q22 - 4·Q66)·n2·m2 + Q12·(n4 + m4);
Qb22[i] := Q11·n4 + 2·(Q12 + 2·Q66)·n2·m2 + Q22·m4;
Qb16[i] := (Q11 - Q12 - 2·Q66)·n·m3 + (Q12 - Q22 + 2·Q66)·n3·m;
Qb26[i] := (Q11 - Q12 - 2·Q66)·n3·m + (Q12 - Q22 + 2·Q66)·n·m3;
Qb66[i] := (Q11 + Q22 - 2·Q12 - 2·Q66)·n2·m2 + Q66·(n4 + m4);
end:

for i from 1 to nc do
Q_rig_elast_transf[i] := Matrix([
[Qb11[i], Qb12[i], Qb16[i]],
[Qb12[i], Qb22[i], Qb26[i]],
[Qb16[i], Qb26[i], Qb66[i]]]);

print(Q_rig_elast_transf[i]) :
end:

```

Matrizes de Rigidez do Laminado (A,B e D) [mm]

>

```

h := 2.24;
hc :=  $\frac{h}{nc}$ ;
z[0] := 8· hc :
z[1] := 7· hc :
z[2] := 6· hc :
z[3] := 5· hc :
z[4] := 4· hc :
z[5] := 3· hc :
z[6] := 2· hc :
z[7] := 1· hc :
z[8] := 0· hc :
z[9] := -1· hc :
z[10] := -2· hc :
z[11] := -3· hc :
z[12] := -4· hc :
z[13] := -5· hc :
z[14] := -6· hc :
z[15] := -7· hc :
z[16] := -8· hc :

zk := [z[0], z[1], z[2], z[3], z[4], z[5], z[6], z[7], z[8],
z[9], z[10], z[11], z[12], z[13], z[14], z[15], z[16]];

```

Matriz de Rigidez de Membrana (A) [N/mm ou Pa.mm]

>

```
A1 := evalm((z[0] - z[1])·Q_rig_elast_transf[1]) :  
A2 := evalm((z[1] - z[2])·Q_rig_elast_transf[2]) :  
A3 := evalm((z[2] - z[3])·Q_rig_elast_transf[3]) :  
A4 := evalm((z[3] - z[4])·Q_rig_elast_transf[4]) :  
A5 := evalm((z[4] - z[5])·Q_rig_elast_transf[5]) :  
A6 := evalm((z[5] - z[6])·Q_rig_elast_transf[6]) :  
A7 := evalm((z[6] - z[7])·Q_rig_elast_transf[7]) :  
A8 := evalm((z[7] - z[8])·Q_rig_elast_transf[8]) :  
A9 := evalm((z[8] - z[9])·Q_rig_elast_transf[9]) :  
A10 := evalm((z[9] - z[10])·Q_rig_elast_transf[10]) :  
A11 := evalm((z[10] - z[11])·Q_rig_elast_transf[11]) :  
A12 := evalm((z[11] - z[12])·Q_rig_elast_transf[12]) :  
A13 := evalm((z[12] - z[13])·Q_rig_elast_transf[13]) :  
A14 := evalm((z[13] - z[14])·Q_rig_elast_transf[14]) :  
A15 := evalm((z[14] - z[15])·Q_rig_elast_transf[15]) :  
A16 := evalm((z[15] - z[16])·Q_rig_elast_transf[16]) :
```

```
A := evalm(A1 + A2 + A3 + A4 + A5 + A6 + A7 + A8 + A9 + A10  
+ A11 + A12 + A13 + A14 + A15 + A16);
```

Inversa da Matriz A (A_inv) [mm/N]

> a := inverse(A);

Matriz de Acoplamento Membrana-Flexão (B) [Pa.mm² ou N]

>

```
B1 := evalm( $\left(\frac{1}{2}\right) \cdot (z[0]^2 - z[1]^2) \cdot Q\_rig\_elast\_transf[1]$ ):
B2 := evalm( $\left(\frac{1}{2}\right) \cdot (z[1]^2 - z[2]^2) \cdot Q\_rig\_elast\_transf[2]$ ):
B3 := evalm( $\left(\frac{1}{2}\right) \cdot (z[2]^2 - z[3]^2) \cdot Q\_rig\_elast\_transf[3]$ ):
B4 := evalm( $\left(\frac{1}{2}\right) \cdot (z[3]^2 - z[4]^2) \cdot Q\_rig\_elast\_transf[4]$ ):
B5 := evalm( $\left(\frac{1}{2}\right) \cdot (z[4]^2 - z[5]^2) \cdot Q\_rig\_elast\_transf[5]$ ):
B6 := evalm( $\left(\frac{1}{2}\right) \cdot (z[5]^2 - z[6]^2) \cdot Q\_rig\_elast\_transf[6]$ ):
B7 := evalm( $\left(\frac{1}{2}\right) \cdot (z[6]^2 - z[7]^2) \cdot Q\_rig\_elast\_transf[7]$ ):
B8 := evalm( $\left(\frac{1}{2}\right) \cdot (z[7]^2 - z[8]^2) \cdot Q\_rig\_elast\_transf[8]$ ):
B9 := evalm( $\left(\frac{1}{2}\right) \cdot (z[8]^2 - z[9]^2) \cdot Q\_rig\_elast\_transf[9]$ ):
B10 := evalm( $\left(\frac{1}{2}\right) \cdot (z[9]^2 - z[10]^2) \cdot Q\_rig\_elast\_transf[10]$ ):
B11 := evalm( $\left(\frac{1}{2}\right) \cdot (z[10]^2 - z[11]^2) \cdot Q\_rig\_elast\_transf[11]$ ):
B12 := evalm( $\left(\frac{1}{2}\right) \cdot (z[11]^2 - z[12]^2) \cdot Q\_rig\_elast\_transf[12]$ ):
B13 := evalm( $\left(\frac{1}{2}\right) \cdot (z[12]^2 - z[13]^2) \cdot Q\_rig\_elast\_transf[13]$ ):
B14 := evalm( $\left(\frac{1}{2}\right) \cdot (z[13]^2 - z[14]^2) \cdot Q\_rig\_elast\_transf[14]$ ):
B15 := evalm( $\left(\frac{1}{2}\right) \cdot (z[14]^2 - z[15]^2) \cdot Q\_rig\_elast\_transf[15]$ ):
B16 := evalm( $\left(\frac{1}{2}\right) \cdot (z[15]^2 - z[16]^2) \cdot Q\_rig\_elast\_transf[16]$ ):

B := evalm(B1 + B2 + B3 + B4 + B5 + B6 + B7 + B8 + B9 + B10
+ B11 + B12 + B13 + B14 + B15 + B16);
```

Matriz de Rigidez de Flexão (D) [Nmm]

>

```
D1 := evalm\left(\left(\frac{1}{3}\right) \cdot (z[0]^3 - z[1]^3) \cdot Q\_rig\_elast\_transf[1]\right) :
D2 := evalm\left(\left(\frac{1}{3}\right) \cdot (z[1]^3 - z[2]^3) \cdot Q\_rig\_elast\_transf[2]\right) :
D3 := evalm\left(\left(\frac{1}{3}\right) \cdot (z[2]^3 - z[3]^3) \cdot Q\_rig\_elast\_transf[3]\right) :
D4 := evalm\left(\left(\frac{1}{3}\right) \cdot (z[3]^3 - z[4]^3) \cdot Q\_rig\_elast\_transf[4]\right) :
D5 := evalm\left(\left(\frac{1}{3}\right) \cdot (z[4]^3 - z[5]^3) \cdot Q\_rig\_elast\_transf[5]\right) :
D6 := evalm\left(\left(\frac{1}{3}\right) \cdot (z[5]^3 - z[6]^3) \cdot Q\_rig\_elast\_transf[6]\right) :
D7 := evalm\left(\left(\frac{1}{3}\right) \cdot (z[6]^3 - z[7]^3) \cdot Q\_rig\_elast\_transf[7]\right) :
D8 := evalm\left(\left(\frac{1}{3}\right) \cdot (z[7]^3 - z[8]^3) \cdot Q\_rig\_elast\_transf[8]\right) :
D9 := evalm\left(\left(\frac{1}{3}\right) \cdot (z[8]^3 - z[9]^3) \cdot Q\_rig\_elast\_transf[9]\right) :
D10 := evalm\left(\left(\frac{1}{3}\right) \cdot (z[9]^3 - z[10]^3) \cdot Q\_rig\_elast\_transf[10]\right) :
D11 := evalm\left(\left(\frac{1}{3}\right) \cdot (z[10]^3 - z[11]^3) \cdot Q\_rig\_elast\_transf[11]\right) :
D12 := evalm\left(\left(\frac{1}{3}\right) \cdot (z[11]^3 - z[12]^3) \cdot Q\_rig\_elast\_transf[12]\right) :
D13 := evalm\left(\left(\frac{1}{3}\right) \cdot (z[12]^3 - z[13]^3) \cdot Q\_rig\_elast\_transf[13]\right) :
D14 := evalm\left(\left(\frac{1}{3}\right) \cdot (z[13]^3 - z[14]^3) \cdot Q\_rig\_elast\_transf[14]\right) :
D15 := evalm\left(\left(\frac{1}{3}\right) \cdot (z[14]^3 - z[15]^3) \cdot Q\_rig\_elast\_transf[15]\right) :
D16 := evalm\left(\left(\frac{1}{3}\right) \cdot (z[15]^3 - z[16]^3) \cdot Q\_rig\_elast\_transf[16]\right) :

DD := evalm(D1 + D2 + D3 + D4 + D5 + D6 + D7 + D8 + D9 + D10
+ D11 + D12 + D13 + D14 + D15 + D16);
```

Aplicação da carga (N_x)

>

```
#Nx:=500· Nx:
Ny := 0 :
Nxy := 0 :
N := ⟨500· Nx, Ny, Nxy⟩;

Mx := 0 :
My := 0 :
Mxy := 0 :
MM := ⟨0, 0, 0⟩;
```

$$\begin{bmatrix} 500 N_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aplicação da carga (N_y)

```
#Ny:=0:
Nxy := 0 :
N := ⟨ 0, 500· Ny, Nxy⟩;

Mx := 0 :
My := 0 :
Mxy := 0 :
MM := ⟨0, 0, 0⟩;
```

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 500 N_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aplicação da carga ($N_x = N_y$)

```
Nxy := 0 :
N := ⟨500· Nx, 500· Nx, Nxy⟩;

Mx := 0 :
My := 0 :
Mxy := 0 :
MM := ⟨0, 0, 0⟩;
```

$$\begin{bmatrix} 500 N_x \\ 500 N_x \\ 0 \end{bmatrix}$$

Deformações comuns

> $\varepsilon_0 := a \cdot N;$

Tensões em Cada uma das camadas (xyz) [MPa]

```
Tensão_x1 := Q_rig_elast_transf[1].(ε0 + (z[1] - z[0]).kk);
Tensão_x2 := Q_rig_elast_transf[2].(ε0 + (z[2] - z[1]).kk);
Tensão_x3 := Q_rig_elast_transf[3].(ε0 + (z[3] - z[2]).kk);
Tensão_x4 := Q_rig_elast_transf[4].(ε0 + (z[4] - z[3]).kk);
Tensão_x5 := Q_rig_elast_transf[5].(ε0 + (z[5] - z[4]).kk);
Tensão_x6 := Q_rig_elast_transf[6].(ε0 + (z[6] - z[5]).kk);
Tensão_x7 := Q_rig_elast_transf[7].(ε0 + (z[7] - z[6]).kk);
Tensão_x8 := Q_rig_elast_transf[8].(ε0 + (z[8] - z[7]).kk);
```

Tensões em Cada uma das camadas (123)

Matriz Transformação

```
for i from 1 to nc do
  c := cos(theta[i]) :
  s := sin(theta[i]) :

  t11[i] := c2 :
  t12[i] := s2 :
  t22[i] := c2 :
  t16[i] := -c·s :
  t61[i] := 2·c·s :
  t26[i] := c·s :
  t62[i] := -2·c·s :
  t66[i] := c2 - s2 :
end:

for i from 1 to nc do
  transformação[i] := Matrix([
  [t11[i], t12[i], t61[i]],
  [t12[i], t22[i], t62[i]],
  [t16[i], t26[i], t66[i]]
  ]) :
  #print(transformação[i]);
end:
```

Tensões (123) [MPa]

```
Tensão_1 := transformação[1].Tensão_x1;
Tensão_2 := transformação[2].Tensão_x2;
Tensão_3 := transformação[3].Tensão_x3;
Tensão_4 := transformação[4].Tensão_x4;
Tensão_5 := transformação[5].Tensão_x5;
Tensão_6 := transformação[6].Tensão_x6;
Tensão_7 := transformação[7].Tensão_x7;
Tensão_8 := transformação[8].Tensão_x8;
```

Aplicar os critérios: proceder como em Anexos B e C.