

INSTITUTO POLITÉCNICO DE LISBOA
INSTITUTO SUPERIOR DE CONTABILIDADE
E ADMINISTRAÇÃO DE LISBOA



ISCAL

IMPACTO DA REORGANIZAÇÃO
ADMINISTRATIVA DAS
FREGUESIAS DO CONCELHO DE
LISBOA NA AVALIAÇÃO DA SUA
EFICIÊNCIA

Diana Filipe Ferreira Godinho

Lisboa, março de 2022

INSTITUTO POLITÉCNICO DE LISBOA
INSTITUTO SUPERIOR DE CONTABILIDADE E
ADMINISTRAÇÃO DE LISBOA

IMPACTO DA REORGANIZAÇÃO
ADMINISTRATIVA DAS
FREGUESIAS DO CONCELHO DE
LISBOA NA AVALIAÇÃO DA SUA
EFICIÊNCIA

Diana Filipe Ferreira Godinho

Dissertação submetida ao Instituto Superior de Contabilidade e Administração de Lisboa para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Contabilidade e Gestão das Instituições Financeiras, realizada sob a orientação científica do Professor Doutor José Manuel de Oliveira Pires, Professor-Coordenador, da área científica de Matemática.

Constituição do Júri:

Presidente: Professora Doutora Ana Maria Sotomayor

Arguente: Professora Doutora Ana Maria Duarte Silva Alves Paias

Vogal: Professor Doutor José Manuel Oliveira Pires

L i s b o a , m a r ç o d e 2 0 2 2

Declaro ser a autora desta dissertação que constitui um trabalho original e inédito, que nunca foi submetido (no seu todo ou qualquer das suas partes) a outra instituição de ensino superior para a obtenção de um grau académico ou outra habilitação. Atesto ainda que todas as citações estão devidamente identificadas. Mais acrescento que tenho consciência de que o plágio - a utilização de elementos alheios sem referência do autor - constitui uma grave falta de ética, que poderá resultar na anulação da presente dissertação.

Dedicatória

Aos meus pais, ao meu irmão e ao meu namorado pelo apoio incansável nesta grandiosa etapa da minha vida.

“A persistência é o caminho do êxito”

Charles Chaplin

Agradecimentos

Uma dissertação de mestrado caracteriza-se por um longo e duro trajeto com variadíssimos desafios, contratempos, lágrimas, incertezas, muito trabalho, mas também muita alegria e felicidade quando ultrapassados os diversos obstáculos que surgem ao longo desta fase. No término do percurso, paira o sentimento de dever cumprido. Neste sentido, o apoio e contributo das pessoas torna-se um pilar fundamental para a concretização de algum objetivo.

Assim sendo, a concretização da presente dissertação não seria possível sem o auxílio de inúmeras pessoas indispensáveis que me ajudaram na procura do melhor rumo durante esta grande caminhada.

Primeiramente quero agradecer aos meus pais, ao meu irmão e ao meu namorado por todo o apoio, motivação e paciência que foram cruciais para a concretização da presente dissertação. Obrigada por todo o amor, compreensão, generosidade e alegria constante que sem dúvida contribuíram para o alcance da meta final deste longo percurso. Sem dúvida, vocês são o meu maior pilar e exemplo.

Agradeço ainda ao professor José Manuel de Oliveira Pires por ter acreditado em mim, pela notável orientação que me ofereceu na elaboração da presente dissertação, assim como, o apoio moral fornecido para a sua concretização. Agradeço imenso por nunca me ter deixado desistir e saliento que não podia ter efetuado melhor escolha para me auxiliar nesta caminhada. O apoio incondicional durante toda esta fase foi crucial para o desenvolvimento e conclusão da presente dissertação.

Por fim, gratulo todas as instituições, professores e amigos que contribuíram e ajudaram a ultrapassar um grande obstáculo que foi a recolha de dados para a elaboração da presente dissertação.

Resumo

Na metodologia DEA (*Data Envelopment Analysis*) existem dois importantes tipos de modelos para avaliar a eficiência relativa de um conjunto de DMUs (*Decision Making Units*): os modelos radiais e os modelos não radiais. Nos primeiros, a eficiência é obtida através da redução (expansão) proporcional e comum dos *inputs* (*outputs*) mantendo os *outputs* (*inputs*). Nos segundos, a eficiência é obtida usando os desvios associados aos excessos de *input* e aos défices de *output*, que são ignorados nos modelos radiais.

A presente dissertação destina-se a apresentar um estudo sobre esses dois tipos de modelos da metodologia DEA e sobre a aplicação de alguns desses modelos à avaliação do impacto, em termos de eficiência, decorrente da reorganização administrativa das freguesias do concelho de Lisboa, ocorrida no ano de 2013, que resultou numa redução considerável do número de freguesias de 53 para 24.

Palavras-chave: DEA; DMUs; Eficiência; Modelos Radiais; Modelos Não Radiais; Freguesias; Lisboa.

Abstract

In the DEA (Data Envelopment Analysis) methodology there are two important types of models for evaluating the relative efficiency of a set of DMUs (Decision Making Units): the radial models and the non-radial models. In the former, efficiency is obtained by proportionally and commonly reducing (expanding) inputs (outputs) while maintaining outputs (inputs). In the latter, efficiency is obtained using the deviations associated with input excesses and output shortfalls, which are ignored in radial models.

This dissertation aims to present a study on these two types of models of the DEA methodology and on the application of some models to the evaluation of the impact, in terms of efficiency, resulting from the administrative reorganization of the parishes in the municipality of Lisbon, which took place in 2013, resulting in a considerable reduction in the number of parishes from 53 to 24.

Keywords: *DEA; DMUs; Efficiency; Radial Models; Non-Radial Models; Parishes; Lisbon.*

Índice

Índice	viii
Índice de Tabelas	x
Índice de Figuras	xi
Lista de Abreviaturas	xii
1. Introdução.....	1
2. Modelos clássicos ou radiais da DEA	4
2.1 Introdução	4
2.2 Modelo CCR	4
2.3 Modelo BCC	13
2.4 Comparação entre os modelos CCR e BCC.....	18
3. Modelos não radiais da DEA.....	20
3.1 Introdução	20
3.2 Modelo Aditivo.....	21
3.3 Modelos Aditivos Limitados.....	23
3.4 Modelo SBM	27
3.5 Modelos da Medida de Russell	31
3.6 Modelo RAM	35
3.7 Modelos BAM.....	37
4. Avaliação da eficiência das freguesias do concelho de Lisboa.....	41
4.1 Introdução	41
4.2 Reorganização das freguesias do concelho de Lisboa.....	42
4.3 Seleção dos dados e modelos.....	46
4.4 Resultados e respetiva análise	48
5. Conclusões	54
Referências Bibliográficas	56
APÊNDICES	59
APÊNDICE A – <i>Inputs e Outputs</i> relativos às 53 freguesias de Lisboa no ano de 2011	59
APÊNDICE B – <i>Inputs e Outputs</i> relativos às 24 freguesias no ano de 2015.....	61
APÊNDICE C – Índices de eficiência para retornos constantes de escala no ano de 2011.....	62

APÊNDICE D – Índices de eficiência para retornos constantes de escala no ano de 2015.....	64
APÊNDICE E – Índices de eficiência para retornos variáveis de escala no ano de 2011	65
APÊNDICE F – Índices de eficiência para retornos variáveis de escala no ano de 2015	67

Índice de Tabelas

Tabela 4.1 – Relação das freguesias do concelho de Lisboa antes e depois da reorganização administrativa no ano de 2013 e alterações efetuadas.....	44
Tabela 4.2 – Variação da área e do número de habitantes relativos às freguesias que se mantiveram e sofreram alteração dos seus limites, após a reorganização administrativa, no ano de 2013.....	46
Tabela 4.3 – Resultados globais para retornos constantes de escala relativos ao ano 2011.....	49
Tabela 4.4 – Resultados globais para retornos constantes de escala relativos ao ano 2015.....	49
Tabela 4.5 – Resultados globais para retornos variáveis de escala relativos ao ano 2011.....	51
Tabela 4.6 – Resultados globais para retornos variáveis de escala relativos ao ano 2015.....	51

Índice de Figuras

Figura 2.1 – Representação da fronteira do conjunto de possibilidades de produção e das projeções no modelo CCR.....	8
Figura 2.2 – Representação da fronteira do conjunto de possibilidades de produção e das projeções no modelo BCC.....	14
Figura 3.1 – Comparação entre os modelos aditivos e os modelos aditivos limitados para os quatro casos de retorno de escala: a) constantes; b) não crescentes; c) não decrescentes; d) variáveis.....	26
Figura 4.1 – Mapa da cidade de Lisboa: a) antes da reorganização administrativa; b) depois da reorganização administrativa.....	43
Figura 4.2 – Gráfico relativo à média global dos valores da eficiência fornecidos pelos modelos selecionados para retornos constantes de escala nos anos de 2011 e 2015.....	50
Figura 4.3 – Gráfico relativo à média global dos valores da eficiência fornecidos pelos modelos selecionados para retornos variáveis de escala nos anos de 2011 e 2015.....	52

Lista de Abreviaturas

- BAM – *Bounded Adjusted Measure*
- BCC – *Banker, Charnes e Cooper*
- CCR – *Charnes, Cooper e Rhodes*
- CPLEX – *Optimization Programming Studio Academic Research 12.5*
- CRS – *Constant Returns to Scale*
- DEA – *Data Envelopment Analysis*
- DGAEP – *Direcção-Geral da Administração e do Emprego Público*
- DGAL – *Direcção-Geral das Autarquias Locais*
- DMUs – *Decisions Make Units*
- INE – *Instituto Nacional de Estatística*
- NIRS – *Non-Increasing Returns to Scale*
- NDRS – *Non-Decreasing Returns to Scale*
- SBM – *Slacks Based Measure*
- SIOE – *Sistema de Informação da Organização do Estado*
- TC – *Tribunal de Contas*
- VRS – *Variable Returns to Scale*

1. Introdução

A medição da eficiência tem sido um tema de enorme interesse desde a definição de eficiência técnica ou produtiva apresentada por Koopmans (1951). Esta definição consiste numa adaptação, para o contexto produtivo, do conceito de eficiência de Pareto (1906), no âmbito da economia do bem-estar, e constitui o primeiro trabalho apresentado sobre eficiência. Daí a eficiência de Koopmans ser muitas vezes referida como eficiência de Pareto-Koopmans. Uma combinação de *inputs* e *outputs* diz-se eficiente segundo Pareto-Koopmans se, e só se, não for possível melhorar qualquer dos seus *inputs* ou *outputs* sem piorar alguns dos seus outros *inputs* ou *outputs*.

Enquanto Koopmans (1951) forneceu uma definição e uma caracterização de eficiência, Debreu (1951) forneceu uma medida de eficiência técnica orientada para minimização dos *inputs*, designada coeficiente de utilização de recursos. Mais tarde, no seguimento dos trabalhos de Koopmans e Debreu, Farrell (1957) introduziu o conceito de função de produção empírica, estimada a partir dos dados empíricos, para avaliar a eficiência técnica em que as combinações de *inputs* e *outputs* sobre essa fronteira são consideradas eficientes. Os índices de eficiência técnica desenvolvidos por Farrell, e também Debreu, são obtidos através da máxima redução proporcional (radial) e comum em todos os *inputs*, mantendo o nível de *output*. Farrell (1957) definiu ainda a eficiência económica total como a combinação da eficiência técnica e da eficiência alocativa. A primeira tem como objetivo evitar o desperdício, isto é, produzir o mesmo com uma menor quantidade de inputs ou produzir mais com a mesma quantidade de inputs. A segunda escolhe um conjunto ótimo de inputs considerando o preço e a tecnologia disponíveis.

O trabalho de Farrell (1957) permaneceu praticamente esquecido durante cerca de vinte anos até à publicação do trabalho de Charnes, Cooper e Rhodes (1978) onde, com base nas ideias de Farrell, se propõe um modelo de programação matemática, que deu origem a uma nova metodologia de construção de fronteiras de produção e indicadores da eficiência produtiva conhecida como DEA (*Data Envelopment Analysis*). Desde que surgiu, esta metodologia tem-se tornado muito popular e aumentado consideravelmente o interesse pela avaliação da eficiência.

A metodologia DEA é uma técnica não paramétrica, baseada na programação linear, que se destina a calcular a eficiência relativa de um conjunto de entidades homogêneas que

produzem vários produtos (*outputs*), usando vários recursos (*inputs*). Essas entidades podem ser de natureza empresarial, governamental ou social, sendo designadas de DMUs (*Decision Making Units*).

A DEA possibilita a obtenção de um índice de eficiência para cada uma das DMUs em avaliação, normalmente um valor na escala de 0 a 1, avaliando como eficientes as que obtêm um índice igual a 1 e como ineficientes as que obtêm um índice inferior a 1. As DMUs eficientes permitem determinar uma fronteira de eficiência em relação à qual são avaliadas as ineficientes. Permitem ainda, para estas últimas, identificar o conjunto de DMUs que são referência para se tornarem eficientes, designado por conjunto de referência. Os índices de eficiência obtidos e o conjunto de referência permitem definir as melhores práticas e identificar as mudanças que são necessárias efetuar nos níveis de *inputs* e *outputs*, para que as DMUs ineficientes se tornem eficientes. A DEA é uma metodologia orientada para os dados que não necessita de uma função de produção definida *a priori*.

Na DEA existem essencialmente dois tipos de modelos para calcular a eficiência relativa: os modelos clássicos ou radiais e os modelos não radiais. Nos primeiros, a eficiência é obtida através da redução (expansão) proporcional e comum dos *inputs* (*outputs*) mantendo constantes os *outputs* (*inputs*), ignorando os desvios associados aos excessos de *input* ou aos défices de *output*. Nos segundos, a eficiência é obtida usando diretamente os desvios associados aos excessos de *input* e aos défices de *output*. Enquanto os modelos radiais podem ser orientados para *inputs* ou para *outputs*, os modelos não radiais podem também ser não orientados, sendo esta a versão mais interessante destes modelos, como se verá ao longo do presente trabalho.

A eficiência obtida pelos modelos radiais é muitas vezes referida como a eficiência de Farrell, por corresponder à medida apresentada por Farrell (1957), enquanto a eficiência obtida pelos modelos não radiais é referida como a eficiência de Pareto-Koopmans, definida por Koopmans (1951) e resultante da adaptação, para o contexto produtivo, do conceito de eficiência do bem-estar apresentado por Pareto (1906).

Em termos de estrutura, a presente dissertação inclui mais quatro capítulos para além do presente capítulo de introdução. No capítulo 2, são apresentados os modelos clássicos ou radiais da DEA, isto é, o modelo CCR desenvolvido por Charnes, Cooper & Rhodes (1978) para retornos constante de escala, que originou formalmente a DEA, e o modelo BCC

proposto por Banker, Charnes & Cooper (1984) para retornos variáveis de escala. Neste capítulo é ainda feita uma comparação entre estes dois modelos.

No capítulo 3, apresentam-se os principais modelos não radiais da DEA. Assim, são apresentados o modelo aditivo, os modelos aditivos limitados, o modelo SBM (*Slack Based Measure*), os modelos da medida de Russell, o modelo RAM (*Range Adjusted Measure*) e o modelo BAM (*Bounded Adjusted Measure*).

No capítulo 4, são usados alguns dos modelos apresentados nos capítulos 2 e 3 para medir a eficiência das freguesias do concelho de Lisboa nos anos de 2011 e 2015, antes e depois da reorganização administrativa ocorrida em 2013 e, conseqüentemente, medir o impacto desta reorganização em termos de eficiência. Para tal é efetuada uma breve referência sobre a mencionada reorganização e são apresentados os resultados obtidos, juntamente com a respetiva análise.

Por fim, no capítulo 5, apresentam-se as principais conclusões obtidas com a realização do presente trabalho.

2. Modelos clássicos ou radiais da DEA

2.1 Introdução

Este capítulo tem por objetivo apresentar os modelos clássicos da metodologia DEA, também conhecidos por modelos radiais ou de eficiência radial. A eficiência obtida por estes modelos reflete a redução proporcional e comum dos *inputs*, mantendo constantes os *outputs*, ou a expansão proporcional e comum dos *outputs*, mantendo constantes os *inputs*. Deste modo, estes modelos podem ser orientados para *inputs*, o que ocorre no primeiro caso, ou orientados para *outputs*, o que ocorre no segundo caso. Estes modelos podem ainda ser definidos quanto ao tipo de retornos de escala, sendo os retornos constantes de escala e os retornos variáveis de escala os mais usuais. O primeiro tipo considera que uma variação nos *inputs* produz uma variação proporcional nos *outputs*, enquanto o segundo considera que, além da variação proporcional, uma variação nos *inputs* produz uma variação nos *outputs* maior ou menor do que o proporcional.

Na seção 2.2, é apresentado o modelo CCR proposto Charnes, Cooper e Rodhes (1978). Este modelo considera retornos constantes de escala e é, por isso, muitas vezes referido como modelo CRS (*Constant Returns to Scale*). Na seção 2.3, apresenta-se o modelo BCC proposto por Banker, Charnes e Cooper (1984), que é uma extensão do modelo CCR para retornos variáveis de escala, sendo por isso também referido como modelo VRS (*Variable Returns to Scale*). Por fim, na seção 2.4, apresenta-se uma comparação entre os dois modelos apresentados nas seções anteriores.

2.2 Modelo CCR

Considere-se que existem n DMUs homogêneas para avaliação e que cada DMU utiliza m *inputs* para produzir s *outputs*. Mais especificamente, cada DMU_j ($j=1, \dots, n$) utiliza a quantidade x_{ij} do *input* i ($i=1, \dots, m$) para produzir a quantidade y_{rj} do *output* r ($r=1, \dots, s$). Assume-se, ainda, que $x_{ij} \geq 0$, $y_{rj} \geq 0$, ($i=1, \dots, m$; $r=1, \dots, s$; $j=1, \dots, n$), e que para cada DMU existe, pelo menos, um *input* e um *output* com valores positivos.

Como se refere em Cook e Seiford (2009), se os preços ou multiplicadores \bar{v}_i e \bar{u}_r associados aos *inputs* i e aos *outputs* r , respetivamente, são conhecidos então, da teoria

convencional benefício/custo, a eficiência \bar{e}_j de uma DMU_j pode ser obtida através do rácio entre a soma ponderada dos *outputs* e a soma ponderada dos *inputs*, isto é,

$$\bar{e}_j = \frac{\sum_{r=1}^s y_{rk} \bar{u}_r}{\sum_{i=1}^m x_{ik} \bar{v}_i} \quad (2.1)$$

que é a base do rácio de produtividade usado em engenharia.

Na ausência de multiplicadores conhecidos, Charnes, Cooper e Rodhes (1978) propuseram um modelo de programação não linear para obtenção de multiplicadores apropriados. Mais especificamente, para calcular a eficiência relativa de uma DMU_k ($k \in \{1, \dots, n\}$), os autores propuseram o seguinte modelo de programação fracionária:

$$\max e_k = \frac{\sum_{r=1}^s y_{rk} u_r}{\sum_{i=1}^m x_{ik} v_i} \quad (2.2a)$$

$$s. a. \quad \frac{\sum_{r=1}^s y_{rj} u_r}{\sum_{i=1}^m x_{ij} v_i} \leq 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.2b)$$

$$v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (2.2c)$$

$$u_r \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (2.2d)$$

Neste modelo, o objetivo é então determinar os multiplicadores associados aos *inputs* e aos *outputs* que maximizam o quociente entre a soma ponderada dos *outputs* e a soma ponderada dos *inputs* da DMU_k, sujeito à condição de que um quociente similar é menor ou igual a 1 para cada uma das DMUs. Esta condição, garantida pelas restrições (2.2b), impõe que o índice de eficiência da DMU_k, dado pelo valor ótimo do modelo (2.2), é sempre menor ou igual a 1.

O modelo anterior é conhecido por forma fracionária do modelo CCR orientado para *inputs*. Este modelo pode também ser orientado para *outputs* como se verá mais à frente. O modelo CCR considera retornos constantes de escala, isto é, uma variação nos *inputs* produz uma variação proporcional nos *outputs*.

O modelo anterior é um modelo de programação fracionária que admite um número infinito de soluções ótimas como se refere, por exemplo, em Cooper, Seiford e Zhu (2011). Contudo, a transformação de Charnes e Cooper (1962) permite selecionar uma dessas soluções e, deste modo, obter um modelo de programação linear equivalente. Assim, igualando a 1 o denominador da função objetivo do modelo (2.2), este modelo pode ser convertido no seguinte modelo de programação linear:

$$\max e_k = \sum_{r=1}^s y_{rk} u_r \quad (2.3a)$$

$$s. a. \quad \sum_{i=1}^m x_{ik} v_i = 1 \quad (2.3b)$$

$$\sum_{r=1}^s y_{rj} u_r - \sum_{i=1}^m x_{ij} v_i \leq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.3c)$$

$$v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (2.3d)$$

$$u_r \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (2.3e)$$

O modelo anterior é designado de forma dos multiplicadores do modelo CCR orientado para *inputs*. A solução ótima deste modelo permite obter os multiplicadores associados aos *inputs* e aos *outputs* que indicam o contributo de cada *input* e *output* para a formação do índice de eficiência da DMU_k, dado pelo valor ótimo do modelo.

Uma outra forma do modelo CCR, que permite uma melhor compreensão da sua orientação assim como informação adicional importante, é dada pelo dual do modelo anterior. Considerando a variável real θ_k associada à restrição (2.3b) e as variáveis não negativas λ_j ($j = 1, \dots, n$) associadas às n restrições (2.3c), o dual do modelo (2.3) é dado por:

$$\theta_k^* = \min \theta_k \quad (2.4a)$$

$$s. a. \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j \leq x_{ik} \theta_k \quad i = 1, \dots, m \quad (2.4b)$$

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j \geq y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (2.4c)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.4d)$$

$$\theta_k \in \mathbb{R} \quad (2.4e)$$

O modelo (2.4) é designado por forma do envelope do modelo CCR orientado para *inputs*. Da teoria da dualidade, sabe-se que os valores ótimos dos modelos (2.3) e (2.4) são iguais, isto é, $\theta_k^* = e_k^*$. Então θ_k^* fornece o índice de eficiência da DMU_k e indica, no caso dessa DMU ser ineficiente, o valor pelo qual os seus *inputs* devem ser multiplicados de modo que a mesma atinja a fronteira de eficiência, produzindo assim uma redução nos *inputs*. As restrições (2.4b) garantem que essa redução não ultrapassa a fronteira definida pelas DMUs eficientes, enquanto as restrições (2.4c) garantem que tal redução não implica uma redução nos *outputs* da DMU_k, isto é, da DMU em avaliação. As restrições (2.4d) e (2.4e) indicam a natureza das variáveis.

Então o modelo (2.4) permite uma melhor compreensão quanto à sua orientação. Além disso, este modelo permite ainda determinar facilmente o intervalo para variação do índice de eficiência, uma vez que $0 < \theta_k^* \leq 1$ ($k \in \{1, \dots, n\}$), como se mostra em Cooper, Seiford e Tone (2007).

O conjunto soluções admissíveis da forma do envelope do modelo CCR define o conjunto de possibilidades de produção. Denotando esse conjunto por T_{CCR} , tem-se

$$T_{CCR} = \left\{ (\mathbf{X}, \mathbf{Y}): \mathbf{X} \geq \sum_{j=1}^n \mathbf{X}_j \lambda_j, \mathbf{Y} \leq \sum_{j=1}^n \mathbf{Y}_j \lambda_j, \lambda_j \geq 0 \ (j=1, \dots, n) \right\} \quad (2.5)$$

em que (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) representa uma atividade, isto é, um par de vetores de *inputs* $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^m$ e *outputs* $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^s$, admissíveis, e em que $\mathbf{X}_j = [x_{1j} \ x_{2j} \ \dots \ x_{mj}]^T$ e $\mathbf{Y}_j = [y_{1j} \ y_{2j} \ \dots \ y_{sj}]^T$ representam os vetores de *inputs* e *outputs* da DMU_j.

Na figura 2.1 representam-se a fronteira estimada pelo modelo CCR, para o caso de um *input* e um *output*, e o conjunto de possibilidades de produção constituído pelos pontos limitados por essa fronteira e pelo eixo do *input*. Nessa figura, representa-se ainda a projeção da DMU D na fronteira de eficiência determinada pelo modelo CCR orientado para *inputs* e representada por D'. Igualmente, se apresenta a projeção dessa DMU determinada pelo modelo CCR orientado para *outputs*, que será apresentado mais à frente, e representada por D''.

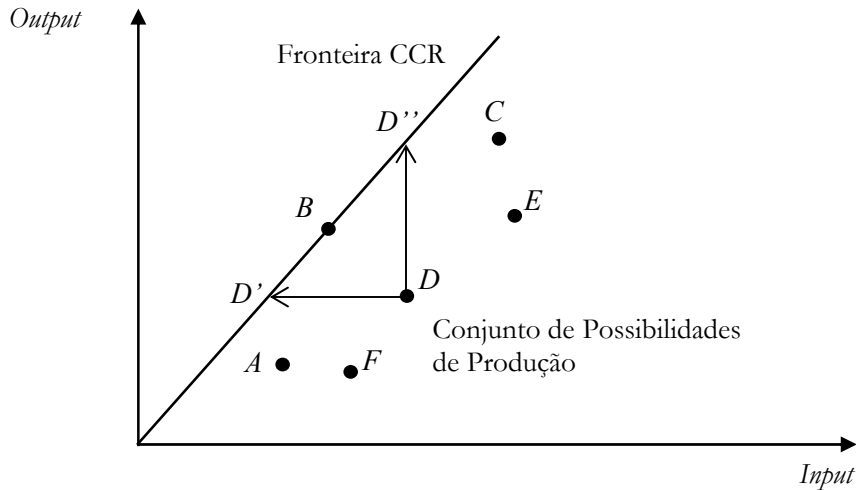


Figura 2.1 – Representação da fronteira do conjunto de possibilidades de produção e das projeções no modelo CCR

Fonte: Adaptado de Cooper *et al.* (2007)

A eficiência obtida pelo modelo (2.4) e, conseqüentemente, pelos modelos (2.3) e (2.2), é a eficiência de Farrell ou eficiência fraca, uma vez que não incorpora as ineficiências relativas aos desvios associados ao excessos de *input* e ao défices de *output*, representados pelas variáveis s_i^- e s_r^+ , respectivamente. Para verificar a eventual existência desses excessos e défices, Cooper, Seiford e Tone (2007) propuseram um procedimento de duas fases. Na primeira fase é obtido o valor θ_k^* usando o modelo (2.4). Na segunda fase, usando esse valor, é resolvido o seguinte modelo de programação linear:

$$\max \sum_{i=1}^m s_i^- + \sum_{r=1}^s s_r^+ \quad (2.6a)$$

$$s. a. \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j + s_i^- = x_{ik} \theta_k^* \quad i = 1, \dots, m \quad (2.6b)$$

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j - s_r^+ = y_{rk} \theta_k^* \quad r = 1, \dots, s \quad (2.6c)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.6d)$$

$$s_i^- \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (2.6e)$$

$$s_r^+ \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (2.6f)$$

Se $\theta^* = 1$ e o valor da função objetivo do modelo anterior é igual a 0, isto é, se as variáveis desvio são todas iguais a zero, então a DMU_k é fortemente eficiente ou eficiente segundo Pareto-Koopmans. Se, por outro lado, $\theta^* = 1$ e existe pelo menos uma variável de desvio diferente de zero então a DMU_k é fracamente eficiente ou eficiente segundo Farrell.

Um primeiro trabalho que procurou incluir as ineficiências relativas aos excessos de *input* e aos défices de *output* no cálculo da eficiência, ou, de outro modo, garantir a positividade dos multiplicadores, foi desenvolvido por Charnes, Cooper, Lewin, Morey e Rousseau (1981) que, para o efeito, propuseram os modelos não Arquimedianos. Nas formas fracionária e dos multiplicadores do modelo CCR orientado para *inputs* os correspondentes modelos não Arquimedianos são obtido dos modelos (2.2) e (2.3) substituindo as restrições de não negatividade das variáveis $v_i \geq 0$ e $u_r \geq 0$ pelas restrições $v_i \geq \varepsilon > 0$ e $u_r \geq \varepsilon > 0$, respetivamente, onde $\varepsilon > 0$ é um valor não Arquimediano, isto é, um valor menor do que qualquer valor real positivo. Esta alteração corresponde a que na forma do envelope, isto é, no modelo (2.4), sejam introduzidas explicitamente as variáveis de desvio s_i^- e s_r^+ nas restrições (2.4b) e (2.4c), respetivamente, e a função objetivo (2.4a) seja substituída por

$$\theta_k^* = \min \theta_k - \varepsilon \left(\sum_{i=1}^m s_i^- + \sum_{r=1}^s s_r^+ \right) \quad (2.4a')$$

De notar que a introdução deste valor não Arquimédiano pode conduzir a uma solução não real ou a resultados insatisfatórios quando a ε é atribuído um valor real pequeno, por exemplo, 10^{-6} (ver Färe & Hunsaker (1986) e Ali e Seiford (1990a)).

Então, se $\theta_k^* < 1$, ou $e_k^* < 1$, a DMU_k diz-se ineficiente. Se $\theta_k^* = 1$, ou $e_k^* = 1$, diz-se que a DMU_k está na fronteira de eficiência podendo, neste caso, ser fortemente ou fracamente eficiente. É fortemente eficiente se, e só se, $\theta_k^* = 1$ e todas as variáveis de desvio associadas aos excessos de *input* e aos défices de *output* são iguais a zero ou, através das condições de complementaridade forte, se, e só se, $e_k^* = 1$ e os multiplicadores associados aos *inputs* e aos *outputs* são todos positivos. Por outro lado, é fracamente eficiente se $\theta_k^* = 1$ e existem variáveis de desvios diferentes de zero ou, através das condições de complementaridade, se $e_k^* = 1$ e existem multiplicadores associados aos *inputs* e/ou aos

outputs iguais a zero. Uma DMU que é fortemente eficiente pelo modelo CCR diz-se CCR-eficiente (Cooper, Seiford e Tone, 2007).

A solução ótima do modelo (2.4) permite ainda obter o conjunto de referência da DMU_k, denotado por R_k e definido por

$$R_k = \{j : \lambda_j^* > 0, j \in \{1, \dots, n\}\} \quad (2.7)$$

Este conjunto permite identificar as DMUs que são referências (*benchmarks*) para que uma determinada DMU_k ineficiente se torne eficiente e pode ser constituído por um ou mais elementos. No caso de ser constituído por mais de um elemento, os valores de λ_j^* determinam a importância relativa das correspondentes DMUs para que uma DMU_k ineficiente se torne em eficiente. Assim, quanto maior for o valor de λ_j^* , maior será a importância da correspondente DMU_j para que uma DMU_k se torne eficiente. Obviamente que se uma DMU_k é eficiente, então é referência de si própria pelo que, neste caso, $R_k = \{k\}$.

Como é sabido, o modelo da forma dos multiplicadores é também o dual da forma do envelope e é obtido, a partir deste, associando as variáveis v_i ($i = 1, \dots, m$) às restrições (2.4b) e as variáveis u_r ($r = 1, \dots, s$) às restrições (2.4c). O modelo do envelope é muitas vezes referido como primal por ser o modelo usado por Farrell para o caso de um *output*, enquanto o modelo dos multiplicadores é referido como dual.

Como se refere em Cooper, Seiford, Tone e Zhu (2007), a forma fracionária do modelo CCR orientado para *inputs* estende a medida de eficiência usada em engenharia e em ciências, dada pelo quociente entre um único *output* e um único *input*, para vários *inputs* e vários *outputs* sem requerer pesos (multiplicadores) fixados *a priori*, como habitualmente é usado em engenharia para tratar tais casos. O uso da transformação de Charnes e Cooper (1962) permite obter um modelo de programação linear que é o dual do modelo apresentado em Farrell (1957). Isto, por sua vez, proporciona contacto com o conceito ótimo de Pareto (1909) usado em economia social e mais tarde estendido à economia da produção por Koopmans (1951) para caracterização da eficiência, atualmente referida como eficiência de Pareto-Koopmans. Então a forma fracionária permitiu um contacto entre os conceitos de eficiência social e de eficiência usada em engenharia e ciências, aumentando a potência e alcance de ambos.

No modelo CCR orientado para *outputs*, o objetivo é maximizar os *outputs* mantendo os *inputs*. A forma fracionária deste modelo é dada por:

$$\min f_k = \frac{\sum_{i=1}^m x_{ik} v_i}{\sum_{r=1}^s y_{rk} u_r} \quad (2.8a)$$

$$s. a. \quad \frac{\sum_{i=1}^m x_{ij} v_i}{\sum_{r=1}^s y_{rj} u_r} \geq 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.8b)$$

$$v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (2.8c)$$

$$u_r \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (2.8d)$$

Neste modelo, o objetivo é determinar os multiplicadores associados aos *inputs* e aos *outputs* que minimizam o quociente entre a soma ponderada dos *inputs* e a soma ponderada dos *outputs* da DMU_k, sujeito à condição de que um quociente similar é maior ou igual a 1 para cada uma das DMUs. Esta condição, garantida pelas restrições (2.8b), impõe que o valor ótimo do modelo (2.6), é sempre maior ou igual a 1.

Usando novamente a transformação de Charnes e Cooper (1962), o modelo anterior pode ser convertido num problema de programação linear equivalente, à semelhança do que foi feito na versão orientada para *inputs*. Assim, igualando a um o denominador da função objetivo (2.8a), obtém-se o seguinte modelo de programação linear:

$$\min f_k = \sum_{i=1}^m x_{ik} v_i \quad (2.9a)$$

$$s. a. \quad \sum_{r=1}^s y_{rk} u_r = 1 \quad (2.9b)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} v_i - \sum_{r=1}^s y_{rj} u_r \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.9c)$$

$$v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (2.9d)$$

$$u_r \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (2.9e)$$

Este modelo é conhecido por forma dos multiplicadores do modelo CCR orientado para *outputs*. Associando a variável real ρ_k à restrição (2.9b) e as variáveis não negativas λ_k às restrições (2.9c), obtém-se o dual daquele modelo dado por:

$$\rho_k^* = \max \rho_k \quad (2.10a)$$

$$s. a. \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j \leq x_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad (2.10b)$$

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j \geq y_{rk} \rho_k \quad r = 1, \dots, s \quad (2.10c)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.10d)$$

$$\rho_k \in \mathbb{R} \quad (2.10e)$$

Tal como na versão orientada para *inputs*, este modelo constitui a forma do envelope do modelo CCR orientado para *outputs*. O valor ótimo deste modelo, ρ_k^* , indica o valor pelo qual os *outputs* de uma DMU_k não eficiente devem ser multiplicados de modo que essa DMU atinja a fronteira de eficiência, produzindo assim uma expansão no valor dos *outputs*. As restrições (2.10b) garantem que essa expansão não implica qualquer aumento no valor dos *inputs*, enquanto as restrições (2.10c) garantem que tal expansão não ultrapassa a fronteira de eficiência definida pelas DMUs eficientes. As restrições (2.10d) e (2.10e) indicam a natureza das variáveis.

Como neste caso, se tem $\rho_k^* \geq 1$, ou equivalentemente $f_k^* \geq 1$, uma vez que da teoria da dualidade tem-se $\rho_k^* = f_k^*$, o índice de eficiência é dado por $1/\rho_k^*$, ou equivalentemente, por $1/f_k^*$, de modo a garantir que a eficiência é medida numa escala de 0 a 1. Se aqueles valores ótimos são iguais a 1, a DMU_k está na fronteira de eficiência, podendo ser fortemente ou fracamente eficiente de acordo com as condições definidas para a versão orientada para *inputs*. Caso contrário, isto é, se aqueles valores são superiores a 1, a DMU_k diz-se ineficiente e será tanto mais ineficiente quando maiores forem esses valores.

Também nesta versão, os valores de λ_j^* fornecidos pelo modelo (2.8) permitem obter o mesmo tipo de informação que na versão orientada para *inputs*, isto é, permitem determinar o conjunto de referência da DMU_k .

Comparando a versão orientada para *inputs* com a orientada para *outputs* do modelo CCR, Cooper, Seiford e Tone (2007) mostram que o índice de eficiência obtido pelas duas versões é o mesmo, apesar das soluções ótimas obtidas por essas variantes serem diferentes, tanto na forma dos multiplicadores como na forma do envelope. Estes autores mostram também como obter diretamente a solução ótima de uma versão conhecida a solução ótima da outra versão, em ambas as formas acabadas de referir.

2.3 Modelo BCC

O modelo BCC foi proposto por Banker, Charnes e Cooper (1984) e caracteriza-se pelo facto da fronteira de eficiência, envolvendo um conjunto convexo de DMUs existentes, ser definida por uma função linear por partes, côncava, que conduz a retornos variáveis de escala (crescentes, decrescentes e constantes). O modelo BCC é então uma extensão do modelo CCR que permite que DMUs que tenham baixos níveis de *inputs* operem sob retornos crescentes de escala e as que tenham elevados níveis de *inputs* operem sob retornos decrescentes de escala. Os retornos de escala dizem-se crescentes (decrescentes) quando uma variação nos *inputs* produz uma variação maior (menor) do que o proporcional nos *outputs*. O modelo BCC substitui o axioma da proporcionalidade entre *inputs* e *outputs*, que caracteriza o modelo CCR, pelo axioma da convexidade.

A convexidade é descrita pelas condições $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$ e $\lambda_k \geq 0$ ($\lambda = 1, \dots, n$), pelo que na forma do envelope, o modelo BCC obtém-se do modelo CCR introduzindo neste último a primeira daquelas condições, que usualmente é designada de restrição de convexidade. Então, para a versão orientada para *inputs*, a forma do envelope do modelo BCC é dada pelo seguinte modelo:

$$\theta_k^* = \min \theta_k \quad (2.11a)$$

$$s. a. \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j \leq x_{ik} \theta_k \quad i = 1, \dots, m \quad (2.11b)$$

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j \geq y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (2.11c)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \quad (2.11d)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.11e)$$

$$\theta_k \in \mathbb{R} \quad (2.11f)$$

Também neste caso, o conjunto das soluções admissíveis do modelo anterior define o conjunto de possibilidades de produção associado ao modelo BCC, dado por

$$T_{BCC} = \left\{ (X, Y): X \geq \sum_{j=1}^n X_j \lambda_j, Y \leq \sum_{j=1}^n Y_j \lambda_j, \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0 (j=1, \dots, n) \right\} \quad (2.12)$$

Seguindo o que foi feito na figura 2.1 para o modelo CCR, na figura 2.2 representa-se a fronteira estimada pelo modelo BCC, para o caso de um *input* e um *output*, e o conjunto de possibilidades de produção constituído pelos pontos limitados por essa fronteira e pelo eixo do *input*. Nessa figura, representam-se também a projeção da DMU D na fronteira de eficiência determinada pelo modelo BCC orientado para *inputs* e representada por D'. Igualmente, se representa a projeção dessa DMU determinada pelo modelo BCC orientado para *outputs*, que será apresentado mais à frente, e representada por D''. De referir que os retornos crescentes de escala ocorrem no segmento de reta [A, B], os retornos decrescentes ocorrem no segmento [B, C] e os retornos contantes ocorrem no ponto B.

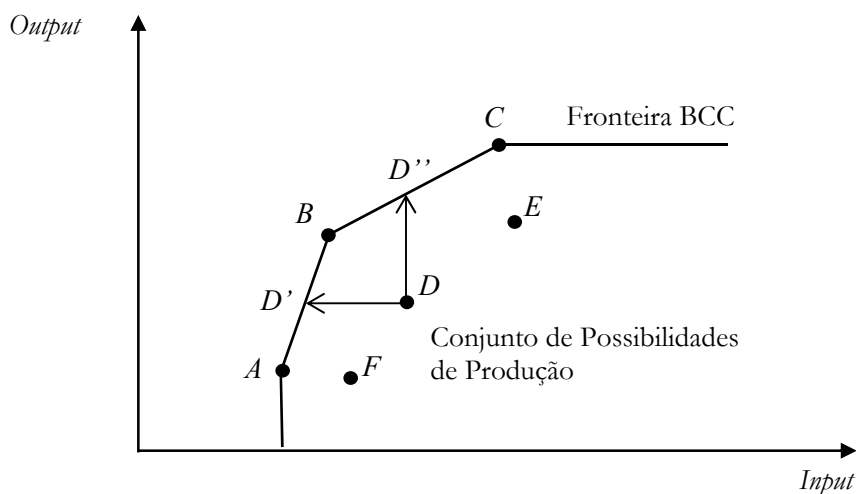


Figura 2.2 – Representação da fronteira do conjunto de possibilidades de produção e das projeções no modelo BCC

Fonte: Adaptado de Cooper *et al.* (2007)

Associando as variáveis não negativas v_i ($i=1, \dots, m$) e u_r ($r=1, \dots, s$) às restrições (2.12b) e (2.12c), respetivamente, e a variável u^k à restrição (2.12d), obtém-se o dual do modelo (2.12), que constitui a forma dos multiplicadores do modelo BCC orientado para *inputs*, e é dado por:

$$\max e_k = \sum_{r=1}^s y_{rk} u_r + u^k \quad (2.13a)$$

$$s. a. \quad \sum_{i=1}^m x_{ik} v_i = 1 \quad (2.13b)$$

$$\sum_{r=1}^s y_{rj} u_r - \sum_{i=1}^m x_{ij} v_i + u^k \leq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.13c)$$

$$v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (2.13d)$$

$$u_r \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (2.13e)$$

$$u^k \in \mathbb{R} \quad r = 1, \dots, s \quad (2.13f)$$

Na forma dos multiplicadores, o modelo BCC orientado para *inputs* difere do correspondente modelo CCR pelo facto de incluir uma variável u^k , cujo valor na solução ótima, u^{k*} , indica o tipo de retorno de escala em que a DMU_k opera. Assim, $u^k > 0$ indica que a referida DMU_k opera sob retorno crescente de escala; $u^k < 0$ indica que a DMU_k opera sob retorno decrescente de escala; por fim, $u^k = 0$ indica que a DMU_k opera sob retorno constante de escala.

Tal como no modelo CCR, a forma dos multiplicadores do modelo BCC orientado para *inputs* constitui a linearização, obtida através da transformação de Charnes e Cooper (1962), da forma fracionária do modelo BCC orientado para *inputs*, dada por:

$$\max e_k = \frac{\sum_{r=1}^s y_{rk} u_r + u^k}{\sum_{i=1}^m x_{ik} v_i} \quad (2.14a)$$

$$s. a. \quad \frac{\sum_{r=1}^s y_{rj} u_r + u^k}{\sum_{i=1}^m x_{ij} v_i} \leq 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.14b)$$

$$v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (2.14c)$$

$$u_r \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (2.14d)$$

$$u^k \in \mathbb{R} \quad r = 1, \dots, s \quad (2.14f)$$

Claramente que, também nesta forma, a diferença do modelo BCC para o modelo CCR orientados para *inputs* reside apenas na variável que indica o tipo de retorno de escala.

Introduzindo a restrição de convexidade na forma do envelope do modelo CCR orientado para *outputs*, obtém-se a forma do envelope do modelo BCC orientado para *outputs*, dada pelo seguinte modelo:

$$\rho_k^* = \max \rho_k \quad (2.15a)$$

$$s. a. \quad \sum_{j=1}^n X_{ij} \lambda_j \leq X_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad (2.15b)$$

$$\sum_{j=1}^n Y_{rj} \lambda_j \geq Y_{rk} \rho_k \quad r = 1, \dots, s \quad (2.15c)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \quad (2.15d)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.15e)$$

$$\rho_k \in \mathbb{R} \quad (2.15f)$$

À semelhança do que foi feito na versão orientada para *inputs*, também nesta versão, o dual do modelo (2.15) fornece a forma dos multiplicadores do modelo BCC orientado para *outputs*. Esse modelo é obtido associando as variáveis não negativas v_i ($i = 1, \dots, m$) e u_r ($r = 1, \dots, s$) às restrições (2.15b) e (2.15c), respetivamente, e a variável v^k à restrição (2.15d), e é dado por:

$$\min f_k = \sum_{i=1}^m x_{ik} v_i + v^k \quad (2.16a)$$

$$s. a. \quad \sum_{r=1}^s y_{rk} u_r = 1 \quad (2.16b)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} v_i - \sum_{r=1}^s y_{rj} u_r + v^k \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.16c)$$

$$v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (2.16d)$$

$$u_r \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (2.16e)$$

$$v^k \in \mathbb{R} \quad r=1, \dots, s \quad (2.16f)$$

Também, à semelhança do que se verifica na versão orientada para *inputs*, o valor, na solução ótima, da variável livre v^k , v^{k*} , que surge no modelo anterior, indica o tipo de retorno de escala em que a DMU_k está a operar. Neste caso, $v^k > 0$ indica que a referida DMU_k opera sob retorno decrescente de escala; $v^k < 0$ indica que a DMU_k opera sob retorno crescente de escala; por fim, $v^k = 0$ indica que a DMU_k opera sob retorno constante de escala.

É evidente que também nesta versão do modelo BCC o índice de eficiência é dado pelo inverso de valor ótimo do modelo (2.15) ou (2.16) como acontece no modelo CCR. A classificação das DMUs no modelo BCC é também feita nos mesmos termos em que foi feita no modelo CCR.

Também nesta versão, a forma dos multiplicadores do modelo BCC orientado para *outputs* constitui a linearização, obtida através da transformação de Charnes e Cooper (1962), da forma fracionária do modelo BCC orientado para *outputs*, dada por:

$$\min f_k = \frac{\sum_{i=1}^m x_{ik} v_i + v^k}{\sum_{r=1}^s y_{rk} u_r} \quad (2.17a)$$

$$s. a. \quad \frac{\sum_{i=1}^m x_{ij} v_i + v^k}{\sum_{r=1}^s y_{rj} u_r} \geq 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.17b)$$

$$v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (2.17c)$$

$$u_r \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (2.17d)$$

$$v^k \in \mathbb{R} \quad r = 1, \dots, s \quad (2.17f)$$

Obviamente que também nesta versão, quer na forma dos multiplicadores, quer na forma fracionária, a diferença entre os modelos BCC e CCR está apenas no facto de o primeiro incluir uma variável cujo valor na solução ótima indica o tipo de retorno de escala.

2.4 Comparação entre os modelos CCR e BCC

Como se viu na seção anterior, na forma do envelope, as versões orientadas para *inputs* e para *outputs* do modelo BCC são obtidas das correspondentes versões do modelo CCR por introdução de uma restrição (de convexidade) nestes últimos modelos. Então o conjunto das soluções admissíveis do modelo BCC está contido no conjunto das soluções admissíveis do modelo CCR. Tal implica que, na versão orientada para *inputs*, o valor ótimo obtido pelo modelo BCC é maior ou igual do que o valor ótimo obtido pelo modelo CCR, ou seja, o índice de eficiência dado pelo modelo BCC é maior ou igual do que o índice de eficiência dado pelo modelo CCR. Na versão orientada para *outputs* tal implica que o valor ótimo do modelo BCC é menor ou igual do que o valor ótimo dado pelo modelo CCR. Como em ambos os modelos, o índice de eficiência é dado pelo inverso desses valores ótimos, tem-se que, também nesta versão, o índice de eficiência dado pelo modelo BCC é maior ou igual do que o dado pelo modelo CCR. Pode então afirmar-se que o índice de eficiência de uma DMU que opera sob retornos variáveis de escala é maior ou igual do que o índice de eficiência obtido quando essa DMU opera sob retornos constantes de escala. Em particular, se uma DMU é CCR-eficiente então também é BCC-eficiente. De referir que o recíproco não é necessariamente verdadeiro, isto é, o facto de uma DMU ser BCC-eficiente não implica que seja CCR-eficiente (Cooper, Seiford e Tone, 2007).

De acordo com aqueles autores, os modelos CCR e BCC permitem obter dois tipos de eficiência: a obtida pelo modelo CCR, designada de eficiência técnica global, e a obtida pelo modelo BCC, designada de eficiência técnica pura local. Se uma DMU é eficiente pelo modelo CCR e, conseqüentemente, pelo modelo BCC, então essa DMU é totalmente eficiente e está a operar no comprimento de escala mais produtivo. Se uma DMU é eficiente pelo modelo BCC, mas não o é pelo modelo CCR, então essa DMU está a operar de modo eficiente localmente, mas não globalmente devido ao comprimento de escala da DMU. Deste modo, os referidos autores definem um outro tipo de eficiência, designada de eficiência de escala (E_e), dada pelo quociente entre o valor da eficiência obtido pelo modelo CCR (E_{CCR}) e o valor da eficiência obtido pelo modelo BCC (E_{BCC}), isto é,

$$E_e = \frac{E_{CCR}}{E_{BCC}} \quad (2.18)$$

Atendendo a que, como se referiu anteriormente, $E_{CCR} \leq E_{BCC}$, tem-se que a eficiência de escala é menor ou igual a 1. Será igual a 1 se a DMU é eficiente sob retornos constantes de

escala. Se a DMU é ineficiente sob retornos constantes de escala, mas eficiente sob retornos variáveis de escala, então a eficiência de escala é menor do que 1 e tal significa que essa DMU não está a operar no comprimento de escala mais produtivo, isto é, na produtividade máxima.

A expressão (2.18) pode ser escrita como se segue:

$$E_{CCR} = E_{BCC} \times E_e$$

ou

$$\text{Eficiência Técnica} = \text{Eficiência técnica pura} \times \text{Eficiência de escala}$$

Esta decomposição da eficiência técnica mostra as origens de ineficiência de uma DMU, mais especificamente, se é causada por ineficiência de operação, dada pela eficiência técnica pura, ou por condições desfavoráveis, dada pela eficiência de escala, ou, ainda, por ambas.

3. Modelos não radiais da DEA

3.1 Introdução

No capítulo anterior apresentaram-se os modelos clássicos da DEA, também conhecidos por modelos radiais. Na sua formulação original, estes modelos permitem obter a eficiência de Farrell cujo valor reflete a redução (expansão) proporcional e comum dos *inputs* (*outputs*) mantendo constantes os *outputs* (*inputs*) quando orientados para *inputs* (*outputs*), ignorando a existência de excessos de *input* ou défices de *output*, normalmente conhecidos por folgas ou desvios.

A não contabilização das ineficiências devidas a essas folgas ou desvios nos *inputs* e/ou nos *outputs* constitui uma fragilidade da medida de Farrell, uma vez que pode levar a uma sobrevalorização da eficiência e, nomeadamente, a que uma DMU seja classificada como eficiente quando na realidade não o é. De modo a contornar esse problema, várias medidas e modelos baseados nas referidas folgas ou desvios, conhecidos por medidas e modelos não radiais, têm sido propostos na literatura da DEA. Estes modelos podem também ser não orientados, sendo esta a versão mais interessante. No que se segue, a não especificação da orientação do modelo significa que o modelo é não orientado.

Neste capítulo apresentam-se os principais modelos de eficiência não radial da DEA. Assim, na seção 3.2, apresenta-se o modelo aditivo introduzido por Charnes, Cooper, Golany, Seiford e Stutz (1985). Este modelo trata diretamente com as folgas nos *inputs* e nos *outputs* e permite discriminar as DMUs eficientes e ineficientes, mas não permite obter uma medida de eficiência como acontece nos modelos radiais CCR e BCC. Para colmatar esta deficiência, vários modelos têm sido propostos na literatura da DEA, alguns dos quais são apresentados nas seções 3.4 e seguintes. Entretanto, na seção 3.3, são apresentados os modelos aditivos limitados proposto por Cooper, Pastor, Borrás, Aparício e Pastor (2011), que servirão de base para apresentação das extensões do modelo BAM (*Bounded Adjusted Measure*), propostas pelos mesmos autores e apresentadas na seção 3.7. Na seção 3.4, apresenta-se o modelo da medida baseada em desvios, mais conhecido por modelo SBM (*Slack Based Measure*), proposto por Tone (1997, 2001). Na seção 3.5, apresentam-se os modelos da medida de Russell, com destaque para a medida melhorada de Russel que é equivalente ao modelo SBM. Na seção 3.6, apresenta-se o modelo RAM (*Range Adjusted Measure*), proposto por Cooper, Park e Pastor (1999). Por fim, na seção 3.7, apresenta-se o modelo BAM, proposto por Cooper, Pastor, Borrás, Aparício e Pastor

(2011), assim como as extensões deste modelo para retornos não variáveis de escala, propostas pelos mesmos autores.

3.2 Modelo Aditivo

Charnes, Cooper, Golany, Seiford e Stutz (1985) introduziram um modelo que dispensa a distinção entre orientação para *inputs* ou para *outputs*, como acontece nos modelos radiais, e combina estas duas orientações simultaneamente, isto é, minimiza os *inputs* e maximiza os *outputs* em simultâneo. Este modelo é designado por modelo aditivo e, considerando retornos variáveis de escala, é dado por

$$\max \left(\sum_{i=1}^m s_i^- + \sum_{r=1}^s s_r^+ \right) \quad (3.1a)$$

$$s. a. \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j + s_i^- = x_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.1b)$$

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j - s_r^+ = y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (3.1c)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \quad (3.1d)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.1e)$$

$$s_i^- \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.1f)$$

$$s_r^+ \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.1g)$$

A DMU_k, avaliada através do modelo (3.1), diz-se eficiente se, e só se, todas as variáveis de desvio são iguais a zero na solução ótima, isto é, se $s_i^{-*} = 0$ ($i = 1, \dots, m$) e $s_r^{+*} = 0$ ($r = 1, \dots, s$); caso contrário, a DMU_k diz-se ineficiente. De referir que uma DMU que é eficiente pelo modelo aditivo (3.1) é fortemente eficiente ou eficiente segundo Pareto-Koopmans.

A medida dada pelo modelo (3.1) é completa no sentido em que contabiliza todas as ineficiências (nos *inputs* e nos *outputs*) que o modelo pode identificar (Cooper, Seiford, Tone e Zhu, 2007), o que constitui um ponto forte do modelo.

Um outro ponto forte refere-se ao facto do modelo aditivo, sob retornos variáveis de escala, satisfazer a propriedade de invariância à translação, como se mostra em Ali e Seiford (1990b). Um modelo DEA diz-se invariante à translação se o valor ótimo do modelo não se alterar quando é feita uma translação dos valores dos dados relativos aos *inputs* e/ou aos *outputs*, isto é, quando se altera a origem do sistema de coordenadas. Esta propriedade revela-se útil quando existem valores negativos nos dados relativos aos *inputs* e/ou aos *outputs*, uma vez que a adição de constantes adequadas permite obter valores positivos para esses dados, com a garantia que a solução ótima não é afetada por essa translação (Cooper, Park e Pastor, 1995).

De referir que o modelo BCC é parcialmente invariante à translação. De facto, tem-se que a versão, deste modelo, orientada para *inputs* é invariante à translação em relação aos *outputs*, mas não o é em relação aos *inputs*. Similarmente, tem-se que a versão orientada para *outputs* é invariante à translação em relação aos *inputs*, mas não o é em relação aos *outputs* (Cooper, Seiford e Tone, 2007). Estes autores, através da representação gráfica, ilustram de forma clara, a invariância à translação do modelo aditivo e (parcial) do modelo BCC, assim como a não invariância do modelo CCR.

Note-se que, como se refere, por exemplo, em Ali e Seiford (1990b), a chave para a invariância à translação na DEA está na restrição de convexidade (3.1d).

Apesar dos pontos fortes referidos anteriormente, existem pontos fracos associados ao modelo aditivo. Um deles tem a ver com o facto deste modelo não permitir uma medida de eficiência como acontece com os modelos radiais CCR e BCC, permitindo apenas identificar se uma DMU é (fortemente) eficiente ou não. Outro, refere-se à falta de invariância de unidades. Por fim, este modelo pode não ser adequado para usar na identificação de DMUs de referência, na avaliação de DMUs ineficientes, uma vez que pode identificar DMUs de referência que estão muito afastadas da DMU que está sendo avaliada, como se refere em Cooper, Seiford, Tone e Zhu (2007). Isto significa que este modelo é provavelmente insatisfatório para identificar candidatos de referência para melhorar o desempenho das DMUs ineficientes (Coelli, 2005).

Apesar das fragilidades acabadas de referir, o modelo aditivo tem desempenhado um papel crucial no desenvolvimento de outros modelos não radiais, nomeadamente de modelos baseados no modelo aditivo que permitem obter uma medida de eficiência como acontece com os modelos radiais CCR e BCC.

O modelo aditivo pode contemplar várias versões. Desde logo, as versões orientadas para *inputs* ou para *outputs*. A primeira obtém-se removendo do modelo as variáveis de desvio associadas aos *outputs*, enquanto a segunda obtém-se removendo as variáveis de desvio associadas aos *inputs*. Note-se que cada uma destas versões apenas contabiliza as ineficiências relativas aos *inputs* ou aos *outputs*, revelando-se por isso pouco interessantes. Uma outra versão é a dos modelos aditivos limitados, que impõe um limite inferior para os *inputs* e um limite superior para os *outputs*, que será apresentada na seção seguinte.

3.3 Modelos Aditivos Limitados

Cooper, Pastor, Borras, Aparício e Pastor (2011) apresentaram uma nova família de modelos aditivos, designados de modelos aditivos limitados, que servem de base para a extensão, sob retornos não variáveis de escala, de uma medida de eficiência não radial proposta pelos autores, sob retornos variáveis de escala, e que é apresentada mais à frente na seção 3.7.

O modelo aditivo apresentado anteriormente considera retornos variáveis de escala. Para obter o correspondente modelo para retornos não variáveis de escala, há que modificar a restrição (3.1d) sobre a soma da intensidade das variáveis λ_j (ver, por exemplo, Cooper et al. (2007). Assim, para retornos constantes de escala, referidos na literatura por CRS, essa restrição é modificada para

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \geq 0 \quad (3.1d')$$

Note-se que, neste caso, a restrição anterior é redundante e pode ser removida do modelo uma vez que as variáveis λ_j são não negativas como indicam as restrições (3.1e).

Para retornos não crescentes de escala, referidos na literatura por NIRS (*Non-Increasing Returns to Scale*), essa restrição é modificada para

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \leq 1 \quad (3.1d'')$$

Finalmente, para retornos não decrescentes de escala, referidos na literatura por NDRS (*Non-Decreasing Returns to Scale*), essa restrição é modificada para

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \geq 1 \quad (3.1d''')$$

Como se refere em Cooper et al. (2011), qualquer conjunto de dados numa amostra com n DMUs tem limites (superior e inferior) naturais dados pelo máximo e pelo mínimo de cada *input* e de cada *output*. O mínimo de cada *input* é a menor quantidade necessária de cada *input* para obter o máximo de cada *output*. Uma vez que qualquer análise de eficiência procura reduzir *inputs* e/ou expandir *outputs*, não é de todo surpreendente que se incorpore o limite inferior para cada *input* e o limite superior para cada *output* num determinado modelo DEA. Deste modo, os autores propuseram o seguinte modelo aditivo limitado para retornos constantes de escala:

$$\max \left(\sum_{i=1}^m s_i^- + \sum_{r=1}^s s_r^+ \right) \quad (3.2a)$$

$$s. a. \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j + s_i^- = x_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.2b)$$

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j + s_r^+ = y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (3.2c)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \geq 0 \quad (3.2d)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j \geq \underline{x}_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.2e)$$

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j \leq \bar{y}_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (3.2f)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.2g)$$

$$s_i^- \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.2h)$$

$$s_r^+ \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.2i)$$

Neste modelo, \underline{x}_i é o valor mínimo do *input* i ($i = 1, \dots, m$) e \bar{y}_r é o valor máximo do *output* r ($r = 1, \dots, s$). Como se referiu anteriormente, a desigualdade (3.2d) é redundante e pode ser removida do modelo.

O modelo aditivo limitado para retornos não crescentes de escala obtém-se do modelo anterior substituindo (3.2d) por

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \leq 1 \quad (3.2d')$$

e removendo as restrições de limite superior para os *outputs* (3.2f). De facto, na presença da restrição (3.2d') e atendendo a que, para cada *output* r ($r = 1, \dots, s$), $y_{rj} \leq \bar{y}_r$ ($j = 1, \dots, n$), tem-se

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j \bar{y}_r \leq \bar{y}_r.$$

Isto significa que as restrições de limite superior para os *outputs* são redundantes e podem ser removidas do modelo.

De modo similar se obtém o modelo aditivo limitado para retornos não decrescentes de escala, substituindo no modelo (3.2) a restrição (3.2d) por

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \geq 1 \quad (3.2d'')$$

e, em consequência, removendo as restrições de limite inferior sobre os *inputs* (3.2e).

Finalmente, para o caso de retornos variáveis de escala, o modelo é obtido do modelo (3.2) substituindo (3.2d) por

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \quad (3.2d''')$$

ou, equivalentemente, pelas duas restrições

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \leq 1 \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j \geq 1$$

o que implica que as restrições de limite inferior para os *inputs* e as de limite superior para os *outputs* podem ser removidas do modelo. Então, neste caso, o modelo aditivo limitado coincide com o modelo aditivo apresentado inicialmente.

Para comparar a fronteira de eficiência de cada um dos quatro modelos aditivos limitados com a fronteira dos correspondentes modelos aditivos, observe-se a figura 3.1 onde se consideram seis DMUs com um *input* e um *output*. Nessa figura, as linhas a contínuo representam as fronteiras dos modelos aditivos, enquanto as linhas a tracejado representam as fronteiras dos correspondentes modelos limitados, para os quatro tipos de retornos de escala em consideração.

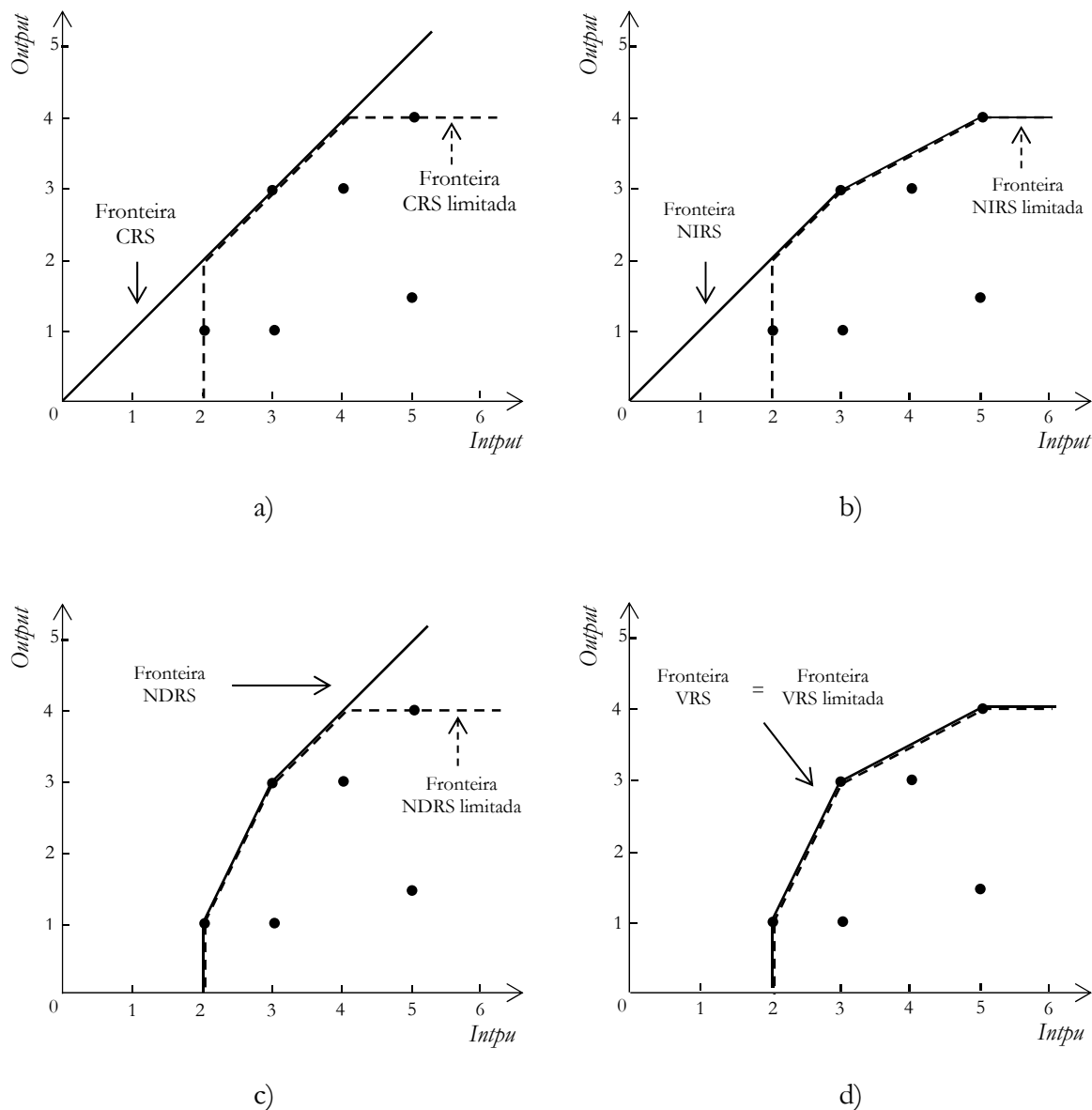


Figura 3.1 – Comparação entre os modelos aditivos e os modelos aditivos limitados para os quatro casos de retorno de escala: a) constantes; b) não crescentes; c) não decrescentes; d) variáveis.

Fonte: Cooper et al. (2011)

Em 3.1a), correspondente ao caso de retornos constantes de escala, a fronteira do modelo aditivo limitado deixa de ser uma semi-reta como acontece no modelo aditivo. Além disso, os pontos da fronteira com *input* menor do que o limite inferior, determinado pelos dados, desaparecem, o mesmo acontecendo com os pontos com *output* maior que o limite superior, igualmente determinado pelos dados. Em 3.1b), que corresponde ao caso de retornos não crescentes de escala, os pontos da fronteira à esquerda do limite inferior desaparecem como em a). Em 3.1c), que corresponde ao caso de retornos não decrescentes

de escala, apenas o lado superior direito da fronteira desaparece. Finalmente, em 3.1d), que corresponde ao caso de retornos variáveis de escala, ilustra-se que o modelo aditivo e o modelo aditivo limitado são indistinguíveis.

3.4 Modelo SBM

Tone (1997, 2001) introduziu um modelo que permite obter uma medida de eficiência baseada nos desvios ou folgas associadas aos *inputs* e aos *outputs*, designado de modelo SBM (*Slack Based Measure*). A medida de eficiência obtida é uma medida na escala de 0 a 1, invariante às unidades e monótona nos *inputs* e nos *outputs* (o seu valor decresce perante um incremento em algum dos *inputs* ou uma redução em algum dos *outputs*, mantendo os restantes constantes). De acordo com Cooper, Seiford e Tone (2007), este modelo foi inicialmente introduzido por Tone em 1997 num relatório de investigação científica publicado na “Graduate School of Policy Science” da Universidade de Saitama, Japão, e posteriormente publicado no *European Journal of Operational Research* 130 (2001), pp. 498-509. Considerando retornos variáveis de escala e assumindo que os valores relativos aos *inputs* e aos *outputs* são positivos, o modelo SBM é dado por:

$$\rho_k^* = \min \frac{1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{s_{ik}^-}{x_{ik}}}{1 + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{s_{rk}^+}{y_{rk}}} \quad (3.3a)$$

$$s. a. \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j + s_{ik}^- = x_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.3b)$$

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j - s_{rk}^+ = y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (3.3c)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \quad (3.3d)$$

$$s_{ik}^- \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.3e)$$

$$s_{rk}^+ \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.3f)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.3g)$$

Note-se que as restrições do modelo anterior são as mesmas do modelo aditivo (3.1), contudo, a função objetivo é diferente. No modelo SBM, a função objetivo usa as variáveis de desvio relativas aos *inputs* e aos *outputs* para contabilizar todas as ineficiências, numa maneira diferente do modelo aditivo, de modo a permitir uma medida eficiência na escala de 0 a 1, uma vez que, como se mostra em Cooper, Seiford e Tone (2007), ρ_k^* satisfaz a condição $0 \leq \rho_k^* \leq 1$.

O modelo SBM descrito por (3.3) é um modelo de programação linear fracionária que pode ser linearizado através da transformação de Charnes e Cooper (1962). Para o efeito, sejam:

$$\beta = \left(1 + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{s_{rk}^+}{y_{rk}} \right)^{-1} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.4a)$$

$$\hat{s}_{ik}^- = \beta s_{ik}^- \quad i = 1, \dots, m \quad (3.4b)$$

$$\hat{s}_{rk}^+ = \beta s_{rk}^+ \quad r = 1, \dots, s \quad (3.4c)$$

$$\hat{\lambda}_j = \beta \lambda_j \quad j = 1, \dots, n \quad (3.4d)$$

Usando as relações anteriores, o modelo (3.3) pode ser convertido no seguinte problema de programação linear:

$$\hat{\rho}_k^* = \min \beta - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{\hat{s}_{ik}^-}{x_{ik}} \quad (3.5a)$$

$$s. a. \quad \beta + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{\hat{s}_{rk}^+}{y_{rk}} = 1 \quad (3.5b)$$

$$-\beta x_{ik} + \sum_{j=1}^n x_{ij} \hat{\lambda}_j + \hat{s}_{ik}^- = 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.5c)$$

$$-\beta y_{rk} + \sum_{j=1}^n y_{rj} \hat{\lambda}_j - \hat{s}_{rk}^+ = 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.5d)$$

$$-\beta + \sum_{j=1; j \neq k}^n \hat{\lambda}_j = 0 \quad (3.5e)$$

$$\hat{s}_{ik}^- \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.5f)$$

$$\hat{s}_{rk}^+ \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.5g)$$

$$\hat{\lambda}_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.5h)$$

$$\beta > 0 \quad (3.5i)$$

Seja $(\hat{\rho}_k^*, \beta^*, \hat{s}_{ik}^{-*}, \hat{s}_{rk}^{+*}, \hat{\lambda}_j^*)$ uma solução ótima do modelo (3.5). Então, usando as relações (3.4) e atendendo a que o valor ótimo dos dois modelos é o mesmo (Tone, 1997, 2001), uma solução ótima do modelo SBM (3.3) é dada por:

$$\rho_k^* = \hat{\rho}_k^*, \lambda_j^* = \frac{\hat{\lambda}_j^*}{\beta^*}, s_{ik}^{-*} = \frac{\hat{s}_{ik}^{-*}}{\beta^*}, s_{rk}^{+*} = \frac{\hat{s}_{rk}^{+*}}{\beta^*} \quad (3.6)$$

Com base nesta solução, a DMU_k diz-se eficiente ou, mais precisamente, fortemente eficiente ou eficiente segundo Pareto-Koopmans se, e só se, $\rho_k^* = 1$ ou, equivalentemente, se $s_{ik}^{-*} = 0$ e $s_{rk}^{+*} = 0$, para todo i e para todo r , isto é, se os desvios relativos aos excessos de *input* e aos défices de *output* são iguais a zero, na solução ótima.

À semelhança do que acontece nos modelos radiais, o conjunto de índices correspondentes aos valores positivos de λ_j^* ($j \in \{1, \dots, n\}$) é designado conjunto de referência da DMU_k, definido no capítulo anterior, isto é,

$$R_k = \{j : \lambda_j^* > 0, j \in \{1, \dots, n\}\} \quad (3.7)$$

Como se refere em Tone (2001), o modelo SBM pode ser interpretado como um produto de ineficiências *input* e *output*. Tal é conseguido, reescrevendo a função objetivo em (3.3) como se segue:

$$\left(1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{s_{ik}^-}{x_{ik}}\right) \left(1 + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{s_{rk}^+}{y_{rk}}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{x_{ik} - s_{ik}^-}{x_{ik}}\right) \left(\frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{y_{rk} + s_{rk}^+}{y_{rk}}\right)^{-1}$$

No primeiro termo do segundo membro da igualdade anterior, o rácio $(x_{ik} - s_{ik}^-)/x_{ik}$ calcula a taxa de redução relativa do *input* i e, deste modo, esse primeiro termo corresponde à taxa média de redução dos *inputs* ou à ineficiência *input*. Similarmente, o rácio $(y_{rk} + s_{rk}^+)/y_{rk}$ no segundo termo desse segundo membro calcula a taxa de expansão

relativa do *output* r e, deste modo, esse segundo termo corresponde ao inverso da taxa média de expansão dos *outputs* ou à ineficiência *output*.

Comparando o modelo SBM com o modelo aditivo, facilmente se mostra que uma DMU é eficiente pelo modelo SBM se, e só se, for eficiente pelo modelo aditivo, como se refere em Cooper, Seiford, Tone e Zhu (2007).

Uma comparação entre o modelo SBM para retornos constantes de escala, isto é, o modelo (3.3) sem a restrição de convexidade (3.3d), e o modelo CCR é também feita em Tone (1997, 2001). Como se refere em Cooper, Seiford e Tone (2007), Tone (1997) demonstra que uma DMU_k é CCR-eficiente (eficiente segundo Pareto-Koopmans através do modelo CCR) se, e só se, é eficiente através do modelo SBM. O autor mostra também que o valor da eficiência, ρ_k^* , fornecido pelo modelo SBM não excede o valor da eficiência fraca, θ_k^* , fornecido pelo modelo CCR. Este último resultado reflete o facto de o modelo SBM contabilizar todas as ineficiências, enquanto o modelo CCR apenas contabiliza as ineficiências radiais.

O modelo SBM pode também ser orientado para *inputs* ou para *outputs*. A versão orientada para *inputs* obtém-se negligenciando o denominador da função objetivo do modelo SBM (3.3) e é dada por:

$$\rho_k^{I*} = \min 1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{s_{ik}^-}{x_{ik}} \quad (3.8a)$$

$$s. a. \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j + s_{ik}^- = x_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.8b)$$

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j \geq y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (3.8c)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \quad (3.8d)$$

$$s_{ik}^- \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.8e)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad (3.8f)$$

Similarmente, negligenciando o numerador da função objetivo do modelo SBM (3.3), obtém-se a versão orientada para *outputs*, dada por:

$$\rho_k^{O*} = \min \frac{1}{1 + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{s_{rk}^+}{y_{rk}}} \quad (3.9a)$$

$$s. a. \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j \leq x_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.9b)$$

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j - s_{rk}^+ = y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (3.9c)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \quad (3.9d)$$

$$s_{rk}^+ \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.9e)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.9f)$$

Comparando o modelo SBM com cada uma das versões orientada para *inputs* ou para *outputs*, verifica-se que $\rho_k^{I*} \geq \rho_k^*$ e $\rho_k^{O*} \geq \rho_k^*$, como se refere em Cooper, Seiford e Tone (2007). Note-se que, na versão orientada para *inputs* do modelo SBM apenas são contabilizadas as folgas relativas aos *inputs*, enquanto na versão orientada para *outputs* apenas são contabilizadas as folgas relativas aos *outputs*, à semelhança do que acontece com as versões orientadas para *inputs* e para *outputs* do modelo aditivo.

É claro que o modelo SBM, assim como as suas versões orientadas para *inputs* e para *outputs*, definidos anteriormente sob a hipótese de retornos variáveis de escala, podem também ser definidos sob a hipótese de retornos constantes de escala por remoção da restrição de convexidade daqueles modelos.

O dual do modelo SBM tenta encontrar o máximo lucro virtual, diferentemente do modelo CCR que tenta encontrar o máximo rácio entre o *output* virtual e o *input* virtual (Tone, 2001).

3.5 Modelos da Medida de Russell

A medida de Russell foi introduzida por Färe e Lovell (1978) considerando a orientação para *inputs*. Posteriormente, Färe, Grosskopf e Lovell (1985) propuseram mais duas versões desta medida, uma orientada para *outputs* e outra, não orientada, que combina as duas

orientações. Considerando retornos variáveis de escala, esta última versão é obtida através do seguinte modelo:

$$E_k^* = \min \frac{1}{m+s} \left(\sum_{i=1}^m \theta_i + \sum_{r=1}^s \frac{1}{\phi_r} \right) \quad (3.10a)$$

$$s. a. \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j \leq \theta_i x_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.10b)$$

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j \geq \phi_r y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (3.10c)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \quad (3.10d)$$

$$0 < \theta_i \leq 1 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.10e)$$

$$\phi_r \geq 1 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.10f)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.10g)$$

Apesar de ser uma medida bem definida existem algumas dificuldades associadas à medida de Russell. A primeira tem a ver com o facto de se tratar de um problema de programação não linear, cuja solução não é fácil de obter. A segunda deve-se ao facto de não ser uma medida de interpretação imediata, pois resulta da média ponderada das médias aritmética e harmónica (ver, por exemplo, Pastor, Ruiz e Sirvent, 1999).

A fim de ultrapassar as dificuldades acabadas de referir, Pastor, Ruiz e Sirvent (1999) propuseram uma medida de Russell alternativa que, em vez de combinar as medidas de Russell orientadas para *inputs* e para *outputs* na forma aditiva, o fazem na forma de quociente. Esta medida é designada de medida de Russel melhorada e, considerando retornos variáveis de escala, é obtida através do seguinte modelo:

$$E_k^* = \min \frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \theta_i}{\frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \phi_r} \quad (3.11a)$$

$$s. a. \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j \leq \theta_i x_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.11b)$$

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j \geq \phi_r y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (3.11c)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \quad (3.11d)$$

$$0 < \theta_i \leq 1 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.11e)$$

$$\phi_r \geq 1 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.11f)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.11g)$$

Como a função objetivo indica, a medida fornecida pelo modelo anterior é dada pelo quociente entre a eficiência média dos *inputs* e a eficiência média dos *outputs*. Então a medida de Russell melhorada permite uma interpretação mais imediata do que a medida de Russell.

Pastor, Ruiz e Sirvent (1999), usaram as relações

$$\theta_i = \frac{x_{ik} - s_{ik}^-}{x_{ik}} = 1 - \frac{s_{ik}^-}{x_{ik}} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.12a)$$

$$\phi_r = \frac{y_{rk} + s_{rk}^+}{y_{rk}} = 1 + \frac{s_{rk}^+}{y_{rk}} \quad r = 1, \dots, s \quad (3.12b)$$

para obter um novo modelo, equivalente ao modelo (3.11), mas em que a medida de Russell melhorada é expressa em termos de variáveis de desvios ou folgas. Esse modelo é exatamente o modelo SBM (3.3) apresentado anteriormente. Então, usando as relações (3.12), o modelo SBM pode ser usado para resolver o modelo da medida de Russell melhorada e vice-versa (Cooper, Seiford e Tone, 2007).

De referir que, para a sua resolução, o modelo (3.11) da medida de Russel melhorada pode ser linearizado através da transformação de Charnes e Cooper (1962), de modo idêntico ao que foi feito com o modelo SBM.

Negligenciando o denominador da função objetivo do modelo da medida de Russell melhorada, obtém-se a versão orientada para *inputs* desse modelo que é exatamente o modelo da medida de Russell orientada para *inputs* proposta por Färe e Lovell (1978) e apresentado em Färe, Grosskopf e Lovell (1985) por:

$$E_k^{I*} = \min \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \theta_i \quad (3.13a)$$

$$s. a. \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j \leq \theta_i x_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.13b)$$

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j \geq y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (3.13c)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \quad (3.13d)$$

$$0 < \theta_i \leq 1 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.13e)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.13f)$$

A diferença entre o modelo da medida de Russell orientada para *inputs* e a forma do envelope do modelo CCR orientado para *inputs* reside no facto do primeiro considerar uma variável associada a cada *input*, que reflete a redução ou contração de cada *input*, enquanto o último considera uma única variável que reflete a redução proporcional (radial) comum de todos os *inputs*.

Identicamente, negligenciando o numerador da função objetivo do modelo da medida de Russell melhorada, obtém-se a versão orientada para *outputs* desse modelo que é exatamente o modelo da medida de Russell orientada para *outputs* apresentado em Färe, Grosskopf e Lovell (1985) por:

$$E_k^{O*} = \max \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \phi_r \quad (3.14a)$$

$$s. a. \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j \leq x_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.14b)$$

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j \geq \phi_r y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (3.14c)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \quad (3.14d)$$

$$\phi_r \geq 1 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.14e)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.14f)$$

Também nesta versão, a diferença para a forma do envelope do modelo CCR orientado para *outputs* reside no facto do modelo (3.14) considerar uma variável associada a cada *output*, que reflete a expansão de cada *output*, enquanto o modelo CCR considera uma única variável que reflete a expansão proporcional (radial) e comum de todos os *outputs*.

Usando as relações (3.12a), o modelo da medida de Russell orientada para *inputs* pode ser transformado no modelo SBM orientado para *inputs*. Identicamente, usando as relações (3.12b), o modelo da medida de Russell orientada para *outputs* pode ser transformado no modelo SBM orientado para *outputs*. Então a medida de eficiência fornecida pelo modelo SBM orientado para *inputs* (*outputs*) é equivalente à medida de Russell orientada para *inputs* (*outputs*) (Tone 1997, 2001). De referir que, similarmente ao que acontece com as versões orientadas para *inputs* e para *outputs* do modelo SBM, e também do modelo aditivo, a versão orientada para *inputs* (*outputs*) da medida de Russell apenas contabiliza os desvios relativos aos *inputs* (*outputs*).

3.6 Modelo RAM

A medida SBM assim como a medida de Russell melhorada não são invariantes à translação, pelo que o seu uso fica limitado a dados com valores positivos nos *inputs* e nos *outputs*. Cooper, Parker e Pastor (1999) introduziram uma medida invariante à translação e também invariante às unidades como acontece com aquelas duas medidas. Trata-se de uma medida de escala ajustada, usualmente designada na literatura da DEA por RAM (*Range Adjusted Measure*), e é obtida através do seguinte modelo:

$$\max \frac{1}{m+s} \left(\sum_{i=1}^m \frac{s_{ik}^-}{R_i^-} + \sum_{r=1}^s \frac{s_{rk}^+}{R_r^+} \right) \quad (3.15a)$$

$$s. a. \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j + s_{ik}^- = x_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.15b)$$

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j - s_{rk}^+ = y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (3.15c)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \quad (3.15d)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.15e)$$

$$s_{ik}^- \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.15f)$$

$$s_{rk}^+ \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.15g)$$

Neste modelo, R_i^- e R_r^+ , presentes na função objetivo, são os parâmetros de escala, que representam a amplitude do intervalo de variação de cada *input* e de cada *output*, obtidos através das seguintes relações:

$$R_i^- = \bar{x}_i - \underline{x}_i \quad i = 1, \dots, m \quad (3.16a)$$

$$R_r^+ = \bar{y}_r - \underline{y}_r \quad r = 1, \dots, s \quad (3.16b)$$

onde

$$\bar{x}_i = \max_j \{x_{ij}\} \quad , \quad \underline{x}_i = \min_j \{x_{ij}\} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.17a)$$

$$\bar{y}_r = \max_j \{y_{rj}\} \quad , \quad \underline{y}_r = \min_j \{y_{rj}\} \quad r = 1, \dots, s \quad (3.17b)$$

O modelo (3.15) fornece uma medida de ineficiência, mais precisamente uma medida de ineficiência RAM da DMU_k. Essa medida é igual a zero se, e só se, todas as variáveis de desvio associadas aos *inputs* e aos *outputs* dessa DMU_k forem iguais a zero, e é igual a um se, e só se, $s_{ik}^{-*} = R_i^-$ e $s_{rk}^{+*} = R_r^+$, para todo o i e para todo o r . A correspondente medida de eficiência RAM, denotada por Γ_{RAM} é obtida fazendo

$$\Gamma_{RAM} = 1 - \frac{1}{m+s} \left(\sum_{i=1}^m \frac{s_{ik}^-}{R_i^-} + \sum_{r=1}^s \frac{s_{rk}^+}{R_r^+} \right) \quad (3.18)$$

Note-se que o mesmo resultado pode ser obtido substituindo (3.15a) por

$$\min \left(1 - \frac{1}{m+s} \left(\sum_{i=1}^m \frac{s_{ik}^-}{R_i^-} + \sum_{r=1}^s \frac{s_{rk}^+}{R_r^+} \right) \right) \quad (3.15a')$$

Esta medida fica bem definida depois de se remover os termos para os quais R_i^- ou R_r^+ são iguais a zero (Cooper, Park e Pastor (1999) e Cooper et al. (2011))

De referir ainda que o modelo que fornece a medida de ineficiência RAM pode ser visto como uma versão ponderada do modelo aditivo onde cada *input* e cada *output* é ponderado pelo inverso do produto de $m+s$ (da soma do número de *inputs* com o número de *outputs*) pelo correspondente parâmetro de escala. Estes ponderadores são dependentes do número de *inputs* e de *outputs* e dos respectivos valores, não representando juízos de valor definidos

pelo decisor, que obviamente comportam algum grau de subjetividade. O fator $(m + s)$ é introduzido a fim de calcular a média da soma das ineficiências.

Como se mostra em Cooper, Park e Pastor (1999), o modelo RAM apresentado anteriormente é invariante à translação porque inclui a restrição de convexidade (3.15d), que indicam que as DMUs operam sob a hipótese de retornos variáveis de escala e que, como se referiu anteriormente, é a chave para que tal propriedade ocorra.

Como se refere em Cooper, Pastor, Borras, Aparício e Pastor (2011), a medida de eficiência RAM apresenta duas desvantagens. Uma, é que apenas pode ser usada em modelos que consideram retornos variáveis de escala, uma vez que para outros tipos de retorno de escala não é possível garantir que varia entre 0 e 1. Por exemplo, num modelo para retornos constantes de escala, s_r^+ pode ter um valor muito maior do que o valor da correspondente faixa do *output* r . A outra, é que mostra um fraco poder de discriminação como é referido em Aida, Cooper, Pastor e Sueyoshi (1998) na sequência de resultados empíricos obtidos para 108 DMUs (empresas fornecedoras de água no Japão), em que a medida de eficiência RAM obteve valores que variam entre 0,978 e 1 ou, de outro modo, em que as ineficiências associadas são muito baixas, variando ente 0 e 0,022.

3.7 Modelos BAM

Cooper, Pastor, Borras, Aparício e Pastor (2011) introduziram uma medida com características similares à da medida RAM mas com mais poder de discriminação que designaram por BAM (*Bounded Adjusted Measure*). Tal é conseguido através da redução dos valores dos denominadores da medida de ineficiência RAM, em vez de considerar escalas (faixas) de *inputs* e de *outputs*, consideram-se escalas inferiores para *inputs* e escalas superiores para *outputs*.

Assim, os autores definem o parâmetro de escala inferior para o *input* i ($i = 1, \dots, m$) da DMU_k como

$$L_{ik}^- = x_{ik} - \underline{x}_i, \quad (3.19a)$$

em que \underline{x}_i é definido como em (3.17a).

Identicamente, definem o parâmetro de escala superior para o *output* r ($r = 1, \dots, s$) da DMU_k como

$$U_{rk}^+ = \bar{y}_r - y_{rk}, \quad (3.19b)$$

em que \bar{y}_r é definido como em (3.17b).

Note-se que o parâmetro de escala inferior para cada *input* depende apenas do limite inferior desse *input* e da DMU em avaliação, enquanto o parâmetro de escala superior de cada *output* depende apenas do limite superior de cada *output* e da DMU em avaliação. Observe-se ainda que o parâmetro de cada escala inferior ou superior é sempre menor ou igual que a correspondente parâmetro de escala para qualquer *input* ou *output*.

A medida de ineficiência BAM é obtida através do seguinte modelo:

$$\max \frac{1}{m+s} \left(\sum_{i=1}^m \frac{s_{ik}^-}{L_{ik}^-} + \sum_{r=1}^s \frac{s_{rk}^+}{U_{rk}^+} \right) \quad (3.20a)$$

$$s. a. \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j + s_{ik}^- = x_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.20b)$$

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j + s_{rk}^+ = y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (3.20c)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \quad (3.20d)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.20e)$$

$$s_{ik}^- \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.20f)$$

$$s_{rk}^+ \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.20g)$$

A correspondente medida de eficiência é dada por

$$\Gamma_{BAM} = 1 - \frac{1}{m+s} \left(\sum_{i=1}^m \frac{s_{ik}^-}{L_{ik}^-} + \sum_{r=1}^s \frac{s_{rk}^+}{U_{rk}^+} \right) \quad (3.21)$$

Note-se que se para uma DMU_k o *input* i satisfaz $x_{ik} = \underline{x}_i$ então não há espaço para melhorar, isto é, $s_{ik}^- = 0$. Neste caso toma-se, por convenção

$$\frac{s_{ik}^-}{L_{ik}^-} = 0.$$

Identicamente, se o *output* r satisfaz $y_{rk} = \bar{y}_r$, isto é, $s_{rk}^+ = 0$, e neste caso toma-se, por convenção

$$\frac{s_{rk}^+}{U_{rk}^+} = 0$$

Adotando as convenções anteriores, a medida de eficiência BAM, Γ_{BAM} , obtida através do modelo (3.20), fica bem definida (Cooper, Pastor, Borras, Aparício e Pastor, 2011). Como estes autores referem, esta medida foi inicialmente proposta por Pastor (1994) para tratar com dados negativos e surge mais tarde em Pastor e Ruiz (2007) também no contexto de dados negativos.

Com base nos quatro modelos aditivos limitados introduzidos por Cooper et al. (2011), estes autores propõem uma extensão do modelo BAM para retornos não variáveis de escala, isto é, para retornos constantes, não crescentes e não decrescentes.

O modelo que permite obter a medida de eficiência BAM para retornos constantes de escala é então dado por:

$$\Gamma_{BAM-CRS} = \min \left(1 - \frac{1}{m+s} \left(\sum_{i=1}^m \frac{s_{ik}^-}{L_{ik}^-} + \sum_{r=1}^s \frac{s_{rk}^+}{U_{rk}^+} \right) \right) \quad (3.22a)$$

$$s. a. \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j + s_{ik}^- = x_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.22b)$$

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j + s_{rk}^+ = y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (3.22c)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \geq 0 \quad (3.22d)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j \geq \underline{x}_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.22e)$$

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j \leq \bar{y}_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (3.22f)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.22g)$$

$$s_{ik}^- \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.22h)$$

$$s_{rk}^+ \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.22i)$$

No modelo anterior, a desigualdade (3.22d) é redundante na presença das desigualdades (3.22g) pelo que pode ser removida do modelo.

Os modelos que permitem obter a medida eficiência BAM para retornos não crescentes de escala, $\Gamma_{BAM-NIRS}$, para retornos não decrescentes de escala, $\Gamma_{BAM-NDRS}$, e para retornos variáveis de escala, $\Gamma_{BAM-VRS}$, obtêm-se do modelo (3.22) modificando a restrição (3.22d) e removendo as restrições sobre *inputs* e/ou sobre *outputs* em conformidade com o que foi feito para os modelos aditivos limitados apresentados na seção 3.3. Claramente que, para retornos variáveis de escala, o modelo (3.22) é o mesmo que (3.20).

4. Avaliação da eficiência das freguesias do concelho de Lisboa

4.1 Introdução

O presente capítulo tem como objetivo apresentar um estudo para avaliar o impacto, em termos de eficiência, decorrente da reorganização administrativa das freguesias do concelho de Lisboa ocorrida no ano de 2013. Para tal, será feita uma avaliação da eficiência relativa das freguesias nos anos de 2011 e 2015, de modo a garantir o idêntico espaço temporal antes e depois da referida reorganização. Para esta avaliação serão usados alguns dos modelos de eficiência radial e não radial da metodologia DEA apresentados nos capítulos 2 e 3 da presente dissertação.

Esta reorganização surgiu na sequência da crise económica e financeira vivida em Portugal, no ano de 2010, e na incapacidade do governo português em resolvê-la pelos seus próprios meios, tendo sido obrigado a pedir assistência financeira a três credores internacionais: o Fundo Monetário Internacional, o Banco Central Europeu e a Comissão Europeia. Deste pedido de ajuda, surgiram dois memorandos de entendimento: um com a Comissão Europeia e o Banco Central Europeu e outro com o Fundo Monetário Internacional. Estes três credores internacionais formam um grupo de decisão que é designado de “Troika”.

Estes memorandos estipulavam as reformas que o governo deveria realizar em diversas áreas para obter a ajuda financeira, sendo que esta seria libertada à medida que essas reformas iam sendo executadas. Entre as diversas áreas, a administração local foi uma das contempladas, surgindo com o principal propósito de aumentar a eficiência e a eficácia, na generalidade, da administração pública. Para tal, o governo desenvolveria um plano de consolidação para reorganizar e reduzir o número de municípios (308) e de freguesias (4259), a ser implementado no próximo ciclo eleitoral, que tinha como objetivo reforçar a prestação do serviço público, aumentar a eficiência e reduzir custos.

Neste sentido, o governo aprovou os princípios orientadores e os eixos estruturantes dessa reforma e elaborou um documento denominado de Documento Verde da Reforma da Administração Local, através de legislação criada para o efeito. Contudo, e lamentavelmente, essa reorganização focou-se apenas nas freguesias, deixando de fora os municípios cujo impacto na redução de custos seria substancialmente superior ao das freguesias devido à diferença de custos entre os respetivos executivos.

De referir, a título de exemplo, que a Grécia, no âmbito da reorganização do território ocorrida por motivos idênticos, reduziu o seu número de municípios em cerca de 69%. Por outro lado, esta reorganização, nomeadamente a alteração efetuada com a agregação, foi praticada em diversas áreas da administração pública como sejam a educação, a saúde e a justiça.

O restante deste capítulo encontra-se estruturado como se segue. Na seção 5.2, é feita uma breve apresentação da reorganização administrativa das freguesias do concelho de Lisboa ocorrida em 2013. Na seção 5.3, são apresentados os dados relativos aos *inputs* e *outputs* selecionados e é descrito o modo como esses dados foram obtidos, assim como os modelos selecionados para este estudo prático. Por fim, na seção 5.4, são apresentados os resultados obtidos e uma análise aos mesmos.

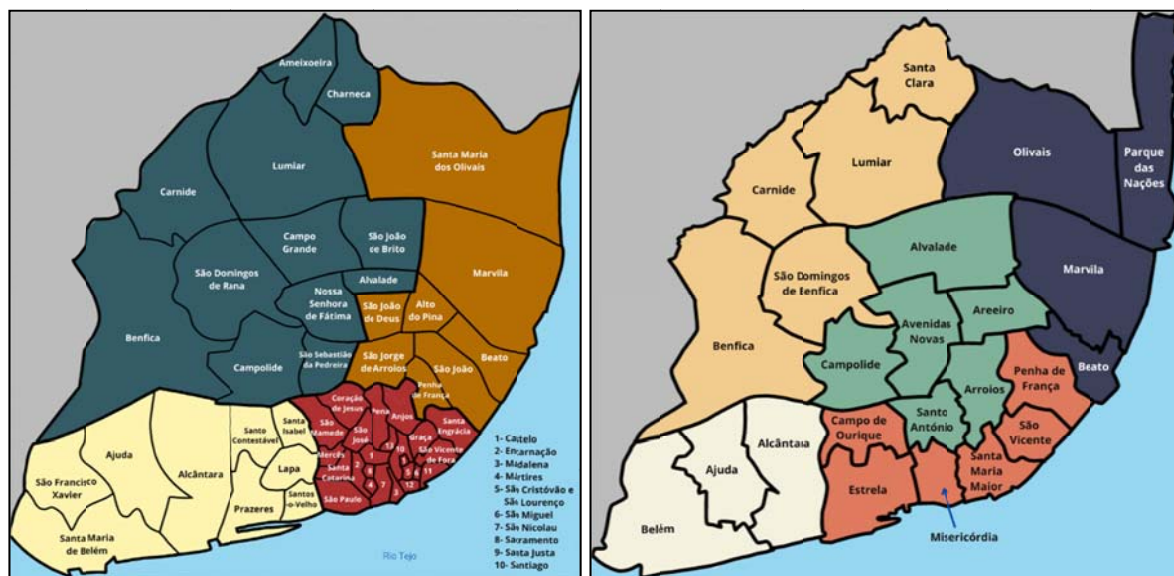
4.2 Reorganização das freguesias do concelho de Lisboa

Na sequência da assinatura dos memorandos de entendimento entre o governo português e a “Troika”, o concelho de Lisboa sofreu, no ano de 2013, uma reorganização administrativa do território das suas freguesias. Esta reorganização consistiu em agregar, delimitar e criar uma nova freguesia da cidade de Lisboa. Em consequência, o número de freguesias passou de 53 para 24, o que corresponde a uma redução de 53,7%. De referir que esta redução foi, em termos percentuais, quase o dobro da redução ocorrida a nível nacional (27,4% correspondente a uma diminuição de 4259 para 3091 freguesias).

A cidade de Lisboa passou a possuir um novo modelo de governação que concretiza princípios como a descentralização administrativa e subsidiariedade. Este modelo levou à distribuição de tarefas e responsabilidades entre o município e as freguesias de Lisboa.

As Juntas de Freguesias deste concelho viram assim reforçado o seu poder, tendo obtido acesso a mais recursos, a fim de melhorarem o serviço que têm de prestar aos cidadãos. Importa frisar que estas podem sempre contar com o apoio e colaboração da Câmara Municipal nesta grande missão. Cada uma das 24 freguesias do concelho de Lisboa passou a usufruir de competências próprias e de meios apropriados para o desenvolvimento da sua atividade e, concomitantemente, responder aos inúmeros desafios existentes nos seus territórios. Desta forma, o objetivo passava por melhorar o funcionamento interno da administração local e reforçar a atuação de cada uma das freguesias.

Na figura 4.1 apresentam-se dois mapas do concelho de Lisboa: um com as freguesias existentes antes da reorganização administrativa e outro com as atuais freguesias após a referida reorganização.



a)

b)

Figura 4.1 – Mapa da cidade de Lisboa: a) antes da reorganização administrativa; b) depois da reorganização administrativa.

Fonte: Elaboração própria.

Da observação da figura 4.1 verifica-se que a divisão da área territorial do concelho de Lisboa ficou mais equilibrada após a reorganização administrativa no ano de 2013.

Antes da reorganização administrativa, as 53 freguesias do concelho de Lisboa estavam agrupadas, para efeitos administrativos, em 4 bairros administrativos. Atualmente, após a reorganização administrativa, as 24 freguesias estão agrupadas em 5 zonas ou unidades de intervenção territorial. Estas unidades de intervenção territorial são compostas por equipas multidisciplinares, que intervêm no espaço público e equipamentos da respetiva área a que pertencem, identificam os problemas que possam existir e providenciam adequadamente para que sejam resolvidos pelos serviços operacionais da Câmara Municipal de Lisboa ou por outros.

Na tabela 4.1. apresenta-se a relação das freguesias existentes no concelho de Lisboa, antes e depois da reorganização administrativa ocorrida no ano de 2013, assim como tipo de alteração efetuada para obtenção das 24 freguesias que existem atualmente.

Tabela 4.1 – Relação das freguesias do concelho de Lisboa antes e depois da reorganização administrativa no ano de 2013 e alterações efetuadas

Freguesias antes de 2013	Freguesias depois de 2013	Alteração Efetuada
Ajudá	Ajudá	Alteração dos Limites
Alcântara	Alcântara	Alteração dos Limites
Ameixoeira Charneca	Santa Clara	Agregação das Freguesias
Beato	Beato	Alteração dos Limites
Benfca	Benfca	Alteração dos Limites
Alvalade Campo Grande São João de Brito	Alvalade	Agregação das Freguesias
Campolide	Campolide	Alteração dos Limites
Carnide	Carnide	Alteração dos Limites
Lapa Prazeres Santos-o-Velho	Estrela	Agregação das Freguesias
Lumiar	Lumiar	Alteração dos Limites
Marvila	Marvila	Alteração dos Limites
Anjos Pena São Jorge de Arroios	Arroios	Agregação das Freguesias
Penha de França São João	Penha de França	Agregação das Freguesias
Santa Maria de Belém São Francisco Xavier	Belém	Agregação das Freguesias
Santa Maria dos Olivais	Olivais	Alteração dos Limites
Santa Isabel Santo Condestável	Campo de Ourique	Agregação das Freguesias
São Domingos de Benfca	São Domingos de Benfca	Alteração dos Limites
Alto do Pina São João de Deus	Areeiro	Agregação das Freguesias
Coração de Jesus São José São Mamede	Santo António	Agregação das Freguesias

Freguesias antes do ano 2013	Freguesias depois do ano 2013	Alteração Efetuada
Encarnação Mercês Santa Catarina São Paulo	Misericórdia	Agregação das Freguesias
Nossa Senhora de Fátima São Sebastião da Pedreira	Avenidas Novas	Agregação das Freguesias
Graça Santa Engrácia São Vicente de Fora	São Vicente	Agregação das Freguesias
Castelo Madalena Mártires Sacramento Santa Justa Santiago Santo Estêvão São Cristóvão e São Lourenço São Miguel São Nicolau Sé Socorro	Santa Maria Maior	Agregação das Freguesias
	Parque das Nações	Nova Freguesia

Fonte: Elaboração própria.

Observando a tabela 4.1, constata-se que a maioria das alterações efetuadas inclui a agregação das freguesias, 43 das 53 freguesias existentes no ano de 2011 foram agregadas em apenas 13, a partir do ano de 2013.

As restantes 10 freguesias sofreram alterações dos seus limites territoriais, o que levou, em geral, a alterações nos valores da área e do número de habitantes. De referir que as alterações relativas ao número de habitantes podem também ser devidas a outros fatores. Estas freguesias estão identificadas na tabela 4.2, onde se apresenta a variação, em termos percentuais, ocorrida com a referida reorganização, da área e do número de habitantes, considerando os anos de 2011 e 2015. Como se pode observar através dessa tabela, apenas 6 das 10 freguesias tiveram uma variação significativa na área (Alcântara, Beato, Carnide,

Lumiar, Marvila e Olivais). Relativamente ao número de habitantes, pode considerar-se que apenas 3 tiveram variação significativa (Carnide, Lumiar e Olivais). De registar que existe uma freguesia que manteve a área e o número de habitantes, que é a freguesia de Campolide, sendo que esta apenas sofreu pequenos ajustes nos limites com as freguesias vizinhas. Por sua vez, a freguesia de Alcântara apenas manteve o número de habitantes, sofrendo alterações ao nível da área.

Tabela 4.2 – Variação da área e do número de habitantes relativos às freguesias que se mantiveram e sofreram alteração dos seus limites, após a reorganização administrativa, no ano de 2013.

Freguesias	Variação da área	Variação do número de habitantes
Ajuda	0,70%	0,21%
Alcântara	14,19%	0,00%
Beato	51,85%	2,48%
Benfica	1,13%	0,45%
Campolide	0,00%	0,00%
Carnide	-9,34%	-17,58%
Lumiar	7,53%	10,79%
Marvila	11,77%	-0,81%
Santa Maria dos Olivais/Olivais	-27,83%	-33,80%
São Domingos de Benfica	-0,46%	-2,08%

Fonte: Elaboração própria.

Adicionalmente, foi criada uma nova freguesia, a freguesia do Parque das Nações. Esta freguesia resultou da junção de áreas do território que pertenciam aos municípios de Lisboa (freguesia de Santa Maria dos Olivais) e ao município de Loures (freguesias de Moscavide e Sacavém). Em consequência, a freguesia de Santa Maria dos Olivais, que passou a designar-se de Freguesia dos Olivais, foi a freguesia que sofreu maiores alterações, considerando os dois parâmetros, área e número de habitantes.

4.3 Seleção dos dados e modelos

Para o presente estudo foram considerados os anos de 2011 e de 2015. A opção por estes dois períodos deveu-se, por um lado, a não realizar a avaliação no ano de 2014 onde a

reorganização poderia não estar a funcionar em pleno e, por outro, à dificuldade em obter dados relativamente ao ano de 2012.

Para a obtenção dos dados, contactou-se diretamente algumas entidades e freguesias e recorreu-se à informação pública disponível. A maioria dos dados foram disponibilizados pela Direção-Geral das Autarquias Locais (DGAL), contudo, encontrava-se em falta informação relativa a 25 das 53 freguesias que existiam no ano de 2011. Neste sentido, tornou-se inevitável o contacto direto com algumas freguesias, com o intuito de obter os dados em falta. Devido à ausência de resposta e à impossibilidade, por diversos motivos, das freguesias fornecerem os dados solicitados, recorreu-se ao Tribunal de Contas (TC). Foi ainda necessário recorrer ao Sistema de Informação da Organização do Estado (SIOE), para completar um *input*, e ao Instituto Nacional de Estatística (INE), para obter todos dados relativos aos *outputs*. De referir que o SIOE é uma base de dados pertencente à Direção-Geral da Administração e do Emprego Público (DGAEP) que caracteriza as entidades públicas e os respetivos recursos humanos.

Deste modo, foram selecionados três *inputs* e dois *outputs*. Relativamente aos *inputs*, foram considerados os seguintes:

- *Input* 1 - Número de trabalhadores
- *Input* 2 – Despesas correntes (em milhões/milhares de euros);
- *Input* 3 – Despesas de capital (em milhões/milhares de euros);

O número de trabalhadores reporta a 31 de dezembro do respetivo ano em análise e foi obtido através dos dados facultados pela DGAL, todavia, dada a ausência deste *input* em algumas das freguesias, tornou-se necessário completar com a informação disponível no SIOE.

As despesas correntes e as despesas de capital foram obtidas através dos dados disponibilizados pela DGAL e pelo TC. Estas despesas variam consoante a freguesia, todavia, no geral, as despesas correntes referem-se a despesas com pessoal, seguros, limpeza e higiene, material de escritório, encargos das instalações, ferramentas e utensílios; água, eletricidade, gás, entre outros, enquanto as despesas de capital se referem a gastos com equipamento informático e administrativo, software informático, viadutos, arruamentos e obras complementares, escolas, entre outros.

Em relação aos *outputs*, foram selecionados os seguintes:

- *Output 1* – Área (em metros quadrados);
- *Output 2* – Número de habitantes.

A área e o número de habitantes foram obtidos através do INE, sendo que este último teve por base os censos de 2011. Os censos caracterizam a população e o parque habitacional com o objetivo primordial de gerarem informação essencial para o desenvolvimento económico e social, sendo o tratamento destes dados recolhidos efetuado pelo INE.

Salienta-se que os dados relativos ao número de habitantes, no ano de 2011, foram apurados a partir da Carta Administrativa Oficial Portuguesa 2010, que foi a organização administrativa de base utilizada nos Censos 2011. Esta carta regista o estado da delimitação e demarcação das circunscrições administrativas do nosso país. Tendo ocorrido no ano de 2013 a reorganização administrativa de Lisboa, os dados relativos a este *output*, no ano de 2015, foram aqueles que tiveram por base a Carta Administrativa Oficial Portuguesa de 2013, criada após a reorganização administrativa.

As tabelas com os dados discriminados relativos aos *inputs* e *outputs* de cada freguesia para cada um dos anos em análise constam dos apêndices A e B. No apêndice A apresentam-se os dados relativos ao ano de 2011, enquanto no apêndice B apresentam-se os dados relativos ao ano de 2015. Nessas tabelas, da esquerda para a direita, nas duas primeiras colunas são identificadas as freguesias (DMUs) em avaliação, nas três colunas seguintes são apresentados os valores referentes aos *inputs* e, por fim, as últimas duas colunas apresentam-se os valores relativos aos *outputs*.

Para o presente estudo prático, foram utilizados modelos radiais CCR e BCC, orientados para *inputs*, e modelos não radiais SBM, SBM orientado para *inputs* e o BAM, considerando retornos constantes e retornos variáveis de escala.

4.4 Resultados e respetiva análise

Nesta seção apresentam-se os resultados obtidos com a aplicação dos modelos e dados selecionados, referidos na seção anterior, assim como uma análise aos mesmos. Para obter esses resultados, foram utilizados os *softwares* MaxDEA Basic 8.15 (versão gratuita), para obter a eficiência fornecida pelos modelos CCR, BCC, SBM e SBM orientado para *inputs*, e o módulo de programação linear, assim como o módulo OPL (*Optimization Programming Language*), do pacote CPLEX *Optimization Programming Studio Academic Research 12.5*, para obter a eficiência fornecida pelo modelo BAM.

As tabelas com os resultados obtidos são apresentadas em apêndice. Assim, nos apêndices C e D são apresentados os resultados considerando retornos constantes de escala para os anos de 2011 e 2015, respetivamente, enquanto nos apêndices E e F são apresentados os resultados considerando retornos variáveis de escala para os anos de 2011 e 2015, respetivamente. Nessas tabelas, da esquerda para a direita, nas duas primeiras colunas identificam-se as freguesias, enquanto nas quatro seguintes se apresentam os índices de eficiência obtidos pelos modelos selecionados.

Nas tabelas 4.3 e 4.4, apresentam-se os resultados globais relativos aos resultados apresentados no apêndice C e D, respetivamente, isto é, para retornos constantes de escala. Nessas tabelas, na primeira coluna indicam-se os tipos de resultados globais, na segunda, terceira, quarta e quinta coluna apresentam-se os valores desses resultados obtidos pelos modelos CCR orientado para *inputs*, SBM orientado para *inputs*, SBM e BAM, respetivamente.

Tabela 4.3 – Resultados globais para retornos constantes de escala relativos ao ano 2011

	CCR <i>Inputs</i>	SBM <i>Inputs</i>	SBM	BAM
N.º de Freguesias Eficientes	10	10	10	10
Percentagem de Freguesias Eficientes	18,86%	18,86%	18,86%	18,86%
Média Eficiência	0,6246	0,5198	0,4758	0,6776

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 4.4 – Resultados globais para retornos constantes de escala relativos ao ano 2015

	CCR <i>Inputs</i>	SBM <i>Inputs</i>	SBM	BAM
N.º de Freguesias Eficientes	6	6	6	6
Percentagem de Freguesias Eficientes	25,00%	25,00%	25,00%	25,00%
Média Eficiência	0,7995	0,7234	0,6577	0,7535

Fonte: Elaboração própria.

Como seria de esperar, o número de freguesias eficientes identificadas por cada modelo, e obviamente a percentagem correspondente, é o mesmo em cada uma das tabelas, isto é, em cada um dos anos em análise. Comparando os dois anos, verifica-se que a percentagem do número de freguesias eficientes aumentou de 18,86%, em 2011, para 25%, em 2015.

Relativamente à eficiência média fornecida por cada um dos modelos selecionados, verifica-se que esta é diferente em cada um dos anos em análise, como facilmente se pode observar no gráfico apresentado na figura 4.2, relativo à eficiência média constante das tabelas 4.3 e 4.4.

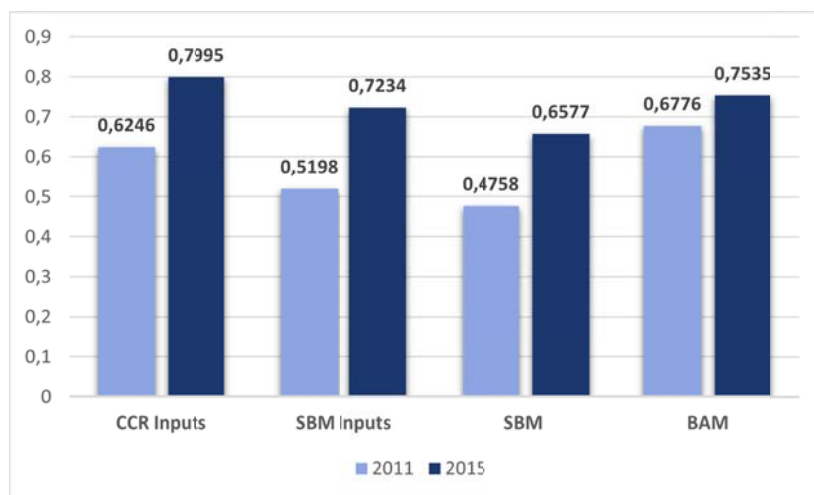


Figura 4.2 – Gráfico relativo à média global dos valores da eficiência fornecidos pelos modelos selecionados para retornos constantes de escala nos anos de 2011 e 2015

Fonte: Elaboração própria.

Da observação do gráfico verifica-se que para o ano de 2011, o menor valor da eficiência média é obtido pelo modelo SBM, enquanto o maior é obtido pelo modelo BAM. Para o ano de 2015, o menor valor continua a ser obtido pelo modelo SBM, no entanto, o maior é dado pelo modelo CCR orientado para *inputs*. Observa-se ainda que a eficiência média obtida por cada modelo no ano de 2015 é sempre superior à obtida no ano de 2011 pelo respetivo modelo. Para além disso é possível observar que a maior diferença é obtida pelo modelo SBM orientado para *inputs* enquanto a menor é obtida pelo modelo BAM. Em termos de média global houve um aumento de 0,5744 para 0,7335, isto é, um aumento de 20,70%.

Numa análise mais detalhada aos resultados apresentados nos apêndices C e D, verifica-se que, relativamente às 10 freguesias que não foram agregadas, das 4 eficientes no ano de 2011 (Alcântara, Campolide, Lumiar e Santa Maria dos Olivais), apenas 1 se manteve eficiente no ano de 2015, que foi a freguesia do Lumiar (18 no ano de 2011 e 14 no ano de 2015). Em contrapartida, existem 2 freguesias ineficientes no ano de 2011 que passaram a eficientes no ano de 2015, que são as freguesias da Ajuda e de Marvila. Neste universo de 10 freguesias houve então 1 freguesia que manteve o índice de eficiência, 5 que

aumentaram e 4 que diminuíram, sendo que, em termos médios, a eficiência aumentou de 0,7371 para 0,8004. Relativamente às 43 freguesias que sofreram uma agregação, verificou-se que, em termos médios, o aumento foi superior ao do caso anterior (de 0,5366 para 0,6616).

Nas tabelas 4.5 e 4.6, que seguem a estrutura das tabelas 4.3 e 4.4, apresentam-se os resultados globais relativos aos resultados apresentados nos apêndices E e F, isto é, para retornos variáveis de escala.

Tabela 4.5 – Resultados globais para retornos variáveis de escala relativos ao ano 2011

	BCC <i>Inputs</i>	SBM <i>Inputs</i>	SBM	BAM
N.º de Freguesias Eficientes	21	21	21	21
Percentagem de Freguesias Eficientes	39,62%	39,62%	39,62%	39,62%
Média Eficiência	0,8137	0,7012	0,6297	0,7786

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 4.6 – Resultados globais para retornos variáveis de escala relativos ao ano 2015

	BCC <i>Inputs</i>	SBM <i>Inputs</i>	SBM	BAM
N.º de Freguesias Eficientes	10	10	10	10
Percentagem de Freguesias Eficientes	41,66%	41,66%	41,66%	41,66%
Média Eficiência	0,8454	0,7801	0,7246	0,8183

Fonte: Elaboração própria.

Também neste caso, e como seria de esperar, o número de freguesias eficientes identificadas por cada modelo, e obviamente a percentagem correspondente, é o mesmo em cada um dos anos em análise. Contudo, comparando os dois anos, verifica-se que a percentagem do número de freguesias eficientes aumentou menos do que no caso em que se consideram retornos constantes de escala, passando de 39,62%, no ano de 2011, para 41,66%, no ano de 2015.

Relativamente à eficiência média fornecida por cada um dos modelos selecionados, verifica-se que, também neste caso, a mesma é diferente em cada um dos anos em análise,

como facilmente se pode observar no gráfico apresentado na figura 4.3, relativo à eficiência média constante das tabelas 4.5 e 4.6.

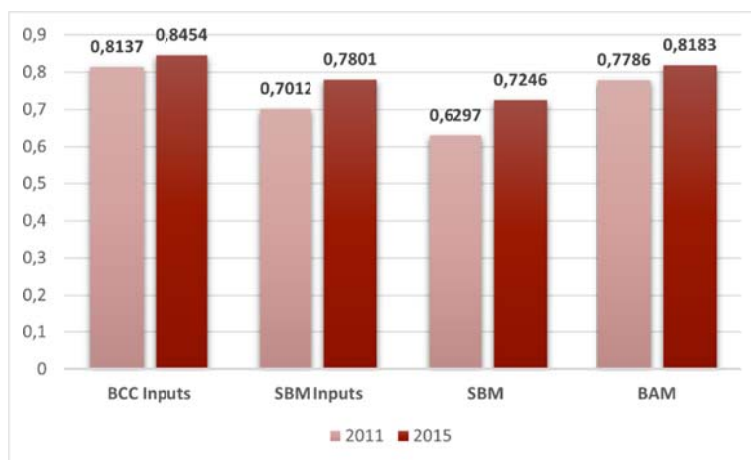


Figura 4.3 – Gráfico relativo à média global dos valores da eficiência fornecidos pelos modelos selecionados para retornos variáveis de escala nos anos de 2011 e 2015

Fonte: Elaboração própria.

Da observação do gráfico verifica-se que, neste caso, tanto para o ano de 2011 como para o ano de 2015, o menor valor da eficiência média é obtido pelo modelo SBM, enquanto o maior é obtido pelo modelo BCC orientado para *inputs*. Também neste caso se observa que a eficiência média obtida por cada modelo no ano de 2015 é sempre superior à obtida no ano de 2011 pelo respetivo modelo. Para além disso é possível observar que a maior diferença é obtida pelo modelo SBM, porém a menor é obtida pelo modelo BCC orientado para *inputs*. Neste caso, em termos de média global, houve um aumento de 0,7308 para 0,7921, isto é, um aumento de 8,39%.

Numa análise mais detalhada aos resultados apresentados nos apêndices E e F, semelhante à que foi feita para o caso de retornos constantes de escala, verifica-se que, relativamente às 10 freguesias que não foram agregadas, das 5 eficientes no ano de 2011 (Alcântara, Campolide, Lumiar, Olivais e São Domingos de Benfica), apenas 1 se manteve eficiente no ano de 2015, que foi a freguesia do Lumiar (18 no ano de 2011 e 14 no ano de 2015). Em contrapartida, existem 4 freguesias ineficientes no ano de 2011 que passaram a eficientes no ano de 2015 que são as freguesias da Ajuda, Beato, Benfica e Marvila. Neste universo de 10 freguesias, as restantes 5 freguesias tiveram uma diminuição no índice de eficiência, sendo que, em termos médios, a eficiência aumentou de 0,7843 para 0,8773. Relativamente às 43 freguesias que sofreram agregação, verificou-se que neste caso houve uma redução média

global muito pouco significativa (de 0,7184 para 0,7106), devida aos resultados obtidos pelos modelos BCC orientado para *inputs* e BAM.

Da análise acabada de fazer, conclui-se que a reorganização administrativa do concelho de Lisboa ocorrida no ano de 2013 teve um impacto positivo na eficiência das suas freguesias, sendo que esse impacto foi maior quando se consideram retornos constantes de escala em vez de retornos variáveis de escala.

5. Conclusões

Neste trabalho foi apresentado um estudo sobre modelos clássicos ou radiais e modelos não radiais da metodologia DEA para calcular a eficiência relativa de um conjunto de DMUs homogêneas. Em ambos os modelos podem ser considerados os dois tipos de retorno de escala mais usuais: retornos constantes de escala ou retornos variáveis de escala. Os modelos radiais podem ser orientados para *inputs* ou para *outputs*, enquanto os modelos não radiais podem também ser não orientados, isto é, combinar aqueles dois tipos de orientação.

Nos modelos clássicos ou radiais, o valor da eficiência reflete a redução (expansão) comum e proporcional de todos os *inputs* (*outputs*) mantendo os *outputs* (*inputs*) quando orientados para *inputs* (*outputs*). Este valor ignora as ineficiências devidas a desvios associados aos excessos de *input* ou aos défices de *output*, sendo assim uma medida incompleta por não encorpar todas as ineficiências que os modelos podem identificar. Uma DMU eficiente por estes modelos pode ser fortemente eficiente (eficiente segundo Pareto-Koopmans) ou fracamente eficiente (eficiente segundo Farrell).

Por outro lado, nos modelos não radiais (não orientados), o valor da eficiência é obtido através dos desvios associados aos excessos de *input* e aos défices de *output*. A medida de eficiência obtida é uma medida completa uma vez que contabilizam todas as ineficiências que os modelos podem identificar. Note-se que o mesmo não acontece com os modelos não radiais orientados para *inputs* ou para *outputs* que apenas contabilizam as ineficiências relativas aos *inputs* ou aos *outputs*, respetivamente, fornecendo assim uma medida de eficiência incompleta. Como se viu, apesar de não fornecer uma medida de eficiência, uma vez que apenas permite discriminar DMUs eficientes das não eficientes, o modelo aditivo tem desempenhado um importante papel no desenvolvimento de modelos não radiais.

O estudo teórico apresentado nos capítulos 2 e 3 sobre modelos radiais e não radiais, respetivamente, foi usado para o estudo prático apresentado no capítulo 4. Este estudo prático teve por objetivo avaliar o impacto, em termos de eficiência, obtido com a reorganização administrativa das freguesias do concelho de Lisboa, ocorrida no ano de 2013. Esta reorganização consistiu essencialmente na agregação, alteração dos limites e a criação de uma nova freguesia, passando o número de freguesias de 53 para 24. Para avaliar esse impacto foram considerados os anos de 2011 e 2015 e foram usados os modelos

radiais CCR e BCC, orientados para *inputs*, e os modelos não radiais SBM, orientado para *inputs* e não orientado, e BAM.

Os resultados obtidos mostram que no ano de 2015 o número de freguesias eficientes aumentou em termos percentuais em relação ao ano de 2011, quer sob retornos constantes de escala, quer sob retornos variáveis de escala, sendo mais expressivo no primeiro caso. Esses resultados mostram também que, para cada modelo, a média das eficiências obtida no ano de 2015 é sempre superior à obtida no ano de 2011 e que a diferença é maior quando se consideram retornos constantes de escala em vez de retornos variáveis de escala. Em termos globais, isto é, considerando a média das médias obtidas por cada modelo, verificou-se que, para retornos constantes de escala, no ano de 2015 há um aumento de 15,91% relativamente ao ano de 2011. Para retornos variáveis de escala, esse aumento foi de 6,13%.

Da análise dos resultados, conclui-se que a reorganização administrativa operada nas freguesias do concelho de Lisboa no ano de 2013 teve um impacto positivo na eficiência das mesmas, isto é, as freguesias passaram a ser mais eficientes. Esse impacto foi maior quando se consideram retornos constantes de escala do que quando se consideram retornos variáveis de escala.

Referências Bibliográficas

- Aida, K., Cooper, W.W., Pastor, J.T., & Sueyoshi, T. (1998). Evaluating water supply services in Japan with Ram: a range-adjusted measure of inefficiency. *OMEGA*, 26(2), 207–232.
- Ali, A.I., & Seiford, L.M. (1990a). Computational Accuracy and Infinitesimals in Data Envelopment Analysis. *INFOR: Information Systems and Operational Research*, 31, 290-297.
- Ali, A.I., & Seiford, L.M. (1990b). Translation Invariance in Data Envelopment Analysis. *Operations Research Letters*, 9, 403-405.
- Ali, A.I., & Seiford, L.M. (1993). The mathematical programming approach to efficiency analysis. Chapter 3. In: Fried HO, Lovell CAK, Schmidt SS (eds) *The measurement of productive efficiency*. Oxford University Press, New York.
- Banker, R. D., Charnes, A., & Cooper, W. W. (1984). Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. *Management science*, 30(9).
- Charnes, A., & Cooper, W. W. (1962). Programming with linear fractional functionals. *Naval Research Logistics (NRL)*, 9, 181-185.
- Charnes, A., Cooper, W.W., & Rhodes, E. (1978). Measuring the Efficiency of Decision Making Units. *European Journal of Operational Research*, Vol. 2, n.º 6.
- Charnes, A., Cooper, W.W., Lewin, A., Morey, R., & Rousseau, J. (1981). *Data Envelopment Analysis: A Non-Archimedean and Robustness Calculus*. Gradual School and Business Administration: Duke University.
- Charnes, A., Cooper, W.W., Golany, B., Seiford, L., & Stutz, J. (1985). *Foundations of Data Envelopment Analysis for Pareto-Koopmans Efficient Empirical Production Functions*. Center for Cybernetic Studies: University of Texas.
- Coelli, T.J., Rao, D.S., O'Donnell, C.J., & Battese, G.E. (2005). *An Introduction to efficiency and productivity Analysis – 2ª ed.*, London, Springer Science Business Media, Inc. ISBN-10:0-387-24266-X.

Cook, W. D., & Seiford, L. M. (2009). Data envelopment analysis (DEA)-Thirty years on. *European Journal of Operational Research*, 192(1), 1-17.

Cooper, W.W., Park, K., & Pastor, J. (1999). RAM: A Range Adjusted Measure of Inefficiency for Use with Additive Models, and Relations to Other Models and Measures in DEA. *Journal of Productivity Analysis*, 11, 5–42.

Cooper, W.W., Seiford, L., & Tone, K. (2007). Data envelopment analysis: A comprehensive text with models, applications, references and DEA – Solver software. *New York: Springer Science + Business Média*.

Cooper, W. W., Seiford, L. M., Tone, K., & Zhu, J. (2007). Some models and measures for evaluating performances with DEA: past accomplishments and future prospects. *Journal of Productivity Analysis*, 28(3).

Cooper, W. W., Seiford, L. M., & Zhu, J. (Eds.). (2011). Handbook on data envelopment analysis (Vol. 164). *Springer Science & Business Média*.

Cooper, W. W., Pastor, J.T., Borras, F., Aparicio, J., & Pastor, D. (2011). BAM: A bounded adjusted measure of efficiency for use with bounded additive models. *Journal of Productivity Analysis*, 35, 85-94.

Färe, R., & Lovell, C. K. (1978). Measuring the technical efficiency of production. *Journal of Economic theory*, 19(1).

Färe, R., Grosskopf, S., & Lovell, C. (1985). *The Measurement of Efficiency of Production*. Boston: Kluwer Academic Publishers Group.

Färe, R., & Hunsaker, W. (1986). Notions of Efficiency and Their Reference Sets. *Management Science*, 32(2), 237-243.

Farrell, M. (1957). The measurement of productive efficiency. *Journal of the Royal Statistical Society*, 120.

Instituto Nacional de Estatística (INE), consultado em: https://www.ine.pt/xportal/xmain?xpid=INE&xpgid=ine_main, 13 de dezembro de 2020.

Pastor, J.T. (1994). New Additive Models for handling Zero and Negative Data. Working Paper, Depto. Estad. e Inv. Oper., Universidad de Alicante, Spain.

Pastor, J.T., Ruiz, J.L., & Sirvent, I. (1999). Theory and Methodology: An enhanced DEA Russell graph efficiency measure. *European Journal of Operational Research*, 115, 596-607.

Pastor, J.T., & Ruiz, J.L. (2007). Variables with Negative Values in Dea, Chapter 4. In: Cook WD, Zhu J (eds) Modelling data irregularities and structural complexities in data envelopment analysis. Springer, USA.

Sistema de Informação da Organização do Estado (SIOE): Sistema de Informação de Organização do Estado (SIOE), Contas Nacionais, consultado em, <https://www.sioe.dgaep.gov.pt/Default.aspx>, 13 de dezembro de 2020.

Tone, K. (1997). DEA with controllable category levels. In *Proceedings of the Spring National Conference of the Operations Research Society of Japan*. Tokyo: Tokyo Institute of Technology.

Tone, K. (2001). A slacks-based measure of efficiency in data envelopment analysis. *European journal of operational research*, 130(3).

APÊNDICES

APÊNDICE A – *Inputs e Outputs* relativos às 53 freguesias de Lisboa no ano de 2011

Freguesia	N.º de trabalhadores	Despesas correntes	Despesas de capital	Área (m ²)	N.º de habitantes
01 Ajuda	15	862870	162206	2860000	15584
02 Alcântara	19	908866	51011	4440000	13943
03 Alto do Pina	4	419727	79639	840000	10333
04 Alvalade	3	358012	1333	600000	8869
05 Ameixoeira	15	657693	50404	1600000	11863
06 Anjos	10	549368	7645	490000	9361
07 Beato	10	755043	108666	1620000	12429
08 Benfca	50	2992757	591145	7940000	36821
09 Campo Grande	11	444149	202072	2450000	10514
10 Campolide	9	913173	16470	2770000	15460
11 Carnide	44	1236439	92912	4070000	23316
12 Castelo	2	75111	79556	60000	355
13 Charneca	7	535375	29646	1720000	9935
14 Coração de Jesus	4	286068	444	560000	3689
15 Encarnação	3	324102	1374	190000	2252
16 Graça	17	787276	6610	350000	5787
17 Lapa	14	650460	7038	740000	8000
18 Lumiar	27	1388661	149912	6110000	41163
19 Madalena	3	161770	1	120000	393
20 Mártires	2	145116	885	100000	372
21 Marvila	17	1652357	517360	6370000	38102
22 Mercês	7	345179	63411	270000	4345
23 Nossa Senhora de Fátima	4	614667	20158	1910000	15283
24 Santa Maria dos Olivais	14	1849358	402462	11210000	51036
25 Pena	2	275675	20789	500000	4486
26 Penha de França	10	603361	1895	680000	12780
27 Prazeres	8	473837	33177	1570000	8096

Freguesia	N.º de trabalhadores	Despesas correntes	Despesas de capital	Área (m²)	N.º de habitantes
28 Sacramento	4	150165	2542	90000	742
29 Santa Catarina	5	297801	1086	210000	3716
30 Santa Engrácia	11	437284	9806	550000	5249
31 Santa Isabel	4	373963	37166	630000	6875
32 Santa Justa	6	107089	16425	250000	891
33 Santa Maria de Belém	5	698877	112562	3430000	8541
34 Santiago	3	151659	1973	60000	619
35 Santo Condestável	9	1055480	4262	1030000	15257
36 Santo Estevão	6	297343	7458	230000	1511
37 Santos-o-Velho	11	354226	38417	530000	4020
38 São Cristóvão e São Lourenço	4	255013	4544	80000	1341
39 São Domingos de Benfica	30	1505610	84209	4310000	33745
40 São Francisco Xavier	7	392482	53913	2300000	8020
41 São João	24	901289	122349	1510000	15187
42 São João de Brito	5	507665	87626	2230000	11727
43 São João de Deus	11	852862	16605	920000	9798
44 São Jorge de Arroios	8	630103	3988	1160000	18415
45 São José	10	234855	6338	330000	2746
46 São Mamede	5	235307	43997	610000	5420
47 São Miguel	4	266200	2465	50000	1531
48 São Nicolau	2	146242	4173	260000	1231
49 São Paulo	6	297398	2502	440000	2728
50 São Sebastião da Pedreira	12	351412	9886	1080000	6342
51 São Vicente de Fora	14	456395	12364	320000	3539
52 Sé	5	203189	14399	120000	910
53 Socorro	6	338824	1338	110000	3065

Fonte: Elaboração própria.

APÊNDICE B – *Inputs e Outputs* relativos às 24 freguesias no ano de 2015

Freguesia	N.º de trabalhadores	Despesas correntes	Despesas de capital	Área (m ²)	Nº de habitantes
01 Ajuda	39	2014494	8016	2880000	15617
02 Alcântara	46	2909581	58255	5070000	13943
03 Alvalade	78	4023769	379572	5340000	31813
04 Arceiro	49	2644238	570922	1740000	20131
05 Arroios	64	3947441	624854	2130000	31653
06 Avenidas Novas	79	3985154	382992	2990000	21625
07 Beato	27	1409890	290954	2460000	12737
08 Belém	64	3966416	153280	10430000	16528
09 Benfica	103	6241210	810879	8030000	36985
10 Campo de Ourique	55	3031428	14414	1650000	22120
11 Campolide	38	2532903	293999	2770000	15460
12 Carnide	90	3222370	420684	3690000	19218
13 Estrela	51	3470141	166849	4600000	20128
14 Lumiar	81	4328326	578335	6570000	45605
15 Marvila	88	3424600	729832	7120000	37793
16 Misericórdia	66	3181520	174920	2190000	13044
17 Olivais	103	6013604	561640	8090000	33788
18 Parque das Nações	35	4147931	113580	5440000	21025
19 Penha de França	65	2459957	151428	2710000	27967
20 Santa Clara	39	3145065	234331	3360000	22480
21 Santa Maria Maior	100	5596884	376782	3010000	12822
22 Santo António	57	3174449	87767	1490000	11836
23 São Domingos Benfica	64	3405270	488593	4290000	33043
24 São Vicente	66	2601077	213384	1990000	15339

Fonte: Elaboração própria.

APÊNDICE C – Índices de eficiência para retornos constantes de escala no ano de 2011

DMU	CCR <i>Inputs</i>	SBM <i>Inputs</i>	SBM	BAM
01 Ajuda	0,6315	0,4929	0,4530	0,6675
02 Alcântara	1	1	1	1
03 Alto do Pina	0,8724	0,6125	0,47275	0,6936
04 Alvalade	1	1	1	1
05 Ameixoeira	0,6409	0,4462	0,4301	0,6340
06 Anjos	0,5824	0,3962	0,3456	0,5910
07 Beato	0,5697	0,3927	0,3874	0,5944
08 Benfica	0,4532	0,3745	0,3249	0,3078
09 Campo Grande	0,9100	0,5412	0,5252	0,6858
10 Campolide	1	1	1	1
11 Carnide	0,7759	0,5496	0,4982	0,6865
12 Castelo	0,1629	0,0828	0,0740	0,7963
13 Charneca	0,8178	0,7267	0,6279	0,7856
14 Coração de Jesus	1	1	1	1
15 Encarnação	0,3269	0,3112	0,2889	0,4888
16 Graça	0,2514	0,1812	0,1710	0,4702
17 Lapa	0,4974	0,3705	0,3314	0,5888
18 Lumiar	1	1	1	1
19 Madalena	1	1	1	1
20 Mártires	0,3057	0,2663	0,1223	0,7083
21 Marvila	0,8157	0,5995	0,5852	0,6125
22 Mercês	0,4247	0,2384	0,1681	0,4588
23 Nossa Senhora de Fátima	1	1	1	1
24 Santa Maria dos Olivais	1	1	1	1
25 Pena	0,6290	0,5026	0,4796	0,7439
26 Penha de França	0,9816	0,8029	0,6724	0,8483
27 Prazeres	0,7636	0,6637	0,5517	0,7491

DMU	CCR <i>Inputs</i>	SBM <i>Inputs</i>	SBM	BAM
28 Sacramento	0,2219	0,1669	0,1310	0,4631
29 Santa Catarina	0,5124	0,4231	0,3852	0,5794
30 Santa Engrácia	0,4654	0,3343	0,2943	0,5468
31 Santa Isabel	0,6430	0,4619	0,4042	0,5659
32 Santa Justa	0,3957	0,2819	0,1999	0,4257
33 Santa Maria de Belém	0,9585	0,9436	0,6104	0,9140
34 Santiago	0,1654	0,1283	0,1106	0,4744
35 Santo Condestável	0,5796	0,5650	0,5644	0,7082
36 Santo Estevão	0,2449	0,1933	0,1481	0,4488
37 Santos-o-Velho	0,3829	0,2410	0,2362	0,4933
38 São Cristóvão e São Lourenço	0,1796	0,1233	0,1156	0,4411
39 São Domingos de Benfica	0,8339	0,5863	0,5810	0,7102
40 São Francisco Xavier	1	1	1	1
41 São João	0,5685	0,3180	0,2975	0,5698
42 São João de Brito	0,8288	0,7605	0,7405	0,8029
43 São João de Deus	0,4299	0,3608	0,3308	0,5783
44 São Jorge de Arroios	1	1	1	1
45 São José	0,4740	0,3171	0,2682	0,5277
46 São Mamede	0,7771	0,4517	0,4336	0,5953
47 São Miguel	0,1967	0,1517	0,0988	0,4576
48 São Nicolau	0,5034	0,4596	0,3053	0,7161
49 São Paulo	0,6172	0,4730	0,3231	0,6189
50 São Sebastião da Pedreira	0,9159	0,6726	0,6587	0,7747
51 São Vicente de Fora	0,2766	0,1791	0,1684	0,4593
52 Sé	0,1605	0,1091	0,1065	0,4128
53 Socorro	0,3596	0,2941	0,1952	0,5150

Fonte: Elaboração própria.

APÊNDICE D – Índices de eficiência para retornos constantes de escala no ano de 2015

DMU	CCR <i>Inputs</i>	SBM <i>Inputs</i>	SBM	BAM
01 Ajuda	1	1	1	1
02 Alcântara	0,9418	0,9066	0,8612	0,8896
03 Alvalade	0,8361	0,6975	0,6765	0,8015
04 Areeiro	0,7293	0,6051	0,3859	0,6219
05 Arroios	0,8710	0,7378	0,4061	0,7526
06 Avenidas Novas	0,5396	0,4708	0,3629	0,5858
07 Beato	0,9645	0,8213	0,8198	0,8938
08 Belém	1	1	1	1
09 Benfica	0,7299	0,5994	0,5832	0,4774
10 Campo de Ourique	0,9951	0,9444	0,5419	0,8730
11 Campolide	0,7317	0,6114	0,5776	0,6031
12 Carnide	0,6097	0,4497	0,4327	0,5923
13 Estrela	0,8405	0,6813	0,6813	0,7787
14 Lumiar	1	1	1	1
15 Marvila	1	1	1	1
16 Misericórdia	0,4569	0,3536	0,3370	0,4532
17 Olivais	0,7090	0,5907	0,5870	0,5297
18 Parque das Nações	1	1	1	1
19 Penha de França	1	1	1	1
20 Santa Clara	0,9959	0,9663	0,8402	0,9494
21 Santa Maria Maior	0,2957	0,2384	0,2364	0,4446
22 Santo António	0,4695	0,3562	0,2891	0,4133
23 São Domingos Benfica	0,9202	0,8715	0,8110	0,9000
24 São Vicente	0,5527	0,4593	0,3558	0,5245

Fonte: Elaboração própria.

APÊNDICE E – Índices de eficiência para retornos variáveis de escala no ano de 2011

DMU	BCC <i>Inputs</i>	SBM <i>Inputs</i>	SBM	BAM
01 Ajuda	0,6849	0,5148	0,4690	0,6696
02 Alcântara	1	1	1	1
03 Alto do Pina	0,9580	0,6234	0,5947	0,7340
04 Alvalade	1	1	1	1
05 Ameixoeira	0,6990	0,4609	0,4301	0,6441
06 Anjos	0,6682	0,3984	0,3490	0,5925
07 Beato	0,6197	0,4098	0,3874	0,6056
08 Benfica	0,4534	0,3780	0,3704	0,3078
09 Campo Grande	1	1	1	1
10 Campolide	1	1	1	1
11 Carnide	0,7759	0,6369	0,6330	0,7743
12 Castelo	1	1	1	1
13 Charneca	0,8589	0,7536	0,6570	0,8032
14 Coração de Jesus	1	1	1	1
15 Encarnação	0,7401	0,6151	0,3110	0,6812
16 Graça	0,3477	0,2230	0,1710	0,4970
17 Lapa	0,5446	0,3832	0,3441	0,5935
18 Lumiar	1	1	1	1
19 Madalena	1	1	1	1
20 Mártires	1	1	1	1
21 Marvila	0,8181	0,6567	0,5864	0,6198
22 Mercês	0,5962	0,3551	0,1983	0,5401
23 Nossa Senhora de Fátima	1	1	1	1
24 Santa Maria dos Olivais	1	1	1	1
25 Pena	1	1	1	1
26 Penha de França	1	1	1	1
27 Prazeres	0,8235	0,7064	0,5996	0,7764

	DMU	BCC Inputs	SBM Inputs	SBM	BAM
28	Sacramento	0,9666	0,7085	0,4853	0,7252
29	Santa Catarina	0,7816	0,6278	0,3931	0,7081
30	Santa Engrácia	0,5991	0,3649	0,2943	0,5761
31	Santa Isabel	0,7873	0,5484	0,4815	0,6586
32	Santa Justa	1	1	1	1
33	Santa Maria de Belém	1	1	1	1
34	Santiago	0,9579	0,7097	0,4215	0,6949
35	Santo Condestável	0,7731	0,6875	0,6752	0,7889
36	Santo Estevão	0,5217	0,3856	0,1720	0,5483
37	Santos-o-Velho	0,5727	0,3467	0,2646	0,5551
38	São Cristóvão e São Lourenço	0,6181	0,4663	0,1558	0,5560
39	São Domingos de Benfica	1	1	1	1
40	São Francisco Xavier	1	1	1	1
41	São João	0,5992	0,3187	0,2975	0,5703
42	São João de Brito	0,9533	0,8586	0,8529	0,8934
43	São João de Deus	0,4694	0,3612	0,3537	0,5784
44	São Jorge de Arroios	1	1	1	1
45	São José	0,7880	0,4548	0,3971	0,6327
46	São Mamede	1	1	1	1
47	São Miguel	0,6394	0,5099	0,1185	0,5919
48	São Nicolau	1	1	1	1
49	São Paulo	0,7748	0,5328	0,3754	0,6712
50	São Sebastião da Pedreira	1	1	1	1
51	São Vicente de Fora	0,4486	0,2569	0,1684	0,5076
52	Sé	0,6489	0,4189	0,1724	0,5470
53	Socorro	0,6368	0,4915	0,1952	0,6225

Fonte: Elaboração própria.

APÊNDICE F – Índices de eficiência para retornos variáveis de escala no ano de 2015

DMU	BCC <i>Inputs</i>	SBM <i>Inputs</i>	SBM	BAM
01 Ajuda	1	1	1	1
02 Alcântara	0,9738	0,9259	0,8627	0,9195
03 Alvalade	0,8365	0,8342	0,7759	0,8629
04 Areeiro	0,7955	0,6397	0,4050	0,7025
05 Arroios	0,8799	0,7481	0,4095	0,7647
06 Avenidas Novas	0,5786	0,4818	0,3850	0,6020
07 Beato	1	1	1	1
08 Belém	1	1	1	1
09 Benfica	1	1	1	1
10 Campo de Ourique	1	1	1	1
11 Campolide	0,8100	0,6318	0,5981	0,7174
12 Carnide	0,6506	0,4782	0,4477	0,6017
13 Estrela	0,8513	0,7631	0,7631	0,7970
14 Lumiar	1	1	1	1
15 Marvila	1	1	1	1
16 Misericórdia	0,5714	0,4233	0,3370	0,4972
17 Olivais	0,7198	0,7105	0,7101	0,7838
18 Parque das Nações	1	1	1	1
19 Penha de França	1	1	1	1
20 Santa Clara	1	1	1	1
21 Santa Maria Maior	0,3450	0,2627	0,2368	0,4488
22 Santo António	0,6479	0,4700	0,2891	0,4950
23 São Domingos Benfica	0,9456	0,8861	0,8134	0,9062
24 São Vicente	0,6847	0,4677	0,3582	0,5401

Fonte: Elaboração própria.