CÁLCULO MENTAL NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE MULTIPLICAÇÃO: UM ESTUDO COM ALUNOS DO 3.º ANO DE ESCOLARIDADE

Sandra Patrícia Tavares Cristóvão

Dissertação apresentada à Escola Superior de Educação de Lisboa para obtenção do grau de Mestre em Educação Matemática na Educação Pré-escolar e nos 1º e 2º Ciclos do Ensino Básico

2016

Instituto Politécnico de Lisboa

ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO DE LISBOA

CÁLCULO MENTAL NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE MULTIPLICAÇÃO: UM ESTUDO COM ALUNOS DO 3.º ANO DE ESCOLARIDADE

Sandra Patrícia Tavares Cristóvão

Dissertação apresentada à Escola Superior de Educação de Lisboa para obtenção do grau de Mestre em Educação Matemática na Educação Pré-escolar e nos 1º e 2º Ciclos do Ensino Básico

Orientadora:
Professora Doutora Maria de Lurdes Marquês Serrazina

2016

Resumo

A presente investigação tem como objetivo compreender que estratégias de cálculo mental os alunos do 3.º ano de escolaridade utilizam na resolução de problemas de multiplicação. Para isso, procurei dar resposta às seguintes questões: i) Será que o tipo de números usados influencia as estratégias utilizadas pelos alunos, em situações multiplicativas? ii) Será que os alunos desenvolvem estratégias de cálculo mental depois de já terem aprendido o algoritmo da multiplicação e se sim, como o fazem? e iii) Será que a utilização do algoritmo ajuda ou condiciona as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de problemas de multiplicação?

Esta investigação desenvolveu-se, no ano letivo 2015/2016, numa turma com 20 alunos do 3.º ano de escolaridade, de uma escola pública do concelho da Amadora. As tarefas foram desenvolvidas na turma no período de outubro a dezembro de 2015.

Tendo em conta os objetivos do estudo, a investigação seguiu uma metodologia de natureza qualitativa. Os instrumentos de recolha de dados utlizados foram a observação participante, apoiada pelos registos áudio e vídeo das aulas, incluindo o trabalho a pares e as discussões e a recolha documental. Foi desenvolvida com os alunos uma experiência de ensino que incluía três tarefas (com desafios).

Na exploração das tarefas matemáticas foi interessante perceber que o trabalho a pares permitiu um maior confronto de ideias e uma escolha de procedimentos na maioria das vezes mais eficazes.

Os resultados deste estudo indicam que os alunos ao longo das tarefas desenvolveram diversas estratégias de cálculo evoluindo, quase sempre, de um contexto aditivo para um novo contexto multiplicativo criando estratégias cada vez mais eficazes. Os alunos associaram os procedimentos multiplicativos à disposição retangular e foram capazes de aplicar propriedades da multiplicação nos cálculos dos produtos que tinham de efetuar.

Quando a grandeza do número aumentou constatou-se que a maioria dos pares, que apresentaram um resultado correto, usou a multiplicação com recurso ao algoritmo, possivelmente por ser um procedimento mais confiável e simples para os alunos.

O facto de os alunos não conhecerem o algoritmo quando o multiplicador é um número de dois algarismos, não condicionou a construção dos seus próprios procedimentos nem a resolução correta do problema.

Palavras-Chave: Aprendizagem da multiplicação; Estratégias de cálculo; Cálculo mental; Algoritmo.

Abstract

The present research aims to understand which mental calculation strategies 3rd grade students use to solve multiplicative problems. To achieve this, I intended to answer the following questions: i) Do the type of numbers used by students influence the strategies they utilize, in multiplicative situations? ii) Do students develop mental calculation strategies after they learned the multiplication algorithm, and if so, how do they do it? and, iii) Does the use of this algorithm benefit or condition the strategies used by students in solving multiplication problems?

This research took place in the school year of 2015/2016, in a class with 20 students of the 3rd grade, in a public sector school in the county of Amadora. The tasks occurred in class during the period ranging from October to December 2015. Taking into account the study objects, this research followed a methodology of a qualitative nature. The data collection instruments employed were participant observation, supported by audio and video records taken in class, including pair work and discussions and document gathering. A teaching experience involving three tasks (with challenges) was developed with the students.

During exploration of mathematical tasks, it was interesting to realize that pair work allowed for a better idea confrontation and a choice of procedures, which were, most often, more effective.

The study's results indicate that over the course of these tasks students developed several strategies of calculation evolving, usually, from an additive context to a new multiplicative context, creating strategies increasingly more effective. Students associated multiplicative procedures to rectangular arrangement and were able to apply multiplication properties in the calculation of the products they had to effect.

As the size of the number increased, it was noticed that most of the pairs, which presented a correct result, used multiplication with the algorithm, possibly because it is a more reliable and simple procedure for the students.

The fact that these students aren’t aware of the algorithm composed of two numbers in the multiplier conditions neither the construction of their own procedures nor the correct solving of the problem.

Keywords: Learning multiplication; Calculation strategies; Mental calculation; Algorithm.

Agradecimentos

Quero deixar uma palavra de agradecimento e apreço a todos os que me acompanharam e contribuíram para a realização da minha tese de mestrado.

Agradeço à minha orientadora Doutora Professora Lurdes Serrazina pela disponibilidade demonstrada ao longo de todo o trabalho, pelo encorajamento e colaboração, bem como pelas diversas sugestões e recomendações.

Agradeço aos meus pais por todo o incentivo e carinho que me deram.

Agradeço ao meu marido pela paciência que demonstrou e pelo contributo que me deu ajudando-me a continuar, especialmente nos momentos menos bons.

Agradeço à minha querida Mariana Pires que ao longo deste percurso me incentivou e deu coragem para continuar.

Agradeço à minha sogra e ao meu primo Tiago pela colaboração, pelo apoio e por acreditarem que seria capaz.

Agradeço aos meus queridos alunos pela participação, companheirismo e amizade, não esquecendo o trabalho que realizaram sempre com empenho e dedicação.

Agradeço à Câmara Municipal da Amadora, pela bolsa que me atribuiu para a realização desta tese de Mestrado.

E por fim, agradeço à minha grande amiga Luísa Pires que me apoiou e ajudou em todos os momentos e nunca me deixou desistir.

Um muito Obrigado a todos que diretamente ou indiretamente me ajudaram a concretizar este objetivo profissional.

Índice

Índice de Tabelas

Índice de Figuras

CAPÍTULO 1 - Introdução

1.1. Problema e objetivo do estudo

A turma que lecionava desde o 2.º ano vinha a demonstrar alguma dificuldade na utilização de procedimentos que envolvem o cálculo mental na resolução de problemas, recorrendo preferencialmente à utilização do algoritmo. Como afirma Ferreira (2012), “o ensino tem estado muito direcionado para o trabalho com os algoritmos das operações em detrimento do desenvolvimento do cálculo mental, da estimativa e da procura de diferentes estratégias para efetuar os cálculos” (p. 44). Neste sentido, pareceu-me relevante que o meu estudo incidisse nesse domínio e, em particular, na multiplicação, de forma a poder ajudar os alunos a construírem e desenvolverem o sentido de número, estratégias de cálculo mental e naturalmente orientarem esses saberes para a resolução de problemas com que são desafiados no dia-a-dia. Assim, defini como objetivo do estudo compreender que estratégias de cálculo mental os alunos do 3.º ano de escolaridade utilizam na resolução de problemas de multiplicação.

De modo a atingir este objetivo, defini as seguintes questões de investigação:

- Será que o tipo de números usados influencia as estratégias utilizadas pelos alunos, em situações multiplicativas?
- Será que os alunos desenvolvem estratégias de cálculo mental depois de já terem aprendido o algoritmo da multiplicação e se sim, como o fazem?
- Será que a utilização do algoritmo ajuda ou condiciona as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de problemas de multiplicação?

São estas as questões a que pretendo responder. Para isso desenvolvi com os meus alunos uma experiência de ensino, que consistiu na resolução de um conjunto de tarefas na sala de aula.

1.2. Pertinência e motivação do estudo

Continua a verificar-se nas escolas portuguesas que o trabalho com cálculo mental é pouco visível, favorecendo-se o trabalho com algoritmos.

Saber calcular mentalmente é uma competência que se deveria considerar fundamental, não só ao nível das aprendizagens escolares mas também ao nível da vida diária. A comunidade educativa tem demonstrado uma grande preocupação com a necessidade de os professores trabalharem com os seus alunos de modo que estes desenvolvam estratégias de cálculo mental.

Desenvolver competências de cálculo mental nos alunos exige método e persistência. Segundo Taton (1969), o ensino do cálculo mental sem método é de fraca utilidade. Pois o autor entende para que as capacidades de cálculo se preservem é necessário que o cálculo mental seja transmitido sistematicamente e com método recorrendo a aulas frequentes, mas breves e funcionando como um complemento ao cálculo escrito. Thompson (2009), defende que o cálculo mental não só desenvolve um bom sentido de número, como também promove o desenvolvimento de competências da resolução de problemas. Podemos verificar que existe uma intensa conexão entre o desenvolvimento do sentido de número, cálculo mental e resolução de problemas. Assim, para que exista um desenvolvimento mental relativamente às operações é necessário que os alunos compreendam as relações que os números têm entre si. Para que isto ocorra é necessário efetuar regularmente tarefas que envolvam o cálculo mental.

Na minha experiência enquanto professora, o grupo turma que acompanhei anteriormente, durante quatro anos, resolvia problemas com o auxílio do cálculo mental com grande rapidez solucionando-os com grande facilidade, sendo eles próprios autores das suas estratégias reflexivas e de exploração. Porém, este novo grupo, que iniciei no 2.º ano de escolaridade, a maioria dos alunos já só utilizava o algoritmo como única estratégia para a resolução de problemas, nomeadamente na adição e subtração. Desta forma, inquieta-me perceber se apenas a utilização do algoritmo como estratégia vai condicionar os alunos na resolução de problemas e consequentemente na facilidade de cálculo. O meu grande desafio será proporcionar experiências com significado diferente que contribuam para a aprendizagem dos alunos permitindo-lhes mais autonomia, melhorarem os seus conhecimentos e desenvolverem competências de cálculo.

Enquanto professora do 1.º ciclo, a minha grande preocupação é a de aprofundar os meus conhecimentos de forma a melhorar a minha prática pedagógica A conjuntura de ter tido recentemente dois grupos tão distintos, foi decisiva para a escolha da problemática. Como profissional quero poder ajudar os alunos a desenvolverem o seu sentido de número, o seu cálculo mental e levá-los a encontrar a melhor forma de utilizarem esses conhecimentos na resolução de problemas com que se deparam. Entendo que o domínio de estratégias de cálculo mental permite o desenvolvimento de estratégias pessoais de cálculo e, desta forma, possibilita e aumenta o leque de soluções que os alunos possuem para cada situação.

De acordo com Ribeiro (2013), quanto maior for o desenvolvimento nas estratégias de cálculo mental mais à vontade se sentirá a criança no uso de estratégias de cálculo *standartizadas* como os algoritmos.

O domínio do cálculo mental torna-se visível no dia-a-dia, se queremos fazer compras, estabelecer relações entre grandezas podermos optar pela utilização do cálculo mental em detrimento do cálculo escrito. Como afirmam Ponte e Serrazina (2000), "no dia-a-dia, a maioria dos cálculos que fazemos são mentais. Nem sempre se pode usar papel e lápis, nem é necessário. Em muitas situações a resposta não tem que ser exacta, mas basta uma aproximação" (p.156).

Os mesmos autores afirmam que, "aprende-se Matemática resolvendo problemas" (p. 55), podendo estes ser um ponto de partida para o trabalho de novos conceitos e ideias matemáticas, ou um modo de consolidar e aplicar esses conhecimentos (NCTM, 2007; Ponte & Serrazina, 2000; Ponte *et al.*, 2007).

1.3. Organização do estudo

Este estudo engloba cinco capítulos.

A primeira parte é constituída por dois capítulos. No primeiro capítulo, Introdução, identifico o problema, o objetivo, a pertinência e motivação que me levaram a desenvolver o estudo, as questões de investigação e a estrutura do trabalho.

No segundo capítulo é apresentado o enquadramento teórico que se foca no processo de aprendizagem da multiplicação em alunos do 3.º ano de escolaridade, abordando diversos temas: sentido de número, multiplicação no contexto do sentido de número, problemas multiplicativos, sentidos da multiplicação, cálculo mental e algoritmo.

A segunda parte está focada unicamente no terceiro capítulo, metodologia do trabalho de investigação utilizada. Assim, são descritas as opções metodológicas, a caracterização do contexto escolar e participantes, a recolha de dados, as tarefas desenvolvidas pelos alunos e os modos de análise de dados utilizados no estudo.

Na última parte, englobo o quarto capítulo, análise e discussão dos resultados, e o quinto capítulo, considerações finais sobre o estudo.

No quarto capítulo analiso e discuto os resultados apresentados contemplando as tarefas realizadas pelos alunos, assim como as estratégias utilizadas e a sua evolução, as dificuldades sentidas e a partilha dos conhecimentos construídos pelos alunos.

O quinto capítulo está reservado às considerações finais onde apresento as conclusões do estudo a partir de uma reflexão sobre diversos aspetos relacionados com o objetivo do estudo e as questões de investigação. São ainda inventariadas outras questões que possam ser pertinentes para estudos futuros.

CAPITULO II – Revisão da Literatura

Neste capítulo, irei fazer uma revisão da literatura associada ao sentido de número, e à multiplicação, nomeadamente ao cálculo mental, ao algoritmo e à resolução de problemas.

2.1. Sentido de número

Ao longo dos séculos a educação foi sofrendo grandes mudanças. Nas décadas de 40 e 50 do século passado, o ensino da matemática caracterizava-se por ser um "ensino tradicional", baseado na memorização e mecanização de procedimentos. Porém, não se verificaram resultados significativos com a utilização desta forma de ensino (Ponte, 2004).

Mais tarde, nos anos 90, surgiu uma grande mudança no ensino quando se percebeu que os alunos apresentavam resultados mais baixos nas tarefas que exigiam maior raciocínio, flexibilidade e espírito crítico e melhores resultados quando as tarefas eram mecanizadas (Ponte, 2004). A escola estava centrada no conhecimento do professor, não havia muito espaço para a inovação e originalidade dentro da sala de aula. Nesta base de ensino os alunos não participavam na discussão/explicação dos procedimentos e os resultados obtidos, apenas reproduziam um conjunto de regras aprendidas.

Somente nos finais do século XX se começou a valorizar e alargar a investigação sobre a aprendizagem, quando se compreendeu que seria importante desenvolver métodos de forma a permitir que o aluno construísse o seu próprio conhecimento, sendo um sujeito cooperativo e ativo nesse processo de construção (Mendes, Brocardo & Oliveira, 2013).

Neste sentido, Carvalho e Gonçalves (2003) partindo do pressuposto que a aprendizagem é um processo em permanente construção, defendem que os alunos desenvolvem uma grande parte do seu conhecimento recorrendo aos seus próprios procedimentos, sendo de extrema importância o professor observar a interação dos alunos com as tarefas que lhe são propostas.

Num passado recente a matemática estava mais associada ao raciocínio da aritmética baseada no saber da tabuada e como fazer contas, embora ainda se note essa influência em algumas salas de aula, já "são vários os organismos nacionais e estrangeiros que recomendam, a necessidade de dar realce à compreensão e desenvolvimento do sentido de número e de operação" (Carvalho e Gonçalves, 2013, p.23).

Esta mudança de paradigma alterou o papel do professor que se tornou essencialmente orientador e facilitador da aprendizagem estimulando a descoberta do conhecimento pelo aluno através de tarefas e situações interessantes e motivadoras.

Neste contexto é fundamental que os alunos compreendam os números e as operações, que o currículo de Matemática do 1.º ciclo atribua um papel de grande relevância ao desenvolvimento de tarefas que valorizem o sentido do número nas mais variadas situações.

Em muitos países, tal como em Portugal, o sentido de número tem surgido em muitos programas de matemática por se considerar uma componente essencial, que se deve desenvolver na escola (Ponte e Sousa, 2010). Desde muito cedo os alunos devem começar a experienciar situações de aprendizagem que lhes permitam alargar as suas estratégias de cálculo para a resolução de problemas e consequentemente, lhes possibilitem desenvolver o seu sentido de número.

Desta forma, existe uma relação entre o sentido de número e o resultado do conhecimento que cada um possa ter ou conhecer sobre números e operações. O sentido de número terá surgido do termo *numeracia* e é empregado presentemente em vários documentos curriculares. Ter sentido de número requer uma compreensão global e flexível dos números e operações, uma boa compreensão dos números e das suas relações de forma a desenvolver estratégias eficientes para que cada um possa usar durante o seu trajeto de vida (Castro e Rodrigues, 2011), em substituição dos tradicionais procedimentos de cálculo rotineiros onde não havia uma grande preocupação com a compreensão dos números.

McIntosh, Reys e Reys (1992) deram um contributo decisivo para a divulgação desta ideia, que associam a uma compreensão geral dos números e operações. Na sua perspetiva, o sentido de número envolve, em especial, a capacidade e a disposição para utilizar o conhecimento dos números e operações de forma flexível para fazer julgamentos matemáticos e desenvolver estratégias eficazes para resolver problemas (McIntosh, Reys e Reys, 1992, p. 16, citado por, Ponte e Sousa, 2010).

Assim e porque se trata de resolução de problemas e de competências desenvolvidas ao longo da vida, o sentido de número deve ser trabalhado de forma intencional desde o pré-escolar. Para Abrantes (1999) é uma competência que se desenvolve ao longo de toda a vida.

Numa fase inicial, as construções próprias dos alunos, apoiadas no seu conhecimento informal, permitem o aparecimento na sala de aula de uma grande variedade de aprendizagens que devem ser valorizadas e utilizadas como meio de aprendizagem.

Para alguns autores o sentido do número "varia de criança para criança, dependendo do que para ela tem significado e, em grande parte, da maior ou menor familiaridade com contextos numéricos", e surge associado à construção de uma trajetória de aprendizagem (Castro e Rodrigues, 2011, p. 12). Para Mendes, Brocardo e Oliveira (2013) desenvolver o sentido de número surge associado à construção de uma trajetória de aprendizagem, como definida por Simon (1995). Como é afirmado pelo NCTM (2007):

> Ao longo dos primeiros anos, os professores deverão ajudar os alunos a fortalecer o sentido de número, transitando do inicial desenvolvimento das técnicas de contagem fundamentais para conhecimentos mais aprofundados acerca da dimensão dos números, relações numéricas, padrões, operações e valor de posição (p.91).

Assim, os professores devem valorizar constantemente as aprendizagens que os mais novos fazem mesmo que numa fase ainda precoce. Ao longo do seu percurso escolar os alunos ao realizarem diversas tarefas que implicam os números, desenvolvem consequentemente uma agilidade de pensamento sobre os números e um conhecimento profundo do sentido de número (NCTM, 2007).

De acordo com National Assessment of Educational Progress (NAEP) a maioria das crianças faz os cálculos corretamente, mas depois revela grande dificuldade em fazer a sua interpretação. No entanto, essa interpretação dos números pode ser constantemente reforçada pelas suas experiências, sendo importante que aprendam a interpretar os números, de forma a funcionar como apoio para as suas futuras aprendizagens. Pois, o sentido do número passa por uma grande flexibilidade com os números que só é possível com grande trabalho associado a uma grande multiplicidade de situações de aprendizagem (Carvalho e Gonçalves, 2013).

Neste sentido, Reys (1994) defende, que o sentido do número é um procedimento progressivo de maturação que se desenvolve a partir da experiência e conhecimento, e não um procedimento limitado.

Segundo Freudental e Walle (citados por Gonçalves, 2003), "um aspeto importante para a compreensão dos números, passa pela tomada de consciência dos múltiplos usos do número no mundo que os rodeia" (p.20). As crianças começam logo por contar objetos que estão à sua volta, no seu dia-a-dia, desde os rebuçados que têm, o número de degraus, e é através destas repetições que começam a construir conceções numéricas (Pires, Colaço, Horta & Ribeiro, 2013). Para estas autoras, apenas com um sentido de número bem desenvolvido as crianças estão preparadas para aprender matemática com compreensão (Pires, Colaço, Horta & Ribeiro, 2013).

Assim, a discussão/reflexão dos procedimentos na sala de aula devem conduzir os alunos à compreensão dos diversos significados das operações e dos números.

Para McIntosh, Reys e Reys (1992), o sentido do número refere-se à capacidade geral de uma pessoa de compreender o número e as suas operações, bem como as suas habilidades e tendências para utilizar este conhecimento de forma flexível, para tomar decisões matemáticas e desenvolver estratégias úteis para lidar com números e operações.

Desta forma, o sentido de número, embora seja um conhecimento que se possui sobre números e operações, também se relaciona com a eficácia e a preferência que cada um apresenta na utilização desse conhecimento, de forma a encontrar melhores estratégias de cálculo. "O sentido do número envolve, assim, a compreensão do modo como os números se relacionam entre si, da possibilidade de diferentes representações dos números e dos significados associados através de diferentes operações" (Anghileri, 2001 citado por Tomás, 2014, p. 17).

No anterior Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) o sentido de número enquadra-se no tema números e operações, sendo um dos objetivos de aprendizagem. Ainda neste programa as primeiras situações de aprendizagem devem

> "contemplar a exploração dos processos de contagem utilizados pelos alunos, associados a diferentes possibilidades de estruturar e relacionar os números, contribui para a compreensão das primeiras relações numéricas. Estas relações são estruturantes na compreensão das primeiras operações aritméticas e, além disso, são pilares para o desenvolvimento do sentido de número nos seus múltiplos aspetos" (p. 13).

Os Princípios e Normas para a Matemática escolar (NCTM, 2007) consideram que o principal objetivo relacionado com o tema Números e Operações é "ajudar os alunos a desenvolver o sentido do número, o que engloba:

- Compreender números, formas de representar números, relações entre números e sistemas numéricos;
- Compreender o significado das operações e o modo como elas se relacionam entre si;
- Calcular com destreza e fazer estimativas plausíveis" (NCTM, 2007, p.172).

Muitos autores consideram o sentido de número como um conhecimento que está associado à destreza com os números e com as operações devendo ser trabalhado desde muito cedo, mesmo antes de uma aprendizagem formal, apresentando-se como um processo evolutivo e progressivo que se desenvolve de modo gradual, ao longo de toda a vida (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999; Castro e Rodrigues, 2008; McIntosh, Reys e Reys, 1992).

2.2. A multiplicação no contexto do sentido do número

No contexto do sentido do número a abordagem didática ao estudo da multiplicação deve fundamentar-se em dois aspetos principais. O primeiro está relacionado com os contextos, uma vez que estes devem possibilitar e promover uma exploração dos conteúdos matemáticos. O segundo refere-se à progressão de níveis que, não sendo estanques, devem conduzir a aprendizagem desta operação (Dolk & Fosnot, 2001; Treffers & Buys, 2001 referido por Rocha e Menino, 2009).

O Programa de Matemática do 1.º ciclo (2007) refere a importância de compreender as operações aritméticas. O Programa atual (MEC, 2013) salienta que a partir do 2.º ano, se deve iniciar a multiplicação com recurso a adições sucessivas e associado à multiplicação está a aprendizagem e memorização das tabuadas.

Para o anterior Programa do Ensino Básico (ME, 2007), a aprendizagem da operação de multiplicação inicia-se no trabalho que decorre na sala de aula desde o pré-escolar, onde as crianças vivenciam situações de aprendizagem e compreensão desta operação. A partir do 3.º ano é importante que os alunos possuam o conhecimento do conceito da multiplicação e as suas propriedades. Assim, os alunos são conduzidos a "saber o porquê", essa compreensão deve ser procurada no momento da sua aprendizagem e não, em situações futuras. "Os alunos devem compreender conceitos, algoritmos, procedimentos e relações, e perceber a Matemática como uma disciplina lógica e coerente" (p.4).

Ao longo da aprendizagem da multiplicação pretende-se que os alunos gradualmente progridam da utilização de adições sucessivas para uma estrutura do pensamento multiplicativo, "ao nível das ideias matemáticas sobre a multiplicação pretende-se com esta sequência que os alunos abandonem progressivamente a ideia de adição sucessiva e evoluam para um raciocínio multiplicativo. Pretende-se, igualmente, que usem as propriedades da multiplicação para calcular produtos" (Mendes, Brocardo, & Oliveira, 2011, p. 9).

Mendes, Brocardo e Oliveira (2011, 2013), assim como Day e Hurrell (2015) consideram que nos primeiros anos os alunos começam por explorar a multiplicação através da adição sucessiva de parcelas iguais e só nos níveis seguintes (3.º ano) é que surge um pensamento multiplicativo e, eventualmente, proporcional e raciocínio algébrico.

Numa fase inicial, os alunos devem experimentar tarefas que os possibilitem utilizar situações que levem à descoberta da adição repetida. No entanto, numa fase mais avançada deve-se procurar contextos de forma a descobrirem a multiplicação como área ou proporção usando uma correspondência numa linha numérica dupla (Mendes, Brocardo, & Oliveira, 2011).

No entendimento das autoras o contexto influencia a forma como os alunos aprendem a multiplicação, assim as tarefas devem basear-se nas vivências dos alunos, levando-os a aperfeiçoar o desenvolvimento do seu conhecimento de matemática.

Há autores que defendem que a sua compreensão da multiplicação evolui quando são colocados perante contextos que fazem emergir aspetos fundamentais: as ideias, as estratégias e os modelos. No início da aprendizagem da multiplicação é essencial explorar diversas situações associadas a esta operação, destacando as que correspondem à repetição de grupos iguais, sentido aditivo da multiplicação (Mendes, Brocardo & Oliveira, 2013).

Os contextos, a variedade de experiências vividas pelos alunos no seu quotidiano e o tipo de tarefas (lineares, de grupo e retangulares), proporcionam um maior desenvolvimento do aluno na multiplicação.

As estruturas lineares estão ligadas a procedimentos de cálculo de adição repetida. As estruturas de grupo também relacionadas com procedimentos de adição repetida, mas em contextos diferentes, já as estruturas retangulares estão ligadas a procedimentos multiplicativos (Rocha e Menino, 2009).

Day e Hurrell (2015) referem que os alunos ao representarem a multiplicação através de um modelo retangular, proporcionam uma explicação reveladora de "particionamento de números e incentivam a uma compreensão da magnitude dos números de uma maneira muito visual" (p. 20), assim, como também estimula a aplicação de algumas propriedades, nomeadamente a distributiva

"A compreensão das propriedades matemáticas, a propriedade comutativa e associativa, pode tornar mais evidente o sentido de número e, muitas vezes, os alunos, intuitivamente, aplicam as propriedades aritméticas nos procedimentos inventados para calcular" (Ferreira, 2011, p. 32).

O desenvolvimento da aprendizagem da multiplicação é defendido por vários autores e orientações curriculares, em que nos primeiros anos, se dá maior relevância ao desenvolvimento de situações associadas à multiplicação evidenciando a repetição de grupos iguais. Posteriormente, 3.º ao 5.º ano, já há um conhecimento mais profundo desta operação aplicando-se cada vez mais a números com maior complexidade.

Ao propor-se aos alunos uma situação problemática deve-se propor que explorem conceitos e propriedades, que experimentem e partilhem conclusões e pensamentos.

Assim, torna-se evidente a importância do aluno recorrer aos seus próprios métodos, às suas estratégias de resolução, e ao confronto dos procedimentos utilizados com os dos colegas.

A aula de matemática deve ser encarada como uma partilha de aprendizagens sobre uma prática intelectual, onde os alunos devem ter um espaço para a discussão e partilha de resultados quer em pequenos grupos quer na turma como um todo (Cebola, 2002).

Mendes, Brocardo & Oliveira (2011, 2013), assim como Day e Hurrell (2015) indicam que os alunos evoluem gradualmente de procedimentos de contagem e aditivos para procedimentos multiplicativos, baseados nas propriedades. Defendem que, atualmente, os alunos devem aprender matemática não através de regras impostas, mas através da compreensão e participação ativa do aluno, a raciocinar, a fazer conjeturas matemáticas e a partilhar de experiências com o grupo. A discussão e a partilha dos procedimentos pelos alunos é um processo importante, sendo "aulas de carácter construtivista viradas para a construção do sentido do número e para uma matemática com sentido" (Cebola, 2002, p. 237).

A utilização do modelo retangular na aprendizagem da multiplicação revela-se um procedimento muito eficaz que incentiva os alunos a "representar e resolver problemas que envolvem a multiplicação usando estratégias mentais e escritas eficientes" (Ancara, 2015, citado por Day e Hurrell, 2015, p. 20).

Os autores acreditam que o modelo de matriz é fundamental para os alunos compreenderem não só o "como" da multiplicação, mas também explica o "porquê", permitindo aos alunos compreender e não mecanizar o algoritmo da multiplicação.

Mendes, Brocardo & Oliveira (2011, 2013), consideram que a evolução dos procedimentos não se manifestam do mesmo modo para todos os alunos, alguns necessitam de estar mais tempo num determinado procedimento, o que pode estar relacionado com as tarefas propostas ou pelo contexto. Cebola (2002) refere que o aluno tem uma importância fundamental na construção do seu conhecimento, devendo considerar-se o seu próprio ritmo e permitir, sempre que necessário, a utilização de materiais manipuláveis para a concretização das tarefas. Para Day e Hurrell (2015) a manipulação de materiais pelos alunos é um factor importante para a compreensão das tarefas.

Para muitos autores os diferentes contextos têm um papel essencial na aprendizagem da multiplicação ora porque incluem elementos diretamente ligados com a estrutura multiplicativa que envolvem estruturas lineares, como de grupo ou retangulares porque se desenvolvem aplicando as propriedades da multiplicação acabando por facilitar o cálculo. Também, Day e Hurrell (2015), recomendam que os alunos não devem memorizar procedimentos, mas refletirem e encontrarem estratégias diferentes para a resolução das tarefas de multiplicação no 3.ºano.

Existe uma profunda relação entre o desenvolvimento do sentido de número, cálculo mental e resolução de problemas. Em Portugal, a resolução de problemas, tal como o raciocínio matemático e a comunicação matemática, foram compreendidas como capacidade matemática essencial e transversal a toda a aprendizagem da Matemática (ME, 2007).

"Um problema é uma dificuldade, não trivial, que se pretende ultrapassar" (p. 30). A noção de problema, no entanto, pode ser encarada de diversas maneiras. Determinados autores consideram a própria tarefa como um problema, enquanto outros, apontam para a conceção que a pessoa faz quando confrontada com uma determinada situação (Santos e Ponte, 2002).

A resolução de problemas pressupõe a realização de uma tarefa, da qual ainda não se conhece o meio para a sua resolução. Os alunos, normalmente, constroem novas aprendizagens matemáticas através da exploração dos seus próprios conhecimentos.

Neste sentido, a resolução de problemas permite ao aluno "realizar conjecturas, relacionar os conceitos, generalizar, estimular os procedimentos num contexto significativo, tomar uma atitude reflexiva e desenvolver a capacidade de raciocínio e o pensamento matemático" (Serrazina, s.d, p.1). O professor deve criar um ambiente de partilha de procedimentos, discussão, com o intuito de desenvolver a capacidade de comunicação dos alunos.

De acordo com Princípios e Normas para a Matemática escolar NCTM (2007), resolver problemas permite aos alunos "adquirir modos de pensar, hábitos, de persistência e curiosidade, e confiança perante situações desconhecidas, que lhes serão muito úteis, também fora da aula de matemática" (p.57). Para a criança possuir uma grande competência na resolução de problemas poderá trazer benefícios no seu dia-a-dia.

Também para o Programa de Matemática do ensino básico (ME, 2007) considera a capacidade de resolução de problemas uma das principais capacidades a desenvolver nos alunos.

> A resolução de problemas é uma atividade privilegiada para os alunos consolidarem, ampliarem e aprofundarem o seu conhecimento matemático. Neste processo, os alunos devem compreender que um problema matemático, frequentemente, pode ser resolvido através de diferentes estratégias e dar atenção à análise retrospetiva da sua resolução e apreciação das soluções que obtêm (ME, 2007, p. 6).

Os problemas que sejam desafiadores para os alunos podem conduzi-los a explorar diversos procedimentos, representações e raciocínios matemáticos que permitirão a oportunidade de aumentar os conceitos matemáticos. Pois, possibilitam que o aluno se interrogar e faça uma reflexão sobre a tarefa.

Segundo Princípios e Normas para a Matemática escolar (NCTM, 2007), os problemas são uma boa “oportunidade de consolidar e ampliar os conhecimentos e podem, ainda, estimular a aprendizagem da Matemática.” Refere ainda, que para os alunos mais novos, “a maioria dos conceitos matemáticos poderá ser introduzida através de problemas que se reportem a ambientes que lhe são familiares” (p. 57). Os alunos conseguem reconhecer e articular melhor diversas situações que façam, preferencialmente, parte do seu contexto diário, pois identificam informação importante sobre o problema.

O ensino de Matemática considera-se muito mais estimulante à medida que se utiliza de problemas que desafiam os alunos a pensar e a comunicar matematicamente, em vez de apenas reproduzirem regras e métodos exteriores à sua realidade.

Quando resolvem problemas, os alunos podem encontrar novos acontecimentos através de uma grande diversidade de procedimentos, destacando a curiosidade pelos entendimentos matemáticos desenvolvendo assim a capacidade de determinar as situações que lhes são propostas. No entanto, é fundamental refletir como os alunos podem desenvolver as suas capacidades matemáticas, quando propomos aos alunos para solucionaram um problema (Ponte, 1992).

Neste sentido, Princípios e Normas para a Matemática escolar (NCTM, 2007), salientam a importância do professor na escolha dos problemas, “ao analisar e adaptar um determinado problema, ao antecipar as ideias matemáticas, os professores podem decidir se determinados problemas poderão ou não ajudar a sua turma a atingir os objetivos propostos” (p. 58)

2.2.1. Problemas multiplicativos

Carvalho e Gonçalves (2003) referem que na aprendizagem da multiplicação é importante que os alunos experienciem uma grande diversidade de problemas que apresentem diferentes tipos de situações. “Que tenham oportunidade de resolver uma grande variedade de problemas que embora mobilizem a mesma operação tenham uma estrutura diferente” (p.24).

A tabela 1 representa uma classificação de problemas de multiplicação.

Tabela 1. *Diferentes tipos de problemas de multiplicação (adaptada Carvalho e Gonçalves, 2003).*

Tipo de Problemas	**Problemas**
Grupos equivalentes	O Pedro tem 5 carteiras com 6 cromos cada. Quantos cromos tem?
Razão	Rita anda 6 km numa hora. A esse ritmo, quantos quilómetros percorre em 5 horas?
Preço	Um relógio custa 5 euros. Quantos custam 3 relógios?
Comparação multiplicativa	O prédio onde mora o Rui tem 11 metros de altura e o prédio onde mora a Mariana é duas vezes mais alto. Qual é a altura do prédio onde mora a Mariana?
Disposição retangular	Se na sala de teatro tivermos 4 filas cada uma com 5 cadeiras, quantas cadeiras são ao todo?
Produto cartesiano/ combinatório	Numa festa estão 4 rapazes e 5 raparigas a dançar. Quantos pares diferentes se podem formar?

2.2.2. Níveis de cálculo

As operações aritméticas devem surgir em contextos reais de resolução de problemas, que possibilitem relacionar diversas situações com os sentidos da multiplicação. O contexto do problema é fundamental para despertar a curiosidade do aluno para os vários sentidos da multiplicação, e permitir que os alunos façam relações e descobertas.

O Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), designam que os alunos devem "efetuar e compreender a multiplicação nos sentidos aditivo e combinatório" (p.16 e p. 8), logo a partir do 2.º ano de escolaridade.

Rocha & Menino (2009) consideram que a adição sucessiva de parcelas iguais está associada à multiplicação, no sentido aditivo. Nesta fase os alunos adicionam sucessivamente parcelas iguais para resolver problemas. Contudo, os alunos começam a desenvolver o conceito de multiplicação, quando compreendem que quatro mais quatro corresponde a duas vezes o quatro, e mais tarde utilizam de modo flexível as propriedades da multiplicação para calcular. O aluno domina a multiplicação quando "percebe e usa de forma inteligente factos, relações e propriedades na resolução de problemas da multiplicação e quando percebe os diferentes sentidos desta operação" (Rocha e Menino, 2009, p.111). Neste sentido, o raciocínio multiplicativo é mais do que a adição repetida de parcelas iguais.

Dolk e Fosnot (2001), consideram que a aprendizagem da multiplicação se desenvolve desde o pré-escolar, por meio de três níveis de cálculo: cálculo por contagem, cálculo estruturado e cálculo formal.

- Cálculo por contagem corresponde ao primeiro nível da multiplicação, os alunos resolvem problemas através da repetição formal de adições, aqui a multiplicação assenta na contagem. Quando os alunos, ainda recorrem à adição de parcelas iguais. Por exemplo, quando se pede aos alunos para calcular as carteiras dispostas em 5 filas, sabendo que cada fila tem 3 carteiras, o previsto é que efectuem cálculos multiplicativos, mas se recorrerem a adição de parcelas iguais, ainda se encontram no nível de multiplicação por contagem. Neste sentido, é importante incentivar os alunos a irem mais além da contagem de um em um, e ajudá-los a transpor para o nível seguinte, cálculo por estruturação.

- Cálculo estruturado corresponde à utilização de modelos adequados sem recorrer à contagem. Neste nível, estabelece-se uma relação entre a quantidade que se repete e um determinado número de vezes, corresponde à ideia de quantas vezes. Observando o exemplo descrito acima, pode ser resolvido com a estrutura de 5 x 3 ou 3 x 5 (propriedade comutativa da multiplicação), num contexto de estrutura retangular.
- Cálculo formal corresponde ao cálculo de produtos entre dois números, estabelecendo relações de produtos previamente conhecidos, propriedades da operação e a relações numéricas, sem a necessidade de utilizar materiais estruturados. Assim, os alunos poderão recorrer à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição para calcular 6 x 14= 6 x 10 + 6 x 4. Verifica-se uma crescente capacidade de raciocinar por parte dos alunos.

No entanto, "os diferentes alunos não percorrem estes níveis em simultâneo, o que significa que, face a uma mesma tarefa, podem utilizar diferentes estratégias que traduzem diferentes níveis de aprendizagem da multiplicação" (Rocha & Menino, 2009, p. 111).

Segundo Mendes (2009), as estratégias que os alunos usam na resolução de tarefas indicam ao professor as limitações, ainda existentes, com os números e a forma de cálculo associado à multiplicação. As crianças desenvolvem a compreensão informal sobre as propriedades associativa e distributiva e são capazes de construir estratégias ricas matematicamente" (Baek, 2006, p. 246 citado por Mendes, p.87).

Para Brocardo, Delgado e Mendes, (2007) as tarefas propostas em torno da multiplicação devem-se basear na compreensão de conceitos e propriedades, ao longo de um determinado tempo considerável. A exploração da multiplicação inicia-se quando se trabalha a adição sucessiva de parcelas iguais. "A aprendizagem das tabuadas, embora correspondendo a um aspeto importante do estudo desta operação, está longe de ser tudo o que se deve saber" (IPS, 2010, p. 1).

2.3. Cálculo mental

Historicamente, sobretudo na primeira metade do século XX, o cálculo mental nem sempre foi valorizado encontrando-se quase ausente nos programas escolares, dando uma maior importância ao algoritmo para a resolução de problemas (Silva, 2005).

Atualmente, os currículos escolares de todo o mundo atribuem uma importância primordial ao trabalho realizado com os números. Também em Portugal, existem novos desafios com o aparecimento de um programa (ME, 2007) mais abrangente e generalizado a todo o ensino básico, que possibilita uma mudança de práticas, nomeadamente o desenvolvimento do sentido de número, a compreensão dos números e das operações e da capacidade de cálculo mental e escrito (Carvalho, 2011).

No Programa de Matemática do ensino básico (ME, 2007) verifica-se uma maior preocupação com o tema Números e operações onde são visíveis três pontos fundamentais: "(i) promover a compreensão dos números e operações, (ii) desenvolver o sentido do número e, (iii) desenvolver a fluência no cálculo" (ME, 2007, p. 7).

> É necessário proporcionar aos alunos situações diversas que lhes permitam desenvolver o cálculo mental. Para isso, devem ser trabalhadas diferentes estratégias de cálculo baseadas na composição e decomposição de números, nas propriedades das operações e nas relações entre números e entre as operações. Devem ser também praticadas na aula rotinas de cálculo mental, podendo este ser apoiado por registos escritos. Progressivamente, os alunos devem ser capazes de utilizar as suas estratégias de modo flexível e de seleccionar as mais eficazes para cada situação. É também importante que os alunos estimem resultados e ajuízem acerca da sua razoabilidade.

Apesar desta preocupação, o cálculo mental ainda não é uma prática generalizada nas escolas, onde nem sempre os alunos são incentivados a procurar diferentes estratégias para resolver tarefas e recorrem a procedimentos de reprodução de regras para calcular, correndo o risco de se esquecerem da sequência das etapas.

No nosso dia-a-dia, estamos em contacto com diversas situações matemáticas: gráfico, números, percentagens, etc…e para uma fácil interpretação desses dados, torna-se necessário que as crianças tenham o sentido de número e estratégias de cálculo mental bastante desenvolvidas. Para isso é fundamental que desenvolvam a competência de concretizar diversos cálculos recorrendo aos algoritmos escritos, à calculadora e ao cálculo mental (Albergaria & Ponte, 2008).

Ao contrário do cálculo algorítmico, o cálculo mental caracteriza-se pela construção e organização de determinadas regras que se adaptam aos números e aos conhecimentos ou preferências dos alunos. Assim, entende-se por cálculo mental um conjunto de procedimentos em que, uma vez analisados os dados a serem tratados, estes são articulados para permitir a escolha da melhor estratégia, obtendo resultados exatos ou aproximados, dependendo dos objetivos e da situação apresentada (Ralston, 2000).

O mesmo autor referiu anteriormente, a eliminação da resolução dos problemas de cálculo com recurso a algoritmos de papel e lápis levaria a que os alunos tivessem de recorrer exclusivamente ao cálculo mental e à calculadora. Esta mudança do paradigma reforçaria a colocação da ênfase no cálculo mental.

Para compreendermos isto será importante, no entanto, perceber o que é o cálculo mental. O cálculo mental é a forma mais complexa da matemática, pois necessita de uma grande flexibilidade na resolução de tarefas matemáticas e quanto mais desenvolvida for essa aptidão, maior se torna a capacidade da criança em realizar um raciocínio lógico de forma eficaz e rápida.

Neste sentido, os autores Cascalho, Ferreira e Teixeira (2014), consideram que para resolver problemas do quotidiano é essencial uma grande flexibilidade de cálculo mental. Esta flexibilidade faz com que o aluno mantenha uma maior proximidade com os números reflectindo-se favoravelmente no desenvolvimento da sua competência de cálculo.

Há autores que defendem que o cálculo é apenas um exercício da mente sem recorrer ao algoritmo escrito, e outros que por seu lado defendem que o cálculo mental não se restringe apenas à operação "de cabeça", mas sim em conjunto com o uso de papel e lápis.

Para Carvalho (2011), também a definição de cálculo mental não é unânime uma vez que podem ser utilizadas estratégias que levem a um resultado rápido e conciso, podendo no entanto, para cálculos intermédios recorrer-se ao uso do papel e lápis. Deste modo, alunos com um cálculo mental desenvolvido podem solucionar rapidamente uma variedade de tarefas e problemas.

Para Taton (1969) é "errado limitar o cálculo mental a operações efetuadas de cabeça, uma vez que na realização de operações através de algoritmos por cálculo escrito, o cálculo mental também está presente. Salienta ainda que o cálculo escrito executado de memória não é mais do que uma forma de cálculo mental adaptado" (citado por Carvalho & Ponte, 2013, p.86).

Para Cascalho, Ferreira e Teixeira (2014), os alunos que na resolução de problemas utilizam apenas os algoritmos têm uma maior propensão a errar. Enquanto que, para Kamii e Dominick as crianças que usam os seus próprios procedimentos conseguem obter resultados mais positivos em relação aos que usam apenas os algoritmos (citado pelos autores Cascalho et al, 2014).

Para os alunos, a realização de tarefas que envolvam o cálculo mental incentiva-os a procurar procedimentos que englobam as propriedades dos números e das operações levando-os a um maior desenvolvimento no que respeita a compreensão numérica. Para este desenvolvimento deve realizar-se tarefas que dinamizem a utilização do cálculo mental, "pois estas ajudam as crianças a memorizar factos numéricos que são ferramentas essenciais no desenvolvimento do cálculo" (Cascalho, et al., 2014, p. 53). Nesta linha de pensamento, a realização contínua de tarefas baseadas no cálculo mental com recurso a lápis e papel, se necessário, ajuda a memorização dos factos numéricos essenciais.

Ribeiro, Valério e Gomes (2009) consideram o cálculo mental uma ferramenta de cálculo extremamente importante na abordagem aos números e à informação numérica. Caracterizada por:

a) trabalhar com os números e não com os algarismos;

b) usar as propriedades elementares de cálculo e as relações entre números tal como a propriedade comutativa, a propriedade distributiva e a noção de operação inversa;

c) implicar um bom desenvolvimento do sentido de número e um saudável conhecimento dos factos numéricos elementares;

d) permitir o uso de registos intermédios de acordo com a situação (p.8).

O cálculo mental permite aos alunos seguirem o seu próprio raciocínio na obtenção dos resultados dando-lhes autonomia para construírem os seus próprios procedimentos.

O ensino não deve ser considerado demasiado verbal, passivo e pouco desafiador para os alunos, mas antes uma proposta onde os alunos trabalhem e discutam para explicar as suas ideias e as suas escolhas, de forma, a que cada aluno possa entender o outro e refletir sobre as tarefas desenvolvidas.

Mardjetko e Macpherson (2007), salientam que é importante para os alunos discutirem os seus próprios procedimentos, que na maioria das vezes são espontâneos, possibilitando-os no futuro recorrer a um maior número de estratégias. Assim, deve ser dado ao aluno a oportunidade de construir os seus procedimentos para o cálculo mental, enquanto discutem e verificam a sua adequação à tarefa.

Deve-se dinamizar de forma sistemática a utilização do cálculo mental na sala de aula, de forma a estimular os alunos a desenvolver diversas estratégias. Em contexto de sala de aula a partilha, a discussão das tarefas usadas pelos alunos leva-os ao seu desenvolvimento mental, tendo como elemento primordial o professor (Carvalho, 2011).

Ponte e Serrazina (2000) defendem que “compreendemos mais facilmente as nossas ideias e argumentos matemáticos quando as articulamos oralmente ou por escrito” (p. 60). Nesta linha de pensamento, para ajudar os alunos a desenvolverem-se matematicamente o professor deve promover a interação dos alunos através da oralidade.

Sowder (1988) refere que o cálculo mental é a competência de executar operações com números inteiros com dois ou três dígitos, sendo indispensável para desenvolver a competência numérica. Um cálculo mental eficiente usa obrigatoriamente algoritmos diferentes dos que estão habitualmente ligados aos cálculos de papel e lápis (Cebola, 2002).

“Quanto maior for o desenvolvimento nas estratégias de cálculo mental mais à vontade se sentirá a criança no uso de estratégias de cálculo *standartizadas* como os algoritmos” (Ribeiro, Valério, & Gomes, 2009, p.11). Até os alunos que revelem maior dificuldade ao executarem diferentes tarefas, com persistência e normalidade conseguem alcançar resultados mais favoráveis na sua aprendizagem. Assim, torna-se fundamental estimular o interesse dos alunos para encontrarem diferentes estratégias na resolução de tarefas, para que não percam a sua espontaneidade utilizando apenas um meio de resolução, contribuindo para uma aprendizagem matemática mais diversificada.

2.4. Algoritmo

O que é um algoritmo?

Durante vários anos, os algoritmos foram considerados um processo de cálculo muito eficaz e vantajoso, como designam Brocardo, Serrazina e Kraemer (2003). As vantagens eram unicamente duas: ”a generalidade, porque o algoritmo pode utilizar quaisquer números, e a eficácia do algoritmo leva sempre à resposta correta, desde que se usem bem as regras, temos a certeza de chegar a um resultado correto” (Albergaria & Ponte, 2008, p. 95).

Na Matemática, logo desde muito cedo os alunos aprendem alguns algoritmos básicos, como o da adição, o da subtração, o da multiplicação e da divisão. Apresentando-se estes como métodos, com etapas bem definidas para descobrir o resultado de uma dada operação.

A escola durante muito tempo, centrava o seu trabalho no ensino dos algoritmos, um método de cálculo quase exclusivo para resolver as tarefas propostas. “Ainda há relativamente pouco tempo, os algoritmos escritos eram o único processo de cálculo que se encontrava à disposição de todos” (Albergaria & Ponte, 2008, p. 92). Porém, com a evolução tecnológica na sociedade a escola tende a adaptar-se e é obrigada a reflectir esta organização.

O valor dos algoritmos nos primeiros anos, no currículo da Matemática também tem sido muito discutido, porque ao longo dos tempos diversos estudos empíricos têm vindo a debater o seu papel na resolução de tarefas.

No nosso país, o algoritmo ainda tem um papel de destaque na resolução de problemas, contudo verifica-se alguma mudança no sentido de adiar a prática dos algoritmos para mais tarde (Brocardo & Serrazina, 2008).

Para Ponte e Serrazina (2000) os alunos devem primeiro compreender o significado das operações e só, posteriormente lhes ser apresentado o algoritmo de uma operação, não podendo os professores verem o algoritmo como o objetivo fundamental do ensino do cálculo aritmético. Pois o seu uso constante pode condicionar os alunos a encontrarem as suas próprias estratégias de cálculo.

Assim, o algoritmo é visto como um processo mecânico como a fase final do cálculo em coluna. Com este processo não é necessário pensar muito sobre o assunto, basta seguir o mesmo tipo de operação, na mesma ordem e segundo as mesmas regras (Cebola, 2002; Brocardo & Serrazina, 2008).

Para alguns autores os algoritmos são um elemento fundamental da matemática, no entanto defendem que não podem ser "apresentados de uma forma pronta", mas têm de ser desenvolvidos de forma natural para não limitar os procedimentos utilizados pelos alunos" (Fosnot& Dolt, 2001; Gravemeijer & Galen, 2003, citados por Rocha e Menino, 2009, p. 108).

O ensino baseado na memorização, o uso de exercícios repetidos, apresentados na forma de um conjunto de regras e procedimentos pré-estabelecidos não tem revelado resultados muito positivos. Carvalho (2005), reforça a ideia que os alunos que repetem mecanicamente procedimentos não são estimulados a raciocinar. Deste modo, os alunos não desenvolvem o sentido crítico em relação a uma determinada situação aprendem apenas a memorizar segundo um modelo.

Para Silva (s.d.), "a solução não é erradicar o cálculo que tem, naturalmente, o seu papel. Mas não reduzir toda a aprendizagem da Matemática à aquisição de técnicas de cálculo" (p.6).

A resolução de problemas com recurso à utilização de algoritmos de papel e lápis pode ser um de vários meios para resolver os problemas. Ralston (2000), refere que aprender aritmética mental oferece uma oportunidade ideal para esclarecer a ideia do que é um algoritmo. À medida que as crianças aprendem o cálculo mental elas vão desenvolvendo os seus próprios algoritmos mentais, alguns destes podem ser bastante complexos. Pedir às crianças que escrevam e expliquem os seus métodos oferece uma excelente oportunidade para introduzir algumas ideias algorítmicas.

Ralston (2000), com uma ideia mais desafiadora, propõe o abandono do ensino do algoritmo de papel e lápis nos primeiros anos de ensino, substituindo-o por um ensino que valorize o cálculo mental e a calculadora.

No entanto, com a aprendizagem precoce os algoritmos, não estamos a permitir que os alunos aprendam menos, estamos a levá-los a aprender mais. "Estamos a levá-los a matematizar, a pensar como os matemáticos e a olhar os números antes de calcular" (Fosnot & Dolk, 2001 citado por Cebola, 2002, p. 238).

Rocha e Menino (2009) também fazem alusão de que a prática de ensino em Portugal, prende-se com uma introdução antecipada dos algoritmos e das operações, limitando os alunos a um procedimento exclusivo para resolução de problemas, não estimulando a sua capacidade para usarem um pensamento flexível e construtivo.

Se por um lado as fórmulas algorítmicas permitem organizar o pensamento, registá-lo e chegar à resposta para um problema, por outro lado o aluno apenas conhece uma única estratégia de cálculo de modo automático e sem compreender exactamente o que está a fazer. Neste sentido, muitos autores evidenciam as vantagens de antes de ser apresentado um cálculo formal escrito sejam desenvolvidas estratégias de cálculo mental.

Mardjetko e Macpherson (2007), consideram que se deve dar menos importância ao ensino do algoritmo de papel e lápis e mais destaque a um crescente desenvolvimento de estratégias espontâneas dos alunos para o cálculo mental. Geralmente, os alunos que têm maior flexibilidade de cálculo conseguem ter uma maior compreensão dos conceitos matemáticos e, consequentemente têm melhores resultados na sua aprendizagem.

No Programa de Matemática do ensino básico (ME, 2007) já se verificava uma maior preocupação com a aprendizagem dos algoritmos, contemplando os algoritmos com compreensão valorizando o sentido do número progressivamente nas quatro operações. “Assim, num primeiro momento, os alunos devem ter a possibilidade de usar formas de cálculo escrito informais, de construir os seus próprios algoritmos ou de realizar os algoritmos usuais com alguns passos intermédios” (p. 14).

Os alunos que nas salas de aula utilizam somente estratégias de algoritmo escrito, revelam maiores dificuldades em fazerem novas descobertas, em corrigirem os erros e naturalmente demoram mais tempo a desenvolver estratégias mentais.

Brocardo, Serrazina e Kraemer (2003), consideram que a utilização dos algoritmos deve fazer parte do ensino da Matemática, devido à capacidade de generalidade e eficácia dos algoritmos. Se por um lado, são válidos para quaisquer números que usamos para calcular, também desde que se usem bem as regras, o algoritmo pode conduzir sempre à solução correta. No entanto, o seu ensino não deve focalizar-se somente na utilização destes procedimentos rotineiros, e promover uma diversidade de experiências aos alunos.

Para Kamii e Dominick (1998), os algoritmos apresentam inconvenientes porque limitam o pensamento do aluno, pois trata-se de procedimentos mecanizados que podem interferir no seu raciocínio matemático.

No entanto, Clarke (2005, citado por Mendes, 2012, p. 125). Apresenta algumas razões que justificam a existência da grande influência do algoritmo na sala de aula. Assim, revela que os algoritmos:

> – têm sido um conteúdo tradicional no ensino da matemática elementar, em todo o mundo desde e há muitos anos;
> – são poderosos na resolução de determinados tipos de problemas, sobretudo os que envolvem números com muitos algarismos;
> – são sínteses de procedimentos gerais de equações envolvendo as propriedades distributiva e associativa;
> – são automáticos e podem ser ensinados sem ter que se analisar o que os suporta;
> – são rápidos, conduzindo diretamente a uma resposta;
> – fornecem um registo escrito do cálculo, possibilitando, aos alunos e professores, localizar eventuais erros;
> – podem ser ensinados;
> – para o professor, são fáceis de gerir e de avaliar.

Para outros autores a aprendizagem dos algoritmos tradicionais impede que os alunos desenvolvam fluência de cálculo. Por isso, torna-se fundamental que durante o processo de aprendizagem matemática os alunos “tenham liberdade para inventar as suas próprias estratégias e procedimentos” (Brocardo et al., 2003, p. 14).

Neste sentido, desde o início da escolaridade, os alunos devem ser estimulados a construírem os seus próprios instrumentos para darem uma resposta à resolução de problemas diários. “ Na vida de todos os dias, o recurso aos algoritmos tradicionais é cada vez menos importante”, sendo imprescindível, cada vez mais, apelar “à capacidade de estimar e de calcular de modo flexível” (Brocardo et al., 2003, p. 14).

Para Clarke (2005), só depois de o aluno fortalecer as estratégias de cálculo mental é que se deverá introduzir o cálculo algorítmico (Mendes, 2012).

CAPITULO III - Metodologia

Tendo em conta a natureza do problema em estudo, apresentam-se neste capítulo as opções metodológicas seguidas, a escolha e caracterização dos participantes, os métodos de recolha de dados, os procedimentos utilizados e, por fim, as tarefas desenvolvidas.

3.1. Opções metodológicas

Uma investigação no campo educacional, de acordo com Pacheco (1995) caracteriza--se por um procedimento, de aquisição de conhecimentos, organizado e flexível que possibilita a compreensão e explicação de diversos fenómenos educativos.

A presente investigação pretende contribuir para uma melhor compreensão sobre os procedimentos de cálculo mental que os alunos do 3.º ano escolaridade usam na resolução de problemas de multiplicação, sendo este definido como objetivo geral do trabalho.

Tendo em conta os objetivos do estudo, a investigação seguiu uma metodologia de natureza qualitativa. Segundo Pacheco (1995), a investigação qualitativa proporciona ao investigador "um conhecimento intrínseco aos próprios conhecimentos possibilitando-lhes uma melhor compreensão do real, com a subjetividade que está sempre presente, pela conjugação do rigor e da objetividade na recolha, análise e interpretação dos dados" (p.17).

A metodologia qualitativa, de acordo com Bogdan e Biklen (1994) é uma abordagem que envolve cinco características, não sendo necessário uma utilização de todas simultaneamente:

1. O investigador é a ferramenta essencial na recolha de dados, sendo o ambiente natural a fonte direta dessa recolha. Desta forma, o investigador passa grande parte do tempo na escola no sentido de compreender e responder à questão levantada. Existe uma preocupação com o contexto.
2. Os dados recolhidos pelo investigador são fundamentalmente de caracter descritivo "em forma de palavras ou imagens e não de números". Por vezes, os

dados compreendem inúmeras narrativas que o investigador não reduz a símbolos numéricos. “Os dados incluem transcrições de entrevistas, notas de campo, fotografias, vídeos, documentos pessoais, memorandos e outros registos oficiais” (Bogdan & Biklen, 1994, p.48). Também Rosa (2012), refere que todos os detalhes e informações recolhidas na pesquisa qualitativa são fundamentalmente descritivos e, por vezes, o investigador necessita de seleccionar alguns para se focalizar e analisar, embora todos os dados sejam considerados relevantes no estudo.

3. Os investigadores revelam maior interesse pelo processo do que pelos resultados ou produtos.
4. A análise dos dados é feita pelos investigadores de forma indutiva. “As abstrações são construídas à medida que os dados particulares que foram recolhidos se vão agrupando” (Bogdan & Biklen, 1994, p.50). Pelo que, a partir de diversas particularidades, o investigador chega a um conhecimento mais geral.
5. Nesta abordagem o significado tem uma importância extremamente relevante. “Os investigadores que fazem parte deste tipo de abordagem estão interessados no modo como diferentes pessoas dão sentido às suas vidas” (Bogdan & Biklen, 1994, p.50).

Chizzotti (2003) considera que o termo qualitativo está intimamente relacionado com a interação dos participantes e com os acontecimentos que se desenrolam no local onde decorre a pesquisa, e a forma como o investigador interpreta e compreende os significados dessas interações. Neste sentido, sendo a investigadora professora da turma há dois anos considerei que existe um conhecimento e uma relação de cumplicidade entre os intervenientes que proporciona uma maior interação e facilidade de diálogo no contexto diário de sala de aula.

Para Silva (2013), uma metodologia qualitativa é uma designação genérica que “representa um modo interactivo de recolha e análise dos dados e o recurso a variadas fontes” (p.78). Neste sentido, enquanto investigadora serão aplicados diversos métodos e técnicas, como registos vídeo-áudio, observações em sala de aula bem como análise de documentos, para poder ter acesso a uma maior diversidade de detalhes e informações para melhor compreender os acontecimentos que forem surgindo e de forma indutiva poder criar novos conhecimentos.

Trata-se de uma investigação educacional de natureza empírica uma vez que a observação ocorre num contexto natural, tornando-se possível recolher os dados da pesquisa com os participantes através de observações em situação de sala de aula.

Para Abar (2015) o investigador "observa e interage com os sujeitos da pesquisa por um tempo prolongado, a fim de garantir a credibilidade dos dados que emergirão dessas observações e interações" (p.43). Durante o estudo o investigador mantém uma relação de grande proximidade com os participantes da investigação.

Na investigação realizada, tive uma postura enquanto observadora participante uma vez que intervim em determinadas situações sempre que foi pertinente.

3.2. Caracterização do contexto escolar e participantes

O estudo foi realizado numa Escola Pública do Ensino Básico – 1.º Ciclo, localizada no concelho da Amadora. Na escola existe uma turma do pré-escolar e 5 turmas do 1.º ciclo.

Esta investigação desenvolveu-se, ao longo do ano letivo 2015/2016, numa turma do 3.º ano de escolaridade, com 20 alunos, 11 do sexo feminino e 9 do sexo masculino, com idades compreendidas entre os 7 e 8 anos. À exceção de uma aluna que nasceu no ano de 2007, todos os outros alunos nasceram no ano de 2008.

A maioria dos alunos frequentou o 1.º e 2.º ano juntos o que lhes permitiu estabelecerem laços de amizade e de relacionamento, existindo uma integração plena a nível de sala da aula e do recreio.

No âmbito da formação Pessoal e Social todas as crianças apresentam um nível normal de autoestima, já se identificando a si e aos outros como iguais membros de um grupo; têm já bem integrada a dinâmica da sala, que assenta numa construção cooperada.

De um modo geral, são alunos comunicativos, interessados pelas atividades escolares, meigos e motivados.

No que respeita à vida extraescolar dos alunos, revelam ser crianças que passam a maior parte do seu tempo livre em casa, onde vêem televisão, jogam computador ou brincam com amigos e familiares.

No âmbito familiar, no geral, têm famílias minimamente estruturadas ou, pelo menos, com a presença dos dois progenitores. A faixa etária dos pais situa-se entre os 27 e os 61 anos.
Numa análise profissional dos pais verifica-se que têm profissões muito diversificadas, incluindo-se bancários, operadores de caixa… Na sua maioria são muito participativos e presentes no percurso escolar dos seus educandos.
De modo geral é uma turma heterogénea em termos de desempenho escolar, ritmos de trabalho, comportamento, interesse e participação. Alguns alunos são pouco autónomos, necessitando de um grande apoio da professora para concretizar as tarefas solicitadas, enquanto outros são muito perspicazes e autónomos no desenrolar das suas aprendizagens.
Toda a turma foi englobada nesta investigação, uma vez que as tarefas implementadas faziam parte da nossa aprendizagem diária. Contudo, na primeira parte do trabalho somente foi possível recolher dados de 8 grupos (16 alunos), porque não estiveram todos presentes. Na última tarefa, já foi possível recolher dados dos 10 grupos (20 alunos).

3.3. Recolha de dados

Numa investigação qualitativa o investigador, de modo a tratar a problemática de forma naturalista e interpretativa, recorre a uma pluralidade de instrumentos na recolha de dados (Coutinho, 2011). Contudo é importante que essa recolha seja acompanhada por uma reflexão constante por parte do investigador.
De acordo com Bogdan e Biklen (1994), "o investigador passa uma quantidade de tempo considerável no mundo empírico recolhendo e revendo grandes quantidades de dados. Os dados carregam o peso de qualquer interpretação, deste modo, o investigador tem constantemente de confrontar as suas opiniões próprias e preconceitos com eles" (p.67). Neste sentido, o papel do investigador é construir o conhecimento e não fazer considerações sobre os dados recolhidos.
Durante o estudo foram utilizados como instrumentos de recolha de dados, a observação participante das aulas, apoiada pelos registos áudio e vídeo das aulas, incluindo o trabalho a pares e as discussões, recolha documental que incluiu os

registos das resoluções dos alunos das tarefas, os materiais de apoio às aulas, artigos, Programa e Metas Curriculares referentes ao 1.º ciclo.

Para Bogdan e Biklen (1994), é importante a utilização de diversos instrumentos de recolha de dados, pois estes complementam-se, permitindo uma maior recolha de informação durante o estudo.

Todos estes instrumentos possibilitam obter uma informação mais detalhada e uma compreensão mais profunda acerca do conhecimento que se pretende alcançar.

No desenrolar da investigação existiu, naturalmente, uma preocupação pelas questões éticas, nomeadamente o consentimento informado do Órgão de Direção do Agrupamento e dos Encarregados de Educação assegurando sempre o anonimato dos participantes do estudo.

Em qualquer trabalho de investigação no campo das ciências sociais e humanas, as preocupações de natureza ética devem ser consideradas cuidadosamente, uma vez que tem como objeto o comportamento de seres humanos pode dificultar, prejudicar, perturbar, tornar-se enganoso, ou afectar, de qualquer outro modo, negativamente, a vida dos que nele participam (Tuckman, 2000, p. 19).

Assim, "devem ser respeitados alguns direitos, sobretudo 1) o direito à privacidade; 2) o direito ao anonimato; 3) o direito à confidencialidade; 4) o direito de contar com o sentido de responsabilidade do investigador, que deve agir de modo a garantir que os participantes não saiam prejudicados" (Tuckman, 2000, p. 19). Neste contexto, estas preocupações que se colocaram durante a investigação foram respeitadas durante a recolha de dados.

3.3.1. Observação Participante

A observação no decorrer deste estudo de investigação, teve como função recolher informações das atividades desenvolvidas pelos alunos e grupos de alunos, de forma a compreender que tipos de procedimentos foram utilizados perante as situações propostas. A observação durante este estudo foi participante, uma vez que participei e intervim durante a aula, sendo esta um meio fundamental para a recolha de dados do estudo que se está a desenvolver.

Para Correia (2009) e Coutinho (2011), a observação participante é uma técnica que permite que o investigador passe muito tempo com os participantes para que possa compreender como reagem e se comportam no contexto habitual.

Numa observação qualitativa quando o investigador participa e interage no estudo chama-se participante, mesmo quando não é membro de um grupo (Coutinho, 2011).

A observação participante é realizada "em contacto directo, frequente e prolongado do investigador, com os actores sociais, nos seus contextos culturais, sendo o próprio investigador instrumento de pesquisa" (Correia, 2009, p. 31).

Uma vez que se pretende compreender que tipo de procedimentos de cálculo mental os alunos utilizaram na resolução de tarefas de multiplicação é fundamental perceber o seu pensamento na sua concretização.

Coutinho (2011) refere a importância de adoptar um protocolo ou grelha de observação que deve englobar durante a sessão a:

> natureza do problema, que fazem os participantes, contexto e ambiente, quem é o líder, atitudes que podem emergir, quem é decisivo (…). Como termina a sessão: se o grupo está dividido, cansado, entusiasmado, aborrecido, etc… e como as interações foram significativas para o esclarecimento do problema (p.291).

Neste sentido, na primeira tarefa foi elaborada uma grelha de registo onde se observou de forma direta as atitudes expressas pelos alunos face ao grau de dificuldade da tarefa. Considerou-se a Interação entre os alunos do grupo na realização das tarefas, comportamento dos alunos e aumento de tempo de resolução da tarefa.

3.3.2. Recolha documental

Para Yin (2010), os documentos são uma das fontes de dados usada habitualmente em estudos de natureza qualitativa, possibilitando confrontar evidências sugeridas por outras fontes de dados. Desta forma, a recolha documental permite consultar e analisar diversas vezes os dados recolhidos e observar atentamente evidências das explicações dos alunos e comparar com a recolha de dados de outras fontes.

Neste estudo, o recurso a diversos documentos elaborados pelos alunos foi fundamental para a análise da explicação e compreensão das respostas resultantes da sua concretização. Estes documentos compreendem ainda as transcrições dos registos áudio e vídeo recolhidos durante as aulas observadas. Para Coutinho (2011), “o material recolhido e analisado é utilizado para validar evidencias de outras fontes e/ou acrescentar informações” (p.299).

3.4. A experiência de ensino

Foi desenvolvida com os alunos uma experiencia de ensino, tendo-lhe sido proposta uma sequência de tarefas (Anexo 2). Os alunos trabalharam a pares na resolução das tarefas. A constituição dos pares foi da responsabilidade da investigadora e um dos critérios utilizados foi a capacidade de comunicação matemática manifestada pelos alunos, bem como a facilidade em comunicar raciocínios. Outro critério, foi a heterogeneidade entre os elementos do par no aproveitamento na disciplina de Matemática.

Por ser também a professora da turma, a seleção tornou-se relativamente mais fácil uma vez que já conheço a forma de trabalho dos alunos, assim como a postura que cada um expressa no contexto de sala de aula.

A exploração dos conteúdos no âmbito deste estudo foi desenvolvida num período de três meses, entre outubro e dezembro de 2015. Numa primeira fase participaram apenas 16 alunos, distribuídos por 8 pares e na última tarefa 20 alunos organizados em 10 pares.

A primeira tarefa implementada a 21 de outubro de 2015, pretendia explorar se a ordem de grandeza dos números envolvidos, seria uma condição que influenciava os procedimentos utilizados pelos alunos. Assim como, compreender se de acordo com a tarefa sugerida, os alunos recorriam com maior frequência ao cálculo mental ou ao algoritmo.

Numa fase seguinte, foi proposto aos alunos que resolvessem uma multiplicação com um número de dois algarismos no multiplicador. Pretendia-se que fossem eles a construir os seus próprios procedimentos para determinarem o produto, pois os alunos só conheciam o algoritmo da multiplicação quando o multiplicador tinha um algarismo.

A última situação problemática teve como objetivo perceber quais os diferentes procedimentos de multiplicação utilizados pelos alunos, a partir de um contexto que parte de um modelo retangular.

A exploração das tarefas selecionadas era adequada à turma do 3.º ano e foram apresentadas de acordo com uma sequência que os levasse à aprendizagem da multiplicação e à reflexão sobre o papel da multiplicação em diferentes contextos.

Desta forma, os objetivos específicos foram os seguintes: analisar e interpretar as estratégias que os alunos utilizaram nas atividades propostas, os principais obstáculos com que se depararam na resolução das tarefas matemáticas e encontrar estratégias de forma a melhorar o desempenho escolar dos alunos.

As tarefas foram desenvolvidas a pares de forma a permitir que todos os alunos aprendessem com maior interesse e empenho. Após a resolução de cada tarefa, foi pedido aos diversos pares que apresentassem os procedimentos utilizados à turma, criando um ambiente de partilha e discussão coletiva.

A primeira tarefa matemática funcionou como um jogo no qual foram distribuídos diferentes cartões onde estava indicado um produto e os alunos tinham de calcular o resultado, como apresenta a tabela 2.

Tabela 2. *Síntese de atividades de multiplicação incluídas na tarefa 1.*

	Atividades – Jogo dos cartões	**Data da realização**
1.º Desafio	12 x 6	21 de outubro de 2015
	1453 x 6	21 de outubro de 2015
2.º Desafio	30 x 10	28 de outubro de 2015
	7630 x 10	28 de outubro de 2015
3.º Desafio	30 x 11	29 de outubro de 2015
	7630 x 11	29 de outubro de 2015

Na primeira parte da tarefa foi distribuído um cartão aos alunos com a expressão numérica 12 x 6, seguidamente entregue um segundo cartão envolvendo também uma multiplicação, mas que um dos números é de uma ordem de grandeza muito superior.

12 x 6 **1453 x 6**

Figura 1 – Apresentação dos cartões.

Os números selecionados para as operações foram pensados de forma a compreender se a tipologia do número aumentava o grau de dificuldade, assim como, se os procedimentos utilizados pelos alunos eram os mesmos para ambas as situações.

Para que os alunos pudessem desenvolver e construir procedimentos cada vez mais eficientes, foram apresentadas situações com vários números, desde cálculos mais simples a outros mais complexos.

A segunda tarefa desafiava os alunos a descobrir a multiplicação com dois algarismos no multiplicador. Assim, antes de aprenderem mecanicamente o algoritmo da multiplicação com dois algarismos no multiplicador, os alunos, a pares, tentaram encontrar diferentes estratégias para chegar a uma solução. Nesta tarefa, o cálculo do resultado da operação foi visto como um problema, como uma situação desafiadora (tabela 3).

Tabela 3. *Síntese da tarefa de multiplicação.*

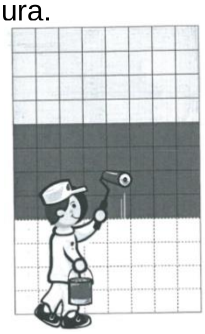
2.ª Tarefa – "Já sei multiplicar"	**Data da realização**
A Rita precisa de ajuda para calcular 14 x 32.	17 de novembro de 2015

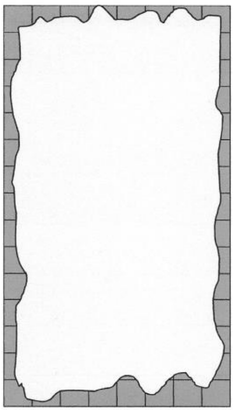
Esta tarefa só foi implementada semanas mais tarde em relação à primeira. Como professora investigadora considerei essencial que os alunos percebessem o significado da multiplicação por um algarismo no multiplicador e experienciassem várias situações de descoberta e exploração. Tornou-se cada vez mais relevante que os alunos descobrissem por eles próprios "como fazer", tendo incentivado uma maior diferenciação de caminhos em relação àqueles que estavam habituados.

A terceira tarefa foi adaptada da brochura " Números e Operações – 3.º ano", (Mendes, Brocardo, Delgado & Gonçalves, 2010). Esta tem como objetivo principal conduzir os alunos a construírem diversas estratégias de multiplicação, tendo por base um contexto que parte de um modelo retangular. Neste sentido, pretendia que os alunos identificassem situações de multiplicação a partir de uma estrutura retangular.

A tarefa subdividiu-se em duas partes, estando associadas à primeira parte dois problemas que foram propostos e resolvidos sequencialmente e sempre com um momento de discussão e de partilha entre eles. Cada par teve oportunidade de expor o seu raciocínio e a sua compreensão. A discussão e a partilha de ideias foram sempre orientadas, de forma a destacar os procedimentos mais eficazes e a sistematizar alguns ligados às propriedades da multiplicação.

Tabela 4. *Síntese das questões envolvidas na 3.ª tarefa.*

3.ª Tarefa	**Data da realização**
1. Na escola da Matilde, O Sr. Pedro está a colocar azulejos, com dois tons de cinzento, numa parede do ginásio, tal como mostra a figura.  *Problema: Fátima Mendes, Joana Brocardo, Catarina delgado e Fátima Gonçalves*	
1.1. Quantos azulejos já colocou o Sr. Pedro? Explica como pensaste.	3 de dezembro de 2015
1.2. Quantos azulejos faltam ainda na parede? Explica como pensaste.	3 de dezembro de 2015
1.3. Quando terminar, quantos azulejos terá colocado o Sr. Pedro? Explica como pensaste.	7 de dezembro de 2015

2. Uma outra parede com azulejos foi danificada pela humidade e alguns azulejos caíram. Quantos azulejos precisam de ser novamente colocados. Explica o teu raciocínio. 	9 de dezembro de 2015

O primeiro problema tornou-se muito similar ao segundo, por isso foi importante perceber quais foram os grupos que compreenderam o que foi registado anteriormente.

3.5. Análise dos dados

Bogdan e Biklen (1994) caracterizam a análise de dados como o processo de pesquisa e de organização de todo o material recolhido com o objetivo de aumentar a sua compreensão e permitir apresentar aos outros aquilo que se encontrou. A análise envolve o "trabalho com os dados, a sua organização, divisão em unidades manipuláveis, síntese, procura de padrões, descoberta de factos importantes e do que deve ser aprendido e a decisão sobre o que vai ser transmitido aos outros" (Bogdan & Biklen, p.225).

A análise de dados é um processo que pode ser dividido em vários momentos. Num primeiro momento considerei importante apresentar e refletir sobre possíveis estratégias de cálculo que, durante a realização das tarefas, poderiam ser apresentadas pelos alunos. Seguidamente, e de forma a responder às questões iniciais procedi à análise de dados para compreender os procedimentos e dificuldades que ocorrem durante a resolução de problemas de multiplicação. Os registos de áudio e vídeo, paralelamente, com as produções dos alunos foram instrumentos fundamentais para a obtenção de informações relevantes.

Os registos de áudio e vídeo foram transcritos na sua totalidade e analisados juntamente com os trabalhos dos alunos que foram recolhidos no final de cada sessão.

Todos estes registos foram estudados e analisados cuidadosamente e separadamente, foram elaboradas grelhas síntese categorizadas de acordo com o objeto de estudo para uma maior facilidade de compreensão do conteúdo das informações recolhidas.

Numa fase final, analisei os procedimentos encontrados pelos alunos na resolução de tarefas de multiplicação recorrendo ao algoritmo e/ou cálculo mental.

Na sala de aula, em cada tarefa, decorreram três momentos fundamentais: a apresentação da tarefa, o trabalho autónomo dos pares e, por fim a partilha e a discussão dos resultados conseguidos. Durante a discussão foram identificadas as estratégias usadas pelos alunos, tal como as dificuldades sentidas em cada tarefa.

Foram ainda analisadas as trajetórias de aprendizagem realizadas pelos alunos com o principal objetivo de estudar os diversos procedimentos adotados na resolução das tarefas. Tendo sido possível descobrir potencialidades e dificuldades evidenciadas em cada grupo.

CAPITULO IV

4.1. Tarefas desenvolvidas pelos alunos e resultados

Ao longo desta experiência de ensino foram apresentadas aos alunos uma sequência de três tarefas de multiplicação (ver capítulo III). As tarefas desenvolvidas tinham como propósito construir e explorar o conceito de multiplicação, bem como as suas propriedades.
O contexto das tarefas, para se tornarem mais compreensíveis para os alunos, foi selecionado de forma a estabelecer uma relação com o seu mundo real, e confrontá-los com situações que apelassem ao seu conhecimento diário.
As tarefas foram resolvidas a pares seguidas de momentos de partilha e discussão dos procedimentos encontrados.

1.ª TAREFA

A 1.ª tarefa engloba vários desafios matemáticos e pretende compreender se a tipologia dos números envolvidos influencia as estratégias utilizadas pelos alunos. Durante a realização da tarefa foram distribuídos diversos cartões, cada um apresentava um produto diferente com um crescente grau de dificuldade (tabela 5).

Tabela 5. *Desafios propostos.*

1.º Desafio " Multiplica e Acerta"		**2.º Desafio " Pensa Rápido"**		**3.º Desafio " Relaciona e Calcula"**	
1.º Cartão	2.º Cartão	1.º Cartão	2.º Cartão	1.º Cartão	2.º Cartão
12 x 6	1453 x 6	30 x 10	7630 x 10	30 x 11	7630 x 11

1.º Desafio - "Multiplica e Acerta"

No primeiro desafio os diversos pares tinham de encontrar uma estratégia eficaz para chegar ao resultado correto do produto 12 x 6, e foi evidente que a simplicidade da operação possibilitou que todos os grupos chegassem à resolução correta, embora com estratégias diferentes. Seguidamente, foi entregue um segundo cartão com a expressão 1453 x 6 com o intuito de dificultar mais o desafio. A grande maioria dos alunos embora demonstrassem inicialmente alguma hesitação também resolveu o desafio rapidamente. Os alunos conseguiram resolver ambos os desafios recorrendo a uma das três procedimentos diferentes: adição de parcelas iguais, multiplicação com recurso à propriedade distributiva em relação à adição ou algoritmo (tabela 6).

Tabela 6. *Procedimentos utilizadas pelos alunos para resolverem o 1.º desafio.*

Procedimentos utilizados pelos grupos (pares)	12 x 6	1453 x 6
Adição de parcelas iguais	3 grupos	1 grupo
Multiplicação com recurso à propriedade distributiva em relação à adição	4 grupos	2 grupos
Multiplicação com recurso ao algoritmo	1 grupo	4 grupos
Resultado incorreto	0	1 grupo

Após a recolha e apresentação/discussão das várias estratégias utilizadas pelos alunos nos desafios em que apenas variava o grau de dificuldade das operações foi possível estabelecer um paralelismo entre ambas e perceber se as estratégias seguidas foram as mesmas ou se existiu uma mudança de pensamento. Na primeira situação (12 x 6) a grandeza do número do multiplicando era menor relativamente à segunda e verificou-se que a maioria dos alunos recorreu fundamentalmente à multiplicação com recurso à propriedade distributiva ou a adição de parcelas iguais.

Na segunda situação a grandeza dos números envolvidos foi maior relativamente à primeira, e neste sentido constatou-se que os alunos utilizaram na sua maioria o algoritmo, possivelmente por ser uma forma de cálculo que lhes transmite maior segurança e facilidade e consequentemente maior probabilidade de acertar.

Os grupos durante a resolução do primeiro desafio demonstraram um sentimento de confiança e calmamente todos determinaram a solução correta. Curiosamente quando resolveram o segundo desafio (1453 x 6) algumas dificuldades começaram a emergir e o comportamento alterou-se significativamente, ficando mais preocupados e inquietos, contudo acabaram por resolvê-lo de forma rápida e correta. Apenas um par não solucionou corretamente a multiplicação correspondente ao segundo cartão.

A estratégia encontrada pela maioria dos pares foi calcular através do algoritmo para chegar à resposta correta. Mariana e Diogo justificaram a utilização do algoritmo da seguinte forma:

> Mariana: Utilizámos o algoritmo, porque assim não erramos a conta.
>
> Professora: No primeiro cartão também utilizaram o algoritmo?
>
> Mariana: Não.
>
> Professora: Que estratégia utilizaram?
>
> Mariana: Primeiro fizemos a decomposição do número 12 (10 + 2) e depois multiplicámos o 6 vezes 10 e o 6 vezes 2.
>
> Professora: Por que razão mudaram de estratégia?
>
> Mariana: Porque queremos ganhar os desafios todos e assim fizemos o algoritmo para termos a certeza que acertávamos, porque no segundo cartão o número era maior.

A maioria dos pares, que acertou, mostrou mais confiança em utilizar o algoritmo convencional para encontrar um resultado correto, em vez de fundamentarem o resultado usando estratégias que apelassem a esquemas mais elaborados de raciocínio.

Durante a partilha de resultados a justificação dada pelos pares que recorreram ao algoritmo foi muito semelhante, o facto de a tipologia do número ser diferente no multiplicando alterou, em alguns pares, a estratégia anteriormente utilizada. Nesta atividade, foi evidente que os alunos sentiram uma maior confiança quando utilizaram um conjunto de regras conhecidas para encontrarem a solução, pois argumentaram que a possibilidade de errar seria menor. Assim, parece compreensível que depois de aprenderem o algoritmo este é o método mais expressivo para os alunos que acabam por substituir outros procedimentos pelo algoritmo quando a dificuldade do problema aumenta. Neste sentido, a tarefa desenvolvida permitiu perceber que grande parte dos alunos perante problemas que apresentavam maior dificuldade recorreram preferencialmente a métodos tradicionais para a sua resolução em vez da descoberta refletida de outras estratégias igualmente eficientes. No entanto, é importante realçar que dois pares sustentaram a mesma estratégia em ambas as situações problemáticas apoiando-se no uso das propriedades da multiplicação. Apesar de perceberem a propriedade utilizada, nenhum par conseguiu indicar o seu nome ou explicitá-la o que é normal nesta faixa etária, onde o principal objetivo é estimular nos alunos apenas a sua compreensão.

2.º Desafio – "Pensa rápido"

O segundo desafio tinha como principal objetivo explorar o cálculo mental dos alunos, e pretendia que, a pares, resolvessem as seguintes operações de multiplicar (30 x 10) e (7630 x 10), sendo os cartões também entregues em momentos diferentes.
Na tabela seguinte é possível consultar se as estratégias seguidas pelos alunos foram eficazes para resolverem corretamente o desafio (tabela 7).

Tabela 7. *Pares que resolveram correta ou incorretamente o 2.º desafio.*

	30 x 10	7630 x 10
Solução correta	8 pares	7 pares
Solução incorreta	0	1 par

Como se pode observar todos os grupos solucionaram a primeira operação com sucesso sem demonstrarem dúvidas na sua resolução e com facilidade indicaram uma estratégia de cálculo mental ou utilizando as propriedades dos números envolvidos.

Eduardo e Simone são um dos pares que, na resolução do problema, utilizaram a regularidade de multiplicar qualquer número por 10 (fig.2).

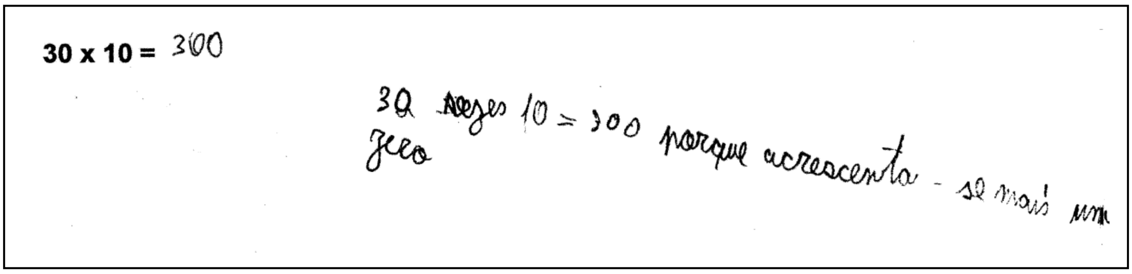


Figura 2. Resolução de Eduardo e Simone do desafio 2 – tarefa 1

Eduardo e Simone justificam o seu raciocínio matemático da seguinte forma:

> Simone: Só tivemos que utilizar a regra, porque multiplicámos por 10 e o resultado é igual a 30 mais um zero no final.
> Eduardo: Foi fácil de pensar, acrescentámos um zero ao 30.
> Professora: E ao acrescentarem um zero o que acontece ao número 30?
> Simone: Fica maior.

Tal como Eduardo e Simone, todos os pares usaram uma estratégia semelhante, respeitando uma regularidade, aplicando uma regra básica da multiplicação, em que multiplicaram o número por um e acrescentaram um zero à direita desse número. No entanto, durante a discussão dos resultados os alunos compreenderam que o resultado obtido implicava um aumento da grandeza do número. Contudo, alguns alunos evidenciaram que memorizaram a regra sem a compreenderem, como podemos verificar no diálogo seguinte.

> Gabriel: Eu sabia que só tinha de acrescentar um zero.
> Professora: E acrescentar um zero altera o resultado da operação?
> Gabriel: Fica 30 mais um zero.
> Professora: E consegues identificar o que se repete quando aplicas a regra?
> Gabriel: Não se repete, acrescentei um zero.
> Mariana: Sim professora está a repetir o trinta dez vezes e assim o 3 deixa de estar nas dezenas e fica nas centenas.

Seguidamente, foi entregue aos alunos o terceiro cartão que configurava uma situação problemática semelhante à anterior, contudo a expressão numérica apresentada era mais complexa, porque os números envolvidos tinham uma ordem de grandeza maior. Nesta tarefa estava subjacente a possibilidade dos alunos recorrerem à mesma estratégia usada anteriormente, reconhecendo a mesma regularidade e determinadas semelhanças com os números anteriores.

Apenas um par não concluiu com êxito este desafio, todos os outros pares responderam corretamente aplicando a estratégia utilizada anteriormente. Roberto e Tânia são um dos pares que recorreu ao mesmo método para efetuar a operação (fig.3).

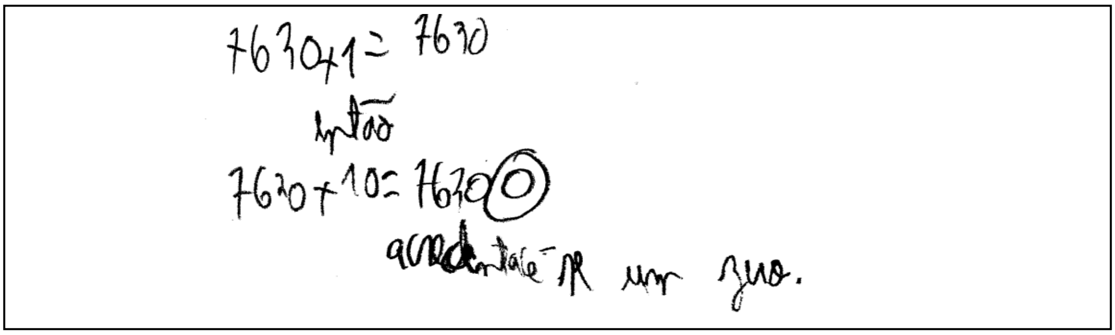


Figura 3. Resolução de Roberto e Tânia do desafio 2 – tarefa 1

A maior parte dos alunos usou um procedimento semelhante ao par Roberto e Tânia evidenciando facilidade em realizar cálculos continuando a recorrer ao cálculo mental ou à regularidade existente. Contudo, o aumento da grandeza do número no multiplicando, implicou o aparecimento de outra estratégia. O par Sandra e Alexandre, mostraram, desta forma, o seu pensamento matemático para a turma (fig. 4).

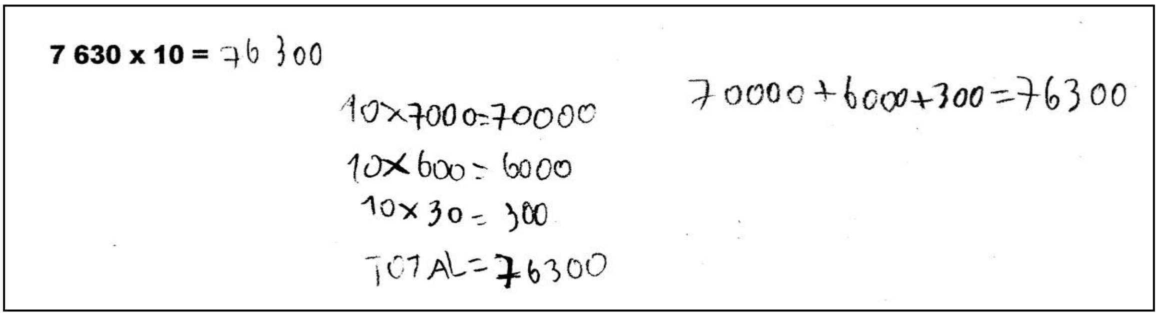


Figura 4. Resolução de Alexandre e Sandra do desafio 2 – tarefa 1

Os alunos explicaram para os colegas o motivo pelo qual realizaram tantos cálculos:

Professora: O vosso grupo fez vários cálculos para resolver a multiplicação?

Alexandre: Sim professora, porque o número é muito grande e, por isso, tivemos de fazer mais cálculos.

Professora: Grande?

Alexandre: O primeiro era 30 e agora é 7630. O número é muito grande, por isso fiz mais cálculos.

Sandra e Alexandre compreenderam que nesta operação a ordem de grandeza do número envolvido era maior, assim, os cálculos que teriam de apresentar para justificar o resultado também teriam de ser mais complexos. Nestas tarefas o par relacionou a tipologia dos números envolvidos com os cálculos necessários que teriam de efetuar.

Os alunos construíram uma sequência de cálculos multiplicativos através da decomposição do número 7630 para chegar ao resultado correto. Contudo, o diálogo continuou onde outros alunos também intervieram.

Professora: Mas será que não há uma relação entre os resultados desta multiplicação e da anterior?

Margarida: Sim, as duas contas acabam em zero.

Roberto: O número é diferente, mas só tem que acrescentar um zero no final.

Alexandre: Estou confuso, mas eu pensava que não. Pensava que o número era maior tinha de fazer mais contas.

Sandra: Eu bem te disse que bastava acrescentar um zero.

No caso do Alexandre, a regularidade da multiplicação por 10 não aparece com naturalidade. Assim, Alexandre avaliou a grandeza do número e escolheu decompor o 7630 noutros produtos mais simples e fáceis de calcular. O procedimento escolhido parece estar relacionado com a grandeza dos números envolvidos e com a facilidade que encontraram em decompor o número 7630.

No final da discussão dos resultados Alexandre concordou com os colegas de turma, apesar do número envolvido ser maior a regularidade poderá aplicar-se da mesma forma.
Unicamente, o par Anabela e Ricardo não concluiu o desafio com sucesso (fig. 5).

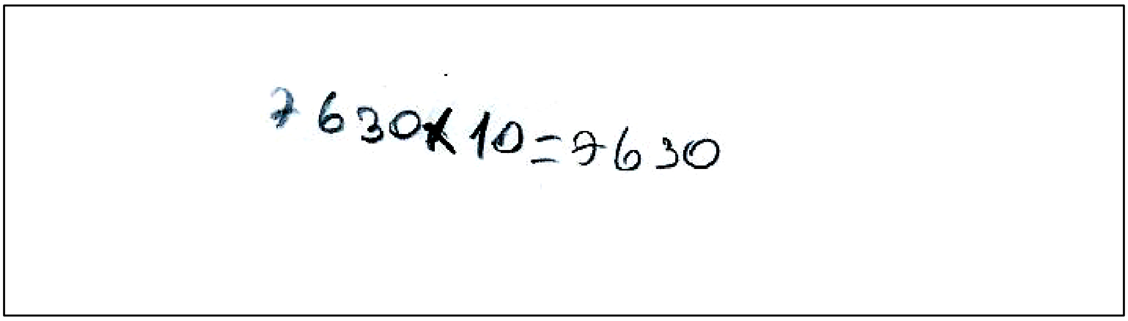


Figura 5. Resolução incorreta de Ricardo e Anabela do desafio 2 – tarefa 1

No decurso dos cálculos do terceiro cartão Anabela e Ricardo ao determinarem 7630 x 10 apresentaram no resultado obtido, novamente, o multiplicando 7630. Este erro evidencia alguma dificuldade na compreensão da expressão, uma vez que só consideraram o único zero existente no final. O Ricardo refere que:

> Ricardo: Fiz 7630 x 10 e deu-me 7630.
>
> Eduardo: Mas está mal tens ainda de acrescentar outro zero no final.
>
> Ricardo: Mas no final já tenho um zero.
>
> Mariana: Mas não vês que assim fica igual ao primeiro número da conta.
>
> Ricardo: Pois! Agora estou confuso.

A análise de um exemplo concreto pode ajudar a uma melhor perceção do erro praticado. Neste caso, os alunos apoiaram-se num pensamento incorreto revelando alguma incompreensão da operação, uma vez que não colocaram em causa o facto do resultado obtido ser igual ao multiplicando, o par não considerou o resultado obtido nem a sua razoabilidade.
Todos os outros pares responderam corretamente aplicando a estratégia utilizada anteriormente.

3.º Desafio – "Relaciona e calcula"

O último cartão pretendia averiguar que procedimentos os alunos seguiam para calcular 30 x 11 e se conseguiam estabelecer alguma relação com a expressão multiplicativa anterior (30 x 10). Apenas, o par Tânia e Roberto usaram a repetição de parcelas iguais para justificarem o seu raciocínio (fig.6).

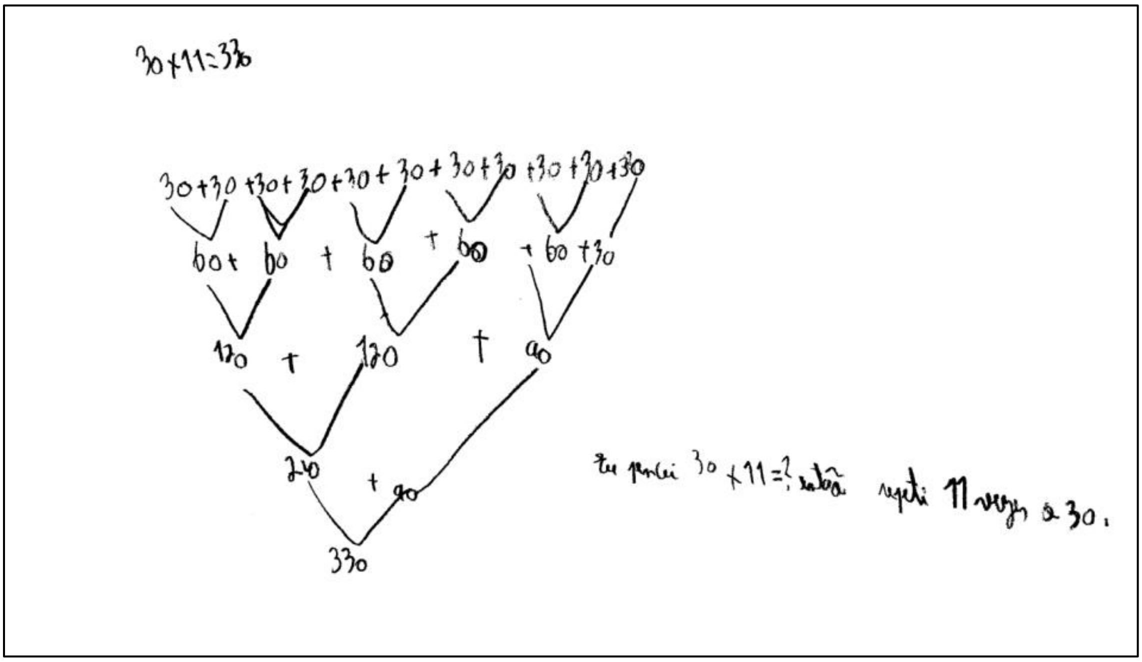


Figura 6. Resolução de Roberto e Tânia do desafio 3 – tarefa 1

Tânia e Roberto para calcular o produto indicado apoiaram-se numa estratégia aditiva que continua a ser muito usada pelos alunos. Para calcularem 30 X 11, ao contrário de outros pares que recorreram à multiplicação, eles adicionaram sucessivamente o número 30, e seguidamente associaram parcelas duas a duas para determinarem o resultado. Uma possível justificação para que alguns alunos continuem a usar a adição repetida como estratégia pode estar relacionada com o facto de os alunos se sentirem mais seguros e mais familiarizados com esta operação. Embora sendo uma estratégia mais demorada, pois envolve procedimentos mais repetitivos e menos eficientes, os alunos chegaram corretamente à solução do problema.

No momento da discussão coletiva, os alunos, explicaram o método utilizado:

> Roberto: Nós fizemos 30 + 30 + 30…até chegar ao 330, repeti 11 vezes o 30.

Resolveram a situação problemática através da adição de parcelas iguais em substituição do registo multiplicativo, os alunos repetem o trinta onze vezes 30 + 30 + 30…. Assim, evidenciaram ainda um raciocínio aditivo para resolver o problema que pressuponha já um raciocínio multiplicativo.

Os restantes pares identificaram uma relação com a expressão multiplicativa realizada anteriormente, como se pode observar nos exemplos seguintes (fig. 7 e 8).

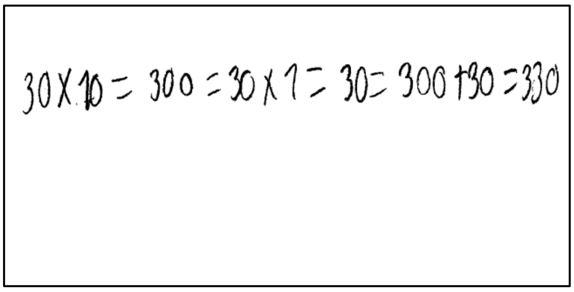


Figura 7. Resolução de Jéssica e Gabriel desafio 3 – tarefa 1

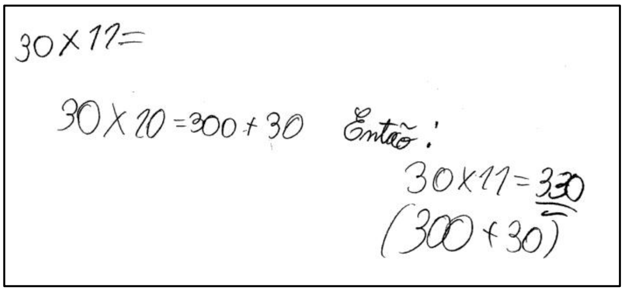


Figura 8. Resolução de Mariana e Diogo desafio 3 – tarefa 1

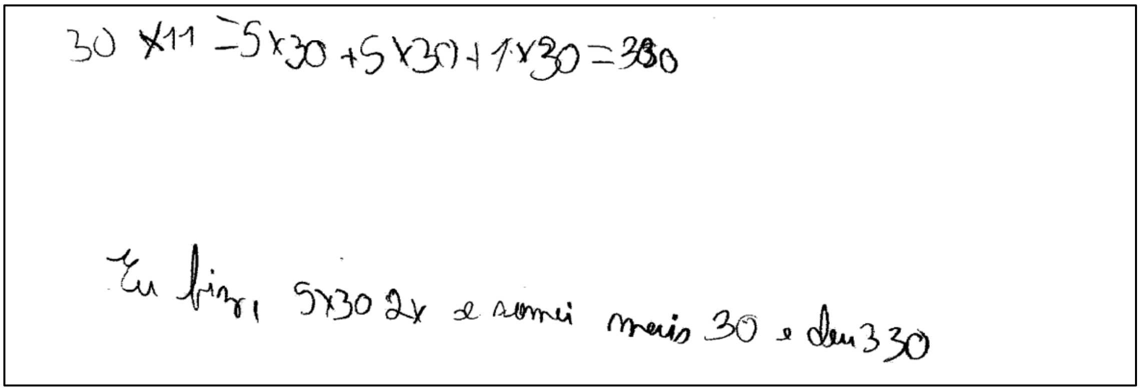
Gabriel explicita o seu raciocínio para a turma:

> Gabriel: Eu fiz a mesma coisa que Roberto e Tânia, mas fui mais rápido. Fiz menos contas.
>
> Professora: A mesma coisa? Como?
>
> Gabriel: Então fiz logo na cabeça 30 x 10 como na outra conta e deu 300 e depois 10 x 3 deu 30 e depois juntei e deu 330. Não sei porque é que o Roberto teve tanto trabalho.

Nesta resolução Jéssica e Gabriel privilegiaram a utilização de estratégias multiplicativas envolvendo procedimentos mais rápidos e eficazes demonstrando um maior desenvolvimento e facilidade na capacidade de comunicação matemática. Calcularam este produto, recorrendo a uma situação conhecida, (30 x 10 = 300), e acrescentaram mais 30.

Os alunos começaram a perceber que a multiplicação é um processo mais rápido e não necessita de tantos cálculos como a repetição de parcelas iguais. Desta forma, evidenciaram uma resolução apoiada no cálculo mental compreendendo que podem partir de um fator conhecido 10 chegar rapidamente ao resultado. A utilização propositada do número dez na expressão numérica anterior 30 x 10 =300, acaba por ser um meio facilitador de cálculo, pois é um número de referência para os alunos. Os alunos que materializaram este pensamento revelaram um bom sentido de número.
Todos os pares que estabeleceram uma relação com o problema anterior ou recorreram ao uso da propriedade distributiva conseguiram superar com êxito este desafio.

Contudo, surgiu uma estratégia interessante de ser explorada e que levantou várias dúvidas na turma quando apresentada por Eduardo e Simone (fig.9).


30 x 11 = 5x30 + 5x30 + 1x30 = 330

Eu fiz, 5x30 2x e somei mais 30 e deu 330

Figura 9. Resolução de Simone e Eduardo do desafio 3 – tarefa 1

> Eduardo: Eu sei que 5 + 5+ 1 = 11. Então fiz 5 x 30 duas vezes e somei mais 30 e deu 330.

O par Simone e Eduardo decompôs o número 11 numa adição de três parcelas (11 = 5 + 5 + 1), de seguida calculou duas vezes 5 x 30 que deu 300 e adicionou mais 30 para determinar o resultado final. Neste procedimento podemos identificar relações de dobro. Os alunos poderão ter feito esta associação de dobro apoiados em experiências prévias que poderão estar relacionadas com a facilidade de decompor o fator 10 e trabalhar o dobro.

Último cartão do 3.º desafio

Acompanhando o entusiamo dos alunos em solucionar desafios mais complexos e que exigiam cada vez mais uma maior compreensão e destreza de pensamento matemático foi entregue o último cartão. Este cartão inicialmente levantou muitas dúvidas e incertezas nos grupos de trabalho. Os alunos ficaram agitados e alguns referiam que não sabiam resolver a expressão numérica apresentada. Contudo, os diversos pares começaram lentamente a dialogar entre eles. O desafio estava lançado e a expectativa dos alunos aumentava. Ao circular pelos diferentes pares constatei que alguns demoraram mais tempo a fazer o registo, porém outros começaram quase de imediato a delinear uma estratégia. Laura e Armanda foram o par que apresentou maior dificuldade e solicitaram várias vezes apoio, alegando que não sabiam fazer a conta porque não sabiam calcular uma multiplicação por dois algarismos no multiplicador.

Martim e Paulo na sua resolução evidenciaram uma evolução do raciocínio multiplicativo associado já à utilização de propriedades relacionadas a esta operação (fig.10).

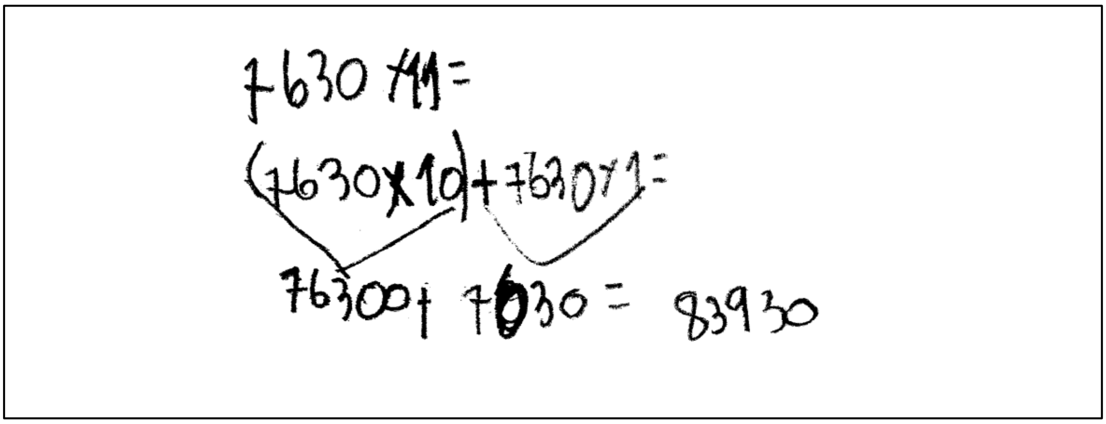


Figura 10. Resolução de Martim e Paulo do desafio 3 – tarefa 1

O par Martim e Paulo, demonstrou um maior entendimento sobre a multiplicação, aplicando a propriedade distributiva em relação à adição. Revelaram também uma compreensão do sistema de numeração e decomposição decimal, transformando o 11 em (10 + 1) e depois calculando os produtos parciais (7630 x 10) e (7630 x 1).

Mariana e Diogo utilizaram um processo análogo ao anterior, pois calcularam mentalmente os produtos parciais e apenas adicionaram o resultado de ambos (fig. 11).

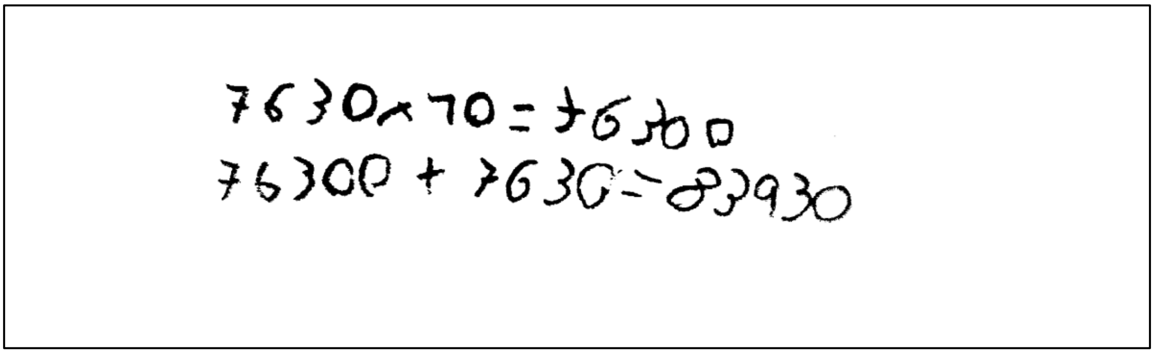


Figura 11. Resolução de Mariana e Diogo do desafio 3 – tarefa 1

Os alunos não sentiram necessidade de registar por escrito a decomposição do número onze, no entanto encontra-se implícito no seu raciocínio.
A maioria dos pares compreendeu que multiplicar por 10 funcionava como apoio para outros cálculos quando as parcelas são números muito próximos. Nesta operação os alunos usaram um produto conhecido (7630 x 10).
Um constrangimento encontrado foi o facto de alguns alunos terem multiplicado corretamente por 10, mas seguidamente adicionaram o algarismo 1 em vez de 7630 como se pode visualizar na figura seguinte (fig.12).

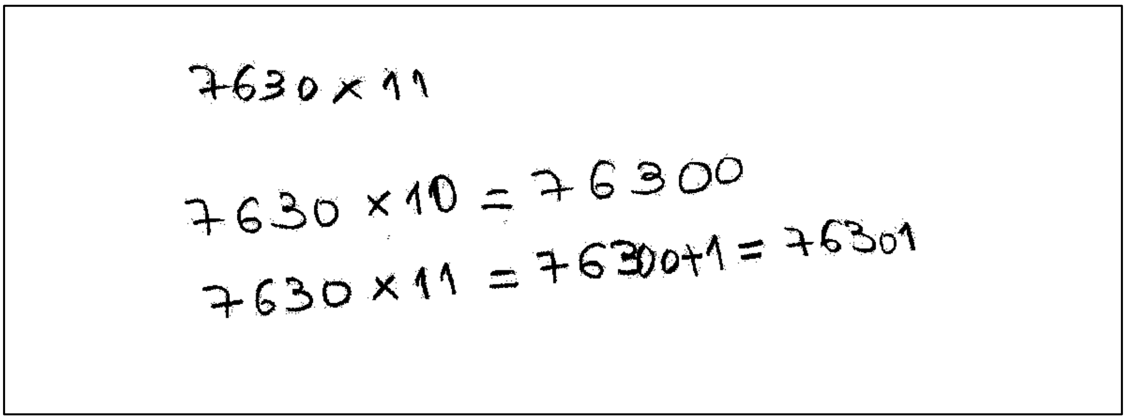


Figura 12. Resolução de Jéssica e Gabriel do desafio 3 – tarefa 1

Observação direta face ao grau de dificuldade da Tarefa

Durante a realização do 3.º desafio emergiram diversos comportamentos e interações, nos pares, que poderão estar relacionados com a complexidade da expressão numérica que envolvia o último cartão. Essencialmente, todos os pares discutiram e partilharam dúvidas e conhecimentos matemáticos antes de proceder ao registo das estratégias (tabela 8).

Tabela 8. *Observação dos alunos durante a realização dos desafios.*

	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5	Grupo 6	Grupo 7	Grupo 8
Interação entre os alunos do grupo na realização das tarefas	**Dialogaram entre eles**	**Dialogaram entre eles**	**Dialogaram entre eles**	**Dialogaram entre eles**	**Dialogaram entre eles**	**Dialogaram entre eles**	**Dialogaram entre eles**	**Dialogaram entre eles**
Comportamento dos alunos	**calmos**	**impacientes**	**calmos**	**impacientes**	**calmos**	**impacientes**	**impacientes**	**impacientes**
Aumentou o tempo de resolução da tarefa	**Não**	**Sim**	**Não**	**Sim**	**Não**	**Sim**	**Não**	**Sim**

O quadro apresentado demonstra que dependendo do grau de dificuldade das tarefas os alunos evidenciaram diferentes comportamentos, verificando-se sempre no decorrer dos desafios grandes momentos de diálogo entre eles. A duração de resolução do desafio acompanhou o aumento da dificuldade de cada tarefa.

Os alunos que utilizaram estratégias multiplicativas e aplicaram conhecimentos ligados a certas regularidades e múltiplos de 10 foram mais rápidos a calcularem os produtos.

Durante a observação das aulas foi possível recolher uma multiplicidade de informações quer sobre o tipo de estratégias que os alunos utilizaram quer na relação estabelecida entre os alunos e a professora. Foi interessante observar e analisar todas as conjeturas geradas pelos alunos, onde se evidenciaram conhecimentos que já possuíam no início deste estudo.

Ao longo da realização das tarefas tornou-se possível observar nos alunos as atitudes, representações, comportamentos, motivações, métodos e processos utilizados individualmente e em grupo.

Análise dos procedimentos utilizados pelos alunos no 2.º e 3.º desafio

Tabela 9. *Tabela representativa do número de resoluções corretas e incorretas relativa ao 2.º e 3.º desafios.*

<table>
<tr><th colspan="9">Aumento do grau de dificuldade da tarefa</th></tr>
<tr><th rowspan="3">Grupos</th><th colspan="4">2.º Desafio</th><th colspan="4">3.º Desafio</th></tr>
<tr><th colspan="2">30 x 10</th><th colspan="2">7630 x 10</th><th colspan="2">30 x 11</th><th colspan="2">7630 x 11</th></tr>
<tr><th>Resolução correta</th><th>Resolução incorreta</th><th>Resolução correta</th><th>Resolução incorreta</th><th>Resolução correta</th><th>Resolução incorreta</th><th>Resolução correta</th><th>Resolução incorreta</th></tr>
<tr><td>Grupo 1</td><td>X</td><td></td><td>X</td><td></td><td>X</td><td></td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Grupo 2</td><td>X</td><td></td><td></td><td>X</td><td></td><td>X</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>Grupo 3</td><td>X</td><td></td><td>X</td><td></td><td>X</td><td></td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Grupo 4</td><td>X</td><td></td><td>X</td><td></td><td>X</td><td></td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Grupo 5</td><td>X</td><td></td><td>X</td><td></td><td>X</td><td></td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Grupo 6</td><td>X</td><td></td><td>X</td><td></td><td></td><td>X</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>Grupo 7</td><td>X</td><td></td><td>X</td><td></td><td>X</td><td></td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>Grupo 8</td><td>X</td><td></td><td>X</td><td></td><td></td><td>X</td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>TOTAL</td><td>8</td><td>0</td><td>7</td><td>1</td><td>5</td><td>3</td><td>5</td><td>3</td></tr>
</table>

A comparação de resultados permitiu concluir que o primeiro cartão do 2.º desafio (30X10) teve, na generalidade uma maior percentagem de respostas corretas relativamente aos outros cartões. Podendo-se constatar que a totalidade dos pares solucionou corretamente.

Durante as tarefas propostas os alunos raramente recorreram ao algoritmo como procedimento, apenas utilizaram o cálculo mental e o seu registo escrito. Sendo possível constatar que a maioria dos pares que chegaram ao resultado final com êxito utilizou procedimentos de tipo multiplicativo.

No terceiro desafio a percentagem de insucesso subiu em relação aos desafios anteriores, que poderá estar relacionado com a exigência da expressão numérica. Este desafio exigia um raciocínio matemático mais complexo e eficiente. Após a análise dos registos, verificou-se que os alunos neste desafio construíram estratégias mais eficazes e, nalguns casos, motivadas pelo desafio anterior foram capazes de usar a multiplicação para determinar a solução. Os alunos que já dominam o processo de multiplicar qualquer número por 10 revelaram menor dificuldade em encontrar uma estratégia adequada para resolverem os diversos desafios.

Alguns alunos conseguiram relacionar os dois produtos encontrando estratégias adicionais para a sua resolução. A maioria dos alunos descobriu que podia decompor o número onze (10 + 1). Quando os alunos compreenderam o que representa a escrita multiplicativa acabaram por utilizá-la noutras situações.

Os alunos que não relacionaram as tarefas entre si, revelaram mais dificuldades na sua resolução. Pelo contrário, quando conseguiram reconhecer semelhanças com as tarefas anteriores utilizaram procedimentos multiplicativos mais eficazes.

Face a uma mesma tarefa, os alunos apresentam diferentes estratégias o que pode corresponder a diferentes níveis de aprendizagem da multiplicação.

2.ª TAREFA – "Já sei multiplicar"

A segunda tarefa da experiência de ensino tinha o propósito de possibilitar que os alunos descobrissem a multiplicação por um número de dois algarismos no multiplicador antes da aprendizagem formal desse algoritmo.

No início da tarefa foi proposto aos alunos que ajudassem Rita a calcular 14 x 32, desafiando-os a raciocinar e a ver o cálculo do produto como um problema e não só como um cálculo. Numa abordagem inicial da tarefa, foi interessante perceber a atitude e reação dos alunos perante o cálculo de multiplicação constituída por um número de dois algarismos no multiplicador que para eles era ainda uma situação desconhecida.

Num primeiro momento, os alunos na sua maioria mostraram-se admirados, ficaram impacientes e manifestaram algum nervosismo, outros, por sua vez, apresentaram-se mais confiantes em encontrar uma estratégia válida dialogando com os pares.

Os alunos recorrendo ao lápis e papel começaram por registar diferentes possibilidades de resolução na tentativa de encontrarem uma estratégia adequada para solucionar o problema.

Estavam organizados em pares, entre eles discutiam a sua resolução com entusiasmo e empenho e, pouco a pouco, iam surgindo nas suas folhas de trabalho vários

registos. Enquanto observadora foi interessante verificar as diversas conjeturas criadas pelos alunos, assim como a interação e a comunicação matemática expressa por alguns pares. Durante a tarefa alguns alunos começaram a evidenciar procedimentos de cálculo escrito e mental para a resolução da multiplicação, evidenciando-se, em alguns pares, a emergência das propriedades da multiplicação.
Quando todos os pares resolveram o problema, apresentaram os resultados para a turma e explicaram aos colegas como conseguiram resolver o desafio. Após cada apresentação surgiu sempre um momento de partilha e discussão entre os grupos

Os procedimentos utilizados pelos alunos durante o trabalho a pares

Os pares, na sua maioria, iniciaram a resolução do problema muito confiantes e empenhados em encontrarem rapidamente e de forma eficaz a solução. Alguns alunos referiram que "se sabiam a tabuada e multiplicar" também conseguiriam encontrar um procedimento adequado para calcular 14 x 32.

Todos os pares resolveram a situação a partir de estratégias de cálculo criadas e desenvolvidas de forma a fazerem sentido para eles.
Os alunos, durante o segundo ano, realizaram várias tarefas de forma a estimular uma boa compreensão do raciocínio aditivo. Este, nos pares Mariana/ Diogo, Alexandre / Sandra e Roberto / Tânia parece ter sido fundamental para rapidamente mostrarem uma grande destreza para resolverem o problema proposto.

Mariana e Diogo

O primeiro par constituído pela Mariana e Diogo solucionaram a situação problemática da seguinte forma:

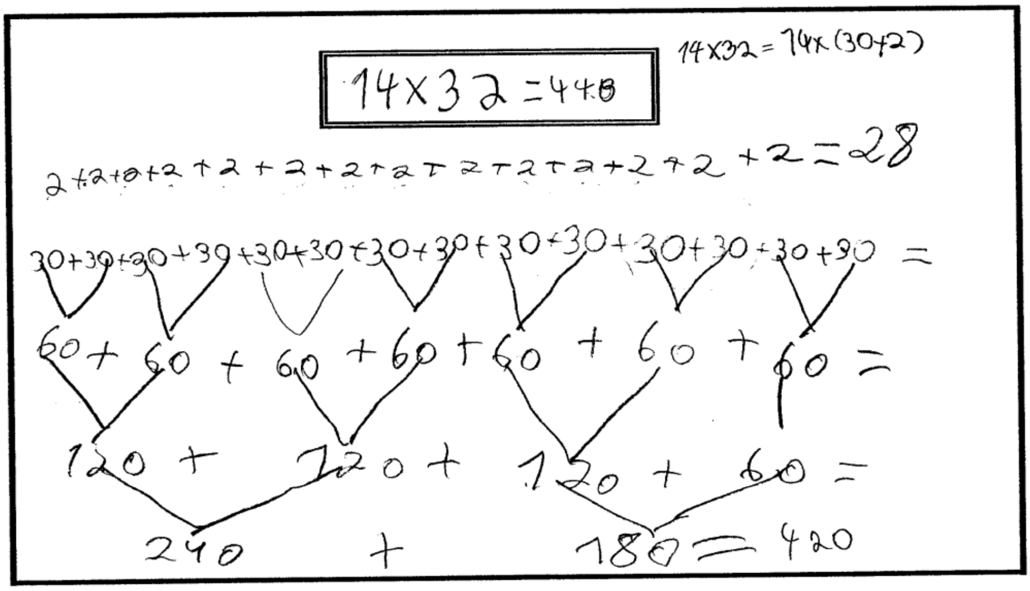


Figura 13. Representação de adições sucessivas de Mariana e Diogo – tarefa 2

Inicialmente, os alunos começaram por decompor o 32, no entanto depois recorreram a procedimentos aditivos. Para calcular 14 x 30 repetiram o 30 continuamente, adicionando, posteriormente as parcelas duas a duas para chegar ao resultado final. Para calcular 14 x 2, voltaram a utilizar o procedimento anterior adicionaram o 2 sucessivamente.

Os registos dos procedimentos utilizados pela Mariana e Diogo, encontram-se descritos em seguida, num diálogo estabelecido na sala de aula:

> Mariana: Primeiro fizemos a conta ao lado 14 x 32 = 14 x (30 + 2) e aqui fizemos a decomposição do 32 para ficar mais fácil.
> E depois fizemos catorze vezes trinta e depois catorze vezes dois.
>
> Diogo: Depois repetimos o número 30 catorze vezes, porque não sabemos quando é que dá 14 x 30 pela multiplicação então vamos somar 30 + 30 +…

Mariana: Depois fizemos grupos de trinta, sessenta e cento e vinte. Juntamos 30 + 30 e dava 60. Depois vimos que 120 + 120 + 120 + 60 ainda era difícil de calcular, por isso fomos juntar 120 + 120 e vimos que era 240 e que 120 + 60 dava 180.

Diogo: No fim de fazer a soma deu 420, mas percebemos que ainda faltava fazer 14 x 2.

Mariana: Assim fomos fazer o número 2 catorze vezes e contamos de dois em dois: dois, quatro, seis…vinte e oito.

Professora: Havia outra forma mais rápida de fazerem o cálculo?

Diogo: Sim, podíamos ter feito 14 x 2, que sabemos que o resultado é 28.

Nesta estratégia os alunos verificam que a repetição de grupos iguais, como 2 +2 + 2 + 2 +2 + 2 + 2 +2 + 2 + 2 +2 + 2 + 2 + 2 é equivalente a 14 x 2, deste modo este pensamento já está associado ao significado da multiplicação. Portanto, estão a construir a ideia de multiplicação através da adição sucessiva de parcelas, compreendendo o que representa a escrita multiplicativa.
O raciocínio utilizado pelo par foi da adição, mas o Diogo indicou que representava escrever a expressão numérica 14 x 2. Contudo, ainda foi a adição que suportou o seu pensamento.

Mariana: Bem, nós fizemos de cabeça, mas tínhamos de apresentar os cálculos para explicar e quisemos também somar

Mariana representou mentalmente a operação 14 x 2, no entanto utilizou o registo no papel para explicar o seu raciocínio. A aluna compreendeu que quando uma dada quantidade se repete várias vezes numa adição, pode ser substituída por uma multiplicação. Começa a perceber-se uma relação entre o raciocínio aditivo e o raciocínio multiplicativo. A aluna não demonstrou dificuldades em transformar a adição sucessiva (2 + 2 + 2 + 2…) num produto (14 x 2).
Na observação do Diogo podemos verificar que o aluno encontrou padrões para utilizar um raciocínio multiplicativo quando refere que apenas teria que dobrar um dos fatores. Entretanto, o Gabriel interveio:

Gabriel: Não percebo onde é que foram buscar tantos dois podiam ter calculado o dobro de catorze ou podiam fazer catorze mais catorze.

O diálogo continuou:

Diogo: O resultado do problema deu-nos 428, porque somamos 420 + 28 na cabeça.

Professora: Mas o problema era resolver uma multiplicação e vocês utilizaram a adição, não estou a perceber?

Mariana: É fácil professora, a multiplicação é somar o número muitas vezes e foi isso que fizemos, porque ainda não sabemos fazer este algoritmo.

Alguns alunos, como Mariana usou uma linguagem matemática adequada onde relacionaram facilmente o simbolismo das operações e o desafio proposto.

Roberto e Tânia

Os alunos numa fase inicial registaram na folha de trabalho todos os cálculos e só no final explicaram as estratégias utilizadas e como encontraram a resposta (fig. 14).

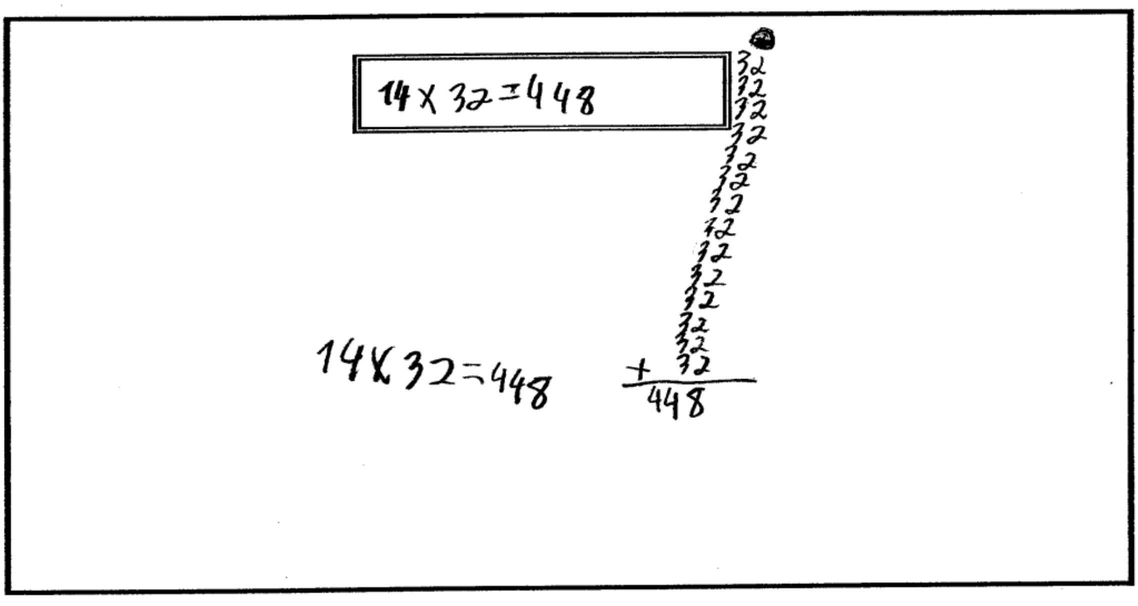


Figura 14. Representação de adições sucessivas de Roberto e Tânia – tarefa 2

Os alunos mostraram que perceberam e entenderam o método que utilizaram e facilmente conseguiram apresentar e explicar a solução de forma correta para a turma através de adições sucessivas.

Roberto: A forma mais fácil é repetirmos o 32.

Tânia: Já sei! 14 x 32 é igual a 32 + 32 + 32… repetimos o 32 catorze vezes.

Roberto: Conseguimos 14 x 32 = 448

Tânia e Roberto compreenderam que 32 + 32 + 32 + 32 (trinta e dois, mais trinta e dois, mais trinta e dois…), também pode ser representado por 14 x 32 (catorze vezes a quantidade trinta e dois.)

Os alunos identificaram que existia uma relação entre as quantidades envolvidas, portanto para realizarem o cálculo adicionaram grupos com o mesmo número de elementos, evidenciando a ideia do sentido aditivo da multiplicação.

Alexandre e Sandra

Tal como os dois pares anteriores, também Alexandre e Sandra recorreram a um procedimento aditivo para determinar o produto do desafio proposto (fig. 15).

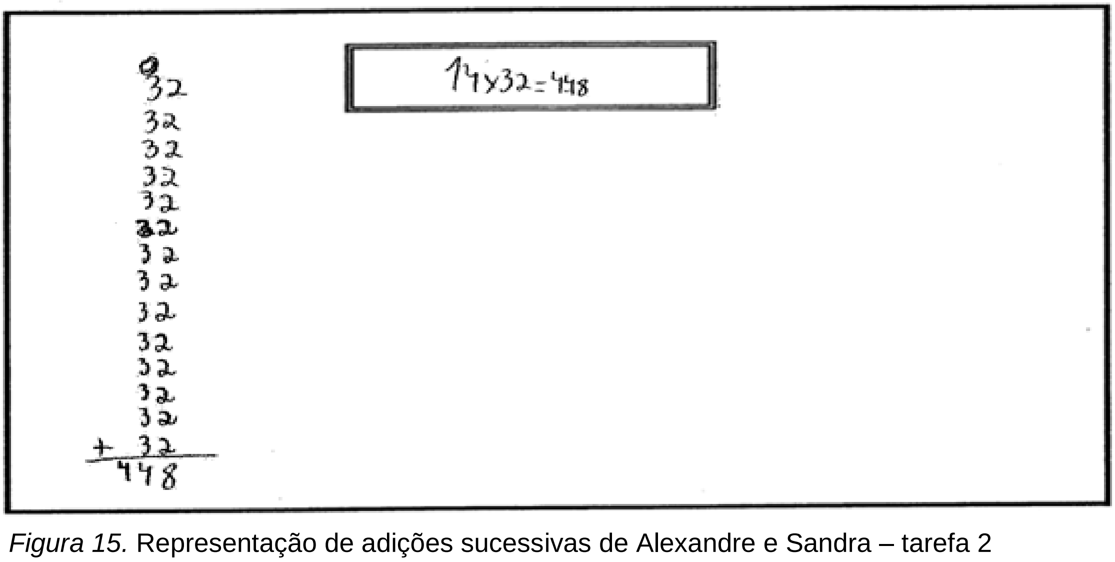


Figura 15. Representação de adições sucessivas de Alexandre e Sandra – tarefa 2

Alexandre e Sandra recorreram a um procedimento que para eles era familiar e frequentemente utilizado para resolver diversos problemas. Assim, utilizaram a adição de parcelas iguais para determinar o produto. Sandra justificou a sua estratégia da seguinte forma:

> Sandra: No início tivemos muita dificuldade, mas depois o Alexandre lembrou-se que podíamos somar várias vezes o 32.
>
> Professora: Várias vezes?
>
> Alexandre: Sim, podíamos juntar o 32 catorze vezes. Fizemos como o Roberto e a Tânia.

Durante a discussão com a turma foi importante analisar com os alunos que ao adicionarem parcelas iguais, tal como representaram os pares anteriores, estavam a construir um processo que os levará a compreender a multiplicação. Reconhecendo, paralelamente, que multiplicar é uma forma de simplificar a adição de parcelas iguais, tal como, compreenderem que quer recorrendo à multiplicação ou à adição sucessiva de parcelas iguais, no final, o resultado encontrado será o mesmo.

Eduardo e Simone

O par Eduardo e Simone recorreu ao algoritmo para encontrar a solução para o problema. Ainda que, o algoritmo ainda não tenha sido explorado na sala de aula, o encarregado de educação do Eduardo já tinha explicado ao aluno como efetuar uma multiplicação com dois algarismos no multiplicador (fig.16).

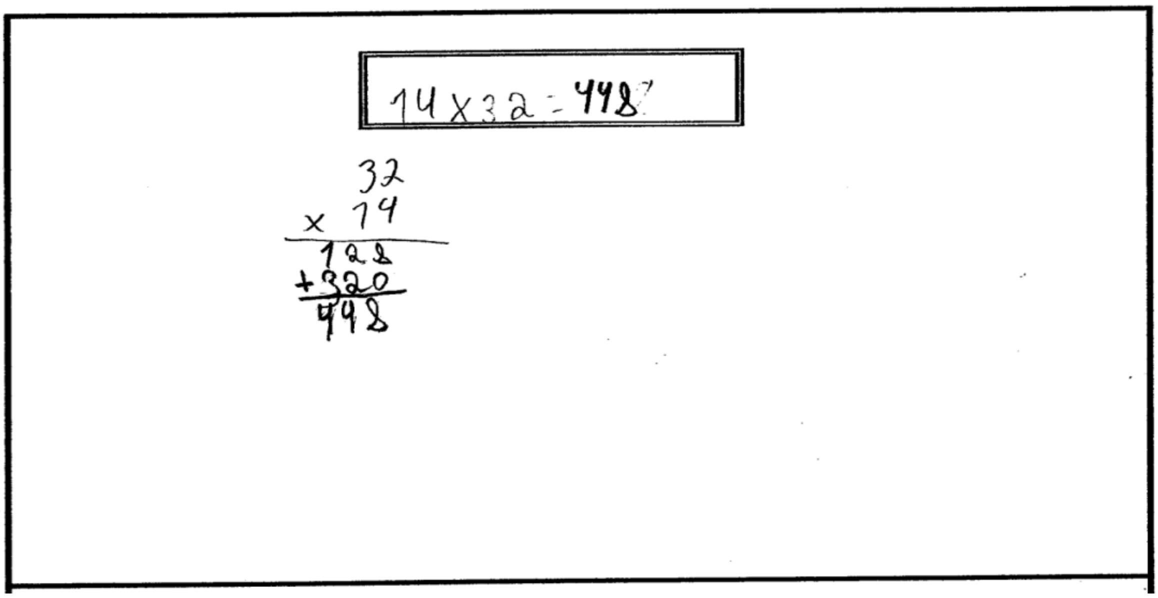


Figura 16. Representação da multiplicação recorrendo ao algoritmo de Eduardo e Simone – tarefa 2

Este par foi o primeiro a resolver o problema, contudo não houve partilha nem interação entre os alunos. Eduardo apenas reproduziu um conjunto de regras que tinha aprendido em casa, sem compreender o significado da operação. Utilizou o algoritmo convencional da multiplicação, no entanto revelou grande dificuldade em explicar o seu método de cálculo.

Durante a partilha com a turma os colegas demonstraram grande interesse e curiosidade pela operação apresentada pelo colega, conforme se representa no diálogo seguinte:

> Eduardo: Fizemos 14 x 32 e começamos por multiplicar o quatro vezes dois e depois fizemos quatro vezes três que deu doze e ficou 128. Agora debaixo do oito vamos fazer um zero.
>
> Roberto: Um zero!! Porquê?
>
> Eduardo: Para dar um número mais avançado.
>
> Alguns alunos: Não estamos a perceber!
>
> Eduardo: Já explico melhor.

Um grande constrangimento para os alunos que utilizam o algoritmo da multiplicação é a dificuldade de compreensão dos registos intermédios, por esse motivo Eduardo não conseguia transmitir aos colegas o processo que utilizou, porque também ele não compreendeu as etapas do algoritmo. Apenas reproduziu o que tinha memorizado.

> Eduardo: Agora vamos fazer a multiplicação mas com o um (1 x 2 = 2 e 1 x 3 = 3) e assim o produto é 320.
>
> Eduardo: E depois somamos os dois resultados 128 + 320 = 448
>
> Jéssica: Onde é que eles foram buscar o 320? Não entendo.
>
> Simone: Multiplicamos o 1 pelo 2 e o 1 pelo 3.
>
> Ricardo: Mas assim dá 32 e eles escreveram 320.
>
> Margarida: Eu também não entendo. Onde foste buscar o zero?
>
> Eduardo: Eu vou explicar. Em cima a operação dá 128 e em baixo para não ficar trinta e dois acrescentei mais um zero para dar um número maior.

Ricardo: Mas estou completamente na mesma continuo sem saber porque é que ele pôs ali um zero.

Tiago: Porque é que fizeram outra conta por baixo da multiplicação.

Eduardo: Eu acrescentei mais porque tinha de juntar o 128 com o 320 para saber o resultado final.

Mariana: Continuo sem perceber o que é que fizeram com o 1 do catorze para dar 320.

Eduardo: Multiplicamos o 1 x 2 deu 2 e o 1 x 3 deu 3 (trinta e dois).

Mariana: Porque é que não colocaram o 2 debaixo do 8? Continuo sem perceber.

Eduardo: Se a conta não tivesse um zero o resultado não dava certo.

Eduardo nunca conseguiu explicar aos colegas que colocava essa resposta na ordem das dezenas porque o algarismo um ocupava a posição das dezenas.

O uso do algoritmo, neste momento, não era um procedimento ainda conhecido dos alunos, no entanto Eduardo ao contrário dos restantes, teve em casa contacto com o algoritmo tradicional, mas não o compreendeu, demonstrando não ser capaz de explicar a posição relativa dos algarismos do multiplicador, em que no resultado parcial o algarismo é deslocado uma posição para a direita. Assim, é visível neste excerto que o aluno para multiplicar aprendeu a memorizar e reproduzir um conjunto de regras e definições para fazer a multiplicação por um número de dois algarismos, um processo puramente mecanizado, resultando, por vezes, num fraco e limitado domínio da operação. Depreende-se que o facto de o aluno fazer uma reprodução correta não envolve consequentemente uma aprendizagem. Neste sentido, pode significar que os alunos que aprendem passivamente sem que ocorra uma descoberta e um entendimento do que estão a fazer quando resolvem a operação, tornam a multiplicação algo difícil. É fundamental que os alunos desenvolvam o seu pensamento lógico matemático, mas não a partir da memorização de procedimentos.

No final da explicação do Eduardo os colegas insistentemente continuavam à procura de um esclarecimento para o conjunto de etapas apresentadas.

No final, foi claro que esta resolução despertou nos alunos uma grande curiosidade pela "complexidade" do que tinha sido apresentado.

Diogo: É uma conta muito difícil. Não percebi quase nada.

Apesar de ter resolvido a situação problemática recorrendo ao algoritmo da multiplicação, Eduardo não conseguiu explicar como chegou à resposta, logo não evidenciou um conhecimento da estrutura que utilizou para resolver 14 x 32. Possivelmente o uso do algoritmo para Eduardo é montar corretamente o algoritmo com os números dados pelo problema, no entanto, foi incapaz de desenvolver um raciocínio matemático para o explicar e resolver.

Ricardo e Anabela

Ricardo e Anabela resolveram esta tarefa de multiplicação utilizando as propriedades da operação (fig. 17).

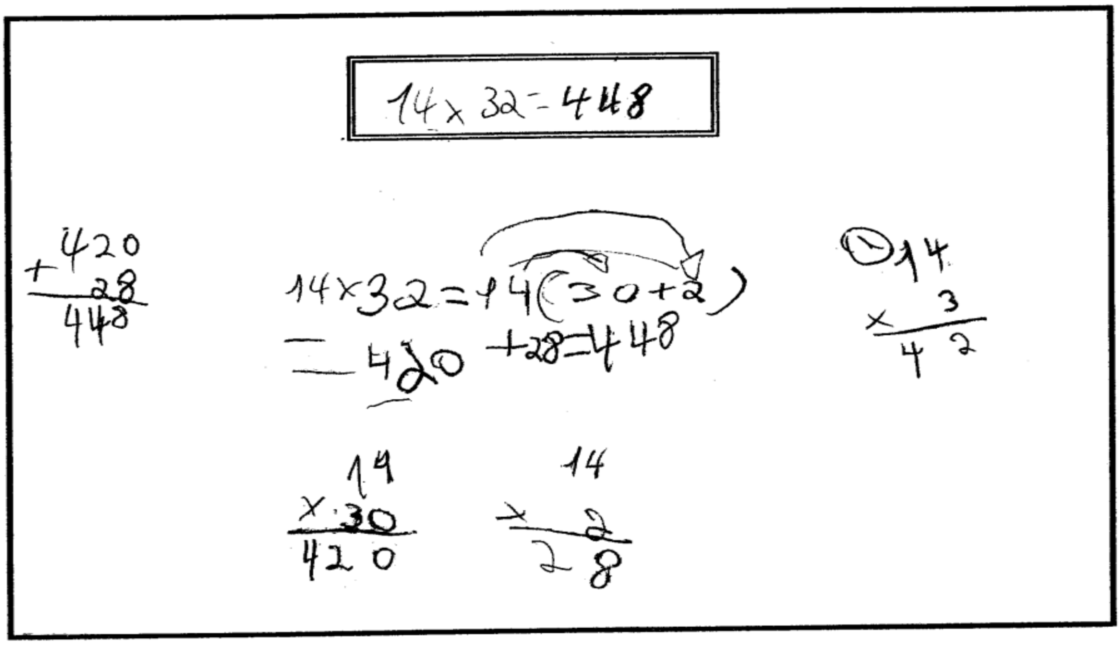


Figura 17. Representação da multiplicação utilizando a propriedade distributiva em relação à adição de Ricardo e Anabela – tarefa 2

Os alunos começaram a explicação para os colegas fazendo referência à importância da decomposição do multiplicador, em que decompõem o 32 em 30 mais 2 e depois recorrendo à propriedade distributiva em relação à adição calculam os produtos parciais e explicam assim o seu procedimento. Esta propriedade está na base da compreensão do algoritmo. Daí a importância de serem os alunos a construírem os seus próprios procedimentos para calcular.

> Anabela: Primeiro vi o 14 x 32 e como não conseguia fazer na "cabeça" fiz o 14 x 30 e o 14 x 2.
>
> Ricardo: Depois para calcular o 14 x 30 não foi nada fácil, mas pensei se zero vezes o zero é zero, então só tinha que calcular 14 x 3 e saber o resultado para pôr na conta.
>
> Ricardo: Foi fácil porque fiz a conta 14 x 3 que deu 42 e fiquei a saber que 14 x 30 são 420. Só tive de acrescentar um zero.

O Ricardo muito confiante continuou o raciocínio para a turma:

> Ricardo: Para descobrir o mistério só tive de fazer 14 x 2 e depois juntar o 420 mais o 28 que deu 448.
>
> Eduardo: Não estou a perceber a conta 14 x 30.
>
> Ricardo: Nós fizemos pela multiplicação, Diogo e Mariana fizeram muitos dois e trintas e nós utilizamos a multiplicação.

Ricardo identificou que a estratégia de resolução para calcular 14 x 2 era equivalente à utilizada pelo par anterior, no entanto ele solucionou através da multiplicação e os colegas através das adições sucessivas. Ricardo sendo um aluno com um cálculo mental satisfatório preocupou-se em encontrar estratégias não de repetição, mas de cálculo rápido e apenas registou os algoritmos para justificar o resultado obtido.

Ricardo evidenciou estabelecer uma relação entre o raciocínio aditivo e multiplicativo, explicando que uma dada quantidade se repete várias vezes, podendo ser apresentada por uma multiplicação.

Os pares seguintes não conseguiram concluir com sucesso o desafio proposto, devido a constrangimentos que surgiram durante a resolução da tarefa.

As diversas resoluções apresentavam ou erros de cálculo e/ou raciocínios matemáticos incompletos, como pode ser observado a seguir.

Martim e Paulo

A primeira resolução apresentada pelos alunos evidencia que sentiram dificuldades na compreensão do procedimento a utilizar (fig.18).

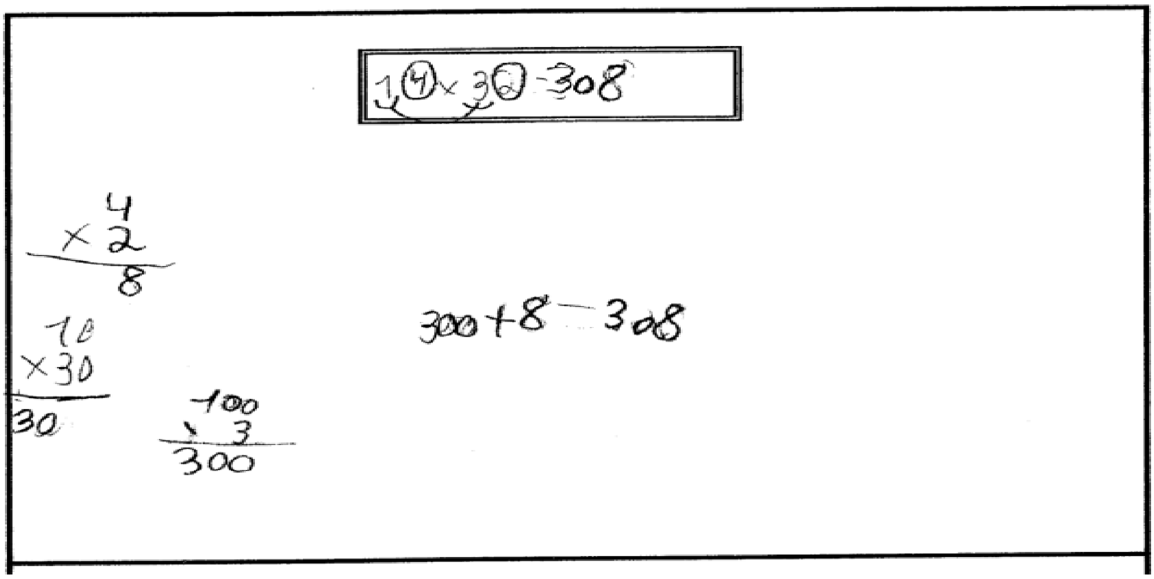


Figura 18. Representação da multiplicação de Martim e Paulo – tarefa 2

É possível constatar através da resolução apresentada pelo par Martim e Paulo, que os alunos não conseguiram representar corretamente o cálculo. Apenas se limitaram a multiplicar as dezenas das duas parcelas e seguidamente as unidades. No final, somaram os produtos parciais obtendo um resultado incorreto.

Os alunos durante a explicação mostraram dificuldades em entender por que razão o resultado não estava correto e explicaram aos colegas:

> Martim: Não percebo porque é que o algoritmo não dá certo, porque comecei por rodear as unidades e sublinhei as dezenas. Depois fiz primeiro as unidades 4 x 2 que são 8 e depois fiz as dezenas. Uma dezena mais três dezenas.

O Martim continuou a explicação:

> Martim: Bem, depois como não conseguíamos multiplicar 10 x 30, então o Paulo teve uma ideia.
>
> Paulo: Sim professora, foi fácil, 10 x 30 é igual a fazermos 100 x 3 e a conta deu 300. Depois somamos os dois e deu-nos 308.

Os alunos multiplicaram as unidades e as dezenas do multiplicando e do multiplicador, adicionaram os dois produtos, mas não consideraram o algarismo das dezenas do multiplicador.

Restantes pares

Alguns alunos, numa primeira fase, desenvolveram raciocínios relacionados com a decomposição do multiplicador de modo a facilitar os cálculos, estando subentendida a propriedade distributiva em relação à adição embora não a identifiquem de modo formal, contudo não conseguiram encontrar a resposta correta como mostram as resoluções seguintes (fig.19 e 20).

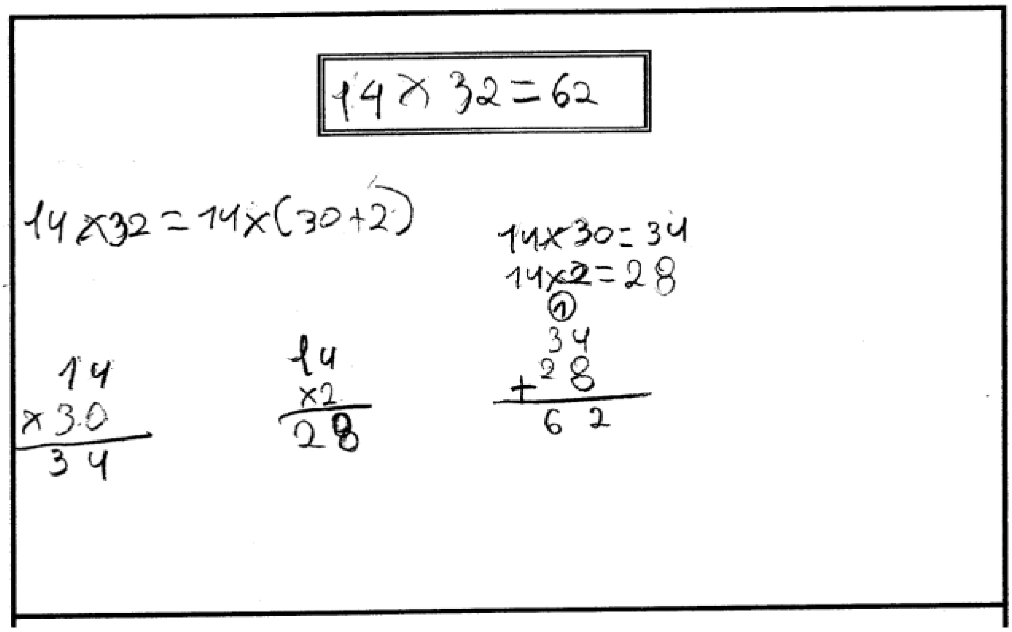


Figura 19. Procedimento de Laura e Armanda - tarefa 2

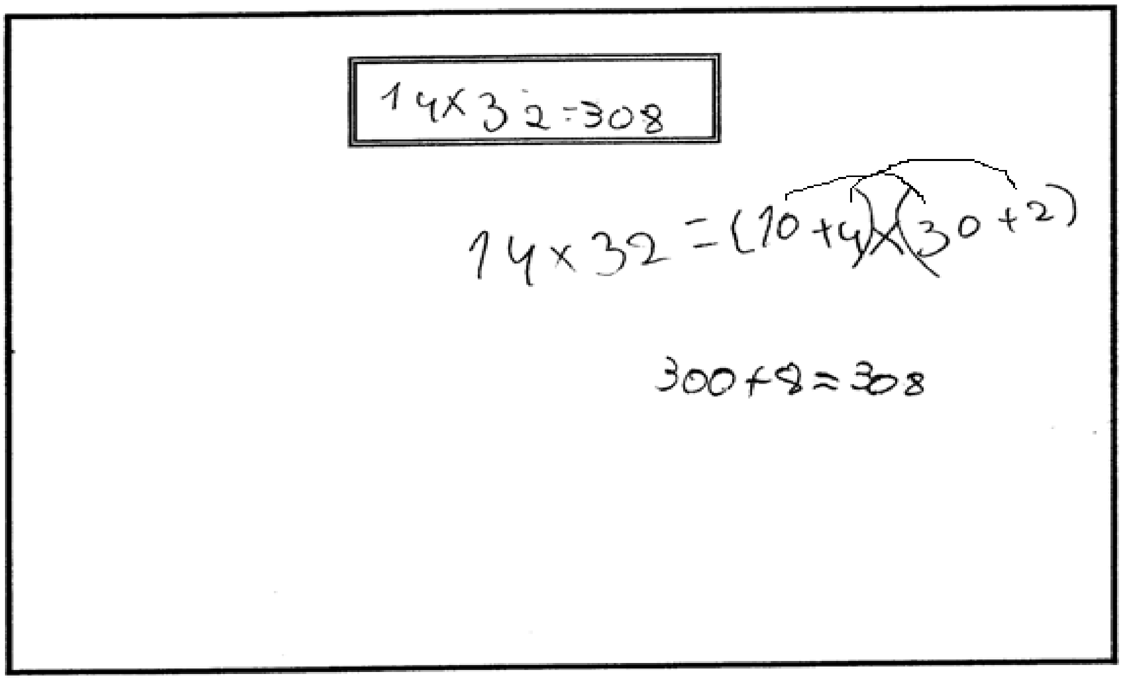


Figura 20. Procedimento de Jéssica e Gabriel - tarefa 2

No final de todas as tarefas, os diversos grupos registaram no quadro como chegaram ao resultado, tendo sempre o cuidado de valorizar a criatividade que cada um usava para expressar verbalmente o que ia representando para os colegas. Os alunos participaram com interesse e mostraram um grande envolvimento no decorrer das atividades o que facilitou o processo de aprendizagem. A partilha dos procedimentos, muitas vezes, era feita pelos dois alunos que combinavam previamente a etapa que iriam explicar aos colegas. Durante este processo não percepcionei que houvesse alunos mais inibidos, no entanto quando algum elemento do par sentia maior dificuldade, rapidamente o colega o ajudava a fazer o registo oral. Foi interessante verificar como os alunos interagiram e colaboraram para conseguirem uma solução para as tarefas.

<u>Apresentação e breve discussão dos resultados obtidos</u>

Tabela 10. *Tabela representativa do número de resoluções corretas e incorretas relativa ao desafio "Já sei multiplicar".*

GRUPOS (Pares)	Resolução correta	Resolução incorreta
Grupo 1	X	
Grupo 2	X	
Grupo 3	X	
Grupo 4		X
Grupo 5	X	
Grupo 6		X
Grupo 7		X
Grupo 8	X	
TOTAL	5	3

Ao longo da tarefa surgiram vários procedimentos, contudo nem todos os pares conseguiram chegar à solução com sucesso. Verificou-se que maioritariamente os grupos encontraram uma resolução eficaz para a resolução do problema que os conduziu a um resultado correto. No entanto, constatou-se ainda que três pares não conseguiram chegar na totalidade à solução, uma vez que utilizaram procedimentos incompletos, indeterminados e alguns apresentavam erros de cálculo.

Os alunos que evidenciam maior capacidade matemática desenvolveram mais rapidamente diversos mecanismos para encontrarem a resolução correta do problema. Esta tarefa mostrou que os alunos mesmo sem terem adquirido a técnica do algoritmo podem chegar a uma solução correta, parecendo que o sucesso de alguns pares se deveu à interação e ao trabalho colaborativo entre eles.

Síntese dos procedimentos utilizados pelos alunos

Os alunos representaram as suas ideias matemáticas de diversas formas, pois agiram em liberdade para construir as suas próprias estratégias de cálculo. Contudo, a maioria dos alunos privilegiou o procedimento que implicava o recurso à adição de parcelas iguais. Na tabela seguinte estão quantificados os procedimentos usados pelos pares para solucionarem a tarefa (tabela 11).

Tabela 11. *Procedimentos utilizados pelos alunos - tarefa 2.*

Procedimentos	**Pares**	
Adição de parcelas iguais	3 pares	Mariana/Diogo Roberto/Tânia Alexandre/Sandra
Multiplicação com recurso ao algoritmo	1 par	Eduardo/Simone
Multiplicar utilizando a propriedade distributiva em relação à adição	1 par	Ricardo/Anabela
Resultados incorretos	3 pares	Martim/Paulo Laura/Armanda Jéssica/Gabriel

Durante a resolução da tarefa foram identificadas três estratégias distintas: adição de parcelas iguais, multiplicação com recurso ao algoritmo e multiplicação utilizando a propriedade distributiva em relação à adição.

A estratégia mais usada pelos pares para chegar à solução correta foi a adição sucessiva de parcelas iguais.

No quadro é possível verificar que a maior parte dos alunos foram capazes de resolver os problemas de multiplicação com sucesso, mesmo antes de aprenderem o algoritmo com dois algarismos no multiplicador.

É importante realçar que alguns pares utilizaram algumas propriedades de multiplicação, nomeadamente a propriedade distributiva para a resolução do problema.

Um par apresentou de forma adequada o resultado através do algoritmo, no entanto, não compreendeu nem conseguiu clarificar aos colegas a construção do método utilizado. Os restantes pares utilizaram a estrutura aditiva para chegar ao resultado.

Durante a tarefa foi perceptível que alguns alunos fizeram diversas tentativas de registo, na folha, até alcançarem a resultado final. No entanto, três pares registaram resultados incorretos com valores diferentes do que era previsível, contudo foi explícito o uso de algumas propriedades e o pensamento aditivo nas suas resoluções.

Um par apresentou uma estratégia de cálculo associada à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. A evolução do raciocínio aditivo para o multiplicativo ocorre de forma gradual tendo-se constatado que alguns pares recorreram à adição repetida de parcelas, por se sentirem mais confortáveis. Este procedimento propícia, por vezes, um maior número de erros devido ao número de parcelas, mas, neste caso, foi um constrangimento que os pares superaram com êxito.

Também foi possível verificar que alguns pares usaram outros procedimentos de cálculo, como o recurso à decomposição, evidenciando a utilização das propriedades da multiplicação e a necessidade de começarem a substituir a adição de parcelas iguais pela multiplicação, um método mais eficaz e rápido. Esta diferenciação de estratégias parece indicar diferentes níveis de aprendizagem da multiplicação.

A tarefa apresentada poderá ser útil para que os alunos, depois de compreenderem o que fizeram e como fizeram, evoluírem gradualmente para o algoritmo da multiplicação. Assim, torna-se fundamental que os alunos contactem com várias situações ligadas à multiplicação e às suas propriedades de forma a calcularem com significado.

Apesar das estratégias diferentes os alunos privilegiaram o uso das adições repetidas para resolverem as multiplicações.

3.ª TAREFA – "Problema com azulejos"

Na exploração da 3.ª tarefa estiveram envolvidos vinte alunos que trabalharam a pares de forma autónoma.

Depois da leitura do enunciado do problema a maioria dos alunos evidenciou ter compreendido a questão, pois não expuseram qualquer dúvida e calmamente conversaram entre si registando o seu raciocínio. O trabalho em conjunto permitiu que os alunos partilhassem as suas ideias e antes de chegarem a uma solução, foram alterando as suas estratégias de acordo com o pensamento matemático de ambos.

Na análise das produções dos pares, foram identificadas as estratégias usadas pelos alunos para resolverem a tarefa de multiplicação baseando-se num contexto retangular. A situação problemática apresentada aos alunos subdividia-se em duas partes. A primeira parte incluía três subtarefas: os azulejos já colocados, os azulejos que faltam colocar e o número total de azulejos. A segunda parte sustenta um contexto retangular em que os alunos têm de determinar o número de azulejos da parede, contudo estes não aparecem totalmente percetíveis tornando-se mais difícil para os alunos usarem estratégias de contagem ou adição, assim como procedimentos válidos e apropriados.

1.ª Parte

Subtarefa 1 - "Os azulejos já colocados"

Contagem de um em um

O primeiro par a intervir foi Martim e Paulo que recorreram à estratégia de contagem de um a um para encontrar o número correto de azulejos existentes na parede. Pode constatar-se que os alunos fizeram uma marca em cada azulejo para indicar a contagem de um em um (fig.22).

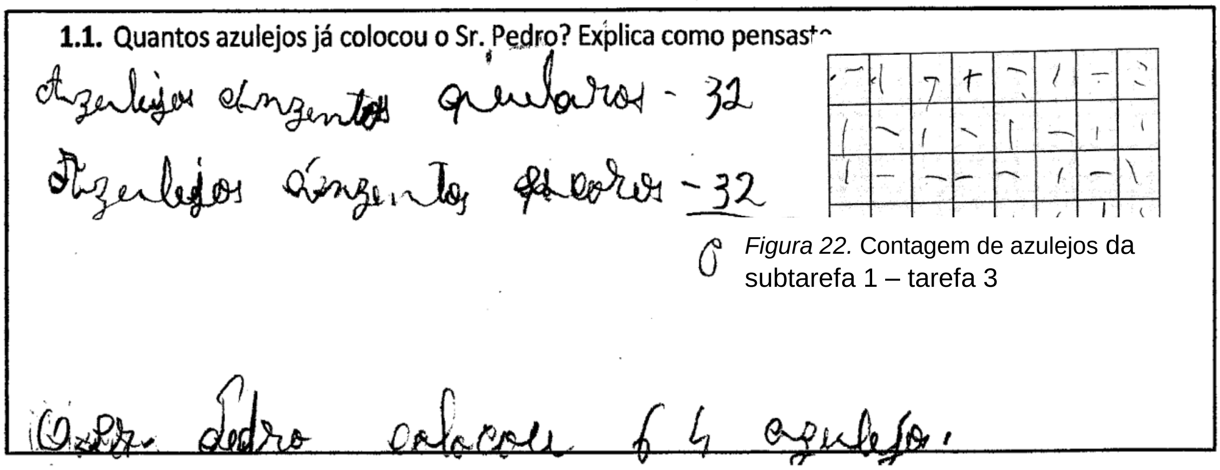


Figura 22. Contagem de azulejos da subtarefa 1 – tarefa 3

Figura 21. Estratégia de contagem de Martim e Paulo da subtarefa 1 – tarefa 3

Martim: Primeiro contámos todos os azulejos claros e fomos marcando com um risco, para contarmos só uma vez, e vimos que eram 32. Depois fizemos a mesma coisa para os cinzentos-escuros.

Martim utiliza uma estratégia de contagem de azulejos em que registou uma marca em cada azulejo. Primeiro determinou os azulejos claros que são 32 e depois adicionou mais 32 azulejos cinzentos-escuros e concluiu corretamente que tem 64 azulejos, porque o total de marcas feitas são 64 (fig.21). Aproveitando a figura com a disposição dos azulejos os alunos poderiam, de alguma forma, proceder à contagem usando alguns agrupamentos e não apenas uma contagem unitária.

Contagem por filas

Seguidamente, o par Sandra e Alexandre apresentaram a sua verbalização sobre a resolução do problema. Os alunos utilizaram uma estratégia que contavam as linhas (fig. 23).

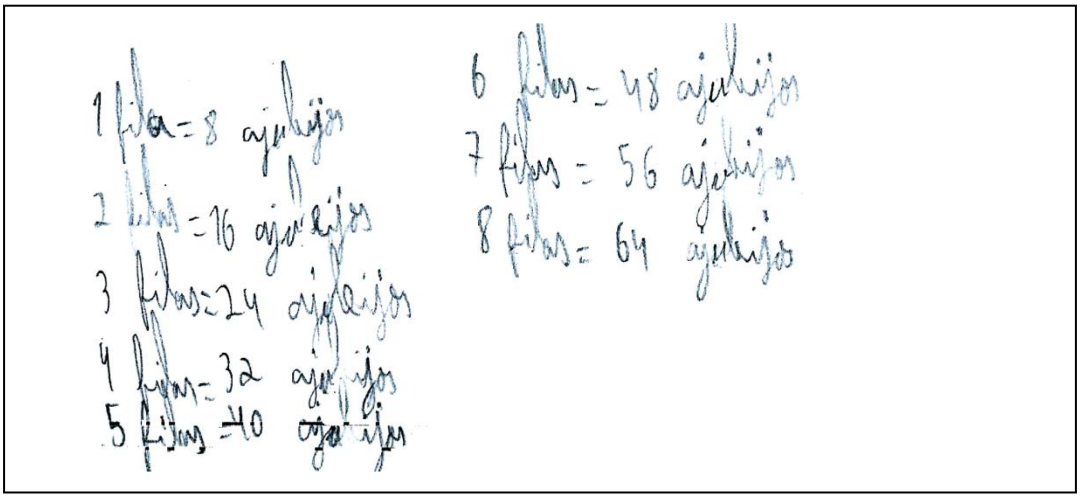


Figura 23. Estratégia de contagem de Sandra e Alexandre da subtarefa 1 – tarefa 3

Apenas o par Sandra e Alexandre contaram as linhas e foram acrescentando sempre 8 ao número anterior para descobrirem o número de azulejos que formava a parede do ginásio e explicitaram o seu raciocínio da seguinte forma:

> Sandra: Eu e o meu colega começámos por escrever o número de filas e vimos que eram 8. Depois vimos que a primeira fila tinha 8 azulejos, então fomos sempre juntando mais 8. No final, deu-nos 64 azulejos.
>
> Professora: Podiam ter utilizado outra estratégia que substituísse a contagem das linhas.
>
> Alexandre: Podíamos multiplicar, mas como não sabíamos bem a tabuada do 8 quisemos somar sempre 8 à fila anterior para não nos enganarmos.

De acordo, com a explicação do Alexandre a multiplicação poderia ter-se revelado uma alternativa eficiente à contagem das linhas, porém, como a tabuada do 8 ainda não estava bem consolidada e memorizada, foi um grande constrangimento para os alunos. O facto, da ordem de grandeza dos números envolvidos ser menor influenciou a eficácia da estratégia utilizada. Os alunos completaram uma sequência com uma contagem de filas que traduz como se apoiaram na representação anterior para prosseguirem para a seguinte.

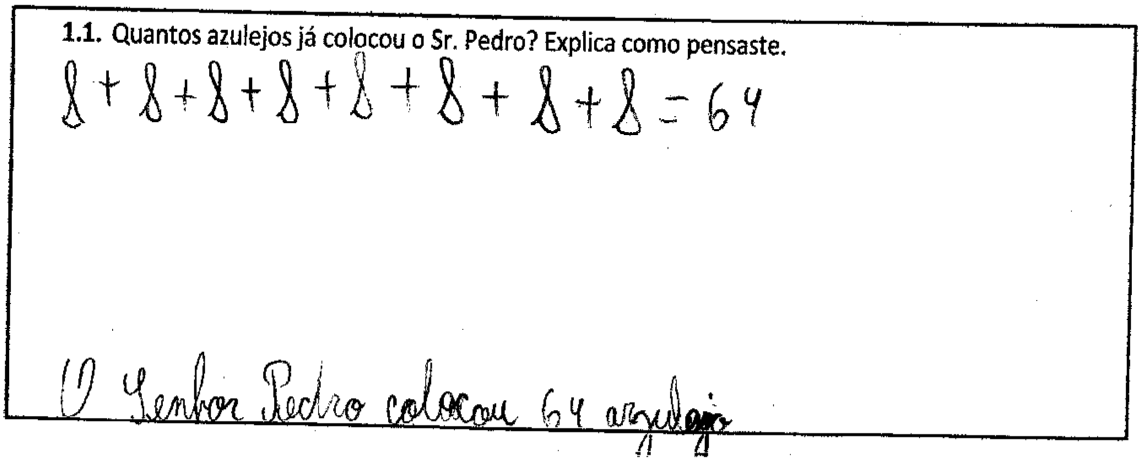
Os alunos sentiram alguma dificuldade em solucionar o problema, enquanto outros grupos estavam empenhados na resolução do problema e aparentavam estar a conseguir fazê-lo com alguma facilidade, este par não fazia qualquer registo. No entanto, parecia que estavam a perceber o enunciado, mas não avançavam na resolução do problema. Assim, após dialogarem durante algum tempo recorreram à contagem de linhas, uma estratégia mais concreta e fácil de realizar. Sandra ainda clarificou que apoiaram-se na construção da tabuada do oito para resolver o problema, então:

> Sandra: Demorámos algum tempo para fazer, mas depois foi como fazer a tabuada do 8.

A organização do registo da Sandra e Alexandre evidencia que compreenderam a existência de uma regularidade de sequência, começando a contar de 8 em 8 recorrendo a uma estratégia aditiva. Assim, os alunos evidenciam que identificaram o número oito como um padrão e relacionaram-no com os próximos termos.

Adição sucessiva

Seguiu-se a apresentação do par Eduardo e Simone tal como Laura e Armanda recorreram à adição de parcelas iguais para descobrirem o número de azulejos existentes no ginásio da escola. Neste sentido, os alunos adicionaram para multiplicar, estando presente a ideia de que uma mesma quantidade se repete várias vezes. Estes pares ao recorrerem ao cálculo aditivo evidenciaram um nível de contagem mais eficaz que o par anterior.


1.1. Quantos azulejos já colocou o Sr. Pedro? Explica como pensaste.

8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 64

O Senhor Pedro colocou 64 azulejos

Figura 24. Estratégia de contagem de Eduardo e Simone da subtarefa 1 – tarefa 3

Os alunos justificaram a sequência de cálculos da seguinte forma:

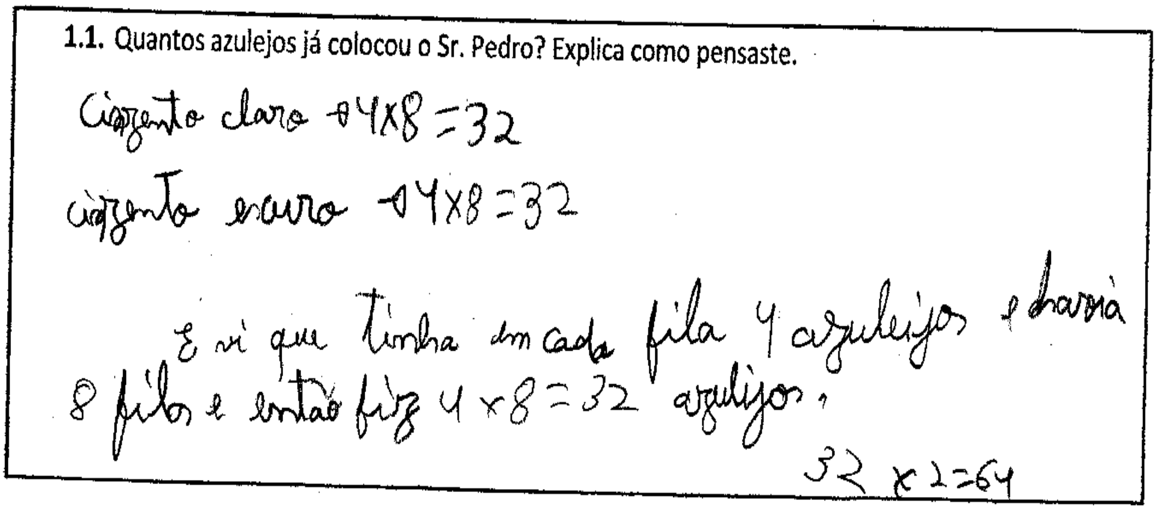
> Eduardo: Eu vi que em cada fila tinha 8 azulejos e juntamos 8 + 8 + 8… e depois fomos fazendo as contas juntando sempre dois números até chegar ao 64.

Pela explicação e representação dos cálculos realizados podemos verificar que os alunos efetuaram a adição de 8 parcelas iguais a 8, identificando oito filas com 8 azulejos cada uma. Seguidamente adicionaram as parcelas duas a duas (8 + 8 = 16); (16 + 16 = 32); (32 + 32 = 64), considerando a ideia da adição de dobros até encontrarem o número correto de azulejos existentes na parede.

Multiplicação

Grande parte dos alunos privilegiou a multiplicação com recurso ao modelo retangular para determinar o número de azulejos existentes na parede.

A figura seguinte mostra como o par Diogo e Mariana identificaram que existiam 8 filas e cada uma era constituída por 8 azulejos e a partir deste pensamento matemático chegarem à resposta correta emergindo a multiplicação como estratégia principal (fig. 25).



1.1. Quantos azulejos já colocou o Sr. Pedro? Explica como pensaste.

Cinzento claro → 4x8 = 32

cinzento escuro → 4x8 = 32

E vi que tinha em cada fila 4 azulejos e havia 8 filas e então fiz 4 x 8 = 32 azulejos,

32 x 2 = 64

Figura 25. Estratégia de multiplicação de Mariana e Diogo da subtarefa 1 – tarefa 3

Os alunos explicaram para a turma o seu raciocínio sem qualquer hesitação:

> Mariana: Nós reparámos que a imagem tinha as duas primeiras partes pintadas e a última ainda estava por pintar. Então, resolvemos contar cada parte para fazer a multiplicação e fizemos lado vezes o outro lado, ou seja, 4 x 8 = 32.
>
> Diogo: E como as partes tinham o mesmo tamanho contámos 2 vezes o 32 que deu 64.
>
> Laura: Mas também podiamos contar os quadradinhos deste lado (filas) que são 8 vezes os quadradinhos com as duas cores e ficava 8 x 8 que dava 64.

O facto de os alunos se sentirem mais confiantes e seguros a utilizar a adição poderá ser uma das razões para o seu uso mais frequente em substituição, muitas vezes, da multiplicação, outra razão poderá depender da menor grandeza dos números envolvidos

Margarida e Joana, resolveram a situação problemática de forma semelhante ao par anterior, no entanto, durante a partilha com o par possibilitou exploração da propriedade comutativa da multiplicação. Os alunos ficaram bastante interessados na situação problemática das colegas, porque surgiu uma dúvida que despoletou um grande momento de partilha (fig.26).

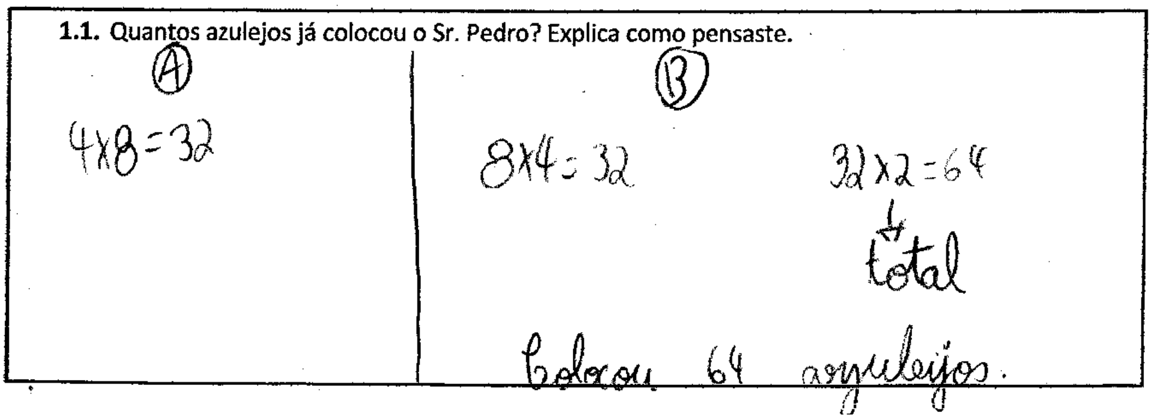


Figura 26. Estratégia de multiplicação de Margarida e Joana da subtarefa 1 – tarefa 3

O Ricardo durante a apresentação do procedimento da Margarida e da Joana colocou a seguinte observação:

> Ricardo: Não entendo por que razão na conta A Matilde colocou 4 x 8 = 32 e na B colocou 8 x 4 = 32.
>
> Margarida: Porque as duas cores são iguais e eu posso fazer as linhas vezes as colunas ou ao contrário. Dá a mesma coisa.
>
> Ricardo: Já percebi, como aparecem na tabuada uma da outra o resultado é igual.
>
> Diogo: A diferença entre 4 x 8 e 8 x 4 é que os números aparecem invertidos.
>
> Professora: Invertidos?

Diogo: Sim, é a mesma coisa só que trocaram os números 4 e 8.

Eduardo: O 4 x 8 é a mesma coisa que 8 x 4, porque posso repetir o 8 quatro vezes e se trocar repito o 4 oito vezes e dá o mesmo resultado.

Alguns alunos evidenciaram que entenderam e conseguiram aplicar a propriedade comutativa da multiplicação, no entanto nunca utilizaram esta terminologia. Os alunos que intervieram compreendem que podiam trocar-se a ordem dos fatores sem que o resultado se alterasse 4 x 8 = 8 x 4 = 64 - as expressões são equivalentes.

Ricardo e Anabela foram o único par que não conseguiu solucionar corretamente a primeira situação problemática, isto porque contabilizou toda a área da parede incluindo os azulejos que estavam pintados de cinzento-claro e cinzento-escuro, assim como os que faltavam ainda colocar na parede (fig. 27).

$$32+32+32=96$$

Figura 27. Solução incorreta de Ricardo e Anabela da subtarefa 1 – tarefa 3

<u>Síntese dos procedimentos utilizados pelos alunos</u>

Na tabela seguinte pode observar-se os procedimentos que os alunos utilizaram para resolverem a primeira questão da tarefa que pretendia conhecer quantos azulejos de diferentes tonalidades já teriam sido colocados.

Tabela 12. - Procedimentos *utilizados pelos alunos*

Procedimentos	Número de pares
Contagem de um em um	**1**
Contagem de linhas ou colunas	**1**
Adição de parcelas iguais	**2**
Multiplicação com recurso ao modelo retangular	**4**
Algoritmo da multiplicação	**1**
Resultados incorretos	**1**

A tabela mostra a diversidade de estratégias utilizadas pelos alunos para resolver a primeira questão desta tarefa, tendo que calcular quantos azulejos já tinham sido colocados na parede do ginásio. Os dados foram recolhidos a partir dos registos realizados pelos alunos.

Foram apresentadas e discutidas quatro estratégias distintas: estratégias de contagem, estratégias aditivas e estratégias de multiplicação com recurso ao modelo retangular ou utilização do algoritmo. A multiplicidade de estratégias refletiram uma variedade de níveis de compreensão dos alunos. Estas representações foram partilhadas coletivamente com a turma para compreender que estratégias surgiram em cada par e proporcionar novas oportunidades de aprendizagem.

O par Martim e Paulo foi o único que contou os azulejos um a um para determinar a solução do problema. Sandra e Alexandre contaram as linhas e apoiados na tabuada do 8 foram adicionando as filas de azulejos.

Eduardo e Simone, assim como Laura e Armanda basearam-se em procedimentos aditivos para justificar o resultado obtido, ambos adicionaram sucessivamente o algarismo 8.

A maioria dos pares utilizou um procedimento multiplicativo tendo recorrido a um contexto retangular que acabou por facilitar a compreensão do problema, assim como a apresentação dos cálculos. Apenas um par recorreu ao algoritmo da multiplicação.

Os dados registados na tabela são significativos para perceber que metade dos pares, recorreu a uma estratégia mais formal associada à multiplicação para resolver o problema. Assim, foi importante a discussão de outros resultados e estratégias para os alunos abandonarem a contagem unitária e passarem a utilizar procedimentos mais eficientes, como a multiplicação.

Um par devido a uma interpretação incorreta da figura acabou por calcular toda a área da parede incluindo os azulejos que ainda estavam por colocar. Neste sentido, devido incompreensão do enunciado não determinaram corretamente o número de azulejos.

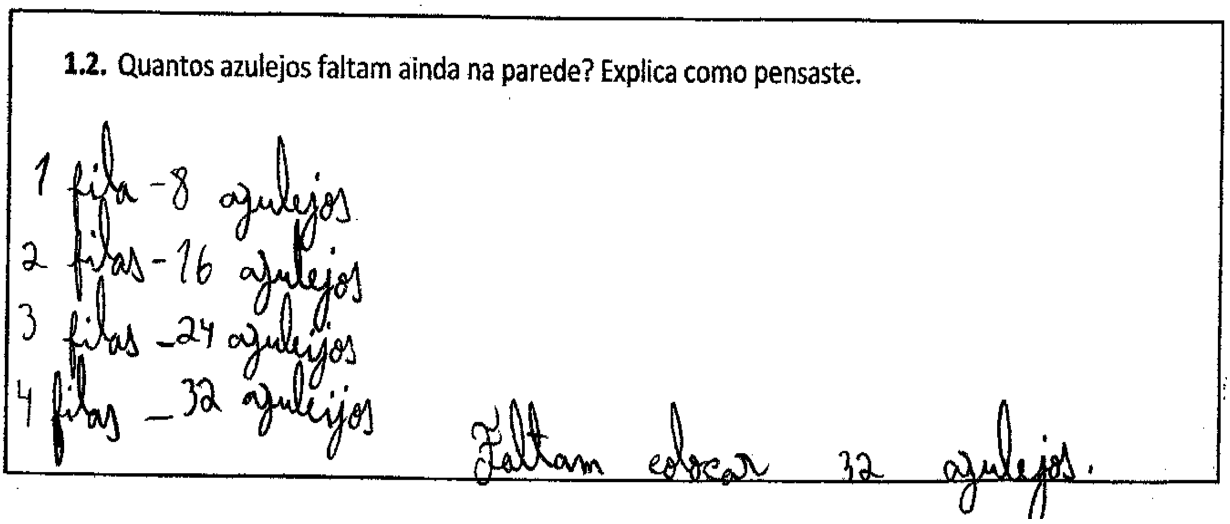
Subtarefa 2 - " Os azulejos que faltam colocar"

Para determinar quantos azulejos ainda faltam colocar os alunos utilizaram três estratégias distintas: contagem por filas, adição sucessiva de parcelas iguais e multiplicação.

Ao analisar as produções dos alunos foi possível verificar que nenhum par recorreu à contagem unitária de azulejos para solucionar o problema.

<u>Contagem por filas</u>

Sandra e Alexandre foram o único par que recorreu a uma estratégia de contagem de filas para determinar o número de azulejos que faltava na parede (fig. 28). Apesar de ambos reconhecerem que existiam estratégias mais eficazes para resolver a subtarefa, acabaram por explicar que utilizaram o mesmo procedimento porque os números envolvidos eram relativamente pequenos.



1.2. Quantos azulejos faltam ainda na parede? Explica como pensaste.

1 fila - 8 azulejos
2 filas - 16 azulejos
3 filas - 24 azulejos
4 filas - 32 azulejos

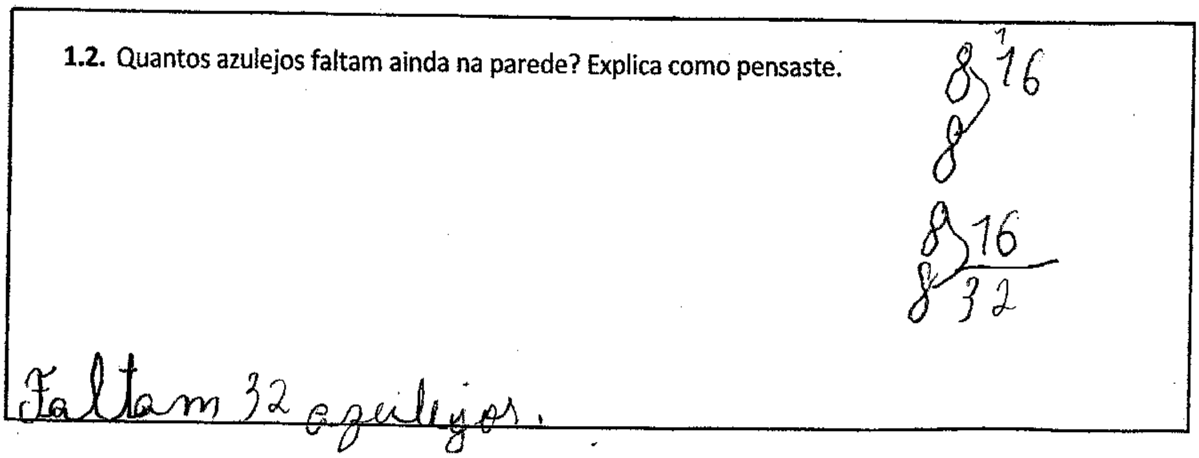
Faltam colocar 32 azulejos.

Figura 28. Estratégia de multiplicação de Sandra e Alexandre da subtarefa 2 – tarefa 3

<u>Adição sucessiva</u>

A partir da disposição retangular de azulejos (organização por linhas e colunas) o par Martim e Paulo que anteriormente recorreu a uma estratégia de contagem unitária alterou para um procedimento de adição por agrupamentos 8 + 8 + 8 + 8.

Neste procedimento de cálculo aditivo os alunos agruparam e somaram as parcelas duas a duas até determinarem o número de azulejos que ainda faltava colocar (fig.29).



1.2. Quantos azulejos faltam ainda na parede? Explica como pensaste.

8
8 16

8
8 16
32

Faltam 32 azulejos.

Figura 29. Procedimento aditivo de Martim e Paulo da subtarefa 2 – tarefa 3

Martim explicou como realizou os agrupamentos sem precisar de contar os azulejos um a um, e durante a explicação surgiu o reconhecimento da multiplicação a partir da adição de parcelas iguais:

> Martim: Nós fizemos o 8 quatro vezes, depois vimos que 8 + 8 dava 16 e 16 + 16 dava 32.
>
> Diogo: Por que fizeram logo o 8?
>
> Martim: Porque vimos que cada fila tinha 8 azulejos e depois somamos as 4 filas, duas a duas: 8 + 8 = 16 e 8 + 8 = 16.
>
> Eduardo: Por que fizeram por filas?
>
> Paulo: Porque era um cálculo mais fácil. Há menos filas.
>
> Mariana: Mas podiam ter contado as colunas 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4. Também dava.

A situação acima descrita evidencia que mais uma vez os alunos demonstraram uma maior compreensão e apropriação da propriedade comutativa ao reconhecerem que 4 x 8 = 32 dá o mesmo produto que 8 x 4 = 32.
No momento da discussão um par salientou que na imagem do enunciado foi possível observar que a parede onde faltava colocar os azulejos era composta por quatro filas e cada uma constituída por 8 azulejos.
Tal como Martim e Paulo, o par Margarida e Joana também utilizaram um procedimento aditivo para resolverem o problema.

<u>Multiplicação</u>

O facto de o contexto apresentar uma disposição retangular conduziu a que um maior número de pares utilizasse procedimentos associados à multiplicação em substituição das estratégias aditivas. Contudo, Eduardo e Simone descreveram uma estratégia aditiva associada ao pensamento multiplicativo (fig. 30). Na exploração desta subtarefa o par empregou conjuntamente a adição e multiplicação.

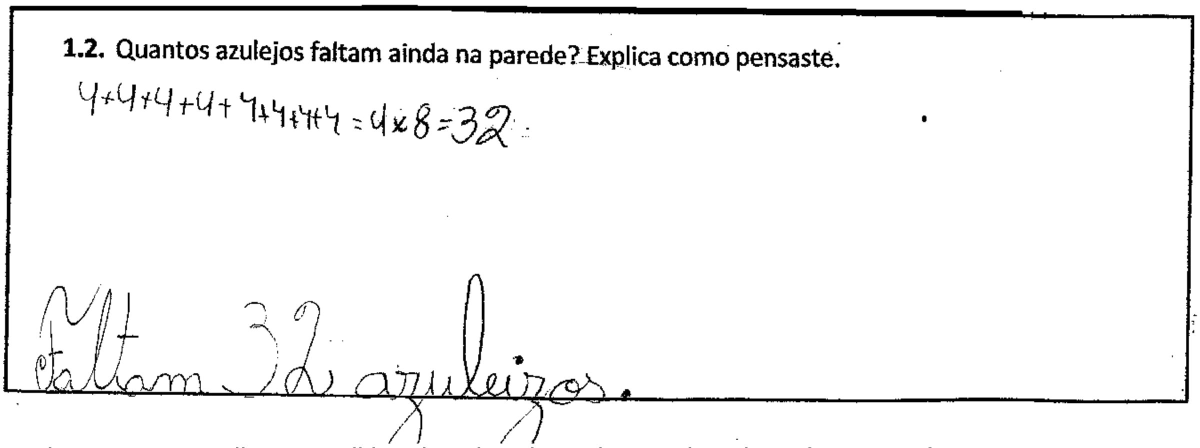


Figura 30. Procedimento aditivo de Eduardo e Simone da subtarefa 2 – tarefa 3

O Eduardo explica de uma forma descontraída a sua estratégia para a turma:

> Eduardo: Somámos 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 e vimos que estávamos a repetir o 4 oito vezes e foi isso que escrevemos, ou seja, 4 x 8 = 32
> Diogo: Mas por que em vez de repetirem o 4 tantas vezes não fizeram logo 4 x 8 = 32.
> Eduardo: Tens razão, mas escrevemos primeiro as colunas e só depois é que multiplicamos.

Nesta estratégia foi possível reconhecer que os alunos envolveram simultaneamente a adição e a multiplicação. Constatando-se uma apropriação gradual da multiplicação, uma vez que identificaram 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 tem o mesmo significado de 8 x 4. Está patente que os alunos adquiriram e compreenderam as relações existentes entre a adição e a multiplicação. No seguimento da discussão constatou-se que todos os outros grupos registaram da mesma forma o seu pensamento (fig. 31).

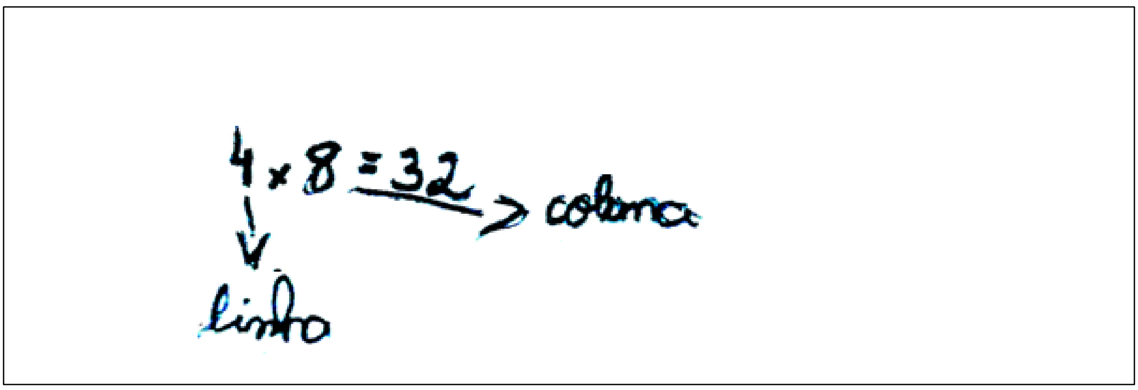


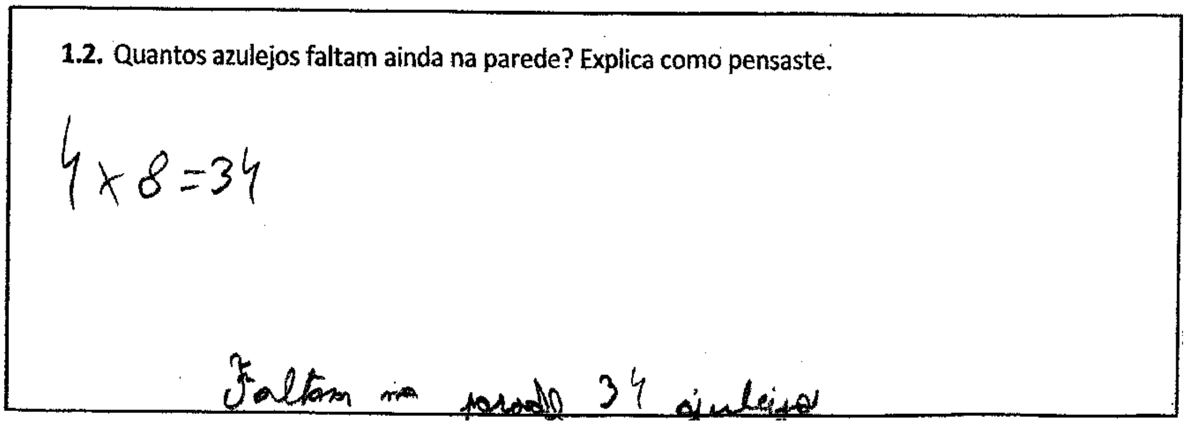
Figura 31. Procedimento multiplicativo de Roberto e Tânia da subtarefa 2 – tarefa 3

Roberto referiu que a sua estratégia foi idêntica à do Martim, no entanto registou mentalmente a repetição da parcela 8 facilitando assim os cálculos que realizou. Assim, apresentou da seguinte forma para a turma:

> Roberto: Temos 4 x 8, porque em linha contámos 4 e em coluna contámos 8. Assim, ficámos a saber rapidamente que ainda faltavam colocar 32 azulejos na parede.

Tanto Roberto como os outros pares utilizaram uma forma de cálculo mental e escrito para resolver a operação de multiplicação discutindo diferentes representações que foram aparecendo para o mesmo produto.

Apenas o par Raul e Teodoro não solucionaram com êxito a subtarefa 2, apesar de desenvolverem uma estratégia de multiplicação apropriada e compreensível. Contudo, o produto final apresentado está incorreto, devido à existência de um erro de cálculo numérico (fig.32). Este erro não revelou falta de compreensão dos conceitos de número e cálculo.


1.2. Quantos azulejos faltam ainda na parede? Explica como pensaste.

4 x 8 = 34

Faltam na parede 34 azulejos

Figura 32. Solução incorreta de Raul e Teodoro da subtarefa 2 – tarefa 3

O Raul identificou rapidamente o erro:

> Raul: Enganei-me a fazer a tabuada "de cabeça", 4 x 8 dá 32 e não 34.

O erro de cálculo derivou essencialmente da utilização incorreta da tabuada do 4, o que influenciou o produto obtido. Os alunos evidenciam que sabiam determinar os azulejos que faltavam identificando a multiplicação como estratégia, porém não efetuam o produto corretamente.

<u>Síntese dos procedimentos utilizados pelos alunos</u>

Na tabela seguinte podem observar-se os procedimentos que os alunos utilizaram para resolverem a segunda questão da situação problemática que pretendia apurar quantos azulejos faltavam ainda colocar na parede.

Tabela 13. *Procedimentos utilizados pelos alunos da subtarefa 2 – tarefa 3*

Procedimentos	Número de pares
Contagem de um em um	**0**
Contagem de linhas ou colunas	**1**
Adição de parcelas iguais	**2**
Multiplicação com recurso ao modelo retangular	**5**
Algoritmo da multiplicação	**1**
Resultados incorretos	**1**

Durante a tarefa foram identificadas quatro estratégias diferenciadas: contagem de linhas, adição de parcelas iguais e multiplicação para calcular o número de azulejos que precisam de ser colocados novamente na parede.

Dos dez pares nove responderam com êxito à resolução da tarefa e para um mostrou-se inadequada.

A multiplicação salientou-se relativamente aos restantes procedimentos, demonstrando que os alunos começaram a utilizar estratégias mais eficazes. Portanto, seis grupos responderam corretamente utilizando este procedimento. Verificou-se que dois pares ainda recorreram à repetição de parcelas iguais e um par manteve a estratégia anterior que procedeu à contagem de linhas para solucionar o número de azulejos que faltavam colocar.

Subtarefa 3 – “Colocar os azulejos”

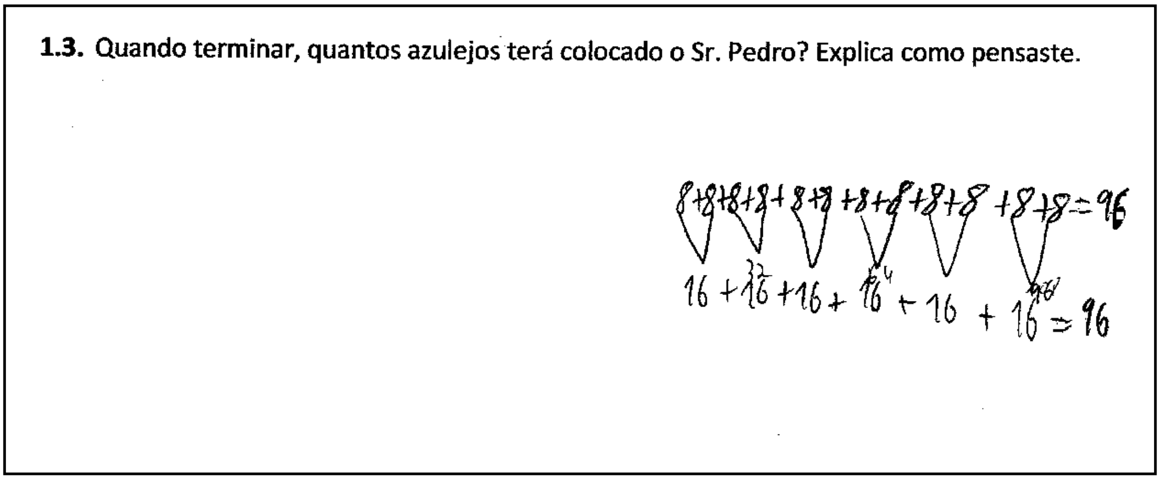
A subtarefa 3 pretendia que os alunos determinassem o número de azulejos que tinham sido colocados na parede do ginásio.
Após a leitura do enunciado surgiram algumas dúvidas, nomeadamente, os alunos não compreendiam se tinham de contabilizar os azulejos que preenchiam toda a área da parede ou só aqueles que estavam pintados de cinzento – claro e escuro.

> Martim: Professora, já percebi! Eu e o Paulo pensávamos que tínhamos de contar só os azulejos que estavam colocados, mas depois percebemos que temos de os contar a todos.

Para resolver a subtarefa 3 os pares utilizaram, essencialmente, estratégias aditivas e multiplicativas.

<u>Estratégias aditivas</u>

Sandra e Alexandre utilizaram a adição de parcelas iguais para determinarem quantos azulejos seriam necessários para cobrir toda a superfície da parede (fig.33).


1.3. Quando terminar, quantos azulejos terá colocado o Sr. Pedro? Explica como pensaste.

8+8+8+8+8+8+8+8+8+8+8+8=96

16+16+16+16+16+16=96

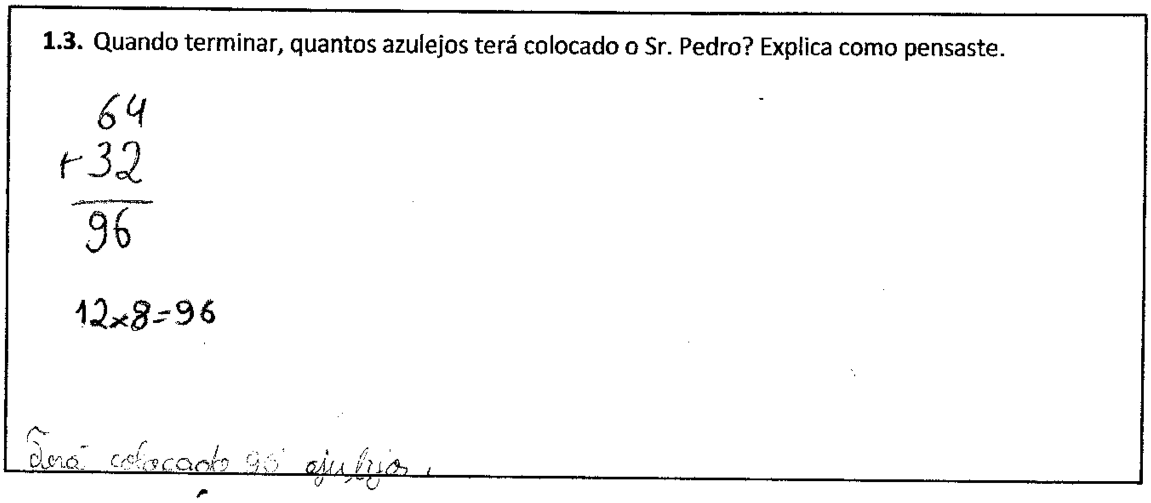
Figura 33. Estratégia aditiva de Sandra e Alexandre da subtarefa 3 – tarefa 3

Sandra e Alexandre explicam à turma o seu procedimento, como mostra o seguinte excerto:

> Sandra: Nós contámos os azulejos das linhas e vimos que cada linha tinha 8 azulejos.
>
> Alexandre: Depois como era difícil somar 8 + 8 + 8…somámos 8 + 8 = 16 até que nos deu 96.

Pode constatar-se que o par registou a adição sucessiva da quantidade oito, contudo para simplificar os cálculos agruparam parcelas duas a duas, de modo a solucionarem mais rapidamente o problema.

Margarida e Joana apresentaram a sua representação registando, simultaneamente, dois processos de cálculo diferentes para solucionarem a subtarefa.
Primeiramente, determinam a quantidade total de azulejos através de um processo aditivo e utilizaram, conjuntamente, um processo multiplicativo (fig.34).



1.3. Quando terminar, quantos azulejos terá colocado o Sr. Pedro? Explica como pensaste.

$$\begin{array}{r} 64 \\ +32 \\ \hline 96 \end{array}$$

$12 \times 8 = 96$

Será colocado 96 azulejos.

Figura 34. Estratégia aditiva /multiplicativa de Margarida e Joana da subtarefa 3 – tarefa 3

Durante a discussão coletiva o par explica por que razão recorreu aos dois procedimentos:

> Margarida: Nós vimos pelos problemas anteriores que já estavam colocados 64 azulejos e como as partes da parede estavam divididas da mesma forma então tínhamos que juntar mais 32 e deu-nos 96.

Professora: Mas utilizaram outra estratégia?

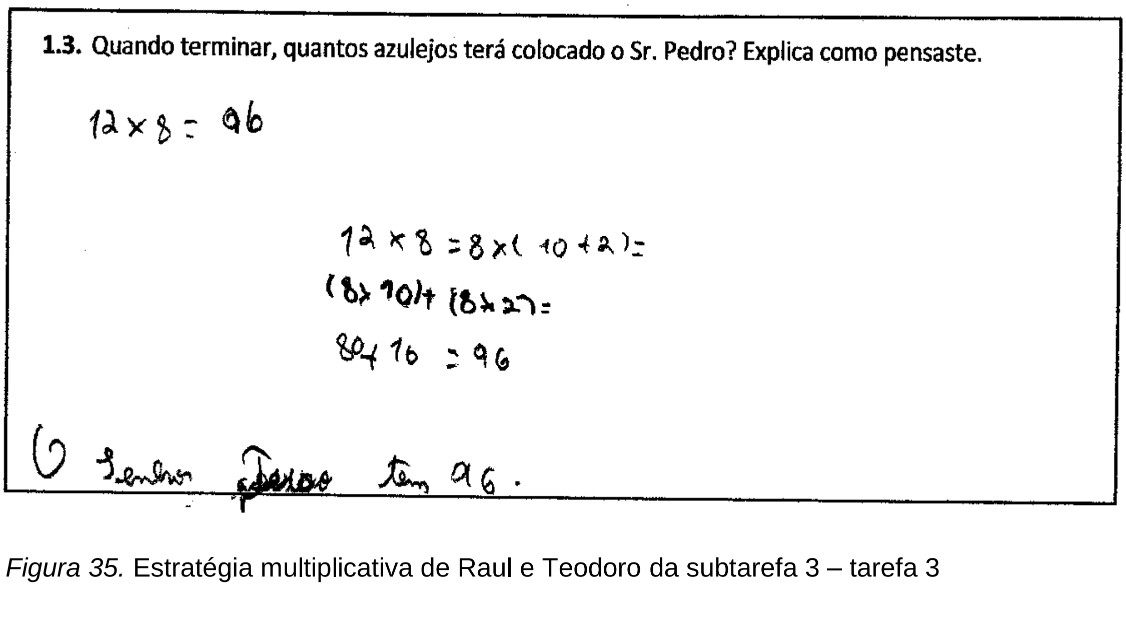
Margarida: Sim, percebemos que também podíamos multiplicar as filas que são 12 pelas colunas que são 8 e fizemos 12 vezes 8 que nos deu 96.

No raciocínio matemático de Margarida e Joana foi evidente o modo como estabeleceram uma relação com as representações anteriormente trabalhadas, assim como demostraram uma evolução quando apresentaram já um processo multiplicativo para substituir o aditivo.

<u>Multiplicação</u>

A maioria dos pares optou por um procedimento multiplicativo para resolver a Subtarefa 3.

Raul e Teodoro evidenciaram compreender as relações entre números, assim, recorreram à decomposição do fator 12 e utilizaram os seus produtos parciais para calcularem o produto final (fig.35).



1.3. Quando terminar, quantos azulejos terá colocado o Sr. Pedro? Explica como pensaste.

12 x 8 = 96

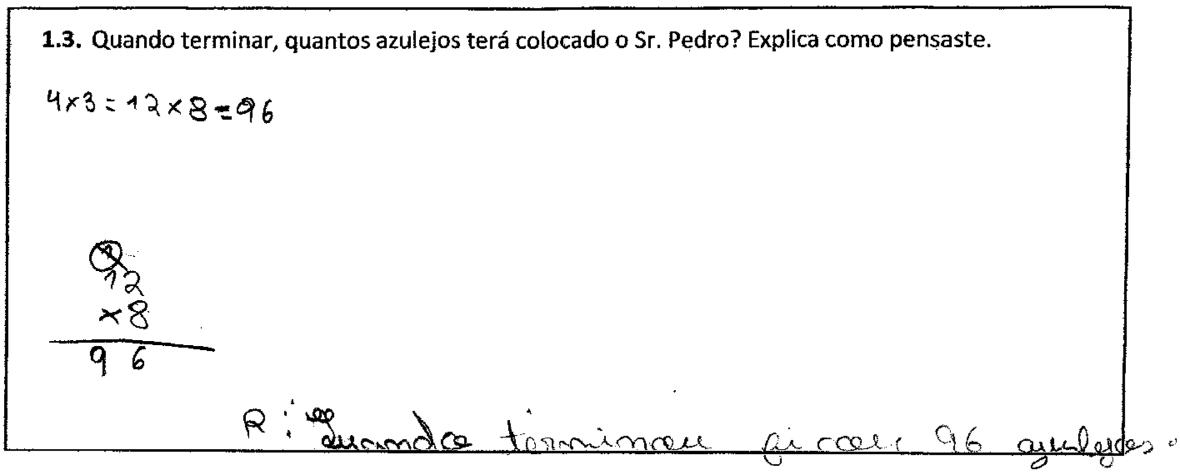
12 x 8 = 8 x (10 + 2) =
(8 x 10) + (8 x 2) =
80 + 16 = 96

O Senhor Pedro tem 96.

Figura 35. Estratégia multiplicativa de Raul e Teodoro da subtarefa 3 – tarefa 3

Neste procedimento está subjacente a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. As propriedades da multiplicação foram surgindo espontaneamente ao longo das tarefas e através da discussão e partilha foram-se salientando os procedimentos mais eficientes.

Para a partilha coletiva foi selecionado outro par que resolveu a subtarefa recorrendo também a uma estratégia multiplicativa, Ricardo e Anabela. Num processo inicial, determinaram o número de filas de azulejos que formava toda a área da parede, seguidamente, efetuaram o produto entre o número de azulejos que constituíam as filas e as colunas.


1.3. Quando terminar, quantos azulejos terá colocado o Sr. Pedro? Explica como pensaste.

$4 \times 3 = 12 \times 8 = 96$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 8 \\ \hline 96 \end{array}$$

R: Quando terminou ficou 96 azulejos.

Figura 36. Estratégia multiplicativa de Ricardo e Anabela da subtarefa 3 – tarefa 3

Os alunos explicaram o seu raciocínio da seguinte forma:

> Ricardo: Primeiro fizemos 4 x 3 porque queríamos saber quantos azulejos tinha uma coluna.
>
> Professora: Uma coluna?
>
> Ricardo: Sim, vou explicar (o aluno recorreu ao desenho para explicar e simultaneamente apontava para a primeira coluna) tenho 4 azulejos cinzentos-claros, 4 cinzentos-escuros e 4 brancos. São 4 azulejos de cada cor vezes 3 cores e deu 12. Depois fizemos 12 x 8.

O par apoiou-se quer nas diferentes tonalidades de azulejos quer na primeira coluna da parede para solucionar o problema, assim, ao compreender que a primeira coluna era constituída por 12 azulejos (4x3) e como as restantes eram iguais recorreram à disposição retangular para determinar o número total de azulejos (12 x 8).

Roberto e Tânia recorreram a um procedimento multiplicativo usando uma relação de triplo, porque reconheceram que a área das três partes, com cores diferentes, que formavam a parede era igual. Assim, calcularam o triplo de 32 para obterem a totalidade do número de azulejos (fig. 37).

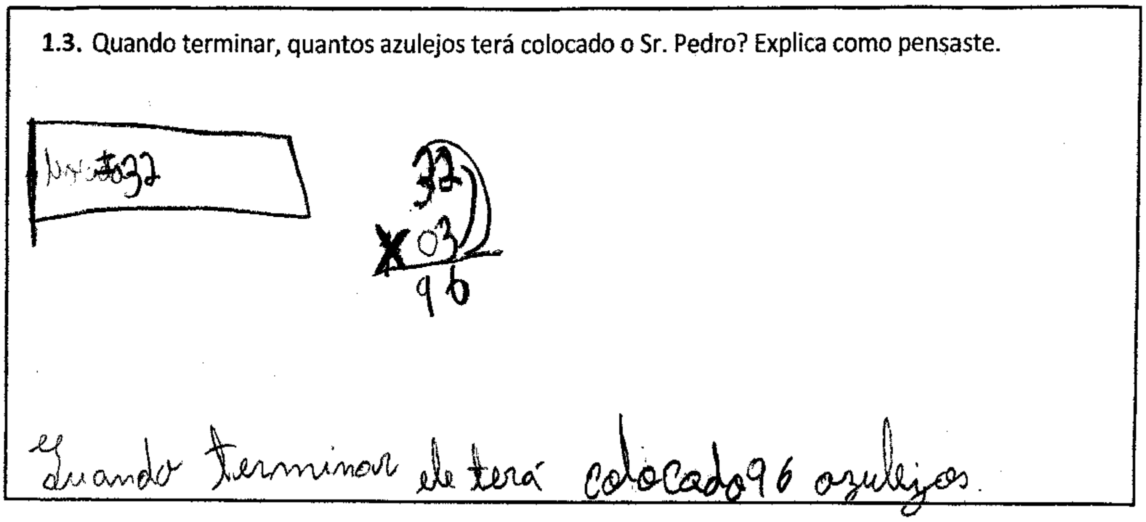


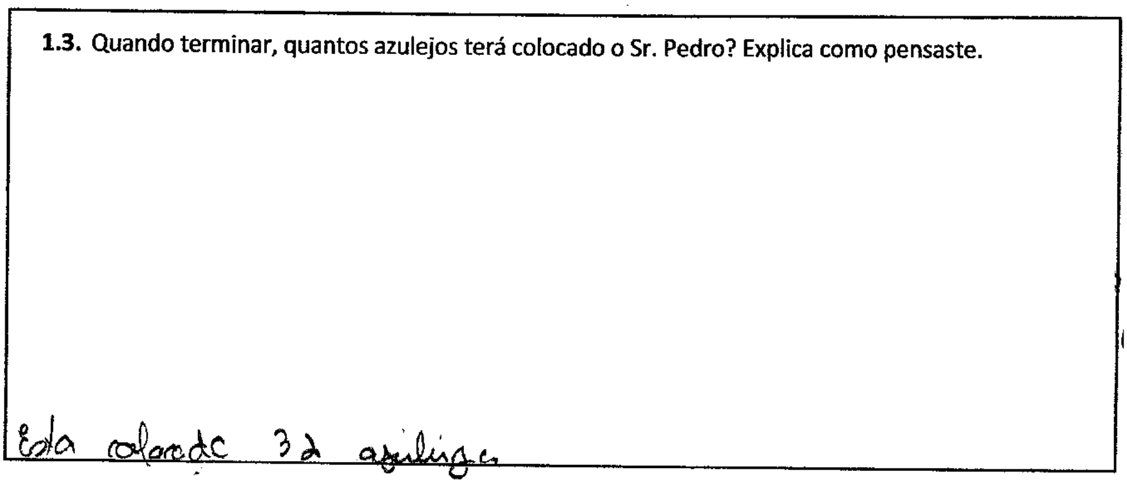
Figura 37. Estratégia multiplicativa de Roberto e Tânia da subtarefa 3 – tarefa 3

Roberto explicou o seu raciocínio da seguinte forma:

> Roberto: Nós sabíamos que cada parte pintada de cinzento tinha 32 azulejos e que todas as partes eram iguais. Então 32 azulejos cinzentos-claros, 32 azulejos cinzentos-claros e 32 azulejos que faltava colocarem. (enquanto explicava o aluno indicava para o grupo cada parte na figura).

Roberto e Tânia construíram corretamente o seu procedimento apoiando-se num registo anterior onde tinham já determinado o número de azulejos cinzentos-claros (32) e o número de cinzentos-escuros (32) e sabendo que todas as partes eram iguais também os que faltavam colocar seriam 32. O par compreendeu que ao calcular o produto de 3 vezes 32 conseguiam determinar corretamente o número de azulejos.

O único resultado incorreto foi do par Armanda e Laura devendo-se, essencialmente, à dificuldade de compreensão do enunciado e não registaram nem efetuaram qualquer cálculo (fig.38).


1.3. Quando terminar, quantos azulejos terá colocado o Sr. Pedro? Explica como pensaste.

Esta colocado 32 azulejos

Figura 38. Resultado incorreto de Laura e Armanda da subtarefa 3 – tarefa 3

As alunas pediram para não partilharem o seu procedimento coletivamente, porque não conseguiram chegar à resposta correta. Contudo, referiram que tinha sido complicado entender o enunciado e que calcularam apenas os azulejos que faltava colocar.

Síntese dos procedimentos utilizados pelos alunos

Na tabela seguinte apresento uma síntese dos procedimentos que os alunos utilizaram para determinar quantos azulejos era necessário colocar para preencher toda a área da parede.

Tabela 14. *Procedimentos utilizados pelos alunos na subtarefa 3 – tarefa 3*

Procedimentos	
Contagem de um em um	**0**
Contagem de linhas ou colunas	**0**
Adição de parcelas iguais	**1**
Multiplicação com recurso ao modelo retangular	**5**
Algoritmo da multiplicação	**3**
Resultados incorretos	**1**

Ao observar a tabela constato que a estratégia preferencial utilizada pelos alunos foi a multiplicação tendo em conta um contexto retangular. Apenas, um par recorreu ao adição de parcelas iguais para determinar o resultado.

Mais uma vez se verificou que os alunos, à medida que se sentem mais confiantes com as estratégias que usam, vão gradualmente substituindo procedimentos aditivos por multiplicativos.

Devido à incompreensão do enunciado um par não encontrou uma estratégia válida e um resultado correto para determinar com êxito o número de azulejos.

Subtarefa 4 – "Encontrar os azulejos"

Na segunda parte do problema o contexto apresentado aos alunos foi uma parede danificada onde não era visível uma parte dos azulejos. A Parede tinha vários espaços vazios que teriam de ser preenchidos pelos alunos. Esta questão de organizar os azulejos numa superfície retangular foi concebida essencialmente para privilegiar a multiplicação, nomeadamente a utilização da propriedade distributiva em relação à adição.

Depois da leitura, para toda a turma do enunciado, surgiram várias questões e dúvidas dos alunos, principalmente porque nem todos os azulejos eram observáveis.

> Martim: Não podemos resolver o problema, porque não temos todos os azulejos desenhados.
>
> Margarida: Podemos descobrir de uma maneira muito fácil.

No início foram evidentes as indecisões com que os alunos se depararam para encontrar uma estratégia adequada para solucionarem o problema. Verifiquei que todos os pares dialogaram bastante entre eles chegando mesmo a discutirem de forma mais intensa. Alexandre e Sandra conversaram entre eles sobre algumas possibilidades para descobrirem os azulejos que faltavam para reconstruir a parede.

> Alexandre: Temos que usar régua para fazer os azulejos.
>
> Sandra: Não é preciso, vamos desenhar vários quadrados.
>
> Alexandre: Mas depois não conseguimos desenhar os azulejos todos iguais.

Como os azulejos não apareciam visíveis na folha de registo nenhum par recorreu à contagem unitária, nem à contagem de linhas ou colunas como procedimento para resolver a subtarefa indicada.

> Eduardo: É difícil contar os azulejos, porque eles não estão desenhados.

As estratégias para resolver esta subtarefa foram basicamente duas: adição de parcelas iguais e a multiplicação.

Adição de parcelas iguais

Alexandre e Sandra foram o único par a recorrer a um procedimento aditivo para descobrir quantos azulejos faltavam na parede (fig.39).

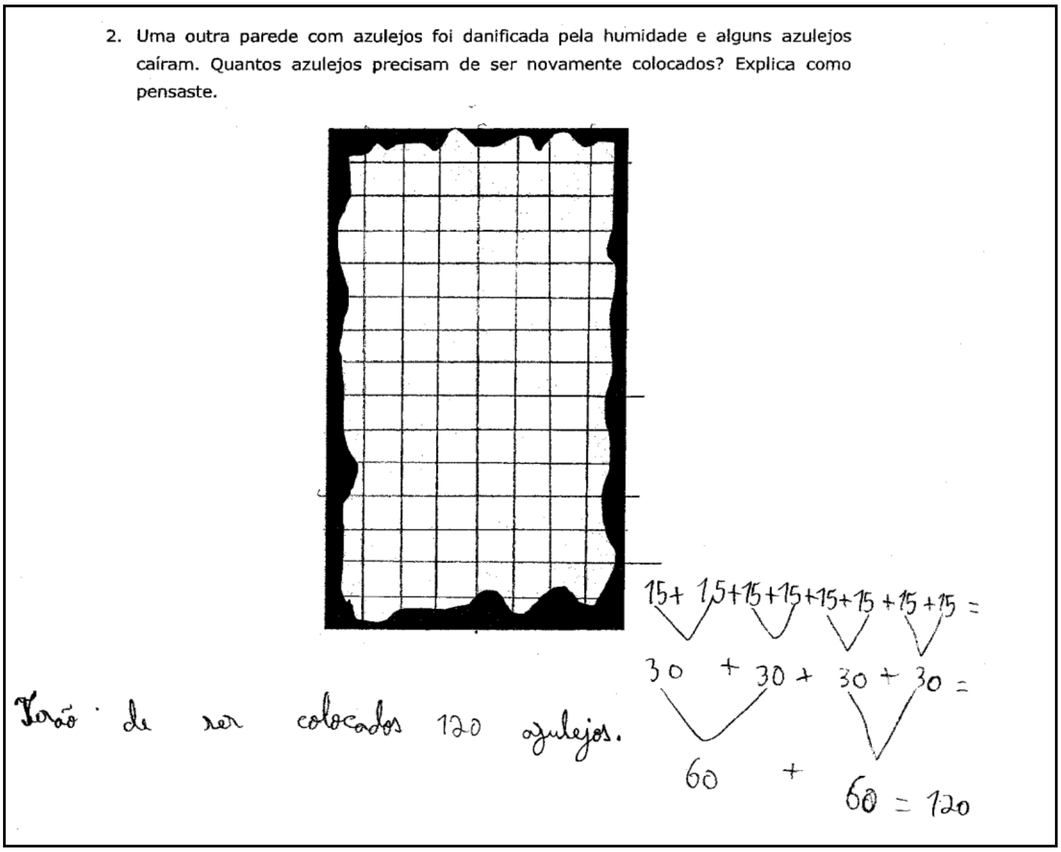


Figura 39. Procedimento aditivo de Sandra e Alexandre da subtarefa 4 – tarefa 3

Sandra e Alexandre utilizaram a régua para desenhar os azulejos que preenchiam a parede. A parede foi toda coberta com unidades todas do mesmo tamanho. O par explicou que inicialmente estava com dúvidas se iriam utilizar a régua, contudo chegaram à conclusão que seria a melhor opção para que os azulejos ficassem todos do mesmo tamanho.

> Alexandre: Primeiro vimos que havia marcas pequenas dos azulejos velhos e usámos a régua para desenhar os outros que faltavam.
>
> Professora: Mas pensaram descobrir o número de azulejos sem usar a régua?

Sandra: Sim eu pensei, mas quando comecei a desenhar os quadrados ficaram com tamanhos diferentes e o Alexandre disse para usarmos a régua.

Alexandre: Então, depois vimos que tínhamos 15 filas com 8 azulejos. Assim, só tivemos que somar 15 + 15 + 15 + 15 +15 + 15 +15 + 15.

Alexandre adicionou o número 15 oito vezes, esclarecendo que o 15 aparecia representado 8 vezes na parede do ginásio. O aluno somou várias vezes o mesmo número, todavia poderia, de uma forma fácil e simples, multiplicar o 15 pelo 8.
A multiplicação com recurso ao modelo retangular torna-se um processo mais rico e eficaz do que o procedimento aditivo. Assim, os restantes grupos que solucionaram corretamente a subtarefa 4 utilizaram um procedimento multiplicativo.

Multiplicação

Os pares Margarida e Diogo e Jéssica e Gabriel resolveram o problema sem cobrir fisicamente o retângulo com o desenho de quadrados mais pequenos. Apenas contabilizaram os azulejos incompletos que estavam na folha de registo (fig. 40). Ambos os pares resolveram rapidamente a subtarefa indicando corretamente o número de azulejos que precisavam de ser novamente colocados.

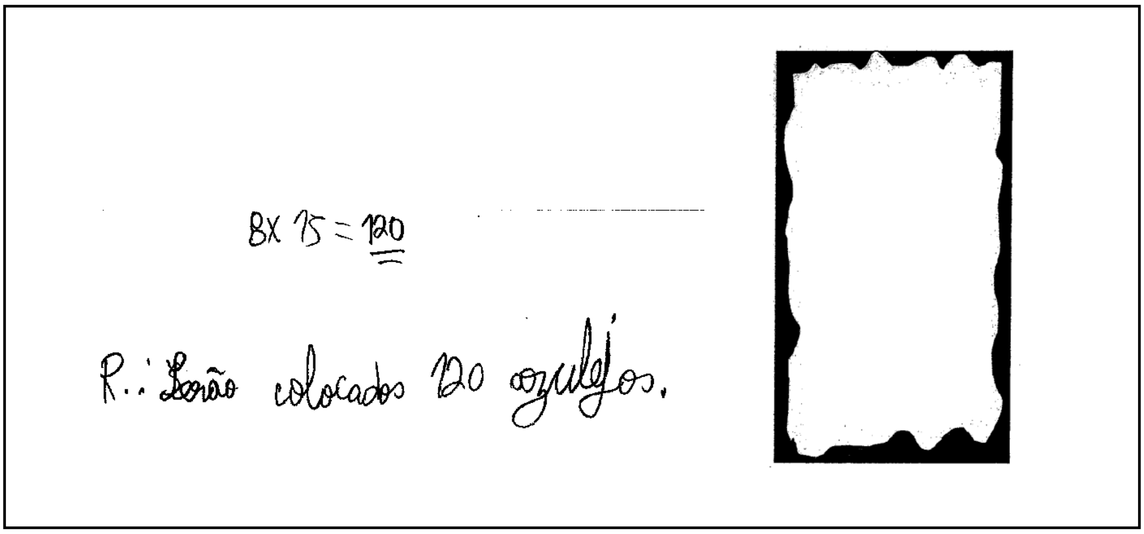


Figura 40. Procedimento multiplicativo de Mariana e Diogo da subtarefa 4 – tarefa 3

Alguns pares utilizaram a multiplicação como procedimento, contudo apoiaram-se no desenho dos azulejos. No final, resolverem o problema contabilizando os quadrados que estavam organizados por filas e por colunas.

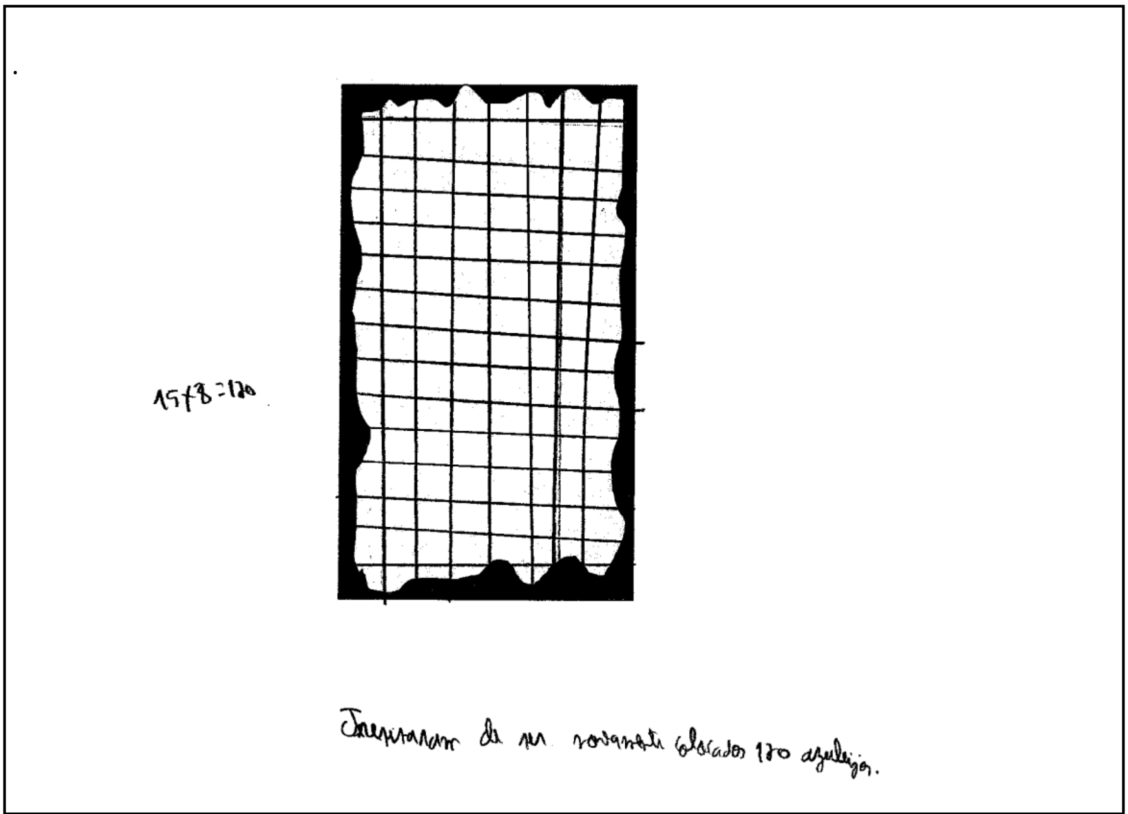


Figura 41. Procedimento multiplicativo de Roberto e Tânia da subtarefa 4 – tarefa 3

Roberto e Tânia, perante os colegas justificaram o seu raciocínio da seguinte forma:

> Tânia: Nós fizemos os quadrados para ajudar e depois contámos os quadrados deste lado e vimos que eram 15 e contámos do outro lado e vimos que eram 8.
>
> Roberto: Depois só tivemos que fazer 15 x 8 para saber quantos quadrados existiam dentro do retângulo.
>
> Roberto: Afinal não precisávamos de fazer os riscos com a régua, porque não foi preciso contar os quadrados que estavam dentro da parede.
>
> Eduardo: Nós fizemos a mesma coisa, mas escrevemos 8 x 15.

> Margarida: Mas já vimos que é a mesmo coisa estar 8 x 15 ou 15 x 8 depende se contamos primeiro as filas ou as colunas.
>
> Eduardo: E o resultado é o mesmo.

A disposição retangular permitiu mais uma vez explorar a propriedade comutativa de uma forma concreta. É possível constatar que a multiplicação e as suas propriedades começam a emergir naturalmente.

Durante a partilha de ideias entre os alunos ficou claro que obtiveram o mesmo produto efetuando contagens de agrupamentos de linhas ou selecionando agrupamentos em colunas. Verificaram que multiplicando os números de duas dimensões (colunas e filas) produziam o resultado 120.

Jéssica e Gabriel recorreram à multiplicação horizontal apoiando-se na tabuada do 8 para determinarem corretamente o número de azulejos. Também tracejaram linhas pertencentes às filas e colunas, de forma a simplificar e encontrar a expressão numérica. O par efetuou os cálculos a partir do produto de uma tabuada do 10 que tinha sido anteriormente aprendida e trabalhada. Deste modo, a partir da relação 10 x 8 = 80 o par construiu, naturalmente, a tabuada do 8 para encontrar o produto indicado (fig.42).

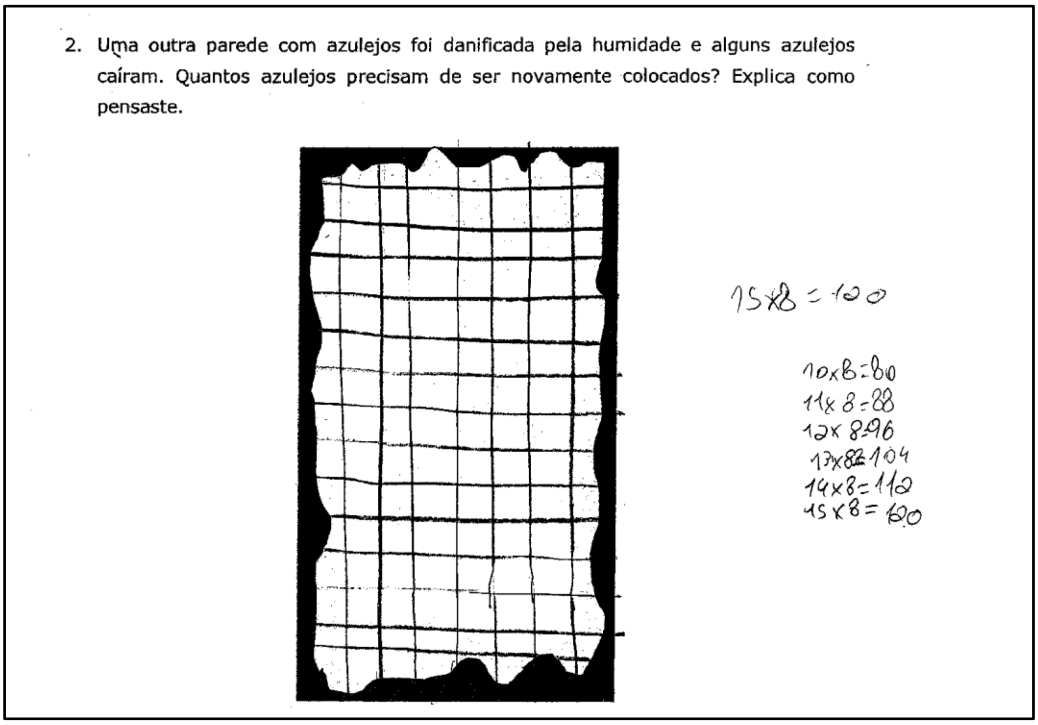


Figura 42. Procedimento multiplicativo de Jéssica e Gabriel da subtarefa 4 – tarefa 3

Jéssica e Gabriel utilizaram estratégias multiplicativas para efetuarem os cálculos, considerando os produtos que surgiram ao construir a tabuada do 8. O par justificou o seu procedimento da seguinte forma:

> Gabriel: Eu sabia que 10 X 8 = 80, então juntei sempre mais 8 e vi que
> 15 x 8 = 120.

Gabriel e Jéssica foram adicionando sempre 8 ao produto anterior da tabuada até encontrarem o resultado pretendido.

A principal dificuldade que emergiu esteve relacionada com a representação visual dos azulejos, para quatro pares não foi fácil desenharem com rigor e corretamente os quadrados que reproduziam os azulejos que faltavam, como se pode constatar no registo da Laura e Armanda (fig.43).

2. Uma outra parede com azulejos foi danificada pela humidade e alguns azulejos caíram. Quantos azulejos precisam de ser novamente colocados? Explica como pensaste.

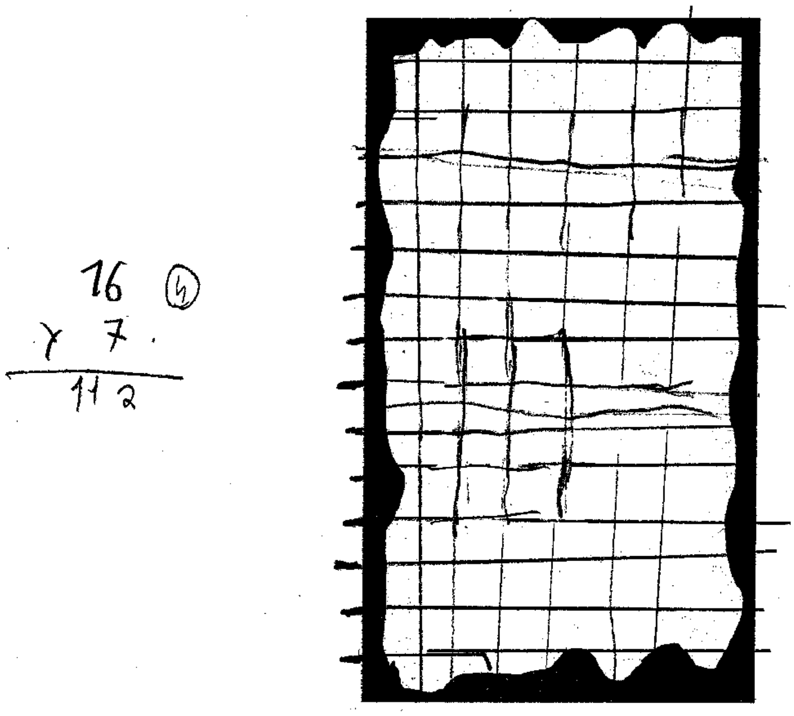


Figura 43. Procedimento multiplicativo de Laura e Armanda da subtarefa 4 – tarefa 3

Laura e Armanda não concretizaram com êxito a tarefa porque não conseguiram representar corretamente as linhas e as colunas para cobrirem fisicamente o retângulo com os azulejos em falta. O par nem sempre usou os azulejos de referência limitando-se a desenhar linhas e colunas que nem sempre estavam corretas.

> Laura: Primeiro marquei os azulejos que se viam para ser mais fácil fazer as linhas. Mas como a régua estava sempre a sair do lugar os quadrados não ficaram iguais.

Como se pode verificar pela figura Laura e Armanda esboçaram incorretamente uma linha aproximadamente a meio da unidade formando quadrados mais pequenos. E também representaram mal as colunas devido aos desvios frequentes da régua deixando demasiado espaço, particularmente na última coluna. Assim, como o par Laura e Armanda também Margarida e Joana recorreram a uma estratégia semelhante que acabou por se tornar inadequada para determinar corretamente o número de azulejos não visíveis.

Raul e Teodoro também não conseguiram preencher corretamente o retângulo com os azulejos da parede que estavam danificados.

A figura retangular foi toda coberta com diferentes unidades, mas os seus tamanhos variaram e foram estimadas visualmente. Neste registo destacam-se, essencialmente, duas dificuldades: os alunos não consideraram como referencia os azulejos marcados, tal como não recorreram à régua para facilitar a construção de unidades análogas (fig.44).

A estratégia utilizada pelo par foi completamente inadequada devido a não terem sido eficientes a construírem uma estratégia que lhes possibilitasse o preenchimento da área do retângulo com azulejos iguais e constantes.

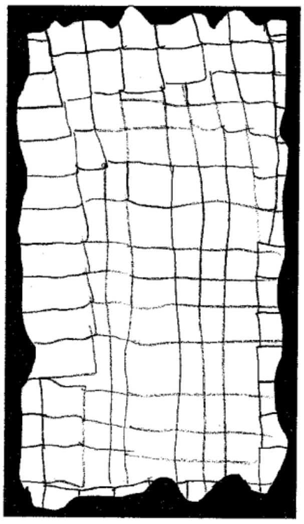


Figura 44. Procedimento multiplicativo de Raul e Teodoro da subtarefa 4 – tarefa 3

Raul e Teodoro ficaram preocupados quando compreenderam que os azulejos das linhas e colunas desenhados eram mais pequenos que outros devido às imprecisões no processo de traçar.

Na realidade o par cobriu completamente o retângulo, contudo não representou corretamente o número de azulejos de cada fila e coluna. Ao perceberem que não utilizaram um método fiável, também não efetuaram nenhum cálculo para determinar quantos azulejos faltavam. No momento da partilha Teodoro justifica por que razão não concluiu o problema:

> Teodoro: Tivemos muita dificuldade para desenhar os quadrados todos iguais.
>
> Raul: No final contámos todos os azulejos e deu-nos 134 azulejos.
>
> Professora: Mas não registaram na folha?
>
> Teodoro: Não, porque não sabíamos que conta íamos fazer.
>
> Professora: Como calcularam os 134 azulejos?
>
> Teodoro: Contámos todos os azulejos.
>
> Professora: Contaram um a um?
>
> Teodoro: Sim, mas fizemos mal os quadrados porque não estão todos iguais como os dos outros grupos, uns estão maiores e outros pequenos.

O facto de existirem quadrados de diversas dimensões não foi limitativo para as alunas solucionarem o problema. Porém, após a discussão dos registos de outros pares compreenderam que o seu método estava incorreto.

O par Ricardo e Anabela não desenharam nem as linhas nem as colunas e não contabilizaram corretamente o número de filas o que conduziu os alunos a um produto incorreto (fig. 45).

$$14 \times 8 = (8 \times 10) + (8 \times 4)$$
$$= \quad 80 + 32 = 112$$

Figura 45. Procedimento multiplicativo de Ricardo e Anabela da subtarefa 4 – tarefa 3

Ricardo e Anabela utilizaram um procedimento multiplicativo aplicando a propriedade distributiva em relação à adição para determinar o número de azulejos.

Síntese dos procedimentos utilizados pelos alunos

Na tabela seguinte podem observar-se os procedimentos que os alunos utilizaram para resolverem a última situação problemática que pretendia determinar o número de azulejos danificados.

Tabela 15. *Procedimentos utilizados pelos alunos* na subtarefa 4 – tarefa 3

Procedimentos	
Contagem de um em um	**0**
Contagem de linhas ou colunas	**0**
Adição de parcelas iguais	**1**
Multiplicação com recurso ao modelo retangular	**5**
Resultados incorretos	**4**

Dos procedimentos utilizados pelos alunos destacam-se fundamentalmente dois: adição de parcelas iguais e multiplicação com recurso ao modelo retangular.

Foi evidente que a multiplicação foi o procedimento preferido pelos pares para solucionarem corretamente a subtarefa.

A evolução dos procedimentos pode estar relacionada com a configuração da estrutura da tarefa verificando-se que as subtarefas se relacionam entre si desenvolvendo gradualmente o nível de dificuldade.

O facto, de haver uma partilha constante de diversas estratégias onde valorizamos frequentemente as mais eficazes também contribuiu para os alunos adotarem cada vez mais procedimentos multiplicativos. Verificou-se uma evolução significativa nos procedimentos adotados pelos alunos na execução das tarefas realizadas e, consequentemente, na facilidade em dar as respostas, o que evidencia um desenvolvimento progressivo das capacidades e competências. Esta subtarefa apresentou uma maior percentagem de resultados incorretos que se deveram, essencialmente, a não conseguirem preencher corretamente a superfície do retângulo apresentado.

CAPITULO V – CONCLUSOES

Neste capítulo começo por apresentar uma síntese do estudo fazendo referência ao seu objetivo e às questões de investigação que o orientaram e para as quais procurei dar resposta. Seguidamente, faço uma abordagem à metodologia utilizada e às principais conclusões que emergiram do estudo. Por fim, concluo com uma breve reflexão pessoal onde abordo as disposições mais significativas sobre o estudo desenvolvido.

Síntese do estudo

Este estudo tem como objetivo compreender que estratégias de cálculo mental os alunos do 3.º ano de escolaridade utilizam na resolução de problemas de multiplicação, no âmbito de uma experiência de ensino, realizada durante o ano letivo 2015/2016.

De modo a atingir este objetivo, defini as seguintes questões de investigação, às quais procuro dar resposta: i) Será que o tipo de números usados influencia as estratégias utilizadas pelos alunos, em situações multiplicativas? ii) Será que os alunos desenvolvem estratégias de cálculo mental depois de já terem aprendido o algoritmo da multiplicação e se sim, como o fazem? e iii) Será que a utilização do algoritmo ajuda ou condiciona as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de problemas de multiplicação?

Para o desenvolvimento do estudo considerei pertinente abordar quatro temas no enquadramento teórico: (i) Sentido de número; (ii) a multiplicação no contexto de sentido de número; (iii) cálculo mental; e (iv) algoritmo.

A recolha de dados ocorreu numa sala de 3.º ano de escolaridade da qual era professora titular da turma. Portanto, ao longo do estudo fui, simultaneamente, investigadora e professora.

A investigação seguiu uma abordagem de natureza qualitativa num contexto natural o que permitiu interpretar e compreender melhor o desenrolar das tarefas, tal como a interação experienciada entre os alunos. Foram desenvolvidas três tarefas nas quais participaram todos os alunos da turma presentes. Na primeira e segunda tarefa participaram 16 alunos e na terceira 20 alunos. Todas as tarefas apresentadas incluíam alguns desafios ou subtarefas.

Conclusões

Com as tarefas implementadas, todas no campo multiplicativo, pretendia analisar quais os procedimentos utilizados pelos alunos para resolver diversos desafios matemáticos. Alguns prendiam-se com alterações na ordem de grandeza dos números envolvidos. Em cada tarefa houve a preocupação de perceber e estudar o percurso que os alunos fizeram para passarem de resoluções simples e habituais para uma crescente complexidade de procedimentos.

Uma das estratégias mais comum foi a adição de parcelas iguais, possivelmente, porque os alunos estavam muito habituados a resolver problemas envolvendo a adição. É essencial, que os alunos percebam que se uma dada quantidade se repete um certo número de vezes, podendo assim passar a ser representado por uma multiplicação (relação entre o raciocínio aditivo e o raciocínio multiplicativo). Numa fase inicial os alunos começam por trabalhar a adição sucessiva de parcelas iguais que os levará à exploração da multiplicação como referem Brocardo, Delgado e Mendes (2007). A evolução gradual do raciocínio aditivo para o multiplicativo com compreensão é fortemente sustentado pela pertinência de se gerar, no final de cada uma das tarefas, um momento de análise e reflexão com os alunos, de forma a proporcionar a passagem de um conhecimento aditivo para o multiplicativo.

A primeira tarefa pretendia compreender de que forma a grandeza dos números utilizados em situações de multiplicação influenciaria as estratégias usadas pelos alunos. A tarefa estava organizada por diferentes desafios com um grau crescente de dificuldade e um aumento da ordem de grandeza dos números. No primeiro desafio constatei que, para alguns pares, esta última teve influência na escolha da estratégia utilizada (tabela 16).

Tabela 16. *Estratégias utilizadas pelos alunos para resolverem o 1.º desafio da Tarefa 1.*

Pares	12 x 6	1453 x 6	A ordem de grandeza do número influenciou a estratégia usada pelos pares	
			SIM	NÃO
Eduardo/Simone	Multiplicação com recurso ao algoritmo	Multiplicação com recurso ao algoritmo		X
Mariana/Diogo	Multiplicação com recurso à propriedade distributiva em relação à adição	Multiplicação com recurso ao algoritmo	X	
Roberto/Tânia	Adição de parcelas iguais	Adição de parcelas iguais		X
Ricardo/ Anabela	Adição de parcelas iguais	Multiplicação com recurso ao algoritmo	X	
Martim/Paulo	Multiplicação com recurso à propriedade distributiva em relação à adição	Multiplicação com recurso à propriedade distributiva em relação à adição		X
Laura/Armanda	Adição de parcelas iguais	Solução incorreta (Adição)		X
Jéssica/Gabriel	Multiplicação com recurso à propriedade distributiva em relação à adição	Multiplicação com recurso à propriedade distributiva em relação à adição		X
Sandra/ Alexandre	Multiplicação com recurso à propriedade distributiva em relação à adição	Multiplicação com recurso ao algoritmo	X	
Total			**3**	**5**

A tabela mostra que dos oito pares que resolveram o 1.º desafio três alteraram a estratégia utilizada da resolução do primeiro (12 x 6) para o segundo cartão (1453 x 6), o que poderá indicar que, o facto, da grandeza dos números envolvidos ser diferente poderá ter influenciado a estratégia escolhida. O par Mariana e Diogo referiu que alterou a sua estratégia precisamente porque o número do segundo cartão era maior. Quando a grandeza do número aumentou a maioria dos pares, que apresentaram um resultado correto, usou o recurso ao algoritmo, possivelmente por ser um procedimento mais confiável e simples para os alunos. Como referem Brocardo, Serrazina e Kaermer (2003), o recurso ao algoritmo apresenta duas vantagens essenciais: de eficácia desde que seja utilizada corretamente um conjunto de regras determinadas conduz sempre uma resposta certa e de generalidade, porque o algoritmo pode ser utilizado com quaisquer números.

No segundo cartão (1453 x 6), do primeiro desafio, os pares ao reconhecerem que o número do multiplicando era maior levou-os a considerar que se encontravam perante uma situação mais complicada. Apesar de estarem mais familiarizados com estratégias aditivas, seis pares recorreram a cálculos associados à multiplicação. Esta evidencia pode ser justificada, pelo facto, de a ordem de grandeza dos números envolvidos ser maior ter influenciado a escolha de estratégias por parte de alguns pares. Uma das razões para mudarem a estratégia e no sentido da utilização do algoritmo pode dever-se ao aumento da grandeza do número, ideia corroborada por Brocardo e Serrazina (2008), que indicam que numa trajetória de aprendizagem os alunos vão desenvolvendo naturalmente processos de cálculo mental, apoiando-se no algoritmo quando utilizam números maiores.

Os pares Roberto e Tânia e Laura e Armanda utilizaram o mesmo processo de cálculo para resolver ambos os cartões não existindo uma evolução. O que significa que o desenvolvimento dos procedimentos não ocorre em simultâneo para todos os alunos, alguns necessitam de mais tempo de trabalho num determinado procedimento do que outros. Assim, na construção do conhecimento do aluno deve respeitar-se o seu próprio ritmo de trabalho na concretização das tarefas (Cebola, 2002). Esta situação poderá estar relacionada com as tarefas propostas, com o contexto em que o aluno está inserido ou com a grandeza dos números apresentados.

Alguns pares foram variando as estratégias ao longo dos três desafios que constituíam a primeira tarefa adequando sempre o grau de dificuldade e os números envolvidos ao procedimento que lhes transmitia maior confiança para o solucionarem. Designadamente, Sandra e Alexandre que ajustaram sempre o procedimento utilizado ao grau de dificuldade da multiplicação. No segundo desafio “Pensa Rápido”, da primeira tarefa, os alunos para determinarem o produto do cartão apresentado (7630 x 10) construíram uma sequência de vários cálculos multiplicativos, através da decomposição do número 7630, utilizando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, enquanto no primeiro cartão (30 x 10) utilizaram o cálculo mental a partir de um conhecimento memorizado.

Ao longo das tarefas foi notória a importância de explorar o cálculo mental na multiplicação, verifiquei que alguns pares, como Jéssica e Gabriel, Mariana e Diogo entre outros, resolveram com sucesso o último cartão do terceiro desafio “Relaciona e Calcula”, (7630 x 11), recorrendo, fundamentalmente, ao cálculo mental.

A segunda tarefa apresentada tinha o propósito de proporcionar aos alunos a descoberta da multiplicação com um número de dois algarismos no multiplicador e, assim compreender se o facto de, não conhecerem o algoritmo com um número de dois algarismos no multiplicador condicionava as estratégias usadas. Ao solicitar aos alunos uma resolução para o problema verifiquei que construíram estratégias diversas e alguns até inventaram as suas próprias formas de calcular para chegar ao produto final com êxito ou não. Penso que posso afirmar que o facto de ainda não conhecerem o algoritmo com um número de dois algarismos no multiplicador não foi um fator condicionante na resolução do problema. Cada par construiu os seus próprios procedimentos para multiplicar, contudo estas construções, possivelmente, não emergiram no vácuo, como refere Ambrose, Beak & Carpenter (2003), os alunos poderão ter sido influenciados por conhecimentos anteriores, pelos diversos contextos, pelas interações com outras crianças e adultos.

Dos oito pares, cinco foram capazes de resolver o problema de multiplicação com sucesso, mesmo antes de aprenderem o algoritmo com um número de dois algarismos no multiplicador. Embora existisse a possibilidade de criarem múltiplas estratégias acabaram por usar estratégias que já se encontram definidas na literatura, os alunos progridem gradualmente da utilização de adições sucessivas para uma estrutura do pensamento multiplicativo (Mendes, Brocardo, & Oliveira, 2011). Assim, apenas um par utilizou a propriedade distributiva em relação à adição, outro o algoritmo, a maior parte dos pares recorreu ao cálculo aditivo de parcelas iguais para determinar o produto. Como seria previsível grande parte dos pares utilizaram primeiramente raciocínios aditivos, calculando o produto fazendo agrupamentos iguais, sendo esta uma estratégia fundamental para compreender a multiplicação (Mardjetko e Macpherson, 2007).

Eduardo era o único aluno que conhecia o algoritmo da multiplicação com um multiplicador com dois algarismos, contudo durante a partilha coletiva não conseguiu encontrar uma justificação clara para os cálculos que apresentou. Esta situação levou a que, para a maioria dos alunos, o algoritmo da multiplicação aparecesse como uma operação difícil e supostamente incompreensível. Para que isto não aconteça é essencial que antes da introdução do algoritmo convencional os alunos sejam levados a construir procedimentos com significado e não apenas memorizar um conjunto de regras sem compreensão como sucedeu com Eduardo. Daí o trabalho realizado na aprendizagem da multiplicação deve assentar na compreensão de conceitos e propriedades (Brocardo, Delgado e Mendes, 2007). O algoritmo tradicional apenas poderá ser tratado como uma opção válida quando o aluno consegue explicar todas as etapas com compreensão, como afirmam Ambrose, Beak e Carpenter (2003).

Ao contrário do Eduardo que já tinha tido um primeiro contacto com o algoritmo tradicional em casa com a mãe, os restantes alunos não tinham conhecimento das diversas etapas e regras da multiplicação com dois algarismos no multiplicador, assim experimentaram e construíram as estratégias que faziam mais sentido, baseadas no seu conhecimento.

Neste momento de reflexão, depois da apresentação do Eduardo, teria sido pertinente introduzir o algoritmo para que os alunos compreendessem que a adição de parcelas iguais se podia representar de outra forma e assim, reconhecerem que o algoritmo da multiplicação não é apenas um conjunto de etapas e regras definidas que têm de reproduzir sem apelar ao raciocínio. Só depois de compreender o significado do algoritmo este poderá ser apresentado (Ponte e Serrazina, 2000). Devendo dar-se menor ênfase ao algoritmo e direcionar o ensino para desenvolver estratégias de cálculo mental espontâneas e construídas pelos alunos. O algoritmo pode ser considerado como a fase final do cálculo em coluna e do cálculo mental (Brocardo e Serrazina, 2008). Os alunos que têm taxas de sucesso mais elevadas apresentam um cálculo mental mais desenvolvido como concluem Mardjetko e Macpherson (2007). Assim, é fundamental trabalhar problemas que recorram ao raciocínio multiplicativo, desde muito cedo.

Com a implementação da terceira tarefa e após a aprendizagem do algoritmo da multiplicação, pretendia compreender que estratégias os alunos iriam privilegiar, se o cálculo mental ou o algoritmo. Na resolução das tarefas nem sempre os alunos resolvem as tarefas da mesma forma ou progridem de forma semelhante, numa trajetória de aprendizagem podem seguir caminhos diversos (Mendes, Brocardo & Oliveira, 2013).

Tabela 17. *Estratégias utilizadas pelos alunos para resolverem a tarefa 3.*

Pares	**Subtarefa 1**	**Subtarefa 2**	**Subtarefa 3**
Eduardo/Simone	Adição de parcelas iguais	Multiplicação (Modelo retangular)	Multiplicação (Modelo retangular)
Mariana/Diogo	Multiplicação (Modelo retangular)	Multiplicação (Modelo retangular)	Multiplicação (Modelo retangular)
Roberto/Tânia	Algoritmo da multiplicação	Multiplicação (Modelo retangular)	Algoritmo da multiplicação
Ricardo/ Anabela	Resultado incorreto	Algoritmo da multiplicação	Algoritmo da multiplicação
Martim/Paulo	Contagem um em um	Adição de parcelas iguais	Algoritmo da multiplicação
Laura/Armanda	Adição de parcelas iguais	Adição de parcelas iguais	Resultado incorreto
Jéssica/ Gabriel	Multiplicação (Modelo retangular)	Multiplicação (Modelo retangular)	Multiplicação (Modelo retangular)
Sandra/Alexandre	Contagem de linhas e colunas	Contagem de linhas e colunas	Adição de parcelas iguais
Margarida/Joana	Multiplicação (Modelo retangular)	Multiplicação (Modelo retangular)	Multiplicação (Modelo retangular)
Raul/Teodoro	Multiplicação (Modelo retangular)	Resultado incorreto Multiplicação (Modelo retangular)	Multiplicação (Modelo retangular)

A tabela permite evidenciar a evolução dos procedimentos usados pelo mesmo par na sequência de tarefas apresentadas, permitindo identificar a diversidade dos procedimentos de cálculo, tal como a existência de alguns padrões. Em cada tarefa houve a preocupação de compreender o percurso que a maioria dos alunos fizeram para passarem de resoluções simples e habituais para uma crescente complexidade de procedimentos, sabendo que os alunos desenvolvem grande parte do seu conhecimento recorrendo aos seus próprios conhecimentos (Mendes, Brocardo & Oliveira, 2013).

Ao longo das tarefas foi possível constatar que alguns pares foram desenvolvendo estratégias diferenciadas para solucionar os problemas, passando de procedimentos de contagem a procedimentos aditivos e posteriormente aos multiplicativos. Martim e Paulo, exibiram esta evolução ao longo da terceira tarefa, enquanto outros pares, como Sandra e Alexandre ou Laura e Armanda, possivelmente por falta de confiança ou agilidade de cálculo, nunca optaram por utilizar procedimentos multiplicativos, o que está de acordo com outras pesquisas, que afirmam que alguns alunos que sentem dificuldades na multiplicação voltam a usar procedimentos aditivos (Mendes, Brocardo & Oliveira, 2013).

Foi possível verificar que alguns pares descobriram naturalmente a propriedade comutativa da multiplicação em relação à adição. A visualização da disposição retangular, possibilitou que os alunos compreendessem que mesmo face a disposições diferentes a quantidade não se altera.

Pode concluir-se, também, que alguns pares, nas duas primeiras subtarefas recorrem, ainda, com frequência a estratégias de contagem e de adição. Contudo, denota-se alguma evolução na terceira tarefa em que os alunos utilizam, preferencialmente, o algoritmo e o modelo retangular para determinar o produto.

Os alunos entenderam que a multiplicação é um processo mais rápido e não necessita de tantos cálculos como a repetição de parcelas iguais. Desta forma, evidenciaram uma resolução apoiada no cálculo mental. A metodologia de investigação privilegiada ao longo da experiência de ensino foi qualitativa porque permitiu recolher conhecimentos distintos e ricos em pormenores, de forma a dar resposta às questões da investigação.

Na exploração das diversas tarefas matemáticas foi interessante verificar que o trabalho a pares permitiu um maior confronto de ideias e, consequentemente, um maior desenvolvimento na compreensão de estratégias de cálculo, tornando-as cada vez mais eficazes. Neste sentido, Reys (1985), refere que uma maior variedade de métodos desenvolve nos alunos uma maior compreensão do sentido de números e dos cálculos efetuados.

No decorrer do estudo constatei, regularmente, um confronto de ideias entre os alunos que os conduziu a verbalizarem e a partilharem o seu pensamento e, conjuntamente, construírem uma estratégia válida, de forma a determinar a solução correta para o problema como defendem Mardjetko e Macpherson (2007), os alunos devem ter oportunidade de construírem as suas próprias estratégias de cálculo.

No que respeita à postura e comportamento dos alunos evoluíram de forma favorável tendo sido bastante ativos, impulsivos e participativos nas diferentes propostas de trabalho.

O trabalho a pares permitiu aos alunos que interagissem, refletissem e construíssem, mais facilmente, um conjunto de estratégias adequadas e que para eles fizessem mais sentido. Ao partilharem estratégias os alunos aprendem a discutir entre eles, a comunicar matematicamente e, consequentemente a fazer novas aprendizagens (Junges, s.d.).

Durante a partilha foi interessante discutir o aparecimento de diferentes raciocínios, desta forma os alunos compreenderam que estratégias diferentes podem culminar no mesmo resultado. Neste sentido, Ribeiro, Valério e Gomes (2009), afirmam que “a discussão em coletivo, dos vários tipos de estratégias que as crianças constroem, ajuda-as a apropriar-se de um reportório de estratégias, ensinando-as a decidir quais dos seus registos são mais adequados” (p. 11).

No final da discussão de cada tarefa compararam e confrontaram as diferentes estratégias que surgiram dos diferentes pares. A oportunidade de os alunos apresentarem as estratégias foi relevante para o esclarecimento de dúvidas que iam surgindo. Esta discussão possibilitou estimular o raciocínio matemático através do confronto de ideias entre os alunos.

O caracter lúdico e desafiante das tarefas foi predominante para envolver os alunos de forma entusiástica e empenhada na procura de uma solução para as diversas tarefas promovendo a comunicação, o conhecimento e a compreensão de raciocínios matemáticos.

<u>No final do estudo pode concluir-se:</u>

- Ao longo da resolução das três tarefas foi observável que algumas das estratégias utilizadas predominaram mais do que outras. De referir, que as estratégias aditivas foram utilizadas com maior frequência no início de cada tarefa apresentada. No final, torna-se mais evidente uma maior opção por procedimentos multiplicativos;

- Em alguns pares a ordem de grandeza dos números envolvidos foi determinante para mudar a estratégia anteriormente utilizada;

- O facto de os alunos não conhecerem o algoritmo com dois algarismos no multiplicador não condicionou a construção dos seus próprios procedimentos nem a resolução correta do problema;

- Dependendo da tarefa a maioria dos alunos continua a utilizar o cálculo mental mesmo conhecendo o algoritmo.

Reflexão pessoal

O facto de ser professora titular de turma facilitou o meu trabalho de campo como investigadora, uma vez que conheço as particularidades da turma e do contexto. Como eram alunos do 3.º ano, também, tornou mais fácil e clara a comunicação oral, mas alguns pares sentiram mais capacidade no registo escrito que na partilha com a turma. Neste sentido, parece-me importante fomentar mais a discussão de estratégias após a resolução das tarefas, pois com o decorrer do tempo senti que os alunos estavam mais empenhados e motivados para participarem.

Fiquei mais desperta para a importância na prática diária de orientar e estimular os alunos, assim como, levantar novas questões que favoreçam o desenvolvimento de novos conhecimentos promovendo a aprendizagem, bem como para o aprofundamento dos meus saberes, de forma, a construir novas práticas ajustadas aos alunos e ao seu contexto.

Este trabalho alertou-me, essencialmente, para continuar a procurar o conhecimento e a possibilidade de a qualquer momento poder tornar-me uma investigadora da minha prática pedagógica.

A realização deste estudo permitiu-me fazer uma reflexão mais atenta sobre o processo de ensino/aprendizagem da multiplicação e compreender melhor as diferentes etapas pelas quais passam os alunos até compreenderem bem o conceito de multiplicar, sem nunca esquecer o ritmo e a aptidão de aprendizagem dos alunos. Neste estudo participaram vários pares agrupados tendo em consideração os diferentes níveis de conhecimento da Matemática e a facilidade de comunicar raciocínios. No desenrolar da experiência de ensino pareceu-me que esta heterogeneidade foi um aspecto muito positivo para o estudo, indicando a facilidade ou a dificuldade dos alunos em se relacionar, em apresentar registos e na seleção do par para discutir os resultados para a turma. Em alguns pares pareceu-me notório um excelente trabalho em que naturalmente construíam o conhecimento em grupo, observando-se que o aluno que demostrava mais dificuldade começava a ganhar maior confiança e a interagir com o colega e, posteriormente, com a turma, foi o caso do Roberto e Tânia e da Mariana e Diogo. Um par que revelou grande dificuldade em trabalhar conjuntamente foi o Eduardo e a Simone, em que a Simone foi, essencialmente, um elemento passivo, apenas ouvia e aceitava rapidamente as ideias do colega algumas das quais nunca compreendeu, raramente se registou uma troca efetiva de conhecimentos. Por outro lado, Armanda e Laura apesar de serem alunas tímidas com grandes dificuldades de aprendizagem a matemática, a troca de impressões fez com que a confiança de ambas aumentasse.

Valorizar o trabalho a pares foi sem dúvida uma estratégia importante ao longo de todas as tarefas realizadas, pois permitiu, de um modo geral, uma troca de saberes, assim, como o desenvolvimento da capacidade para respeitar e ouvir ideias diferentes.

Limitações e recomendações

Hoje em dia a matemática não pode continuar a ser vista como uma área difícil para os alunos, mas como um desafio que os ajuda a raciocinar e a desenvolver estratégias de cálculo úteis e essenciais no seu dia-a-dia. Neste sentido, é cada vez mais importante criar, dentro da sala de aula, condições onde os alunos se tornem ativos na construção do seu próprio conhecimento, promovendo uma maior interação entre os pares, momentos de discussão sistemáticos e, essencialmente, recorrer a métodos de trabalho que aumentem o sucesso e o gosto pela matemática.

Ao longo do estudo, percebi a importância de serem os próprios alunos a construírem e desenvolverem o seu próprio conhecimento, ao invés de ser adquirido como um conceito pré-estabelecido através do professor. Assim, há a necessidade de os professores permanecerem cada vez mais atentos e conscientes das mudanças que ocorrem no processo ensino aprendizagem fazendo um reflexão atenta da sua prática e encontrando processos adequados, não só na área de matemática como nas restantes áreas.

Outro aspeto pertinente com que me deparei foi a importância de escolher tarefas eficazes e motivadoras que estimulem e apelem ao raciocínio dos alunos, pois contribuem, de forma positiva, para a melhoria da aprendizagem da matemática.

Consequentemente, conseguem-se alunos mais interessados, mais despertos para construção de novos saberes e menos ansiosos.

Ao longo do estudo foi importante valorizar os diferentes trabalhos realizados pelos pares, mesmo os que não conseguiram encontrar um procedimento apropriado, o que os levou a compreender que todas as situações eram adequadas para explorar, porque a partir do erro podem evoluir e chegar a um procedimento correto.

Enquanto investigadora foram fundamentais para o meu estudo os vários dispositivos que se encontravam distribuídos por alguns pares, pois permitiram-me recolher uma grande diversidade de detalhes. Contudo, para os pares que não dispunham de nenhum dispositivo a acompanhar o diálogo entre eles, senti que foi um fator condicionante na recolha de algumas informações que poderiam ter sido relevantes. A ausência de gravadores, em três grupos, poderá ter sido uma limitação, pois não me permitiu analisar as interações e a forma como foram feitas mais detalhadamente e só durante a partilha e discussão para a turma é que me foi possível tirar algumas notas.

Seria interessante futuramente alargar o estudo a outros alunos, de níveis de escolaridade diferentes, permitindo que experienciassem as mesmas tarefas (embora com um grau de dificuldade diferente) para perceber de que forma o seu conhecimento anterior e o nível de ensino poderá influenciar a construção dos seus procedimentos.

Referências

Abar, C. (2015). O entendimento de pedagogias sobre o uso das tecnologias na educação matemática. (pp. 36-49). *Atas do XXVI Seminário de Investigação em Educação Matemática*. APM - Associação de Professores de Matemática Março 2015

Albergaria, I. S., & Ponte, J. P. (2008). Cálculo mental e calculadora. In A. P. Canavarro, D. Moreira & M. I. Rocha (Eds.), *Tecnologias e educação matemática* (pp. 92-102). Lisboa: APM.

Ambrose, R., Baek, J. M., & Carpenter, T. P. (2003). Children's invention of multidigit multiplication and division algorithms. University of Wisconsin-Madison (pp. 50-70).

Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação – uma introdução à Teoria e aos Métodos*. Porto: Porto Editora.

Brocardo, J., Serrazina, L., & Karmer, J.-M (2003). Algoritmos e sentido do número. *Educação e Matemática, 75,* 11-15.

Brocardo, J., Delgado, C.& Mendes, F. (2007). A multiplicação no contexto do sentido do número in Equipa do Projeto Desenvolvendo o sentido do número: Perspetivas e exigências curriculares. *Desenvolvendo o sentido do número: Perspetivas e exigências curriculares. Materiais para o professor do 1ºciclo*. Vol.II.Lisboa: APM.

Brocardo, J. & Serrazina, L. (2008). O sentido do número no currículo de Matemática. Em J. Brocardo, L. Serrazina & I. Rocha (Org.), *O sentido do número: reflexões que entrecruzam teoria e prática*. (pp. 97-115) Lisboa: Escolar Editora.

Brocardo, J., Serrazina, L., Rocha, I., Mendes, F., Menino, H., & Ferreira, E. (2008). Um projecto centrado no sentido do número. In R. L. González, , B. G. Alfonso, M. C. Machín, & L. J. B. Nieto (Edts), *Investigación en Educación Matemática XII* (pp. 495-504). Badajoz: SEIEM

Carvalho, A. e Gonçalves, H. (2003). Multiplicação e Divisão: conceitos em construção. *Educação e Matemática*, 75, p. 25.

Carvalho, R. (2011). Calcular de cabeça ou com a cabeça?. *Atas do ProfMat 2011*. Lisboa: APM

Cascalho, J., Ferreira, R. & Teixeira, R. (2014). Cálculo Mental na Aula de Matemática: Explorações no 1.º Ciclo do Ensino Básico. *Jornal das Primeiras Matemáticas*, 2, 52- 64.

Castro, J. P., & Rodrigues, M. (2008). Sentido de número e organização de dados. *Texto de Apoio para Educadores de Infância.* Lisboa: ME-DGIDC

Cebola, G. (2002). Do número ao sentido do número. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo & A. F. Dionísio, *Actividades de Investigação de Aprendizagem da Matemática e na Formação de Professores* (pp.223-239). Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação.

Chizzotti, A. (2003). A pesquisa qualitativa em ciências humanas e sociais: Evolução e Desafios. *Revista Portuguesa de Educação,* 16 (2)., 221-236.

Coutinho, C. P. (2011). *Metodologia de investigação em Ciências Sociais e Humanas: Teoria e Prática.* Coimbra: Edições Almedina.

Correia, M. (2009). A observação participante enquanto técnica de investigação. *Pensar enfermagem*. Vol. 13 N.º 2 (pp. 30-36). Ministério da Ciência, Tecnologia e Ensino Superior.

Day, L e Hurrell, D*., (2015).* An explanation for the use of arrays to promote the understanding of mental strategies for multiplication*. Australian Primary Mathematics Classroom, 20(1*), 20-24

Dolk, M. e C. Fosnot (2001). *Young mathematicians at work: constructing multiplication and division.* Portsmouth, NH: Heineman.

Ferreira, E. (2012). *O desenvolvimento do sentido de número no âmbito da resolução de problemas de adição e subtração no 2.º ano de escolaridade*. Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa.

Gonçalves, H. (2009). Sentido de número e visualização no pré-escolar e primeiros anos. Acedido a 19 de maio de 2016 em: www.exedrajournal.com/wp-content/uploads/2013/07/11EF.pdf

Junes, D. (s/d). O Cálculo Mental no contexto escolar: Uma proposta de atividade. *XVI Encontro Regional de Estudantes de Matemática.*

Kamii, C. & Dominick, A. (1998). The Harmful Effects os Algorithms in Grades 1-4. *The teaching and learning of algorithms in school mathematics,*Chapter 17 of the l998 NCTM Yearbook (pp. 131-139). Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Mardjetko, E. & Macpherson, J. (2007). Is your classroom mental??. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 12 (2), 4-7.

McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (November 01, 1992). A Proposed Framework for Examining Basic Number Sense. *For the Learning of Mathematics, 12* (3), 2-8, 44.

Mendes, F. e Delgado, C. (2006). Sentido do número: um estudo no 1.º ciclo do ensino básico. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos e P. Canavarro (Eds). *Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores.* Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, Secção de Educação Matemática.

Mendes, F. e Delgado, C., Brocardo, J. e Gonçalves, F. (2010). *Números e operações: 3.º ano: números naturais, operações com números naturais, números racionais não negativos*. Ministério da Educação, Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.

Mendes, F., Oliveira, H., & Brocardo, J. (2011*).* As Potencialidades de Sequências de Tarefas na Aprendizagem da Multiplicação. *Atas do XXII SIEM: Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 1-8). Lisboa: APM.

Mendes, F., Brocardo, J. e Oliveira, H. (2011*).* La Multiplicación: Construyendo oportunidades para su aprendizaje: In M. Isoda e Rolton (Eds), *Ensêncinza de la multiplicacion: desde el estudo de classes japónes a las propuestas. Iberamericanas,* (pp. 321 – 350) Valparaíso: Ed. Universitárias

Mendes, F., Brocardo, J. & Oliveira, H. (2011). Os procedimentos usados pelos alunos do 1.º ciclo quando resolvem tarefas de multiplicação e a sua evolução. In *Desenvolvimento Curricular e Didáctica*. (pp. 6-24). Aveiro: Universidade de Aveiro.

Mendes, F. (2012). *A aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número: Um estudo com alunos do 1.º ciclo.* (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa – Instituto de Educação).

Mendes, F., Brocardo, J. e Oliveira, H. (2013). A evolução dos procedimentos usados pelos alunos: contributo de uma experiência de ensino centrada na multiplicação*. Quadrante, XXII (1), 133 - 162*

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME – Direcção Geral da Inovação e Desenvolvimento Curricular.

Ministério da Educação e Ciência (2013). *Programa e Metas Curriculares de Matemática – Ensino Básico*. Lisboa: MEC – Direção Geral da Educação.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar.* Tradução portuguesa do “Principles and standarts for Scool Mathematic’s” (1.ª Ed.). Lisboa: APM.

Pires, A., Colaço, H., Horta, M., & Ribeiro, C. (2013). Desenvolver o Sentido de Número no Pré-Escolar. *Exedra-Revista Científica*.

Ponte, João P. (1992). Concepções dos professores de matemática e processos de formação. In J. Ponte (ed.), *Educação matemática*, (pp. 185-247). Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2000). *Didáctica da matemática para o 1º ciclo do ensino básico*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2004). Práticas profissionais dos professores de Matemática. *Quadrante,* 13 (2), 51-74.

Ponte, J. P., & Sousa, H. (2010). Uma oportunidade de mudança na Matemática do ensino básico. In GTI (Org.), *O professor e o programa de Matemática do ensino básico*. Lisboa: APM.

Ralston, A. (2000). Fim à aritmética de papel e lápis. *Educação e Matemática*, 58, 13-15 e 59, 36- 41.

Reys, B. (1985). Mental computation. *Arithmetic teacher*, 32(6) 43-46.

Ribeiro, D., Valério, N. & Gomes, J. (2009). *Cálculo mental*: Programa de Formação Contínua para Professores do 1.º e 2.º ciclos. Lisboa: Escola Superior de Educação.

Rocha, M. I. & Menino, H. A. (2009). Desenvolvimento do Sentido do Número na Multiplicação. Um estudo de casos com crianças de 7/8 anos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 12 (1), 103-134.

Santos, L. & Ponte J. P. (2002). A prática lectiva como actividade de resolução de problemas: Um estudo com três professoras do ensino secundário. *Quadrante,* Vol. 11, Nº 2.

Silva, E. A. (2013). As metodologias qualitativas de investigação nas Ciências Sociais. P. 77-99. *Publicado* em *Revista Angolana de Sociologia*, 8 | 2011.

Silva, J. A. F. da (2003). Refletindo sobre as dificuldades de aprendizagem na Matemática: algumas considerações. Disponível em < http://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/22005/JoseAugustoFlorentinodaSilva.pdf < Acesso em 12 de maio,2016

Taton, R. (1969). *O cálculo mental* (Tradução M. A. Videira). Lisboa: Arcádia.

Thompson, I. (2009). Getting your head around mental calculation. I. Thompson (Ed.), *Issues in Teaching Numeracy in Primary schools*, (pp. 145–156). Open University Press. (Reimpressão de 1999). Educação – didática da Matemática.

Tomás, J. (2014). *A resolução de problemas de adição e o desenvolvimento do cálculo mental: um estudo com alunos do 2.º ano*. (Tese de Mestrado, Escola Superior de Educação – Instituto Politécnico de Setúbal).

Tuckman, B. (2000). *Manual de Investigação em Educação.* Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Yin, R. (2010). *Estudo de Caso – Planejamento e Métodos*. 2ª edição. Rio de Janeiro: Bookman.

ANEXOS

Anexo 1. *Pedido de autorização aos encarregados de educação.*

Exmº(ª) Senhor (a)
Encarregado (a) de Educação

No âmbito da tese que me propus a realizar no Mestrado de Educação Matemática, a decorrer no Instituto Superior de Educação, venho solicitar autorização para tirar fotografias e fazer filmagens às crianças e alunos durante o desenvolvimento de algumas atividades práticas. As atividades decorrerão na escola e serão dinamizadas por mim.
No âmbito deste pedido, garante-se a total manutenção da privacidade e confidencialidade dos dados relativos à criança e sua família, não sendo utilizados quaisquer dados que possam conduzir à sua identificação, nomeadamente, nomes. Demais se informa que este registo será única e exclusivamente utilizado para a tese de Mestrado bem como para a sua apresentação a nível académico, no final do ano letivo em data a determinar.

Com as mais cordiais saudações.

Amadora, 12 de outubro de 2015

____

Eu, ____, encarregado de Educação do(a) aluno(a) ____, li e compreendi este documento.

☐ **Autorizo** a recolha de fotos/vídeos.

☐ **Não autorizo** a recolha de fotos/vídeos.

Assinatura do Encarregado de Educação

____ ____ / ____ / ________

Anexo 2. *Pedido de autorização ao Diretor do Agrupamento.*

Ex^{mo}. Diretor do Agrupamento de escolas…

Eu, Sandra Patrícia Tavares Cristóvão, docente do quadro de agrupamento desta escola, venho por este meio solicitar autorização para desenvolver uma investigação, durante o próximo ano letivo - 2015/2016 - no âmbito do Mestrado em Educação Matemática, do Instituto Superior de Educação.
A investigação sob o tema "Cálculo mental na resolução de problemas de multiplicação" implica o envolvimento da turma do 3.º ano de escolaridade da EB1/JI .... Neste projeto serão elaboradas tarefas matemáticas, as quais serão implementadas na sala de aula, com o objetivo de fomentar a argumentação em grupo, desenvolver o cálculo mental, sentido de número e a resolução de problemas. A recolha de dados empíricos a efetuar na turma incidirá na observação das aulas, nas gravações áudio e vídeo das discussões em grupo e nas transcrições dos episódios ocorridos. Esta recolha será realizada entre outubro de 2015 e fevereiro de 2016. As autorizações dos Encarregados de Educação, dos alunos participantes, serão solicitadas em outubro e será salvaguardado o direito ao anonimato e a confidencialidade dos dados recolhidos.

Agradeço a atenção dispensada e despeço-me com os melhores cumprimentos.

Pede deferimento

____

Amadora, 12 de outubro de 2015

Anexo 3. *Síntese temporal das tarefas de multiplicação.*

1.ª Tarefa	**1.º Desafio:** " Multiplica e Acerta"	12 x 6	21 de outubro de 2015
		1453 x 6	21 de outubro de 2015
	2.º Desafio: " Pensa Rápido"	30 x 10	28 de outubro de 2015
		7630 x 10	28 de outubro de 2015
	3.º Desafio: " Relaciona e Calcula"	30 x 11	29 de outubro de 2015
		5630 x 11	29 de outubro de 2015
2.ª Tarefa	**"Já sei multiplicar"**	14 x 32.	17 de novembro de 2015
3.ª Tarefa	**Subtarefa 1:** "Os azulejos já colocados"	Problema 1.1.	3 de dezembro de 2015
	Subtarefa 2: "Os azulejos que falta colocarem"	Problema 1.2.	3 de dezembro de 2015
	Subtarefa 3: "Colocar os azulejos"	Problema 1.3.	7 de dezembro de 2015
	Subtarefa 4: "Encontrar os azulejos"	Problema 2	9 de dezembro de 2015

Anexo 4. *Desafios realizados na sala de aula, 1.ª tarefa.*

1.º Desafio: “ Multiplica e Acerta”

12 x 6	**1453 x 6**

2.º Desafio: “ Pensa Rápido”

30 x 10	**7630 x 10**

3.º Desafio: “ Relaciona e Calcula”

30 x 11	**7630 x 11**

Anexo 5. *Situação problemática, 2.ª tarefa.*

MATEMÁTICA

Nome Nome: ____ Data: ___/___/________

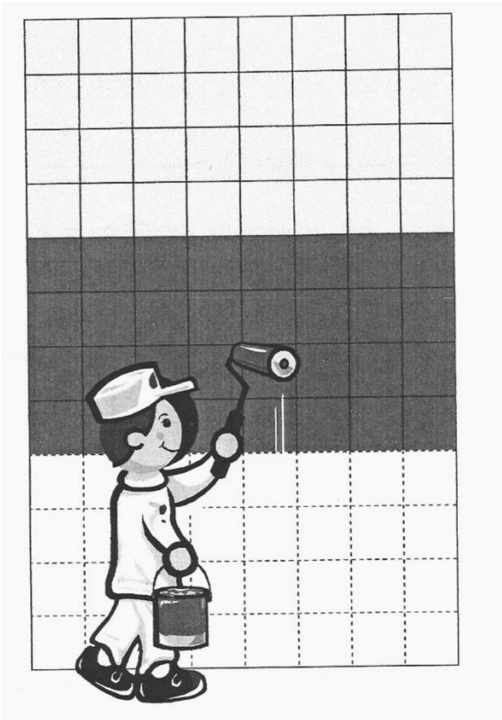
$$14 \times 32 =$$

Anexo 6. *Situação problemática, 3.ª tarefa.*

MATEMÁTICA

Nome Nome: ____ Data: ___/___/________

1. Na escola da Matilde, O Sr. Pedro está a colocar azulejos, com dois tons de cinzento, numa parede do ginásio, tal como mostra a figura.



1.1. Quantos azulejos já colocou o Sr. Pedro? Explica como pensaste.

1.2. Quantos azulejos faltam ainda na parede? Explica como pensaste.

1.3. Quando terminar, quantos azulejos terá colocado o Sr. Pedro? Explica como pensaste.

2. Uma outra parede com azulejos foi danificada pela humidade e alguns azulejos caíram. Quantos azulejos precisam de ser novamente colocados? Explica como pensaste.