

INSTITUTO POLITÉCNICO DE LISBOA  
INSTITUTO SUPERIOR DE CONTABILIDADE  
E ADMINISTRAÇÃO DE LISBOA



ISCAL

# GESTÃO DE PROJETOS

APLICAÇÃO À INDÚSTRIA METALOMECÂNICA

---

Daniela Gomes Dias

VERSÃO DEFINITIVA

Lisboa, Abril de 2019



INSTITUTO POLITÉCNICO DE LISBOA  
INSTITUTO SUPERIOR DE CONTABILIDADE  
E ADMINISTRAÇÃO DE LISBOA

# GESTÃO DE PROJETOS

APLICAÇÃO À INDÚSTRIA METALOMECÂNICA

---

Daniela Gomes Dias (n.º 20160106)

Dissertação submetida ao Instituto Superior de Contabilidade e Administração de Lisboa para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Controlo de Gestão e dos Negócios, realizado sob a orientação científica do Professor Doutor José Manuel de Oliveira Pires, Professor-Coordenador da área científica de Matemática.

Constituição do Júri:

Presidente: Doutora Marina Antunes

Arguente: Doutora Ana Paias

Vogal: Doutor José Manuel Oliveira Pires

Lisboa, Abril de 2019

Declaro ser a autora desta dissertação, que constitui um trabalho original e inédito, que nunca foi submetido (no seu todo ou qualquer das suas partes) a outra instituição de ensino superior para a obtenção de um grau académico ou outra habilitação. Atesto ainda que todas as citações estão devidamente identificadas. Mais acrescento que tenho consciência de que o plágio – a utilização de elementos alheios sem referência do autor – constitui uma grave falta de ética, que poderá resultar na anulação da presente dissertação.

“Talvez não tenha conseguido fazer  
o melhor, mas lutei para que o  
melhor fosse feito. Não sou o que  
deveria ser, mas Graças a Deus, não  
sou o que era antes”.

Marthin Luther King

## **Agradecimentos**

Um grande objetivo pessoal que sempre ambicionei foi a obtenção de grau de Mestre numa das áreas que mais gosto, no caso, Controlo de Gestão e dos Negócios. Foi uma etapa árdua, com muito trabalho, esforço, dedicação e sacrifício, mas é com um enorme sentimento de orgulho e missão cumprida que agora dou esta etapa por concluída.

A presente dissertação resulta de um ano de trabalho e pesquisa intenso e contínuo que, apesar de ter sido um período exigente e cansativo, me ensinou e desafiou bastante dando-me sempre forças para continuar a dar o meu melhor, para lutar pelos meus sonhos e ambições, para seguir em frente sem hesitar e nunca desistir mesmo nas situações mais adversas. Chegada esta grande etapa do meu percurso académico ao fim, é chegado o momento de agradecer a todas as pessoas que me apoiaram ao longo desta caminhada dando-me sempre o seu apoio, compreensão e carinho.

Antes de mais, agradeço ao meu orientador, Professor Doutor José Manuel de Oliveira Pires, por toda a ajuda, disponibilidade, compreensão, incentivo e dedicação manifestadas tanto durante o período curricular do mestrado, como ao longo do período de elaboração da dissertação. O seu apoio, experiência e profissionalismo foram fundamentais para a elaboração da presente dissertação, assim como a sua preciosa e incansável ajuda na revisão crítica do texto, cedência de bibliografia, esclarecimentos e sugestões.

Quero agradecer, igualmente, à minha família, em especial aos meus pais, por todo o apoio, sacrifício, amor, carinho, coragem e incentivo que me transmitiram não só neste percurso, mas ao longo de toda a minha vida. Agradeço de coração por terem sempre acreditado em mim e nas minhas capacidades, por todo o esforço que fizeram para me dar tudo aquilo que tenho e por toda a educação que me deram, é graças a eles que sou quem sou hoje. Gostaria igualmente de deixar um agradecimento muito especial aos meus avós que apesar de não me terem visto concluir esta etapa vivenciaram o seu início dando-me sempre o seu apoio e carinho máximos, fazendo-me sempre acreditar em mim e nos meus sonhos.

Agradeço, ainda, aos meus amigos e colegas pela amizade, companheirismo e compreensão ao longo deste percurso que, mesmo tendo sido privados da minha companhia em diversas ocasiões, sempre me motivaram e apoiaram.

Por último, mas não menos importante, quero agradecer ao Instituto de Contabilidade e Administração de Lisboa (ISCAL) por me ter acolhido nesta fase tão marcante da minha vida. Quero igualmente agradecer a todos os docentes e discentes que, direta ou indiretamente, me apoiaram, ensinaram, incentivaram e contribuíram para a conclusão de mais uma etapa.

De coração, o meu bem-haja a todos vós!

## Resumo

A gestão de projetos tem assumido um papel cada vez mais importante devido ao aumento progressivo na dimensão e complexidade dos mesmos. Uma das fases mais importantes da gestão de projetos refere-se ao planeamento e controlo das atividades que nem sempre é uma tarefa fácil devido exatamente à sua complexidade e dimensão.

Neste sentido, a presente dissertação destina-se a apresentar um estudo sobre a gestão de projetos, mais concretamente sobre o planeamento e controlo das atividades. Este estudo incide, em especial, na utilização da programação linear como abordagem alternativa ao *Critical Path Method* (CPM), quer na determinação da duração mínima do projeto quer na análise duração *versus* custo.

Para mostrar a aplicabilidade desta abordagem, a mesma foi aplicada a um caso prático, mais precisamente, ao planeamento e controlo das atividades envolvidas no fabrico de uma componente de uma máquina do setor metalomecânico numa das maiores empresas do setor na Europa.

**Palavras-chaves:** Gestão de Projetos; *Critical Path Method*; Programação Linear; custos *versus* tempo; planeamento e controlo das atividades.

## Abstract

*Project management has assumed a gradually important role due to the progressive increase in size and complexity of projects. One of the most important phases of project management is the planning and control of activities, which is considered a critical task due to the dimension and complexity of projects.*

*Therefore, this dissertation aims to present a study on project management, more specifically on the planning and control of activities. This study is focused specially in using linear programming as an alternative approach to the Critical Path Method (CPM), both in determining the minimum duration of the project and duration versus cost analysis.*

*In order to show the applicability of this approach, it was applied to a use case involving planning and control of activities in the manufacture of a machine component from the metal-mechanical sector in one of the largest companies of the sector in Europe.*

**Keywords:** *Project Management; Critical Path Method; Linear Programming; costs versus time; Planning and control of activities; metalomechanical area*

# Índice Geral

Agradecimentos.....	v
Resumo.....	vii
Abstract.....	viii
Índice Geral.....	ix
Índice de Tabelas.....	xi
Índice de Figuras.....	xii
Lista de abreviaturas.....	xiii
1.Introdução.....	1
2. Gestão de Projetos.....	3
2.1 Introdução.....	3
2.2 Definição e Caracterização.....	4
2.3 Ciclo de vida de um Projeto.....	7
2.4 Principais variáveis da gestão de projetos.....	10
3. Planeamento e controlo de atividades.....	12
3.1 Introdução.....	12
3.2 Conceitos básicos sobre grafos.....	12
3.3 Definição, identificação e caracterização de atividades.....	15
3.4 Representação gráfica de projetos.....	17
3.4.1 Diagrama de Gantt.....	17
3.4.2 Rede AON.....	19
3.4.3 Rede AOA.....	21
3.5 Método do caminho crítico CPM.....	26
3.6 Duração <i>versus</i> custo de um projeto.....	34
4.Utilização da Programação Linear no planeamento e controlo das atividades.....	38
4.1 Introdução.....	38
4.2 Programação Linear na determinação da duração do projeto.....	38
4.3 Programação Linear na análise duração <i>versus</i> custo.....	42
4.4 Vantagens da programação linear na gestão de projetos.....	47
5.Estudo de um caso prático.....	48
5.1 Introdução.....	48
5.2 Recolha de dados.....	48
5.3 Resultados e respetiva análise.....	51
6.Conclusões.....	56

Referências Bibliográficas .....	58
APÊNDICES.....	60
Apêndice A .....	60
Apêndice B .....	61
Apêndice C .....	63
Apêndice D.....	64
Apêndice E.....	68
Apêndice F.....	69

## Índice de Tabelas

<b>Tabela 3.1:</b> Lista de atividades para o projeto de confecção de um bolo .....	16
<b>Tabela 3.2:</b> Resultados obtidos para os acontecimentos associados ao exemplo 3.1 .....	30
<b>Tabela 3.3:</b> Resultados obtidos para as atividades do exemplo 3.1.....	33
<b>Tabela 4.1:</b> Lista de atividades com duração e custo normal e acelerado para o projeto do exemplo 3.1.....	45
<b>Tabela 5.1:</b> Lista das atividades que constituem o projeto de elaboração do <i>Piston</i> de 1 <sup>a</sup> Compressão.....	50
<b>Tabela 5.2:</b> Lista das atividades aceleradas e respectivos custos para o projeto de produção do <i>Piston</i> de 1 <sup>a</sup> Compressão.....	54

## Índice de Figuras

<b>Figura 2.1:</b> Caracterização da gestão de projetos.....	5
<b>Figura 2.2:</b> Níveis normais de custo e pessoal numa estrutura do ciclo de vida de um projeto.....	9
<b>Figura 2.3:</b> Impacto da variável com base no tempo do projeto.....	10
<b>Figura 3.1 a)</b> Grafo Orientado .....	13
<b>Figura 3.1 b)</b> Grafo não-orientado .....	13
<b>Figura 3.2:</b> Representação gráfica de um grafo orientado .....	14
<b>Figura 3.3:</b> Diagrama de Gantt para o projeto do exemplo 3.1 .....	18
<b>Figura 3.4.:</b> Rede AON para o projeto do exemplo 3.1 .....	20
<b>Figura 3.5:</b> Representação incorreta de uma rede AON .....	20
<b>Figura 3.6:</b> Representação correta de uma rede AON aplicando atividades fictícias para representar o início e o fim do projeto .....	20
<b>Figura 3.7:</b> Violação da regra número 5 relativa à construção de uma rede AOA.....	22
<b>Figura 3.8:</b> Diversas formas da representação correta da situação apresentada na figura 3.7.....	23
<b>Figura 3.9:</b> Representação incorreta das relações de precedência da situação anterior ....	23
<b>Figura 3.10:</b> Representação correta das relações de precedência da situação anterior .....	23
<b>Figura 3.11:</b> Representação das atividades em série ou sucessivas .....	24
<b>Figura 3.12:</b> Representação das atividades paralelas ou simultâneas .....	24
<b>Figura 3.13:</b> Representação das atividades convergentes .....	25
<b>Figura 3.14:</b> Representação das atividades divergentes .....	25
<b>Figura 3.15:</b> Representação das atividades convergentes-divergentes .....	25
<b>Figura 3.16:</b> Rede AOA para o projeto do exemplo 3.1 .....	26
<b>Figura 3.17.:</b> Etapas do planeamento de um projeto com aplicação do método CPM .....	28
<b>Figura 3.18:</b> Rede AOA para o projeto do exemplo 3.1 .....	30
<b>Figura 3.19.:</b> Representação do arco $(i, j)$ correspondente à atividade X.....	31
<b>Figura 3.20:</b> Relação tempo-custo de uma atividade .....	35
<b>Figura 3.21:</b> Custo indireto, direto e total associado à duração de um projeto.....	36
<b>Figura 5.1:</b> Rede AOA do projeto de elaboração do <i>Piston</i> de 1ª Compressão .....	52

## Lista de abreviaturas

AOA – *activity on arc*

AON – *activity on node*

CPM – *Critical Path Method*

ES – *Earliest start time*

ET – *Earliest time*

FF – *Free Float*

IF – *Independent Float*

LINDO - *Linear Interactive Discrete Optimizer*

LS – *Later starting*

LT – *Latest time*

PERT – *Program Evaluation and Review Technique*

PL – *Programação Linear*

PMBOK – *Project Management Body of Knowledge*

PMI – *Project Management Institute*

SF – *Safety Float*

TF – *Total Float*

## 1. Introdução

Num mundo cada vez mais competitivo onde a economia e os mercados estão em constante mudança assim como os valores sociais, culturais, morais e políticos, apenas as organizações mais preparadas e com as ferramentas de gestão mais adequadas, conseguem “sobreviver” e fazer face aos vários obstáculos que possam surgir. Deste modo, pode-se aferir que a gestão de projetos detém um papel fulcral no seio de qualquer organização, uma vez que a transformação de *inputs* em *outputs* tornou-se um processo complexo e bastante competitivo.

Segundo Aquilano (1979) “a gestão de projetos pode ser definida como planejar, dirigir e controlar recursos para satisfazer as restrições técnicas, de custo e de tempo do projeto.” Assim, uma boa aplicação da gestão de projetos por parte das organizações pode ajudá-las não só a reduzir os custos de elaboração de um projeto, como também o tempo de conclusão do mesmo, o que se torna um fator diferenciador ao nível da concorrência de mercado.

No passado, o planeamento e controlo das atividades de um projeto era uma tarefa bastante difícil devido à complexidade dos processos utilizados. No entanto, nos dias de hoje, essa mesma função passou a considerar-se simples graças aos meios informáticos que as empresas atualmente adotam e aos conhecimentos adquiridos ao longo dos tempos ao nível da gestão de projetos. Das várias técnicas desenvolvidas com o intuito de suportar a gestão de projetos destacam-se os gráficos de Gantt, o método PERT (*Program Evaluation and Review Technique*) e o método CPM (*Critical Path Method*). A principal diferença entre estes dois métodos reside no tipo de dados que utilizam. Enquanto no CPM os dados são determinísticos, no PERT os dados são probabilísticos.

Uma outra abordagem diferente para o planeamento e controlo de atividades de um projeto, que permite tratar de forma eficiente projetos de grandes dimensões e também obter mais informação acerca do projeto, é a utilização da Programação Linear (PL).

No setor metalomecânico a necessidade de uma gestão eficiente não é exceção. Neste ramo de atividade, qualquer atraso na produção de determinado componente pode gerar elevados custos, ou até mesmo grandes prejuízos, devido ao elevado preço de mercado a que se encontra atualmente o ferro e à variação do mesmo. É neste contexto que se insere o presente trabalho, onde é feita uma aplicação da programação linear, para avaliar a

eficiência da produção e a possibilidade de reduzir custos e tempo através da aplicação de mais recursos.

Com vista a alcançar os objetivos definidos, surgiu a necessidade de realizar uma revisão exhaustiva da literatura existente sobre o tema em estudo. Perante tal, numa fase inicial, realizou-se uma pesquisa sobre o conceito de gestão de projetos para salientar a sua definição e realçar o quanto pode ser vantajosa a sua aplicabilidade nas organizações. De seguida, foi feita uma pesquisa sobre o planeamento e controlo de atividades que constitui uma das fases mais importantes da gestão de projetos.

Esta dissertação encontra-se estruturada em seis capítulos. No capítulo 2, faz-se referência à gestão de projetos e a toda a sua envolvente. No capítulo 3, aborda-se o planeamento e controlo das atividades, nomeadamente alguns conceitos essenciais à abordagem do tema, apresentam-se as possíveis formas de representação gráfica de um projeto e é feita uma abordagem ao método CPM na determinação do tempo mínimo de execução de um projeto e na análise tempo *versus* custo. No capítulo 4, apresentam-se os modelos de programação linear que permitem determinar aquele tempo mínimo e efetuar aquela análise. No capítulo 5, é apresentado o estudo de um caso prático, que tem por objetivo avaliar o processo de fabrico de uma componente de uma máquina denominada de Enfardadeira 40×40, utilizando para tal alguns dos modelos abordados no capítulo 4. Por último, no capítulo 6, são apresentadas as principais conclusões adquiridas com a realização deste trabalho.

## 2. Gestão de Projetos

### 2.1 Introdução

A sociedade onde nos inserimos apresenta-se cada vez mais competitiva, o que leva a que as empresas procurem cada vez mais a adoção de técnicas e métodos matemáticos com vista à otimização dos seus recursos (Pinto, 2010). Uma dessas técnicas consiste na gestão de projetos, que constitui o tema desta dissertação.

A gestão de projetos advém desde a antiguidade, sendo exemplos da sua aplicação, entre outros, a construção da Muralha da China, com início nos anos 220 a.C. e concluída no séc. XV, e as Pirâmides do Egito, construídas há cerca de 2500 anos a.C.. Na elaboração deste tipo de projetos surgiu a necessidade de recorrer a arquitetos qualificados e com grandes conhecimentos matemáticos de modo a garantir o correto planeamento e execução dos mesmos. Mais recentemente, no século XIX, é possível enumerar a Torre Eiffel, em França, e a Estátua da Liberdade, nos EUA, como dois grandes exemplos de sucesso da gestão de projetos, pois graças à sua aplicação o tempo de construção destes dois projetos foi substancialmente reduzido (Gouveia, 2010).

Segundo este autor, Frederick Winslow Taylor (1856 – 1915) foi o pioneiro da gestão de projetos introduzindo a necessidade de detalhar e organizar as operações envolvidas num projeto. Henry Laurence Gantt (1910) destaca-se como o impulsionador dos famosos gráficos de Gantt que permitem visualizar a sequência das várias atividades que constituem um projeto assim como o seu tempo de duração.

Mais tarde, nos finais da década de 1950, outras técnicas baseadas no uso de redes foram desenvolvidas. A técnica *Program Evaluation and Review Technique* (PERT), desenvolvida pela Marinha dos Estados Unidos da América em 1958 para celebrar o desenvolvimento do míssil balístico Polaris Fleet, e a técnica *Critical Path Method* (CPM) desenvolvida em 1957 por James E. Kelley, da Remington Rand, e Morgan R. Walker, da Dupont de Nemours. Estas técnicas têm sido muito usuais até aos dias de hoje no planeamento e controlo de atividades (Ravindran, Phillips e Solberg, 1986).

Gouveia (2010) defende ainda que foi durante a segunda guerra mundial, mais precisamente em 1942, que ficou registado o momento de maior importância no desenvolvimento da gestão de projetos com o surgimento do projeto Manhattan, que consistiu na construção de uma bomba atómica por parte dos norte-americanos. Este

projeto, conhecido pela sua grande dimensão e complexidade, originou a necessidade de detalhar e organizar as operações envolvidas no projeto para que o trabalho fosse mais facilmente analisado e melhorado pelos vários especialistas envolvidos.

Segundo Kerzner (2000), com o evoluir dos tempos, também a gestão de projetos foi sofrendo alterações com vista a melhorar o desempenho e resultados das organizações que a adotam. No entanto, algumas dessas organizações mostraram alguma resistência quanto à mudança da gestão de projetos tradicional para a gestão de projetos moderna. Na gestão de projetos tradicional (1960-1990), o sistema era fechado e não existia contacto entre as várias áreas funcionais, sendo que as organizações apenas se preocupavam com o facto de o trabalho estar concluído. Na gestão de projetos moderna (1990-1999), aplicada nos dias de hoje, é adotado um sistema aberto que permite contacto entre as várias áreas funcionais que possuem uma relação entre si, produzindo assim resultados mais eficientes.

Ao longo deste capítulo é apresentada uma abordagem à gestão de projetos. Assim, na secção 2.2, é abordada a definição e caracterização da gestão de projetos. Na secção 2.3, são descritas as várias fases do ciclo de vida de um projeto. Por último, na secção 2.4, são enumeradas as principais variáveis da gestão de projetos.

## 2.2 Definição e Caracterização

Antes de definir e compreender o que é a gestão de projetos, é importante perceber o conceito de projeto. O *Project Management Institute* (PMI)<sup>1</sup> no seu Guia do Conhecimento em Gestão de Projetos ou, em inglês, *Project Management Body of Knowledge* (PMBOK), definiu projeto como sendo um conjunto de atividades temporárias, realizadas em grupo, com o objetivo de criar um produto, serviço ou um dado resultado (Fox, 2013) e (Elmabrouk, 2011).

Segundo Aquilano (1997: 494), “um projeto é simplesmente uma declaração ou proposta de algo a fazer”, isto é, um projeto pode ser caracterizado como um conjunto de tarefas relacionadas entre si que visam obter *outputs* num determinado período de tempo proposto. Já para Lisboa e Gomes (2008: 387), um projeto é definido “como um conjunto de

---

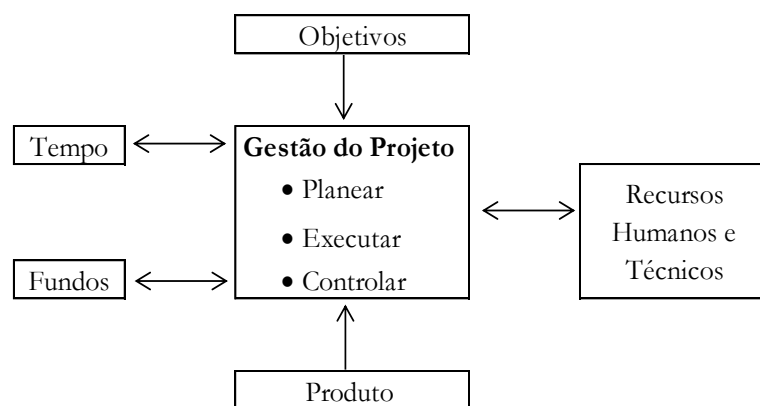
<sup>1</sup> O PMI, que tem assumido um papel bastante importante na gestão de projetos e no seu desenvolvimento, é uma associação internacional sem fins lucrativos criada em meados de 1969, nos Estados Unidos da América, por James Snyder, Eric Jenett e J. Gordon Davis. O objetivo principal desta associação passa por auxiliar o investimento em pesquisas profissionais e de recursos e a defesa e adoção de boas práticas de gestão de projetos em qualquer tipo de empresa que os adote (Project Management Institute, 2018).

atividades inter-relacionadas, que devem ser realizadas com uma determinada ordem de forma a completarem um plano estabelecido”.

Existem assim diversas formas de definir um projeto dependendo do autor. No entanto, todas elas são semelhantes e apresentam características em comum, nomeadamente o facto de um projeto ser temporário, consistir num conjunto de atividades inter-relacionadas, obedecer a um plano e possuir um início e um fim bem determinados.

No guia lançado pelo PMI como ferramenta de auxílio à gestão de projetos, o PMBOK, é possível encontrar instruções, diretrizes, conhecimentos e apoio quanto à adoção das boas práticas de gestão de projetos implementadas pelo PMI, tendo a primeira edição sido lançada em 1996 e atualmente já se contar com a sexta edição.

Como se descreve na figura 2.1, de um modo geral, a gestão de projetos caracteriza-se como o processo de planeamento, execução e controlo de um projeto, desde a sua fase inicial à sua fase final, com vista a atingir o seu objetivo final num determinado prazo, tendo em conta a minimização de tempo e custos relativos aos recursos técnicos e humanos utilizados. O principal objetivo da gestão de projetos não passa simplesmente por cumprir o projeto tal como planeado, mas sim, por conseguir cumpri-lo da melhor forma, atingindo o máximo desempenho possível, procedendo às alterações que sejam necessárias ao longo do mesmo (Roldão, 1992).



**Figura 2.1:** Caracterização da gestão de projetos.

**Fonte:** Roldão (1992: 11)

Para Lisboa e Gomes (2008), a aplicação da gestão de projetos por parte das empresas, tem registado um aumento considerável e tem sido considerada por várias organizações um fator determinante para a competitividade entre empresas devido a dois motivos principais,

a velocidade e a flexibilidade. Velocidade porque “tempo é dinheiro” e para uma empresa que entre tarde no mercado o seu desenvolvimento pode ficar condicionado e, conseqüentemente, acarretar perdas ou até mesmo prejuízos ao nível dos lucros. Flexibilidade uma vez que, dada a exigência dos consumidores, as empresas têm de se ajustar às suas necessidades e ao mesmo tempo acompanhar ou ultrapassar as ofertas da concorrência. A gestão de projetos surge com o intuito de ajudar as organizações a melhorar o desenvolvimento destes dois aspetos.

Segundo Kerzner (2000), para que a gestão de projetos seja bem-sucedida é necessária uma boa coordenação e um bom planeamento das várias atividades constituintes de um projeto e, para tal, o trabalho dos vários colaboradores deve ser organizado de modo horizontal e não de modo vertical, como ocorria na gestão tradicional. Na gestão vertical os trabalhadores são organizados de “cima para baixo” em forma de cadeias de comando o que leva a que a maioria dos trabalhadores não tenha interação com outras áreas funcionais, cingindo-se somente à sua função e não possuindo conhecimento sobre o estado do projeto. Na gestão horizontal, aplicada nos dias de hoje, o objetivo passa por interligar os vários trabalhadores, colocando-os em contacto permanente, de forma a colmatar barreiras e melhorar a comunicação, estando todos a par do projeto, de um modo geral, nas diversas áreas funcionais.

De acordo com o mesmo autor, a aplicação eficaz da gestão de projetos permite obter alguns benefícios, entre os quais:

- Redução do tempo de desenvolvimento de um produto;
- Crescimento do nível de vida médio do produto;
- Aumento das vendas;
- Aumento das receitas; e
- Crescimento do número de clientes;

Como foi referido no capítulo 2.1, apesar de ainda existirem algumas empresas que se têm mostrado pouco recetivas à aplicação da gestão de projetos moderna, optando ainda por uma visão mais antiga, a maioria das organizações já aderiu à gestão de projetos atual e tem vindo a obter grandes resultados graças à sua implementação. Importa ainda anotar que

existem algumas diferenças encontradas entre a visão atual da gestão de projetos, visão moderna, e a visão do passado, visão tradicional.

Na aplicação da visão tradicional:

- a gestão de projetos acarreta mais pessoal, e conseqüentemente, mais custos;
- pode ser criada instabilidade na empresa o que leva, por vezes, ao aumento de conflitos;
- o lucro pode sofrer diminuições;
- a gestão de projetos fica associada apenas a projetos de grande dimensão;
- os problemas relacionados com o nível de qualidade aumentam; e
- existe, por vezes, um aumento da autoridade e poder.

Por outro lado, na aplicação da visão moderna:

- é realizado mais trabalho em menos tempo o que, conseqüentemente, reduz os custos com pessoal, permitindo ainda uma maior relação de proximidade com os clientes;
- existe um aumento da qualidade;
- são reduzidas as disputas pelo poder;
- são produzidas um maior número de soluções para os variados problemas; e
- fornece uma grande ajuda na progressão da empresa.

### **2.3. Ciclo de vida de um Projeto**

Vários autores são concordantes quanto ao facto dos projetos se diferenciarem uns dos outros tendo em conta o seu tamanho e a sua complexidade, defendendo ainda que o ciclo de vida de um projeto é composto por quatro fases, que devem ser cumpridas desde o início até à conclusão do projeto.

Apesar de cada projeto ter um início e um fim bem definidos, as atividades e produtos associados a cada um podem variar muito de projeto para projeto. Aos projetos que possuem como característica principal o facto de serem totalmente planeados inicialmente, isto é, aqueles projetos cujo seu planeamento a nível de tempo e custo necessários para a

elaboração e entrega do projeto são definidos no início do ciclo de vida do mesmo, dá-se o nome de projetos com um ciclo de vida preditivo. Neste caso, as alterações que possam ocorrer ao longo do projeto são cuidadosamente analisadas e geridas. Já aos projetos que são desenvolvidos por iterações e cada uma delas é definida apenas quando é iniciada, isto é, não são definidos os custos e tempo necessário para elaboração do projeto no início do seu ciclo de vida, são os denominados projetos com um ciclo de vida adaptativo, uma vez que o ciclo de vida do projeto é adaptado consoante a evolução do mesmo (PMI, 2013).

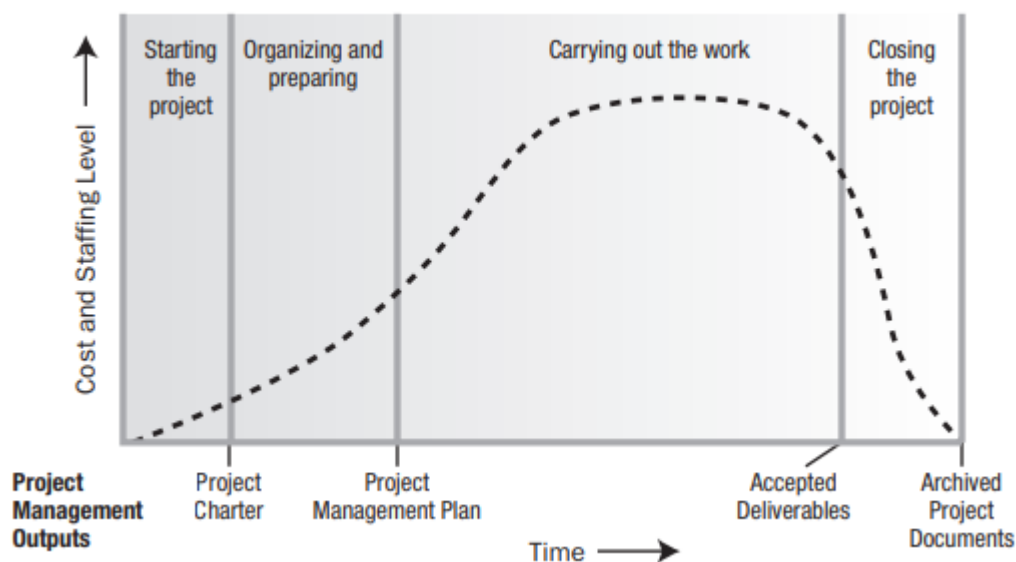
Ainda segundo o PMI (2013), o ciclo de vida de um projeto deve-se constituir em quatro fases:

1. Fase inicial do projeto;
2. Organização e preparação;
3. Execução do trabalho/ projeto; e
4. Fase final do projeto / conclusão.

Na primeira fase, fase inicial do projeto ou fase de concepção, deve ser realizado um estudo prévio com o objetivo de preparar a concepção do projeto a nível global e delinear qual a pré-viabilidade em termos técnicos, financeiros e funcionais. Esta fase implica normalmente a execução de estudos de oportunidade e coerência, devendo ser identificadas as necessidades e as alternativas do projeto para que possa ser submetida uma proposta e obtida a aprovação da mesma. Na segunda fase, de organização e preparação do projeto, devem ser preparados todos os equipamentos necessários, desenvolvidos os orçamentos, a calendarização, o fundo de maneiio, conduzidos os vários estudos (de financiamento, condições de exploração, de mercado) e o projeto deve ser preparado e apresentado para posterior aprovação para implementação. Na terceira fase, fase de execução, executam-se os trabalhos propriamente ditos tendo em conta os parâmetros acordados ao nível de custo, tempo e qualidade. O espírito de equipa e a boa comunicação da mesma é um fator de grande relevância nesta fase e é nela que devem ser igualmente definidas as especificações finais, revisto o *design*, contratada a equipa e os equipamentos necessários para elaboração do projeto e assegurado o desempenho e a qualidade do mesmo. Caso existam alterações a realizar no projeto esta é a fase ideal para que tal aconteça. Na quarta e última fase, fase de conclusão do projeto, após a receção dos ensaios e testes realizados ao projeto, se todas as condições forem reunidas, o projeto é dado por concluído, os recursos

são libertados, as responsabilidades transferidas e os resultados obtidos são documentados (Roldão (1992, 2000)).

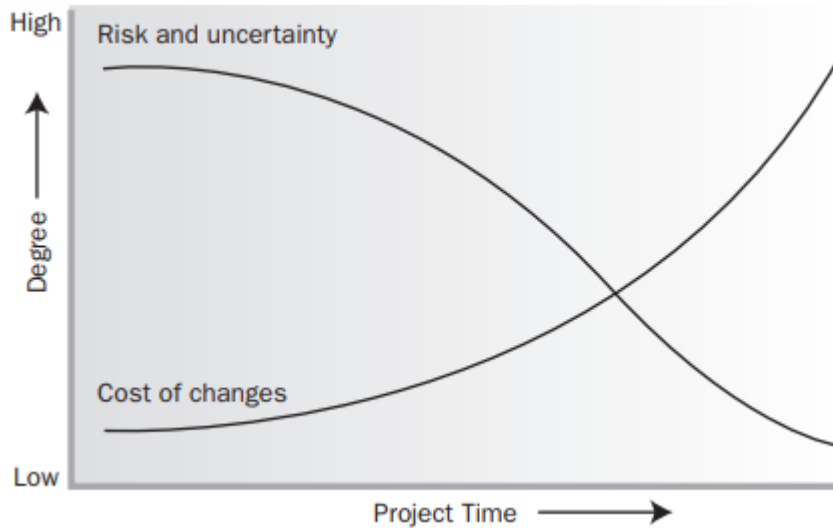
Na figura 2.2, é possível observar a relação entre o nível de custos e pessoal face ao tempo decorrido na duração de um projeto. É facilmente identificável que no início de um projeto os níveis de custos e de pessoal são baixos. Na fase seguinte, fase de organização e preparação do projeto, é registada uma subida gradual dos níveis atrás referidos atingindo o seu ponto máximo na fase de execução do projeto. Após atingirem o seu ponto máximo, os custos caem abruptamente e o projeto é dado por concluído. Apesar da relação representada na figura 2.2 ser bastante usual, nem todos os projetos seguem esta linha de atuação pois alguns deles necessitam de investir gastos iniciais significativos para poder iniciar o projeto e possuir algum pessoal especializado para garantir os recursos necessários no seu início de vida.



**Figura 2.2:** Níveis normais de custo e pessoal numa estrutura do ciclo de vida de um projeto

**Fonte:** PMI (2013: 39)

Na figura 2.3, representa-se o grau de risco e incerteza em relação aos custos relativos à alteração do projeto. É possível verificar que o grau de risco e a incerteza de um projeto são maiores no início do projeto diminuindo ao longo do mesmo, à medida que as decisões são tomadas e os produtos são dados por concluídos. Por outro lado, os custos relativos a alterações e correções de erros tendem a aumentar à medida que o projeto se aproxima da sua fase final.



**Figura 2.3:** Impacto da variável com base no tempo do projeto

**Fonte:** PMI (2013: 40)

Assim, o risco varia ao longo do ciclo de vida do projeto o que significa que quanto mais cedo se atuar com rigor, qualidade e adequação, mais recursos terão a possibilidade de ser poupados.

Segundo Roldão (2000), a condução de um projeto implica a ocorrência de riscos que podem ser provenientes de várias naturezas: técnicos, económicos, humanos, entre outros. No entanto, com a aplicação de uma boa gestão de projetos, esses riscos apesar de, por vezes, não serem eliminados totalmente podem sofrer uma redução significativa.

## 2.4. Principais variáveis da gestão de projetos

Como já referido anteriormente, na gestão de projetos o espaço de soluções é delimitado pelo tempo, custo e qualidade, sendo as variáveis principais que atuam dentro desse espaço os recursos técnicos e humanos. Esses recursos são realizados através de um conjunto de várias técnicas de gestão de projetos que se têm vindo a desenvolver (Roldão, 2000):

1. Organização e liderança: independentemente da dimensão do projeto, da sua complexidade e do número de recursos, a constituição da equipa, e a organização e liderança do projeto são fatores chave. O ponto de partida crucial em qualquer projeto deve abranger:
  - a. Seleção e constituição da equipa;
  - b. Afetação de responsabilidades;

- c. Liderança do projeto;
  - d. Definição do método de organização; e
  - e. Sistemas de informação.
2. Planeamento e orçamento: o ponto principal de um projeto é o cumprimento do prazo estabelecido dentro do orçamento previsto e da *performance* planeada. O binómio tempo-custo surge interligado com as iterações mútuas do projeto e é tratado com base em técnicas de planeamento, nomeadamente, os diagramas de Gantt e a técnica PERT/CPM;
  3. Otimização do financiamento: com base nas previsões orçamentais inicialmente traçadas na conceção do projeto são posteriormente revistos os financiamentos e a sua otimização ao nível dos efeitos de alavanca, tendo em atenção os atrasos no projeto;
  4. Contratação e *procurement*: a contratação é considerada a união formal entre as duas partes negociantes e é onde deve ser dada especial atenção às condições e cláusulas contratuais. O *procurement* é ainda outro aspeto bastante relevante a ter em consideração, pois é este o responsável pela relação estabelecida entre fornecedores e empresa relativamente ao abastecimento da empresa a nível de logística (matérias-primas, transportes, produtos acabados e semiacabados, linhas de produção, entre outros), (The Telegraph, 2015);
  5. Negociação: esta fase é caracterizada pela troca de ideias relativas a questões de tecnologia, prazos de entrega, custos, entre outros aspetos considerados relevantes;
  6. Acompanhamento e análise de desvios: o gestor do projeto deve ter um amplo conhecimento das várias envolventes do projeto, dando especial atenção à relação entre as especificações, engenharia, qualidade de implementação do projeto, utilização de procedimentos e controlo de implementação; e
  7. Sistemas de informação: estabelecem a ponte entre o controlo efetivo do processo do projeto e os requisitos pré-estabelecidos; um sistema de informação que satisfaça os requisitos pré-estabelecidos para o projeto é considerado de grande importância para o sucesso do projeto.

### 3. Planeamento e controlo de atividades

#### 3.1 Introdução

Como foi referido no capítulo anterior, uma das fases mais importantes na gestão de projetos é o planeamento e controlo das atividades. Segundo Lisboa e Gomes (2008), o planeamento e controlo das atividades nem sempre foi uma tarefa fácil, em especial para projetos de grandes dimensões. No entanto, com o evoluir dos tempos e com o aparecimento de novos meios informáticos, nomeadamente aqueles aplicados aos métodos de aplicação e controlo, a gestão de projetos tornou-se uma tarefa mais fácil, prática e célere.

Existem vários instrumentos que se associam ao planeamento e controlo das atividades, entre os quais, o diagrama de Gantt, a técnica CPM e a técnica PERT que surgem como os mais referenciados.

Importa referir que os métodos CPM e PERT são desenvolvidos sobre uma rede que é definida sobre um grafo. Assim, na secção 3.2, são abordados alguns conceitos básicos sobre grafos. Na secção 3.3, apresenta-se a definição, identificação e caracterização das atividades de um projeto para uma melhor compreensão do tema abordado. Na secção 3.4, são apresentados alguns tipos de representação gráfica de redes de projetos, diferenciando os vários tipos existentes. Na secção 3.5, é abordado o método CPM. Por fim, na secção 3.6, é feita uma análise à relação duração *versus* custo.

#### 3.2 Conceitos básicos sobre grafos

A representação gráfica de projetos é muitas vezes feita através de redes, designadas por redes de projetos. Atendendo a que as redes são definidas sobre estruturas matemáticas conhecidas como grafos, importa apresentar de seguida alguns conceitos sobre grafos.

Em primeira instância, importa apresentar o conceito de grafo. Um grafo  $G$  é um par constituído por dois conjuntos: o conjunto dos nodos (ou vértices), usualmente representados por  $N$  (ou  $V$ ), e o conjunto de ligações, unindo alguns ou todos os nodos (Winston, 1993).

Este conjunto de linhas pode possuir ou não orientação. No primeiro caso, essas linhas designam-se por arcos e o conjunto é normalmente representado por  $A$ . Nestas condições

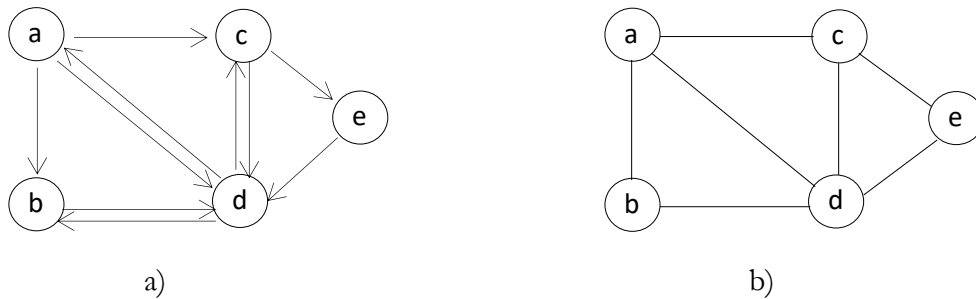
diz-se que o grafo é orientado e representa-se por  $G = (N, A)$ . Identicamente, se as linhas não têm orientação são designados por arestas e o conjunto é normalmente representado por  $E$ . Neste caso o grafo diz-se não orientado e representa-se por  $G = (N, E)$ . Um arco do nodo  $i$  para o nodo  $j$  é definido pelo par ordenado  $(i, j)$  onde  $i$  representa a extremidade inicial do arco e  $j$  a extremidade final. Uma aresta ligando os nodos  $i$  e  $j$  é representada pelo par não ordenado  $\{i, j\}$  onde  $i$  e  $j$  são as extremidades da aresta. No caso de um grafo possuir simultaneamente arcos e arestas diz-se um grafo misto, o qual pode ser transformado num grafo orientado em que cada aresta é substituída por dois arcos com sentidos opostos (Hiller e Lieberman, 2006).

Na figura 3.1 pode observar-se a representação gráfica de um exemplo de um grafo orientado e de um grafo não orientado onde  $N = \{A, B, C, D, E\}$ . Assim, em 3.1 a) está representado o grafo orientado  $G = (N, A)$  onde:

$$A = \{(a,b), (a,c), (a,d), (b,d), (d,a), (d,b), (d,c), (c,d), (c,e), (e,d)\}$$

enquanto na figura 3.1 b) está representado o grafo não orientado  $G = (N, E)$  onde:

$$E = \{\{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,d\}, \{c,d\}, \{c,e\}, \{d,e\}\}$$



**Figura 3.1 a)** Grafo Orientado e **b)** Grafo não-orientado

**Fonte:** Elaboração Própria

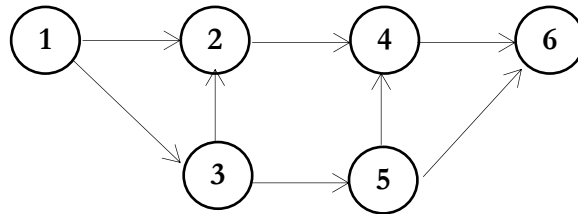
Relativamente a um arco  $(i, j)$ , o nodo  $i$  diz-se predecessor imediato do nodo  $j$  e  $j$  diz-se o sucessor imediato do nodo  $i$ . O conjunto dos nodos sucessores imediatos do nodo  $i$ , representado por  $\Gamma^+(i)$ , é definido por

$$\Gamma^+(i) = \{j : (i, j) \in A\}$$

Identicamente, o conjunto dos nodos predecessores imediatos do nodo  $i$ , representado por  $\Gamma^-(i)$ , é definido por

$$\Gamma^-(i) = \{j : (j, i) \in A\}$$

Para ilustrar estes conceitos, considere-se o grafo orientado apresentado na figura 3.2.



**Figura 3.2:** Representação gráfica de um grafo orientado.

**Fonte:** Elaboração Própria

De acordo com a figura, tem-se:

- $\Gamma^+(1) = \{2, 3\}$ ,  $\Gamma^+(2) = \{4\}$ ,  $\Gamma^+(3) = \{2, 5\}$ ,  $\Gamma^+(4) = \{6\}$ ,  $\Gamma^+(5) = \{6, 4\}$ ,  $\Gamma^+(6) = \{ \}$
- $\Gamma^-(1) = \{ \}$ ,  $\Gamma^-(2) = \{1, 3\}$ ,  $\Gamma^-(3) = \{1\}$ ,  $\Gamma^-(4) = \{2, 5\}$ ,  $\Gamma^-(5) = \{3\}$ ,  $\Gamma^-(6) = \{4, 5\}$

Segundo Winston (1993), uma outra definição relevante a ter em consideração é a definição de caminho. Um caminho de um nodo  $n_1$  para um nodo  $n_k$  num grafo orientado é uma seqüência de arcos em que a extremidade final de cada arco coincide com a extremidade inicial do arco seguinte, ou seja,

$$(n_1, n_2), (n_2, n_3), \dots, (n_{k-1}, n_k)$$

Um caminho que se inicia e termina no mesmo nodo, isto é, em que a extremidade final do último arco coincide com a extremidade inicial do primeiro, diz-se um circuito. Quando não se tem em consideração a orientação, o conceito de caminho dá lugar ao conceito de cadeia e o de circuito ao de ciclo.

Por fim, apresentados alguns dos conceitos básicos sobre grafos, importa definir o conceito de rede. Uma rede é um grafo em que a cada linha e/ou nodo está associado pelo menos um número real, podendo o mesmo representar uma medida, um tempo, uma probabilidade, um custo, entre outros (Hiller e Lieberman, 2006).

### 3.3 Definição, identificação e caracterização de atividades

Como se referiu no capítulo 2, um projeto pode ser definido como um conjunto de tarefas inter-relacionadas entre si cuja execução visa atingir um ou mais objetivos organizacionais. As tarefas de um projeto são normalmente designadas de atividades e, deste modo, as atividades são os elementos que constituem um projeto e que correspondem a tarefas ou processos a realizar. Dito de outro modo, e segundo Lisboa e Gomes (2008), é definida como atividade o trabalho necessário para a realização de parte de um projeto sobre o qual incidem normalmente consumos de recursos e tempo.

Assim sendo, a cada atividade de um projeto está associada uma duração, um custo e uma relação com as outras atividades. A data, no tempo, que marca o início e o fim de cada atividade é designada de acontecimento. Como se verá mais tarde, um acontecimento pode marcar o início ou o fim de mais do que uma atividade. A relação entre as atividades é uma relação de precedência que garante que determinadas atividades apenas podem ser iniciadas quando todas as atividades precedentes estiverem concluídas.

Esta relação de precedência é normalmente representada pelo símbolo menor que ( $<$ ). Admitindo que  $A$ ,  $B$  e  $C$  representam três atividades, tem-se:

- $A < B$ , significa que a atividade  $B$  não pode ter início sem que a atividade  $A$  esteja concluída, isto é, a atividade  $A$  precede ou é predecessora da  $B$ , e a atividade  $B$  é sucessora da atividade  $A$ ;
- $A < \{B, C\}$  significa que  $A < B$  e  $A < C$ , ou seja, a atividade  $A$  é predecessora das atividades  $B$  e  $C$  o que significa que estas duas atividades só poderão ter início após a conclusão da atividade  $A$ ;
- $\{A, B\} < C$ , significa que  $A < C$  e  $B < C$ , isto é, a atividade  $C$  é sucessora das atividades  $A$  e  $B$  e só deverá ser iniciada após a conclusão destas duas atividades que são, deste modo, suas predecessoras.

A relação de precedência descrita anteriormente goza das propriedades não reflexiva, antissimétrica e transitiva. A primeira indica que  $A \not< A$ , para qualquer atividade  $A$ , isto é, uma atividade não se precede a si própria. A segunda indica que se  $A < B$  então  $B \not< A$ , para quaisquer atividades  $A$  e  $B$ , isto é, se  $A$  precede  $B$  então  $B$  não precede  $A$ . A terceira

propriedade indica que se  $A < B$  e  $B < C$  então  $A < C$ , quaisquer que sejam as atividades  $A, B$  e  $C$ , isto é, se  $A$  precede  $B$  e  $B$  precede  $C$  então  $A$  precede  $C$ . As relações de precedência obtidas por transitividade não são apresentadas de forma explícita, apenas se explicitam as relações de precedência imediata. Note-se que a relação de precedência imediata não goza desta propriedade, continuando, no entanto a gozar das outras duas. Note-se ainda que o facto de ser antissimétrica implica que o grafo é acíclico, isto é, não tem ciclos (ver Levy, Thompson e Wiest, 1962).

A identificação e caracterização das atividades de um projeto pressupõe um conhecimento em pormenor da natureza das tarefas ou processos a realizar. A partir desse conhecimento é elaborada uma lista onde constam a identificação de todas as atividades, a duração de cada uma delas e as relações de dependência ou de precedência.

**Exemplo 3.1:** Na tabela 3.1 apresenta-se uma lista de atividades relativas ao projeto de confeção de um bolo caracterizadas pelas relações de precedência e pelo tempo de duração de cada atividade.

**Tabela 3.1:** Lista de atividades para o projeto de confeção de um bolo

Atividades	Descrição da Atividade	Precedências Imediatas	Duração Estimada
<b>A</b>	Compra dos ingredientes	---	30 min.
<b>B</b>	Pesagem e medição dos ingredientes	A	22 min.
<b>C</b>	Aquecimento do forno	B	20 min.
<b>D</b>	Elaboração da massa do bolo	B	42 min.
<b>E</b>	Cosedura da massa	C, D	35 min.
<b>F</b>	Elaboração do recheio	B	16 min.
<b>G</b>	Junção das duas partes	E, F	5 min.
<b>H</b>	Decoração	G	12 min.

**Fonte:** Elaboração Própria

As relações de precedência para as atividades que constituem o projeto apresentado neste exemplo são dadas por:

$$A < B; B < \{C, D, F\}; \{C, D\} < E; \{E, F\} < G; G < H$$

Outra forma mais usual de representar estas relações e também as durações das atividades de um projeto consiste na representação gráfica do mesmo que vai ser abordada na secção seguinte. Antes, importa referir um importante tipo de atividades na gestão de projetos, as atividades críticas. Uma atividade diz-se crítica quando um atraso na sua execução implica um atraso na execução do projeto.

### **3.4 Representação gráfica de projetos**

A representação gráfica de um projeto pode ser feita através de um diagrama, conhecido por diagrama de Gantt ou através de uma rede conhecida por rede de projeto. As redes de projetos mais conhecidas e usadas são as redes com atividades representadas nos nodos, usualmente designadas por AON (*activity on node*), e as redes com atividades representadas sobre os arcos, usualmente designadas por AOA (*activity on arc*).

#### **3.4.1 Diagrama de Gantt**

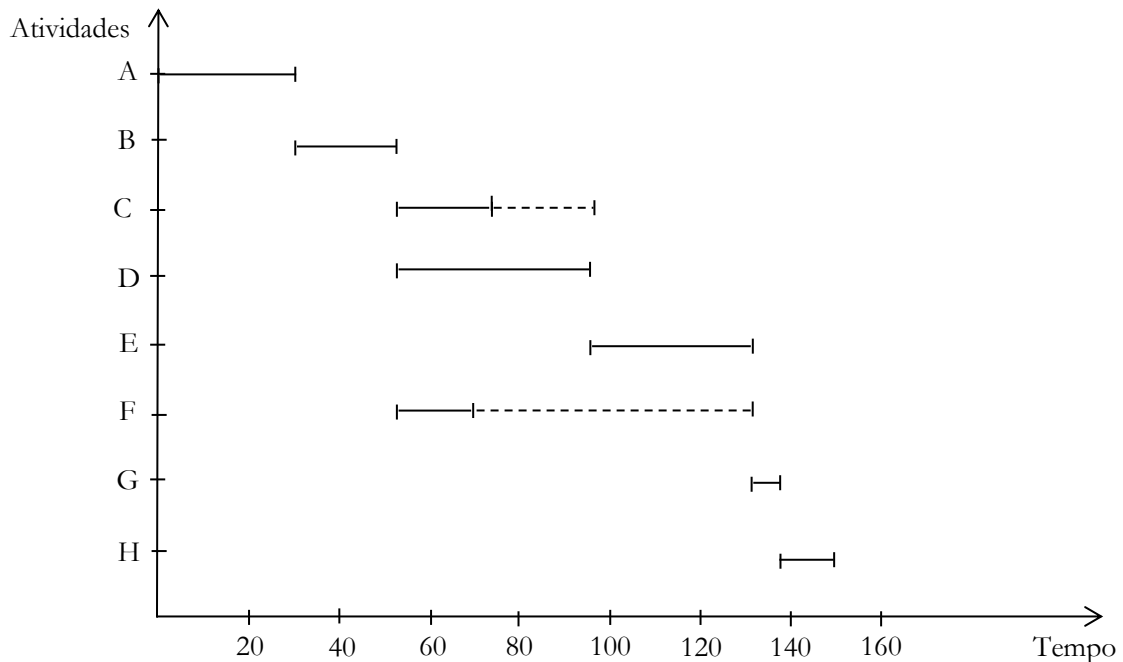
Os gráficos ou diagramas de Gantt, desenvolvidos por Henry Laurence Gantt em 1917, surgiram com o objetivo de elaborar uma primeira organização das atividades de um projeto, assim como para obter uma melhor visualização do desenvolvimento do mesmo. Estes gráficos constituem um dispositivo popular de representar e monitorizar as atividades de um projeto.

Nos diagramas de Gantt, as atividades são identificadas num eixo vertical enquanto que o seu tempo de duração é representado num eixo horizontal. As atividades são representadas por segmentos de reta (ou barras) paralelos ao eixo horizontal cujo comprimento corresponde à duração prevista para execução da atividade. O início do segmento (ou da barra) corresponde ao momento mais cedo que uma atividade pode ser iniciada, determinado pelo momento da conclusão de todas as atividades que são suas predecessoras imediatas e o fim corresponde ao momento mais cedo de conclusão da atividade. Os segmentos de reta (ou barras) podem ser continuados a tracejado (ou barras mais finas) correspondente à folga existente para a execução da atividade que representa o atraso máximo que uma atividade pode sofrer sem que tal provoque um atraso na duração do projeto.

Relativamente às atividades com folgas, estas devem ter o seu início o mais cedo possível para que, apesar das folgas que possuem, as mesmas continuem disponíveis até à conclusão

do projeto para colmatar situações inesperadas que possam surgir na execução das atividades.

Na figura 3.3, apresenta-se o gráfico de Gantt para o projeto do exemplo 3.1 apresentado anteriormente.



**Figura 3.3:** Diagrama de Gantt para o projeto do exemplo 3.1.

**Fonte:** Elaboração própria

Analisando a informação contida no diagrama, pode-se verificar que as atividades C e F possuem uma folga (representada a tracejado) de 22 minutos e 61 minutos, respetivamente. As restantes atividades que não possuem folga, em que qualquer atraso na sua execução implica atraso na conclusão do projeto, são atividades críticas. Quanto à duração do projeto, esta é de 146 minutos.

Sendo considerada uma das ferramentas mais apelativas no planeamento e controlo de atividades, o diagrama de Gantt apresentam algumas vantagens e desvantagens. Como vantagens podem enumerar-se:

- A simplicidade na sua construção e compreensão, o que torna este tipo de representação intuitiva, permitindo acompanhar os projetos e verificar as diferenças entre o desempenho planeado e o real;
- O facto de permitir atualizações ao longo do projeto, como é o caso, por exemplo, de uma atividade que esteja em atraso dois dias, consegue-se facilmente verificar

onde se situa o projeto no momento e atualizar o seu *status* de modo a possibilitar as correções necessários ao planejamento do projeto; e

- A sua utilidade na identificação das necessidades de recursos e definição dos mesmos por tarefas, uma vez que ao colocar as atividades em linha no cronograma permite uma visão antecipada dos recursos necessários à elaboração do projeto.

Como desvantagens referem-se as seguintes:

- Não é um tipo de representação gráfica adequada para projetos de grandes dimensões, uma vez que o excesso de atividades pode dificultar a sua construção e compreensão;
- A relação de interdependência entre as várias atividades nem sempre é facilmente acompanhada neste tipo de diagrama;
- Caso existam alterações na programação do projeto obrigam à elaboração de um novo cronograma; e
- Por vezes, nem sempre é fácil representar toda a informação necessária no diagrama de Gantt;

### **3.4.2 Rede AON**

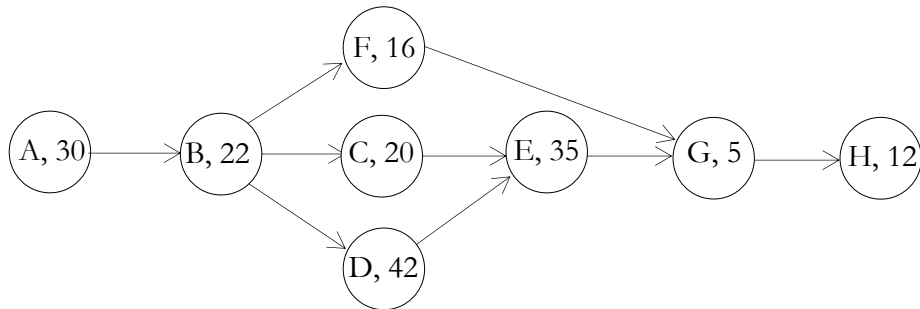
Neste tipo de rede, os nodos representam as atividades e os arcos surgem com o intuito meramente representativo da orientação das atividades do projeto mostrando as relações de precedência existentes entre as diversas atividades e a sua sequência (Hiller e Lieberman, 2006).

Segundo os mesmos autores, as redes do tipo AON apresentam algumas vantagens relativamente às redes AOA, nomeadamente:

- Maior facilidade a nível de construção;
- Maior facilidade de compreensão para utilizadores inexperientes; e
- Quando existem mudanças a nível dos projetos, este tipo de rede permite uma fácil revisão e correção.

A maior desvantagem da rede AON encontra-se nos projetos mais complexos, quando existe um grande número de arcos entre as várias atividades do projeto o que pode dificultar a leitura deste tipo de rede (Pinto, 2010).

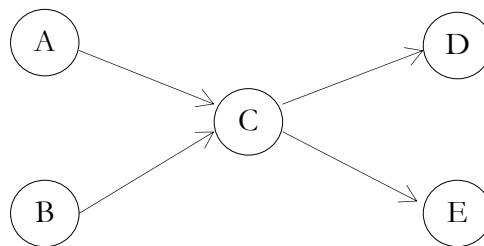
A figura 3.4 representa a rede AON para o projeto do exemplo 3.1, onde em cada nodo se representa a atividade através da sua identificação e duração e onde os arcos representam as relações de precedência existentes entre as atividades.



**Figura 3.4:** Rede AON para o projeto do exemplo 3.1

**Fonte:** Elaboração Própria

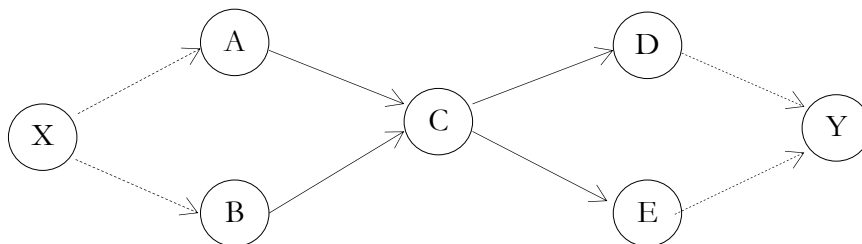
Nas redes AON é por vezes necessário criar uma atividade fictícia, com duração nula, para representar o início e/ou fim do projeto. Tal acontece quando existem várias atividades a iniciar-se ou a terminar em simultâneo. Na figura 3.5 é apresentado um exemplo de uma representação incorreta de uma rede AON onde duas atividades se iniciam em simultâneo e outras duas terminam ao mesmo tempo.



**Figura 3.5:** Representação incorreta de uma rede AON

**Fonte:** Elaboração Própria

Para fazer face a essa incorreção, na figura 3.6, apresenta-se a mesma rede representada corretamente, através da criação de duas atividades fictícias, uma que representa a atividade inicial e outra que representa a atividade final (Hiller e Lieberman, 2006).



**Figura 3.6:** Representação correta de uma rede AON com atividades fictícias para representar o início e o fim do projeto

**Fonte:** Elaboração própria

### 3.4.3 Rede AOA

No tipo de rede AOA, as atividades são apresentadas por arcos e os nodos são utilizados para representar os acontecimentos. Assim, as precedências das atividades são representadas pela sequência dos arcos (Hiller e Lieberman, 2006).

As redes AOA e AON possuem o mesmo objetivo, isto é, criar uma sequência lógica para todas as atividades de um projeto e, uma vez estabelecida a relação entre elas, determinar a duração dos projetos, o caminho crítico e a folga em cada uma das atividades (Pinto, 2010). Durante várias décadas a representação AOA foi a mais popular e utilizada, principalmente em problemas na área da indústria e construção. Nos dias de hoje, são as redes AON que possuem maior ênfase e, são atualmente as mais utilizadas, pois ganharam mais influência com o aumento da utilização da tecnologia e programação em computadores.

Também as redes AOA apresentam algumas vantagens relativamente às redes AON, nomeadamente (Pinto, 2010):

- Em projetos de grandes dimensões e complexidade, por vezes, é mais fácil aplicar este tipo de rede devido ao seu tipo de leitura;
- Para projetos com um grande número de acontecimentos, as redes AOA são as mais indicadas, pois por representarem os acontecimentos através dos nodos permitem uma maior facilidade na identificação e sinalização dos mesmos; e
- As redes AOA são mais informativas, pois tanto os arcos como os nodos possuem dados importantes do projeto, como a enumeração das atividades e acontecimentos e os seus tempos de duração.

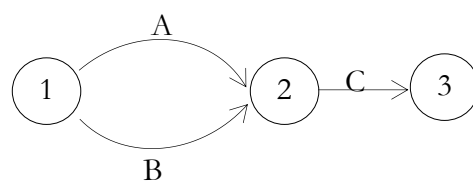
De acordo com o mesmo autor, como desvantagens nas redes AOA destacam-se a particularidade de o uso de atividades fictícias não ser de fácil aplicação e não ser um conceito simples de dominar e o facto de, por vezes, as redes AOA possuírem informação demasiado intensiva uma vez que tanto os nodos como os arcos possuem informação acerca do projeto.

Segundo Winston (1993), na construção de uma rede AOA devem observar-se as seguintes regras:

1. O início de um projeto é representado pelo nodo 1, designado nodo inicial. É deste mesmo nodo que devem sair os arcos relativos às atividades que não possuem predecessores;
2. Na rede de um projeto deve ser incluído o nodo representando o fim do mesmo, designado de nodo final;
3. Os vários nodos que constituem uma rede devem ser numerados por ordem de modo a que o nodo de início do projeto possua o número mais baixo e o de conclusão o número mais elevado;
4. Uma atividade não pode ser representada por mais do que um arco na rede; e
5. Dois nodos podem ser ligados, quanto muito por um arco.

Para representar um projeto através de uma rede AOA satisfazendo todas as regras anteriores é necessário, em alguns casos, recorrer ao uso de atividades fictícias. As atividades fictícias possuem uma duração igual a zero e não envolvem qualquer tipo de custos. Estas atividades servem apenas para representar corretamente relações de precedência e são normalmente representadas a tracejado. De seguida apresentam-se, através de exemplos, duas situações onde é necessário recorrer à utilização de atividades fictícias.

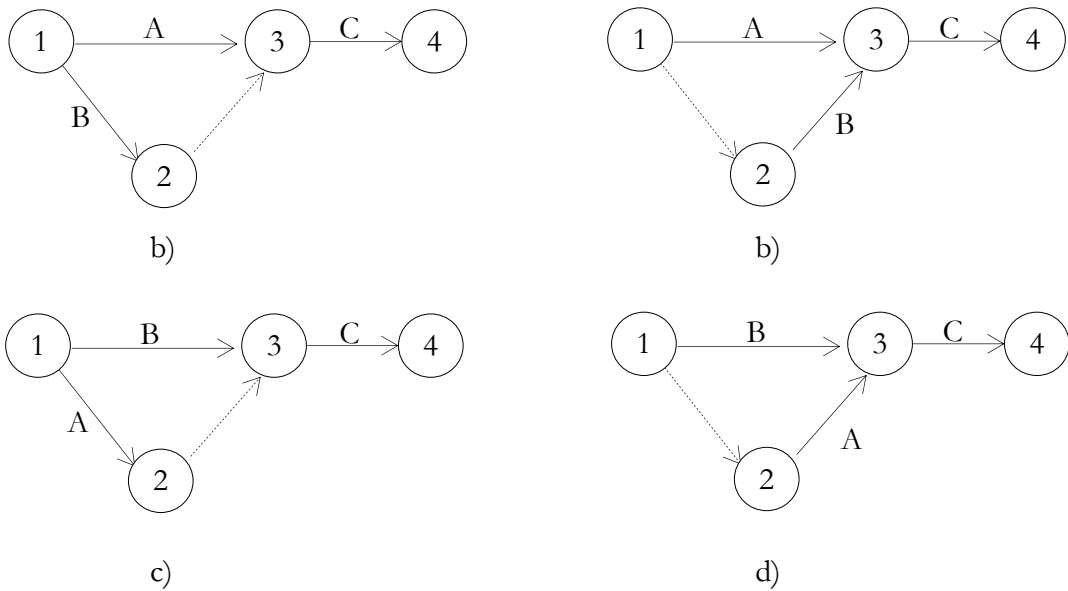
A primeira situação é exemplificada na figura 3.7 onde os nodos 1 e 2 estão ligados por dois arcos, tratando-se assim de uma representação incorreta, pois viola a regra 5.



**Figura 3.7:** Violação da regra número 5 relativa à construção de uma rede AOA

**Fonte:** Winston (1993:417)

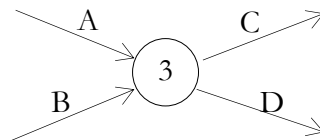
Para representar corretamente a situação anterior, onde as atividades *A* e *B* são predecessoras imediatas da atividade *C*, utiliza-se uma atividade fictícia que permite as representações apresentadas na figura 3.8.



**Figura 3.8:** Diversas formas da representação correta da situação apresentada na figura 3.7

**Fonte:** Taha (2003: 268)

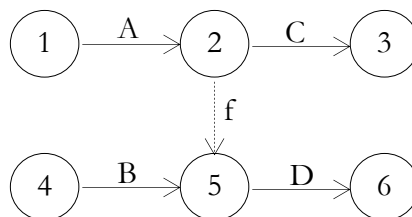
Uma outra situação onde pode ser necessária a utilização de atividades fictícias surge para representar corretamente as relações de precedência sem impor relações que não existem. Para ilustrar esta situação considere-se, por exemplo, quatro atividades  $A, B, C$  e  $D$  tais que  $A < \{C, D\}$  e  $B < D$ . A representação apresentada na figura 3.9 é incorreta uma vez que tem uma relação de precedência a mais,  $B < C$ .



**Figura 3.9:** Representação incorreta das relações de precedência da situação anterior

**Fonte:** Adaptado de Taha (2003, 268)

Para representar corretamente as relações de precedência no exemplo anterior recorre-se a uma atividade fictícia ( $f$ ) como representado na figura 3.10.

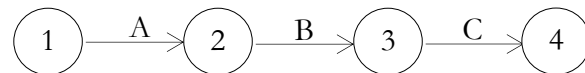


**Figura 3.10:** Representação correta das relações de precedência da situação anterior

**Fonte:** Adaptado de Taha (2003, 268)

Para além das atividades fictícias, existem outros tipos de atividades nomeadamente as atividades em série ou sucessivas, paralelas ou simultâneas, convergentes, divergentes e convergentes-divergentes, que são apresentadas em seguida. No entanto, é importante referir que para além dos vários tipos de atividades existentes estas poderão ser caracterizadas de dependentes, quando são dependentes do cumprimento integral de outras atividades, ou independentes, quando certas atividades podem ser iniciadas independentemente das atividades anteriores estarem ou não concluídas.

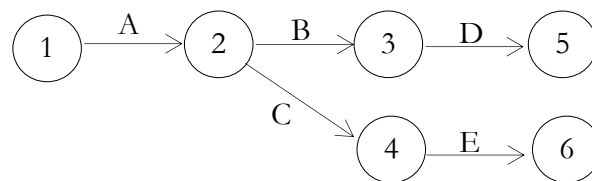
São denominadas atividades em série ou sucessivas aquelas que fluem uma para a outra em que cada acontecimento marca o início e/ou fim de apenas uma atividade. Na figura 3.11 está representado um exemplo de três atividades sucessivas A, B e C.



**Figura 3.11:** Representação das atividades em série ou sucessivas

**Fonte:** Adaptado de Aquilano (1997: 505)

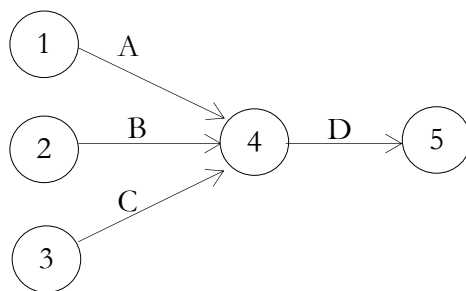
Atividades simultâneas ou paralelas são aquelas que podem ocorrer em simultâneo, significando isto que existem recursos disponíveis para que tal aconteça. Para ilustrar este tipo de atividades considere-se a figura 3.12 onde as atividades B e C podem ocorrer simultaneamente, logo que a atividade A seja concluída (Pinto, 2010).



**Figura 3.12:** Representação das atividades paralelas ou simultâneas

**Fonte:** Elaboração Própria

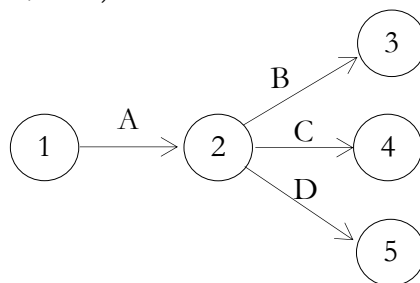
Atividades convergentes são aquelas cuja conclusão ocorre no mesmo acontecimento como é ilustrado no exemplo apresentado na figura 3.13 onde a conclusão das atividades A, B e C ocorre no acontecimento 4, sendo por isso convergentes (Pinto, 2010).



**Figura 3.13:** Representação das atividades convergentes

**Fonte:** Adaptado de Pinto (2010: 288)

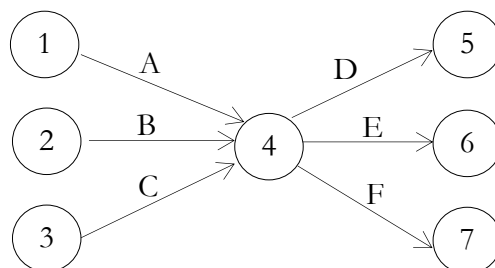
Por outro lado, as atividades divergentes são aquelas cujo início ocorre no mesmo acontecimento, como é ilustrado na figura 3.14 onde estão representadas três atividades divergentes, B, C e D (Pinto, 2010).



**Figura 3.14:** Representação das atividades divergentes

**Fonte:** Adaptado de Pinto (2010: 288)

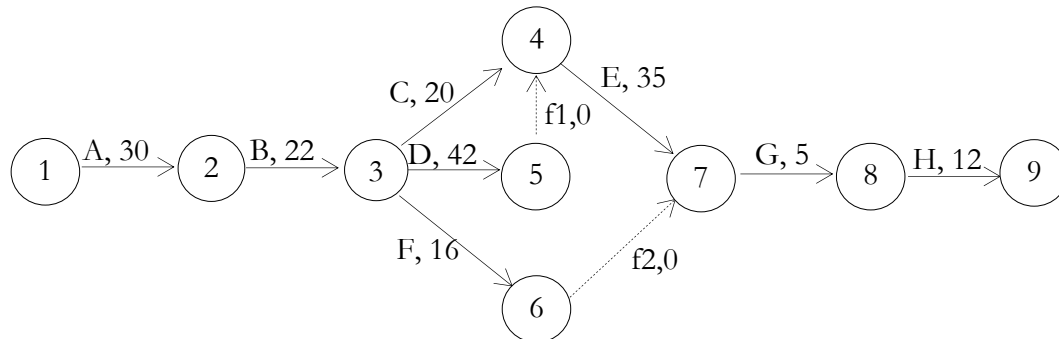
Por fim, as atividades convergentes-divergentes que resultam de uma combinação dos dois tipos anteriores, isto é, um acontecimento representa a conclusão de duas ou mais atividades e o início de duas ou mais atividades, como é ilustrado na figura 3.15, onde o acontecimento 4 representa a conclusão as atividades A, B e C e o início das atividades D, E e F.



**Figura 3.15:** Representação das atividades convergentes-divergentes

**Fonte:** Elaboração Própria

A figura 3.16 representa a rede AOA para o projeto do exemplo 3.1, onde os nodos representam os acontecimentos, os arcos representam as atividades e a etiqueta a,b associada a cada arco identifica a atividade e a respetiva duração.



**Figura 3.16:** Rede AOA para o projeto do exemplo 3.1

**Fonte:** Elaboração própria

### 3.5 Método do caminho crítico - CPM

O método do caminho crítico, conhecido por CPM (*Critical Path Method*), foi desenvolvido na década de 50, mais precisamente em meados do ano de 1957, através de estudos efetuados por James E. Kelley e Morgan R. Walker, aplicados em projetos de construção civil onde eram conhecidas a duração das atividades e os custos de construção. Este método é uma das técnicas mais adotadas no planeamento e controlo de atividades dado que o seu principal objetivo é determinar o caminho crítico que, por sua vez, determina o tempo mínimo necessário para a conclusão de um projeto, respeitando as relações de precedência entre as atividades. Para isso, este método admite conhecer com rigor o tempo necessário à realização das várias atividades de um projeto e a lei da variação daquele tempo em função dos recursos aplicados, prestando especial atenção ao binómio recursos *versus* redução da duração do projeto (Elmabrouk, 2011).

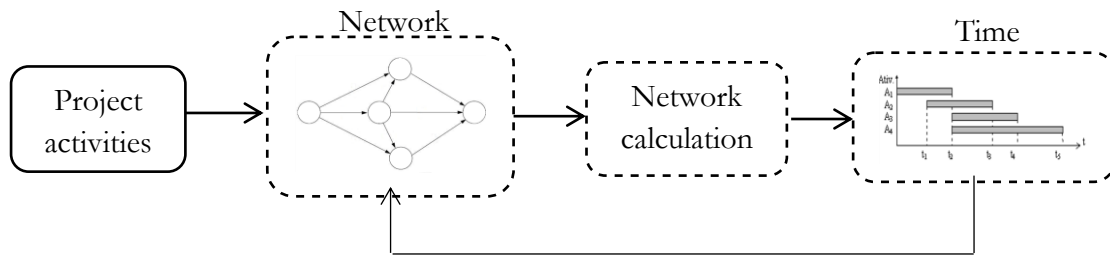
O método do caminho crítico, em especial para os projetos de maior dimensão, veio colmatar alguns problemas relativos ao planeamento e controlo das atividades, pois em projetos de maiores dimensões nem sempre foi fácil fazer uma gestão correta das atividades a desenvolver e de qual a sua sequência. Com o auxílio do CPM passou a ser possível planear o tempo de conclusão dos projetos e prever possíveis problemas e atrasos, programar a sequência de trabalho das várias atividades de modo a completar o projeto no menor período de tempo possível e ainda ajustar o tempo de conclusão de cada atividade,

sempre que necessário, mantendo inalterado o tempo de conclusão do projeto (Ravindran, Phillips e Solberg, 1986).

Como exemplo de algumas aplicações do método CPM na gestão de projetos, segundo Winston (1993) e Ravindran, Phillips e Solberg (1986), podem destacar-se:

- Projetos de construção de grandes dimensões, nomeadamente, edifícios, estradas, pontes, hospitais, entre outros;
- Projetos simples, como mudança para uma casa nova, pintura e limpeza doméstica, remodelação de uma casa, entre outros;
- Fabrico e montagem de peças como, por exemplo, computadores, navios, aviões;
- Desenvolvimento de novos sistemas de armas;
- Projeção e comercialização de novos produtos;
- Instalação de novos sistemas informáticos em computadores; e
- Desenvolvimento de um processo de contagem regressiva e “espera” para a descolagem de voos espaciais.

Segundo Taha (2003), uma das principais características do método CPM é o facto deste método se basear em dados determinísticos quanto ao tempo de duração de cada atividade. Para aplicar este método é necessária a realização de quatro etapas. Na primeira, há que definir as atividades do projeto, as suas relações de precedência e o tempo de duração de cada atividade. Na segunda etapa, o projeto é representado numa rede que evidencia a sequência dessas mesmas atividades que constituem o projeto e as suas relações de precedência. A terceira fase, envolve todos os cálculos de rede específicos para o desenvolvimento do cronograma do projeto. Na quarta e última etapa, é construído o cronograma do projeto. Sempre que num projeto sejam necessários ajustes quando ao tempo de duração de cada atividade, o cronograma inicial representativo do projeto deverá ser ajustado consoantes tais necessidades. Na figura 3.17, é apresentado um esquema resumo das fases de planeamento de um projeto aplicando o método CPM. Entre a fase de elaboração do cronograma e a fase de elaboração da rede é estabelecido um *feedback*, onde são efetuadas as alterações necessárias ao projeto.



**Figura 3.17.:** Etapas do planejamento de um projeto com aplicação do método CPM

**Fonte:** Taha (2003; 267)

Quando as atividades de um projeto são exibidas sequencialmente numa rede, como é o caso do CPM, essa seqüência das várias atividades forma caminhos através da rede. A seqüência de atividades mais longa, desde o início do projeto (nodo inicial) até à sua conclusão (nodo final), é designada de caminho crítico ou caminho “ótimo”. O caminho é caracterizado como crítico uma vez que cada atividade sucessora na rede depende da conclusão das suas predecessoras no prazo acordado, dito de outro modo, o caminho crítico é aquele em que não existem folgas de tempo entre as diversas atividades que constituem o projeto (Elmabrouk, 2011).

No tipo de rede AOA, como já referido anteriormente, as atividades são apresentadas por arcos e os nodos são utilizados para representar os acontecimentos. O início de um projeto com  $n$  acontecimentos é representado pelo nodo 1 e o final do projeto pelo nodo  $n$ . Os acontecimentos, por um lado, representam os instantes da conclusão de uma ou mais atividades e, por outro lado, os instantes de início de uma ou mais atividades. A cada nodo estão associados dois tipos de ocorrência de tempo, o tempo de acontecimento mais cedo e o tempo de acontecimento mais tarde.

O tempo mais cedo de ocorrência do acontecimento  $i$  é o instante mais cedo em que podem terminar todas as atividades que convergem nesse acontecimento (admitindo-se que não existem atrasos na elaboração do projeto). Este tempo é designado por  $ET(i)$  (*Earliest Time of node i*) e é calculado através da expressão

$$ET(i) = \begin{cases} 0 & \text{se } i = 1 \\ \max_{j \in \Gamma^-(i)} (ET(j) + d_{ji}) & \text{se } i = 2, \dots, n \end{cases} \quad (3.1)$$

Os cálculos efetuados para cada nodo usando a expressão anterior são muitas vezes referidos como cálculos *forward*, uma vez que começam por efetuar-se no nodo 1 (nodo

inicial) e terminam no nodo  $n$  (nodo final). Note-se que  $ET(n)$  dá a duração mínima do projeto.

O tempo mais tarde de ocorrência do acontecimento  $i$  é o instante mais tarde em que se podem iniciar todas as atividades que divergem desse acontecimento sem que a duração mínima do projeto seja alterada. Este tempo é designado por  $LT(i)$  (*Latest Time of node i*) e é calculado através da expressão

$$LT(i) = \begin{cases} ET(i) & \text{se } i = n \\ \min_{j \in \Gamma^+(i)} (LT(j) + d_{ij}) & \text{se } i = n-1, \dots, 1 \end{cases} \quad (3.2)$$

Também os cálculos efetuados para cada nodo usando a expressão anterior são muitas vezes referidos como cálculos *backward*, uma vez que começam por efetuar-se no nodo  $n$  (nodo final) e terminam no nodo 1 (nodo inicial). Note-se que para o nodo 1 tem-se  $LT(1) = 0$ .

A diferença entre o tempo mais tarde e o tempo mais cedo de ocorrência de um acontecimento  $i$  é definida como folga desse acontecimento e normalmente representada por  $F(i)$ . Assim, tem-se

$$F(i) = LT(i) - ET(i) \quad \forall i \in N \quad (3.3)$$

A folga de um acontecimento indica o atraso que esse acontecimento pode sofrer sem que tal atrase a conclusão do projeto. Os acontecimentos com folga nula são denominados acontecimentos críticos.

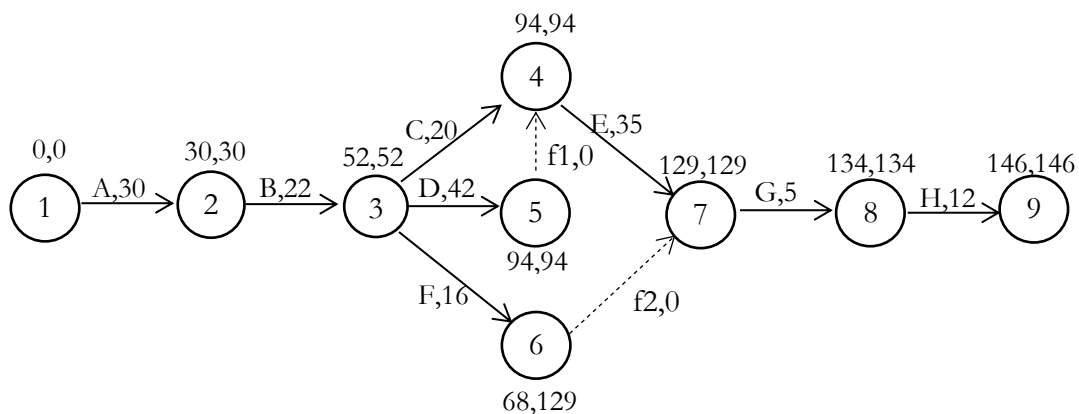
Aplicando os cálculos referidos anteriormente ao projeto do exemplo 3.1 obtêm-se os resultados apresentados na tabela 3.2, onde na primeira coluna se identificam os acontecimentos, na segunda e terceira colunas apresentam-se, respetivamente, os tempos mais cedo e mais tarde para cada acontecimento, na quarta apresenta-se a folga para cada um deles e, por fim, na última coluna faz-se referência se o acontecimento é crítico ou não.

A informação constante da tabela anterior pode também ser colocada na rede de projeto AOA para o exemplo 3.1, conforme se apresenta na figura 3.18. Nesta figura, a etiqueta a,b associada a cada arco identifica a atividade e a respetiva duração e a etiqueta c,d associada a cada nodo indica o tempo mais cedo e o tempo mais tarde para a ocorrência do acontecimento representado por cada nodo.

**Tabela 3.2:** Resultados obtidos para os acontecimentos associados ao exemplo 3.1

Acontecimento	ET	LT	Folga	
1	0	0	0	Crítico
2	30	30	0	Crítico
3	52	52	0	Crítico
4	94	94	0	Crítico
5	94	94	0	Crítico
6	68	129	61	Não crítico
7	129	129	0	Crítico
8	134	134	0	Crítico
9	146	146	0	Crítico

Fonte: Elaboração Própria



**Figura 3.18.:** Rede AOA para o projeto do exemplo 3.1.

Fonte: Elaboração própria

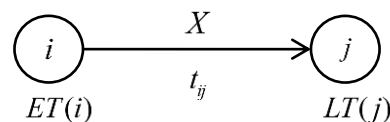
Então, para o projeto do exemplo anterior, o caminho crítico é o caminho  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 9$  e as atividades críticas são as que se encontram nesse caminho, isto é, as atividades A, B, D, E, G e H. De referir que na indicação das atividades críticas, as atividades fictícias não são incluídas. A duração do projeto, determinado pelo comprimento do caminho crítico, é de 146 minutos. Quanto a folgas, verifica-se que existe uma folga de 61 na realização do acontecimento (nodo) 6, significando que a realização desse acontecimento pode ser atrasada 61 minutos.

Quando se pretende programar um projeto em termos de atividades é necessário ter o tempo de início e o tempo de fim de cada atividade. A partir dos tempos definidos

anteriormente para os acontecimentos, é possível obter a seguinte informação para cada uma das atividades do projeto (Ravindran, Phillips e Solberg, 1986):

- Tempo de início mais cedo;
- Tempo de início mais tarde;
- Tempo de fim mais cedo;
- Tempo de fim mais tarde; e
- Folga.

Para uma melhor compreensão de como obter esta informação, considere-se o arco  $(i, j)$  representado na figura 3.19 e representando a atividade  $X$  num dado projeto, onde  $ET(i)$  representa o tempo mais cedo de ocorrência do evento  $i$ ,  $LT(j)$  representa o tempo mais tarde de ocorrência do evento  $j$  e  $t_{ij}$  representa o tempo de duração da atividade  $X$ .



**Figura 3.19:** Representação do arco  $(i, j)$  correspondente à atividade  $X$ .

**Fonte:** Adaptado de Ravindran, Phillips e Solberg (1986: 115).

Segundo Ravindran, Phillips e Solberg (1986), a atividade  $X$  deverá então ser iniciada tão cedo quanto o acontecimento  $i$  e não deverá ser completada depois do tempo mais tarde do acontecimento  $j$ . Assim, o tempo de início mais cedo (*earliest start time*) da atividade  $(i, j)$  (ou  $X$ ) é representado por  $ES(i, j)$  (ou  $ES(X)$ ) e é tal que

$$ES(i, j) = ET(i) \quad (3.4)$$

O tempo de início mais tarde (*later starting*) da atividade  $(i, j)$  (ou  $X$ ) é representado por  $LS(i, j)$  (ou  $LS(X)$ ) e é dado por

$$LS(i, j) = LT(j) - t_{ij} \quad (3.5)$$

O tempo de fim mais cedo da atividade  $(i, j)$  (ou  $X$ ) é representado por  $EF(i, j)$  (ou  $EF(X)$ ) e é dado por

$$EF(i, j) = ET(i) + t_{ij} \quad (3.6)$$

O tempo de fim mais tarde dessa mesma atividade é representado por  $LF(i, j)$  (ou  $LF(X)$ ) e é tal que

$$LF(i, j) = LT(j) \quad (3.7)$$

Note-se que  $LT(j) - ET(i)$  o tempo máximo disponível para a realização da atividade  $(i, j)$ . Se este valor for superior ao tempo de duração da atividade  $(i, j)$  então a atividade pode ser atrasada sem que tal implique o atraso da conclusão do projeto. A diferença entre o tempo máximo disponível para a realização de uma atividade e a duração da mesma é designada por folga total (*Total Float*). Assim, a folga total para a atividade  $(i, j)$ , representada por  $TF(i, j)$ , é dada por

$$TF(i, j) = LT(j) - ET(i) - t_{ij} \quad (3.8)$$

Em termos de tempos associados às atividades, isto é, usando (3.6) e (3.7) ou (3.4) e (3.5), a folga total da atividade  $(i, j)$  é dada por

$$TF(i, j) = LF(i, j) - EF(i, j) \quad (3.9)$$

ou 
$$TF(i, j) = LS(i, j) - ES(i, j) \quad (3.10)$$

Se a atividade  $(i, j)$  tem folga total igual a zero, tal significa que qualquer atraso no início atividade ou na sua duração implica atrasar a conclusão do projeto. Uma atividade com folga total nula diz-se uma atividade crítica. Note-se que se uma atividade  $(i, j)$  é crítica então

$$LT(j) - ET(i) = t_{ij} \quad (3.11)$$

O conjunto das atividades críticas forma pelo menos um caminho, designado caminho crítico, entre o nodo 1 (inicial) até ao nodo  $n$  (final) da rede. No caso de existir mais do que um caminho crítico, todos eles têm o mesmo comprimento. Esse comprimento dá a duração mínima do projeto que resulta da soma das durações das atividades no caminho crítico. Note-se que os acontecimentos num caminho crítico são obviamente críticos.

Na tabela 3.3 apresentam-se os tempos de início mais cedo e mais tarde, os tempos de fim mais cedo e mais tarde e a folga total para cada uma das atividades. Quanto às folgas,

verifica-se as atividades C e F podem ser atrasadas 22 e 61 minutos, respectivamente, sem que atrase a duração total do projeto.

**Tabela 3.3:** Resultados obtidos para as atividades do exemplo 3.1

Atividade	$ET(i)$ $= ES(i, j)$	$LT(j) - t_{ij}$ $= LS(i, j)$	$ET(i) + t_{ij}$ $= EF(i, j)$	$LT(j)$ $= LF(i, j)$	$TF(i, j)$	
<b>A</b>	0	0	30	30	0	Crítica
<b>B</b>	30	30	52	52	0	Crítica
<b>C</b>	52	74	72	94	22	-
<b>D</b>	52	52	94	94	0	Crítica
<b>E</b>	94	94	129	129	0	Crítica
<b>F</b>	52	113	68	129	61	-
<b>G</b>	129	129	134	134	0	Crítica
<b>H</b>	134	134	146	146	0	Crítica

**Fonte:** Elaboração Própria

Note-se que os tempos de início e de fim, mais cedo e mais tarde, de uma atividade podem ser determinados diretamente sem que seja necessário recorrer aos tempos associados aos acontecimentos, como acontece nas redes de projeto AON. Também neste caso, os cálculos efetuados para determinar o tempo de início mais cedo e o tempo de fim mais cedo de uma atividade são muitas vezes referidos como cálculos *forward*, uma vez que começam por efetuar-se na atividade inicial e terminam na atividade final. Por outro lado, os cálculos efetuados para determinar o tempo de início mais tarde e o tempo de fim mais tarde de uma atividade são muitas vezes referidos como cálculos *backward*, uma vez que começam por efetuar-se na atividade final e terminam na atividade inicial

Para além da folga total, referida anteriormente e que indica a quantidade de tempo que uma atividade pode ser atrasada sem que este atraso comprometa a conclusão do projeto, definem-se mais três tipos de folga para cada atividade  $(i, j)$  (ver, por exemplo, Ravidran, 2009 e Baker e Trietsch, 2009).

- Folga de segurança: é idêntica à folga total, no entanto, neste caso é pressuposto que os predecessores diretos de uma atividade já se atrasaram o máximo de tempo possível de que disponham. Assim, a folga de segurança (*Safety Float*) para a atividade  $(i, j)$  é representada por  $SF(i, j)$  e é dada por:

$$SF(i, j) = LT(j) - LT(i) - t_{ij} \quad (3.12)$$

- Folga livre: a quantidade pela qual o tempo de início da atividade  $(i, j)$  pode ser atrasado sem atrasar a data de início de qualquer uma das suas sucessoras imediatas. A folga livre de uma atividade é determinada através da diferença entre o tempo de conclusão mais cedo da atividade, o seu tempo de início mais cedo e a duração da atividade. Assim, a folga livre (*Free Float*) para a atividade  $(i, j)$  é representada por  $FF(i, j)$  e é dada por:

$$FF(i, j) = ET(j) - ET(i) - t_{ij} \quad (3.13)$$

- Folga independente: é definida pela margem de tempo disponível quando a atividade predecessora se conclui na data de fim mais tarde e a atividade sucessora é, por sua vez, iniciada na sua data de início mais cedo, isto é, a folga independente é a flutuação que uma atividade pode sofrer independentemente do tempo de conclusão das suas predecessoras imediatas ou do tempo de início das suas sucessoras imediatas. Assim, a folga independente (*independent float*) para a atividade  $(i, j)$  é representada por  $IF(i, j)$  e é dada por

$$IF(i, j) = \max\{ET(j) - LT(i) - t_{ij}, 0\} \quad (3.14)$$

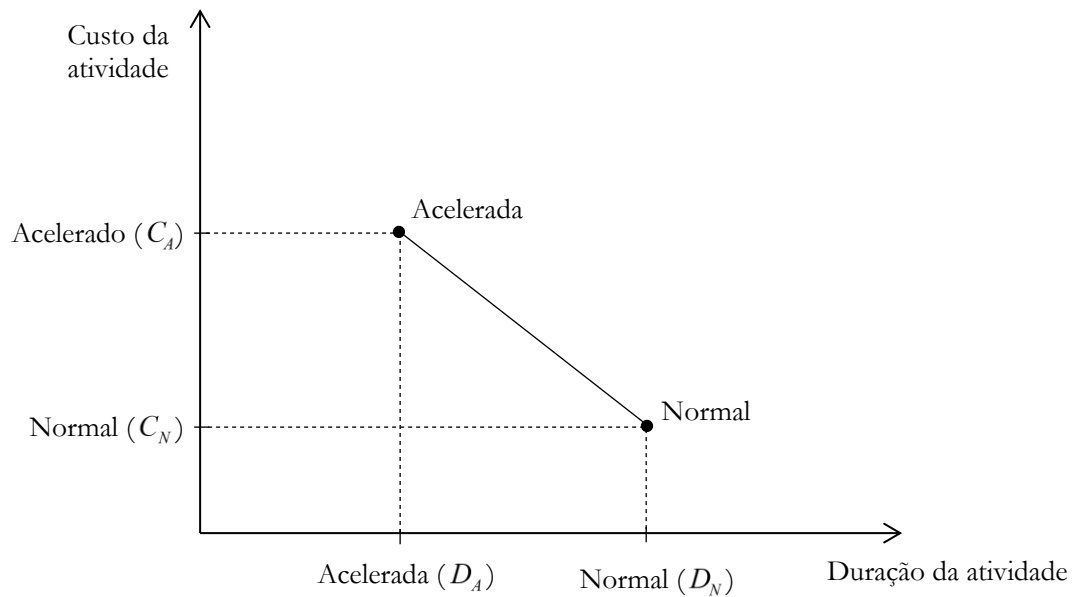
De entre estes os quatro tipos de folga acabados de referir, a folga total é o mais usado na prática e é, muitas vezes, referido apenas por folga.

### 3.6 Duração *versus* custo de um projeto

Na secção anterior viu-se como determinar o tempo mínimo de duração de um projeto conhecidas as durações das suas atividades, não tendo em conta o custo que a realização de uma atividade acarreta, determinado pelos recursos alocados a essa atividade como sejam capital, pessoal, materiais e tecnologia, entre outros. É evidente que um aumento destes recursos e, conseqüentemente, do custo da atividade implica uma redução da duração da mesma. Este processo de acelerar uma atividade é usualmente referido na literatura como *crashing* e o custo adicional inerente a essa redução de tempo é referido como *crashing cost*.

Os custos referidos no parágrafo anterior, isto é, os custos associados à realização de cada atividade, designam-se por custos diretos. Estes custos são inversamente proporcionais aos

custos das atividades, isto é, são tanto maiores quanto menor for a duração das atividades. Admitindo que o custo direto de uma atividade varia linearmente com a duração da mesma, a relação tempo-custo pode ser representada através do gráfico apresentado na figura 3.20.



**Figura 3.20:** Relação tempo-custo de uma atividade.

**Fonte:** Adaptado de Hiller (2006: 405)

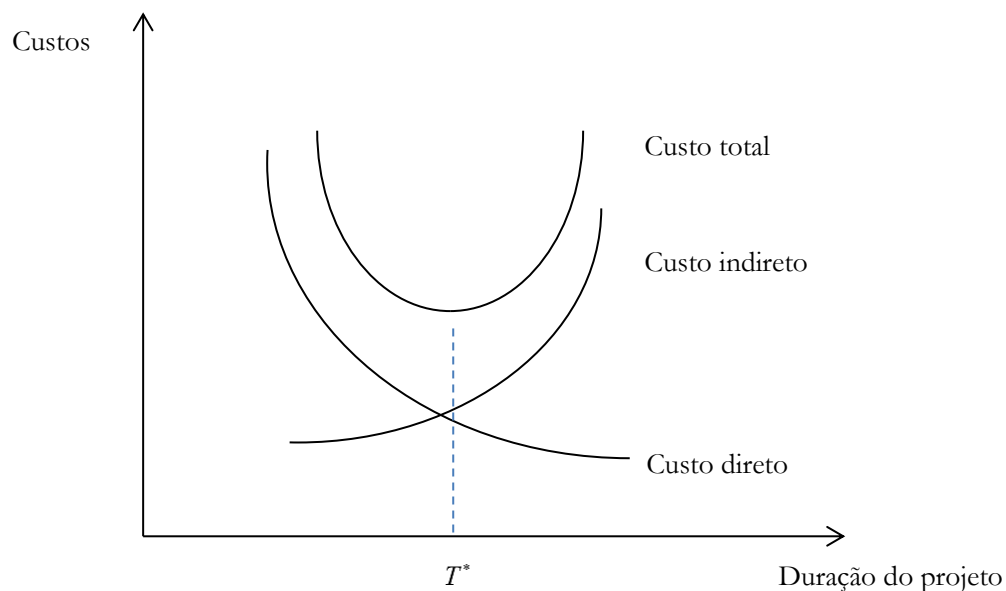
No gráfico da figura anterior está representado um segmento de reta em que um dos extremos representa uma atividade normal, definida por uma duração e um custo normais e em que o outro representa uma atividade acelerada, definida por uma duração e um custo acelerados. Este último corresponde à aceleração máxima que uma atividade pode atingir e onde nenhum recurso ou custo é poupado para concluir a atividade. Nestas circunstâncias, o custo marginal de uma redução da duração da atividade, isto é, o custo unitário de aceleração, é dado por

$$\text{Custo unitário de aceleração} = \frac{C_A - C_N}{D_N - D_A} \quad (3.15)$$

Como se viu na secção anterior, a duração de um projeto é determinada pela duração das atividades críticas. Então a aceleração das atividades críticas implica a aceleração do projeto, isto é, a redução da sua duração, que resulta num aumento do custo total direto do projeto, como se referiu anteriormente. Contudo, este aumento pode ser compensado com a redução de outros custos, designados por custos indiretos, ou com a obtenção de benefícios económicos resultantes da redução da duração do projeto, como se refere, por exemplo, em Ravindran, Phillips e Solberg (1986).

Os custos indiretos são custos que variam com a duração do projeto e são independentes da realização das atividades, isto é, são custos que ocorrem quer as atividades se realizem ou não. São exemplos deste tipo de custos, os custos com aluguer de equipamentos, pessoal de supervisão, seguros e impostos, entre outros. Como benefício económico pode referir-se o facto de um novo produto poder captar um maior número de clientes se for introduzido no mercado antes dos seus competidores ou por um bónus contratual se o projeto for concluído antes do prazo estipulado.

O custo total de um projeto é dado pela soma dos custos diretos com os custos indiretos. Na figura 3.21 representa-se a forma como estes custos variam em função da duração do projeto, onde  $T^*$  representa a duração ótima do projeto que minimiza o custo total.



**Figura 3.21:** Custo indireto, direto e total associado à duração de um projeto

**Fonte:** Hiller e Lieberman (1990)

A análise duração *versus* custo de projeto, que consiste em determinar quanto as atividades devem ser aceleradas de modo a minimizar o custo total, pode ser feita com base no CPM usando um método enumerativo, como se refere e se ilustra, por exemplo, em Ravindran, Phillips e Solberg (1986). A ideia desta abordagem é a de que a redução da duração do projeto pode ser feita reduzindo a duração das atividades críticas. Deste modo, as atividades críticas são reduzidas quando o custo de aceleração é menor do que o custo indireto. Contudo, esta abordagem torna-se ineficiente para projetos com um número considerável de atividades, onde existem vários caminhos críticos paralelos com um

elevado número de atividades. Para estes casos a utilização da programação linear revela-se mais eficiente na determinação de um planeamento ótimo considerando o tempo e o custo. Uma abordagem com a utilização da programação linear será apresentada no próximo capítulo.

## 4. Utilização da Programação Linear no planeamento e controlo das atividades

### 4.1. Introdução

No capítulo anterior viu-se como determinar o tempo mínimo de conclusão de um projeto usando o método CPM que determina o caminho crítico entre o nodo inicial e o nodo final, correspondentes ao início e à conclusão de um projeto, respetivamente. Referiu-se ainda, nesse capítulo, que através desse método é possível efetuar a análise da duração *versus* custo do projeto mas que o mesmo se torna ineficiente para projetos de grande dimensão.

Neste capítulo, apresenta-se uma abordagem diferente para a determinação do tempo mínimo de conclusão de um projeto e para análise da duração *versus* custo realizada através da utilização da programação linear. Esta abordagem permite, através da análise de sensibilidade, obter informação importante quanto à duração e custo das atividades e do projeto. Assim, na secção 4.2, apresentam-se duas formulações em programação linear para determinar o tempo mínimo de conclusão de um projeto. Na secção 4.3, apresentam-se também três formulações em programação linear para efetuar a análise duração *versus* custo do projeto. Por fim, na secção 4.4 apresentam-se algumas vantagens da abordagem através da programação linear.

### 4.2. Programação Linear na determinação da duração do projeto

O problema da determinação do caminho crítico numa rede de atividades pode ser visto como o problema da determinação do caminho mais longo entre o nodo inicial e o nodo final dessa rede. Este problema difere do problema do caminho mais curto apenas no sentido de otimização da função objetivo, pelo que, à semelhança deste, pode ser formulado como um problema de fluxos em rede, mais precisamente, pode ser visto como o problema de enviar uma unidade de fluxo entre o nodo inicial e o nodo final com custo máximo.

Para o efeito, considere-se uma rede AOA, definida sobre um grafo orientado  $G = (N, A)$ , em que o nodo 1 é o nodo inicial e o nodo  $n$  é o nodo final, e em que  $t_{ij}$  designa a duração da atividade  $(i, j)$ , que pode ser considerada como o custo (ou o comprimento) associado ao arco  $(i, j)$ . Designando por  $x_{ij}$  as variáveis de decisão, que indicam a quantidade de fluxo que percorre o arco  $(i, j)$ , o problema do caminho mais longo e, conseqüentemente,

o problema da determinação do caminho crítico, pode ser formulado do seguinte modo (ver, por exemplo, Taha, 2003)

$$\max z = \sum_{(i,j) \in A} t_{ij} x_{ij} \quad (4.1)$$

$$s. a. \quad - \sum_{j \in \Gamma^+(1)} x_{1j} = -1 \quad (4.2)$$

$$\sum_{j \in \Gamma^-(i)} x_{ji} - \sum_{j \in \Gamma^+(i)} x_{ij} = 0 \quad i = 2, \dots, n-1 \quad (4.3)$$

$$\sum_{j \in \Gamma^-(n)} x_{jn} = 1 \quad (4.4)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall (i, j) \in A \quad (4.5)$$

A função objetivo (4.1) indica que se pretende determinar o caminho mais longo, isto é, de maior duração. As restrições (4.2) indicam que do nodo 1 sai uma unidade de fluxo, enquanto as restrições (4.4) indicam que ao nodo  $n$  chega uma unidade de fluxo. As restrições (4.3), conhecidas por restrições de conservação de fluxo, indicam que em cada um dos restantes nodos, isto é, em cada um dos nodos intermédios da rede, a quantidade de fluxo que sai de um nodo é igual à quantidade de fluxo que chega a esse nodo. Por fim, as restrições (4.5) são as restrições que indicam a natureza, não negativa, das variáveis de decisão.

A matriz associada aos primeiros membros das restrições (4.2), (4.3) e (4.4) é uma matriz totalmente unimodular. Tal facto, conjuntamente com o facto de os segundos membros assumirem valores inteiros, permite afirmar que a solução ótima do problema é uma solução inteira (ver, por exemplo, Ahuja, Magnanti e Orlin, 1993).

Note-se que, como se refere, em Ahuja, Magnanti e Orlin (1993), o problema anterior pode facilmente ser transformado num problema de caminho mais curto, bastando, para o efeito, multiplicar por  $-1$  o termo  $t_{ij}$  que surge na função objetivo (4.1) e que indica a duração da atividade  $(i, j)$ .

Associando a variável  $t_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) a cada uma das restrições (4.2), (4.3) e (4.4) obtém-se o modelo dual do modelo (4.1) – (4.5), dado por

$$\min w = t_n - t_1 \quad (4.6)$$

$$s. a. t_j - t_i \geq t_{ij} \quad \forall (i, j) \in A \quad (4.7)$$

$$t_i \in \mathbb{R} \quad \forall i \in N \quad (4.8)$$

Neste modelo, as variáveis  $t_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) indicam o tempo em que ocorre o acontecimento  $i$ . Nestes termos, a função objetivo (4.6) indica que se pretende minimizar o tempo requerido para completar o projeto. As restrições (4.7) garantem que o tempo de ocorrência do nodo  $j$  não pode acontecer antes do tempo da ocorrência do nodo  $i$  mais o tempo de duração da atividade  $(i, j)$ .

Note-se que tendo em conta a interpretação das variáveis  $t_i$ , as restrições (4.8) podem ser substituídas pelas restrições de não negatividade (Taha, 2003)

$$t_i \geq 0 \quad \forall i \in N \quad (4.8a)$$

Para ilustrar a aplicação dos modelos anteriores considere-se novamente o projeto apresentado no exemplo 3.1 e a rede AOA elaborada para esse projeto. Aplicando modelo (4.1) – (4.5) a este exemplo tem-se o seguinte problema de programação linear:

$$\max z = 30x_{12} + 22x_{23} + 20x_{34} + 42x_{35} + 16x_{36} + 35x_{47} + 5x_{78} + 12x_{89}$$

$$s. a. -x_{12} = -1$$

$$x_{12} - x_{23} = 0$$

$$x_{23} - x_{34} - x_{35} - x_{36} = 0$$

$$x_{34} + x_{54} - x_{47} = 0$$

$$x_{35} - x_{54} = 0$$

$$x_{36} - x_{67} = 0$$

$$x_{47} + x_{67} - x_{78} = 0$$

$$x_{78} - x_{89} = 0$$

$$-x_{89} = -1$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall (i, j) \in A$$

A solução deste problema é dada por

$$x_{12} = x_{23} = x_{35} = x_{54} = x_{47} = x_{78} = x_{89} = 1; \text{ restantes variáveis iguais a zero; } z^* = 146.$$

Esta solução indica as atividades críticas (atividades cujas variáveis são iguais a 1) e, conseqüentemente, o caminho crítico  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 9$ , enquanto o valor ótimo desta solução indica a duração do projeto, que é de 146 minutos.

Aplicando agora o modelo (4.6) – (4.8) ao mesmo exemplo, ou seja, escrevendo o dual do problema anterior, tem-se o seguinte problema de programação linear

$$\begin{aligned} \min \quad & w = t_9 - t_1 \\ \text{s. a.} \quad & t_2 - t_1 \geq 30 & \text{(A)} \\ & t_3 - t_2 \geq 22 & \text{(B)} \\ & t_4 - t_3 \geq 20 & \text{(C)} \\ & t_5 - t_3 \geq 42 & \text{(D)} \\ & t_6 - t_3 \geq 16 & \text{(F)} \\ & t_4 - t_5 \geq 0 & \text{(f1)} \\ & t_7 - t_4 \geq 35 & \text{(E)} \\ & t_7 - t_6 \geq 0 & \text{(f2)} \\ & t_8 - t_7 \geq 5 & \text{(G)} \\ & t_9 - t_8 \geq 12 & \text{(H)} \\ & t_i \geq 0 & i = 1, \dots, 9 \end{aligned}$$

A resolução deste problema permite obter a seguinte solução ótima:

$$t_1 = 0; t_2 = 30; t_3 = 52; t_4 = 94; t_5 = 94; t_6 = 68; t_7 = 129; t_8 = 134; t_9 = 146; w^* = 146.$$

Obviamente que esta solução permite obter o mesmo caminho crítico e o mesmo valor para a duração do projeto que a solução do problema anterior. As atividades críticas correspondem às restrições que, na solução ótima, são verificadas na igualdade e que são as correspondentes às atividades A, B, C, D, f1, E, G e H. Isto significa que o valor das variáveis duais na solução ótima em geral podem ser positivos. Neste caso, essas variáveis, que definem os preços sombra, são iguais a 1, significando que o atraso de um minuto numa atividade crítica provocará o atraso de um minuto na duração do projeto. Recorde-se que o preço sombra para uma restrição indica o impacto sobre o valor ótimo da função

objetivo quando o segundo membro é incrementado de uma unidade. Dito de outra forma, o preço sombra para uma restrição indica a quantidade pela qual o valor da função objetivo é melhorado (aumentado num problema de máximo ou diminuído num problema de mínimo) quando o segundo membro é incrementado de uma unidade. Esta última forma é consistente com o *output* gerado pelo *software* LINDO (*Linear Interactive Discrete Optimizer*), apresentado no apêndice A. Note-se que diminuir o custo em  $-1$  equivale aumentá-lo em 1.

Esse *output* permite ainda outro tipo de informação nomeadamente quanto às folgas das atividades e ao intervalo de variação dos termos independentes de modo que a base se mantenha ótima, isto é, que o conjunto de variáveis básicas na solução ótima não se altere. Note-se que os preços sombra apenas atuam dentro destes intervalos. Quanto às folgas verifica-se que existe uma folga de 22 minutos na atividade C e outra de 61 minutos na atividade fictícia f2, como já se tinha constado anteriormente através do método CPM. O mesmo *output* permite também obter o intervalo variação dos coeficientes da função mantendo-se a base ótima.

Para finalizar esta seção, note-se que este último problema, devido à sua reduzida dimensão pode facilmente ser resolvido por inspeção, fazendo  $t_1 = 0$  e de seguida calcular os restantes valores  $t_i$  para  $i = 2, \dots, 9$ .

### **4.3. Programação Linear na análise duração *versus* custo**

Na secção anterior viu-se como utilizar a programação linear na determinação do caminho crítico no planeamento de atividades de um projeto, onde apenas se considerou o tempo de duração de cada atividade conhecido com certeza. Nesta secção, vai ver-se como a programação linear pode também ser utilizada em situações mais complexas nomeadamente quando existe uma relação conflituante duração *versus* custo para cada atividade. Conhecida a relação duração *versus* custo para cada atividade, três situações podem ser consideradas (Ravindran, Phillips e Solberg, 1986).

Numa primeira situação assume-se que é dado um período de tempo  $T$ , inferior à duração normal do projeto, e pretende-se determinar como devem ser aceleradas as atividades do projeto de modo que o mesmo seja completado nesse período de tempo e que o custo total inerente à aceleração das atividades seja minimizado. Seja  $C_{ij}$  o custo unitário de aceleração da atividade  $(i, j)$ , conforme referido na secção 3.6, dado por

$$C_{ij} = \frac{Cl_{ij} - Ck_{ij}}{k_{ij} - l_{ij}} \quad (4.9)$$

onde  $k_{ij}$  e  $l_{ij}$  designam a duração normal e a duração acelerada, respetivamente, da atividade  $(i, j)$  e em que  $Ck_{ij}$  e  $Cl_{ij}$  designam os respetivos custos. Considerem-se as variáveis  $t_{ij}$  que indicam o tempo necessário para concluir a atividade  $(i, j)$ , o qual deve estar compreendido entre o tempo correspondente à aceleração máxima e o tempo normal para a realização dessa atividade. Então o problema de determinar quais as atividades devem ser aceleradas tal que o custo de aceleração (*crashing*) deve ser minimizado é dado pelo seguinte modelo de programação linear (Ravindran, Phillips e Solberg, 1986).

$$\min Z = \sum_{(i,j) \in A} C_{ij}(k_{ij} - t_{ij}) \quad (4.10)$$

$$s. a. \quad t_j - t_i \geq t_{ij} \quad \forall (i, j) \in A \quad (4.11)$$

$$l_{ij} \leq t_{ij} \leq k_{ij} \quad \forall (i, j) \in A \quad (4.12)$$

$$t_n - t_1 \leq T \quad (4.13)$$

$$t_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (4.14)$$

No modelo anterior, a função objetivo (4.10) indica que se pretende minimizar o custo total de aceleração. As restrições (4.11) garantem que o tempo de ocorrência do nodo  $j$  não pode acontecer antes do tempo da ocorrência do nodo  $i$  mais o tempo de duração da atividade  $(i, j)$ . As restrições (4.12) garantem que a duração de cada atividade acelerada deve estar compreendida entre o tempo mínimo e o tempo normal de duração dessa atividade. A restrição (4.13) garante que o tempo total para conclusão do projeto não deve ultrapassar um determinado valor  $T$ . Este valor deve ser sempre não inferior ao comprimento do caminho crítico com todas as atividades no seu tempo mínimo de duração.

Numa segunda situação, supõe-se que existe uma determinada quantia  $B$  (em euros) disponível para acelerar o tempo de conclusão do projeto. Pretende-se determinar como essa quantia deve ser utilizada de modo a minimizar o tempo de conclusão do projeto. Tal é conseguido através do seguinte modelo de programação linear

$$\min Z = t_n - t_1 \quad (4.15)$$

$$s. a. t_j - t_i \geq t_{ij} \quad \forall (i, j) \in A \quad (4.16)$$

$$l_{ij} \leq t_{ij} \leq k_{ij} \quad \forall (i, j) \in A \quad (4.17)$$

$$\sum_{(i,j) \in A} C_{ij}(k_{ij} - t_{ij}) \leq B \quad (4.18)$$

$$t_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (4.19)$$

Neste modelo, a função objetivo (4.15) indica que se pretende minimizar o tempo de conclusão do projeto. As restrições (4.16), (4.17) e (4.19) têm o mesmo significado que no modelo anterior. A restrição (4.18) é a restrição que indica o orçamento disponível para aceleração do projeto.

Numa terceira situação consideram-se custos diretos e indiretos e supõe-se que estes últimos variam linearmente com a duração do projeto. Neste caso pretende-se determinar a duração do projeto que minimiza a soma dos custos diretos com os custos indiretos. Designando por  $F$  o custo indireto por unidade de tempo, o modelo de programação linear que permite obter tal planeamento é dado por

$$\min Z = F(t_n - t_1) + \sum_{(i,j) \in A} C_{ij}(k_{ij} - t_{ij}) \quad (4.20)$$

$$s. a. t_j - t_i \geq t_{ij} \quad \forall (i, j) \in A \quad (4.21)$$

$$l_{ij} \leq t_{ij} \leq k_{ij} \quad \forall (i, j) \in A \quad (4.22)$$

$$t_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (4.23)$$

Neste modelo, a função objetivo pretende minimizar a soma dos custos indiretos, dados pelo primeiro termo, com os custos diretos, dados pelo segundo termo. As restrições têm o significado já descrito anteriormente aquando do modelo (4.10) – (4.14).

Para ilustrar a aplicação deste último modelo, considere-se de novo o projeto apresentado no exemplo 3.1 no qual é incluída informação adicional relativa ao custo normal assim como à duração e custo acelerados para cada atividade, representada na tabela 4.1 Considere-se ainda que existe um custo indireto de 0,25 € por cada minuto de duração do projeto.

**Tabela 4.1:** Lista de atividades com duração e custo normal e acelerado para o projeto do exemplo 3.1

Atividades	Descrição da Atividade	Precedências Imediatas	Duração Normal	Duração Acelerada	Custo Normal	Custo Acelerado
A	Compra dos ingredientes	---	30 min.	20 min.	8,00€	12,00€
B	Pesagem e medição dos ingredientes	A	22 min.	16 min.	3,70€	5,50€
C	Aquecimento do forno	B	20 min.	15 min.	3,00€	4,00€
D	Elaboração da massa do bolo	B	42 min.	18 min.	7,00€	13,00€
E	Cozedura da massa	C, D	35 min.	---	5,80€	---
F	Elaboração do recheio	B	16 min.	12 min.	2,70€	4,10€
G	Junção das duas partes	E, F	5 min.	---	0,83€	---
H	Decoração	G	12 min.	7 min.	2,00€	3,00€

**Fonte:** Elaboração Própria

A aplicação do modelo (4.20) – (4.23) a este exemplo resulta no seguinte problema de programação linear:

$$\begin{aligned} \min \quad Z = & 0,25(t_9 - t_1) + 0,4(30 - t_{12}) + 0,3(22 - t_{23}) + 0,25(20 - t_{34}) + 0,2(42 - t_{35}) \\ & + 0,35(16 - t_{36}) + 0,2(12 - t_{89}) \end{aligned}$$

$$s. a. \quad t_2 - t_1 \geq t_{12} \quad (A)$$

$$t_3 - t_2 \geq t_{23} \quad (B)$$

$$t_4 - t_3 \geq t_{34} \quad (C)$$

$$t_5 - t_3 \geq t_{35} \quad (D)$$

$$t_6 - t_3 \geq t_{36} \quad (F)$$

$$t_4 - t_5 \geq 0 \quad (f1)$$

$$t_7 - t_4 \geq 35 \quad (E)$$

$$t_7 - t_6 \geq 0 \quad (f2)$$

$$t_8 - t_7 \geq 5 \quad (G)$$

$$t_9 - t_8 \geq t_{89} \quad (H)$$

$$20 \leq t_{12} \leq 30 \quad (A)$$

$$16 \leq t_{23} \leq 22 \quad (B)$$

$$15 \leq t_{34} \leq 20 \quad (C)$$

$$18 \leq t_{35} \leq 42 \quad (D)$$

$$12 \leq t_{36} \leq 16 \quad (F)$$

$$7 \leq t_{89} \leq 12 \quad (H)$$

$$t_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 9$$

A resolução deste problema permite obter a seguinte solução ótima a partir do *output* gerado pelo *software* LINDO (apêndice B):

$$t_1 = 0; t_2 = 30; t_3 = 52; t_4 = 72; t_5 = 72; t_6 = 68; t_7 = 107; t_8 = 112; t_9 = 119;$$

$$t_{12} = 30; t_{23} = 22; t_{23} = 22; t_{34} = 20; t_{35} = 20; t_{36} = 16; t_{89} = 7; Z^* = 35,15$$

De acordo com a solução, a duração do projeto é de 119 minutos e o custo é de 35,15 €. Note-se que ao valor ótimo dado pelo LINDO, de -4,85, deve ser adicionado o valor 40,00 correspondente ao termo constante da função objetivo que não foi incluído no *input* do *software*. Comparando com a execução normal do projeto verifica-se que existe uma redução de 27 minutos na duração, de 146 para 119 minutos, e também uma redução de 1,35 € no custo, de 36,5 € para 35,15 €. Essa redução é conseguida à custa da aceleração das atividades D e H cuja duração passa de 42 para 20 minutos e de 12 para 7 minutos, respetivamente. O correspondente custo de aceleração é de 4,4 € para a atividade D e de 1,00 € para a atividade H, perfazendo um custo de 5,4€ que é compensado com uma redução do custo indireto de 6,75€ (=27×0,25), permitindo uma redução de 1,35 € na soma dos referidos custos.

Como já foi mencionado antes, para além da solução ótima e do correspondente valor ótimo, os resultados apresentados no apêndice B permitem ainda obter informação importante, nomeadamente quanto às folgas nas atividades, aos preços sombra e à análise de sensibilidade aos coeficientes da função objetivo e aos termos independentes, isto é, como alterações nestes dois parâmetros afetam a solução ótima.

Relativamente aos preços sombra verifica-se que, por exemplo, na última restrição um aumento de 1 minuto (de 7 para 8) na duração mínima da atividade H implica um aumento de 0,05 € no custo total do projeto (linha 22 e coluna *dual price* do apêndice B). Em

contrapartida, uma redução de 1 minuto nessa atividade H implica uma redução de 0,05 € no custo total do projeto. Note-se que esta análise só é válida no intervalo [0,12] (linha 22 da secção *rihthand side ranges* do apêndice B)

#### **4.4. Vantagens da programação linear na gestão de projetos**

A utilização da programação linear na gestão de projetos, mais concretamente no planeamento e controlo das atividades, apresenta algumas vantagens, nomeadamente:

- Permite tratar projetos de grande dimensão de forma eficiente, uma vez que os problemas de programação linear podem ser resolvidos de forma eficiente através de diversos *softwares* que se encontra disponíveis.
- Permite uma maior flexibilidade na extensão do modelo como se verificou com os modelos relativos à duração *versus* custo que têm por base o modelo inicial da determinação da duração mínima do projeto. Uma outra extensão deste modelo base considera restrições adicionais *just-in-time* que impõem que uma dada atividade se inicie dentro de um determinado período após o início da atividade que a precede (Ahuja, Magnanti e Orlin, 1993).
- Permite efetuar análise de sensibilidade relativamente à duração das atividades ou entre os fatores tempo e custo, fornecendo assim informação importante ao gestor de projeto quanto aos recursos a afetar a cada atividade e, conseqüentemente, ao projeto.

## 5. Estudo de um caso prático

### 5.1 Introdução

No capítulo 3, foi abordada a utilização do método CPM no planeamento e controlo de atividades de um projeto. No capítulo anterior, capítulo 4, foi apresentada a utilização da programação linear como uma abordagem alternativa que oferece uma maior flexibilidade no planeamento e controlo das atividades.

No presente capítulo, apresenta-se uma aplicação desta última abordagem a uma situação real, mais especificamente ao projeto da produção de uma peça, um *Piston* de 1ª Compressão, de uma máquina de enfardar denominada por Enfardadeira 40×40 fabricada numa das maiores empresas de prestação de serviços na área da metalomecânica da Europa. Assim, na secção 5.2, apresentam-se os dados relativos às várias atividades que constituem a elaboração do referido projeto e aos seus tempos de duração, referindo-se ainda a forma como esses dados foram obtidos. Por fim, na secção 5.3, são apresentados os resultados obtidos através da aplicação desses métodos, bem como a análise dos mesmos.

### 5.2 Recolha de dados

Para este estudo, foram utilizados os dados relativos à produção de uma peça, uma *Piston* de 1ª Compressão, componente de uma máquina denominada de Enfardadeira 40×40, disponibilizados por uma das maiores empresas do setor metalomecânico, sediada no Concelho da Lourinhã, que permitiu o acompanhamento da produção desta peça.

Os dados recolhidos para este estudo dizem respeito às atividades desenvolvidas ao longo da produção da referida peça e à duração de cada uma dessas atividades. Foi, igualmente, anotada a sequência dessas várias atividades de modo a identificar as respetivas precedências.

A recolha dos dados contou com a ajuda dos vários colaboradores e responsáveis pelos diversos setores de atividade da fábrica e do Engenheiro Mecânico da mesma, responsável pelo departamento de desenho técnico e por esclarecer quaisquer dúvidas que pudessem surgir na produção da peça.

Em primeira instância, o Engenheiro Mecânico da empresa forneceu e explicou, de um modo geral, quais as tarefas a desenvolver na produção da peça e o percurso a seguir na

fábrica de modo a acompanhar esta produção, identificando os vários setores pelos quais a produção de uma peça deste tipo passa, sendo eles: gabinete de desenho técnico, departamento de apoio à produção, seção de corte, seção de ponteamento, seção de soldadura, seção de maquinação do *piston*, seção de maquinação do varão, seção de soldadura e seção de limpeza.

No gabinete de desenho técnico a duração da elaboração do desenho do *Piston* de 1ª Compressão foi fornecida pelos engenheiros responsáveis pela elaboração do projeto.

No departamento de apoio à produção, existiu a oportunidade de acompanhar o trabalho realizado para a produção da peça, pelo que a recolha de dados foi registada ao longo da desta fase de produção, enquanto a colaboradora deste departamento explicava os procedimentos a seguir.

As seções de corte e ponteamento são as que registam maior tempo de produção pelo que permitem um maior acompanhamento e análise. No entanto, por questões de segurança, devido à elevada radiação a que trabalham as máquinas de corte (sendo uma delas de corte em plasma, composto por oxigénio e eletricidade, e a outra de corte em chama, composto por gás e oxigénio) e às radiações libertadas pela máquina de soldar que é utilizada no ponteamento, não foi possível acompanhar determinados trabalhos ao pormenor, pelo que foram os responsáveis dessas seções que auxiliaram na recolha de todos os dados necessários.

Assim como na seção de ponteamento se torna difícil acompanhar todo o trabalho devido à utilização da máquina de soldar que só permite o seu manuseamento com equipamento próprio, na seção de soldadura propriamente dita e na seção de maquinação, também devido aos riscos inerentes às respetivas máquinas não é possível, por questões de segurança, pessoas externas à produção acompanharem o processo. Os dados relativos a estas duas seções foram, deste modo, fornecidos pelos funcionários responsáveis por estas tarefas.

Por fim, após concluídas todas as seções anteriores, a peça passa pela seção de limpeza onde, após esta, é dada como concluída.

Na sequência da recolha de dados feita anteriormente, foi elaborada a tabela 5.1 onde nas duas primeiras colunas se identificam as várias atividades, na terceira coluna apresentam-se

as precedências imediatas e na quarta coluna apresenta-se a duração normal para cada atividade.

**Tabela 5.1:** Lista das atividades que constituem o projeto de elaboração do *Piston* de 1ª Compressão

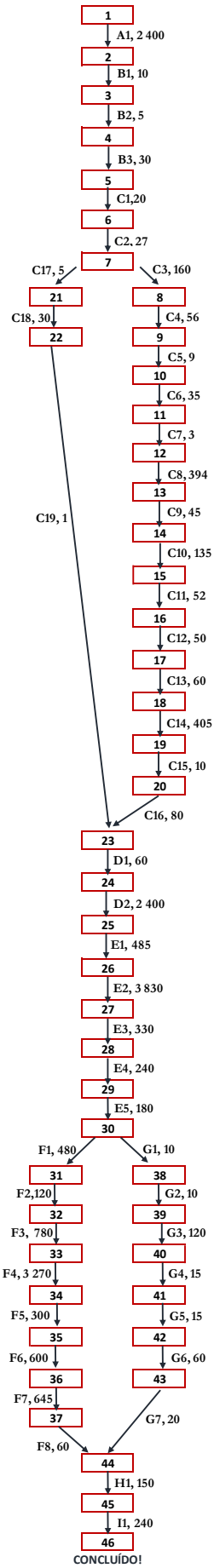
Atividade	Descrição da Atividade	Precedências Imediatas	Duração normal
<b>A.</b>	<b>DESENHO TÉCNICO</b>		
<b>A1</b>	Elaboração do desenho técnico	---	2 400 min.
<b>B.</b>	<b>APOIO À PRODUÇÃO</b>		
<b>B1</b>	Inserção de dados no Sage	A1	10 min.
<b>B2</b>	Ordem de Fabrico	B1	5 min.
<b>B3</b>	Compra de material	B2	30 min.
<b>C.</b>	<b>CORTE</b>		
<b>C1</b>	Inventário de Necessidades	B3	20 min.
<b>C2</b>	Programação do plano de corte	C1	27 min.
<b>C3</b>	Movimentação de chapas	C2	160min.
<b>C4</b>	Nivelamento de chapas	C3	56 min.
<b>C5</b>	Carregamento do Programa e Parâmetros	C4	9 min.
<b>C6</b>	Preparação da máquina de corte	C5	35 min.
<b>C7</b>	Pré-Aquecimento	C6	3 min.
<b>C8</b>	Corte das chapas	C7	394 min.
<b>C9</b>	Identificação das peças cortadas	C8	45 min.
<b>C10</b>	Recolha das peças cortadas	C9	135 min.
<b>C11</b>	Corte da Sucata	C10	52 min.
<b>C12</b>	Recolha da Sucata	C11	50 min.
<b>C13</b>	Chanfragem - Preparação da máquina	C12	60 min.
<b>C14</b>	Chanfragem	C13	405 min.
<b>C15</b>	Preparação da Quinadeira	C14	10 min.
<b>C16</b>	Quinagem	C15	80 min.
<b>C17</b>	Preparação do serrote	C2	5 min.
<b>C18</b>	Corte dos perfis no serrote (2tubos + varão)	C17	30 min.
<b>C19</b>	Identificação perfis	C18	1 min.
<b>D.</b>	<b>PONTEAMENTO</b>		
<b>D1</b>	Preparação	C16 e C19	60 min.
<b>D2</b>	Ponteamento	D1	2 400 min.
<b>E.</b>	<b>SOLDADURA</b>		
<b>E1</b>	Preparação	D2	485min.
<b>E2</b>	Soldadura	E1	3 830min.
<b>E3</b>	Tirar roscas	E2	330 min.
<b>E4</b>	Desempenar	E3	240 min.
<b>E5</b>	Limpeza	E4	180 min.

Atividade	Descrição da atividade	Precedências imediatas	Duração normal
<b>F.</b>	<b>MAQUINAÇÃO – PISTON (Centro de maquinação)</b>		
<b>F1</b>	Programação CAD/CAM	E5	480 min.
<b>F2</b>	Preparação de ferramentas	F1	120 min.
<b>F3</b>	Setup das peças	F2	780 min.
<b>F4</b>	Faceamentos	F3	3 270 min.
<b>F5</b>	Furações	F4	300 min.
<b>F6</b>	Caixas	F5	600 min.
<b>F7</b>	Roscas	F6	645 min.
<b>F8</b>	Escareados	F7	60 min.
<b>G.</b>	<b>MAQUINAÇÃO – VARÃO (torno + mandriladora)</b>		
<b>G1</b>	Torneamento – preparação de ferramentas	E5	10 min.
<b>G2</b>	Torneamento – Setup do varão	G1	10 min.
<b>G3</b>	Torneamento	G2	120 min.
<b>G4</b>	Mandriladora – preparação de ferramentas	G3	15 min.
<b>G5</b>	Mandriladora – setup do varão	G4	15 min.
<b>G6</b>	Mandriladora – Furação	G5	60 min.
<b>G7</b>	Mandriladora – Mandrilagem fina	G6	20 min.
<b>H.</b>	<b>SOLDADURA (união das duas partes)</b>		
<b>H1</b>	Soldadura (união do varão ao piston)	F8 e G7	150 min.
<b>I.</b>	<b>ACABAMENTO</b>		
<b>I1</b>	Limpeza da peça final	H1	240 min.
<b>CONCLUÍDO!</b>			

Fonte: Elaboração Própria

### 5.3 Resultados e respectiva análise

Para obter a duração mínima para a conclusão do projeto, isto é, para a produção da peça, começou-se, com base na informação apresentada na tabela anterior, por construir a rede AOA para o projeto de produção da peça referida anteriormente que é apresentada na figura 5.1.



**Figura 5.1:** Rede AOA do projeto de elaboração do *Piston* de 1ª Compressão

Fonte: Elaboração Própria

Aplicando o modelo (4.6) – (4.8), apresentado na secção 4.2, ao projeto em causa, explicitado no apêndice C, e usando o *software* LINDO obteve-se o *output* apresentado no apêndice D. De acordo com esse *output*, é possível concluir que o tempo mínimo para produção da peça é de 18 156 minutos, ou seja, 302 horas e 36 minutos. Esse *output* permite também obter, como já foi referido anteriormente, as atividades críticas e, conseqüentemente, o caminho crítico dado por

$$1 \rightarrow \dots \rightarrow 20 \rightarrow 23 \rightarrow \dots \rightarrow 37 \rightarrow 44 \rightarrow 45 \rightarrow 46.$$

Com base na informação apresentada no apêndice D é possível verificar que existem duas atividades que podem sofrer atraso, pois possuem folga no seu tempo de duração, o que significa que as mesmas se podem atrasar sem que o tempo de conclusão do projeto sofra alterações no seu prazo de conclusão. Essas atividades são as atividades representadas na oitava restrição, corte dos perfis no serrote (C18) e a atividade representada pela quadragésima quarta restrição representativa da atividade de furação na mandriladora (G6). Uma vez que o corte dos perfis no serrote (tubos e varão) é independente do corte das chapas para o *piston* de 1ª compressão, é possível atrasar o processo de corte dos perfis desde que estes terminem ao mesmo tempo que o corte de todas as chapas podendo assim atrasar 1 458 minutos. Só após o corte das chapas, dos tubos e do varão se dará início à atividade seguinte denominada de ponteamto (D1). Já a atividade de furação na mandriladora, apesar de ter sido a única que apresentou uma folga de tempo de 6 005 minutos, esse mesmo atraso poderá ser repartido pelas várias atividades constituintes da secção de maquinação do Varão (G) desde que a soma da elaboração dessas mesmas atividades não ultrapasse o tempo de conclusão das atividades constituintes da secção de maquinação do *Piston* (F). Assim, conclui-se que a maquinação do *Piston* e a maquinação do varão deverão terminar ao mesmo tempo para que possa ser dado início à soldadura (H) que é, nada mais, nada menos, a união destas duas componentes.

Para uma análise da duração *versus* custo considerou-se que as atividades D2, E2 e F4, correspondentes aos arcos (24,25), (26,27) e (33,34) da rede AOA apresentada anteriormente, podem ser aceleradas conforme se indica na tabela 5.2, onde, para além da identificação e das precedências imediatas, se apresentam as durações normal e acelerada assim como os respetivos custos.

Para determinação do custo acelerado, admitiu-se que cada uma das atividades que podem ser aceleradas passaria a dispor de mais um funcionário, passando de um para dois, e

reduzindo a duração da atividade para metade. Os custos normais e acelerados foram calculados com base no ordenado por hora de cada funcionário que varia de acordo com a seção em que trabalham.

**Tabela 5.2:** Lista das atividades aceleradas e respectivos custos para o projeto de produção do *Piston* de 1ª Compressão

Atividade	Descrição da atividade	Precedências imediatas	Duração normal	Duração acelerada	Custo normal	Custo acelerado
<b>D.</b>	PONTEAMENTO					
<b>D2</b>	Ponteamento	D1	2 400 min.	1 200 min.	258,40 €	387,60 €
<b>€E.</b>	SOLDADURA					
<b>E2</b>	Soldadura	E1	3 830min.	1915 min.	423,22 €	634,83 €
<b>F.</b>	MAQUINAÇÃO – PISTON (Centro de maquinação)					
<b>F4</b>	Faceamentos	F3	3 270 min.	1 635 min.	267,05€	400,58€
<b>CONCLUÍDO!</b>						

**Fonte:** Elaboração Própria

Os custos unitários de aceleração para essas atividades, calculados de acordo com (4.9), são os seguintes:

$$C_{25,24} = 0,1077 ; C_{25,26} = 0,1105 \text{ e } C_{33,34} = 0,0817$$

Para determinar o tempo necessário para produção da peça de modo a minimizar a soma dos custos indiretos com os custos de aceleração, consideraram-se custos indiretos de 0,3€ por minuto e usou-se o modelo (4.20) – (4.23), explicitado no apêndice E.

A partir do *output* gerado pelo *software* LINDO para resolução do problema anterior, apresentado no apêndice F, verifica-se que as atividades D2, E2 e F2 são aceleradas ao máximo reduzindo o tempo necessário para a produção da peça de 18156 minutos para 13406. A aceleração destas atividades implica um custo direto adicional de 474,4227€, que é compensado por uma redução dos custos indiretos em 1425€ ( $= (18156 - 13406) \times 0,3$ ), obtendo-se assim uma redução de 950,573€ no custo total. O valor ótimo da função objetivo, que minimiza a soma dos custos indiretos e dos custos de aceleração, é de 4496,227€. Note-se que ao valor ótimo dado pelo LINDO de 3547,373 deve ser adicionado o valor 948,854 correspondente ao termo constante da função objetivo que não foi incluído no *input* do *software*. O valor resultante representa, como já foi referido, uma

redução de 950,573€ face aos custos indiretos suportados pela duração normal de produção da peça que são de 5 446,8€ ( $=18516 \times 0,3$ ).

A partir do referido *output*, verifica-se que as atividades críticas são as mesmas que no caso da duração normal, conduzindo obviamente ao mesmo caminho crítico. Relativamente às atividades com folga verifica-se também que são as mesmas que no caso da duração normal e que são a C18 e a G6. A primeira, com a mesma folga que no caso da duração normal, de 1458 minutos, e a segunda com uma folga de 4 370 minutos inferior em 1 635 minutos à do caso da duração normal provocada pela aceleração de 1 635 minutos da atividade F.

Quanto aos preços-sombra verifica-se que para as atividades críticas o aumento de 1 minuto na duração de uma dessas atividades implica um aumento de 0,30€ no custo do projeto e obviamente o atraso de 1 minuto na conclusão do mesmo. Relativamente às restrições que indicam o limite inferior de duração das atividades aceleradas verifica-se que o aumento de 1 minuto na duração mínima de uma dessas atividades implica o aumento no custo do projeto dado pela diferença entre o custo indireto e o custo de aceleração da atividade. Por exemplo, para atividade D2 representada pelo arco (24,25) o aumento de 1 minuto na duração mínima, de 1 200 para 1 201, implica o aumento de 0,1923€ (linha 49 e coluna *dual price*) no custo do projeto, dado pela diferença entre o custo indireto de 0,30€ e o custo de aceleração de 0,1077€. Mais uma vez, refira-se que esta análise só é válida para intervalo obtido da linha 49 da seção *righthand side ranges*.

## 6. Conclusões

Ao longo dos últimos anos, as organizações têm sido objeto de grandes mudanças devido às contantes alterações verificadas na sociedade, nomeadamente no âmbito da crescente evolução da competitividade dos mercados. Essas mudanças têm originado alterações na estratégia adotada pelas organizações, que tentam adaptar-se às mesmas, adotando novos métodos e técnicas que as levem a diferenciar-se da concorrência. Neste contexto, revela-se importante um bom planeamento e controlo das atividades.

A adoção do método CPM surgiu com o intuito de colmatar alguns problemas no planeamento e controlo das atividades uma vez que para projetos de maiores dimensões já se tornava complexo desenvolver uma correta sequência das várias atividades constituintes do projeto. Com o auxílio do CPM passou a ser possível planear e controlar o tempo de conclusão de um projeto prevenindo eventuais atrasos e problemas.

O CPM permite calcular o caminho crítico de um projeto assim como efetuar uma análise da duração *versus* custo do projeto. No entanto, para projetos com um considerável grau de complexidade e de grande dimensão, a aplicação do método CPM torna-se pouco eficiente. É nesse sentido que surge a determinação do tempo mínimo de conclusão de um projeto e a análise da duração *versus* custo através da utilização da programação linear. A resolução de problemas através dos *softwares* de programação linear que existem disponíveis, para além de se tornar mais prática e eficiente, permite ainda que o gestor do projeto possua mais informação acerca dos recursos a alocar a cada atividade.

No caso prático em estudo, relativo ao fabrico de uma peça designada de *Piston* de 1ª Compressão, foi possível verificar que a utilização da programação linear se revelou uma abordagem eficiente quer na determinação do tempo mínimo necessário para a produção da peça quer na análise da duração *versus* custo. Relativamente a este último aspeto, verificou-se que a alocação de mais recursos (humanos) em algumas atividades permitiu reduzir o tempo de produção da peça e também o custo inerente a essa produção. Esta redução de custo deveu-se ao facto de os custos indiretos serem superiores aos custos de aceleração das atividades aceleradas.

O *output* gerado por um qualquer *software* de programação linear, que neste trabalho foi o LINDO, permite identificar facilmente as atividades críticas e, conseqüentemente, o caminho crítico, assim como as atividades com folgas. Permite ainda realizar uma análise de

sensibilidade relativamente à duração e/ou o custo de cada atividade e, neste contexto, conhecer o impacto que as alterações na duração de cada atividade podem provocar na duração e/ou custo do projeto. A análise de sensibilidade revela-se também importante quando os dados não são conhecidos com exatidão. É evidente que toda esta informação se reveste de grande importância para o gestor de projetos.

## Referências Bibliográficas

Ahuja, A. K., Magnanti, T. L. and Orlin, J. B. (1993). *Network Flows*, Prentice Hall. Englewood Cliffs: New Jersey.

Al-Momani, A. (n.d.). *A linear Programming Algorithm for least-cost scheduling* (Artigo científico do Departamento de Engenharia Civil da Universidade de Mu'tah). Disponível em file:///C:/Users/danni/Desktop/Dissertação/Gestão%20Projectos/A\_linear\_programming\_algorithm\_for\_least-cost\_scheduling.pdf.

Aquilano, N. e Chase, R. (1997). *Gestão da Produção e das Operações – Perspetiva do ciclo de vida*. Lisboa: Monitor.

Elmabrouk, O. M. (2011). A Linear Programming Technique for the Optimization of the Activities in Maintenance Projects. *International Journal of Engineering & Technology IJET-IJENS*, 11 n°1. Benghazi-Libya: Department of Industrial and Manufacturing System Engineering, Garyounis University, 24-29.

Gouveia, L. B. (2010). A origem da Gestão de Projetos. *Artigo de revista*. Disponível em <https://pt.slideshare.net/lmbg/a-origem-da-gesto-de-projectos-3047207>.

Hiller, F. S. e Lieberman, G. J. (1990), *Introduction to Operations Research (7ª edição)*. New York: McGraw-Hill.

Hiller, F. S. e Lieberman G. J. (2006). *Introdução à Pesquisa Operacional (8ª edição)*. São Paulo: McGraw-Hill;

Kerzner, H. (2000). *Gestão de Projetos – As melhores Práticas*. São Paulo: Bookman;

..Levy, F. K., Thompson, G. L. e Wiest, J. D. (1962). Mathematical basis of the critical path method. *Carnegie Institute of Technology*. Working paper - O.N.R. Research Memorandum n°. 86, Graduate School of Industrial Administration, Carnegie Institute of Technology Pensilvânia.

Lisboa, J. V. e Gomes, C. F. (2008). *Gestão de Operações (2ª edição)*. Porto: Vida Económica.

Pinto, J. K. (2010). *Project Management: Achieving Competitive Advantage* (2ª ed.). New Jersey: Pearson;

Project Management Institute. (2013). A Guide to the Project Management Body of Knowledge -. In *PMBOK® Guide* (5ª edição). Disponível em [http://dinus.ac.id/repository/docs/ajar/PMBOKGuide\\_5th\\_Ed.pdf](http://dinus.ac.id/repository/docs/ajar/PMBOKGuide_5th_Ed.pdf)

Project Management Institute. (2018). Disponível em <https://www.pmi.org/about/learn-about-pmi>;

Ravindran, A., Philipps, Don T. e Solberg, J. J. (1986). *Operation Research - Principles and Practice* (2ª ed.). United States of America: Wiley;

Ravindran, A. R. (2009). *Operations Research – Applications*. USA: CRC Press -Taylor & Francis Group

Roldão, V. S. (1992). *Gestão de Projetos - Como gerir em tempo, custo e qualidade* (1ª ed.). Lisboa: Monitor;

Roldão, V. S. (2000). *Gestão de Projetos - Uma perspectiva Integrada* (1ª ed.). Lisboa: Monitor;

Taha, H. A. (2003). *Operations Research - An Introduction* (7ª ed.). United States of America: Prentice Hall;

The Telegraph. (2015). Procurement Manager Job Description. *The Telegraph*. Disponível em <https://jobs.telegraph.co.uk/article/procurement-manager-job-description/%0D>;

Winston, W. L. (1993). *Operations Research - Applications and Algorithms* (3ª ed.). United States of America: Internacional Thomson Publishing.

# APÊNDICES

## Apêndice A

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 10

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 146.0000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
T9	146.000000	0.000000
T1	0.000000	0.000000
T2	30.000000	0.000000
T3	52.000000	0.000000
T4	94.000000	0.000000
T5	94.000000	0.000000
T6	68.000000	0.000000
T7	129.000000	0.000000
T8	134.000000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	-1.000000
3)	0.000000	-1.000000
4)	22.000000	0.000000
5)	0.000000	-1.000000
6)	0.000000	0.000000
7)	0.000000	-1.000000
8)	0.000000	-1.000000
9)	61.000000	0.000000
10)	0.000000	-1.000000
11)	0.000000	-1.000000

NO. ITERATIONS= 10

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

VARIABLE	CURRENT COEF	OBJ COEFFICIENT RANGES	
		ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
T9	1.000000	INFINITY	0.000000
T1	-1.000000	INFINITY	0.000000
T2	0.000000	INFINITY	0.000000
T3	0.000000	INFINITY	0.000000
T4	0.000000	INFINITY	0.000000
T5	0.000000	INFINITY	0.000000
T6	0.000000	INFINITY	0.000000
T7	0.000000	INFINITY	0.000000
T8	0.000000	INFINITY	0.000000

ROW	CURRENT RHS	RIGHTHAND SIDE RANGES	
		ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2	30.000000	INFINITY	30.000000
3	22.000000	INFINITY	52.000000
4	20.000000	22.000000	INFINITY
5	42.000000	INFINITY	22.000000
6	16.000000	61.000000	68.000000
7	0.000000	INFINITY	22.000000
8	35.000000	INFINITY	61.000000
9	0.000000	61.000000	INFINITY
10	5.000000	INFINITY	134.000000
11	12.000000	INFINITY	146.000000

## Apêndice B

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 17

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) -4.850000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
Z	0.000000	1.000000
T9	119.000000	0.000000
T1	0.000000	0.000000
T12	30.000000	0.000000
T23	22.000000	0.000000
T34	20.000000	0.000000
T35	20.000000	0.000000
T36	16.000000	0.000000
T89	7.000000	0.000000
T2	30.000000	0.000000
T3	52.000000	0.000000
T4	72.000000	0.000000
T5	72.000000	0.000000
T6	68.000000	0.000000
T7	107.000000	0.000000
T8	112.000000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	-0.250000
3)	0.000000	-0.250000
4)	0.000000	-0.050000
5)	0.000000	-0.200000
6)	0.000000	0.000000
7)	0.000000	-0.200000
8)	0.000000	-0.250000
9)	39.000000	0.000000
10)	0.000000	-0.250000
11)	0.000000	-0.250000
12)	10.000000	0.000000
13)	0.000000	0.150000
14)	6.000000	0.000000
15)	0.000000	0.050000
16)	5.000000	0.000000
17)	0.000000	0.200000
18)	2.000000	0.000000
19)	22.000000	0.000000
20)	4.000000	0.000000
21)	0.000000	0.350000
22)	0.000000	-0.050000
23)	5.000000	0.000000

---

NO. ITERATIONS= 17

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

VARIABLE	CURRENT COEF	OBJ COEFFICIENT RANGES	
		ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
Z	1.000000	INFINITY	1.000000
T9	0.250000	0.050000	0.000000
T1	-0.250000	INFINITY	0.000000
T12	-0.400000	0.150000	INFINITY
T23	-0.300000	0.050000	INFINITY
T34	-0.250000	0.200000	INFINITY
T35	-0.200000	0.200000	0.050000
T36	-0.350000	0.350000	INFINITY
T89	-0.200000	INFINITY	0.050000
T2	0.000000	0.150000	0.000000
T3	0.000000	0.050000	0.000000
T4	0.000000	0.050000	0.000000
T5	0.000000	0.050000	0.000000
T6	0.000000	0.050000	0.000000
T7	0.000000	0.050000	0.000000
T8	0.000000	0.050000	0.000000

ROW	CURRENT RHS	RIGHTHAND SIDE RANGES	
		ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2	0.000000	INFINITY	30.000000
3	0.000000	INFINITY	52.000000
4	0.000000	22.000000	2.000000
5	0.000000	2.000000	22.000000
6	0.000000	39.000000	68.000000
7	0.000000	2.000000	22.000000
8	35.000000	INFINITY	39.000000
9	0.000000	39.000000	INFINITY
10	5.000000	INFINITY	112.000000
11	0.000000	INFINITY	119.000000
12	20.000000	10.000000	INFINITY
13	30.000000	INFINITY	10.000000
14	16.000000	6.000000	INFINITY
15	22.000000	INFINITY	6.000000
16	15.000000	5.000000	INFINITY
17	20.000000	22.000000	2.000000
18	18.000000	2.000000	INFINITY
19	42.000000	INFINITY	22.000000
20	12.000000	4.000000	INFINITY
21	16.000000	39.000000	4.000000
22	7.000000	5.000000	7.000000
23	12.000000	INFINITY	5.000000

## Apêndice C

$$\min z = t_{46} - t_1$$

*s.a.*

$$t_2 - t_1 \geq 2400$$

$$t_3 - t_2 \geq 10$$

$$t_4 - t_3 \geq 5$$

$$t_5 - t_4 \geq 30$$

$$t_6 - t_5 \geq 20$$

$$t_7 - t_6 \geq 27$$

$$t_{21} - t_7 \geq 5$$

$$t_{22} - t_{21} \geq 30$$

$$t_{23} - t_{22} \geq 1$$

$$t_8 - t_7 \geq 160$$

$$t_9 - t_8 \geq 56$$

$$t_{10} - t_9 \geq 9$$

$$t_{11} - t_{10} \geq 35$$

$$t_{12} - t_{11} \geq 3$$

$$t_{13} - t_{12} \geq 394$$

$$t_{14} - t_{13} \geq 45$$

$$t_{15} - t_{14} \geq 135$$

$$t_{16} - t_{15} \geq 52$$

$$t_{17} - t_{16} \geq 50$$

$$t_{18} - t_{17} \geq 60$$

$$t_{19} - t_{18} \geq 405$$

$$t_{20} - t_{19} \geq 10$$

$$t_{23} - t_{20} \geq 80$$

$$t_{24} - t_{23} \geq 60$$

$$t_{25} - t_{24} \geq 240$$

$$t_{26} - t_{25} \geq 485$$

$$t_{27} - t_{26} \geq 3830$$

$$t_{28} - t_{27} \geq 330$$

$$t_{29} - t_{28} \geq 240$$

$$t_{30} - t_{29} \geq 180$$

$$t_{31} - t_{30} \geq 480$$

$$t_{32} - t_{31} \geq 120$$

$$t_{33} - t_{32} \geq 780$$

$$t_{34} - t_{33} \geq 3270$$

$$t_{35} - t_{34} \geq 300$$

$$t_{36} - t_{35} \geq 600$$

$$t_{37} - t_{36} \geq 645$$

$$t_{44} - t_{37} \geq 60$$

$$t_{38} - t_{30} \geq 10$$

$$t_{39} - t_{38} \geq 10$$

$$t_{40} - t_{39} \geq 120$$

$$t_{41} - t_{40} \geq 15$$

$$t_{42} - t_{41} \geq 15$$

$$t_{43} - t_{42} \geq 60$$

$$t_{44} - t_{43} \geq 20$$

$$t_{45} - t_{44} \geq 150$$

$$t_{46} - t_{45} \geq 240$$

$$t_i \geq 0$$

$$i = 1, \dots, 46$$

## Apêndice D

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 46

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 18156.00

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
T46	18156.000000	0.000000
T1	0.000000	0.000000
T2	2400.000000	0.000000
T3	2410.000000	0.000000
T4	2415.000000	0.000000
T5	2445.000000	0.000000
T6	2465.000000	0.000000
T7	2492.000000	0.000000
T21	2497.000000	0.000000
T22	3985.000000	0.000000
T23	3986.000000	0.000000
T8	2652.000000	0.000000
T9	2708.000000	0.000000
T10	2717.000000	0.000000
T11	2752.000000	0.000000
T12	2755.000000	0.000000
T13	3149.000000	0.000000
T14	3194.000000	0.000000
T15	3329.000000	0.000000
T16	3381.000000	0.000000
T17	3431.000000	0.000000
T18	3491.000000	0.000000
T19	3896.000000	0.000000
T20	3906.000000	0.000000
T24	4046.000000	0.000000
T25	6446.000000	0.000000
T26	6931.000000	0.000000
T27	10761.000000	0.000000
T28	11091.000000	0.000000
T29	11331.000000	0.000000
T30	11511.000000	0.000000
T31	11991.000000	0.000000
T32	12111.000000	0.000000
T33	12891.000000	0.000000
T34	16161.000000	0.000000
T35	16461.000000	0.000000
T36	17061.000000	0.000000
T37	17706.000000	0.000000
T44	17766.000000	0.000000
T38	11521.000000	0.000000
T39	11531.000000	0.000000
T40	11651.000000	0.000000
T41	11666.000000	0.000000
T42	11681.000000	0.000000
T43	17746.000000	0.000000
T45	17916.000000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	-1.000000
3)	0.000000	-1.000000
4)	0.000000	-1.000000
5)	0.000000	-1.000000
6)	0.000000	-1.000000
7)	0.000000	-1.000000
8)	0.000000	0.000000
9)	1458.000000	0.000000
10)	0.000000	0.000000
11)	0.000000	-1.000000
12)	0.000000	-1.000000
13)	0.000000	-1.000000
14)	0.000000	-1.000000
15)	0.000000	-1.000000
16)	0.000000	-1.000000
17)	0.000000	-1.000000
18)	0.000000	-1.000000
19)	0.000000	-1.000000
20)	0.000000	-1.000000
21)	0.000000	-1.000000
22)	0.000000	-1.000000
23)	0.000000	-1.000000
24)	0.000000	-1.000000
25)	0.000000	-1.000000
26)	0.000000	-1.000000
27)	0.000000	-1.000000
28)	0.000000	-1.000000
29)	0.000000	-1.000000
30)	0.000000	-1.000000
31)	0.000000	-1.000000
32)	0.000000	-1.000000
33)	0.000000	-1.000000
34)	0.000000	-1.000000
35)	0.000000	-1.000000
36)	0.000000	-1.000000
37)	0.000000	-1.000000
38)	0.000000	-1.000000
39)	0.000000	-1.000000
40)	0.000000	0.000000
41)	0.000000	0.000000
42)	0.000000	0.000000
43)	0.000000	0.000000
44)	0.000000	0.000000
45)	6005.000000	0.000000
46)	0.000000	0.000000
47)	0.000000	-1.000000
48)	0.000000	-1.000000

NO. ITERATIONS= 46

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

VARIABLE	CURRENT COEF	OBJ COEFFICIENT RANGES	
		ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
T46	1.000000	INFINITY	0.000000
T1	-1.000000	INFINITY	0.000000
T2	0.000000	INFINITY	0.000000
T3	0.000000	INFINITY	0.000000
T4	0.000000	INFINITY	0.000000
T5	0.000000	INFINITY	0.000000
T6	0.000000	INFINITY	0.000000
T7	0.000000	INFINITY	0.000000
T21	0.000000	INFINITY	0.000000
T22	0.000000	0.000000	0.000000
T23	0.000000	INFINITY	0.000000
T8	0.000000	INFINITY	0.000000
T9	0.000000	INFINITY	0.000000
T10	0.000000	INFINITY	0.000000
T11	0.000000	INFINITY	0.000000
T12	0.000000	INFINITY	0.000000
T13	0.000000	INFINITY	0.000000
T14	0.000000	INFINITY	0.000000
T15	0.000000	INFINITY	0.000000
T16	0.000000	INFINITY	0.000000
T17	0.000000	INFINITY	0.000000
T18	0.000000	INFINITY	0.000000
T19	0.000000	INFINITY	0.000000
T20	0.000000	INFINITY	0.000000
T24	0.000000	INFINITY	0.000000
T25	0.000000	INFINITY	0.000000
T26	0.000000	INFINITY	0.000000
T27	0.000000	INFINITY	0.000000
T28	0.000000	INFINITY	0.000000
T29	0.000000	INFINITY	0.000000
T30	0.000000	INFINITY	0.000000
T31	0.000000	INFINITY	0.000000
T32	0.000000	INFINITY	0.000000
T33	0.000000	INFINITY	0.000000
T34	0.000000	INFINITY	0.000000
T35	0.000000	INFINITY	0.000000
T36	0.000000	INFINITY	0.000000
T37	0.000000	INFINITY	0.000000
T44	0.000000	INFINITY	0.000000
T38	0.000000	INFINITY	0.000000
T39	0.000000	INFINITY	0.000000
T40	0.000000	INFINITY	0.000000
T41	0.000000	INFINITY	0.000000
T42	0.000000	INFINITY	0.000000
T43	0.000000	0.000000	0.000000
T45	0.000000	INFINITY	0.000000

ROW	CURRENT RHS	RIGHTHAND SIDE RANGES	
		ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2	2400.000000	INFINITY	2400.000000
3	10.000000	INFINITY	2410.000000
4	5.000000	INFINITY	2415.000000
5	30.000000	INFINITY	2445.000000
6	20.000000	INFINITY	2465.000000
7	27.000000	INFINITY	2492.000000
8	5.000000	1458.000000	2497.000000
9	30.000000	1458.000000	INFINITY
10	1.000000	1458.000000	INFINITY
11	160.000000	INFINITY	1458.000000
12	56.000000	INFINITY	1458.000000
13	9.000000	INFINITY	1458.000000
14	35.000000	INFINITY	1458.000000
15	3.000000	INFINITY	1458.000000
16	394.000000	INFINITY	1458.000000
17	45.000000	INFINITY	1458.000000
18	135.000000	INFINITY	1458.000000
19	52.000000	INFINITY	1458.000000
20	50.000000	INFINITY	1458.000000
21	60.000000	INFINITY	1458.000000
22	405.000000	INFINITY	1458.000000
23	10.000000	INFINITY	1458.000000
24	80.000000	INFINITY	1458.000000
25	60.000000	INFINITY	4046.000000
26	2400.000000	INFINITY	6446.000000
27	485.000000	INFINITY	6931.000000
28	3830.000000	INFINITY	10761.000000
29	330.000000	INFINITY	11091.000000
30	240.000000	INFINITY	11331.000000
31	180.000000	INFINITY	11511.000000
32	480.000000	INFINITY	6005.000000
33	120.000000	INFINITY	6005.000000
34	780.000000	INFINITY	6005.000000
35	3270.000000	INFINITY	6005.000000
36	300.000000	INFINITY	6005.000000
37	600.000000	INFINITY	6005.000000
38	645.000000	INFINITY	6005.000000
39	60.000000	INFINITY	6005.000000
40	10.000000	6005.000000	11521.000000
41	10.000000	6005.000000	11531.000000
42	120.000000	6005.000000	11651.000000
43	15.000000	6005.000000	11666.000000
44	15.000000	6005.000000	11681.000000
45	60.000000	6005.000000	INFINITY
46	20.000000	6005.000000	INFINITY
47	150.000000	INFINITY	17916.000000
48	240.000000	INFINITY	18156.000000

## Apêndice E

$$\min z = 0,30(t_{46} - t_1) + 0,1077(2400 - t_{24,25}) + 0,1105(3830 - t_{26,27}) + 0,0817(3270 - t_{33,34})$$

*s.a.*

$$t_{25} - t_{24} \geq t_{24,25}$$

$$t_{27} - t_{26} \geq t_{26,27}$$

$$t_{34} - t_{33} \geq t_{33,34}$$

$$t_2 - t_1 \geq 2400$$

$$t_3 - t_2 \geq 10$$

$$t_4 - t_3 \geq 5$$

$$t_5 - t_4 \geq 30$$

$$t_6 - t_5 \geq 20$$

$$t_7 - t_6 \geq 27$$

$$t_{21} - t_7 \geq 5$$

$$t_{22} - t_{21} \geq 30$$

$$t_{23} - t_{22} \geq 1$$

$$t_8 - t_7 \geq 160$$

$$t_9 - t_8 \geq 56$$

$$t_{10} - t_9 \geq 9$$

$$t_{11} - t_{10} \geq 35$$

$$t_{12} - t_{11} \geq 3$$

$$t_{13} - t_{12} \geq 394$$

$$t_{14} - t_{13} \geq 45$$

$$t_{15} - t_{14} \geq 135$$

$$t_{16} - t_{15} \geq 52$$

$$t_{17} - t_{16} \geq 50$$

$$t_{18} - t_{17} \geq 60$$

$$t_{19} - t_{18} \geq 405$$

$$t_{20} - t_{19} \geq 10$$

$$t_{22} - t_{21} \geq 30$$

$$t_{23} - t_{22} \geq 1$$

$$t_{24} - t_{23} \geq 60$$

$$t_{26} - t_{25} \geq 485$$

$$t_{28} - t_{27} \geq 330$$

$$t_{29} - t_{28} \geq 240$$

$$t_{30} - t_{29} \geq 180$$

$$t_{31} - t_{30} \geq 480$$

$$t_{32} - t_{31} \geq 1200$$

$$t_{35} - t_{34} \geq 300$$

$$t_{36} - t_{35} \geq 600$$

$$t_{37} - t_{36} \geq 645$$

$$t_{44} - t_{37} \geq 60$$

$$t_{38} - t_{30} \geq 10$$

$$t_{39} - t_{38} \geq 10$$

$$t_{40} - t_{39} \geq 120$$

$$t_{41} - t_{40} \geq 15$$

$$t_{42} - t_{41} \geq 15$$

$$t_{43} - t_{42} \geq 60$$

$$t_{44} - t_{43} \geq 20$$

$$t_{45} - t_{44} \geq 150$$

$$t_{46} - t_{45} \geq 240$$

$$1200 \leq t_{24,25} \leq 2400$$

$$1915 \leq t_{26,27} \leq 3830$$

$$1635 \leq t_{33,34} \leq 3270$$

## Apêndice F

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 49

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 3547.373

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
T46	13406.000000	0.000000
T1	0.000000	0.000000
T2425	1200.000000	0.000000
T2627	1915.000000	0.000000
T3334	1635.000000	0.000000
T25	5246.000000	0.000000
T24	4046.000000	0.000000
T27	7646.000000	0.000000
T26	5731.000000	0.000000
T34	11411.000000	0.000000
T33	9776.000000	0.000000
T2	2400.000000	0.000000
T3	2410.000000	0.000000
T4	2415.000000	0.000000
T5	2445.000000	0.000000
T6	2465.000000	0.000000
T7	2492.000000	0.000000
T21	2497.000000	0.000000
T22	3985.000000	0.000000
T23	3986.000000	0.000000
T8	2652.000000	0.000000
T9	2708.000000	0.000000
T10	2717.000000	0.000000
T11	2752.000000	0.000000
T12	2755.000000	0.000000
T13	3149.000000	0.000000
T14	3194.000000	0.000000
T15	3329.000000	0.000000
T16	3381.000000	0.000000
T17	3431.000000	0.000000
T18	3491.000000	0.000000
T19	3896.000000	0.000000
T20	3906.000000	0.000000
T28	7976.000000	0.000000
T29	8216.000000	0.000000
T30	8396.000000	0.000000
T31	8876.000000	0.000000
T32	8996.000000	0.000000
T35	11711.000000	0.000000
T36	12311.000000	0.000000
T37	12956.000000	0.000000
T44	13016.000000	0.000000
T38	8406.000000	0.000000
T39	8416.000000	0.000000
T40	8536.000000	0.000000
T41	8551.000000	0.000000
T42	8566.000000	0.000000
T43	12996.000000	0.000000
T45	13166.000000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	-0.300000
3)	0.000000	-0.300000
4)	0.000000	-0.300000
5)	0.000000	-0.300000
6)	0.000000	-0.300000
7)	0.000000	-0.300000
8)	0.000000	-0.300000
9)	0.000000	-0.300000
10)	0.000000	-0.300000
11)	0.000000	0.000000
12)	1458.000000	0.000000
13)	0.000000	0.000000
14)	0.000000	-0.300000
15)	0.000000	-0.300000
16)	0.000000	-0.300000
17)	0.000000	-0.300000
18)	0.000000	-0.300000
19)	0.000000	-0.300000
20)	0.000000	-0.300000
21)	0.000000	-0.300000
22)	0.000000	-0.300000
23)	0.000000	-0.300000
24)	0.000000	-0.300000
25)	0.000000	-0.300000
26)	0.000000	-0.300000
27)	0.000000	-0.300000
28)	0.000000	-0.300000
29)	0.000000	-0.300000
30)	0.000000	-0.300000
31)	0.000000	-0.300000
32)	0.000000	-0.300000
33)	0.000000	-0.300000
34)	0.000000	-0.300000
35)	0.000000	-0.300000
36)	0.000000	-0.300000
37)	0.000000	-0.300000
38)	0.000000	-0.300000
39)	0.000000	-0.300000
40)	0.000000	0.000000
41)	0.000000	0.000000
42)	0.000000	0.000000
43)	0.000000	0.000000
44)	0.000000	0.000000
45)	4370.000000	0.000000
46)	0.000000	0.000000
47)	0.000000	-0.300000
48)	0.000000	-0.300000
49)	0.000000	-0.192300
50)	1200.000000	0.000000
51)	0.000000	-0.189500
52)	1915.000000	0.000000
53)	0.000000	-0.218300
54)	1635.000000	0.000000

NO. ITERATIONS= 49

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

VARIABLE	CURRENT COEF	OBJ COEFFICIENT RANGES	
		ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
T46	0.300000	INFINITY	0.000000
T1	-0.300000	INFINITY	0.000000
T2425	-0.107700	INFINITY	0.192300
T2627	-0.110500	INFINITY	0.189500
T3334	-0.081700	INFINITY	0.218300
T25	0.000000	INFINITY	0.000000
T24	0.000000	INFINITY	0.000000
T27	0.000000	INFINITY	0.000000
T26	0.000000	INFINITY	0.000000
T34	0.000000	INFINITY	0.000000
T33	0.000000	INFINITY	0.000000
T2	0.000000	INFINITY	0.000000
T3	0.000000	INFINITY	0.000000
T4	0.000000	INFINITY	0.000000
T5	0.000000	INFINITY	0.000000
T6	0.000000	INFINITY	0.000000
T7	0.000000	INFINITY	0.000000
T21	0.000000	INFINITY	0.000000
T22	0.000000	0.000000	0.000000
T23	0.000000	INFINITY	0.000000
T8	0.000000	INFINITY	0.000000
T9	0.000000	INFINITY	0.000000
T10	0.000000	INFINITY	0.000000
T11	0.000000	INFINITY	0.000000
T12	0.000000	INFINITY	0.000000
T13	0.000000	INFINITY	0.000000
T14	0.000000	INFINITY	0.000000
T15	0.000000	INFINITY	0.000000
T16	0.000000	INFINITY	0.000000
T17	0.000000	INFINITY	0.000000
T18	0.000000	INFINITY	0.000000
T19	0.000000	INFINITY	0.000000
T20	0.000000	INFINITY	0.000000
T28	0.000000	INFINITY	0.000000
T29	0.000000	INFINITY	0.000000
T30	0.000000	INFINITY	0.000000
T31	0.000000	INFINITY	0.000000
T32	0.000000	INFINITY	0.000000
T35	0.000000	INFINITY	0.000000
T36	0.000000	INFINITY	0.000000
T37	0.000000	INFINITY	0.000000
T44	0.000000	INFINITY	0.000000
T38	0.000000	INFINITY	0.000000
T39	0.000000	INFINITY	0.000000
T40	0.000000	INFINITY	0.000000
T41	0.000000	INFINITY	0.000000
T42	0.000000	INFINITY	0.000000
T43	0.000000	0.000000	0.000000
T45	0.000000	INFINITY	0.000000

ROW	CURRENT RHS	RIGHTHAND SIDE RANGES	
		ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2	0.000000	INFINITY	5246.000000
3	0.000000	INFINITY	7646.000000
4	0.000000	INFINITY	4370.000000
5	2400.000000	INFINITY	2400.000000
6	10.000000	INFINITY	2410.000000
7	5.000000	INFINITY	2415.000000
8	30.000000	INFINITY	2445.000000
9	20.000000	INFINITY	2465.000000
10	27.000000	INFINITY	2492.000000
11	5.000000	1458.000000	2497.000000
12	30.000000	1458.000000	INFINITY
13	1.000000	1458.000000	INFINITY
14	160.000000	INFINITY	1458.000000
15	56.000000	INFINITY	1458.000000
16	9.000000	INFINITY	1458.000000
17	35.000000	INFINITY	1458.000000
18	3.000000	INFINITY	1458.000000
19	394.000000	INFINITY	1458.000000
20	45.000000	INFINITY	1458.000000
21	135.000000	INFINITY	1458.000000
22	52.000000	INFINITY	1458.000000
23	50.000000	INFINITY	1458.000000
24	60.000000	INFINITY	1458.000000
25	405.000000	INFINITY	1458.000000
26	10.000000	INFINITY	1458.000000
27	80.000000	INFINITY	1458.000000
28	60.000000	INFINITY	4046.000000
29	485.000000	INFINITY	5731.000000
30	330.000000	INFINITY	7976.000000
31	240.000000	INFINITY	8216.000000
32	180.000000	INFINITY	8396.000000
33	480.000000	INFINITY	4370.000000
34	120.000000	INFINITY	4370.000000
35	780.000000	INFINITY	4370.000000
36	300.000000	INFINITY	4370.000000
37	600.000000	INFINITY	4370.000000
38	645.000000	INFINITY	4370.000000
39	60.000000	INFINITY	4370.000000
40	10.000000	4370.000000	8406.000000
41	10.000000	4370.000000	8416.000000
42	120.000000	4370.000000	8536.000000
43	15.000000	4370.000000	8551.000000
44	15.000000	4370.000000	8566.000000
45	60.000000	4370.000000	INFINITY
46	20.000000	4370.000000	INFINITY
47	150.000000	INFINITY	13166.000000
48	240.000000	INFINITY	13406.000000
49	1200.000000	1200.000000	1200.000000
50	2400.000000	INFINITY	1200.000000
51	1915.000000	1915.000000	1915.000000
52	3830.000000	INFINITY	1915.000000
53	1635.000000	1635.000000	1635.000000
54	3270.000000	INFINITY	1635.000000