



**INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DE LISBOA**

**Área Departamental de Engenharia Civil**



## **Avaliação em Tempo Real de Forças em Cabos**

**BRUNO GONÇALO NALHA DIAS CAEIRO**  
(Licenciado em Engenharia Civil)

Dissertação elaborada para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil na área de especialização de Estruturas pelo Instituto Superior de Engenharia de Lisboa

**Orientadores:**

Doutora Xu Min, Investigadora Auxiliar, Departamento de Estruturas, LNEC  
Doutor Luís Oliveira Santos, Eq. Professor Adjunto, ADEC, ISEL

**Júri:**

Presidente: Mestre Cristina Ferreira Xavier Brito Machado, Professora  
Coordenadora, ADEC, ISEL

**Vogais:**

Doutor Paulo Jorge Henriques Mendes, Professor Auxiliar, ADEC,  
ISEL

Doutora Xu Min, Investigadora Auxiliar, Departamento de Estruturas, LNEC

**Dezembro de 2014**



# **Avaliação em Tempo Real de Forças em Cabos**

**BRUNO GONÇALO NALHA DIAS CAEIRO**  
(Licenciado em Engenharia Civil)

Dissertação elaborada para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil na área de especialização de Estruturas pelo Instituto Superior de Engenharia de Lisboa

**Orientadores:**

Doutora Xu Min, Investigadora Auxiliar, Departamento de Estruturas, LNEC  
Doutor Luís Oliveira Santos, Eq. Professor Adjunto, ADEC, ISEL

**Júri:**

Presidente: Mestre Cristina Ferreira Xavier Brito Machado, Professora Coordenadora,  
ADEC, ISEL

**Vogais:**

Doutor Paulo Jorge Henriques Mendes, Professor Auxiliar, ADEC, ISEL  
Doutora Xu Min, Investigadora Auxiliar, Departamento de Estruturas, LNEC

**Dezembro de 2014**



## *Dedicatória*

Aos meus avós Fernando Nalha e  
Aurelina Nalha, pais João e  
Maria João, irmã Joana e sobrinha  
Carolina.



## *Agradecimentos*

Aos meus orientadores Dr.<sup>a</sup> Eng.<sup>a</sup> Xu Min e Dr.<sup>o</sup> Eng.<sup>o</sup> Luís Oliveira Santos, por toda a disponibilidade, paciência e dedicação que tiveram para comigo, mesmo em alturas em que o trabalho era abundante.

Ao LNEC por ter disponibilizados os dados para os estudos efetuados nesta dissertação, e a todo o pessoal dessa instituição que sempre se disponibilizou para ajudar em qualquer ocasião.

Ao ISEL pelas condições que foram dadas para a realização deste trabalho final de mestrado.

Aos meus pais, João e Maria João, pelo esforço e dedicação de todos os dias para criar todas as condições de vida e de trabalho, mesmo em alturas mais complicadas. A eles devo tudo o que sou. Muito obrigado!

À minha irmã, Joana, pelas discussões e algumas palavras ditas na devida altura que me fizeram levantar a cabeça em momentos menos bons.

À minha sobrinha, Carolina, pelas gargalhadas dadas mesmo naqueles dias mais difíceis devido ao cansaço.

Aos meus avós, Fernando Nalha e Aurelina Nalha, que sempre acreditaram em mim em momentos mais difíceis da vida académica e pessoal. Muito obrigado pela educação que me foi dada por vós!

Não poderia deixar de agradecer aos meus amigos de uma vida: Dário Ferreira, Ivan Costa e Hugo Rodrigues que sempre me apoiaram nas boas e nas más decisões.

Aos amigos que fiz durante a minha vida académica no ISEL: Ricardo Batalha, Andreia Silva, Hugo Pinto, Pedro Moutinho, Edgar Ribeiro, Diogo Mendes, Cátia Larose, entre outros.

Quero agradecer também aos meus amigos de longa data: Ana Sofia Carlos, Vanessa Fernandes, João António, Hugo Dias e David Santos pelas aventuras que tivemos em conjunto, pelos choros e pelos risos.

Ao Daniel Correia, meu amigo e companheiro de mestrado, que me acompanhou na maioria dos trabalhos desenvolvidos no âmbito do curso, pelas noites passadas no ISEL a trabalhar e pelo apoio que sempre me foi dado.

À Ana Rute Machado pelas horas à conversa, pelos bons momentos passados juntos, pelos conselhos, pelo teu ombro amigo e pelo incentivo que me deste.

À Ana Patrícia Calado pelas gargalhadas partilhadas enquanto se faziam trabalhos no ISEL e pelos grandes jantares na tua casa.

Aos meus afilhados de Praxe: Sérgio Gomes, Mariana Alves, Alice Guarda, Diogo Vinagre, Maria Antoci, Ricardo Baixo e Raquel Quaresma pelos bons momentos passados.

Ao *Magnum Consillium Veteranorum* do ISEL em particular ao Alexandre Alves e à Joana Sempiterno pelos dias em reunião que me fizeram ausentar desta dissertação, mas que me fizeram voltar a trabalhar ainda com mais força.

À Comissão Organizadora de Praxe de Engenharia Civil do ano 2013/2014 e aos seus restantes membros: Cláudia Coelho e Rafael Vasques pelos dias bem passadas.

E não poderia deixar de agradecer aos professores Dr.<sup>a</sup> Eng.<sup>a</sup> Ana Rita Reis e Especialista Eng.<sup>o</sup> Jorge Sousa por todas as conversas motivacionais que tivemos ao longo do trabalho final de mestrado para que eu continuasse a trabalhar nele.

# Resumo

O presente trabalho tem como tema principal a avaliação de forças em cabos em tempo real utilizando o método da vibração, assumindo como objetivos, por um lado, a elaboração de uma monografia sobre os métodos existentes para a avaliação de forças em cabos e, por outro lado, contribuir para uma maior eficácia na utilização do método da vibração na medição das forças em cabos.

Serão referidas as principais utilizações de cabos em estruturas de engenharia civil, estudada a modelação do seu comportamento e descritos os métodos existentes para a medição de forças instaladas em cabos.

Para um melhor enquadramento e uma adequada compreensão do método da vibração serão apresentados os principais conceitos da dinâmica do cabo, bem como diversas abordagens do método da vibração.

Posteriormente será descrito o desenvolvimento de um algoritmo em *MATLAB* para aplicação do método da vibração, permitindo a determinação da força instalada no tirante a partir das frequências de vibração medidas.

Serão apresentados três casos de estudo relativos a um sistema de pré-esforço exterior, outro aos tirantes e ainda aos pendurais de uma ponte.

Por último é feita uma apreciação dos resultados obtidos e são indicadas algumas perspetivas e desenvolvimentos futuros.



# Abstract

This work has as main theme the evaluation of forces in cables in using the vibration method. The objectives of this work are, on one hand, a monograph on the existing methodologies to assess the forces in cables, on other hand, contribute to improve the efficiency in the use of vibration method.

The main uses of cables in civil engineering structures are presented, as well the modeling of their behaviour. The methods for measurement of forces in cables are described. For a proper understanding of the vibration method, the main concepts of cable dynamics and its various approaches will be presented.

An important delivery contribution of this work was a development of a MATLAB algorithm for applying the vibration method allowing the determination of the cable force from the measured accelerations.

Three cases studies are presented related with external prestressing cables, involving a cable-stayed bridge and to hangers of bridges.

Finally, the main conclusions are presented and some future developments are proposed.



# **Palavras-chave / Keywords**

Aceleração / Acceleration

Comportamento dinâmico / Dynamic behavior

Dinâmica do cabo / Cable Dynamics

Força de cabo / Cable force

Frequência de vibração / Vibration frequency

Frequências naturais / Natural frequencies

Método da vibração / Vibration Method

Modos de vibração / Mode shapes

Pendurais / Hangers

Ponte atirantada / Cable-stayed bridge

Ponte suspensa / Suspension bridge

Pré-esforço exterior / External prestressing

Teoria das cordas vibrantes / Vibrating wire theory

Tirantes / Stay- cables



# Índice

1.	INTRODUÇÃO .....	1
1.1	Justificação do tema.....	1
1.2	Objetivo .....	1
1.3	Organização do trabalho .....	2
2.	AVALIAÇÃO DE FORÇAS EM CABOS .....	5
2.1	Considerações iniciais.....	5
2.2	Utilização de cabos em sistemas estruturais .....	5
2.3	A modelação do comportamento dos cabos .....	9
2.4	Métodos de medição de forças em cabos.....	12
2.4.1	Métodos diretos de medição de forças em cabos.....	12
2.4.2	Métodos indiretos de medição de forças em cabos.....	14
3.	MÉTODO DA VIBRAÇÃO.....	17
3.1	Considerações iniciais.....	17
3.2	Noções básicas da dinâmica de estruturas .....	17
3.3	Comportamento dinâmico do cabo .....	19
3.3.1	Conceitos básicos e equações de equilíbrio .....	19
3.3.2	Modos de vibração e frequências naturais de vibração .....	20
3.3.3	Aproximação simplificada para cabos inclinados .....	23
3.4	Abordagens do método de vibração baseado na teoria de corda vibrante .....	24
3.5	Método da vibração baseado na teoria do comportamento dinâmico do cabo .....	28
4.	DESENVOLVIMENTO DO ALGORITMO PARA APLICAÇÃO DO MÉTODO DA VIBRAÇÃO.....	31
4.1	Considerações iniciais.....	31
4.2	Identificação modal.....	31
4.3	Implementação do método da vibração .....	36
5.	CASOS DE ESTUDO .....	41
5.1	Considerações iniciais.....	41
5.2	Medição do pré-esforço exterior na Ponte Ferroviária de S. João.....	41
5.2.1	Descrição da Ponte de S. João .....	41
5.2.2	Instrumentação.....	43
5.2.3	Processamento dos dados e resultados.....	45

5.2.4	Análise de Resultados .....	55
5.3	Medição da força nos tirantes do Viaduto Salah Bey .....	56
5.3.1	Descrição da obra de arte .....	56
5.3.2	Instrumentação .....	57
5.3.3	Processamento dos dados e resultados .....	60
5.3.4	Análise de Resultados .....	69
5.4	Medição da força nos pendurais da Ponte 25 de Abril .....	70
5.4.1	Descrição da Ponte 25 de Abril .....	70
5.4.2	Instrumentação .....	73
5.4.3	Processamento de dados e resultados .....	75
5.4.4	Análise de Resultados .....	88
6.	<b>CONCLUSÕES E PERSPETIVAS FUTURAS</b> .....	91
6.1	Síntese do trabalho .....	91
6.2	Conclusões .....	92
6.3	Perspetivas e desenvolvimentos futuros .....	93
	Referências bibliográficas .....	95

# Índice de Figuras

Figura 2.1 - Pré-esforço exterior de continuidade na Ponte de S. João, Porto. ....	6
Figura 2.2 - Pré-esforço exterior de continuidade na Ponte da Amizade, Vila Nova de Cerveira.....	6
Figura 2.3 - Dispositivos para o desvio de cabos de pré-esforço exterior na Ponte Miguel Torga, Régua. ....	6
Figura 2.4 - Pré-esforço exterior de reforço da Ponte D. Luís, em Santarém. ....	7
Figura 2.5 - Pré-esforço exterior de reforço no viaduto do Fonte Nova, Lisboa. ....	7
Figura 2.6 - Configuração de pontes atirantadas. [8] .....	7
Figura 2.7 - Ponte Salgueiro Maia (Santarém) com atirantamento central. ....	8
Figura 2.8 - Ponte do Arade (Portimão) com atirantamento lateral. ....	8
Figura 2.9 - Estádio Alvalade XXI (Lisboa), 2003. ....	8
Figura 2.10 - Cobertura da Praça de Touros do Campo Pequeno (Lisboa), 2006. ....	9
Figura 2.11 - Golden Gate Bridge (Califórnia, EUA), 1937.....	9
Figura 2.12 - Comportamento não linear de um cabo. [40] .....	10
Figura 2.13 - Macaco Hidráulico. [19].....	12
Figura 2.14 - Anel dinamométrico em funcionamento. ....	13
Figura 2.15 - Célula de carga ligada a sistema de aquisição de dados.....	14
Figura 2.16 - Pintura dos cordões para leitura direta do alongamento. [19] .....	14
Figura 3.1 - Representação dos conceitos de dinâmica de estruturas. [24].....	18
Figura 3.2 - Representação do deslocamento de um ponto P genérico pertencente a um cabo em vibração. [1] .....	19
Figura 3.3 - Componentes longitudinal e vertical do primeiro modo de vibração antissimétrico. (adaptado de [6]) .....	22
Figura 3.4 - Componentes longitudinal e vertical do primeiro modo de vibração simétrico. (adaptado de [6]).....	23
Figura 4.1 - Decomposição de uma série temporal (história) nas suas harmónicas. (adaptado de [23]).....	32
Figura 4.2 - Espectro normalizado médio de um cabo obtido na aplicação <i>MATLAB</i> . .....	36
Figura 4.3 - Exemplo de ficheiro com as características gerais. ....	37
Figura 4.4 - Exemplo de ficheiro para atribuição de características a cada cabo. ....	38

Figura 5.1 - Ponte de S. João.....	42
Figura 5.2 - Alçado da ponte de S. João. [37].....	42
Figura 5.3 - Ancoragem sobre o pilar PE2. (Montante).....	43
Figura 5.4 - Desviador a 75 m do pilar PE1 (Jusante). ....	43
Figura 5.5 - Desviador sobre o pilar PD2 (Jusante). ....	43
Figura 5.6 - Acelerómetros instalados nos cabos de pré-esforço. ....	44
Figura 5.7 - Sistema de alimentação e condicionamento de dados. ....	44
Figura 5.8 - Sistema de aquisição da marca <i>Gantner Instruments</i> . ....	44
Figura 5.9 - Torre de acesso ao sistema hidrostático. ....	45
Figura 5.10 - Numeração dos cabos. ....	45
Figura 5.11 - Registo total do cabo J.E.5. ....	47
Figura 5.12 - História de acelerações entre os 700 e 800 segundos do cabo J.E.5. ....	48
Figura 5.13 - Auto-espectro do cabo J.E.5.....	48
Figura 5.14 - Regressão linear das frequências obtidas. ....	49
Figura 5.15 - Número de frequências VS Força do cabo J.E.5. ....	50
Figura 5.16 - Constrangimento de vibração do cabo M.M.2. ....	50
Figura 5.17 - Registo total do cabo M.M.2. ....	51
Figura 5.18 - História de acelerações entre os 0 e 200 segundos do cabo M.M.2. ....	51
Figura 5.19 - Auto-espectro do cabo M.M.2.....	52
Figura 5.20 - Regressão linear das frequências obtidas. ....	52
Figura 5.21 - Constrangimento à vibração do cabo M.D.1 provado pelo desviador.....	53
Figura 5.22 - Registo total do cabo M.D.1.....	53
Figura 5.23 - História de acelerações entre os 600 e 700 segundos do cabo M.D.1.....	54
Figura 5.24 - Auto-espectro do cabo M.D.1. ....	54
Figura 5.25 - Regressão linear das frequências obtidas. ....	54
Figura 5.26 - Viaduto Salah Bey. ....	56
Figura 5.27 - Alçado do Viaduto Salah Bey. ....	57
Figura 5.28 - Corte transversal do tabuleiro.....	57
Figura 5.29 - Colocação do acelerómetro no tirante. ....	58
Figura 5.30 - Acelerómetro no tirante. ....	58
Figura 5.31 - Sistema de aquisição em regime dinâmico.....	58
Figura 5.32 - Posições de carga com 4 linhas de camiões. ....	59
Figura 5.33 - Ensaio de carga com os dezasseis camiões. ....	59
Figura 5.34 - Posicionamento do tirante H.217. ....	60

Figura 5.35 - História de acelerações quando o cabo está sujeito ao carga permanentes. ....	61
Figura 5.36 - Auto-espectro apenas com atuação das cargas permanentes. ....	62
Figura 5.37 - Regressão linear das frequências obtidas. ....	62
Figura 5.38 - História de acelerações do cabo H.217 quando o comboio de cargas está na posição 1. ....	63
Figura 5.39 - Auto-espectro do cabo H.217 quando o comboio de carga está na posição 1. ....	63
Figura 5.40 - Regressão linear das frequências obtidas. ....	64
Figura 5.41 - História de acelerações do cabo H.217 quando o comboio de cargas está na posição 5. ....	65
Figura 5.42 - Auto-espectro do cabo H.217 quando o comboio de carga está na posição 5. ....	65
Figura 5.43 - Regressão linear das frequências obtidas. ....	65
Figura 5.44 - História de acelerações do cabo H.217 quando o comboio de cargas está na posição 8. ....	66
Figura 5.45 - Auto-espectro do cabo H.217 quando o comboio de carga está na posição 8. ....	67
Figura 5.46 - Regressão linear das frequências obtidas. ....	67
Figura 5.47 - Número de frequências consideradas VS valor da força do cabo. ....	68
Figura 5.48 - Ponte 25 de Abril. ....	71
Figura 5.49 - Secção transversal da viga de rigidez antes do reforço estrutural (1966).[16].....	72
Figura 5.50 - Secção transversal da viga de rigidez após o reforço estrutural (1999).[16].....	72
Figura 5.51 - Utilização de braçadeira para impedir a vibração excessiva. ....	72
Figura 5.52 - Acelerómetros instalados nos pendurais da ponte. ....	73
Figura 5.53 - Acelerómetros do tipo <i>Piezotronics</i> utilizados na medição. ....	73
Figura 5.54 - Grampo metálico e acelerómetro acoplado. ....	73
Figura 5.55 - Colocação dos acelerómetros com recurso a alpinista. ....	74
Figura 5.56 - Placa de aquisição.....	74
Figura 5.57 - Software de aquisição.....	74
Figura 5.58 - Denominação dos pendurais de um conjunto de montante. ....	75

Figura 5.59 - Execução do ensaio realizado a um dos conjuntos de pendurais da ponte. ....	75
Figura 5.60 - Registos utilizados do pendural 83 D. ....	77
Figura 5.61 - Auto-espetros dos registos do pendural 83 D. ....	78
Figura 5.62 - Auto-espectro médio do pendural 83 D. ....	78
Figura 5.63 - Regressão linear das frequências obtidas. ....	79
Figura 5.64 - Registos utilizados do pendural 28 D. ....	80
Figura 5.65 - Auto-espetros dos registos do pendural 28 D. ....	80
Figura 5.66 - Auto-espectro médio do pendural 28 D. ....	81
Figura 5.67 - Regressão linear das frequências obtidas. ....	81
Figura 5.68 - Registos utilizados do pendural 45 D. ....	82
Figura 5.69 - Auto-espetros dos registos do pendural 45 D. ....	83
Figura 5.70 - Auto-espectro médio do pendural 45 D. ....	83
Figura 5.71 - Regressão linear das frequências obtidas. ....	84
Figura 5.72 - Regressão linear das frequências obtidas. ....	84
Figura 5.73 - Auto-espetros médios dos pendurais 67 D, 63 D e 61 D. ....	86
Figura 5.74 - Ordem do modo VS Frequência. ....	87

# Índice de Tabelas

Tabela 4.1 - Janelas de dados e suas melhores utilizações. (adaptado de [21]).....	34
Tabela 5.1 - Características geométricas do cabo. ....	46
Tabela 5.2 - Características mecânicas do cabo. ....	46
Tabela 5.3 - Estimativa de frequências dos cabos de pré-esforço exterior em Hz.....	46
Tabela 5.4 - Estimativa dos parâmetros de correção.....	46
Tabela 5.5 - Frequências naturais do cabo J.E.5.....	49
Tabela 5.6 - Cálculo da força no cabo J.E.2 e respetiva incerteza. ....	49
Tabela 5.7 - Frequências naturais do cabo M.M.2. ....	52
Tabela 5.8 - Cálculo da força no cabo M.M.2 e respetiva incerteza. ....	52
Tabela 5.9 - Frequências naturais do cabo M.D.1.....	54
Tabela 5.10 - Cálculo da força no cabo M.D.1 e respetiva incerteza.....	55
Tabela 5.11 - Resumo dos cálculos realizados.....	55
Tabela 5.12 - Características geométricas do cabo. ....	60
Tabela 5.13 - Características mecânicas do cabo. ....	60
Tabela 5.14 - Frequências naturais do tirante apenas sujeito às cargas permanentes. .....	62
Tabela 5.15 - Cálculo da força no tirante H.217 quando sujeito apenas às cargas permanentes do viaduto e respetiva incerteza. ....	62
Tabela 5.16 - Frequências naturais do tirante quando o comboio de cargas está na posição 1. ....	64
Tabela 5.17 - Cálculo da força no tirante H.217 quando o comboio de cargas está na posição 1 e respetiva incerteza.....	64
Tabela 5.18 - Frequências naturais do tirante quando o comboio de cargas está na posição 5. ....	65
Tabela 5.19 - Cálculo da força no tirante H.217 quando o comboio de cargas está na posição 5 e respetiva incerteza.....	66
Tabela 5.20 - Frequências naturais do tirante quando o comboio de cargas está na posição 8. ....	67
Tabela 5.21 - Cálculo da força no tirante H.217 quando o comboio de cargas está na posição 8 e respetiva incerteza.....	67
Tabela 5.22 - Força medida através de célula monocordão. ....	68

Tabela 5.23 - Força medida pelo anel dinamométrico. ....	68
Tabela 5.24 - Resumo dos cálculos realizados. ....	69
Tabela 5.25 - Comparação dos valores de força obtidos a partir do anel dinamométrico com a o método da vibração. ....	70
Tabela 5.26 - Características geométricas dos pendurais. ....	76
Tabela 5.27 - Características mecânicas dos pendurais. ....	76
Tabela 5.28 - Estimativa de frequência a partir da força gerada pelo modelo numérico e dos respetivos parâmetros de correção da rigidez. ....	76
Tabela 5.29 - Frequências naturais do pendural 83 D. ....	79
Tabela 5.30 - Frequências naturais do pendural 28 D. ....	81
Tabela 5.31 - Cálculo da força no pendural 28 D e respetiva incerteza. ....	81
Tabela 5.32 - Frequências naturais do pendural 45 D considerando o comprimento mais curto. ....	84
Tabela 5.33 - Frequências naturais do pendural 45 D considerando o comprimento de 90,11. ....	84
Tabela 5.34 - Cálculo da força no pendural 45 D com comprimento de 90,11 m e respetiva incerteza. ....	85
Tabela 5.35 - Frequências, em Hz, identificadas a partir do espetro e estimativas de força e $\xi$ . ....	87
Tabela 5.36 - Resumo dos cálculos realizados. ....	88

# Simbologia

## Letras latinas maiúsculas

$A$  - Área da secção

$E$  - Módulo de elasticidade

$H$  - Componente horizontal da força instalada no cabo

$I$  - Inércia de flexão do cabo

$L$  - Comprimento do cabo

$L_e$  - Comprimento efetivo ou comprimento virtual do cabo

$L_s$  - Flecha inicial do cabo pré-tensionado

$N$  - Número de valores discretos

$NPI$  - Número de pontos instrumentados

$S_{ij}$  - Elementos da matriz densidade espectral de potência

$\tilde{S}_{ij}$  - Elementos da matriz densidade espectral de potência após aplicação da janela de dados

$T$  - Força instalada num cabo

$T'$  - Duração do sinal

$T_n$  - Período natural de vibração

$X_i$  - Transformada discreta de Fourier

## Letras latinas minúsculas

$d$  - Flecha do cabo

$\bar{f}$  - Média ponderada das frequências naturais de vibração

$f_{cv}$  - Frequência natural de uma corda vibrante

$f_{eq}$  - Frequência natural de vibração equivalente

$f_{ref}$  - Frequência de referência a indicar na aplicação desenvolvida em MATLAB

$f_n$  - Frequência natural de vibração

$g$  - Aceleração da gravidade

$h$  - Cota entre a zona de ancoragem e o mastro

$h_r$  - Parte dinâmica da tensão instalada

$l$  - Extensão horizontal do cabo

$m$  - Massa linear do cabo

$n$  - Número do modo de vibração em estudo

$u, v, w$  - Componentes de deslocamento

$\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$  - Componentes de deslocamento devido à ação dinâmica

$x$  - Coordenada que expressa a distância entre ancoragem e o ponto em estudo

$x_*, z_*$  -  $x, z$  transformadas para o eixo local no estudo de cabos inclinados

$z$  - Coordenada que expressa a flecha do cabo

## **Letras gregas**

$\delta$  - Rácio flecha-comprimento

$\Delta t$  - Intervalo de tempo entre valores discretos

$\theta$  - Inclinação do cabo em relação ao plano horizontal

$\lambda^2$  - Parâmetro de Irvine

$\xi$  - Parâmetro de correção da flexão

$\bar{\omega}$  - Frequência natural adimensional

$\omega_n$  - Frequência angular natural de vibração

# 1. INTRODUÇÃO

## 1.1 Justificação do tema

A utilização crescente de cabos em estruturas de engenharia civil tem permitido vencer vãos de grande dimensão com soluções estruturais de grande esbelteza e acrescida qualidade estética, sendo particularmente notável a sua utilização em pontes e coberturas de grande dimensão.

A sua utilização crescente e a sua relevância no desempenho estrutural tornaram necessária a verificação do comportamento dos cabos, tanto durante a construção como em serviço. O comportamento dos cabos, bem como a sua contribuição para o comportamento global da estrutura, é fortemente influenciado pela força suportada por cada cabo. Neste contexto foram desenvolvidas técnicas para a avaliação das forças instaladas em cabos, salientando-se a utilização de células dinamométricas para avaliação de todo o cabo, o recurso a células de carga monocórdão bem como a aplicação do método da vibração. Cada método possui, naturalmente, as suas vantagens, inconvenientes e limitações.

O presente trabalho final de mestrado incide fundamentalmente no método da vibração, baseado na teoria das cordas vibrantes, de grande interesse devido à simplicidade dos meios necessários e pela facilidade da sua aplicação em estruturas em serviço sem qualquer tipo de instrumentação prévia.

## 1.2 Objetivo

O presente trabalho final de mestrado tem os seguintes objetivos:

1. Elaborar uma monografia sobre os métodos existentes para a avaliação de forças em cabos;
2. Contribuir para uma maior eficácia na utilização do método da vibração na medição das forças em cabos. Para este efeito serão desenvolvidos os seguintes itens:
  - Determinação da frequência de aquisição de dados e da duração do registo para que se obtenham melhores resultados na identificação das frequências próprias dos cabos;

- Determinação do número de modos de vibração que otimiza o cálculo da média ponderada das frequências fundamentais;
- Definição das características dos cabos para o qual o método da vibração é aplicável;
- Comparação do método da vibração com a medição a partir de células monocordão e de anel dinamométrico.

### **1.3 Organização do trabalho**

A presente dissertação está desenvolvida em seis capítulos principais, o primeiro dos quais é a presente introdução.

O capítulo seguinte é constituído por uma monografia sobre os métodos existentes para a avaliação de forças em cabos. Com base numa revisão bibliográfica, são caracterizados os métodos existentes para a medição de forças em cabos indicando as suas vantagens e desvantagens.

O terceiro capítulo apresenta o método da vibração em que se baseia este trabalho final de mestrado. É feita, primeiramente, uma breve explicação sobre o comportamento do cabo. São também apresentadas as abordagens existentes do método da vibração e por fim descreve-se qual a abordagem utilizada e as respetivas correções a considerar tendo em conta o comportamento do cabo.

No quarto capítulo é apresentada a aplicação em *MATLAB* desenvolvida no decorrer deste TFM para a determinação das forças instaladas num cabo, através do método da vibração. Descrevem-se as principais etapas do algoritmo implementado que parte do registo das acelerações medidas nos cabos, nomeadamente a forma como são obtidos os espetros de resposta a partir de histórias de acelerações. Por fim é feita uma breve explicação da metodologia utilizada para que melhor compreensão do funcionamento do programa.

No quinto capítulo estão presentes os casos de estudo que serão analisados de modo a evidenciar a aplicabilidade do algoritmo desenvolvido e que sejam tiradas algumas conclusões relativamente aos objetivos propostos na secção anterior. Serão estudados aplicações de cabos como elementos estruturais: pré-esforço exterior, tirantes e pendurais. Os casos de estudo serão, respetivamente, a Ponte de S. João no Porto, o Viaduto Salah Bey em Constantine e a Ponte 25 de Abril em Lisboa.

Por último são apresentadas as principais conclusões do trabalho realizado e indicadas algumas perspectivas de desenvolvimentos futuros.



## **2. AVALIAÇÃO DE FORÇAS EM CABOS**

### **2.1 Considerações iniciais**

Neste capítulo apresentam-se as utilizações mais usuais de cabos em sistemas estruturais onde se exemplificam com algumas ilustrações.

Caracteriza-se, de seguida, o comportamento mecânico dos cabos, designadamente o seu comportamento geometricamente não linear, bem como a forma como é realizada a sua modelação.

Por fim, são apresentados os métodos mais utilizados para avaliação de forças em cabos e as suas vantagens e desvantagens.

### **2.2 Utilização de cabos em sistemas estruturais**

Os cabos são elementos estruturais que se caracterizam por apenas resistirem a esforços de tração. São utilizados em diferentes tipos de estruturas sob a forma de pré-esforço exterior, tirantes ou pendurais.

O pré-esforço exterior caracteriza-se pela utilização dos cabos fora das secções de betão ou em estruturas metálicas, sendo a força de pré-esforço transmitida à estrutura apenas nas ancoragens e nos dispositivos de desvio.

A aplicação do pré-esforço exterior tem-se vindo a intensificar, sendo atualmente utilizado como pré-esforço de continuidade, pré-esforço adicional eventual e para reforço de estruturas existentes.

Nas pontes de betão construídas por avanços sucessivos o pré-esforço exterior de continuidade pode ser utilizado conjuntamente com o pré-esforço interior aderente, visando a eliminação de cabos nas almas, o que simplifica a sua betonagem, permitindo, eventualmente, a diminuição da sua espessura. Com este objetivo, a segurança dos tabuleiros em consola durante a construção é garantida através dos cabos aderentes, que se concentram no banzo superior da secção transversal, utilizando-se o pré-esforço exterior para assegurar total ou parcialmente a continuidade, como sucede na ponte de S. João no Porto (Figura 2.1) ou na Ponte da Amizade em Vila Nova de Cerveira (Figura 2.2).



Figura 2.1 - Pré-esforço exterior de continuidade na Ponte de S. João, Porto.



Figura 2.2 - Pré-esforço exterior de continuidade na Ponte da Amizade, Vila Nova de Cerveira.

A instalação, durante a construção, de dispositivos de desvio e fixação necessários à aplicação do pré-esforço exterior eventual, substituindo as bainhas deixadas vazias no interior do betão, é uma prática que se tem generalizado nos últimos anos, sendo disso exemplo, a Ponte Miguel Torga, na Régua (Figura 2.3), em que foi adotada uma solução mista de pré-esforço eventual com bainhas vazias no interior do betão e dispositivos para pré-esforço exterior [28].



Figura 2.3 - Dispositivos para o desvio de cabos de pré-esforço exterior na Ponte Miguel Torga, Régua.

A utilização do pré-esforço exterior no reforço de tabuleiros de pontes tem sido utilizado tanto em estruturas metálicas, na Ponte D. Luís I em Santarém (Figura 2.4), bem como em estruturas de betão (Figura 2.5).



Figura 2.4 - Pré-esforço exterior de reforço da Ponte D. Luís, em Santarém.



Figura 2.5 - Pré-esforço exterior de reforço no viaduto do Fonte Nova, Lisboa.

A utilização de tirantes é atualmente uma solução consensual em pontes, bem como em coberturas de grande dimensão.

A primeira utilização de tirantes na conceção de pontes data do séc. XIX devido à introdução de materiais como o aço e à necessidade de construção de obras de arte com grandes vãos [3].

As pontes atirantadas podem ser constituídas por um ou mais mastros onde são ancorados os tirantes. A disposição dos tirantes denomina-se por leque, quando ancorados ao topo do mastro, semi-leque ou harpa, quando as ancoragens são distribuídas ao longo do mastro [8], como mostra a figura seguinte.

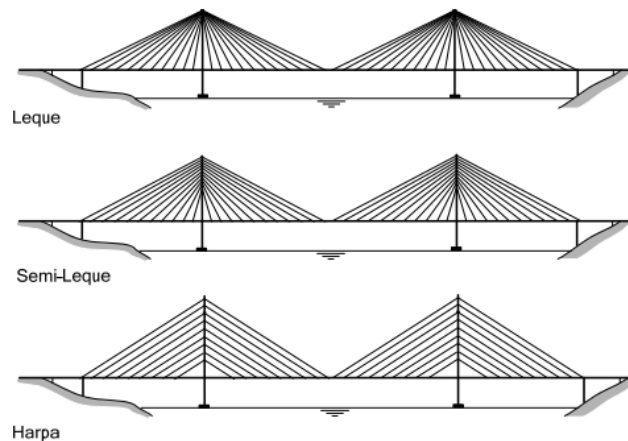


Figura 2.6 - Configuração de pontes atirantadas. [8]

O atirantamento pode ser central equilibrando apenas as cargas verticais, sendo da responsabilidade do tabuleiro equilibrar eventuais efeitos de torção; ou lateral, usualmente por dois planos de suspensão, em que para além de equilibrarem as cargas verticais, também contribuem para o equilíbrio de efeitos de torção [8].

Como exemplos de aplicação em pontes podem-se indicar as pontes Vasco da Gama, Salgueiro Maia (Figura 2.7), ambas sobre o rio Tejo, bem como a ponte sobre o rio Arade em Portimão (Figura 2.8).



Figura 2.7 - Ponte Salgueiro Maia (Santarém) com atirantamento central.

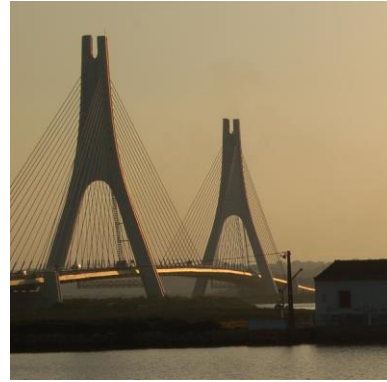


Figura 2.8 - Ponte do Arade (Portimão) com atirantamento lateral.

Também podemos observar tirantes em coberturas suspensas como os casos do estádio Alvalade XXI (Figura 2.9) ou da Praça de Touros do Campo Pequeno após a sua reabilitação (Figura 2.10), ambos em Lisboa.



Figura 2.9 - Estádio Alvalade XXI (Lisboa), 2003.

(in <http://www.panoramio.com/photo/366199>)



Figura 2.10 - Cobertura da Praça de Touros do Campo Pequeno (Lisboa), 2006.

(in <http://www.talprojecto.pt/artes.html>)

Finalmente os pendurais são utilizados fundamentalmente em pontes suspensas, de que são exemplo sobejamente conhecidos os da *Golden Gate Bridge* em São Francisco, Califórnia nos EUA (Figura 2.11) ou os da Ponte 25 de Abril em Lisboa.



Figura 2.11 - Golden Gate Bridge (Califórnia, EUA), 1937.

(in [http://pt.wikipedia.org/wiki/Ponte\\_Golden\\_Gate](http://pt.wikipedia.org/wiki/Ponte_Golden_Gate))

### 2.3 A modelação do comportamento dos cabos

A deformação dos cabos quando solicitados apenas por esforços axiais ocorre exclusivamente por um alongamento proporcional ao valor desse esforço. Esta situação acontece quando são utilizados como pendurais.

Nas situações de tirantes ou com sistema de pré-esforço exterior, os cabos estão posicionados com uma significativa componente horizontal ficando, por isso, sujeitos a esforços transversais

provocados pelo seu peso próprio. O equilíbrio destes esforços é obtido através da deformação transversal do cabo, que assume a forma de uma catenária. Desta situação resulta um comportamento geometricamente não linear. Este tipo de comportamento implica que um acréscimo de tensão provocará um aumento de comprimento do cabo, com duas componentes:

- Elástica: que será proporcional à variação de tensão;
- Geométrica que é provocado pela diminuição da curvatura do cabo.

Na figura seguinte é ilustrada o comportamento não linear de um cabo.

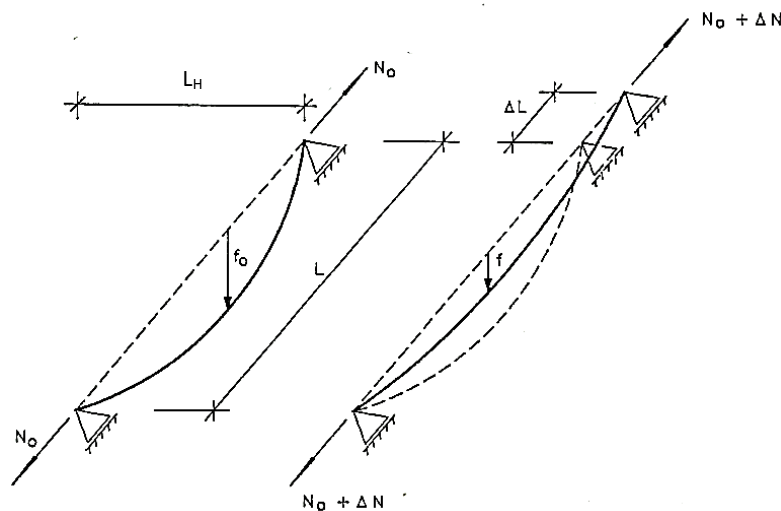


Figura 2.12 - Comportamento não linear de um cabo. [40]

O processo de resolução deste tipo problema de comportamento não linear é, por exemplo, explicado por Santos [40].

Para situações de pré-esforço exterior esta configuração não linear não será muito relevante, pois o elevado tensionamento a que os cabos estão sujeitos faz com que a sua deformada apresente uma flecha diminuta.

No que diz respeito à modelação matemática existem três formulações mais utilizadas: elementos finitos curvos; equiparar um cabo a uma barra biarticulada ou séries de barras articuladas; ou ainda elementos retos com rigidez equivalente.

A formulação por elementos finitos poderá ser feita de várias formas, como por exemplo:

- A utilização de um elemento curvo com 3 nós (nó inicial – nó central – nó final), considerando a não linearidade geométrica, podendo fazer assim uma análise dinâmica;
- A utilização de um elemento curvo catenário, elástico, em que a matriz de rigidez e as forças externas são obtidas de forma iterativa.

Equiparar o cabo a uma série de barras articuladas é uma formulação em que as barras são carregadas nos nós com o seu peso próprio podendo assim utilizar a formulação do método dos deslocamentos  $\vec{F} = \underline{K} \cdot \vec{U}$  para pórticos planos, utilizando uma matriz de rigidez equivalente. Este método será tanto mais preciso quanto maior o número de barras utilizadas na discretização.

Por último a utilização de barra bi-articulada recorrendo a uma rigidez equivalente, devido à sua simplicidade esta é a formulação mais utilizada. Esta formulação baseia-se no facto de cabos com elevada tensão aplicada apresentarem flechas muito reduzidas passando a ter uma deformada semelhante a uma parábola de 2º grau. Assim torna-se possível modelar um cabo como um elemento reto com a posição e comprimento entre os apoios, caracterizado pelo seu módulo de elasticidade equivalente, que pode ser tangente ou secante, calculados a partir das seguintes expressões:

$$E_{ig} = \frac{1}{E} + \frac{(\gamma L_H)^2}{12\sigma^3} \quad (2.1)$$

$$\frac{1}{E_{sec}} = \frac{1}{E} + \frac{(\gamma L_H)^2 (\sigma_1 + \sigma_2)}{12\sigma_1^2 \sigma_2^2}$$

Em que  $E$  designa o módulo de elasticidade do material,  $\gamma$  o seu peso específico,  $L_H$  a projeção na horizontal,  $\sigma$  a tensão suportada pelo cabo. Na expressão do módulo de elasticidade secante este é medido entre dois níveis de tensão  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ .

A partir desta formulação pode-se destacar que a deformação do cabo depende da deformação elástica do material e da deformação por mudança de curvatura do cabo. Esta última depende da tensão instalada no cabo.

## 2.4 Métodos de medição de forças em cabos

A medição de forças em cabos é uma das observações mais importantes pois asseguram toda a estabilidade e segurança das estruturas que os utilizam. Esta medição pode ser feita recorrendo a métodos diretos ou indiretos.

### 2.4.1 Métodos diretos de medição de forças em cabos

#### a) Medição através de macacos hidráulicos

Método utilizado maioritariamente, se não exclusivamente, durante a fase de execução devido ao facto da colocação do macaco ser um processo moroso, requerendo que a zona de ancoragem tenha dimensão suficiente para a instalação do mesmo. Este processo é feito medindo a pressão do óleo do êmbolo do macaco tendo esta uma relação direta com tensão instalada no cabo. Segundo [6] este método pode apresentar erros entre os 10% e os 15% pois depende da colocação do macaco (este deve estar bem seguro à zona de ancoragem) e da sua calibração. A Figura 2.13 mostra a colocação do macaco durante a fase de execução.



Figura 2.13 - Macaco Hidráulico. [19]

#### b) Medição através de anel dinamométrico

Este método, à semelhança do anterior, é um método pesado e com necessidade de espaço na zona de ancoragem tornando-se assim difícil a sua aplicação na monitorização em situação de serviço se esta não tenha sido planeada para este método. Este é instalado ainda na fase de construção entre o prato de ancoragem e o betão abraçando todo o tirante. Apesar disso é um método fiável pois mede diretamente a força instalada num conjunto de cabos, *e.g.* tirante. O erro deste método é associado essencialmente à calibragem do aparelho. Na figura seguinte

podemos observar um anel dinamométrico em funcionamento no Viaduto Salah Bey em Constantine, na Argélia.



Figura 2.14 - Anel dinamométrico em funcionamento.

c) Medição através de células de carga

Neste método a medição é feita apenas num dos cabos que compõe o tirante, tendo como pressuposto que todos os cabos estão à mesma tensão. Assim para avaliar a força instalada no tirante basta fazer a multiplicação entre a força instalada no cabo medido e o número de cabos existente. Na Figura 2.15 mostra-se como é instalado a célula de carga monocordão.



Figura 2.15 - Célula de carga ligada a sistema de aquisição de dados.

#### 2.4.2 Métodos indiretos de medição de forças em cabos

##### a) Medição a partir do alongamento do cabo

Este método é utilizado no tensionamento ou retensionamento de cabos. Ao medir-se o alongamento do cabo pode-se obter a força instalada no cabo. Na Figura 2.16 mostra um exemplo dum caso em que o alongamento foi medido diretamente sobre os cordões, com auxílio de uma pintura.

Segundo [6] este método de medição só será válido se na medição do alongamento existir uma exatidão de 0,01 mm, tornando-se assim num método pouco viável e pouco fiável.



Figura 2.16 - Pintura dos cordões para leitura direta do alongamento. [19]

b) Inspeção por métodos topográficos

É um método utilizado exclusivamente durante a fase de construção. Permite apenas medir a flecha que o cabo apresenta, a partir da qual se calcula a força existente nos cabos. Este método é utilizado em pontes atirantadas enquanto o cabo está levemente tensionado, pois quando é atingida a fase final de tensionamento é difícil detetar a diferença de flecha em níveis diferentes de tensão.

c) Medição a partir da frequência

Este método baseia-se na teoria das cordas vibrantes em que uma corda bi-apoiada e tensionada apresenta uma frequência de vibração que está diretamente relacionada com a tensão nela aplicada. Sabendo as características do cabo em estudo, como a massa e o comprimento livre de vibração, a partir da frequência natural de vibração identificada consegue-se obter a tensão instalada. Este método será a base de estudo deste trabalho final de mestrado sendo apresentado com maior detalhe no capítulo 3.



# 3. MÉTODO DA VIBRAÇÃO

## 3.1 Considerações iniciais

O método da vibração baseia-se na relação existente entre a frequência de vibração de um cabo e a tensão suportada por esse cabo. Dessa forma, conhecendo-se as características do cabo, designadamente o seu comprimento e a área da sua secção transversal é possível determinar o valor da força instalada no cabo.

Neste capítulo será dada uma breve explicação sobre alguns conceitos da dinâmica de estruturas como, por exemplo, a definição de frequência natural e modos de vibração na secção seguinte (secção 3.2). De seguida, será apresentado um resumo sobre o comportamento dinâmico do cabo (secção 3.3).

Posteriormente apresentam-se várias abordagens do método da vibração (secção 3.4) fazendo referência à abordagem que será utilizada no estudo dos casos práticos desta dissertação, aos pressupostos e simplificações feitas para a utilização dessa mesma abordagem (secção 3.5).

## 3.2 Noções básicas da dinâmica de estruturas

A dinâmica de estruturas como parte da engenharia tem sido estudada, principalmente, a partir de meados do século XX, devido à existência de colapso de estruturas sujeitas a ações como o vento ou sismos.

Desde então a engenharia civil tem dado real importância ao estudo desta matéria, de forma a melhorar o comportamento dinâmico das estruturas.

O desenvolvimento nesta área da ciência permitiu a inovação na conceção de edifícios mais altos ou pontes mais arrojadas. Os conceitos básicos desta disciplina datam do séc. XVI, da autoria de Galileu Galilei, realçando-se, posteriormente, os contributos de Isaac Newton no século XVII [24].

Os principais conceitos básicos associados à dinâmica de estruturas são:

- Frequência angular natural de vibração – Frequência angular de um corpo quando atinge a sua amplitude máxima sujeita a um movimento harmónico (ressonância). Usualmente

denominada com a letra grega ômega minúsculo com índice  $n$  (ordem do modo) ( $\omega_n$ ) e com unidade de medida  $rad / s$  (radianos por segundo).

- Modo de vibração – Deformação de um corpo rígido quando atinge a sua frequência natural de vibração. Uma estrutura tem tantos modos de vibração quantos os graus de liberdade que possui.
- Frequência natural de vibração – Usualmente medida em  $Hz$  (Hertz) ou em  $s^{-1}$  (por segundo), é o número de ciclos que um corpo rígido executa por segundo quando atinge a ressonância. Denomina com a letra  $f$  com índice  $n$ , em que  $n$  corresponde ao número do modo de vibração que corresponde ( $f_n$ ).
- Período natural de vibração – Usualmente medida em  $s$  (segundos), corresponde ao tempo que o corpo rígido demora a completar um ciclo de movimento quando atinge a ressonância. Usualmente é representada com a letra  $T$  com índice  $n$ , em que  $n$  corresponde ao número do modo de vibração que corresponde ( $T_n$ ).

Na Figura 3.1 pode-se observar graficamente os conceitos dinâmicos acima descritos.

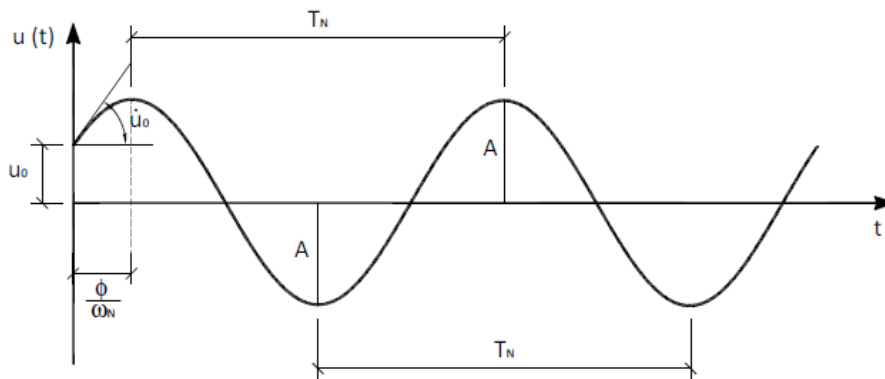


Figura 3.1 - Representação dos conceitos de dinâmica de estruturas. [24]

- Ação dinâmica – “Ação que varia de direção ponto de aplicação e grandeza em função do tempo.” [24]
- Vibração ambiental – Vibração provocada por uma ação dinâmica devido a agentes ambientais como vento ou chuva.
- Vibração forçada – Vibração provocada por uma ação dinâmica devido a aplicação de cargas.

- Resposta dinâmica – “Resposta à ação dinâmica, usualmente expressa em termos de deslocamentos, velocidades, acelerações e tensões, que obviamente também variam com o tempo.” [24].

Tendo em conta os conceitos aqui descritos de seguida será feita uma descrição do comportamento dinâmico do cabo.

### 3.3 Comportamento dinâmico do cabo

O comportamento dinâmico de um cabo pode ser estudado a partir da teoria linear das vibrações. Esta teoria foi concebida por H. Max Irvine e T. K. Caughey [18] para cabos horizontais e posteriormente para cabos inclinados através de uma aproximação simplificada. Mais tarde M. S. Triantafyllou [42] concebeu uma aproximação assintótica.

#### 3.3.1 *Conceitos básicos e equações de equilíbrio*

A teoria linear da vibração foi idealizada para cabos rígidos com um rácio flecha-comprimento pequeno ( $0 \leq d/L \leq 1/8$ ), assumindo que o cabo tem uma componente de tensão dinâmica ( $\tau$ ) constante ao longo do comprimento do cabo.

Considerando um cabo horizontal suspenso entre dois apoios à mesma cota com comprimento  $L$  e massa por unidade de comprimento  $m$ ; e ainda um ponto  $P$  genérico pertencente ao cabo sofrendo um deslocamento devido à ação do peso próprio passa para a posição  $\bar{P}(x, 0, z)$ . Devido à aplicação de movimento ao cabo, o ponto  $P$  passará da posição  $\bar{P}(x, 0, z)$  para a posição  $\bar{P}'(x+u, v, z+w)$ , em que  $u$ ,  $v$  representam as componentes horizontais do movimento (no plano do cabo e no plano perpendicular ao cabo, respetivamente) e  $w$  representa a componente vertical do movimento. A Figura 3.2 ilustra o presente parágrafo:

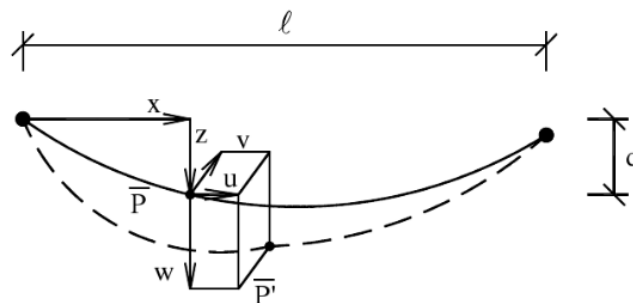


Figura 3.2 - Representação do deslocamento de um ponto P genérico pertencente a um cabo em vibração. [1]

A partir do estudo do equilíbrio dinâmico do ponto  $P$  de um segmento genérico com comprimento  $ds$  obtém-se as seguintes equações de equilíbrio (3.1, 3.2 e 3.3):

$$H \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = m \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (3.1)$$

$$H \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + h_\tau \frac{d^2 z}{dx^2} = m \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3.2)$$

$$\frac{h_\tau \cdot L_e}{E \cdot A_0} = \frac{m \cdot g}{H} \int_0^\ell w \, dx \quad (3.3)$$

Sendo que  $H$  representa a componente horizontal da tensão instalada no cabo quando atua o peso próprio,  $A_0$  a secção transversal do cabo,  $h_\tau$  a parte dinâmica da tensão presente no cabo dado por  $h_\tau = \tau \frac{dx}{ds}$  e  $L_e$  representa o comprimento efetivo também denominado por comprimento virtual do cabo que pode ser definido pela equação (3.4).

$$L_e = \int_0^L \left( \frac{ds}{dx} \right)^3 dx \approx L \left\{ 1 + 8 \left( \frac{d}{L} \right)^2 \right\} \quad (3.4)$$

### 3.3.2 Modos de vibração e frequências naturais de vibração

No que diz respeito às frequências naturais do cabo e à representação dos modos de vibração há que dar ênfase ao facto de existir movimento tanto no plano do cabo como na direcção perpendicular deste, doravante denominado fora do plano do cabo.

Estes dois planos de estudo são independentes pela linearização das equações de equilíbrio acima descritas, sendo que um distúrbio num dos planos considera-se que não provoca movimento no outro. Ainda assim vibrações fora do plano do cabo não provocam variações de tensão no mesmo, o que já não acontece quando existem vibrações no plano do cabo.

Este tipo de linearização só é válida para níveis baixos de vibração, como ocorre em situações de vibração ambiental.

Contudo, optou-se mostrar também como são calculados os modos de vibração para movimentos fora do plano de cabo, na direcção de  $Y$ . Estes são resultado da solução homogénea da equação (3.1)

$$\begin{cases} \omega_n = \frac{n\pi}{\ell} \cdot \sqrt{\frac{H}{m}} \\ \tilde{v}_n = A_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \end{cases}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.5)$$

onde  $\omega_n$  representa a frequência natural do enésimo modo de vibração,  $\tilde{v}_n$  o respetivo formato do modo de vibração e  $A_n$  uma constante arbitrada, como a amplitude máxima do movimento.

Já no que diz respeito ao estudo das frequências naturais e aos modos de vibração no plano do cabo, este deve ser separado em modos antissimétricos e simétricos, pois estes apresentam características diferentes e considera-se que o rácio flecha-comprimento é pequeno ( $d/L \leq 1/8$ ), como é explicado nas páginas 164 e 165 de [6].

É de notar ainda que no plano do cabo existem duas componentes de movimento,  $u(x, t)$  e  $w(x, t)$ , horizontal e vertical, respetivamente.

Para modos antissimétricos tem-se:

$$\begin{aligned} \omega_n &= \frac{2n\pi}{\ell} \cdot \sqrt{\frac{H}{m}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \\ \tilde{u}_n(x) &= -\frac{1}{2} \left( \frac{mg\ell}{H} \right) A_n \left\{ \left( 1 - \frac{2x}{\ell} \right) \sin\left(\frac{2n\pi x}{\ell}\right) + \frac{1 - \cos\left(-\frac{2n\pi x}{\ell}\right)}{n\pi} \right\} \\ \tilde{w}(x) &= A_n \cdot \sin\left(\frac{2n\pi x}{\ell}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (3.6)$$

onde  $\omega_n$  representa a frequência natural do enésimo modo de vibração antissimétrico,  $\tilde{u}_n$  e  $\tilde{w}_n$  o formato do modo de vibração, respetivamente, componentes longitudinal e vertical. À amplitude da componente longitudinal pode-se denominar por  $B_n = 1/2 \cdot (mg\ell/H) \cdot A_n$ .

A figura seguinte representa a variação de movimento das duas componentes ao longo de um cabo genérico para o primeiro modo de vibração antissimétrico.

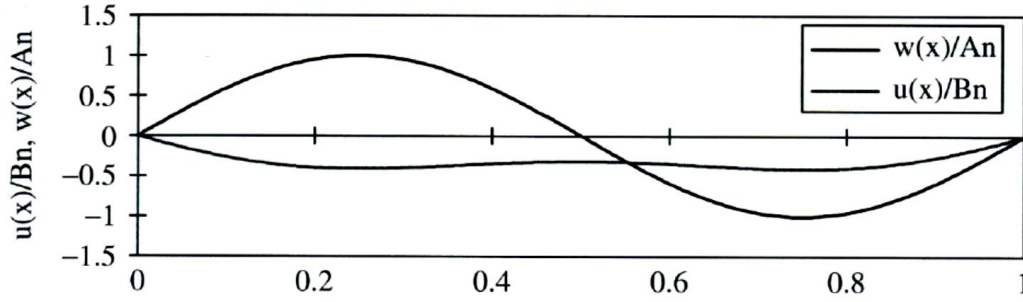


Figura 3.3 - Componentes longitudinal e vertical do primeiro modo de vibração antissimétrico. (adaptado de [6])

Para modos simétricos, devido ao facto de se incluir um aumento de tensão induzido pelo movimento,  $h_\tau$ , as frequências naturais serão dadas pelas raízes da seguinte expressão:

$$\tan \frac{\bar{\omega}}{2} = \frac{\bar{\omega}}{2} - \frac{4}{\lambda^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{2} \right)^3 \quad (3.7)$$

onde  $\bar{\omega}$  é a frequência natural adimensional,  $\bar{\omega} = \omega \ell / (H / m)^{1/2}$ ,  $\lambda^2$  é o parâmetro de Irvine que introduz as características geométricas e de deformabilidade do cabo e é obtido a partir da equação (3.8).

$$\lambda^2 = \frac{\left( \frac{mgL}{T} \right)^2 L \cdot E \cdot A}{T \cdot L_e} \quad (3.8)$$

Considerando  $L_e$  definido pela expressão (3.4) e  $L_x$  definido por:

$$L_x = \ell \left[ \frac{x}{\ell} + \frac{3}{8} \left( \frac{mg\ell}{H} \right)^2 \left\{ \frac{x}{\ell} - 2 \left( \frac{x}{\ell} \right)^2 + \frac{4}{3} \left( \frac{x}{\ell} \right)^3 \right\} \right] \quad (3.9)$$

Então os modos de vibração são definidos a partir da expressão (3.10),

$$\begin{aligned}\tilde{u}_n(x) &= \frac{mg\ell}{H} \cdot C_n \cdot \left[ \frac{\bar{\omega}^2}{\lambda^2} \cdot \frac{L_x}{L_e} - \frac{1}{2} \left( 1 - 2 \frac{x}{\ell} \right) \cdot \left\{ 1 - \tan \frac{\bar{\omega}}{2} \cdot \sin \left( \frac{\bar{\omega} x}{\ell} \right) - \cos \left( \frac{\bar{\omega} x}{\ell} \right) \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\bar{\omega}} \left\{ \frac{\bar{\omega} x}{\ell} - \tan \frac{\bar{\omega}}{2} \cdot \left( 1 - \cos \left( \frac{\bar{\omega} x}{\ell} \right) \right) - \sin \left( \frac{\bar{\omega} x}{\ell} \right) \right\} \right] \\ \tilde{w}(x) &= C_n \left\{ 1 - \tan \frac{\bar{\omega}}{2} \cdot \sin \left( \frac{\bar{\omega} x}{\ell} \right) - \cos \left( \frac{\bar{\omega} x}{\ell} \right) \right\}\end{aligned}\quad (3.10)$$

Para valores de  $\lambda^2$  muito elevados pode-se admitir que

$$\tan \frac{\bar{\omega}}{2} = \frac{\bar{\omega}}{2} \quad (3.11)$$

Assim sendo as raízes da equação (3.7) podem ser dadas por:

$$\bar{\omega}_n = (2n+1)\pi - \frac{4}{(2n+1)\pi}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.12)$$

Nos casos em que o parâmetro de Irvine,  $\lambda^2$ , assume valores muito baixos as frequências naturais poderão ser calculadas através de:

$$\bar{\omega}_n = (2n+1)\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.13)$$

No entanto segundo Mehrabi e Tabatabai [22] na maioria das pontes existentes no mundo (95%) terão valores do parâmetro de Irvine baixos que rondam  $\lambda^2 < 3,1$ .

A figura seguinte representa a variação de movimento das duas componentes ao longo de um cabo genérico para o primeiro modo de vibração simétrico.

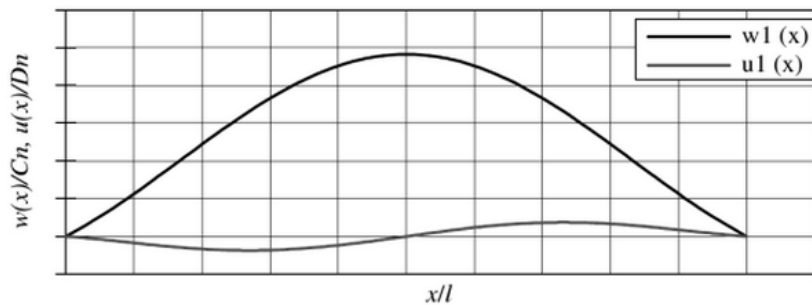


Figura 3.4 - Componentes longitudinal e vertical do primeiro modo de vibração simétrico. (adaptado de [6])

### 3.3.3 Aproximação simplificada para cabos inclinados

A teoria linear da vibração foi adaptada, por Irvine, para cabos inclinados apenas com o pressuposto de transformar coordenadas globais para coordenadas locais, isto é, as

componentes do movimento deixam de ser horizontais e verticais transformando-se em paralelas e perpendiculares à direção do cabo. Essa transformação é feita a partir das seguintes expressões:

$$\begin{aligned}x_* &= x \sec \theta + z \sin \theta \\z_* &= z \cos \theta\end{aligned}\tag{3.14}$$

De onde  $x_*$  e  $z_*$  são coordenadas locais,  $x$  a distancia entre a ancoragem e o ponto em estudo,  $z$  a flecha do cabo no ponto em estudo e  $\theta$  o ângulo que o cabo faz com a horizontal.[6]

A partir desta transformação de coordenadas pode-se então referir que a frequência natural adimensional fora do plano do cabo é dada por:

$$\bar{\omega}_{*n} = n\pi \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots\tag{3.15}$$

Para modos de vibração antissimétricos no plano do cabo é dada por:

$$\bar{\omega}_{*n} = 2n\pi \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots\tag{3.16}$$

Enquanto para os modos de vibração simétricos no plano do cabo as frequências naturais são dadas pelas raízes da seguinte expressão:

$$\tan\left(\frac{\bar{\omega}_{*n}}{2}\right) = \frac{\bar{\omega}_{*n}}{2} - \lambda_*^2 \left(\frac{\bar{\omega}_{*n}}{2}\right)^3\tag{3.17}$$

Irvine conclui também que esta aproximação simplificada não é valida para todas as inclinações entre 0° e os 90°, sendo que a precisão diminui com o aumento da inclinação. Contudo, segundo [6] pode-se validar este processo desde que as inclinações não sejam superiores a 60°.

### **3.4 Abordagens do método de vibração baseado na teoria de corda vibrante**

O método da vibração é referenciado com um dos mais utilizados no ramo da engenharia, devido a ser muito eficiente, de fácil aplicação no que diz respeito à medição de forças em cabos e económico.

Este método relaciona as forças instaladas num cabo em tenção com a frequência de vibração que este apresenta, baseando-se na teoria das cordas vibrantes.

A medição da frequência é usualmente feita com recurso a acelerómetros instalados nos cabos em estudo e ligados a um sistema de aquisição de dados. Este regista a história de acelerações

medida pelos acelerómetros originados pela vibração ambiental do cabo devido à ação do vento, a cargas de serviço ou a forças instantâneas aplicadas ao cabo.

As medições, posteriormente, são sujeitas a um processamento para que se obtenham os modos de vibração e frequências naturais associadas. O processo mais comum é a realização da transformada rápida de Fourier (FFT – *Fast Fourier Transform*) que a partir de uma história de acelerações no domínio do tempo origina um espetro de acelerações no domínio da frequência.

A teoria das cordas vibrantes (TCV) resulta, segundo [6], de uma aplicação direta da teoria da propagação da onda em que uma corda tensionada e fixa nas duas extremidades tem uma frequência fundamental de vibração que está diretamente relacionada com a tensão nela aplicada.

No entanto esta teoria, segundo [20] poderá ser classificada em quatro tipos de abordagem. A primeira abordagem trata-se da aplicação direta da TCV desprezando tanto efeitos da flecha bem com da flexão:

$$f_{cvm} = n \cdot \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{m}} \quad (3.18)$$

em que  $T$  é a força instalada na corda,  $L$  o comprimento da corda e  $m$  a massa por unidade de comprimento.  $n$  é o modo de vibração,  $f_{cvm}$  a frequência natural da corda vibrante associada ao modo de vibração e unidade de comprimento.

Embora esta abordagem seja apenas válida para cabos simples, com baixos valores de flecha e alta rigidez à flexão, não deixa de ser uma boa primeira aproximação da tensão.

A segunda aproximação existente baseia-se na referida anteriormente mas tendo em conta, agora, o efeito da flexão:

$$\left(\frac{f_n}{n}\right)^2 = \left(\frac{1}{4mL^2}\right)T + \left(\frac{n^2\pi^2}{4mL^4}\right)EI \quad (3.19)$$

onde  $EI$  é denominada como rigidez à flexão do cabo.

Esta abordagem tal como a primeira é das mais utilizadas neste campo de medição de forças em cabos em tempo real devido à sua simplicidade e rapidez.

A terceira abordagem faz uso da teoria moderna dos cabos apresentado em 1986 por Triantafyllou e Grinfolgel em que é considerada a flecha do cabo e despreza o efeito da flexão [41]. Esta teoria é dada pela seguinte expressão:

$$\sin(\gamma) \left[ \gamma \left( \frac{4\gamma^2}{\lambda_1^2} - 1 \right) \cos(\gamma) + \sin(\gamma) \right] - \frac{49}{64} \frac{\varepsilon^2}{1 + \left( \frac{l}{h} \right)^2} \cos(2\gamma) = 0 \quad (3.20)$$

onde:

$$\gamma = \left( \frac{\omega_n L_s}{2} \right) \sqrt{\frac{m}{T_a}} \quad (3.21)$$

$$T_a = \frac{H}{\cos(\theta)} \quad (3.22)$$

$$\lambda_1^2 = \left( \frac{wL_s}{T_a} \right)^2 \frac{EA}{T_a \cos^2(\theta)} \quad (3.23)$$

$$\varepsilon = \frac{wL_s}{T_a} \quad (3.24)$$

E as variáveis são:

- $H$  – Componente horizontal da força;
- $w$  – Peso por unidade de comprimento;
- $EA$  – Rigidez axial do cabo;
- $\theta$  – Ângulo que o cabo faz com a horizontal;
- $h$  – Cota entre a zona de ancoragem e mastro;
- $l$  – Extensão horizontal do cabo;
- $L_s$  – Flecha inicial no cabo pré-tensionado;
- $\omega_n$  – Frequência natural do cabo enésimo modo.

No entanto existem grandezas não lineares presentes na equação (3.20), como a componente horizontal da tensão que terá de ser encontrada por método de tentativa e erro, segundo o descrito em [20]. Esta abordagem requer também *a priori* um conhecimento da rigidez axial e do comprimento pré-tencionado do cabo.

Por último é apresentada a abordagem feita por Zui *et al.* [43] que tem em conta tanto o efeito da flecha com o efeito da flexão.

Esta é realizada avaliando a flecha que o cabo apresenta utilizando a seguinte expressão:

$$\Gamma = \sqrt{\frac{wL}{128EA\delta^3 \cos^5 \theta}} \cdot \left[ \frac{0.31\xi_1 + 0.5}{0.31\xi_1 - 0.5} \right] \quad (3.25)$$

onde  $\xi_1 = \sqrt{\frac{T}{EI}} \cdot L$ , que insere a contribuição da rigidez à flexão na abordagem e  $\delta$  é o rácio flecha-comprimento.

Fazendo essa avaliação da flecha e tendo em conta o fator  $\xi_1$  são utilizadas as seguintes expressões para o cálculo da força instalada nos cabos. No entanto é necessária a definição de uma constante  $C$  que irá fazer parte das expressões que serão apresentadas e que também insere na abordagem o efeito da rigidez à flexão do cabo, esta é definida pela seguinte expressão,

$$C = \sqrt{\frac{EI}{mL^4}} \quad (3.26)$$

- No caso de cabos com flecha reduzida ( $3 \leq \Gamma$ ):

$$T = 4m(f_1L)^2 \left[ 1 - 2.2 \frac{C}{f_1} - 0.55 \left( \frac{C}{f_1} \right)^2 \right], \quad 17 \leq \xi_1 \quad (3.27)$$

$$T = 4m(f_1L)^2 \left[ 0.865 - 11.6 \left( \frac{C}{f_1} \right)^2 \right], \quad 6 \leq \xi_1 \leq 17 \quad (3.28)$$

$$T = 4m(f_1L)^2 \left[ 0.828 - 10.5 \left( \frac{C}{f_1} \right)^2 \right], \quad 0 \leq \xi_1 \leq 6 \quad (3.29)$$

- No caso em que o cabo apresenta uma grande flecha ( $\Gamma \leq 3$ ):

$$T = 4m(f_2L)^2 \left[ 1 - 4.40 \frac{C}{f_2} - 1.10 \left( \frac{C}{f_2} \right)^2 \right], \quad 60 \leq \xi_1 \quad (3.30)$$

$$T = 4m(f_2L)^2 \left[ 1.03 - 6.33 \frac{C}{f_2} - 1.58 \left( \frac{C}{f_2} \right)^2 \right], \quad 17 \leq \xi_1 \leq 60 \quad (3.31)$$

$$T = 4m(f_1L)^2 \left[ 0.882 - 85.0 \left( \frac{C}{f_2} \right)^2 \right], \quad 0 \leq \xi_1 \leq 17 \quad (3.32)$$

- Para casos em que são utilizados maiores modos de vibração:

$$T = \frac{4m}{n^2} (f_n L)^2 \left( 1 - 2.20 \frac{nC}{f_n} \right), \quad 200 \leq \xi, \quad 2 \leq n \quad (3.33)$$

Esta abordagem, apesar de, aparentemente, relacionar todas as propriedades de um cabo em funcionamento, apresenta alguns contras, como, a medição do cabo em forma estática, no caso de estruturas já existentes, torna-se um processo de elevado preço e em alguns casos torna-se difícil a medição das rigidezes axial e de flexão.

Apresentadas as quatro abordagens descritas por Byeong Hwa Kim [20] no decorrer desta dissertação e para aplicação nos casos de estudo será utilizada a primeira abordagem tendo em conta alguns pressupostos e simplificações apresentados na secção seguinte.

### 3.5 Método da vibração baseado na teoria do comportamento dinâmico do cabo

Segundo Casas [9], para que a teoria das cordas vibrantes, apresentada na secção anterior pela expressão (3.18), seja passível de aplicação, deverão ser satisfeitas as seguintes condições:

- O cabo em estudo deverá ser perfeitamente flexível e com condições de apoio fixas;
- Não deverá existir interação dos modos de vibração do tabuleiro e do cabo;
- Terá de existir linearidade entre a ordem dos modos de vibração e as frequências naturais dos mesmos;

$$f_{cvm} = n \cdot f_{cv1} \quad (3.34)$$

- O cabo terá de ser considerado inextensível e com rigidez exclusivamente axial.

No entanto devido ao comportamento do cabo, a frequência do modo fundamental (1º modo) é ligeiramente superior à enésima frequência dividida pela ordem do respetivo modo. Assim sendo existem alguns autores como Jean-Louis Robert *et al.* [29] que defendem a utilização de uma média ponderada das várias frequências naturais dos vários modos de vibração como descrito na expressão:

$$\bar{f} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{f_i}{i} \quad (3.35)$$

Sendo também defendido que serão atingidos bons resultados analisando apenas os sete primeiros modos de vibração.

Esta média ponderada deverá ser feita após a execução de regressão linear dos modos em que deverá apresentar um coeficiente de determinação,  $R^2$ , superior a 0,999 para que a média seja válida.

Sabe-se, também, que, em geral, os pressupostos em cima descritos não são possíveis de alcançar em situações reais. Então para que os efeitos da flecha e da rigidez de flexão sejam considerados, as frequências naturais conseguidas a partir das medições feitas serão relacionadas com a frequência do modelo de corda vibrante introduzindo os parâmetros de Irvine [5],  $\lambda^2$  (expressão 3.8) e introduzindo o efeito da flexão dado pela seguinte expressão:

$$\xi = L\sqrt{\frac{T}{EI}} \quad (3.36)$$

Segundo Mehrabi e Tabatabai [22] na maioria das pontes existentes no mundo (95%) terão valores de  $\lambda^2 < 3,1$  e  $\xi > 50$  podendo assim garantir uma relação simplificada entre a frequência natural do cabo em estudo e a frequência natural da corda vibrante equivalente da seguinte forma:

$$\frac{f_n}{f_{cvn}} = \alpha\beta_n - 0,24\frac{\mu}{\xi} \quad (3.37)$$

em que:

$$\bullet \quad \alpha = 1 + 0,039\mu \quad (3.38)$$

$$\bullet \quad \mu = \begin{cases} \lambda^2 & \Leftarrow n = 1 \\ 0 & \Leftarrow n > 1 \end{cases} \quad (3.39)$$

$$\bullet \quad \beta_n = 1 + \frac{2}{\xi} + \frac{\left(4 + \frac{n^2\pi^2}{2}\right)}{\xi^2} \quad (3.40)$$

Analisando as expressões anteriores podemos retirar duas conclusões desta simplificação:

1. Os parâmetros que introduzem o efeito de flecha e de rigidez à flexão dependem da força existente no cabo o que torna este processo num processo iterativo em que o valor de base utilizado para a iteração inicial será o valor de projeto ou então será realizado o cálculo segundo a teoria das cordas vibrantes com a primeira frequência natural do cabo em estudo.

2. Analisando as últimas quatro expressões pode-se concluir que para modos superiores ao primeiro modo, no plano do cabo, a frequência não é influenciada pela flecha, ou seja o efeito da flecha é desprezado. Segundo [22] isto também se verifica para modos de vibração que sejam perpendiculares ao plano do cabo originando um relação simplificada:

$$\frac{f_n}{f_{cvn}} = \beta_n \quad (3.41)$$

Para além desta simplificação necessária à aplicação do método existem outras dificuldades na aplicação do método como o comprimento do cabo e a massa por unidade de comprimento.

No que diz respeito ao comprimento do cabo este, geralmente, é determinado pelo projeto da estrutura. No entanto, o vão livre de vibração não é equivalente ao comprimento do cabo quando existir interferências na vibração no cabo como contacto entre o cabo de pré-esforço e a estrutura, ou a utilização de amortecedores nos tirantes. Estes fatores devem ser averiguados para uma correta definição do vão livre.

No caso de cabos de pré-esforço, originalmente eram inseridos numa única bainha preenchida com caldas cimentícias, de forma idêntica à do pré-esforço aderente. Nestas condições as frequências medidas refletem o comportamento do conjunto dos cordões, bainhas e da calda.

Mais recentemente, tem sido adotada uma proteção individual de cada cordão, idêntica à utilizada nos tirantes. Nestes cabos apenas há a considerar a massa dos diversos cordões e as respetivas bainhas.

# 4. DESENVOLVIMENTO DO ALGORITMO PARA APLICAÇÃO DO MÉTODO DA VIBRAÇÃO

## 4.1 Considerações iniciais

A avaliação da força instalada nos cabos através do método da vibração requer a medição da aceleração dos cabos. Para esse efeito são utilizados acelerómetros de grande sensibilidade, com elevada frequência, sendo necessário proceder posteriormente ao pré-processamento dos valores medidos de forma a remover ruídos, componentes de altas frequências, reduzir o volume do registo, eliminar qualquer interferência provocada por vibração forçada, por exemplo, o tráfego de uma ponte em serviço.

No presente capítulo apresenta-se um algoritmo desenvolvido em *MATLAB*, para identificar de forma automática as frequências naturais dos cabos e determinar as correspondentes forças instaladas a partir dos valores medidos, indicando a metodologia utilizada e como foram implementadas as devidas correções.

A identificação modal foi realizada através da análise dinâmica da resposta estrutural ao longo do tempo.

Nesta perspetiva, a análise dinâmica tem como objetivo identificar os principais parâmetros modais, como frequências naturais, configurações dos modos de vibração e o amortecimento.

No âmbito deste trabalho só terá interesse a identificação de frequências naturais a partir de leituras feitas em obra.

Esta análise será feita utilizando séries de Fourier transformando assim os dados recolhidos no domínio de tempo para o domínio da frequência.

Neste tipo de análise proveniente de séries temporais recolhidas em obra é usual a utilização de janelas de dados sendo este assunto abordado no capítulo seguinte.

## 4.2 Identificação modal

A obtenção de forças a partir do método da vibração é feita com recurso à frequência natural fundamental do cabo, identificada por via da análise através dos espetros de resposta.

A identificação modal de estruturas ou cabos, nesta dissertação, é feita com base na análise por transformadas discretas de Fourier (expressão (4.1)), em que se procede à decomposição de uma história de acelerações, velocidades ou deslocamentos, medida num dado ponto da estrutura, em várias ondas sinusoidais (harmónicas).

$$X(\omega, T') = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j\omega k \Delta t} \quad (4.1)$$

em que:

$N$  - Número total de valores discretos adquiridos;

$\Delta t$  - Intervalo de tempo entre os valores discretos;

$\omega$  - Frequências arbitrária;

$T'$  - Duração do sinal.

A Figura 4.1 ilustra a técnica utilizada na identificação modal.

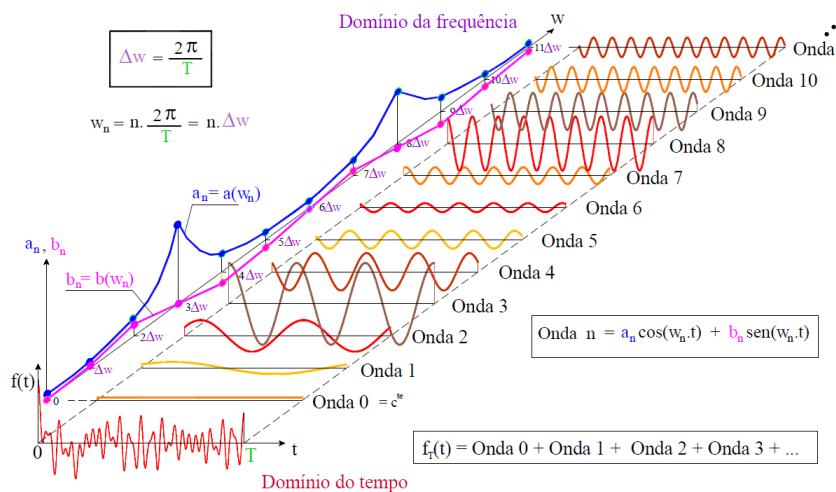


Figura 4.1 - Decomposição de uma série temporal (história) nas suas harmónicas. (adaptado de [23])

Esta técnica permite, através da aplicação de vários registos medidos, sincronizadamente, em pontos diferentes do cabo, identificar os principais modos de vibração.

A identificação modal no domínio da frequência pode ser feita a partir de várias formulações matemáticas, baseadas na avaliação de funções de densidade espectral de potência da resposta registada através de ensaios experimentais.

Segundo Mendes [23], para chegar às funções de densidade espectral de potência deverá ter-se em consideração noções de processamento digital e análise espectral de sinais. Este tema é abordado com mais ênfase em bibliografia da especialidade que é referida em [23]<sup>1</sup>.

É de notar, também, que a obtenção destas funções pode ser realizada com recurso ao algoritmo da transformada rápida de Fourier – FFT (*Fast Fourier Transform*) [10].

As funções de densidade espectral de potência da resposta (DEP), usualmente tomam a forma de matriz, em que cuja diagonal principal se encontram os auto-espectros da resposta dos vários graus de liberdade e nos restantes membros da matriz se encontram os denominados de espectros cruzados que relacionam a resposta dos vários graus de liberdade instrumentados. Esta matriz é quadrada desde que a medição da resposta seja efetuada em todos os pontos em simultâneo.

No caso de cabos é recorrente a utilização de um único ponto instrumentado o que gera apenas um auto-espectro de resposta.

A matriz das funções DEP podem ser organizadas de acordo com a seguinte expressão:

$$S_{ij}(\omega_m) = \frac{X_i^*(\omega_m)X_j(\omega_m)}{T'}, \quad i, j = 1, 2, \dots, NPI \text{ e } m = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (4.2)$$

A equação (4.2) pode ser utilizada devido ao facto de se considerar os conceitos associados às funções de densidade espectral de potência da resposta e a sua aplicação a histórias de acelerações medidas.

As histórias medidas têm duração finita,  $T'$ , assim sendo os espectros obtidos são apenas estimativas destes, conseguidas através do produto conjugado da transformada discreta de Fourier no grau de liberdade  $i$  pela transformada de Fourier no grau de liberdade  $j$ , representados na expressão por  $X_i^*(\omega_m)$  e  $X_j(\omega_m)$ , respetivamente.  $\omega_m$  pode ser definido pela expressão (4.3) e  $NPI$  como o número de pontos instrumentados.

---

<sup>1</sup> Caetano, E. 1992. *Identificação experimental de parâmetros dinâmicos em sistemas estruturais. Tese de Mestrado, Faculdade de Engenharia de Universidade do Porto, Porto, Portugal.*; Carvalho, F., Costa, C. O. e Azevedo, F. S. 1989. *Elementos de Sistemas e de Análise e Processamento de Sinais. Curso LNEC, Lisboa, Portugal.* e Bendat, J. e Piersol, A. 1993. *Engineering Applications of Correlation and Spectral Analysis 2nd Edition. John Wiley & Sons.*

$$\omega_m = \frac{m}{N} \frac{2\pi}{\Delta t}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (4.3)$$

Este método é limitado por uma resolução de frequência que é dada pelo inverso da duração total dos registos [32]:

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{N\Delta t} \quad [rad / s] \quad \Leftrightarrow \quad \Delta f = \frac{1}{N\Delta t} \quad [Hz] \quad (4.4)$$

No entanto, segundo Paulo Mendes [23], a utilização direta da equação (4.2) origina uma estimativa espectral com variância muito elevada, pela razão do seu cálculo ser feito a partir apenas de uma série temporal (história). Para diminuir a variância, é usual dividir a série temporal em segmentos mais curtos e adotar uma sobreposição entre eles e posteriormente obter-se médias dos segmentos. A cada um dos segmentos é aplicada uma janela de dados,  $w_k$ , para que sejam evitados erros por *leakage*, ou por escorregamento. Deste modo a matriz das funções DEP pode ser expressa da seguinte forma,

$$\tilde{S}_{ij}(\omega_m) = \frac{1}{n_d} \sum_{k=1}^{n_d} \left[ \frac{X_i^*(\omega_m) X_j(\omega_m)}{T_d \sum_{k=0}^{N-1} |w_k|^2} \right]_k, \quad i, j = 1, 2, \dots, NPI \quad \text{e} \quad m = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (4.5)$$

em que  $n_d$ , corresponde ao número de segmentos utilizados e  $T_d$ , corresponde ao comprimento da janela de dados utilizado. Assim é possível obter estimativas de espectros mais “limpas”.

No que diz respeito às janelas de dados a utilizar o quadro seguinte adaptado de [21] apresenta algumas das janelas de dados existentes e qual a sua melhor utilização:

Tabela 4.1 - Janelas de dados e suas melhores utilizações. (adaptado de [21])

Janela	Melhor tipo de sinal	Resolução da frequência	Menor erro por escorregamento	Precisão de amplitude
Barlett	Aleatório	Bom	Razoável	Razoável
Blackman	Aleatório ou misto	Fraco	Muito Bom	Bom
Flat top	Sinusoidal	Fraco	Bom	Muito Bom
Hanning	Aleatório	Bom	Bom	Razoável
Hamming	Aleatório	Bom	Razoável	Razoável
Kaiser-Bessel	Aleatório	Razoável	Bom	Bom
Tukey	Aleatório	Bom	Fraco	Fraco
Welch	Aleatório	Bom	Bom	Razoável

Na aplicação *MATLAB* desenvolvida foi aplicada a janela de Hanning associada a uma sobreposição de 2/3, que, segundo alguns autores como Rodrigues [32], é a janela que tem o melhor aproveitamento da informação contida nas histórias de acelerações.

A identificação modal com recurso à matriz das funções de densidade espectral de potência deu origem a vários métodos no domínio da frequência, designadamente:

- O método básico no domínio da frequência (BFD – *Basic Frequency Domain*);
- O método de decomposição no domínio da frequência (FDD – *Frequency Domain Decomposition*);
- A versão melhorada do método da decomposição do domínio da frequência (EFFD)
- O método p-LSCF (*poly-Least Squares Complex Frequency*).

Nesta dissertação o método utilizado será o método básico no domínio da frequência, ou também denominado por método da seleção de picos ou *Peak Picking* (PP). Segundo [23] este método foi o pioneiro na área da identificação modal e é apresentado como um método de fácil aplicação e implementação, permitindo obter bons resultados e boa interpretação física, sendo assim muito utilizado em aplicações de engenharia civil.

O método BFD tem por base a hipótese das ações ambientais serem consideradas como um processo estocástico gaussiano de ruído branco com média nula. Assim as funções de densidade espectral da resposta manifestam picos onde se irão situar as frequências naturais de vibração, pois é aí que as funções DEP apresentam uma concentração energética.

A identificação das frequências naturais é feita com recurso a espetros normalizados e no caso de existir mais que um ponto instrumentado fazer-se uma média desses espetros.

A normalização dos espetros (NPSD – *Normalized Power Spectral Density*) é feita a partir da divisão das estimativas dos auto-espetros  $\tilde{S}_{ii}(\omega_m)$  pela soma das suas ordenadas

$$NPSD_i(\omega_m) = \frac{\tilde{S}_{ii}(\omega_m)}{\sum_{m=i}^{N_F} \tilde{S}_{ii}(\omega_m)} \quad (4.6)$$

O cálculo da média dos auto-espetros normalizados (ANSPD - *Average Normalized Power Spectral Density*) é feito segundo a seguinte expressão,

$$ANSPD(\omega_m) = \frac{1}{n_o} \sum_{i=1}^{n_o} NPSD_i(\omega_m) \quad (4.7)$$

em que  $n_o$  é o número de pontos instrumentados.

A figura seguinte mostra um auto-espectro calculado pela aplicação *MATLAB* num caso de estudo deste trabalho final de mestrado.

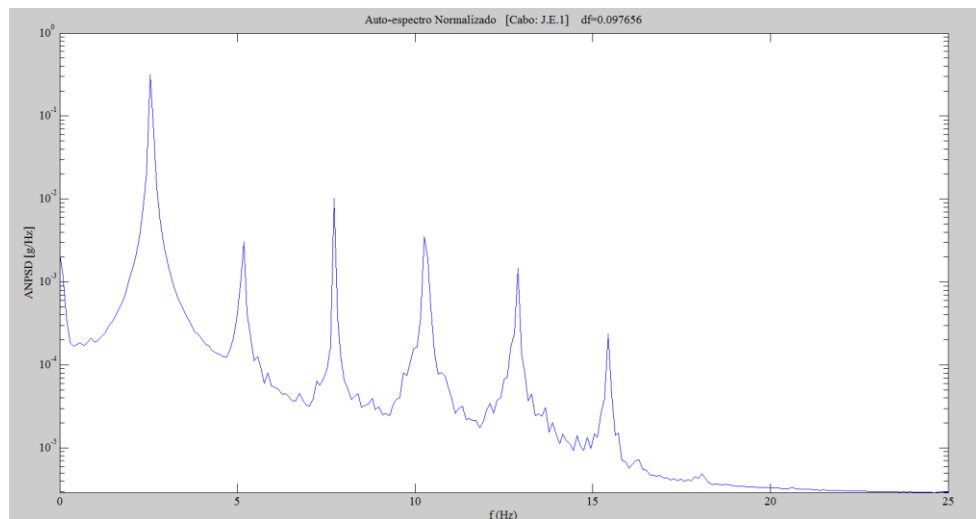


Figura 4.2 - Espectro normalizado médio de um cabo obtido na aplicação *MATLAB*.

### 4.3 Implementação do método da vibração

O método da vibração implementado na aplicação *MATLAB* é baseado na teoria das cordas vibrantes que tem a expressão (3.18) apresentada no capítulo anterior:

$$f_{cvm} = n \cdot \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{m}} \quad (4.8)$$

Para considerar o efeito da flecha e da flexão do cabo são utilizadas as correções simplificadas, apresentadas na secção 3.5.

Antes de se proceder à utilização direta da expressão terá de se inserir alguns dados referentes às características principais do cabo como, módulo de elasticidade, comprimento e inércias, entre outros.

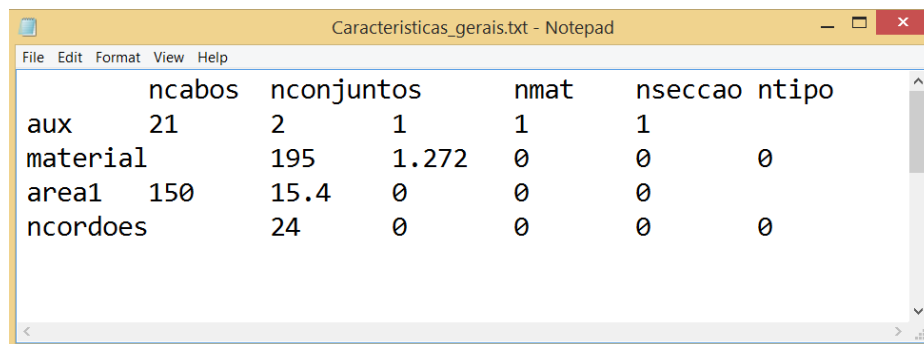
A introdução de dados foi feita com recurso às funções *strcat*, que servirá para o utilizador escolher o ficheiro de características gerais a partir de qualquer diretoria, e *uiimport* que servirá

para a importação do ficheiro escolhido. Esta última função é utilizada pelo facto de se pretender importar tanto dados em formato de *script* (texto) como formato de *number* (número).

O ficheiro que contém as características gerais deverá ter extensão *.txt* e conter informações como:

- Número total de cabos (*ncabos*);
- Número de conjuntos (*nconjuntos*) – que indicará o número de conjuntos de cabos, por exemplo, no caso de existirem duas linhas de tirantes numa ponte, uma a jusante e outra a montante;
- Número de materiais (*nmat*) – Indicará o número de materiais caso existam cabos compostos matérias diferentes;
- Número de secção (*nseccao*) – Indicará o número de secções transversais diferentes dos cabos, caso existam;
- Número de tipologia do cabo (*ntipo*) – Indicará o número de tipologias de cabo existentes no sistema, por exemplo, cabos com diferentes quantidades de cordões.

A figura seguinte mostra um exemplo de ficheiro de características gerais,



	ncabos	nconjuntos	nmat	nseccao	ntipo
aux	21	2	1	1	
material		195	1.272	0	0
area1	150	15.4	0	0	0
ncordoes		24	0	0	0

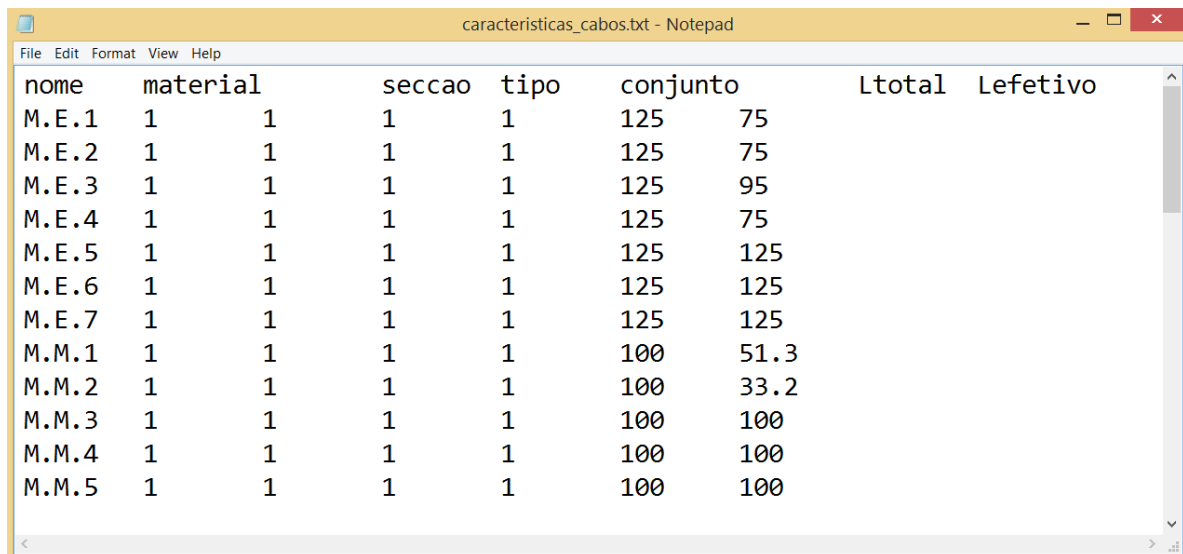
Figura 4.3 - Exemplo de ficheiro com as características gerais.

Na Figura 4.3 existem quatro linhas preenchidas em que a primeira (*aux*) fará corresponder aos títulos preenchidos, posteriormente cada linha indicará o valor da característica segundo a seguinte ordem, da esquerda para a direita e de cima para baixo:

- Módulo de elasticidade – E em GPa;
- Massa por unidade de comprimento do conjunto “cordão + bainha” – em kg/m;

- Área total do cabo –  $A$  em  $\text{mm}^2$ ;
- Diâmetro do cabo –  $\phi$  em  $\text{mm}$ ;
- Número de cordões.

No entanto, existe a necessidade de atribuir características aos respetivos cabos e para isso há que criar um ficheiro de incidências a que foi dado o nome de *caracteristicas\_cabos.txt* e contém o nome do cabo e as incidências para que se possa atribuir as características a cada cabo. A Figura 4.4 mostra um exemplo de como será este ficheiro.



nome	material	seccao	tipo	conjunto	Ltotal	Lefetivo
M.E.1	1	1	1	125	75	
M.E.2	1	1	1	125	75	
M.E.3	1	1	1	125	95	
M.E.4	1	1	1	125	75	
M.E.5	1	1	1	125	125	
M.E.6	1	1	1	125	125	
M.E.7	1	1	1	125	125	
M.M.1	1	1	1	100	51.3	
M.M.2	1	1	1	100	33.2	
M.M.3	1	1	1	100	100	
M.M.4	1	1	1	100	100	
M.M.5	1	1	1	100	100	

Figura 4.4 - Exemplo de ficheiro para atribuição de características a cada cabo.

Como pode ser observado na figura também foram adicionados os comprimentos total e efetivo do cabo pois também variam de cabo para cabo.

Dadas as características dos cabos procede-se então ao processamento dos registos recolhidos. Este são inseridos, também, num ficheiro *\*.txt* em que na primeira linha deve ser apresentado o nome do cabo a que pertence a história de acelerações.

Nesta fase o programa de cálculo procede à identificação modal, para isso foi criada uma *function* denominada por *FFT\_BC.m*. Nesta é utilizado o método BFD tal como foi descrito anteriormente, em que a identificação das frequências naturais dos cabos é feita automaticamente tendo em conta que as frequências do cabo em análise são diretamente proporcionais à ordem do modo:

$$f_{cvn} = n \cdot f_{cv1} \quad (4.9)$$

Para facilitar a identificação da frequência natural de vibração do 1º modo é dada uma frequência de referência que pode ser calculada através da tensão que o cabo deverá suportar, definida pelo projeto ou pelo modelo analítico. Depois de encontrada a primeira frequência passa a ser esta utilizada como referência para determinação das frequências dos modos seguintes. Neste processo é dado um intervalo onde é feita a identificação do modo, definido da seguinte forma:

$$\left[ n \cdot f_{ref} - \frac{f_{ref}}{10}; n \cdot f_{ref} + \frac{f_{ref}}{10} \right] \quad (4.10)$$

Em que  $n$  é modo de vibração da frequência a identificar e  $f_{ref}$  a frequência de referência. O desvio do intervalo é de um décimo de  $f_{ref}$  para que a identificação seja mais precisa.

No entanto é dado ao utilizador da aplicação a opção de alterar ou anular alguma frequência que tenha sido mal identificada.

Por fim obtém-se as forças instaladas nos cabos em estudo através de um processo iterativo, onde a primeira iteração da força é calculada com a frequência natural do primeiro modo de vibração.

Nas iterações seguintes é utilizada a média ponderada das várias frequências dos vários modos de vibração como descrito na expressão (3.35) e aplicadas as simplificações e aproximações necessárias descritas em 3.5 para que sejam incluídos no cálculo os efeitos de flecha e de flexão do cabo.

O processo iterativo termina assim que a condição seguinte seja atingida.

$$T_n - T_{n-1} < 1 \text{ kN} \quad (4.11)$$



## 5. CASOS DE ESTUDO

### 5.1 Considerações iniciais

O algoritmo desenvolvido para o cálculo de forças instaladas em cabos foi aplicado em três casos de estudo, de forma a evidenciar as suas capacidades. Os casos de estudo escolhidos recaíram sobre três utilizações diferentes dos cabos: pré-esforço exterior na Ponte de S. João, no Porto, como tirantes no Viaduto Salah Bey em Constantine, Argélia e como pendurais na Ponte 25 de Abril, em Lisboa.

Com estes casos de estudo pretende-se verificar quais os parâmetros considerados na expressão do método da vibração (3.18) que mais influenciam o cálculo. Por outro lado, procura-se esclarecer se as simplificações que indicadas em 3.5, são possíveis de aplicação nos três sistemas em estudo.

A partir do estudo de um dos cabos do Viaduto Salah Bey procede-se a uma comparação do método da corda vibrante com a medição de forças através de anel dinamométrico e de células monocordão.

Após se proceder ao cálculo de forças em cabos será indicado o seu grau de incerteza calculado a partir da seguinte expressão:

$$dT = 4mL^2 f_{eq} df \quad (5.1)$$

em que  $dT$  é a incerteza do cálculo e  $df$  a resolução a que são obtidos os espectros de resposta dada pela expressão (4.4).

### 5.2 Medição do pré-esforço exterior na Ponte Ferroviária de S. João

#### 5.2.1 Descrição da Ponte de S. João

A Ponte de S. João (Figura 5.1) é uma obra de arte ferroviária de betão armado pré-esforçado que atravessa o rio Douro, ligando Vila Nova de Gaia e o Porto. Foi projetada pelo Eng.º Edgar Cardoso e inaugurada a 24 de Junho de 1991.



Figura 5.1 - Ponte de S. João.

(in <http://www.teprocil.com/Projectos/Obrasexecutadas/tabid/214/language/pt-PT/Default.aspx>)

Esta ponte tem uma extensão total de 1028,8 m, constituída por dois viadutos de acesso, para além da ponte principal sobre o rio Douro. O Viaduto da margem Sul (esquerda) é constituído por seis tramos com uma extensão total de 358 m; o Viaduto da margem Norte (direita) é constituído por três tramos com uma extensão total de 170 m. A ponte principal possui um vão central de 250m e dois tramos laterais de 125 m cada (Figura 5.2).

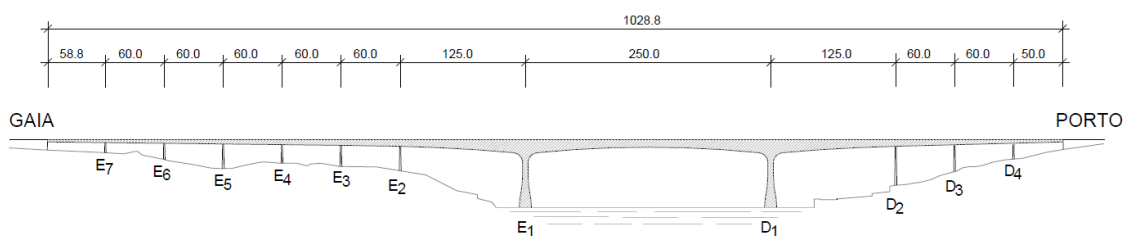


Figura 5.2 - Alçado da ponte de S. João. [37]

A ponte tem uma secção em viga em caixão bicelular, cuja altura varia entre os 12 m, sobre os pilares, e 7 m a meio vão.

A ponte foi construída pelo método dos avanços sucessivos a partir dos pilares centrais, cuja altura é de 50 m e de secção circular passando a retangular com o seu desenvolvimento em altura.

Os pilares centrais estão rigidamente ligados ao tabuleiro. Os restantes pilares estão ligados ao tabuleiro através de apoios fixos com exceção do pilar PE7 onde existe um apoio “pendular”.

O pré-esforço exterior é composto por sete cabos tanto a montante como a jusante, dispostos simetricamente ao eixo do tabuleiro e ao meio vão da ponte. Cada cabo é composto por 24 cordões de 0,6" auto-embainhados com carregamento previsto de 5000 kN. Os cabos são contínuos ao longo dos três vãos, perfazendo um comprimento total de 500 m [37]. Os cabos têm uma disposição linear com dispositivos de ancoragem sobre os pilares PE2 e PD2, como mostra a Figura 5.3.



Figura 5.3 - Ancoragem sobre o pilar PE2. (Montante)

Existem ainda desviadores situados sobre os pilares centrais e a 75 m dos mesmos para os tramos laterais e central, sendo que só os últimos estão neste momento em funcionamento como mostram as figuras seguintes.



Figura 5.4 - Desviador a 75 m do pilar PE1 (Jusante).



Figura 5.5 - Desviador sobre o pilar PD2 (Jusante).

### 5.2.2 Instrumentação

A medição das acelerações nos cabos de pré-esforço exterior foi efetuada com acelerómetros uniaxiais do tipo servo-controlado da marca *Kinematics*, modelo *EpiSensor ES-U* com

capacidade de leitura mínima de  $0,381\mu\text{g}$ , configurados para uma sensibilidade de 20 Volt/g [38].

Os acelerómetros foram firmemente ligados aos cabos através de braçadeiras metálicas.

A Figura 5.6 ilustra a forma como os acelerómetros foram fixados aos cabos de pré-esforço.



Figura 5.6 - Acelerómetros instalados nos cabos de pré-esforço.

Os acelerómetros foram ligados a um sistema de alimentação e condicionamento de dados (Figura 5.7) que por sua vez é ligado a um sistema de aquisição da marca *Gantner Instruments* (Figura 5.8) Para a aquisição de dados foi utilizado um computador portátil e um programa desenvolvido em *LABVIEW*.



Figura 5.7 - Sistema de alimentação e condicionamento de dados.



Figura 5.8 - Sistema de aquisição da marca *Gantner Instruments*.

A colocação dos acelerómetros no tramo central foi executada facilmente a partir da laje inferior. Nos tramos laterais houve necessidade recorrer às torres metálicas existentes, montadas no final da construção para acesso ao sistema de nivelamento hidrostático instalado por indicação do projetista (Figura 5.9).



Figura 5.9 - Torre de acesso ao sistema hidrostático.

Foram realizados ensaios/registos com uma frequência de aquisição de 500 Hz, devido à sensibilidade do aparelho utilizado, e uma duração de 20 minutos.

Os cabos foram numerados de 1 a 7, da alma para o interior da secção, como mostra a Figura 5.10.



Figura 5.10 - Numeração dos cabos.

### 5.2.3 Processamento dos dados e resultados

Pelas expressões descritas no capítulo 3, para o cálculo das forças a partir da frequência de vibração existe a necessidade da definição de algumas características dos cabos como: o módulo

de elasticidade ( $E$ ), o comprimento ( $L$ ), a área da secção transversal ( $A$ ) e a massa por unidade de comprimento ( $m$ ). As tabelas seguintes reúnem estas características, comuns aos cabos de pré-esforço exterior deste caso de estudo [4].

Tabela 5.1 - Características geométricas do cabo.

$\phi_{\text{nominal}}$ (mm)	Nº de fios	$A_{\text{cordão}}$ (mm <sup>2</sup> )	Nº cordões	$A_{\text{cabo}}$ (mm <sup>2</sup> )	$\phi_{\text{cabo}}$ (mm)	$I$ (mm <sup>4</sup> )
15,7	7	150,00	24	3600,00	67,70	1031324,03

Tabela 5.2 - Características mecânicas do cabo.

$E$ (GPa)	$m_{\text{cordão}}$ (kg/m)	$m_{\text{bainha}}$ (kg/m)	$m_{\text{cabo}}$ (kg/m)
195,00	1,172	0,100	30,528

O comprimento livre destes cabos, isto é entre pontos de apoio, pode variar entre 50 m, 75 m, 100 m ou 125 m.

Tendo estas características pode-se então estimar as frequências, tendo como base a expressão (3.18). Essa estimativa é apresentada na Tabela 5.3.

Tabela 5.3 - Estimativa de frequências dos cabos de pré-esforço exterior em Hz.

Comprimento	50 m	75 m	100 m	125 m
3000 kN	3,135	2,090	1,567	1,254
4000 kN	3,620	2,413	1,810	1,448
5000 kN	4,047	2,698	2,024	1,619
6000 kN	4,433	2,956	2,217	1,773

O esforço previsto de projeto é de 5000 kN por cabo, assim sendo foram estimados os parâmetros de correção da flecha e da rigidez (Tabela 5.4).

Tabela 5.4 - Estimativa dos parâmetros de correção.

Comprimento	50	75	100	125
$\lambda^2$	0,00122	0,00275	0,00490	0,00765
$\xi$	252,569	378,854	505,139	631,423

Em parceria com Núcleo de Observação de Estruturas do LNEC (NOE-LNEC) foram estudados todos os cabos deste caso de estudo, no entanto, no âmbito desta TFM apenas se irão apresentar os resultados obtidos nos cabos que são mais representativos: J.E.5, M.M.2 e M.D.1.

É de referenciar ainda que as séries temporais foram obtidas com uma frequência de amostragem de 500 Hz. Posteriormente estes registos foram pré-processados com filtragem

passa-banda com filtro tipo Butterworth de ordem 8 com frequências de corte de 0,1 Hz (passa-alto) e 20 Hz (passa-baixo) e uma decimação para 50 Hz [37].

Os espectros de resposta serão estimados através da aplicação desenvolvida em *MATLAB*, dividindo as histórias de acelerações com sobreposição de 2/3. A resolução em frequência deste espectros é dada pelo inverso da duração das séries temporais sendo que neste caso irá optar por uma resolução entre 0,03 Hz e 0,05 Hz.

Devido à decimação para 50 Hz a frequência de *Nyquist* passa a ser de 25 Hz, sendo desenvolvida a identificação modal até 20 Hz.

#### a) Cabo J.E.5

O estudo do cabo J.E.5 é relevante para comprovar a boa implementação do método da corda vibrante na aplicação *MATLAB* pelo facto de vibrar em todo o seu comprimento, originando um espectro de fácil compreensão e análise.

Este está situado do lado da margem esquerda pertencente conjunto de cabos de jusante, entre a ancoragem sobre o pilar PE2 e o desviador sobre o pilar PE1. O sensor ficou colocado a 95 m do pilar PE2 no sentido do vão central.

Na Figura 5.11 apresenta-se o registo do ensaio filtrado e decimado.

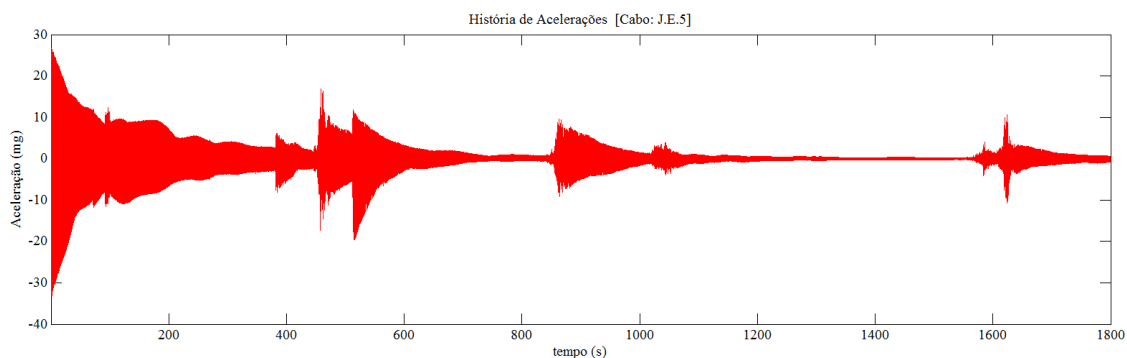


Figura 5.11 - Registo total do cabo J.E.5.

Pela observação do registo obtido as acelerações aumentam drasticamente durante a passagem do comboio pela ponte, o que poderá alterar as características dinâmicas do cabo. Para evitar a influência da carga na variação da força do cabo de pré-esforço, foi escolhido o troço do registo após uma passagem do comboio, entre o 700 e os 800 segundos, com se apresenta na Figura 5.12.

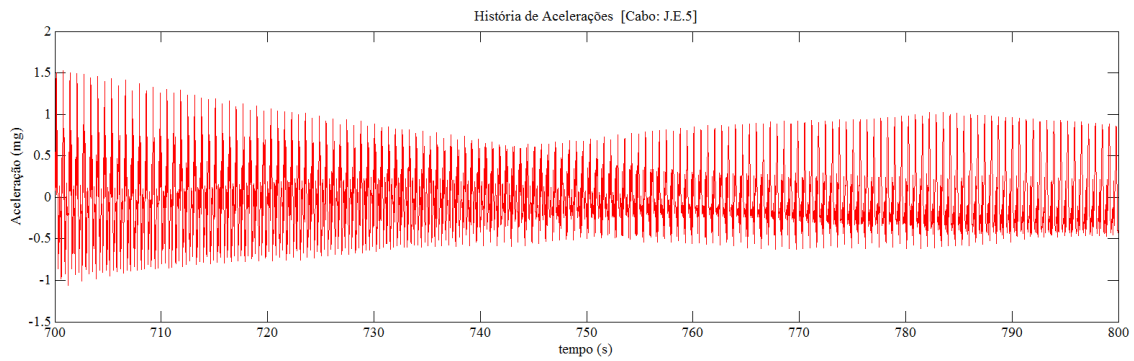


Figura 5.12 - História de acelerações entre os 700 e 800 segundos do cabo J.E.5.

Obtém-se assim o auto-espectro (Figura 5.13) com uma resolução de  $df = 0,0384$  Hz. Com um comprimento de 125 m e força esperada de 5000 kN, a frequência de referência será de 1,6 Hz. Como resultado foram identificadas as frequências naturais até ao 11º modo (Tabela 5.5).

A regressão linear dos valores obtidos mostra uma perfeita linearidade ( $R^2 > 0,999$ ) que permite a aplicação do método da corda vibrante (Figura 5.14).

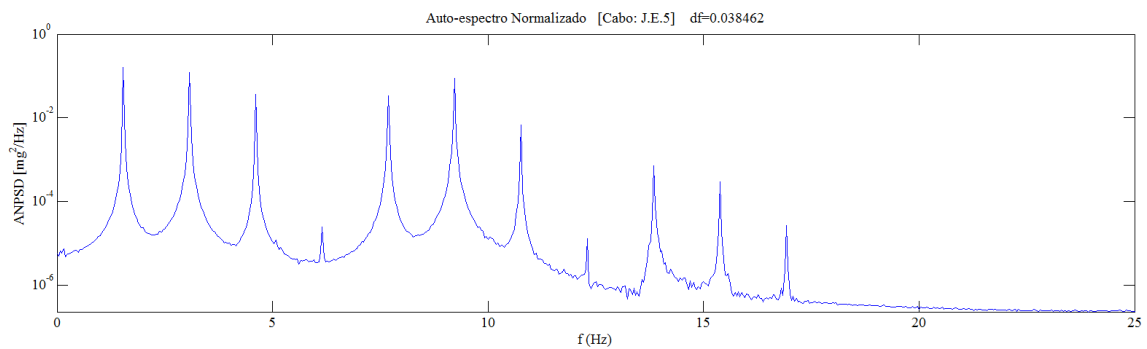


Figura 5.13 - Auto-espectro do cabo J.E.5.

Tabela 5.5 - Frequências naturais do cabo J.E.5.

Modo	$f_i$ (Hz)
1	1,538
2	3,077
3	4,615
4	6,154
5	7,692
6	9,231
7	10,769
8	12,308
9	13,846
10	15,385
11	16,923

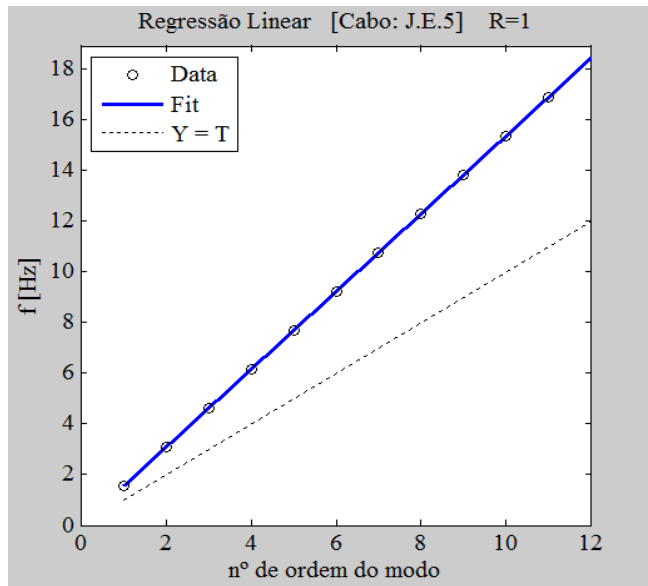


Figura 5.14 - Regressão linear das frequências obtidas.

Calcula-se, assim, a força instalada neste cabo a partir da primeira frequência e pela frequência equivalente obtida com todas as frequências indicadas (Tabela 5.6).

Tabela 5.6 - Cálculo da força no cabo J.E.2 e respetiva incerteza.

	Comp. (m)	Comp. Livre (m)	Massa (kg/m)	df (Hz)	Frequência (Hz)	Força (kN)	Incerteza (kN)
$f_1$	125	125	30,528	0,03846	1,538	4513	113
$f_{eq.}$					1,532	4479	112

A frequência equivalente referida anteriormente foi obtida com onze modos de vibração identificados. No entanto, fez-se uma análise sobre a influência do número dos modos a utilizar na definição da frequência equivalente para o cálculo da força (Figura 5.15).

Em seguida apresenta-se o gráfico que compara o número de frequências utilizadas e a força calculada com a respetiva frequência equivalente.

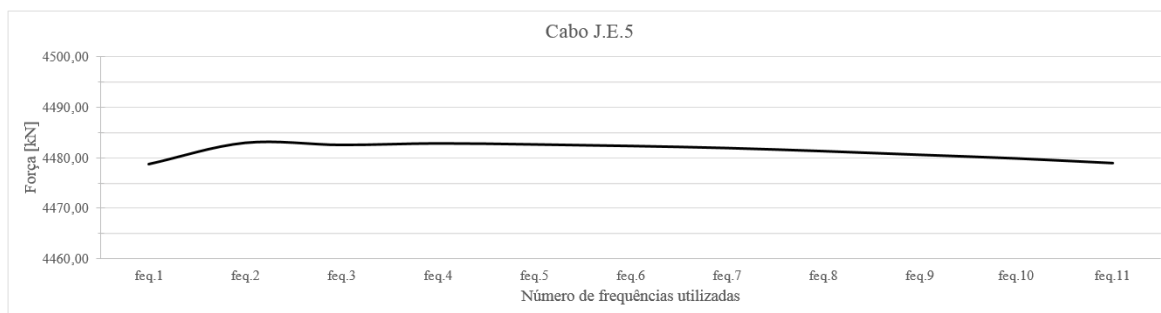


Figura 5.15 - Número de frequências VS Força do cabo J.E.5.

Verifica-se, pela análise da figura, que o valor da força estabiliza a partir da utilização de quatro modos de vibração na definição da frequência equivalente.

#### b) Cabo M.M.2

O cabo M.M.2 situa-se entre os desviadores sobre os pilares PE1 e PD1 do lado de montante da secção. O destaque dado a este cabo deve-se ao facto de a meio vão do tabuleiro o cabo estar em contacto com uma torre de acesso ao sistema de nivelamento hidrostático instalado na fase construtiva (Figura 5.16) e ligado à alma da secção do tabuleiro através de um maciço, restringindo assim a vibração do cabo.



Figura 5.16 - Constrangimento de vibração do cabo M.M.2.

Este constrangimento faz com que o comprimento de vibração livre deixe de ser o comprimento total entre desviadores ( $L=100$  m) para passar a ter um comprimento livre de vibração de  $L=33,2$  m. Assim os parâmetros de correção da flecha e da rigidez também terão novos valores:

$$\begin{cases} \lambda^2 = 0,000540 \\ \xi = 167,706 \end{cases} \quad (5.2)$$

Neste caso o sensor foi colocado a 155 m do pilar PE1, cerca de 28 m de diferença do mesmo conjunto, pois a 122 m do pilar PE1 está colocado o maciço que liga o cabo à alma da secção. Assim obteve-se o seguinte registo.

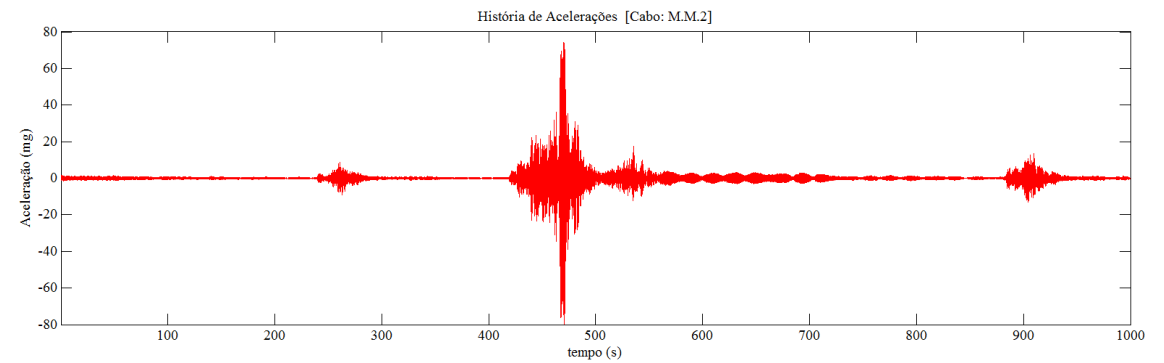


Figura 5.17 - Registo total do cabo M.M.2.

Pela observação do registo total obtido, entre os 500 e 700 segundos existe uma variação na aceleração que indica que o cabo está em contacto com alguma superfície, tal como foi referido anteriormente.

Para execução da identificação modal irá estudar-se a série de dados entre os 0 e 200 segundos, obtendo assim a seguinte história de acelerações.

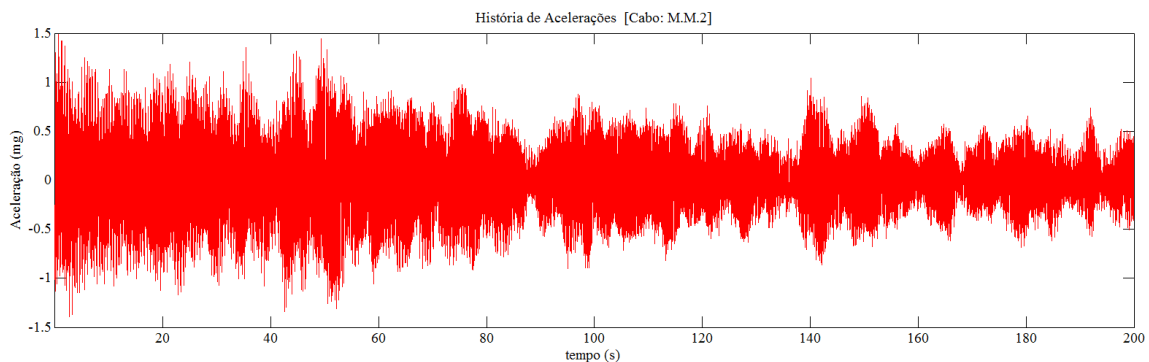


Figura 5.18 - História de acelerações entre os 0 e 200 segundos do cabo M.M.2.

Obtém-se o auto-espectro (Figura 5.19) com uma resolução de  $df = 0,0384$  Hz. Observa-se que para um cabo com 100 m e 5000 kN de carga era espectável um 1º modo de vibração com frequência de, sensivelmente, 2 Hz que é visível no espectro, mas devido à particularidade deste cabo estar constringido e passar a ter um comprimento de vibração de 33,2 metros para a mesma carga obtém uma primeira frequência de referência de 6,09 Hz sendo esta mais evidente na

análise do espectro. Com esta referência foram identificadas as frequências naturais (Tabela 5.7) e a respetiva regressão linear (Figura 5.15).

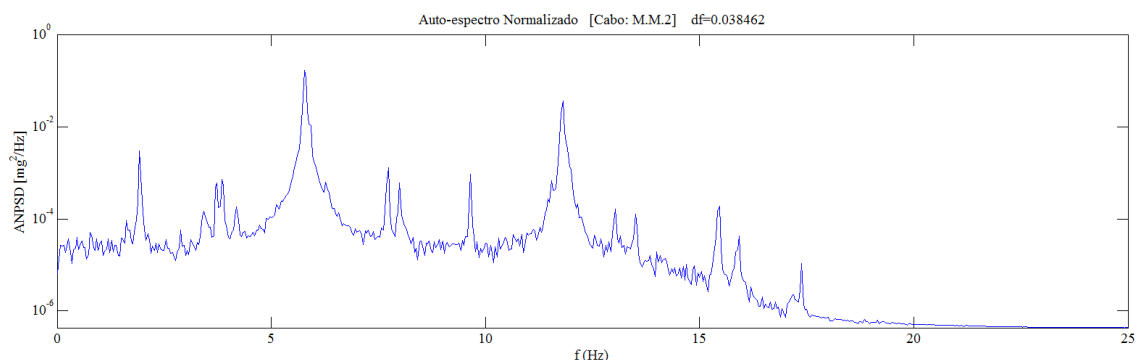


Figura 5.19 - Auto-espectro do cabo M.M.2.

Tabela 5.7 - Frequências naturais do cabo M.M.2.

Modo	$f_i$ (Hz)
1	5,769
2	11,808
3	17,385

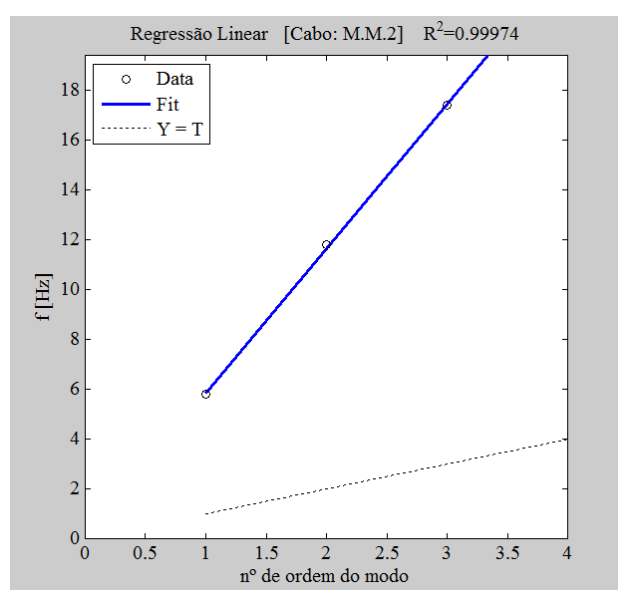


Figura 5.20 - Regressão linear das frequências obtidas.

Avaliando o coeficiente de determinação pode afirmar-se que é uma boa estimativa de frequências ( $R^2 > 0,999$ ) podendo, então, calcular-se a força instalada neste cabo a partir da primeira frequência e pela frequência equivalente.

Tabela 5.8 - Cálculo da força no cabo M.M.2 e respetiva incerteza.

	Comp. (m)	Comp. Livre (m)	Massa (kg/m)	df (Hz)	Frequência (Hz)	Força (kN)	Incerteza (kN)
$f_1$	100	33,2	30,528	0,03846	5,769	4480	30
$f_{eq.}$					5,743	4439	30

### c) Cabo M.D.1

O cabo M.D.1, à semelhança do estudado anteriormente, sofre um constrangimento à vibração pelo desviador situado a 75 m do pilar PD1, como mostra a figura seguinte, passando o seu

comprimento para metade. Assim a frequência de referência seria de cerca de 2,7 Hz, em vez de 2,0 Hz.



Figura 5.21 - Constrangimento à vibração do cabo M.D.1 provado pelo desviador.

Neste cabo o sensor foi colocado na posição “PD1+44,5 m” obtendo o seguinte registo:

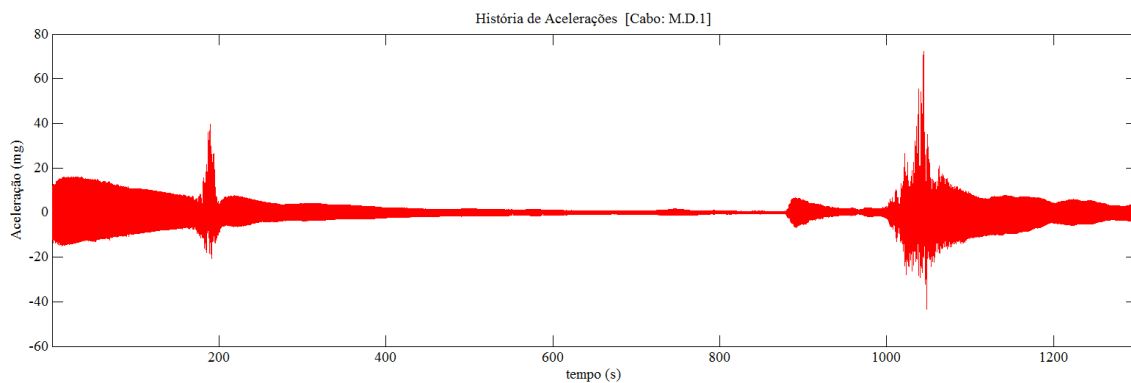


Figura 5.22 - Registo total do cabo M.D.1.

Para a determinação do auto-espectro deste cabo optou-se por estudar o registo entre os 600 s e 700 s.

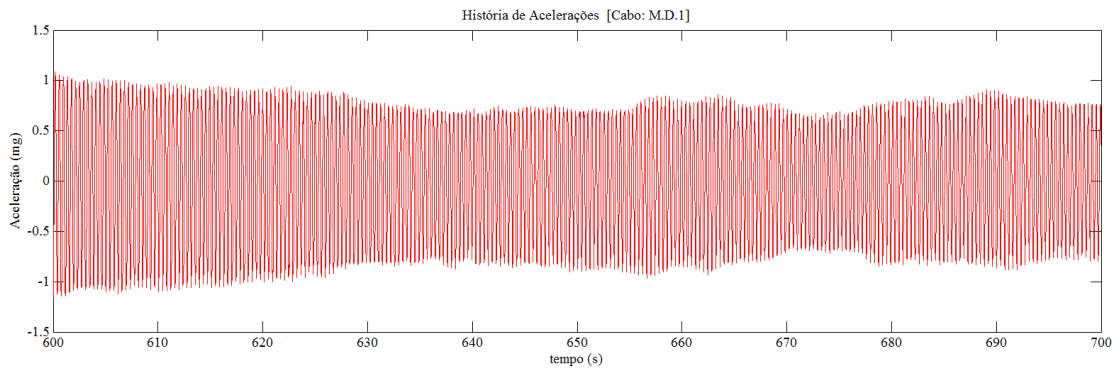


Figura 5.23 - História de acelerações entre os 600 e 700 segundos do cabo M.D.1.

De seguida mostra-se o auto-espectro (Figura 5.24) com uma resolução de  $df = 0,0384$  Hz e as respetivas frequências naturais (Tabela 5.9) e a respetiva regressão linear (Figura 5.25).

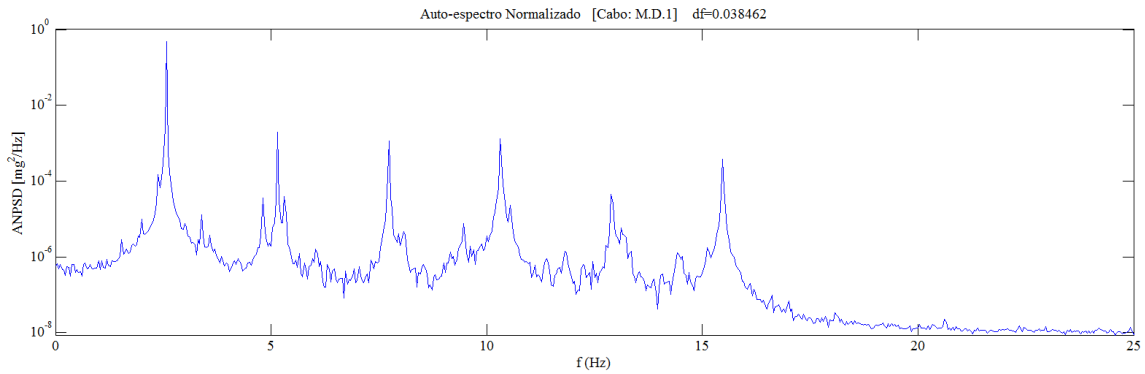


Figura 5.24 - Auto-espectro do cabo M.D.1.

Tabela 5.9 - Frequências naturais do cabo M.D.1.

Modo	$f_i$ (Hz)
1	2,577
2	5,154
3	7,731
4	10,308
5	12,885
6	15,462

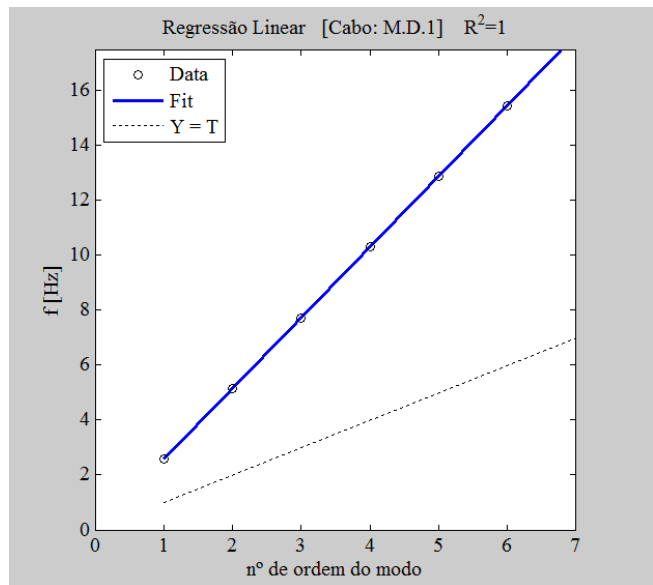


Figura 5.25 - Regressão linear das frequências obtidas.

Pela análise do coeficiente de determinação pode afirmar-se que é uma boa estimativa de frequências ( $R^2 > 0,999$ ) podendo, então, calcular-se a força instalada neste cabo a partir da primeira frequência e pela frequência equivalente.

Tabela 5.10 - Cálculo da força no cabo M.D.1 e respetiva incerteza.

	Comp. (m)	Comp. Livre (m)	Massa (kg/m)	df (Hz)	Frequência (Hz)	Força (kN)	Incerteza (kN)
$f_1$	125	75	30,528	0,03846	2,577	4562	68
$f_{eq.}$					2,561	4504	68

#### 5.2.4 Análise de Resultados

Após os dados obtidos terem sido processados, de seguida apresenta-se a tabela-resumo do presente caso de estudo:

Tabela 5.11 - Resumo dos cálculos realizados.

Cabo	J.E.5		M.M.2		M.D.1	
	$f_1$	$f_{eq.}$	$f_1$	$f_{eq.}$	$f_1$	$f_{eq.}$
<b>L (m)</b>	125		100		125	
<b><math>L_e</math> (m)</b>	125		33,2		75	
<b>df (Hz)</b>	0,03846		0,03846		0,03846	
<b>f (Hz)</b>	1,538	1,532	5,769	5,743	2,577	2,561
<b>Força (kN)</b>	4513	4479	4480	4439	4562	4504
<b>Diferença (kN)</b>	34		41		58	

Pela análise da incerteza, apresentada em cada caso de estudo na secção anterior, verifica-se que esta depende fundamentalmente do comprimento do cabo, como seria de esperar pela análise da expressão.

A análise pela diferença de resultados obtidos entre o cálculo da força a partir da primeira frequência e o cálculo a partir da frequência equivalente, mostra que a correção efetuada provoca diferenças na ordem de 1%, o que é bastante baixo. Então também se pode concluir que o cálculo sem correção é uma boa estimativa de força para este caso de estudo.

O gráfico presente na Figura 5.15 para o caso do cabo J.E.5 mostra que a utilização da primeira frequência origina uma boa aproximação da força instalada no mesmo, apenas verificando-se alguma instabilidade na utilização de duas frequências mas com tendência a estabilizar. A

instabilização que se encontra também não é muito relevante visto que é no máximo 1% da força obtida através do cálculo.

Segundo o descrito nos últimos parágrafos pode-se então afirmar que os cabos estudados se assemelham muito a uma corda vibrante.

Analisando os auto-espetros obtidos verifica-se que quanto menor o comprimento do cabo mais difícil se torna identificar as suas frequências naturais tendo um espectro menos “limpo”, o que implica utilizar uma resolução de pior qualidade. No entanto neste caso não houve essa necessidade pois foi sempre possível identificar mais que duas frequências naturais podendo assim fazer uma média ponderada da frequência de melhor exatidão para o cálculo da força.

### **5.3 Medição da força nos tirantes do Viaduto Salah Bey**

#### *5.3.1 Descrição da obra de arte*

O Viaduto Salah Bey é uma obra de arte rodoviária que atravessa o vale de Rhumel, na cidade de Constantine, Argélia, constituída por um único tabuleiro suspenso no seu plano médio. Trata-se de uma estrutura de betão armado pré-esforçado, com extensão total de 756 m constituída por três tramos suspensos e seis tramos laterais, como mostra a Figura 5.27. A sua secção é um caixão com altura de 3,75 m e almas inclinadas, rigidificado por um diafragmas afastados entre si de 7,00 m coincidindo com as secções de amarração dos tirantes no tabuleiro (Figura 5.28).



Figura 5.26 - Viaduto Salah Bey.

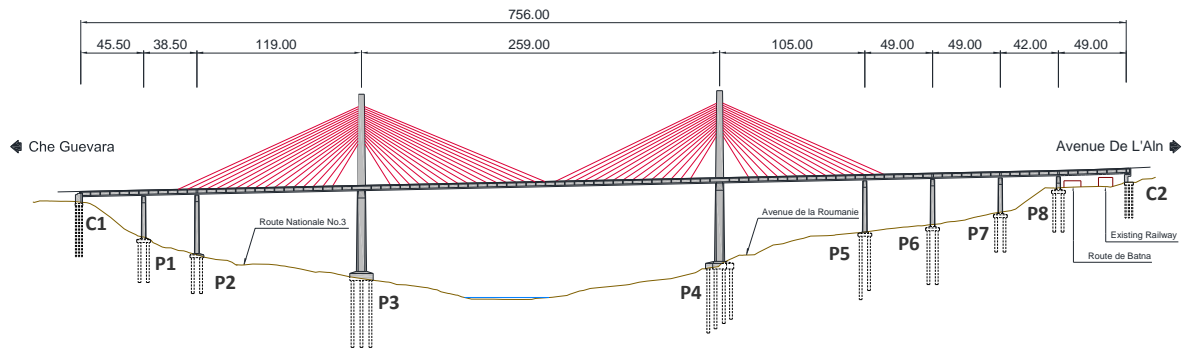


Figura 5.27 - Alçado do Viaduto Salah Bey.

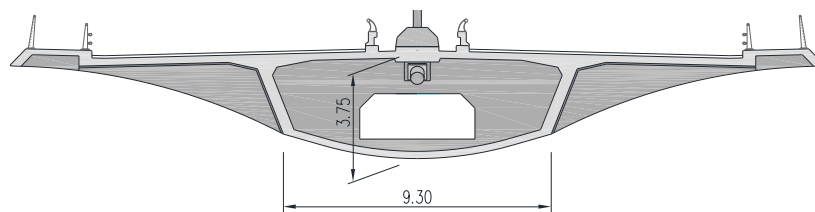


Figura 5.28 - Corte transversal do tabuleiro.

O Viaduto foi construído através do método dos avanços sucessivos.

Possui um sistema de tirantes em semi-leque composto por 17 cabos, de cada um dos lados, ligados ao pilar P3 e de igual forma tem 15 cabos ligados ao pilar P4. Cada tirante é constituído por um número de cabos que pode variar entre os 34 e os 86 cordões auto-embainhados com bainha de polietileno extrudido de alta densidade. Cada cordão é composto por 7 fios de 0,6". Estes são auto-embainhados e têm um valor de massa por unidade de comprimento de 1,382 kg/m [38].

### 5.3.2 Instrumentação

Nesta obra foram instrumentados sete tirantes com acelerómetros para avaliar forças instaladas ao longo do tempo. Foram utilizados acelerómetros da marca *BDI* (*Bridge Diagnostics, Inc.*), com uma amplitude de medição de  $\pm 2$  g com frequência de aquisição até 4000 Hz [5].

Estes acelerómetros foram instalados nos tirantes através de braçadeiras plásticas e colocados com auxílio de uma grua. A Figura 5.29 mostra a colocação dos acelerómetros; na Figura 5.30 pode observar-se um pormenor de um acelerómetro instalado.



Figura 5.29 - Colocação do acelerómetro no tirante.



Figura 5.30 - Acelerómetro no tirante.

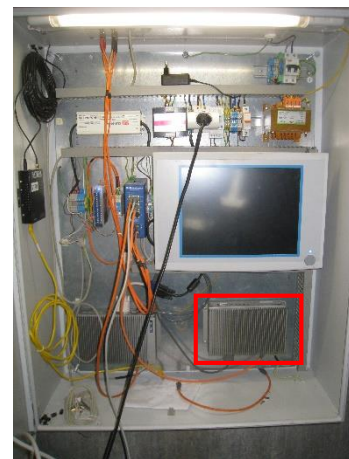
Posteriormente os acelerómetros foram ligados a um módulo do sistema de aquisição de dados (Figura 5.31 a)), por sua vez ligados a uma unidade de aquisição (Figura 5.31 b)), controlada por um computador industrial (Figura 5.31 c)). É de referir também que este último está ligado a uma rede de internet de modo a que se consiga ter acesso aos dados em qualquer local e qualquer momento.



a) Módulo de aquisição.



b) Unidade de aquisição.



c) Computador industrial.

Figura 5.31 - Sistema de aquisição em regime dinâmico.

As quatro semi-harpas são numeradas no sentido *Che Guevara* (C1) – *Avenue De L'Aln* (C2). Os tirantes são numerados de baixo para cima, sendo o primeiro aquele cuja ancoragem no tabuleiro fica mais próximo do pilar.

Foram instrumentados sete tirantes, dois próximos dos pilares P3 e P4, dois intermédios e três mais afastados.

Foram medidas as acelerações dos tirantes em vibração livre sem atuação de cargas e durante um ensaio de carga. Na figura seguinte estão indicadas as posições da carga durante o ensaio.

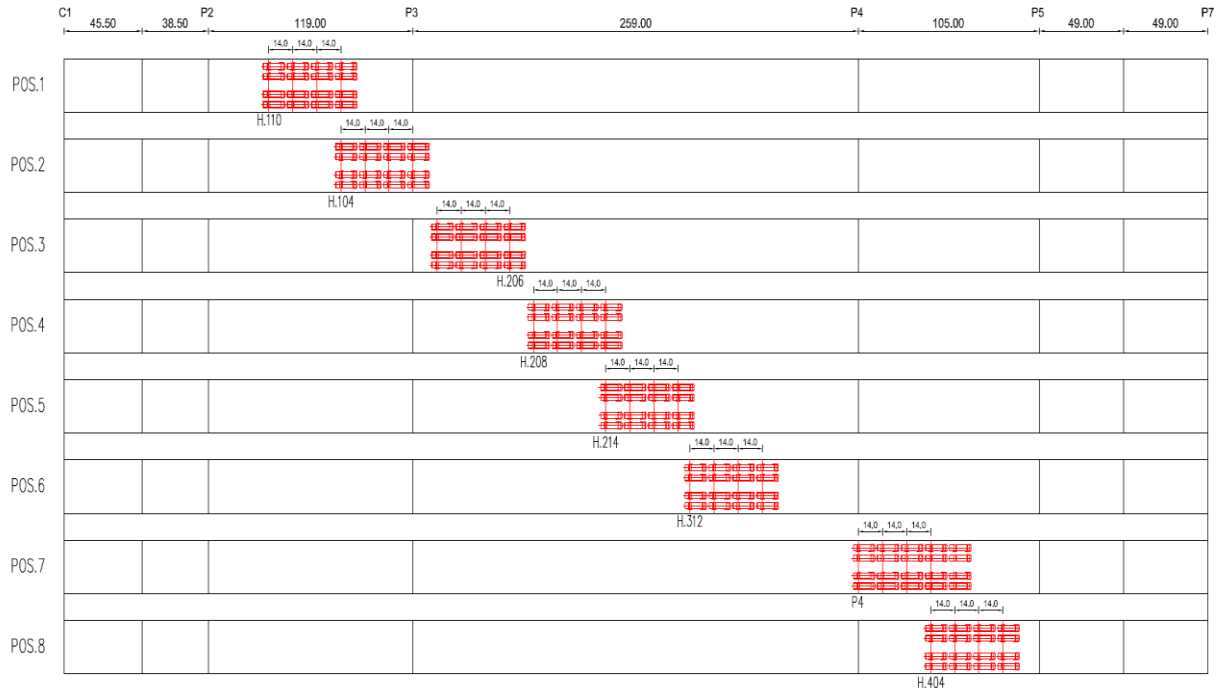


Figura 5.32 - Posições de carga com 4 linhas de camiões.

Como mostra a Figura 5.32 foram feitos ensaios de carga com 16 camiões perfazendo uma carga de 4736 kN (Figura 5.33) introduzindo momento fletor significativo no tabuleiro e forças nos tirantes [38].



Figura 5.33 - Ensaio de carga com os dezasseis camiões.

Durante o ensaio foram registadas diversas variações das grandezas observadas, entre elas a aceleração dos tirantes, que permitiu estimar as forças suportadas por esses tirantes.

### 5.3.3 Processamento dos dados e resultados

A determinação das forças instaladas nos tirantes foi efetuada com recurso ao método da vibração, tendo-se posteriormente comparado esses valores com aqueles que resultam das medições efetuadas com célula monocordão e com anel dinamométrico.

No âmbito deste trabalho final de mestrado apenas foi estudado o cabo H.217, um dos mais compridos que está ancorado junto ao meio vão do tramo principal como mostra assinalado na Figura 5.34, por estar instrumentado com dois sistemas de medição, acelerómetro e célula monocordão. Todos os cabos foram sujeitos a uma medição com anel dinamométrico no final da construção, cerca de um mês antes das medições realizadas com os acelerómetros e as células monocordão, apresentadas neste capítulo.

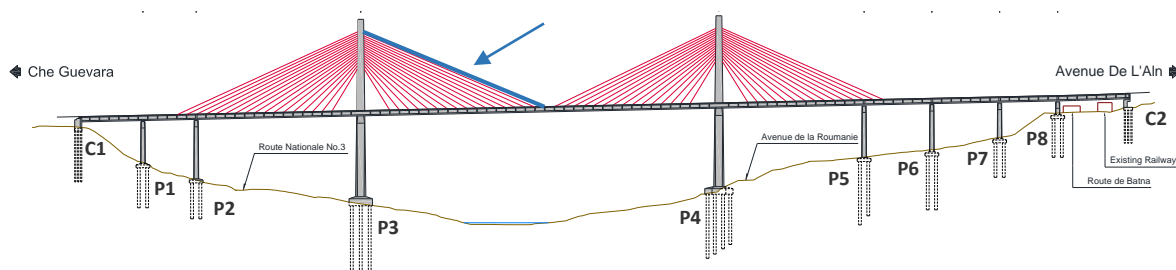


Figura 5.34 - Posicionamento do tirante H.217.

Para este cabo foram também estudados os efeitos decorrentes dos carregamentos 1, 5 e 8, para além de ter sido estimada a força instalada no cabo quando o viaduto está sujeito apenas a cargas permanentes, como peso próprio do tabuleiro, guardas de segurança e o pavimento.

Para ser efetuada a análise pelo método de vibração há que definir algumas características do tirante:

Tabela 5.12 - Características geométricas do cabo.

$\phi_{\text{nominal}}$ (mm)	Nº de fios	$A_{\text{cordão}}$ (mm <sup>2</sup> )	Nº cordões	$A_{\text{cabo}}$ (mm <sup>2</sup> )	$\phi_{\text{cabo}}$ (mm)	I (mm <sup>4</sup> )
15,7	7	150,00	70	10500,00	115,62	8773416,24

Tabela 5.13 - Características mecânicas do cabo.

E (GPa)	$m_{\text{cordão}}$ (kg/m)	$m_{\text{bainha}}$ (kg/m)	$m_{\text{cabo}}$ (kg/m)
195,00	1,282	0,100	96,740

O tirante em causa possui 144,61 m de comprimento total, possuindo um amortecedor a 3,754 m do dispositivo de ancoragem.

É de referir ainda que as séries temporais foram obtidas com uma frequência de amostragem de 250 Hz e sofreram uma decimação para 50 Hz com filtragem passa-banda com filtro tipo Butterworth de ordem 8 com frequências de corte de 0,2 Hz (passa-alto) e 20 Hz (passa-baixo).

Os espectros de resposta serão estimados através da aplicação desenvolvida em *MATLAB*, dividindo as histórias de acelerações com sobreposição de 2/3. A resolução em frequência destes espectros é dada pelo inverso da duração das séries temporais sendo que neste caso irá optar-se por uma resolução entre 0,03 Hz e 0,05 Hz.

Devido à decimação para 50 Hz a frequência de *Nyquist* passa a ser de 25 Hz, sendo a identificação modal desenvolvida até 20 Hz.

#### a) Situação de carga: Cargas permanentes

Para a situação em que o cabo está apenas sujeito às cargas permanentes obteve-se um registo apresentado na Figura 5.35.

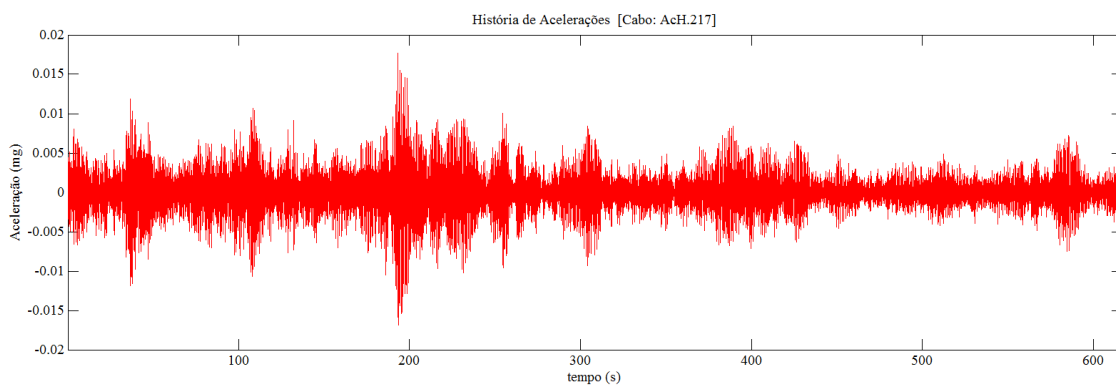


Figura 5.35 - História de acelerações quando o cabo está sujeito ao carga permanentes.

A partir da série de dados obteve-se o espectro com resolução de  $df = 0,0384$  Hz (Figura 5.36). Para obtenção das frequências naturais foi utilizada uma frequência de referência de 0,979 Hz, obtido a partir de uma força de projeto de 7361 kN fornecido pela FREYSSINET [13]. Na Tabela 5.14 apresentam-se as frequências identificadas cuja correlação é apresentada na Figura 5.36.

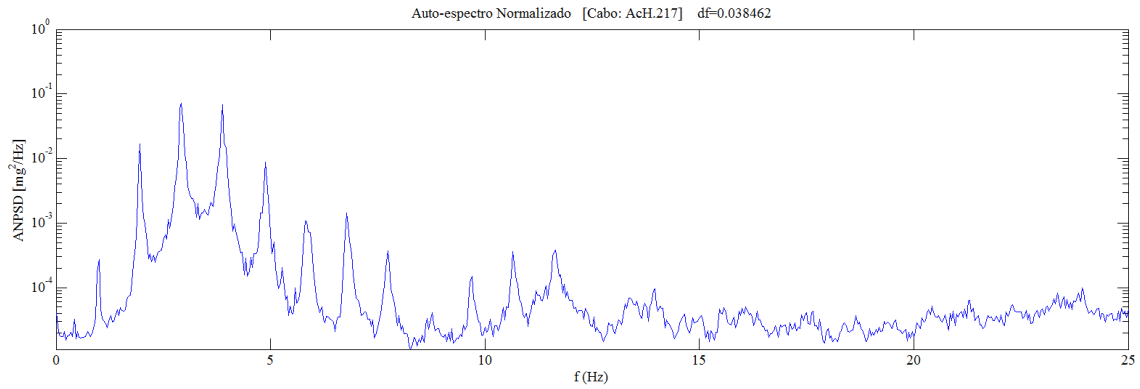


Figura 5.36 - Auto-espectro apenas com atuação das cargas permanentes.

Tabela 5.14 - Frequências naturais do tirante apenas sujeito às cargas permanentes.

Modo	$f_i$ (Hz)
1	1,000
2	1,962
3	2,923
4	3,885
5	4,885
6	5,808
7	6,769
8	7,731
9	8,769
10	9,692
11	10,650

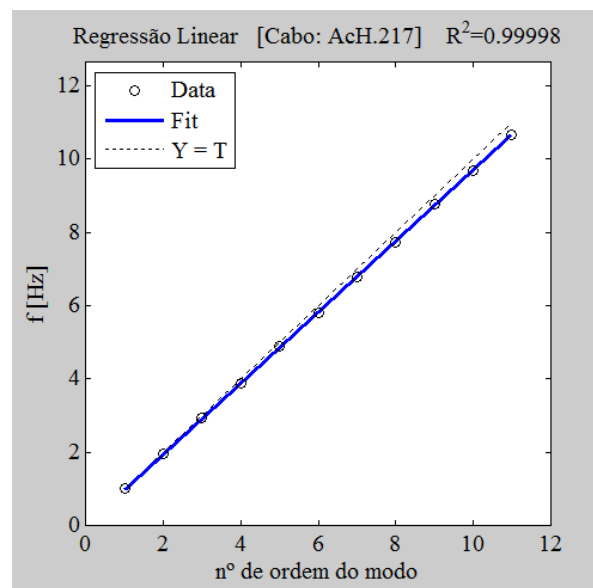


Figura 5.37 - Regressão linear das frequências obtidas.

Analisando o coeficiente de determinação pode afirmar-se que é uma boa estimativa de frequências ( $R^2 > 0,999$ ) podendo, então, calcular-se a força instalada neste cabo a partir da primeira frequência e pela frequência equivalente (Tabela 5.15).

Tabela 5.15 - Cálculo da força no tirante H.217 quando sujeito apenas às cargas permanentes do viaduto e respetiva incerteza.

	Comp. (m)	Comp. Livre (m)	Massa (kg/m)	df (Hz)	Frequência (Hz)	Força (kN)	Incerteza (kN)
$f_1$	144,61	144,61	96,74	0,03846	1,000	8092	311
$f_{eq.}$					0,965	7542	300

b) Situação de carga: carga de ensaio na posição 1

Esta posição de carga foi escolhida devido ao facto de ser a posição mais afastada, no sentido *Che Guevara*, da ancoragem do tirante ao tabuleiro esperando-se que origine o valor de força mais baixo quando este está carregado. Para este caso apresenta-se o registo na Figura 5.38.

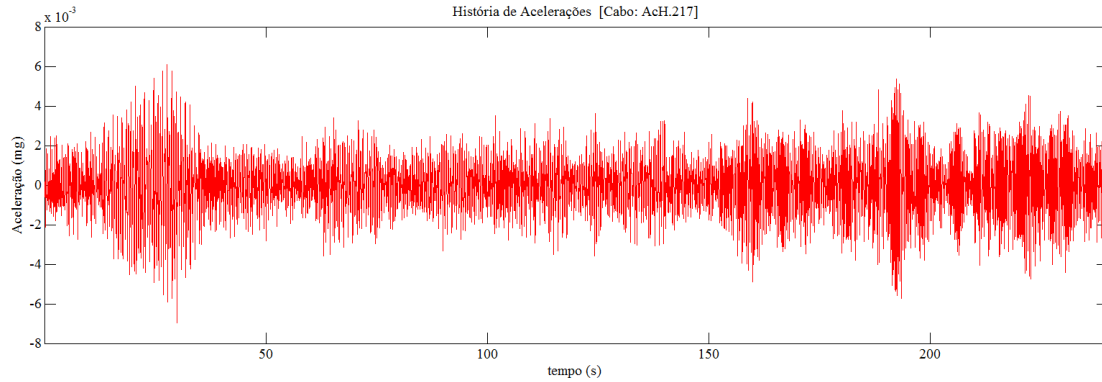


Figura 5.38 - História de acelerações do cabo H.217 quando o comboio de cargas está na posição 1.

A partir da série de dados obteve-se o espetro com resolução de  $df = 0,0384$  Hz (Figura 5.39). Para obtenção das frequências naturais foi utilizada uma frequência de referência de 0,979 Hz. Apresentam-se, então, as frequências naturais identificadas (Tabela 5.16) e a respetiva correlação linear em ordem ao modo (Figura 5.40).

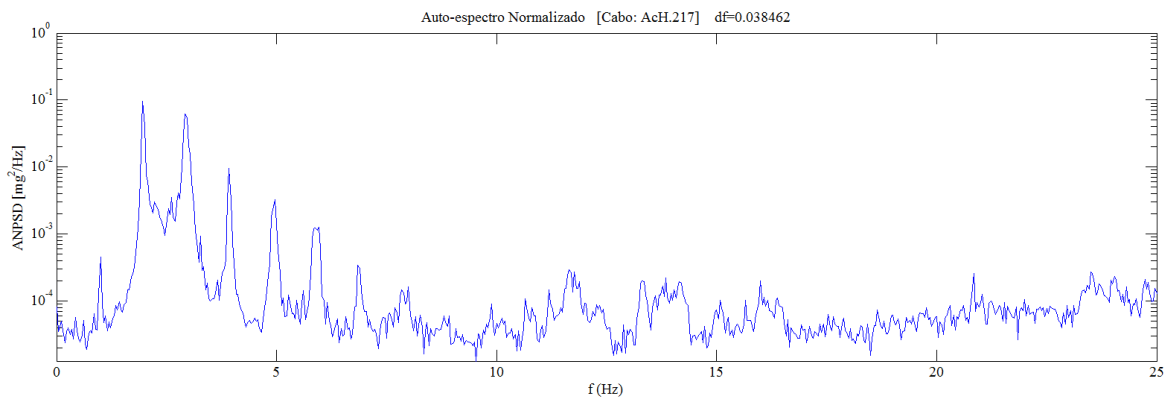


Figura 5.39 - Auto-espectro do cabo H.217 quando o comboio de carga está na posição 1.

Tabela 5.16 - Frequências naturais do tirante quando o comboio de cargas está na posição 1.

Modo	$f_i$ (Hz)
1	1,000
2	1,962
3	2,923
4	3,923
5	4,962
6	5,962
7	6,846
8	8,000

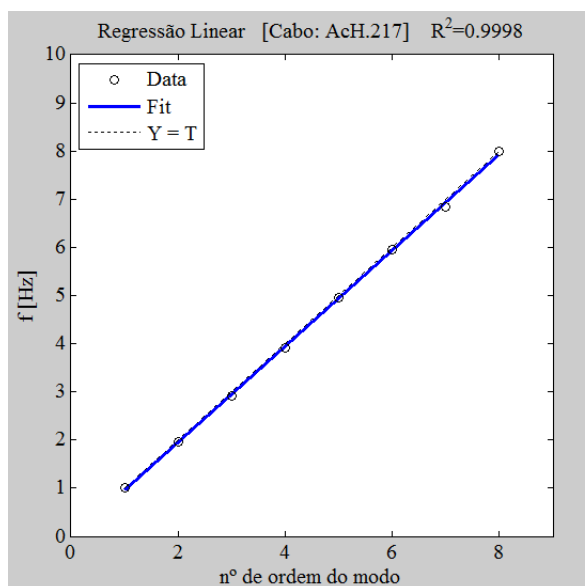


Figura 5.40 - Regressão linear das frequências obtidas.

Analisando o coeficiente de determinação pode afirmar-se que é uma boa estimativa de frequências ( $R^2 > 0,999$ ) podendo, então, calcular-se a força instalada neste cabo a partir da primeira frequência e pela frequência equivalente (Tabela 5.17).

Tabela 5.17 - Cálculo da força no tirante H.217 quando o comboio de cargas está na posição 1 e respetiva incerteza.

	Comp. (m)	Comp. Livre (m)	Massa (kg/m)	df (Hz)	Frequência (Hz)	Força (kN)	Incerteza (kN)
$f_1$	144,61	144,61	96,74	0,03846	1,000	8092	311
$f_{eq.}$					0,980	7768	305

c) Situação de carga: carga de ensaio na posição 5

Esta posição de carga situa-se exatamente no local da ancoragem do cabo em estudo, logo será espectável que com a carga nesta posição se atinja o valor mais alto de força instalada no tirante. Para este caso obteve-se registo apresentado na Figura 5.41.

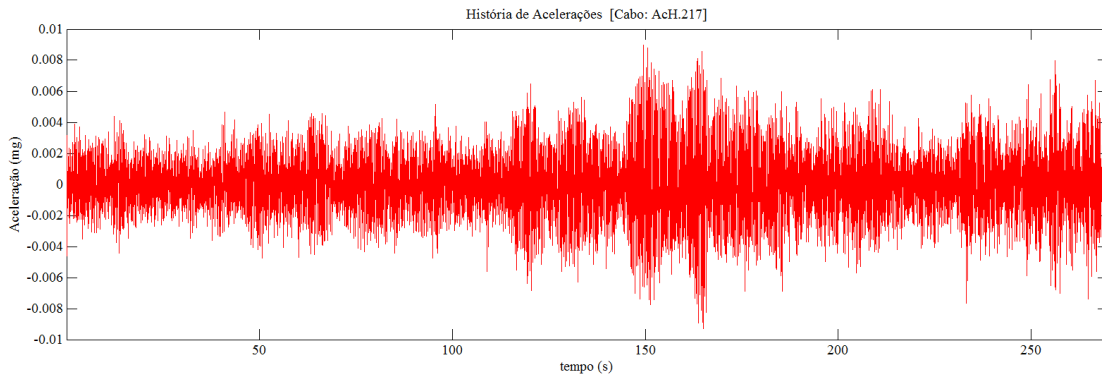


Figura 5.41 - História de acelerações do cabo H.217 quando o comboio de cargas está na posição 5.

A partir da série de dados obteve-se o seguinte espectro com resolução de  $df = 0,0384$  Hz (Figura 5.42). Para obtenção das frequências naturais foi utilizada uma frequência de referência de 0,979 Hz. De seguida apresentam-se as frequências naturais identificadas (Tabela 5.18) e a respetiva correlação (Figura 5.43).

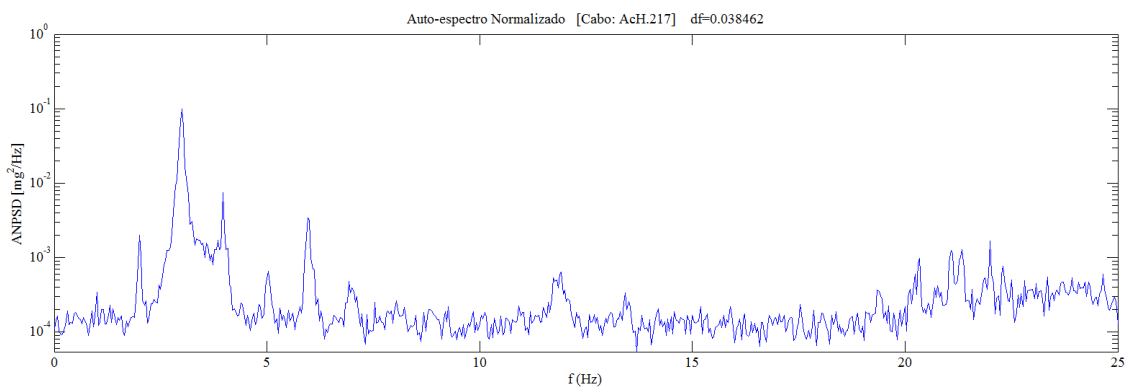


Figura 5.42 - Auto-espectro do cabo H.217 quando o comboio de carga está na posição 5.

Tabela 5.18 - Frequências naturais do tirante quando o comboio de cargas está na posição 5.

Modo	$f_i$ (Hz)
1	1,000
2	2,000
3	3,000
4	3,962
5	5,038
6	5,962
7	6,923

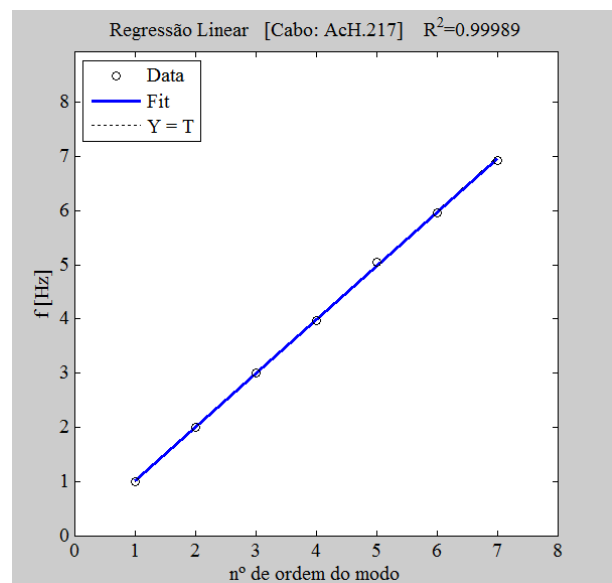


Figura 5.43 - Regressão linear das frequências obtidas.

Analisando o coeficiente de determinação pode afirmar-se que é uma boa estimativa de frequências ( $R^2 > 0,999$ ) podendo, então, calcular-se a força instalada neste cabo a partir da primeira frequência e pela frequência equivalente (Tabela 5.19).

Tabela 5.19 - Cálculo da força no tirante H.217 quando o comboio de cargas está na posição 5 e respetiva incerteza.

	Comp. (m)	Comp. Livre (m)	Massa (kg/m)	df (Hz)	Frequência (Hz)	Força (kN)	Incerteza (kN)
$f_1$	144,61	144,61	96,74	0,03846	1,000	8092	311
$f_{eq.}$					0,990	7926	308

d) Situação de carga: carga de ensaio na posição 8

Esta posição de carga foi escolhida devido ao facto de ser a posição mais afastada, no sentido *Avenue De L'Aln*, da ancoragem do tirante ao tabuleiro esperando-se que origine o valor de força mais baixo quando este está carregado. Para este caso de um ensaio de carga temos o registo apresentado na Figura 5.44.

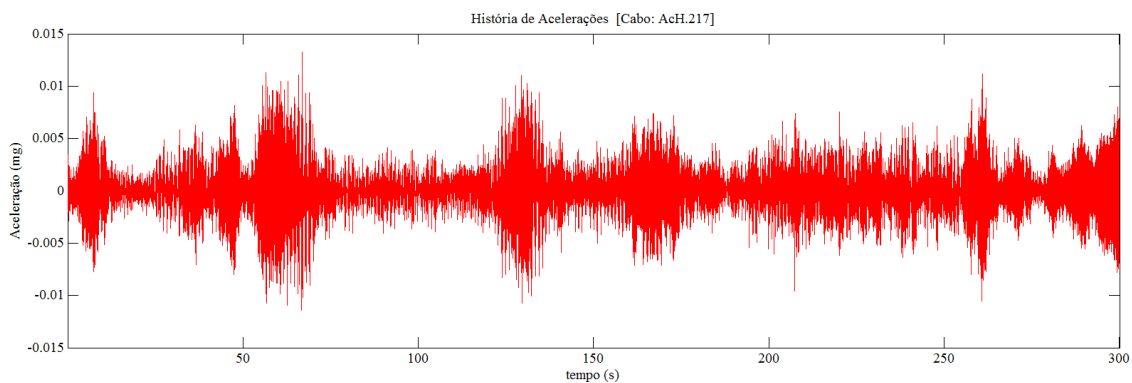


Figura 5.44 - História de acelerações do cabo H.217 quando o comboio de cargas está na posição 8.

A partir da série de dados obteve-se o espetro com resolução de  $df = 0,0384$  Hz (Figura 5.45). Para obtenção das frequências naturais foi utilizada uma frequência de referência de 0,979 Hz. As frequências identificadas apresentam-se na Tabela 5.20 e a sua respetiva correlação em ordem ao modo (Figura 5.46).

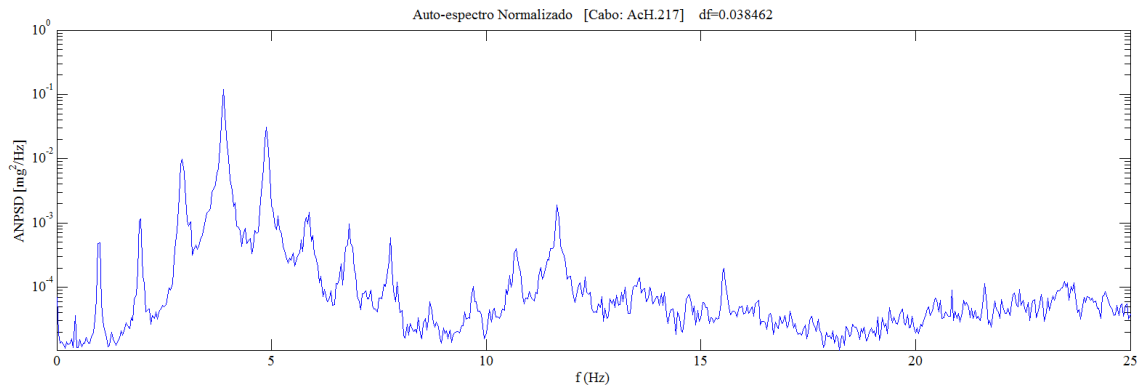


Figura 5.45 - Auto-espectro do cabo H.217 quando o comboio de carga está na posição 8.

Tabela 5.20 - Frequências naturais do tirante quando o comboio de cargas está na posição 8.

Modo	$f_i$ (Hz)
1	1,000
2	1,962
3	2,923
4	3,885
5	4,885
6	5,885
7	6,808
8	7,769

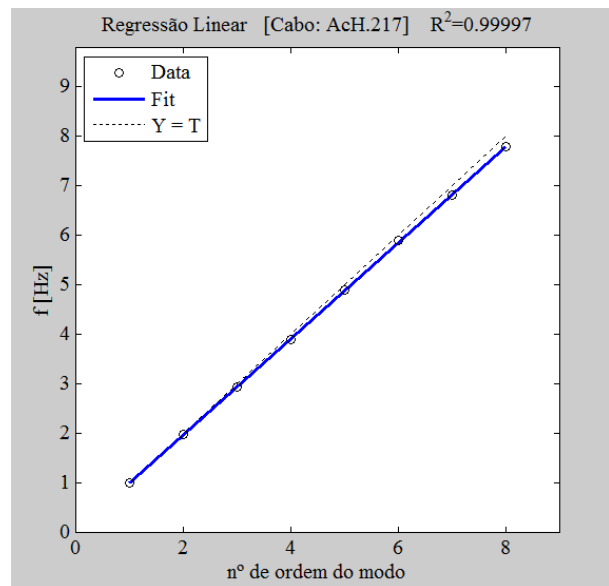


Figura 5.46 - Regressão linear das frequências obtidas.

Analisando o coeficiente de determinação pode afirmar-se que é uma boa estimativa de frequências ( $R^2 > 0,999$ ) podendo, então, calcular-se a força instalada neste cabo a partir da primeira frequência e pela frequência equivalente (Tabela 5.21).

Tabela 5.21 - Cálculo da força no tirante H.217 quando o comboio de cargas está na posição 8 e respetiva incerteza.

	Comp. (m)	Comp. Livre (m)	Massa (kg/m)	df (Hz)	Frequência (Hz)	Força (kN)	Incerteza (kN)
$f_1$	144,61	144,61	96,74	0,03846	1,000	8092	311
$f_{eq.}$					0,971	7626	302

A força anteriormente calculada com a frequência equivalente foi obtida com recurso a oito modos de vibração. No entanto procedeu-se a uma análise comparativa entre a força e o número de modos a utilizar no cálculo da frequência equivalente. Esta análise está expressa na Figura 5.47.

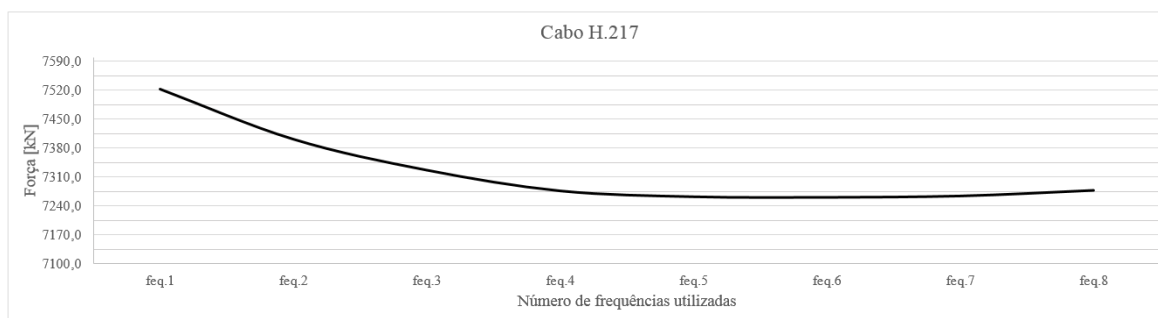


Figura 5.47 - Número de frequências consideradas VS valor da força do cabo.

Verifica-se que o valor da força estabiliza a partir da consideração de quatro modos de vibração na estimativa da frequência equivalente.

e) Medição através de célula monocordão:

A medição de forças com célula monocordão foi efetuada pelo Núcleo de Observação de Estruturas do LNEC utilizando as células monocordão instaladas pela empresa Freyssinet.

Os valores obtidos para as posições de carga anteriormente estudadas pelo método da vibração estão presentes na tabela seguinte.

Tabela 5.22 - Força medida através de célula monocordão.

Posições	Nº de cordões	Força <sub>cordão</sub> (kN)	Força (kN)
<b>Carga Permanente</b>	70	108,00	7559
<b>1</b>		108,80	7616
<b>5</b>		112,10	7850
<b>8</b>		108,10	7564

f) Medição através de anel dinamométrico:

A medição das forças com o sistema de anel dinamométrico foi efetuada pela empresa francesa Freyssinet.

O valor de força no tirante 217 obtido através deste método é apresentado na tabela seguinte:

Tabela 5.23 - Força medida pelo anel dinamométrico.

Tirante	Nº de cordões	Área do Piston (cm <sup>2</sup> )	Pressão (kPa)	Força (kN)
H.217	70	813,5	90000	7321,5

### 5.3.4 Análise de Resultados

Os resultados obtidos estão reunidos na Tabela 5.24. Para o tirante em estudo, apresentam-se os valores das frequências obtidas para o 1º modo de vibração e a frequência equivalente, bem como as forças instaladas, estimadas a partir das frequências e através da célula monocordão. Estes valores são relativos às medições realizadas com a estrutura suportando apenas as cargas permanentes, ou com os casos de carga 1, 5 e 8 dos ensaios estáticos.

Tabela 5.24 - Resumo dos cálculos realizados.

Situação de Carga	Carga permanente		Posição 1		Posição 5		Posição 8	
	f <sub>1</sub>	f <sub>eq.</sub>	f <sub>1</sub>	f <sub>eq.</sub>	f <sub>1</sub>	f <sub>eq.</sub>	f <sub>1</sub>	f <sub>eq.</sub>
<b>df (Hz)</b>	0,03846		0,03846		0,03846		0,03846	
<b>f (Hz)</b>	1,000	0,965	1,000	0,980	1,000	0,990	1,000	0,970
<b>Força [M.V.] (kN)</b>	8092	7543	8092	7768	8092	7928	8092	7626
<b>Força [C.M.] (kN)</b>	7559		7616		7850		7564	
<b>Diferença [C.M. – M.V.] (kN)</b>	16		-152		-78		-62	

M.V. – Método da Vibração; C.M. – Célula Monocordão.

A frequência do 1º modo identificado nos espectros obtidos nas diversas posições de carga é praticamente igual, em consequência as forças calculadas a partir desse valor não refletem a variação da posição de carga. Este facto evidencia que os tirantes em causa não têm um comportamento de corda vibrante pelo que deverá considerar-se a influência tanto ao nível da flecha como a rigidez à flexão.

Por outro lado, a frequência equivalente reflete as variações associadas aos diversos casos de carga.

Nesta tabela pode confirmar-se que o carregamento 5 é o que provoca maior variação de força instalada no tirante.

As diferenças entre os valores obtidos através da célula monocordão e pelo método da vibração com a frequência equivalente, representada na última linha da Tabela 5.24, poderão dever-se à influência do amortecedor instalado no tirante. O amortecedor provoca uma alteração no comprimento de vibração livre do tirante, que por sua vez, afeta a avaliação da força instalada no tirante. A este nível não existe informação suficiente para se poder afirmar qual a correção a efetuar, sendo necessário um estudo mais pormenorizado deste aspeto.

Em relação à Figura 5.47, onde são comparadas o número de frequências utilizadas no cálculo da frequência equivalente com a força obtida com esta, observa-se que a estimativa de força estabiliza a partir da utilização de quatro frequências e aí pode-se admitir que, no caso deste tirante é suficiente utilizar os primeiros quatro modos de vibração para obter uma boa estimativa de força.

A comparação dos valores da força suportada pelo tirante sob a atuação das cargas permanentes obtidos através da medição com o anel dinamométrico e o estimado pelo método da vibração permite constatar-se que existe uma diferença significativa, de cerca de 240 kN, como mostra a tabela seguinte.

Tabela 5.25 - Comparação dos valores de força obtidos a partir do anel dinamométrico com a o método da vibração.

Tirante	Força (kN)		
	Método da vibração	Anel dinamométrico	Diferença
H.217	7559,0	7321,5	-237,5

A diferença observada deve-se ao facto da medição com anel dinamométrico ter sido feita quando ainda o tabuleiro não estava sujeito a todas as cargas permanentes, como por exemplo, o pavimento.

Assim sendo, observando a diferença entre os dois métodos de medição apenas se pode afirmar que a avaliação da força do tirante pelo método da vibração afigura-se válida pois este é superior à força medida com anel dinamométrico quando o tabuleiro não sujeito a todas as cargas permanentes.

## 5.4 Medição da força nos pendurais da Ponte 25 de Abril

### 5.4.1 *Descrição da Ponte 25 de Abril*

A Ponte 25 de Abril é uma estrutura metálica suspensa (Figura 5.48), com tráfego misto rodoferroviário que atravessa o rio Tejo, ligando Lisboa (margem norte) a Almada (margem sul).



Figura 5.48 - Ponte 25 de Abril.

A sua construção ficou a cargo da empresa *United States Steel Export Company* tendo decorrido entre 1962 e 1966, ano em que foi inaugurada com o nome de Ponte Salazar. Em 1974 passou a denominar-se Ponte 25 de Abril [15] [16].

Foi aberta ao público apenas com o tabuleiro superior rodoviário, comportando duas vias para cada sentido. Este tabuleiro foi alargado em 1995 para três vias em cada sentido, passando a dispor de um tabuleiro ferroviário em 1999.

A Ponte 25 de Abril tem um comprimento total de 2300 m, com um vão central suspenso de 1012,80 m.

As suas torres estão situadas a, sensivelmente, 500 m de cada margem, com altura de 190,5 m acima do nível do mar. Estas têm no seu topo celas metálicas onde são apoiadas as catenárias que suspendem a ponte.

O tabuleiro da ponte é assente numa estrutura metálica treliçada denominada por viga de rigidez. As figuras seguintes mostram a secção transversal antes e após o alargamento do tabuleiro rodoviário e da instalação do tabuleiro ferroviário.

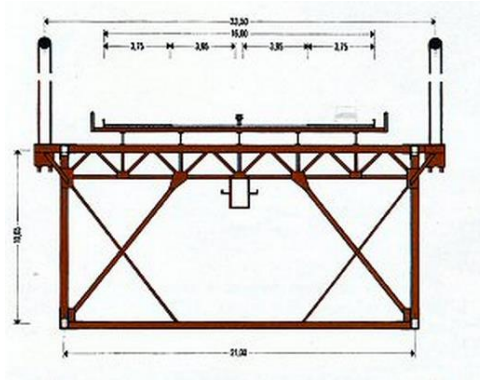


Figura 5.49 - Secção transversal da viga de rigidez antes do reforço estrutural (1966).[16]

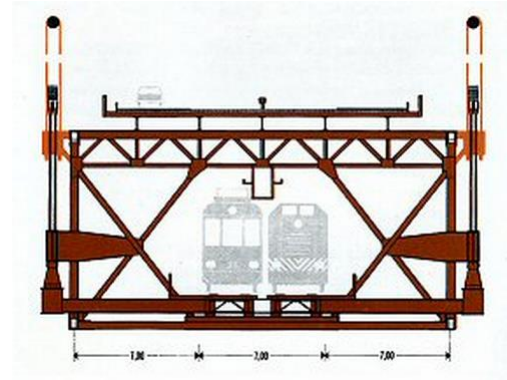


Figura 5.50 - Secção transversal da viga de rigidez após o reforço estrutural (1999).[16]

Inicialmente o tabuleiro era suspenso apenas por duas catenárias, uma a montante e outra a jusante. Com a instalação do tabuleiro ferroviário foi instalada mais uma catenária de cada lado.

A ligação das catenárias ao tabuleiro é feito através de pendurais em 168 secções afastadas entre si de 11,51 m. Em cada uma destas secções existem 4 pendurais do lado de montante e 4 pendurais do lado de jusante, perfazendo assim um total de 1344 pendurais ao longo do tabuleiro.

Os pendurais têm comprimentos que variam entre 2 m e 108 m, com dois tipos de secção: uma de  $1560,75 \text{ mm}^2$ , do sistema original; outra de  $947,50 \text{ mm}^2$ , do sistema de reforço. Nos cabos com maior comprimento são utilizadas braçadeiras para impedir vibração excessiva, como se mostra na figura seguinte.

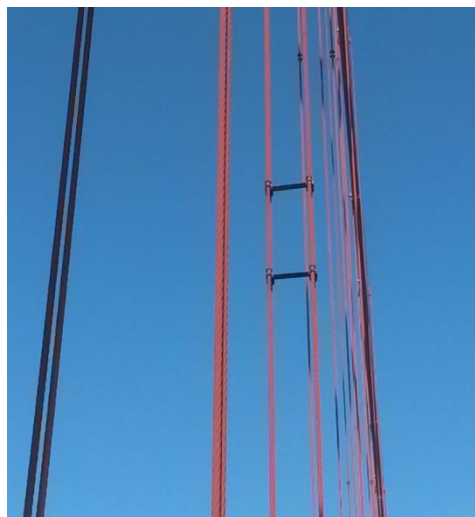


Figura 5.51 - Utilização de braçadeira para impedir a vibração excessiva.

#### 5.4.2 Instrumentação

Este caso de estudo tem como objetivos a medição de força nos pendurais que suspendem a ponte e a análise da relação comprimento-rigidez na aplicação do método da corda vibrante. Para esse efeito foram instalados quatro acelerómetros em simultâneo de modo a que os pendurais de cada conjunto fossem medidos em simultâneo, tal como mostra a Figura 5.52,



Figura 5.52 - Acelerómetros instalados nos pendurais da ponte.

Os acelerómetros utilizados são do tipo *Piezotronics* e foram acoplados a uns grampos para facilitar a sua instalação nos pendurais. Na Figura 5.53 podem observar-se os acelerómetros utilizados. Na Figura 5.54 inclui uma vista do respetivo sistema de acoplação.



Figura 5.53 - Acelerómetros do tipo *Piezotronics* utilizados na medição.



Figura 5.54 - Grampo metálico e acelerómetro acoplado.

A colocação dos acelerómetros nos pendurais foi feita com ajuda dum alpinista, tal como mostra a Figura 5.55.



Figura 5.55 - Colocação dos acelerómetros com recurso a alpinista.

Posteriormente os acelerómetros foram ligados a uma placa e sistema de aquisição de dados. Os registos das acelerações foram feitos com uma frequência de aquisição de 500 Hz em janelas de 60 segundos, fazendo registos de 4 minutos. A Figura 5.56 mostra a placa de aquisição. A Figura 5.57 é constituída por uma vista do software do sistema de aquisição utilizado.



Figura 5.56 - Placa de aquisição.



Figura 5.57 - Software de aquisição.

Foram feitas medições em todos os pendurais da ponte 25 de Abril, o que faz 1344 pendurais e 4 séries por cabo, ou seja 5376 séries de 60 segundos.

Os cabos foram identificados com o número do conjunto, começando a numeração a partir da margem sul da ponte. Em cada conjunto de quatro cabos estão designados com as letras de A a D para os pendurais de montante e E a H para os pendurais de jusante. A figura seguinte mostra o exemplo da nomeação a montante.

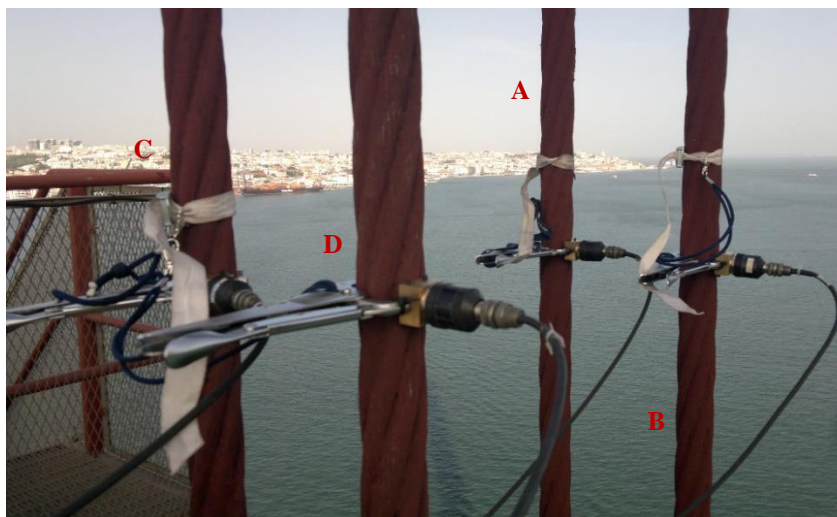


Figura 5.58 - Denominação dos pendurais de um conjunto de montante.

A Figura 5.59 mostra uma vista de um ensaio executado pela equipa do Núcleo de Observação de Estruturas do LNEC.



Figura 5.59 - Execução do ensaio realizado a um dos conjuntos de pendurais da ponte.

#### 5.4.3 Processamento de dados e resultados

Nesta secção irá proceder-se ao processamento dos dados obtidos nos ensaios realizados na Ponte 25 de Abril para aferir qual a força instalada nos cabos. Irá também procurar esclarecer-se se o método estudado poderá ser aplicado a pendurais.

Existem dois tipos de pendurais que suspendem a Ponte 25 de Abril, cujas características geométricas e mecânicas são apresentadas na Tabela 5.26, relativa às características geométricas, e na Tabela 5.27, que agrupa as características mecânicas.

Tabela 5.26 - Características geométricas dos pendurais.

	$A_{\text{Conjunto}} \text{ (mm}^2\text{)}$	$A_{\text{Pendural}} \text{ (mm}^2\text{)}$	$\phi_{\text{Pendural}} \text{ (mm)}$	$I_{\text{Pendural}} \text{ (mm}^4\text{)}$
<b>Pendural tipo 1</b>	6243,00	1560,75	44,58	193878,73
<b>Pendural tipo 2</b>	3790,00	947,50	34,73	71414,93

Tabela 5.27 - Características mecânicas dos pendurais.

	$E \text{ (Gpa)}$	$M_{\text{Pendural}} \text{ (kg/m)}$
<b>Pendural tipo 1</b>	140,00	12,252
<b>Pendural tipo 2</b>		7,438

Apesar de terem sido medidos todos os pendurais do presente caso de estudo, no âmbito deste Trabalho Final de Mestrado apenas serão estudados seis pendurais com as mesmas características mecânicas mas com comprimentos diferentes. A escolha dos cabos teve como objetivo estudar a viabilidade da aplicação do método da vibração tendo em conta a relação rigidez e comprimento que pode ser expressa por  $\xi$ , equação (3.36).

A equipa do LNEC procedeu à análise do modelo numérico em *SAP2000* da Ponte 25 de Abril e a partir daí obteve uma estimativa da força instalada nos respetivos pendurais. Com base nestes valores foram calculadas através da expressão (3.18) as respetivas frequências a utilizar como referência no tratamento dos registos, para os cabos escolhidos para estudo Tabela 5.28.

Tabela 5.28 - Estimativa de frequência a partir da força gerada pelo modelo numérico e dos respetivos parâmetros de correção da rigidez.

<b>Cabo</b>	<b>I (mm<sup>4</sup>)</b>	<b>M (kg/m)</b>	<b>L (m)</b>	<b>T (kN)</b>	<b>f (Hz)</b>	<b><math>\xi</math></b>
83 D	193878,73	12,252	6,42	323,00	12,67	22,15
67 D			18,21	333,00	4,54	63,78
63 D			27,21	335,00	3,04	95,59
61 D			32,39	334,00	2,55	113,62
28 D			51,45	339,00	1,62	181,83
45 D			90,11	297,00	0,86	298,07

As medições foram realizadas com uma frequência de aquisição de 500 Hz e posteriormente filtradas com uma frequência de corte de 250 Hz.

À semelhança dos casos de estudo anteriores os espectros de resposta foram estimados através da aplicação desenvolvida em MATLAB dividindo os registos com uma sobreposição de 2/3. A resolução em frequência utilizada tem valores entre 0,03 Hz e os 0,05 Hz.

O cálculo da força foi feito de acordo com o descrito na secção 3.5, mas a correção da frequência apenas foi feita em relação à rigidez do cabo pois não se verifica flecha nos pendurais.

#### a) Pendural 83 D

O pendural 83 situa-se, sensivelmente, a 23 m do meio vão da Ponte 25 de Abril, sendo um dos cabos mais curtos medidos.

Apesar de se terem obtido 4 registos, cada um com uma duração de 60 segundos, apenas será utilizado metade de cada registo, pois a utilização do registo completo tornava o processamento muito mais lento. Na Figura 5.60 apresentam-se os registos utilizados.

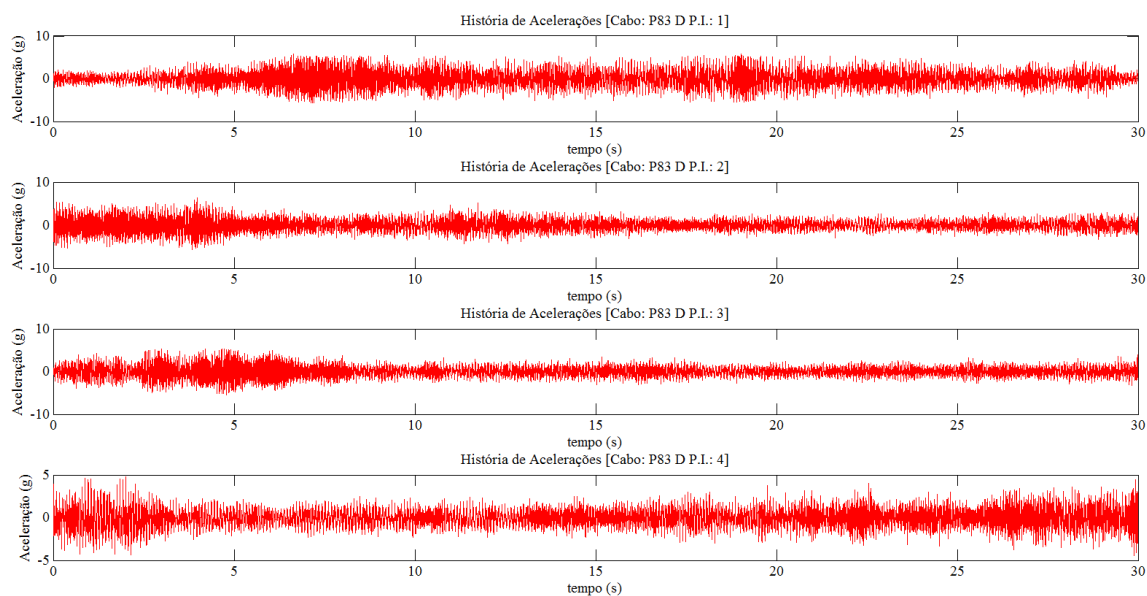


Figura 5.60 - Registos utilizados do pendural 83 D.

Obtiveram-se então os auto-espectros de cada registo (Figura 5.61) com uma resolução de  $df = 0,05$  Hz.

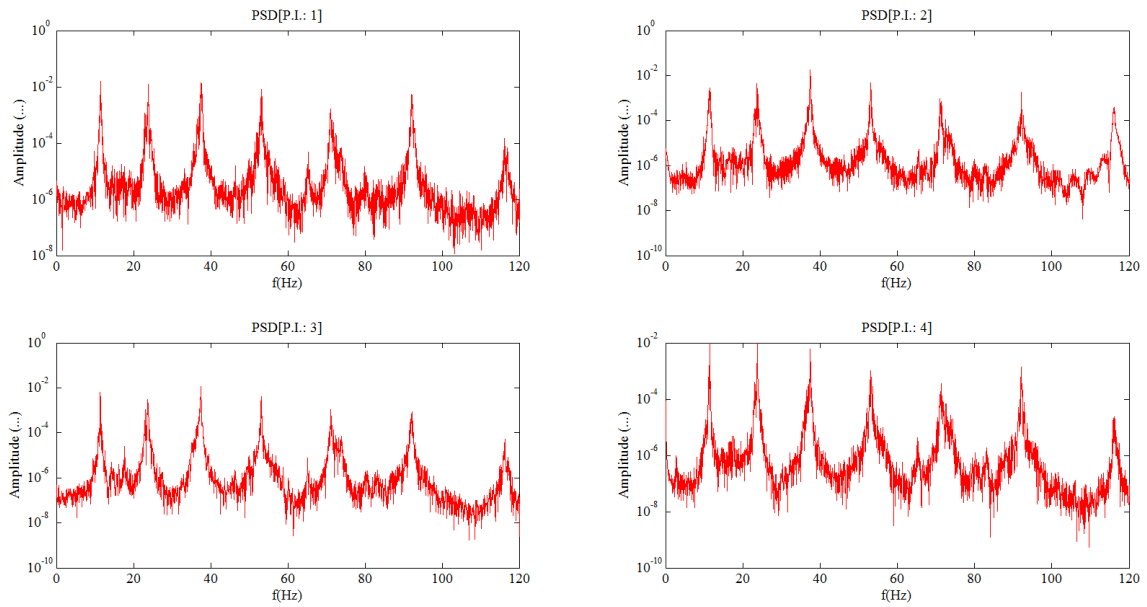


Figura 5.61 - Auto-espectros dos registos do pendural 83 D.

De seguida obteve-se o auto-espectro médio e feita a identificação modal, neste caso manual, com uma frequência de referência de 12,67 Hz (Tabela 5.29). A relação entre o valor da frequência identificada e a ordem do modo de vibração correspondente está representada na Figura 5.63.

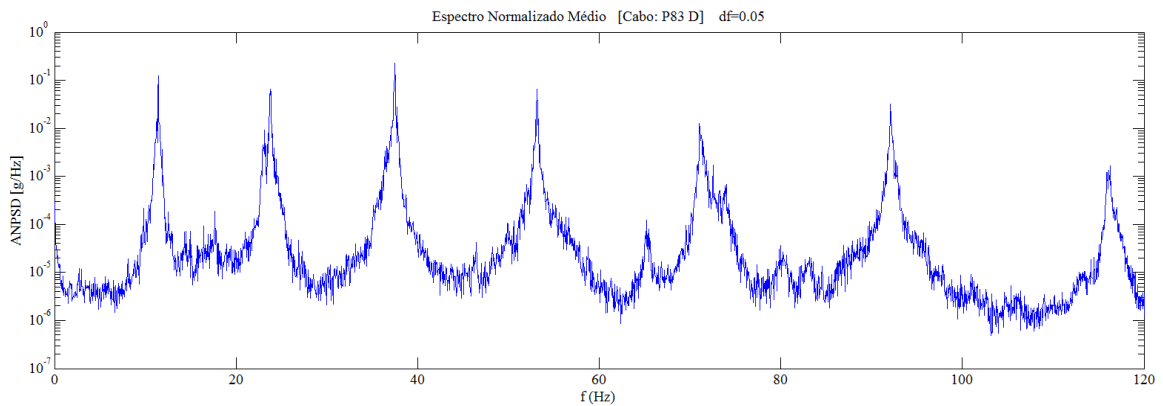


Figura 5.62 - Auto-espectro médio do pendural 83 D.

Tabela 5.29 - Frequências naturais do pendural 83 D.

Modo	$f_i$ (Hz)
1	11,46
2	23,81
3	37,50
4	53,15
5	71,05
6	92,10
7	116,10

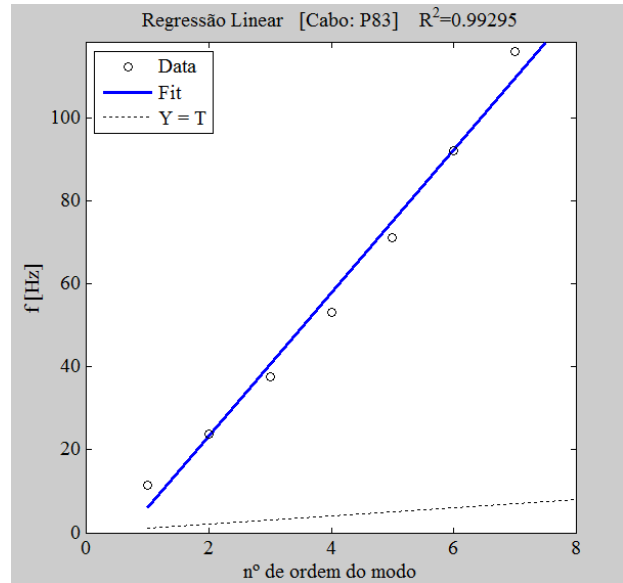


Figura 5.63 - Regressão linear das frequências obtidas.

Verifica-se então que a correlação das frequências em relação à ordem do modo é fraca apresentando um valor de  $R^2$  inferior a 0,999, não sendo possível aplicar o método da vibração para o cálculo da força instalada neste cabo.

#### b) Pendural 28 D

O pendural 28 situa-se, sensivelmente, a 670 m do meio vão da Ponte 25 de Abril no sentido de Almada e tem o comprimento médio dos cabos medidos ( $L=51,45$  m).

Neste pendural foram efetuados apenas 3 registos com duração de 60 segundos. Contudo para efeitos de análise só foram utilizados os primeiros de 30 segundos de cada registo (Figura 5.64), pois com uma frequência de aquisição de 500 Hz a utilização do registo todo tornava o processamento muito mais lento.

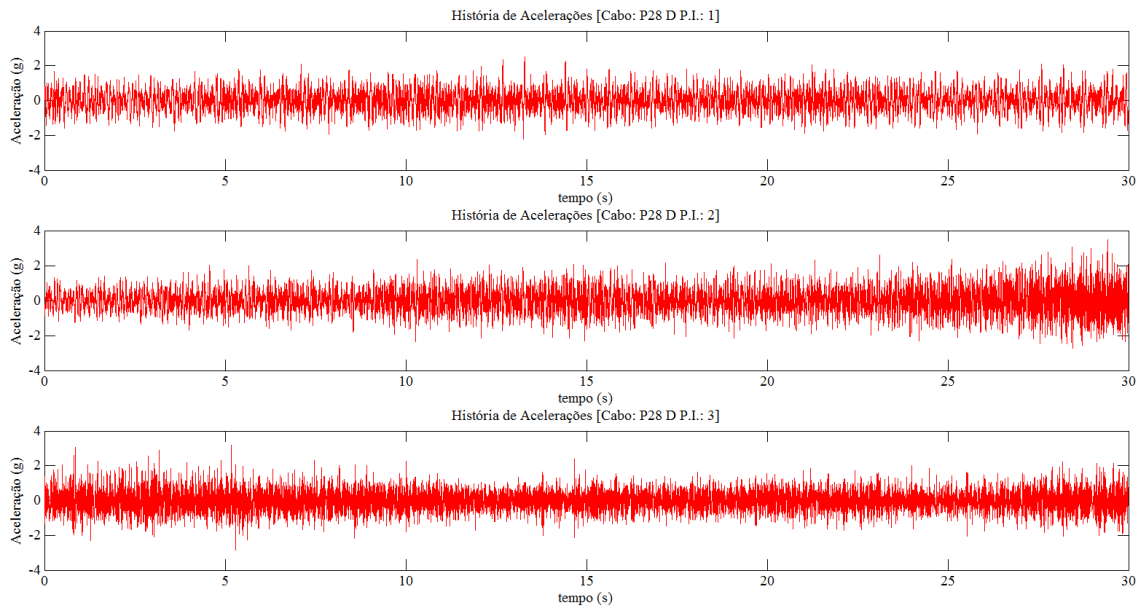


Figura 5.64 - Registos utilizados do pendural 28 D.

Obtiveram-se então os auto-espectros de cada registo, que se apresentam na Figura 5.65 com uma resolução de  $df = 0,05$  Hz.

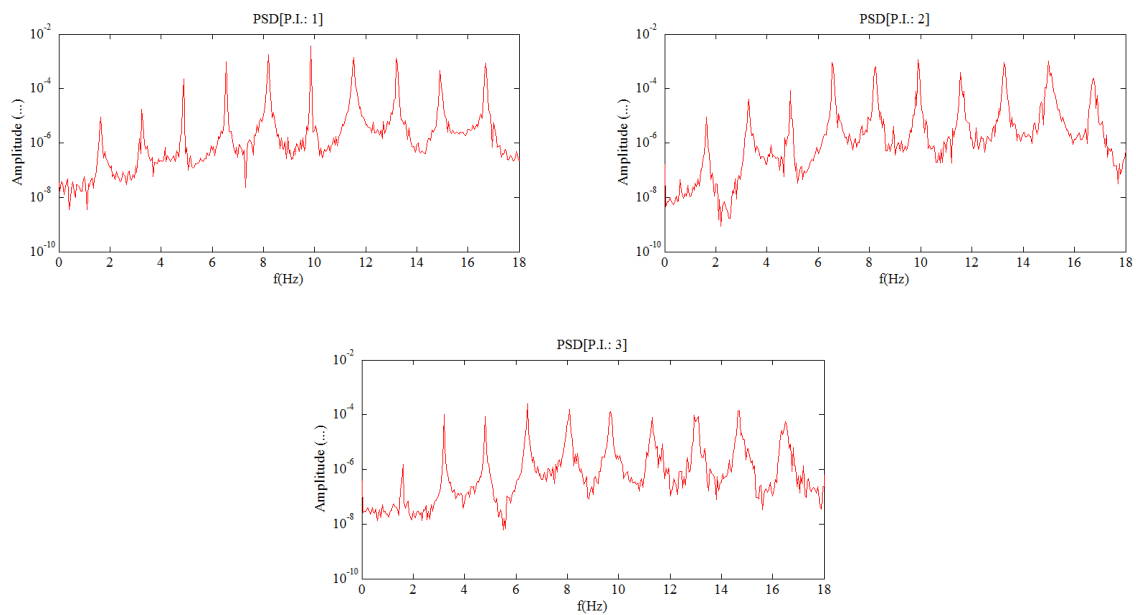


Figura 5.65 - Auto-espectros dos registos do pendural 28 D.

De seguida obteve-se o auto-espectro médio e foi feita de forma automática a identificação modal com uma frequência de referência de 1,62 Hz, após o que se traçou a reta de regressão das frequências em relação à ordem do modo de vibração (Figura 5.66).

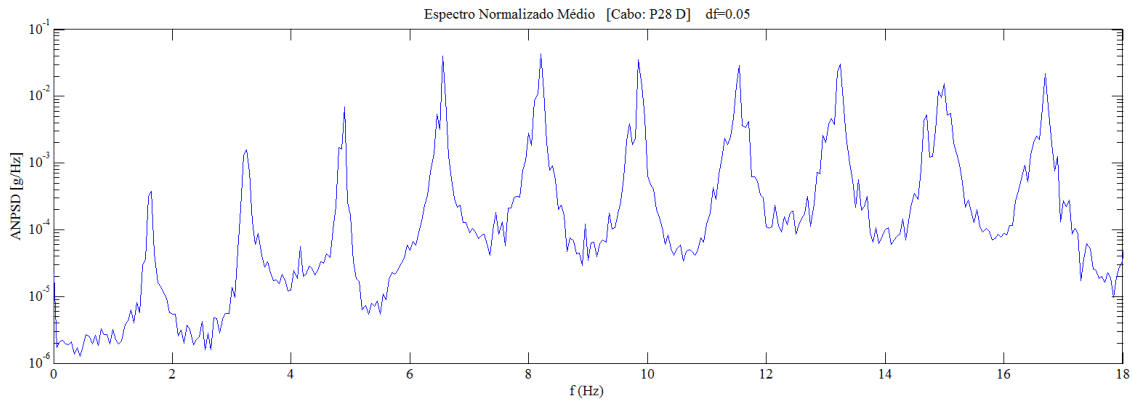


Figura 5.66 - Auto-espectro médio do pendural 28 D.

Tabela 5.30 - Frequências naturais do pendural 28 D.

Modo	$f_i$ (Hz)
1	1,65
2	3,25
3	4,90
4	6,55
5	8,20
6	9,85
7	11,55
8	13,25

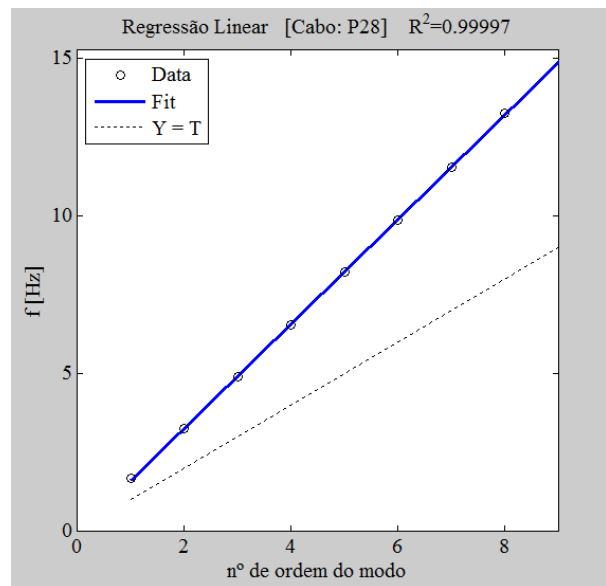


Figura 5.67 - Regressão linear das frequências obtidas.

Como se pode observar a correlação entre as frequências e os modos de vibração é elevada apresentando um valor de  $R^2 > 0,999$ .

Procedeu-se então ao cálculo da força instalada no pendural.

Tabela 5.31 - Cálculo da força no pendural 28 D e respetiva incerteza.

	Comp. (m)	Comp. Livre (m)	Massa (kg/m)	df (Hz)	Frequência (Hz)	Força (kN)	Incerteza (kN)
$f_1$	51,45	51,45	12,25	0,05	1,65	353	11
$f_{eq}$					1,62	338	10

### c) Pendural 45 D

O pendural 45 situa-se junto à torre sul, sensivelmente, a 530 m do meio vão no sentido de Almada. É um dos cabos mais longos ( $L=90,11$  m). Tem a particularidade de possuir uma braçadeira, localizada sensivelmente a metade do seu comprimento, ligando os quatro pendurais

do conjunto. Como é evidente, esta braçadeira influencia o comportamento dinâmico deste pendural.

Neste pendural foram efetuados 4 registos de 60 segundos. Como anteriormente, para a obtenção do espectro apenas foram utilizados os primeiros 30 segundos de cada registo (Figura 5.68), porque com uma frequência de aquisição de 500 Hz a utilização do registo completo tornava o processamento muito mais lento.

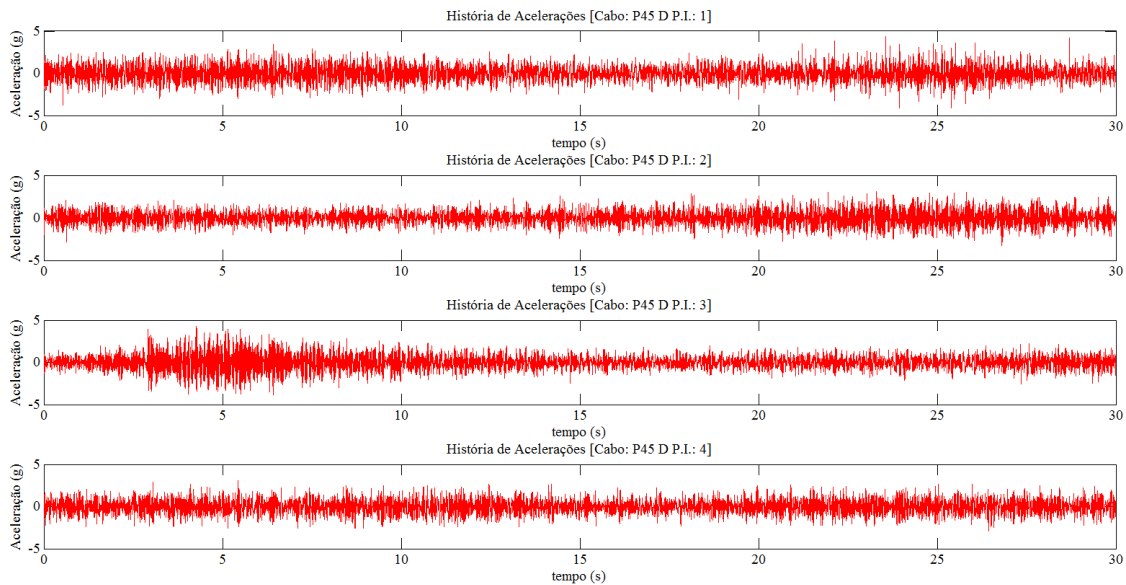


Figura 5.68 - Registos utilizados do pendural 45 D.

Obtiveram-se então os auto-espectros de cada registo (Figura 5.69) com uma resolução de  $df = 0,05$  Hz.

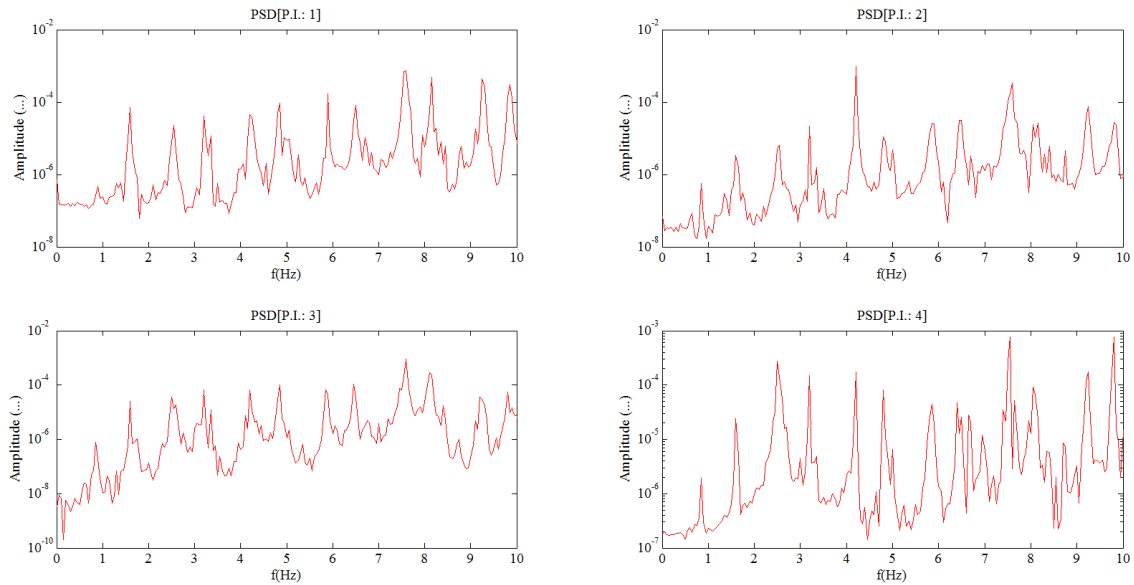


Figura 5.69 - Auto-espetros dos registos do pendural 45 D.

De seguida obteve-se o auto-espectro médio, exposto na Figura 5.70, onde se pode observar que existem duas séries de frequência com a primeira frequência de 0,85 Hz, assinalada a vermelho e a segunda frequência de 1,60 Hz, assinalada a verde.

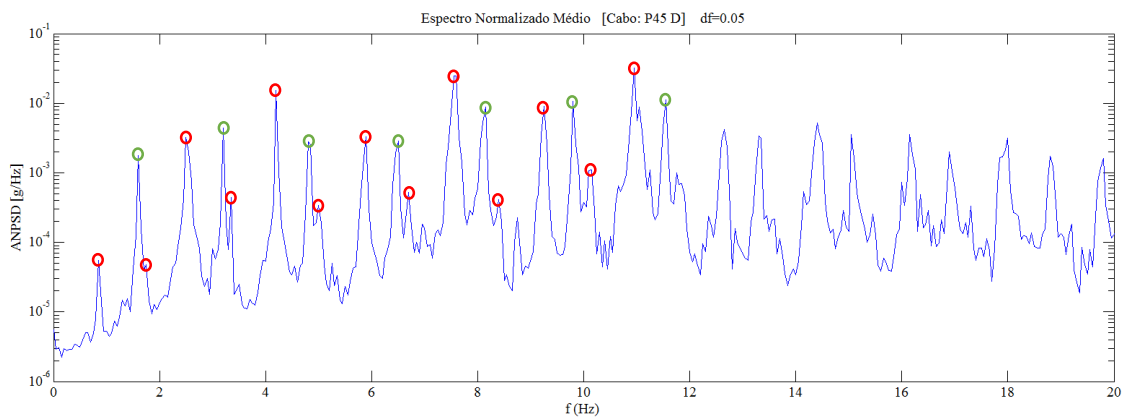


Figura 5.70 - Auto-espectro médio do pendural 45 D.

A segunda série forma-se devido à influência da braçadeira tornando o comprimento de vibração do pendural mais curto. Ainda assim foram identificadas as frequências (Tabela 5.32) e feita a sua correlação em relação à ordem do modo (Figura 5.71).

Apesar de se conseguirem identificar as duas séries de frequências apenas foi feita a avaliação da força para a primeira série, porque não foi possível medir a que altura está a braçadeira impedindo a avaliação da força com a segunda série.

Tabela 5.32 - Frequências naturais do pendural 45 D considerando o comprimento mais curto.

Modo	$f_i$ (Hz)
1	1,60
2	3,20
3	4,80
4	6,50
5	8,15
6	9,80
7	11,55

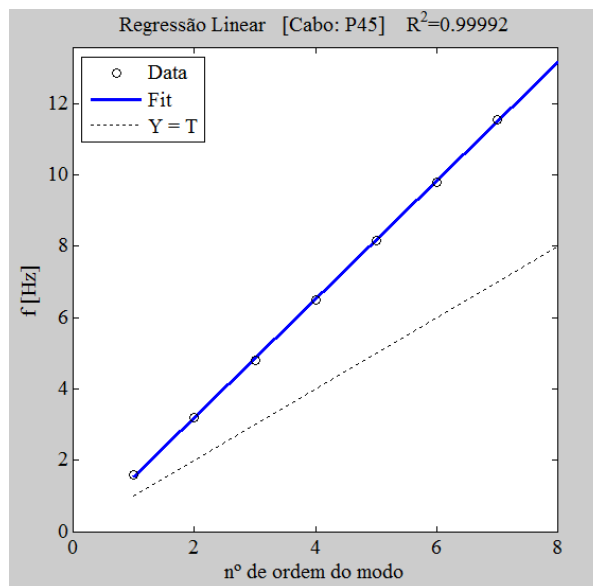


Figura 5.71 - Regressão linear das frequências obtidas.

Assim, foram identificadas frequências (Tabela 5.33) para o comprimento de 90,11 m, que no espectro estão identificadas a vermelho, e feita a respetiva correlação em relação à ordem do modo (Figura 5.72).

Tabela 5.33 - Frequências naturais do pendural 45 D considerando o comprimento de 90,11.

Modo	$f_i$ (Hz)
1	0,85
2	1,75
3	2,50
4	3,35
5	4,20
6	5,00
7	5,90
8	6,70
9	7,55
10	8,40
11	9,25

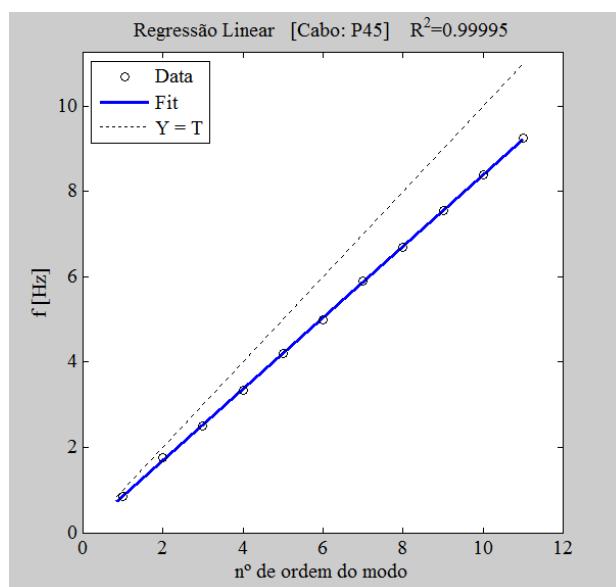


Figura 5.72 - Regressão linear das frequências obtidas.

Como se pode observar a correlação das frequências em ordem ao modo é boa apresentando um valor de  $R^2 > 0,999$ . Procede-se então ao cálculo da força instalada no pendural.

Tabela 5.34 - Cálculo da força no pendural 45 D com comprimento de 90,11 m e respetiva incerteza.

	<b>Comp. (m)</b>	<b>Comp. Livre (m)</b>	<b>Massa (kg/m)</b>	<b>df (Hz)</b>	<b>Frequência (Hz)</b>	<b>Força (kN)</b>	<b>Incerteza (kN)</b>
<b>f<sub>1</sub></b>	90,11	90,11	12,25	0,05	0,85	287	17
<b>f<sub>eq.</sub></b>					0,83	276	17

d) Pendurais 67 D, 63 D e 61 D

Os conjuntos de pendurais 67, 63 e 61 situam-se, respetivamente, a 207,18 m, 253,22 m e 276,24 m do meio vão da Ponte 25 de Abril no sentido de Almada.

O estudo destes cabos é de especial interesse para a análise da influência da rigidez, dada pelo parâmetro  $\xi$  descrito pela equação (3.36). Visto que a secção dos cabos escolhidos é a mesma então apenas o comprimento afetará esse parâmetro  $\xi$ .

O processamento dos registos foi efetuado da forma descrita para os cabos anteriores obtendo-se os auto-espetros (Figura 5.73) a partir de 4 registos de 30 segundo cada.

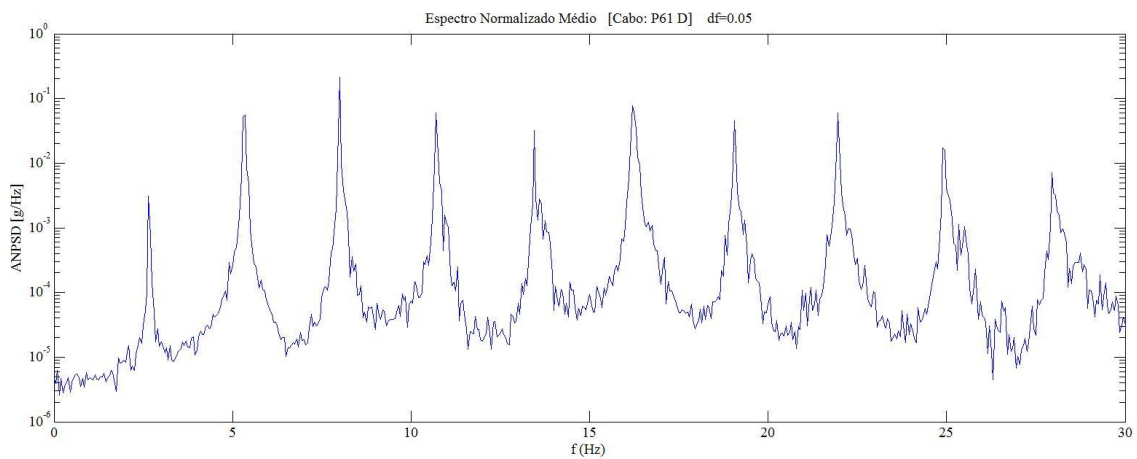
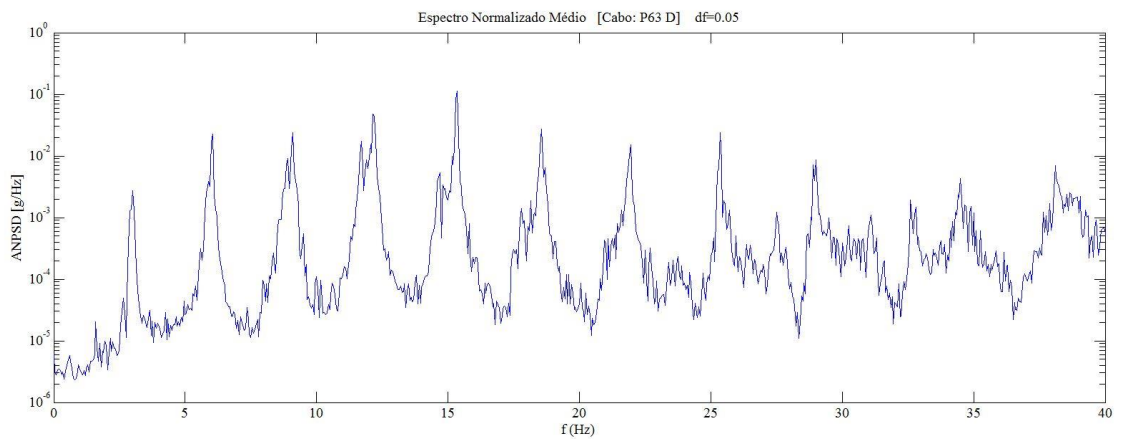
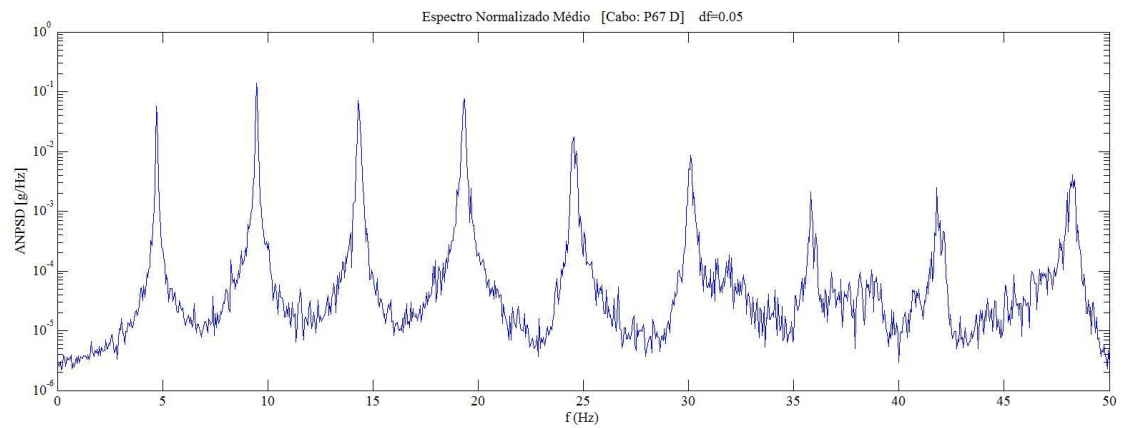


Figura 5.73 - Auto-espectros médios dos pendurais 67 D, 63 D e 61 D.

Posteriormente procedeu-se à identificação modal tendo como referência uma 1ª frequência de 4,54 Hz, 3,04 Hz e 2,55 Hz, respetivamente. Na Tabela 5.35 apresentam-se as frequências identificadas, uma estimativa de força calculada com a primeira frequência identificada e uma estimativa de  $\xi$ , calculada a partir da força calculada.

Tabela 5.35 - Frequências, em Hz, identificadas a partir do espectro e estimativas de força e  $\xi$ .

<b>Pendural</b> <b>Modo</b>	<b>67 D</b>	<b>63 D</b>	<b>61 D</b>
<b>1</b>	4,70	3,00	2,65
<b>2</b>	9,45	6,05	5,35
<b>3</b>	14,30	9,10	8,00
<b>4</b>	19,35	12,15	10,70
<b>5</b>	24,55	15,35	13,45
<b>6</b>	30,10	18,55	16,20
<b>7</b>	35,80	21,95	19,05
<b>8</b>	41,80	25,35	21,95
<b>9</b>	48,25	29,00	24,95
<b>10</b>	54,85	-	27,95
<b>Força <math>f_1</math> (kN)</b>	358,93	326,51	361,00
<b><math>\xi_1</math></b>	66,22	94,37	118,12

Como se observa nesta tabela para valores de  $\xi$  mais baixos a diferença de frequências de modos consecutivos vai aumentando quanto maior for o número de modos considerados. Deste facto infere-se que não se verifica linearidade da frequência em ordem aos modos de vibração.

Para melhor evidenciar este fenómeno apresenta-se o gráfico seguinte onde estão representadas as frequências de todos os modos identificados dos cabos estudados neste caso de estudo.

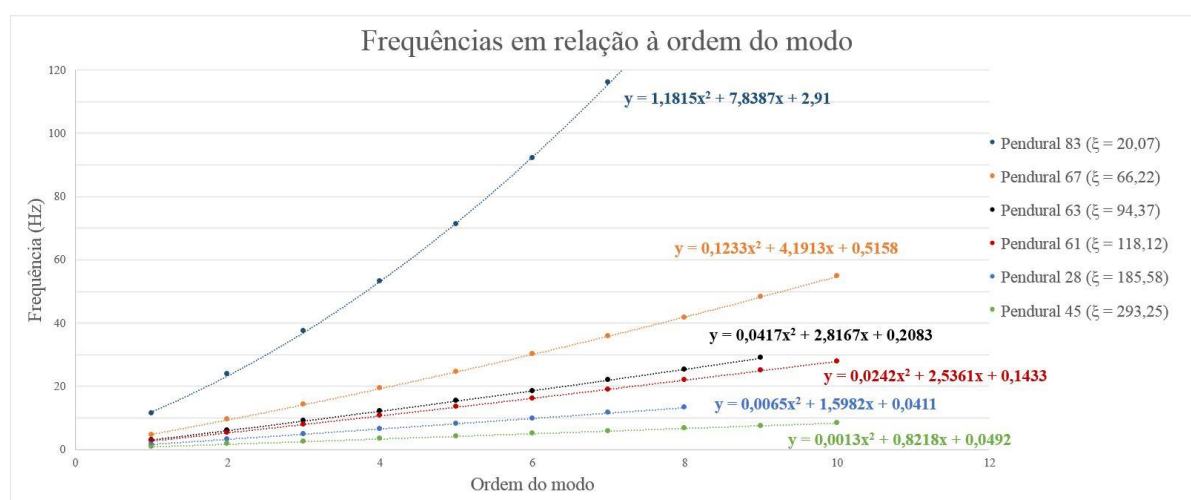


Figura 5.74 - Ordem do modo VS Frequência.

Neste gráfico em vez de fazer a habitual regressão linear optou-se representar uma regressão quadrática e a sua respetiva equação de modo a avaliar a evolução do seu termo de 2º grau em relação ao valor de  $\xi$ .

#### 5.4.4 Análise de Resultados

Na Tabela 5.36 apresenta-se uma síntese dos comprimentos dos três pendurais referidos, bem como da frequência equivalente e das forças estimadas pelo método da vibração e pelo modelo numérico.

Tabela 5.36 - Resumo dos cálculos realizados.

<b>Pendural</b>	<b>83 D</b>	<b>28 D</b>	<b>45 D</b>
<b>L (m)</b>	6,42	51,45	90,11
<b>L<sub>e</sub> (m)</b>	6,42	51,45	90,11
<b>df (Hz)</b>	0,05	0,05	0,05
<b>f<sub>eq.</sub> (Hz)</b>	-	1,62	0,83
<b>Força [M.V.] (kN)</b>	-	338	271
<b>Força [Modelo] (kN)</b>	323	339	297
<b>Diferença (kN)</b>	-	1	26

M.V. – Método da Vibração.

Pelos resultados obtidos verifica-se que o método não é aplicável para o cálculo de forças em cabos com baixo valor de  $\xi$ , pois neste caso obteve-se uma correlação linear fraca entre as frequências naturais e ordem do modo de vibração.

No que diz respeito aos outros dois pendurais pode-se afirmar que o método da vibração proporciona boas estimativas de força, porque as diferenças observadas entre a força obtida no modelo numérico e a obtida através do método da vibração são pequenas. Este fenómeno é mais evidente para o pendural 28 D em que o resultado obtido é praticamente igual ao do modelo.

No pendural 45 D obteve-se uma diferença de 26 kN entre a força estimada pelo método da corda vibrante e a força obtida no modelo. Esta diferença pode dever-se ao facto de no caso dos pendurais compridos terem a sua vibração restringida pelas braçadeiras referidas.

Analisando os resultados relativos aos pendurais 67 D, 63 D e 61 D pode-se constatar que o pressuposto do método da vibração de que existe uma relação linear entre o número do modo

de vibração e as frequências, é posto em causa no caso de cabos curtos pois estes apresentam uma forte componente quadrática no que diz respeito à evolução da frequência.

A observação do gráfico da Figura 5.74 permite verificar que quanto maior o valor de  $\xi$ , maior será a linearidade dos modos podendo assim obter-se melhores resultados em termos de estimativa de força.

A análise do termo de 2º grau das equações das regressões refletem exatamente isso, este vai diminuindo quanto maior o valor do parâmetro que reflete a rigidez do cabo.

Para este caso em que a inércia dos vários cabos estudados é igual, portanto apenas a variação de comprimento é relevante, pode-se dizer que para cabos curtos, com comprimento, sensivelmente, inferiores a 15 m o método da vibração não é funcional.

No entanto deve ser referido, ainda, que para valores de  $\xi$  entre 50 e 120 apenas podem considerar-se os primeiros 4 modos de vibração pois é até aí que se verifica a linearidade dos modos, tendo em atenção que é dependente de caso para caso.

Confirma-se, assim que a aplicação do método da vibração para cabos com  $\xi < 50$  é comprometedor, tal como Mehrabi e Tabatabai observam em [22].



## 6. CONCLUSÕES E PERSPETIVAS FUTURAS

### 6.1 Síntese do trabalho

A crescente utilização de cabos como elementos estruturais tem permitido a construção de estruturas esbeltas, nomeadamente pontes ou coberturas de grande vão. Neste contexto os cabos têm sido utilizados como pré-esforço exterior, tirantes ou pendurais.

A modelação dos cabos pode ser executada de diversas formas como a discretização em elementos finitos, recorrendo a barras articuladas ou utilizando o conceito de rigidez equivalente.

Os cabos são, na generalidade das aplicações, elementos de grande relevo no comportamento da estrutura em que estão integrados pelo que a medição das forças instaladas, que podem variar ao longo do tempo devido ao comportamento diferido dos materiais ou a anomalias diversas, assume acrescida importância. Esta medição de forças instaladas pode ser feita através de métodos diretos, como através de anel dinamométrico ou célula monocórdão, ou, indiretamente através do método da vibração.

A medição através do anel dinamométrico é feita diretamente sobre o conjunto dos cordões que compõem o cabo. Este método, sendo o mais preciso, requer pesados meios logísticos para a manipulação do anel, pelo que, em geral apenas é utilizado no decurso da construção ou no âmbito de trabalhos de reabilitação.

A utilização de células monocórdão para a avaliação de forças em cabos é feita medindo a força num único cordão, multiplicando esse valor pelo número de cordões que constituem o tirante. Este método, baseado no pressuposto de todos os cordões funcionarem à mesma tensão, embora associado a uma incerteza decorrente da variabilidade das forças suportadas pelos diversos cordões constitui uma boa solução para a monitorização da força ao longo de parte significativa da vida útil da obra. Contudo a utilização destas células requer a sua instalação durante a fase construtiva.

A avaliação da força a partir da frequência é feita recorrendo ao método da vibração que tem como base a teoria das cordas vibrantes.

Para a compreensão do método da vibração procedeu-se a uma breve explicação sobre o comportamento dinâmico do cabo em que se referiu que estes podem apresentar comportamento não linear e possuem modos de vibração em diferentes planos.

Foram apresentadas várias abordagens do método onde são feitas algumas correções para que seja possível a aplicação do método da vibração. Neste trabalho foram adotadas as correções propostas por Irvine e Caughey [18] correspondentes à interação da flecha e da rigidez à flexão na avaliação da força.

Foi desenvolvido um algoritmo em linguagem *MATLAB* para aplicação do método da vibração, que permite a identificação das frequências naturais do cabo a partir de histórias de acelerações medidas experimentalmente. Para este efeito, o modelo implementado recorre ao método básico no domínio da frequência, onde são utilizadas funções de densidade espectral de potência da resposta, obtendo assim os auto-espectros de resposta do cabo e identificadas, de forma automática, as suas frequências naturais. Posteriormente, mediante uma análise da regressão das frequências identificadas e ordem dos respetivos modos, o algoritmo estima uma frequência equivalente de vibração, que tem em consideração o efeito da flecha do cabo e a sua rigidez, determinado a força instalada no cabo, de acordo com as suas características geométricas.

Por fim, apresentaram-se três casos de estudo com aplicações distintas de cabos: cabos de pré-esforço exterior, na ponte de S. João, no Porto; tirantes do Viaduto Salah Bey em Constantine, na Argélia e pendurais da Ponte 25 de Abril, em Lisboa.

## **6.2 Conclusões**

Considera-se que os objetivos estabelecidos para este trabalho foram cumpridos.

Recorda-se que o primeiro objetivo deste trabalho era a elaboração de uma monografia sobre os métodos existentes de avaliação de forças em cabos que foi cumprido no segundo e terceiro capítulos.

O segundo objetivo prendia-se com a contribuição para uma maior eficácia na aplicação do método da vibração na avaliação das forças em cabos. Para esse efeito definiram-se diversos objetivos parcelares, relativamente aos quais foi possível obter as seguintes conclusões:

- A duração do registo que otimiza a aplicação do método depende da frequência de amostragem que se pretenda utilizar. No âmbito deste trabalho foi utilizada uma frequência de amostragem entre os 50 Hz e os 500 Hz.

- A análise realizada num cabo da Ponte de São João e num tirante do Viaduto Salah Bey indicam que a partir da utilização de quatro frequências na estimativa da força esta tem tendência a estabilizar.
- Quanto às características para qual o método é aplicável verificou-se que para cabos com parâmetro da rigidez,  $\xi$ , inferior a 50, a linearidade entre as frequências e ordem do modo não é satisfatória o que compromete a aplicação direta do método da vibração. Para cabos com  $\xi$  entre 50 e 120 devem ser apenas utilizados os modos em que se verifica a linearidade.
- Através da comparação do método da vibração com a medição através de célula de monocórdão, chegou-se à conclusão que o método da vibração origina boas estimativas tornando-se assim recomendável para avaliação de forças nos cabos sem instrumentação prévia.

Destas conclusões parcelares pode ainda inferir-se que para uma correta avaliação é necessário o correto conhecimento das características e comprimento livre de vibração do cabo e outros fatores que possam influenciar o comportamento dinâmico como as suas condições de apoio ou a presença de amortecedores nos cabos.

### **6.3 Perspetivas e desenvolvimentos futuros**

A utilização do método da vibração para medição de forças em tempo real em cabos, ao longo dos anos tem evoluído procurando o melhoramento da sua aplicabilidade. No entanto existem alguns aspetos ainda por esclarecer ou desenvolver, designadamente:

- Encontrar uma correção em que seja possível a análise pelo método da vibração de cabos com o parâmetro da rigidez  $\xi$  inferior a 50.
- A influência da utilização de amortecedores na aplicação do método.
- Averiguar se a utilização de mais do que um acelerómetro na monitorização na estimativa dos espetros no que diz respeito à definição dos modos de vibração. O algoritmo implementado está preparado para processar simultaneamente leituras de mais do que um sensor.

- Desenvolvimento de um algoritmo que identifique as frequências naturais através da análise espectral sem recorrer à simplificação adotada neste trabalho, em que as frequências naturais são proporcionais ao modo de vibração.

O algoritmo desenvolvido poderá ainda ser melhorado através da implementação do método da meia-potência para a determinação do coeficiente de amortecimento do cabo e identificação automática das frequências naturais sem a necessidade de verificação posterior pelo utilizador da aplicação.

## Referências bibliográficas

- [1] ADVITAM – Monostrand Load Cell Operating manual, França, 2013
- [2] Andersson, Andreas; Sundquist, Hakan; Karoumi, Raid –“Evaluating Cable Forces in Cable Supported Bridges Using the Ambient Vibration Method”; The Royal Institute of Technology (KTM); Stockholm; Sweden
- [3] Bastos, V. L.; Cerqueira, T. S.; Tachard, L. E. – Desenvolvimento das Pontes Estaiadas; VII Congresso Brasileiro de Pontes e Estruturas; Maio de 2014
- [4] Branco, F.A., Virtuoso, F.E. – Estudo do comportamento diferido da ponte ferroviária do Douro, Relatório CMEST EP 27/87, IST, Lisboa, 1988.
- [5] Bridge Dignostic, Inc – Accelerometer Operations Manual; BDI; 03/2012
- [6] Caetano, Elsa – “Cable Vibrations in Cable-Stayed Bridges”; IABSE Structural Engineering Documents 9; 2007
- [7] Caetano, Elsa – Dynamics of Cable-Stayed Bridges, Experimental assessment of cable-structure interation, Tese de Doutoramento, FEUP, Porto, 2000
- [8] Calado, Carlos Miguel Cabeçadas – Concepção Estrutural das Pontes de Tirantes; Tese de Mestrado; IST; Novembro de 2011
- [9] Casas, Juan R. – A Combined Method for Measuring Cable: The Cable-Stayed Alamillo Bridge, Spain; Strutural Engineering Internacional 4/94; IABSE; 1994; pp. 235-240
- [10] Cooley, J. W.; Tukey, J. W. – An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Séries; Mathematics of Computation; Vol. 19; 1965; pp 297-301
- [11] Cunha, A.; Caetano, E.; Delgado, R. – Dynamic Tests on a Large Cable-Stayed Bridge an Efficient Approach; Journal of Bridge Engineering; ASCE; 2001
- [12] Eklund, Alice – “Measurement and Evaluation of Cable Forces in the Älvsborg Bridge”; TRITA-BKN, Master thesis 235; Structural Design and Bridges Royal Institute of Technology; Stockholm; 2006
- [13] FREYSSINET – DAMPER EFFICIENCY. Calculation Note. Doc. Num. N218EX-NCA 001, April 2012

- [14] Fu, Qui; Deng, Yan; Mao, Leshan – Wireless measurement system of cable tension force based on LabVIEW; SICE Annual Conference in Sapporo; 2004; pp. 1067-1070
- [15] [http://pt.wikipedia.org/wiki/Ponte\\_25\\_de\\_Abril](http://pt.wikipedia.org/wiki/Ponte_25_de_Abril) (Consultado em Setembro de 2014)
- [16] <http://www.estradasdeportugal.pt/index.php/pt/informacoes/empreendimentos-em-destaque> (Consultado em Setembro de 2014)
- [17] Irvine, H. M. – “Free Vibration of Inclined Cables”; Journal of the Structural Division; Proceedings of the American Society of Civil Engineers; Vol. 104; N° ST2; 1997; pp 343-347
- [18] Irvine, H. M.; Caughey, T. K. – “The Linear Theory of Free Vibration of a Suspended Cable”; Proceedings of the Royal Society of London Séries A; Vol. 341; 1974; pp. 299-315
- [19] Jacinto, Luciano – Folhas da disciplina de Betão Estrutural III; ISEL; Setembro de 2007
- [20] Kim, Byeong Hwa; *et al* – A Comparative Study of Tension Estimation Methods for Cable Supported Bridges; Steel Structures 7; 2007; pp.77-85
- [21] LDS Dactron – Understanding FFT Windows; Application Note; <http://www.physik.uni-wuerzburg.de/~praktiku/Anleitung/Fremde/ANO14.pdf> (consultado em Julho de 2014)
- [22] Mehrabi A. B.; Tabatabai H. – Unified Finite Difference Formulation for Free Vibration of Cables; Journal of Structural Engineering; Vol. 124; 1998; pp. 1313-1322
- [23] Mendes, Paulo – Observação e Análise do Comportamento Dinâmico de Barragens de Betão; Tese de Doutoramento; FEUP; Abril de 2010
- [24] Mendes, Paulo – Sebenta de Dinâmica de Estruturas; ISEL; Abril de 2012
- [25] Park, Kyu-Sik; *et al.* – Feasibility Study on Tension Estimation Technique for Hanger Cables Using the FE Model-Based System Identification Method; Hindawi Publishing Corporation, Mathematical Problems in Engineering; October 2014
- [26] Pavisic, Miodrag – Cable forces measurements of the externally prestressed and cable-stayed structures; Recent Advances in Experimental Mechanics, Silva Gomes *et al.* (eds); Rotterdam; 1994; pp. 937-939

- [27] Persoon, A. J.; Noorlander, K. – Full-scale measurements on the Erasmus bridge after rain/wind induced cable vibrations; NLR-TP-99063; Nacional Aerospace Laboratory NLR; 1999
- [28] Rito, Armando – A construção das pontes da Régua e do Varosa e Balsemão no lanço Régua-Reconcos do IP3; Betão Estrutural 1996; LNEC; 1996; pp. 3.81-3.91
- [29] Robert, Jean-Louis; Bruhat, Daniel; Gervais, Jean-Pierre – Mesure de la tension des cables par méthode vibratoire: Bulletin de liaison des laboratoires des ponts et eraussées; N°173; 1991
- [30] Roberts-Wolmann, Carin L.; *et al* – Field Measurements of Prestress Losses in External Tendons; Strutural Journal; ACI; September-October 1996; pp. 595-601
- [31] Rodrigues, Jorge – Avaliação das forças nos cabos da cobertura do anfiteatro ao ar livre da Fundação Calouste Gulbenkian; Relatório 129/2009-NOE; LNEC; 2009
- [32] Rodrigues, Jorge – Identificação Modal Estocástica. Métodos de Análise e Aplicações em Estruturas de Engenharia; Tese de Doutoramento; FEUP; Porto; 2004
- [33] Rodrigues, Jorge – Monitorização Estrutural da Ponte 25 de Abril, Medições efetuadas no ano de 2013; Relatório 231/2014-DE/NOE; LNEC; 2014
- [34] Rodrigues, Jorge – Monitorização Estrutural da Ponte 25 de Abril, Medições efetuadas no ano de 2013; Relatorio 231/2014-DE/NOE; LNEC; 2014
- [35] Russell, J. C.; Lardner, T. J. – Experimental Determination of Frequencies and Tension for Elastic Cables; ASCE Journal of Engineering; 1998; pp. 1067-1072
- [36] Santos, L. Oliveira; Marecos, Vânia – Aula 17: Sensores de Corda Vibrante; Slides da U.C. Observação e Comportamento de Obras; ISEL; 2013
- [37] Santos, L. Oliveira; Xu, Min – Avaliação das forças nos cabos de pré-esforço exterior da ponte de São João, Campanha realizada em abril de 2014; Relatório 180/2014-DE/NOE; LNEC; 2014
- [38] Santos, L. Oliveira; Xu, Min – Épreuves de Chargement du Viaduc Salah Bey à Constantine, Algérie; Relatório 333/2014-DE/NOE; LNEC; 2014
- [39] Santos, L. Oliveira; Xu, Min; Silveira, Paulo – Ensaios de Carga da Ponte 4 de Abril sobre o rio Catumbela na via rápida entre Benguela e Lobito em Angola; Relatório 312/2009-NOE; LNEC; 2009

- [40] Santos, Luis Oliveira – Controlo Estrutural na Construção de Pontes Atirantadas de Betão, Bases para um Sistema Pericial de Ajustamento dos Cabos; Tese de Mestrado; IST; Abril de 1992
- [41] Triantafyllou, M. S.; Grinfogel, L. – Natural Frequencies and Modes of Inclined Cables; Journal of Structural Engineering; ASCE; Vol.112; 1986; pp. 139-148
- [42] Triantafyllou, M.S. – The Dynamics of Taut Inclined Cables; Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics; Vol. 37; Pt 3; 1984; pp 421-440
- [43] Zui, Hiroshi; Shinke, Tohru; Namita, Yoshio – Practical Formulas for Estimation of Cable Tension by Vibration Method; Journal of Structural Engineering; ASCE; Vol.122; 1996; pp. 651-656