Instituto Politécnico de Lisboa
Escola Superior de Educação

A aprendizagem da Matemática no 1º ciclo através de atividades de investigação numa comunidade de aprendizagem

Dissertação apresentada para obtenção do grau de Mestre em Educação Matemática na Educação Pré-Escolar e nos 1º e 2º Ciclos do Ensino Básico na especialidade de Didática da Matemática

Orientadora: Professora Doutora Maria Cecília Monteiro

Maria Helena Gomes da Silva

2013

Resumo

Este estudo visa compreender como é que os alunos vão desenvolvendo o conhecimento matemático através da articulação de investigações e tarefas exploratórias, feitas individualmente ou a pequenos grupos com a posterior comunicação e discussão dos resultados dessas investigações com toda a turma.

Para orientar a investigação enunciei três questões que ajudaram a objetivar melhor este estudo: (1) em que medida é que o envolvimento dos alunos em investigações matemáticas contribui para o desenvolvimento do conhecimento matemático? Quais os fatores que contribuem para esse envolvimento? (2) De que modo é que a discussão coletiva contribui para o desenvolvimento do conhecimento matemático? Qual é o papel do professor nessa discussão? Que funções assume o discurso dos alunos? (3) De que forma os conhecimentos anteriores são usados para fundamentar as opiniões apresentadas nas discussões em coletivo e nas atividades investigativas?

Neste estudo foi seguida uma metodologia no paradigma interpretativo no âmbito de uma abordagem qualitativa. Pretendo descrever e compreender os processos observados, tendo em conta o contexto social, não sendo esperado obter generalizações. Foquei as observações em dois momentos de trabalho em coletivo onde são apresentadas investigações dos alunos e em duas investigações executadas em momentos de trabalho autónomo.

A investigação foi feita num ambiente de aprendizagem assente numa perspetivas sócio-construtivistas, na turma do quarto ano que lecionava tendo assumido o papel de observadora-participante. A recolha de dados ocorreu em dois tipos de momento de trabalho distintos tendo como principal fonte o registo de audiovisuais e notas de campo. Nos momentos de trabalho autónomo foram também utilizadas produções dos alunos. A análise dos dados foi feita em duas grandes categorias: a comunicação e atividades investigativas.

A análise dos dados recolhidos com este estudo revela ser possível os alunos progredirem no currículo de Matemática do quarto ano, através do seu envolvimento em investigações matemáticas e suas posteriores discussões na turma. Os resultados do estudo também revelam que os alunos desenvolvem conhecimento matemático através das investigações e que esse conhecimento é aperfeiçoado, retificado e partilhado nas discussões em coletivo (com toda a turma) sobre as mesmas investigações.

Palavras-chave: comunicação; partilha; atividades de investigação; comunidade de aprendizagem

Abstract

This study aims to understand how students develop their mathematical knowledge through the articulation of investigation and exploratory tasks, done individually or in small groups, and later through communicating and discussing the outcome of those investigations with the entire class.

To guide and establish the objective of this research, three questions have been made: (1) How does the students' involvement in mathematical investigation contributes to their mathematical knowledge development? Which elements contribute to that involvement? (2) How does discussion supports the development of their mathematical knowledge? What is the teacher's role in that discussion? What is the students speech function? (3) How is the previous knowledge used to fundament the opinions presented at the group discussions and investigation activities?

The study follows an interpretation paradigm in a qualitative approach. My goal is to understand and describe the observed processes, taking in account the social context, not hoping to obtain generalizations. Therefore, my observations were focused in two moments of the classroom work where students' investigations are presented, and in two investigations executed in moments of autonomous work.

This research was produced in a learning environment based on a social constructivist perspective, in the fourth grade class that I was teaching and where I have assumed the role of observer-participant. The collection of data happened in two distinct work moments having as main source both the capture of audio-visual material and field notes. In the moments of autonomous work students' productions were also used. The data analysis was made in two big categories: communication and investigation activities.

The analysis of the collected data shows that it is possible to develop the fourth grade mathematics curriculum using the students' involvement in mathematical investigations and its later discussion with the class. The results also show that students developed mathematical knowledge through investigating and that the same knowledge was improved, corrected and shared on group discussions.

Keywords: communication; sharing; investigative activities; learning community.

Agradecimentos

Em primeiro lugar gostaria de agradecer à minha orientadora pela sua disponibilidade, paciência e apoio que sempre me deu ao longo deste trabalho sobretudo nos momentos mais difíceis.

Agradeço aos alunos que participaram neste estudo pelo entusiasmo, disponibilidade e envolvimento na participação nesta investigação.

Não esqueço também os meus colegas de trabalho com quem muitas vezes refleti sobre estes e outros assuntos e que sempre me apoiaram e incentivaram à concretização deste estudo.

Gostaria de referir também o quão importante têm sido para mim os colegas do Movimento da Escola Moderna cujos contributos me orientaram para as práticas que hoje desenvolvo.

Agradeço à instituição onde trabalho que me permitiu a realização desta investigação.

Agradeço aos familiares e amigos que compreenderam as minhas ausências durante este período, em especial aos meus filhos.

Por fim um agradecimento especial à minha madrinha por todo o apoio que me deu.

Índice

Índice de Anexos

Índice de figuras

Índice das tabelas

Capítulo I

Contexto e objetivo do estudo

Neste capítulo começo por fazer uma contextualização do estudo referindo as razões que me levaram à escolha do tema. De seguida, apresento o objetivo e as questões orientadoras da investigação assim como a pertinência do estudo para a educação matemática no 1º ciclo do Ensino Básico.

1.1. Contextualização do estudo

Este estudo teve como principal motivação, a minha experiência profissional apoiada em práticas preconizadas pelo Movimento da Escola Moderna. Já há algum tempo que estava insatisfeita com o modo como os conteúdos matemáticos eram abordados nas minhas práticas letivas. O processo de desenvolvimento dos alunos no currículo de Português e no currículo de Matemática não seguiam a mesma génese de procedimentos. No caso do currículo de Português, o trabalho e a abordagem dos diferentes assuntos, emergiam das produções[1] dos próprios alunos. Era a partir dos textos que os alunos produziam, que em coletivo, em discussão interativa e com os diferentes contributos (tanto dos alunos como meus) que esses textos iam sendo melhorados. Nesse trabalho contínuo de aperfeiçoamento da linguagem escrita e oral, surgia a introdução de novas terminologias e das estruturas inerentes à nossa Língua bem como o enriquecimento de vocabulário e o aperfeiçoamento ortográfico da escrita. Deste modo, os alunos iam-se apropriando do currículo - aprendendo e aperfeiçoando os seus conhecimentos sobre o Português - conforme o iam experimentando, explorando e praticando nas suas produções escritas; simultaneamente, a discussão entre os alunos sobre a melhor maneira de escrever e de aperfeiçoar esses textos, levava a turma a uma boa prática de reflexão e consequentemente de apropriação das regras da Língua Portuguesa. Em relação ao currículo da Matemática, a abordagem era diferente. A introdução dos novos conteúdos era dirigida por mim. Embora procurasse que essa abordagem fosse feita através da resolução de problemas ou de tarefas propostas que conduzissem ao estudo do conteúdo

[1] As produções aqui citadas referem-se aos trabalhos feitos pelos alunos em momento em que estes gerem o seu trabalho autonomamente.

pretendido, raramente eram situações que emergiam de produções dos alunos. Deste modo, em vez do ponto de partida da aprendizagem ser a necessidade de aperfeiçoar ou de compreender melhor as estruturas do trabalho produzido, esta aprendizagem assentava na orientação que eu estipulava para os alunos. Assim, eles iam percorrendo os passos que a mim me pareciam mais facilitadores dessa aprendizagem. É certo que já era habitual os alunos comunicarem os seus trabalhos (atividades propostas,…) e discutirem na turma, as diferentes estratégias que tinham utilizado. Contudo, parecia-me redutor que após essas sessões, restasse apenas o exercício de treino sobre os conteúdos abordados.

Tentei então, no início de uma turma do 3º ano, transferir a dinâmica e os procedimentos de desenvolvimento do Português para o desenvolvimento da Matemática.

Os textos que os alunos produziam e que serviam de suporte às aprendizagens de Português eram feitos em momentos de estudo autónomo (TEA[2]). De igual modo, sugeri e tentei incentivar que os alunos explorassem e investigassem conteúdos matemáticos durante estes momentos de trabalho, devendo registar como faziam e as conclusões a que chegavam e que apresentavam depois na *Apresentação de Produções* (AP[3]) visto ser um momento de trabalho em que os alunos vão por iniciativa própria apresentar as suas produções. Por esta altura, na AP, apareciam quase só textos que eles tinham produzido em TEA mas gradualmente começaram a surgir trabalhos de Matemática os quais também tinham sido produzido em TEA. No final da apresentação de cada trabalho, os colegas comentavam e questionavam com o objetivo de ajudar a melhorar e a refletir sobre o trabalho apresentado. Aconteceu então, que as produções de Matemática apresentadas começaram a ter muitos comentários e muitas questões, tornando-se difícil gerir o tempo destinado a essas intervenções. Senti que as investigações e explorações matemáticas que os alunos traziam para apresentar aos colegas nos momentos de AP, estava-se a tornar numa boa fonte para que os alunos se apropriassem do currículo, pois as questões e comentários resultantes eram muito pertinentes e a discussão gerada era muito enriquecedora e possibilitava a abordagem a novos conteúdos. Embora não retirando a possibilidade de continuarem a apresentar na AP estas produções, resolvi começar a direcionar algumas delas para os momentos coletivos de trabalho. Foi assim que surgiu uma nova dinâmica de abordagem dos conteúdos matemáticos, ainda no decorrer do 3º ano. Numa primeira fase, estas apresentações aconteciam em algumas sessões de trabalho coletivo e nas outras sessões, era eu que apresentava os temas a trabalhar.

[2] (TEA) Tempo de Estudo Autónomo – Momento de trabalho descrito com mais pormenor no 3º capítulo - *Contextualização das práticas*

[3] (AP) Apresentação de Produções – Outro momento de trabalho cuja descrição é mais pormenorizada no 3º capítulo.

Os alunos investigavam e exploravam conteúdos matemáticos nos momentos de trabalho autónomo segundo as suas motivações. Posteriormente e resultante de inscrição e agendamento de temas, apresentavam aos colegas os seus trabalhos, as conclusões e estratégias que utilizavam, sendo estas alvo de discussão entre os restantes elementos da turma – estávamos no final do 3º ano.

No ano seguinte, no 4º ano e com os mesmos alunos, retomei este caminho e desenvolvi o trabalho relatado neste estudo. No decorrer desse trabalho foram surgindo questões que serviram de motivação para esta investigação. Este estudo teve origem na forma de abordar o currículo de Matemática que iniciei no 3º ano desta turma - com grande enfoque na investigação e na experimentação bem como na partilha e discussão dos conteúdos matemáticos na turma.

1.2. Objetivo e questões do estudo

Um contexto educativo constituído numa comunidade de aprendizagem, só fará sentido se os seus intervenientes se envolverem na partilha do que descobrem, ou do que aprendem. Niza, (2009), refere Leontiev considerando a importância da interação e da negociação de significados na tentativa de compreender o ponto de vista do outro, no processo da aprendizagem. Para que aconteça uma verdadeira apropriação do conhecimento matemático, é necessário que a escola se organize de modo a que os alunos possam fazer Matemática de modo ativo, não se limitando à reprodução dos conhecimentos dos outros, mas sim produzindo os seus próprios conhecimentos. Também a propósito de apropriação, Niza (2009) cita Leontiev (1983):

> "…é preciso destacar, antes de mais nada, que (a aprendizagem) trata-se de um processo ativo. Para nos apropriarmos de um objeto ou de um fenómeno, é preciso efetuarmos a atividade correspondente à que se encontra concretizada no objeto ou no fenómeno considerados. Por exemplo, quando dizemos que uma criança se apropriou de um instrumento, significa que aprendeu a utilizá-lo corretamente, bem como aprendeu as ações e operações motoras e mentais que contribuíram para isso." (p. 4).

Nesta investigação pretendo estudar o modo como os alunos desenvolvem conhecimentos matemáticos e vão progredindo no currículo através de investigações e explorações feitas autonomamente por eles (individualmente ou em pequenos grupos) com posterior comunicação ao grupo turma - partilha e discussão coletiva dos trabalhos executados.

Sendo que a comunicação implica um processo interativo entre os diversos elementos da turma, a pesquisa foi feita num ambiente de aprendizagem assente em perspetivas sócio-construtivistas tal como é preconizado pelas práticas do Movimento da Escola Moderna, que segundo as palavras de Niza (2012) "são os pós-piagetianos que ao redescobrirem Vygotsky introduzem a perspetiva sócio-construtivista nos estudos do desenvolvimento e que tanto têm inspirado as estratégias pedagógicas do MEM, a partir dos anos 80." (p. 357)

Indo ao encontro do objetivo deste estudo, e tendo em conta a especificidade do contexto educativo preconizado pelo Movimento da Escola Moderna, esta investigação pretende responder às seguintes questões:

- Em que medida é que o envolvimento dos alunos em investigações matemáticas contribui para o desenvolvimento do conhecimento matemático?
  - Quais os fatores que contribuem para esse envolvimento?
- De que modo é que a discussão coletiva contribui para o desenvolvimento do conhecimento matemático?
  - Qual é o papel do professor nessa discussão?
  - Que funções assume o discurso dos alunos?
- De que forma conhecimentos anteriores são usados para fundamentar as opiniões apresentadas nas discussões em coletivo e nas atividades investigativas?

1.3. Pertinência do estudo

Aprender matemática vai muito para além de memorizar um conjunto de procedimentos encadeados para resolver problemas tipificados ou exercícios estereotipados; ensinar matemática é educar para que o indivíduo tenha uma atitude crítica perante as situações problemáticas e que consiga livremente estabelecer estratégias de resolução dessas situações; fazer matemática é conseguir reagir, acreditar ser capaz, procurar soluções para resolução dos problemas da maneira como a si lhe faz sentido; compreender matemática é conseguir explicar aos outros o seu raciocínio, as suas estratégias e defender as suas ideias bem como exigir dos outros as explicações necessárias para entender os seus raciocínios e estratégias de resolução.

A comunicação é considerada pela comunidade de educação matemática um dos elementos chaves no processo de ensino aprendizagem e tem vindo a ser contemplada como uma capacidade fundamental em documentos oficias, tanto nacionais (Programa de Matemática do Ensino Básico, DGIDC, 2007) como internacionais (Normas Profissionais para o Ensino da Matemática, NCTM, 1994). São vários os estudos (por exemplo, Alro e Skovsmose, 2006, Boavida, 2005, Cobb, Boufi, McClain, e Whitenack, 1997, Guerreiro 2007, Lampert e Cobb, 2003, Menezes, 2010, Rodrigues, 2010 Yackel, 1995, Yackel e Cobb, 1996,) que realçam o papel da comunicação nas aulas de Matemática referindo a sua importância no processo de aprendizagem em especial nas interações entre os alunos. É indicada pelas Normas Profissionais para o Ensino da Matemática (NCTM, 1994), bem como o Programa de Matemática do Ensino Básico (2007) a necessidade de mudança das práticas comunicativas no contexto de sala de aula. Guerreiro (2007), Ponte e Serrazina (2000), realçam a importância da mudança do paradigma da transmissão (caraterizado por factos e técnicas transmitidas pelo professor através de explicações), para o paradigma da interação (onde o foco da aprendizagem se centra na partilha comunicativa entre alunos e professores na qual ocorre a construção interativa de significados Matemáticos). Contudo, embora o valor da argumentação matemática seja já muito reconhecido como um fator de desenvolvimento das competências dos alunos, ainda é frequente verificarmos que a comunicação Matemática é entendida como uma simples explicitação de procedimentos (Ponte, Matos e Abrantes, 1998; Puntnam, Lampert, e Peterson, 1990 – referidos em Boavida, 2005) e são poucos os professores que utilizam atividades que promovam essa argumentação. Como é referido nas Normas Profissionais para o Ensino da Matemática (1994), cabe ao professor fomentar e desenvolver a capacidade dos alunos aprenderem com e a partir dos outros. Niza (2012) refere a necessidade da criação de estruturas de organização para a construção de comunidades, as quais deverão ser promotora de um ambiente de aprendizagem cooperativo, proporcionando aos alunos agirem em conformidade com a sua comunidade.

De igual modo, tem sido indicado tanto pelos programas curriculares como por diversas investigações, a necessidade de alterar o tipo de trabalho a que os alunos habitualmente estão sujeitos na sala de aula. Por exemplo, nas Normas Profissionais do NCTM (1994) é afirmado que “Os algoritmos matemáticos, a manipulação de expressões e a prática com papel e lápis não devem continuar a dominar a matemática escolar.” (p. 21). Christiansen (1986) refere a importância da Matemática escolar apoiar-se mais na atividade pessoal dos alunos do que é habitual, considerando que deve ser dado maior relevo às atividades em que os alunos estão envolvidos na construção, na exploração e na resolução de problemas. As Normas Profissionais para o Ensino da Matemática (1994) indicam que os alunos devem executar tarefas que impliquem explorar, manipular e experimentar pois "o currículo deve incluir genuína exploração da geometria, medida estatística, probabilidades, álgebra e funções." (NCTM, 1994, p. 21) visando alcançar uma construção mais sólida e mais significativa dos conceitos e das competências Matemáticas. Para ir ao encontro deste objetivo, é necessário aplicar uma boa parte do tempo letivo dos alunos em tarefas que conduzam à exploração, manipulação e experimentação. Porém, grande parte dos professores ainda aponta dificuldades em gerir o tempo letivo, mencionando que o tempo é insuficiente para a abordagem dos conteúdos programáticos, não investindo por isso nas atividades mais experimentais e considerando-as de menor importância.

Esta investigação, ao estudar uma prática educativa cuja abordagem aos conteúdos curriculares assenta no trabalho dos alunos em investigações, tarefas exploratórias e na comunicação matemáticas, poderá ser um recurso para outros professores que pretendam alterar as suas dinâmicas de trabalho.

1.4. Organização da dissertação

Este trabalho está organizado em sete capítulos:

No primeiro capítulo faço uma contextualização do estudo onde refiro a motivação que me levou a esta investigação, apresento a formulação do objetivo e das questões assim como a pertinência deste estudo.

O segundo capítulo consiste na revisão da literatura sobre as principais ideias teóricas que serviram de base a esta investigação nomeadamente a perspetiva sociocultural, comunidades de aprendizagem, comunicação matemática e as investigações como atividade na aprendizagem da matemática.

No capítulo da Contextualização das Práticas começo por descrever alguns aspetos essenciais do modelo pedagógico do Movimento da Escola Moderna, o qual serve de base à minha prática pedagógica. Seguidamente relato a dinâmica e a organização do trabalho realizado com a turma que participou nesta investigação, sobretudo no que respeita ao trabalho em Matemática. Termino o capítulo referindo o papel do professor neste contexto pedagógico.

No capítulo da Metodologia da Investigação indico e justifico as opções metodológicas que serviram de estrutura a este estudo. Refiro as razões que levaram à escolha dos participantes fazendo uma caraterização da turma. Descrevo o modo como os dados foram recolhidos justificando essa escolha à luz do paradigma interpretativo numa abordagem qualitativa. No final saliento as principais orientações que tomei para analisar os dados recolhidos.

Seguidamente, no capítulo da Análise dos Dados, descrevo e analiso as situações observadas nos momentos de trabalho com os alunos que considerei mais relevantes para esta investigação. Nesta descrição constam também algumas reflexões feitas durante a recolha de dados, enquanto observadora participante. Este capítulo está dividido em três partes respeitantes a três momentos de trabalho distintos.

No capítulo da Discussão dos Resultados e Reflexão saliento os aspetos que mais se realçaram na análise de dados, enquadrando-os nas questões de investigação e apoiando-me nas teorias que referi no capítulo da Revisão da Literatura. Ainda no final deste capítulo apresento uma reflexão pessoal sobre o trabalho que desenvolvi com os alunos, os aspetos que considero poder vir a aperfeiçoar e a importância da dinâmica de uma comunidade de aprendizagem onde se aprende matemática com base em atividades de investigação e onde a comunicação tem um papel fundamental.

Capítulo II

Revisão da Literatura

Neste capítulo começo por apresentar algumas ideias essenciais da perspetiva sociocultural, seguidamente indico as ideias principais da atividade matemática que pretendo realçar, posteriormente sublinho as teorias da comunicação mais pertinentes e termino com a apresentação de alguns constructos sobre as comunidades de aprendizagem.

2.1 Uma perspetiva sociocultural num ambiente de sala de aula.

Segundo Vygotsky é na interação social e por intermédio do uso de signos que se dá o desenvolvimento das funções psíquicas superiores (Moysés, 1997). A internalização de uma nova função psicológica acontece, quando a nova função interage com as já existentes no plano interior do indivíduo. Deste modo, há uma passagem do plano externo do indivíduo para o plano interno através de alterações da sua estrutura e funções tal como se pode observar na "lei genética geral do desenvolvimento cultural", formulada por Vygotsky em 1981 que considera:

> "Qualquer função presente no desenvolvimento cultural da criança aparece duas vezes, ou em dois planos distintos. Primeiro, aparece no plano social, e depois, então, no plano psicológico. Em princípio, aparece entre as pessoas e como uma categoria iterpsicológica, para depois aparecer na criança, como uma categoria intrapsicológica. Isso é válido para atenção voluntária, a memória lógica, a formação de conceitos e o desenvolvimento da vontade. […] a internalização transforma o próprio processo e muda sua estrutura e funções. As relações sociais ou relações entre as pessoas estão na origem de todas as funções psíquicas superiores." citado por (Moysés, 1997, p. 28).

Esta passagem do plano externo para o plano interno depende de um sistema de representações. São estas representações que vão mediar as funções do plano externo para o plano interno ou seja, trazem as funções do exterior para que sejam processadas no interior do indivíduo, ocorrendo assim numa interação social – um contínuo vaivém entre o **outro** e o **eu**.

De acordo com Reynolds e Wheatley (1992), a aprendizagem da Matemática implica construir relações matemáticas, negociar os significados matemáticos com os outros, e refletir sobre a sua própria atividade matemática. Estamos perante duas situações que se complementam: uma em que o indivíduo desenvolve uma ação sobre ele próprio, entre o que interage com os objetos matemáticos e as funções que já internalizou – conhecimento ativamente construído pelo aluno; e a outra em que interage com os outros, confrontando as suas funções internalizadas com as novas que surgem do exterior.

Sfard (1996), afirma que a tentativa de uma unificação conceptual é um esforço desejável e apresenta a sua visão identificando duas metáforas – a *metáfora da aquisição* e a *metáfora da participação*. Segundo esta autora, os trabalhos de Piaget e Vygotsky analisam a aprendizagem como desenvolvimento de conceitos os quais são vistos como unidades básicas do conhecimento e podem ser acumulados gradualmente, redefinidos e combinados, para formar estruturas cognitivas cada vez mais ricas. Esta visão da aprendizagem não difere muito de quando falamos do aprendiz como a pessoa que constrói significados. Sfard (1996) refere que a metáfora da aquisição vê a aprendizagem como a aquisição de *bens conceptuais* enquanto que a metáfora da participação, considera o aluno como uma pessoa interessada na participação num certo tipo de atividades, em vez de pessoa interessada na acumulação de posses privadas. Considera ainda que deste modo, a aprendizagem é gerada através do processo de tornar-se membro de uma comunidade, sendo no caso da Matemática uma comunidade matematizada. Na metáfora da participação Sfard (1996) enfatiza o papel comunicativo de cada um, no seu grupo de aprendizagem - a partilha, a reflexão e a discussão com os outros, em suma o desejo de pertença à sua comunidade de aprendizagem. Nesta nova visão a aprendizagem da Matemática ocorre num ambiente social complexo onde se dá a conexão entre ensino e aprendizagem.

2.2 A atividade Matemática / "fazer Matemática".

A atividade Matemática no sentido da *learning activity* como se pode ler em (Zuckerman, 2003), compreende práticas educativas em que o aluno é um agente ativo da sua ação cognitiva e não apenas um executante das orientações do professor. Desta forma, são os alunos que definem os objetivos, procuram os meios e os métodos para os alcançar e envolvem-se no processo de controlo e de avaliação dos resultados que obtêm. Portanto, de acordo com este autor, esta atividade Matemática não é alusiva a algum tipo de atividade proposta pelo professor e incorporada numa lição, como frequentemente é entendida nas práticas letivas mais correntes.

No processo de aprendizagem tanto em Matemática como noutra disciplina “o envolvimento ativo do aluno é uma condição fundamental da aprendizagem” (Ponte, Brocardo, & Oliveira, 2003, p. 23). É na mobilização dos seus recursos cognitivos e afetivos quando procura alcançar um objetivo, que ocorre a aprendizagem. Também quando é chamado a participar na formulação das questões a estudar, há um maior envolvimento do aluno nesse processo. Uma prática letiva baseada na ação ativa do aluno abre novas possibilidades de desenvolvimento a diferentes níveis. Zuckerman (2003) indica-nos que a prática da *learning activity* potencia o desenvolvimento de capacidades reflexivas. Segundo esta autora, quando os alunos constroem as aprendizagens através de verdadeira atividade matemática, vão desenvolvendo a capacidade de questionarem o que não compreendem e de pedirem as informações necessárias; a capacidade de criticarem as opiniões e procedimentos dos colegas não aceitando evidencias não fundamentadas; e a aptidão para procurar provas e ver de diferentes pontos de vista.. Os alunos vão assim desenvolvendo capacidade crítica e avaliativa sobre os temas em estudo, em constante reflexão. Desta forma desenvolvem capacidades de regular a sua própria aprendizagem e consequentemente seguem o percurso de aprendizagem que melhor se adapte a si. De acordo com Zuckerman (2003) esta prática educativa vai contrariar a atitude passiva a que habitualmente os alunos são sujeitos, fornecendo-lhes ferramentas que lhes proporciona uma atitude crítica e consequentemente ativa. Defende ainda esta autora que é com os alunos mais novos, ainda na “*elementary school*” que se deve iniciar esta prática reflexiva para que no futuro, em níveis de ensino mais avançados, sejam capazes de ser autónomos na sua aprendizagem.

Segundo Ernest (1996), o construtivismo social vê a aprendizagem da Matemática associada à criação da mesma. Para os defensores desta corrente, aqueles que aprendem Matemática são identificados como criadores de Matemática. Porém, só depois de legitimado esse conhecimento em sociedade, após essa produção ser reconhecida como válida, é que este se torna num conhecimento genuinamente novo. É necessário haver concordância da comunidade matemática para que esse novo conhecimento seja validado (Ernest, 1996 e Zuckerman, 2003). A atividade dos matemáticos profissionais é comparável à atividade dos que aprendem Matemática de modo produtivo (Ernest, 1996 e Ponte, Brocardo, e Oliveira, 2003) sendo até consideradas qualitativamente semelhantes. A atividade Matemática produtiva é considerada por Ernest (1996), como sendo a que envolve a formulação e a resolução de problemas. Também distingue a matemática criativa, da matemática que é essencialmente reprodutiva. Enquanto na perspetiva *produtiva* a ação é essencialmente a procura de um caminho e o estabelecimento de estratégias que possam conduzir a uma descoberta, na perspetiva *reprodutiva* a ação é a aplicação de um procedimento anteriormente aprendido ou memorizado. Ernest (1996) aprofunda ainda algumas ideias sobre o que é entendido como problema e algumas diferenças entre problemas e investigações. Embora não exista consenso na definição destes dois termos (problemas e investigações), parece haver concordância em que ambos se relacionam com a inquirição matemática. Este autor refere que muitas vezes os professores interpretam a palavra investigação como "propostas de investigações" em tudo análogas a problemas nas quais ocorre a substituição de toda a atividade investigativa por apenas uma das suas componentes. Estas propostas contrastam com "uma perspetiva de investigação centrada naquele que aprende e em que a atividade é conduzida por este." (Ernest, 1996, p. 29). Embora pareça que os significados de problema e de investigação estejam muitas vezes pouco claros, sendo estes termos usados de forma pouco diferenciada. Segundo este autor podemos distinguir os seus significados através do quadro seguinte (tabela 1), onde o autor apresenta a sua perspetiva sobre a diferença do papel do professor e do aluno nos seguintes métodos de abordagem pedagógica: Descoberta Guiada; Resolução de Problemas; Abordagem Investigativa.

Tabela 1- Uma comparação de métodos baseados na inquirição para o ensino da Matemática

Método	Papel do Professor	Papel do Aluno
Descoberta Guiada	Formula o problema ou escolhe situação com o objetivo em mente. Conduz o aluno para a solução ou objetivo.	Segue a orientação
Resolução de Problemas	Formula o problema. Deixa o método de solução em aberto.	Encontra o seu próprio caminho para resolver o problema.
Abordagem Investigativa	Escolhe uma situação de partida (ou aprova a escolha do aluno)	Define os seus próprios problemas dentro da situação.

(Ernest, 1996, p. 32)

Também Ponte e Matos (1996) referem que os problemas matemáticos são caracterizados por se basearem em dados e objetivos bem concretos enquanto as investigações têm um ponto de partida muito menos definido. Segundo estes autores, tanto nos problemas como nas investigações, a primeira tarefa do aluno é tornar a questão mais precisa. Contudo, no processo de investigação matemática, os alunos envolvem-se em atividades como a definição do objetivo – o que pretendem saber; a escolha e conceção de experiências – que irão permitir averiguar o que acontece; a formulação de conjeturas – que serão posteriormente testadas através de novas experiências. Assim, nas investigações os alunos são colocados num papel idêntico ao dos matemáticos. Perante uma determinada situação, tentarão compreendê-la, descobrir padrões, relações semelhanças e diferenças para conseguirem chegar a generalizações. Os alunos podem envolver-se em investigações matemáticas através de tarefas bastante elaboradas e complexas as quais necessitam de algum tempo para resolver ou através de questões mais simples que podem ser levantadas a partir de uma pequena variação de um facto ou procedimento já conhecido.

Walle (2004), refere-se ao trabalho em matemática como sendo a procura de regularidades "mathematics is a science of things that have a pattern of regularity and logical order." (Walle, 2004, p. 13). Para este autor fazer matemática é procurar e explorar essas regularidades e a sua ordem, e seguidamente descobrir o seu sentido. Para Walle (2004), as crianças podem e devem envolver-se nesta ciência dos padrões e da ordem. É necessário que as crianças se envolvam nas ideias matemáticas e que pensem ativamente nelas. Para que não sejam meros observadores passivos, elas precisam de trabalhar em atividades que ajudem a fazer sentido e a descobrir as regularidades da Matemática. Para tal é preciso que sejam incentivadas e tenham oportunidade de: explorar, investigar, conjeturar, resolver, justificar, representar, formular, descobrir, construir, verificar, explicar, prever, desenvolver, descrever e utilizar. Estas ações contrastam com a atitude passiva a que os alunos costumam estar sujeitos: ouvir, copiar, memorizar e treinar. Walle (2004) reforça que fazer matemática exige esforço e iniciativa, corre-se riscos de errar ou de não chegar a uma solução. É fundamental que o ambiente na sala de aula seja seguro e confortável de modo a que todos os alunos se sintam à vontade em correr esses riscos, em não ter medo de errar, se sintam respeitados nas suas ideias e sintam o seu trabalho respeitado. Os alunos podem trabalhar em grupo, a pares ou individualmente mas precisam sempre de partilhar e discutir as suas ideias. "Reasoning is celebrated as students defend their methods and justify their solutions" (Walle, 2004, p. 14)

Num *continuum* da atividade matemática e em constante interação ou mesmo fazendo parte integrante desta, é importante focar um outro aspeto da aprendizagem – a comunicação matemática.

2.3 A comunicação Matemática em sala de aula

As Normas profissionais para o Ensino da Matemática do NCTM indicam que ensinar é uma atividade integrada na qual *atividades, discurso, ambiente e análise* são áreas interligadas e interdependentes. “As atividades tomam forma pelo discurso que as envolve e pelo ambiente no qual decorre o trabalho.” (NCTM, p. 23)

Parece então, que se pode considerar a comunicação como elo de ligação entre as diferentes conceções que os alunos vão formando nas atividades que exercem, numa comunidade que se quer matematizada. Os alunos em cooperação vão aumentando o seu entendimento sobre as tarefas que estão a desenvolver. Para explicitar aos seus parceiros, as ideias que se vão formando através da atividade matemática, os alunos são forçados a refletir e a procurar uma razão sobre o entendimento que fizeram da atividade que exerceram. Assim, o discurso que proferem é uma forma de organizar o seu próprio pensamento e de testar a coerência das conceções que criaram através da sua atividade.

De acordo com Alro e Skovsmose (2006), “a cooperação das partes é um parâmetro central da comunicação dialógica. Ao cooperarem, os alunos lançam luzes sobre o mundo que os cerca e sobre os problemas que os unem e os desafiam” (p. 14). Este autor considera que num diálogo a reflexão e a ação se enriquecem mutuamente e cita Freire (1972) que considera que agir sem refletir é puro ativismo e que refletir sem ação pode ser um mero verbalismo.

Deste modo a comunicação assume uma dupla funcionalidade: por um lado estabelece a ligação entre o indivíduo e os restantes membros da mesma comunidade de aprendizagem; por outro lado, ajuda o indivíduo a refletir sobre a sua ação. No entanto, há que ter em consideração a qualidade da comunicação, isto é o modo como ela se processa e o seu papel na aprendizagem.

A comunicação tem sido alvo de várias investigações. Alguns trabalhos focam-se na importância desta na aprendizagem, outros abordam o modo como ela é estabelecida entre os alunos há ainda trabalhos que destacam o papel do professor, como mediador, nesta comunicação.

Pimm (1987) destaca que saber falar para comunicar com os outros e falar para si próprio, são as principais razões para os alunos falarem no contexto educacional na aula de Matemática. Sublinha ainda como aspeto importante, a possibilidade desta comunicação dar ao professor acesso e conhecimento sobre as maneiras de pensar dos alunos. Tal como Pimm (1987), Yackel (1995) Sherin, Mendez e Louis (2000) destacam ainda que, se os alunos falarem sobre Matemática, o professor terá oportunidade de perceber o nível de conhecimento dos seu alunos, os seus progressos ou as dúvidas e desconhecimentos que vão surgindo, podendo deste modo adequar as suas práticas indo ao encontro das necessidades da turma.

No que respeita ao falar para os outros, Pimm (1987) refere esta como uma das muitas funções comunicativas que a linguagem falada permite. É uma função que consiste em tentar que o “outro” compreenda o que se quer transmitir ou que o “outro” informe sobre o que se quer saber. Outra função que este autor dá grande ênfase, é a do individuo falar para si próprio a qual envolve situações em que o aluno até pode falar alto mas os efeitos principais que se alcançam não são os de comunicar com os outros mas antes, é um modo de utilizar a linguagem como suporte de organização do seu próprio pensamento. Considera que para além da função de comunicação direta com os outros, a linguagem permite e apoia a reflexão sobre o próprio pensamento. Para Pimm (1987), numa determinada situação, ao serem articulados os diferentes aspetos inerentes, o aluno vai encontrar na linguagem falada uma forma de clarificar o seu pensamento e significados alcançando um maior entendimento e uma maior compreensão sobre essa situação. O autor entende a fala como sendo uma forma de trazer o pensamento para o exterior do indivíduo, tornando este pensamento mais próximo de si próprio e dos outros que o rodeiam. “By talking, thoughts are externalized to a considerable extent, which makes them more readily accessible to the speaker’s own and other people’s observations.” (Pimm, 1987, p. 24). Por outro lado refere que a presença do “outro” pode encorajar o falante, a refletir sobre o que foi dito ou, em certos casos, servir de desculpa para falar alto. Para além de clarificar as situações, a verbalização em voz alta pode também ajudar a fixar imagens mentalmente ajudando a mantê-las, abrindo assim a possibilidade do aluno operar sobre elas. Pimm (1987) menciona existir grandes diferenças entre o conhecimento silencioso (subentendido) e aquele que é exteriorizado. O exteriorizar do pensamento requer o uso de palavras, enquanto no pensamento em silêncio é possível que as palavras sejam ignoradas. Muitas vezes, é quando surge a dificuldade em expressar oralmente o que pretende dizer, que o aluno percebe que o seu pensamento ainda não articulou todos os aspetos de uma determinada situação. “Articulation can aid the process of reflection by affording better access to thought itself.” (Pimm, 1987, p. 25)

2.3.1 As interações entre alunos

A importância da comunicação entre pares na aprendizagem da Matemática, é evidenciada por Lampert e Cobb (2003),

> “If school lessons are to involve learners doing mathematical work, classroom will not be silent places where each learner is privately engaged with ideas. If students are to engage in mathematical argumentation and produce mathematical evidence, they will need to talk or write in ways that expose their

> reasoning to one another and to their teacher. These activities are about communication and the use of language.” (p. 237).

Para estes autores, a comunicação pode ser entendida como uma forma de participação nas atividades de uma comunidade matemática. Por conseguinte, aprender a comunicar é um dos objetivos do ensino e não se pode separar o uso da comunicação como um meio em que cada estudante desenvolve compreensão matemática. É importante considerar, tal como Simon e Blume (1996), referidos por Lampert e Cobb (2003), nos indicam que em qualquer área específica da matemática, o tipo de comunicação em que cada estudante se pode envolver, depende do entendimento matemático que possui nesse momento. Por outro lado, os alunos desenvolvem uma compreensão matemática mais sofisticada quando tentam comunicar os seus raciocínios. Parece pois que a qualidade da comunicação vai sendo melhorada à medida que os alunos a vão utilizando e simultaneamente, a compreensão matemática vai aumentando com a utilização da mesma comunicação. Lampert e Cobb referem que alguns investigadores têm-se debruçado na comunicação dando-lhe importância como um processo de aquisição (metáfora da aquisição) enquanto outros sublinham a sua importância como um processo de participação (metáfora da participação). Todavia, parece não ser fácil distinguir entre “learning to communicate and communicating to learn.” (Lampert e Cobb, 2003, p. 238)

Para Sherin, Mendez e Louis (2000), parece ser consensual que quantos mais estudantes falarem sobre assuntos matemáticos mais estudantes aprendem sobre Matemática. Embora o discurso só por si não seja suficiente para a aprendizagem matemática, os alunos podem desenvolver profundo entendimento e compreensão, através da explicação das suas ideias, avaliando as estratégias e colocando questões aos seus colegas.

Uma das linhas de pesquisa, em torno da metáfora da aquisição, foca-se nas interações entre pares que ocorrem durante o trabalho feito em pequenos grupos. Webb (1991), citado em (Lampert & Cobb, 2003), terá descoberto que no trabalho entre pares poderão ocorrer duas situações: um menor desempenho se um dos elementos der uma resposta correta, sem mais nenhuma informação, e esta não lhe for exigida pelo outro; ou um maior desempenho se existir uma atitude na qual são dadas explicações elaboradas ao outro colega. Nas suas pesquisas, Webb (1991), Swing e Peterson (1982) ambos citados em (Lampert & Cobb, 2003) evidenciam que dar explicações elaboradas, melhora a concretização de quem explica, de modo diretamente causal sendo então necessário educar os alunos a darem uns aos outros explicações elaboradas. Cobb e Lambert (2003) mencionam que vários estudos sobre esta questão levantam a hipótese de que esta caraterística particular nas salas de aula, tem um impacto direto no desempenho dos alunos, mesmo quando estes não estão a ser mediados pelo professor.

O desenvolvimento de comunidades discursivas tornou-se num dos objetivos centrais da reforma educativa. Torna-se então crucial que o professor na sala de aula crie um ambiente comunicativo tal como é referido nas Normas Profissionais Para o Ensino da Matemática "O professor de Matemática é responsável pela criação de um ambiente intelectual que tenha como regra um compromisso sério com o pensamento matemático" (NCTM, 1994, p. 58)

Levanta-se a questão do papel do professor e que atitudes e dinâmicas deverá promover.

2.3.2 O papel do professor

O professor é o principal responsável pela regulação e coordenação do ambiente de uma sala de aula. É ele que inicialmente estabelece a forma como as suas aulas irão decorrer. Por outro lado também é a ele que os alunos podem tomar como modelo de participação. Partirá dele e sobre a sua orientação, a criação de um verdadeiro ambiente comunicativo.

Para que exista um verdadeiro ambiente comunicativo na sala de aula, é necessário que os alunos estejam dispostos a envolverem-se em investigações e discussões matemáticas. Para tal é necessário criar uma atmosfera de confiança e de respeito mútuo que sustentará o discurso em comunidade e levará os vários alunos a participar construtivamente nesse diálogo (Silver e Smith, 1996; Sherin, Mendez, e Louis, 2000). É indispensável existir uma atmosfera em que os alunos se sintam seguros para pensarem por si, consigam expor as suas ideias e hipóteses e assim partilhem as suas interpretações matemáticas gerando oportunidades de aprendizagem. Sentirem-se seguros é sentirem-se apoiados e encorajados nos seus esforços, tanto pelos colegas como pelo professor. Silver e Smith (1996), referem também a importância do professor formar os alunos no sentido de que criticar as ideias de alguém é aceite mas não é aceite criticar a pessoa, o que é muito importante para desenvolver a autoestima dos alunos. De acordo com estes autores, se um aluno sente que durante a sua intervenção não é respeitado pelos colegas, terá mais dificuldade em voltar a participar no diálogo. Porém, se o aluno se sente respeitado, mesmo quando as suas ideias são opostas às do grupo, ser-lhe-á mais fácil voltar a participar nessa discussão. O professor deve conduzir o discurso para a clarificação e justificação das ideias de cada um, aceitando sempre as diferentes opiniões, até que estas sejam refutadas por novas ideias devidamente justificadas.

Por outro lado, é também indispensável que o discurso se torne matematicamente produtivo (Sherin, Mendez, e Louis, 2000). Assim, o professor deverá orientar os seus alunos de modo a criar normas para uma cultura comunicativa que envolva atitudes e ideias matemáticas. Silver e Smith (1996) consideram que numa comunidade comunicativa, ou comunidade de questionamento orientado (*inquiry-oriented Communities)*, os alunos precisam de ser encorajados a questionarem-se uns aos outros sobre as suas ideias e afirmações. O professor deve também participar neste questionamento, de modo a orientar o discurso e fazer emergir as ideias matemáticas, oferecendo-lhes assim o modelo de questionamento e proporcionando aos alunos expectativas explícitas de participação. Para Sherin, Mendez e Louis (2000) estas são denominadas de comunidades discursivas e defendem que o discurso matemático potencia as aprendizagens matemáticas. Enquanto comunicam, os alunos deverão ser habituados a explicar as suas estratégias, expondo a razão de uma ideia particular ou demonstrando como chegou a determinado resultado. Não será suficiente dar uma resposta, será preciso mostrar uma razão para que a sua resposta seja válida. Para Silver e Smith (1996) os professores deverão conduzir os alunos a abandonarem as explicações sobre os procedimentos e levá-los a provar as suas ideias através de justificações que sejam matematicamente mais significativas.

Yackel e Cobb (1996) referem as normas sociomatemáticas como normas que se diferenciam das restantes normas sociais de outas disciplinas. Estas normas vão sendo estabelecidas na interação entre alunos, em conjunto com o professor e vão sendo aperfeiçoadas à medida que vão sendo utilizadas. "O que se torna matematicamente normativo numa sala de aula é determinado pelos objetivos, crenças, suposições e pressupostos presentemente assumidos pelos participantes na aula." (Yackel e Coob, 1996, p. 4). Há assim uma estreita relação entre a aprendizagem da Matemática, as normas sociomatemáticas estabelecidas e o próprio entendimento sobre o que é atividade matemática. Podemos então depreender, que as normas estabelecidas podem diferir em cada turma, consoante a negociação e partilha efetuada pelos elementos da turma respeitante. Contudo, e para diferenciar das restantes regras sociais, Cobb e Yackel referem como exemplo, que as negociações em relação às normas sociomatemáticas podem basear-se na compreensão do que é *matematicamente diferente*, *matematicamente sofisticado*, *matematicamente eficaz* e *matematicamente elegante* bem como no que é considerado na turma como uma *explicação e justificação matematicamente aceitável*. Para além de regular a comunicação matemática na aula, as normas sociomatemáticas suportam também uma atividade cognitiva de alto nível. A negociação destas normas aumenta as oportunidades de aprendizagem tanto dos alunos como do professor. Lampert (1990) e Voigt (1985), citados em Yackel e Coob (1996) referem que ao mesmo tempo que o professor promove e facilita as discussões matemáticas, é também um participante ativo no discurso reflexivo, podendo legitimar ou sancionar aspetos da atividade matemática dos alunos.

> "Em qualquer sala de aula, as crianças estão bem conscientes da assimetria entre o papel do professor e o seu. O professor representa necessariamente a disciplina de Matemática na sala de aula (Voigt, 1995). Por conseguinte, as reações do professor à solução de uma criança podem ser interpretadas como um indicador implícito do que é valorizado matematicamente." (Yackel e Coob, 1996, p. 9)

Na tentativa de aproximação às normas que se vão estabelecendo, as crianças vão estando em atividade reflexiva. Por exemplo, não basta dar sentido às explicações dos outros mas é necessário tentar identificar semelhanças e diferenças entre as várias soluções. Tal atividade potencia significativamente a aprendizagem matemática (Yackel & Coob, 1996).

Podem no entanto ocorrer alguns constrangimentos nesta comunicação. Num dos seus estudos Yackel (1995), refere que podem suceder quebras na comunicação entre os alunos. Por vezes as interpretações dos alunos sobre os significados matemáticos que estão a ser partilhados são diferentes, e estes não se apercebem dessas diferenças; Acontece também existirem discordâncias entre eles sobre as tarefas e sobre a atividade matemática em geral; Em algumas ocasiões os alunos têm dificuldade em articular os seus pensamentos de modo a que os outros compreendam. Nestas situações, a partilha de significados entre toda a comunidade só sucede se houver mediação do professor. Yackel (1995) considera que uma explicação é constituída pelos participantes em interação. É fundamental que quem está a ouvir tente interpretar a mensagem proferida por quem está a falar. "explaining is not an individual but a collective activity. (…) the intentions of the listener as well as of the speaker" (p. 151). Nestas interações, o professor participa como mediador do discurso, ajudando na sua articulação e fazendo emergir as "pontes" necessárias que vão unir as ideias do grupo. Outras vezes, conduz as diferentes intervenções a um confronto de ideias levando a uma melhor explicitação do pensamento de cada interveniente.

Através do questionamento e no desenvolvimento do discurso a que todos têm acesso, vão sendo construídas em conjunto as ideias matemáticas, sustentando-se umas às outras. Para Cobb e Bauersfeld (1995), professor e alunos vão partilhando a construção da realidade matemática numa negociação contínua de significados matemáticos onde o professor vai ajudando a fazer evoluir este discurso colocando questões orientadoras, reforçando os comentários que vão conduzindo a níveis mais elevados de raciocínio e ajudando a estruturar o discurso. No entanto é importante clarificar que a condução do desenvolvimento deste discurso requer sensatez e bom senso por parte do professor (Cobb, Boufi, McClain, e Whitenack, 1997). Ao promover um discurso reflexivo, o professor tem que ter em conta a potencialidade de abstração e de desenvolvimento dos alunos, caso contrário, há o perigo dos alunos tentarem adivinhar o que o professor pretende que se responda, deixando assim de refletirem sobre a ideia em questão. É necessário que o professor desenvolva um papel ativo na condução do desenvolvimento do discurso reflexivo mas, em simultâneo, vá destacando a necessidade da contribuição ativa dos alunos para o desenvolvimento desse discurso. (Cobb, Boufi, McClain, e Whitenack, 1997).

Este discurso reflexivo é um constructo social que tem o seu desenvolvimento numa comunidade de sala de aula. (Cobb, Boufi, McClain, e Whitenack, 1997). Será então importante entender melhor as comunidades de aprendizagem.

2.4 Comunidades de aprendizagem.

As suposições de Wenger (2008) sobre questões de aprendizagem e a natureza do conhecimento começam por referir que a aprendizagem ocorre em contextos de participação social. Toma então como princípio, que a nossa condição de ser social, torna-a um aspeto central da aprendizagem.

> "We are essentially social beings. We live in societies, of course; but more fundamentally perhaps, it is our participation in social communities and cultural practices that provides the very materials out of which we construct who we are, give meaning to what we do, and understand what we know." (http://www.ewenger.com/theory/)

Nesta perspetiva, e partindo do princípio de que o aspeto central da aprendizagem tem origem na nossa entidade de seres sociais, Wenger (2008) considera essenciais e interligados os princípios seguintes: o princípio do conhecimento como uma questão de competência em entender as produções validadas (reconhecidas); o princípio do saber que surge como uma forma de participação do indivíduo na realização de tais produções, isto é, no envolvimento ativo do mundo; e o princípio do significado que corresponde à habilidade de experimentar o mundo bem como o envolvimento significativo com ele.

Segundo Niza (2012), a realização de produtos culturais e a sua mostra e utilização, "emprestam dimensão ética à aprendizagem escolar." (p. 406). É na produção de tais obras e na sua coletivização que segundo este autor se vai criando uma comunidade gerando formas participadas e negociadas de pensar em equipa.

Para além do conhecimento e do saber, Wenger (2008) refere-se ainda ao princípio do significado como a nossa capacidade de experimentar o mundo e de nos envolvermos nos seus significados.

A aprendizagem como participação social, pressupõe processos em que os indivíduos são participantes ativos numa comunidade. Esta participação tem uma ampla implicação na compreensão e no suporte da aprendizagem quer individual quer coletiva. Para cada indivíduo, aprender será uma questão de envolvimento e contribuição para as práticas da comunidade; para a comunidade será uma questão de aperfeiçoamento das suas práticas e de garantir nova geração de membros. Wenger (2008) afirma que neste sentido, aprender não está separado da atividade, não é algo que acontece enquanto o indivíduo não faz nada ou que termina quando faz outra coisa. Lave (1999) defende que as teorias sobre a aprendizagem na prática *"learning-in-practice"* sugerem que aprender e compreender formam-se num contexto social e cultural. De acordo com o autor, o que se aprende está diretamente relacionado com o processo de apropriação dessa aprendizagem. Estas formas de aprendizagem são baseadas no pressuposto que o conhecimento, pensamento e compreensão são gerados na ação, em situações cujas caraterísticas específicas fazem parte da prática em que se desenvolvem.

A propósito do trabalho dos alunos, Niza (2012) refere que o trabalho criador na escola deve afirmar-se através do controlo do processo e o domínio que os alunos detenham sobre as suas próprias obras. O autor defende também que é necessário que na escola não se separe o conhecimento das práticas sociais de apropriação da cultura e reconhece que o conhecimento não se deve separar da prática social que é o culminar desse mesmo conhecimento. É neste entendimento que Niza (2012) refere o trabalho dos professores do Movimento da Escola Moderna, assente nas "atividades escolares como trabalho de conhecimento e de produção cultural onde, em cooperação, se constroem as aprendizagens curriculares e de cidadania" (p. 522). É então necessário criar estruturas de organização que estimulem um ambiente de aprendizagem cooperativo (Niza, 2012) para que os que aprendem se comportem " em consequência dessa estrutura de organização e o resultado será uma verdadeira comunidade de aprendizagem" (p. 601). Este autor refere Johnson & Holubec (1999) que mencionam três importantes dimensões das aprendizagens cooperativas: em primeiro lugar ajuda a elevar o rendimento de todos os que aprendem; por outro lado ajuda a estabelecer relações positivas entre os que aprendem, viabilizando a construção de uma comunidade de aprendizagem onde se valorize a diversidade; por fim, proporcionam as experiências necessárias para que se possa atingir um saudável desenvolvimento social, psicológico e cognitivo.

O “ato de constante partilha do saber acrescenta o próprio saber e desenvolve-o em cada indivíduo, acrescentando o património cultural de um dado grupo.” (Niza, 2012, p. 361). É com a permanente partilha de saberes que se constrói uma comunidade de aprendizagem em que cada sujeito desenvolve o seu conhecimento e reciprocamente ajuda a desenvolver o de toda a comunidade.

Capítulo III

Contextualização das práticas

Tendo esta investigação uma incidência muito forte na dinâmica de trabalho da minha turma, parece-me pertinente fazer aqui uma contextualização das práticas que desenvolvi com os meus alunos. Inicio por descrever alguns aspetos inerentes à pedagogia preconizada pelo Movimento da Escola Moderna, nos quais me apoio para a minha atividade enquanto professora. Faço de seguida uma descrição do modo como se dinamizou o trabalho em Matemática com a minha turma. Termino com alguns apontamentos sobre o que entendo ser o papel do professor , no contexto descrito.

3.1. Um cenário pedagógico inscrito nas práticas do Movimento da Escola Moderna

Desde o seu início que o Movimento da Escola Moderna (MEM) se preocupa com a comunicação e as interações como potencial das aprendizagens escolares.

> "A ideia da comunicação como um dispositivo cultural muito potente para a formação e desenvolvimento humano é um dos pilares mobilizadores da pedagogia do MEM. Com efeito, o modo como vimos privilegiando as formas sociais do discurso, o pensamento discursivo de um grupo, nas trocas do que pomos em comum: obras, pensamento, saberes e linguagens, é algo que nos desafia para o muito que ainda temos que fazer. Tudo dependerá do modo como soubermos acolher e valorizar as formas de organização da comunicação desde o diálogo à conversação, por um lado, como formas mais diretas e espontâneas, até, por outro, à discussão e ao debate como formas necessariamente mais reguladas ao serviço da cultura apropriada na escola." (Niza, 2010, p. 3).

Consequentemente foi-se desenvolvendo uma estrutura orgânica de modo a criar um ambiente de aprendizagem promotor destas práticas. Como se pode observar na tabela 2, esta orgânica tem o seu núcleo central no módulo da organização e gestão cooperada em conselho de cooperação educativa, o qual se desenrola em momentos semanais com toda a turma e visa a planificação, avaliação e regulação de todo o trabalho e desenvolvimento sociomoral da turma. Para este módulo central, contribuem de modo interligado, outros quatro módulos fundamentais: o trabalho de aprendizagem curricular por projetos cooperativos no qual as aprendizagens ocorrem através da execução de projetos em cooperação e em que o professor apoia os grupos rotativamente; o trabalho curricular comparticipado pela turma onde os alunos desenvolvem conhecimento nas diversas áreas do currículo com a participação ativa de alunos e professores; Os momentos de trabalho autónomo e acompanhamento individual onde ocorre o trabalho de treino e aprofundamento dos conteúdos e no qual o professor rotativamente acompanha individualmente os alunos que mais necessitam; os circuitos de comunicação para difusão e partilha dos produtos culturais que constam da comunicação e difusão de produções feitas pelos alunos nos diverso momentos descritos frequentemente sobre a forma de apresentação oral mas também em suportes escritos.

Tabela 2 - Estrutura da organização educativa do MEM

Trabalho de aprendizagem curricular por projetos cooperativos Trabalho cooperativo em projetos temáticos de estudo, de produção artística, de pesquisa científica ou de intervenção social, para desenvolvimento das aprendizagens curriculares, acompanhado rotativamente pelo professor.		**Trabalho curricular comparticipado pela turma** Trabalho em coletivo, onde, com a colaboração ativa dos professores e comparticipada por todos, se constroem ou se reconstroem conceitos e saberes ou se procede à revisão ou reescrita de textos que sirvam as diversas áreas do currículo.
	Organização e gestão cooperada em conselho de cooperação educativa Reuniões de Conselho para planeamento, avaliação, análise de ocorrências significativas, reflexão ética para clarificação e construção de regras de vida para desenvolvimento sociomoral (Instrumentos de planeamento/avaliação e Diário de Turma)	
Circuitos de comunicação para difusão e partilha dos produtos culturais Comunicação e difusão do trabalho em projetos, apresentação de produções, divulgação de publicações, exposição de trabalhos, troca de correspondência e interação virtual. Estas ações são submetidas à reflexão sobre os efeitos da sua apropriação ou utilização social.		**Trabalho autónomo e acompanhamento individual** Estudo e aprofundamento dos conteúdos disciplinares, treino e produção intelectual dos alunos guiados por um plano individual de trabalho periódico. Trabalho rotativo do professor para ensino interativo dos alunos que precisam de acompanhamento individualizado.

Pretende-se estimular a comunicação dos saberes, das investigações, dos estudos, das produções de cada um. É na partilha dos produtos culturais que cresce uma sociedade.

Segundo Niza (1998) é promovendo as aprendizagens em interação comunicativa, na constante partilha entre os elementos da turma que se faz avançar o desenvolvimento psicológico e social dos educandos e consequentemente a cultura de todo o grupo .

Para tal, existem na agenda semanal, tempos destinados a estas comunicações. Neste contexto, é também pretendido que os alunos vão produzindo "obras" que possam servir de suporte comunicativo ou para que seja possível uma maior divulgação cultural.

> "Esta matriz comunicativa radica em circuitos de comunicação das aprendizagens e de fruição dos produtos culturais, para que todos possam aceder à informação de que cada um dispõe, aos seus produtos de estudo e de criatividade artística e intelectual. As trocas sistemáticas de produções e de saberes concretizam a dimensão social das aprendizagens e o sentido solidário da construção cultural dos saberes e das competências instrumentais que os expressam" (Niza, 2012, p. 356).

O trabalho feito com estes alunos ao longo dos três últimos anos, foi no sentido de favorecer a criação de uma comunidade de práticas de aprendizagem, na qual há a "obrigação" social da partilha dos conhecimentos bem como a cultura de produzir "obras" que possam ser validadas (criticadas, partilhadas, aperfeiçoadas) por toda a comunidade de sala de aula (ou até da escola). É também um dos objetivos primordiais, o de aproximar os trabalhos desenvolvidos pelos alunos aos produtos existentes na sociedade à qual pertencemos.

A gestão do currículo é feita em cooperação com os alunos e gerida segundo os ritmos da turma. Os alunos têm conhecimento do currículo o qual está exposto na sala sobre a forma de lista de conteúdos e competências a adquirir. Não há uma sequência pré-definida dos conteúdos a abordar, sendo no entanto frequente, a consulta dos Programas curriculares para o Ensino Básico (Matemática, Português e Estudo do Meio), para que a turma se aperceba do seu posicionamento em relação a cada programa. A não utilização de manuais escolares, leva a que na sala exista uma variedade de recursos (ficheiros cooperativos, livros de consulta, materiais didáticos, materiais não estruturados,…) que incitam a partilha e o trabalho em cooperação e através dos quais os alunos vão trabalhando os conteúdos programáticos das diferentes áreas curriculares, durante os momentos de TEA. Nesses momentos de trabalho, os alunos desenvolvem atividades diversas de modo a superarem dificuldades, a reforçarem e aperfeiçoarem as aprendizagens já feitas ou ainda a estudarem e explorarem novas situações.

3.2. A dinâmica do trabalho em matemática, na minha sala de aula

Planificação/progressão no currículo

Ao longo do ano, a progressão no currículo de matemática foi sendo gerida, consoante os assuntos iam emergindo dos trabalhos dos alunos e das discussões no grupo turma. Num dos placards da sala estava exposta uma tabela, onde constavam os tópicos do programa passíveis de serem explorados/investigados pelos alunos (anexo II). À medida que surgiam novas investigações ou explorações, os alunos iam-se inscrevendo num registo próprio, indicando o tema de estudo (Anexo IV).

Semanalmente fez-se a planificação das comunicações dos trabalhos indicados no registo das inscrições (Anexo IV). À sexta-feira em conselho de turma[4], junto com os alunos organizávamos a agenda de trabalho da semana seguinte. Nesse momento, combinávamos em que sessões os temas seriam discutidos no grupo-turma. Nessas sessões, os alunos apresentavam os seus trabalhos apoiando-se nos registos feitos durante as suas investigações. Com base nessas apresentações desenvolvia-se a discussão dos temas matemáticos planeados.

Como se pode ver na agenda (Tabela 3), ao longo da semana existiam três momentos coletivos de matemática (amarelo). No primeiro momento, **segunda-feira**, eram apresentados os trabalhos que tinham sido alvo de *conteúdo obrigatório* na semana anterior. O conteúdo obrigatório de uma semana, era o conteúdo discutido em coletivo na semana anterior. Deste modo, para além dos alunos que investigaram/exploraram determinado assunto, todos os outros elementos do grupo também tiveram oportunidade de o trabalhar. Nesta segunda discussão sobre o mesmo assunto, era frequente acrescentar novas conclusões, surgirem outras opiniões, levantarem-se novas questões – *emergiam novos temas de pesquisa.* Na segunda sessão de trabalho, **quinta-feira**, eram abordados assuntos propostos por mim. Nestas sessões de trabalho apresentei frequentemente trabalhos feitos pelos alunos, os quais indiquei como sendo pertinentes colocar em coletivo. Um dos exemplos foi no âmbito das resoluções de problemas, em que surgiram cálculos através de decomposição de números que serviram de "pontes" para a introdução de algoritmos. No momento de **sexta-feira**, eram apresentados os trabalhos das investigações feitas pelos alunos, referentes ao tema agendado para essa semana. Umas vezes houve uma só apresentação (de um só aluno ou de um par)

[4] Conselho de turma- Ocorre em vários momentos ao longo da semana. São reuniões de turma para planeamento, avaliação, análise de ocorrências significativas, reflexão ética para clarificação e construção de regras de vida para desenvolvimento sociomoral. O momento mais formal é à sexta-feira no qual também é feita a planificação da semana seguinte. Ao longo da semana ocorrem momentos mais curtos de modo a verificar o cumprimento da planificação ou a necessidade de replanificar.

outras vezes apresentaram mais do que um trabalho referente ao mesmo assunto. Os trabalhos podiam ser individuais, a pares ou em pequenos grupos. Como fruto da discussão coletiva destes trabalhos, emergiam frequentemente novas questões de investigação.

No final das sessões coletivas, e após a negociação dos significados, foram produzidos cartazes em cartolina com as conclusões a que a turma chegou. Em algumas situações o cartaz ficou "em aberto", para que posteriormente se fossem introduzindo mais conclusões depois do assunto ser trabalhado como conteúdo obrigatório e voltar a ser discutido no coletivo (na semana seguinte).

Tabela 3 - Planificação semanal

Agenda da semana de ___/___/_____ a ___/___/_____

	2ª feira		3ª feira		4ª feira		5ª feira		6ª feira	
9h - 10h	Distribuir tarefas	30m	Apresentação Produções	30m	Apresentação Produções	30m	Projetos	60m	Apresentação Produções	30m
10h - 11h	• organização • Planificar PIT • HeteroAvaliação PIT • Marcar Apoios	90m	Projetos	90m	Trabalho de Texto II	90m	TEA	60m	Matemática	90m
Intervalo										
11:30h - 12:30	Matemática	60m	Trabalho de Texto I	60m	Proposta de escrita	60m	Conhecimento Explícito da Língua	60m	Estudo do Meio (Comunicação de projetos)	60m
Almoço										
14h - 15:45h	TEA	90m	TEA / EF	90m	TEA	90m	Ed. Musical	45m	Conselho	105m
							Matemática	60m		
	Leituras	20m	Leituras	20m	Leituras	20m			Agenda	15m
...h - 16:15	*Balanço e tarefas*		*Balanço e tarefas*		*Balanço e tarefas*		*Balanço e tarefas*		*Balanço e tarefas*	

Como surgem os trabalhos/investigações

Para além das três sessões coletivas semanais já descritas, os alunos trabalhavam matemática nos momentos de trabalho autónomo (TEA). Nestes tempos letivos os alunos desenvolviam os seus trabalhos autonomamente e diferenciadamente. Ao mesmo tempo, havia alunos que trabalhavam Língua Portuguesa, outros dedicavam-se ao Estudo do meio e outros então, à Matemática. A gestão do tempo e das atividades era feita por cada aluno segundo o plano de trabalho que se comprometia no início da semana (registado num registo individual denominado de PIT[5] (anexo I). Os alunos podiam desenvolver as suas atividades individualmente, a pares ou em pequenos grupos. Durante estes tempos estava a apoiar os alunos que apresentavam maiores dificuldades de aprendizagem. Por vezes foi possível dispor de algum tempo para circular pela sala e dar alguma sugestão ou orientações de trabalho aos alunos que estavam a trabalhar com maior autonomia. É ainda de referir que os apoios e as parcerias de trabalho eram planeados no início de cada uma das sessões de TEA.

Os alunos que optavam por trabalhar atividades investigativas ou exploratórias, escolhiam um assunto da tabela já referida, onde constavam os tópicos do programa ou escolhiam um dos temas que tinha emergido das últimas sessões coletivas. Esses temas estavam numa folha (anexo III) escritos sob a forma de questões e estavam expostos no placard próximo da tabela dos tópicos do programa. Os alunos iam assim escolhendo os temas de investigação a que se queriam dedicar. Grande parte das vezes, estavam motivados pelas questões que tinham surgido das últimas discussões em coletivo e lançavam-se à procura de respostas. Não existiam guiões de trabalho. Por vezes eu dava algumas orientações, em conversa informal questionando-os de modo a indicar algum caminho de investigação [“Então como é que estão a pensar fazer?” “E será que com isso conseguem verificar para todas as situações?” “Tomem atenção ao que querem mesmo descobrir, não se dispersem.” ...]. Também com alguma frequência, surgiram nas sessões coletivas, indicadores de como se poderia investigar a nova questão que surgia.

Outros trabalhos foram apresentados em coletivo, por minha indicação. Ao verificar[6] os trabalhos dos alunos, por vezes deparei-me com situações (por exemplo formas de resolução de um determinado problema) que me pareceram pertinentes serem discutidas no grande grupo. Nessas situações, propunha aos autores do trabalho, que estes o apresentassem ao grupo. Eram estas as situações que normalmente foram apresentadas à quinta-feira. Estas minhas escolhas incidiram muito em trabalhos que possibilitavam a transição (fazendo pontes) para tópicos que ainda não tinham sido abordados e que estavam mais difíceis de emergir voluntariamente através das investigações dos alunos.

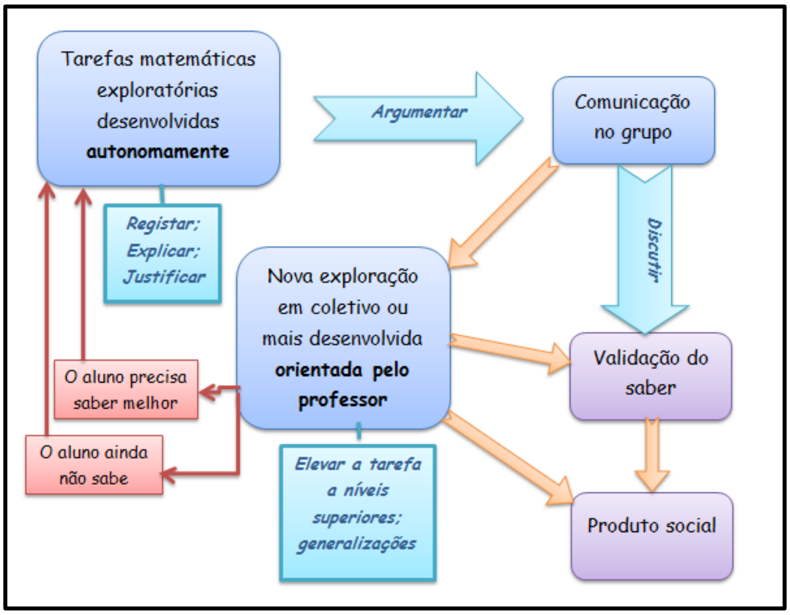
Ao longo do ano fui ainda propondo problemas “semanais” (embora em algumas semanas possa não ter ocorrido uma proposta, na semana em que esta existiu, todos os alunos

[5] PIT- Plano Individual de Trabalho consiste no registo semanal orientador do trabalho individual dos alunos assumindo também um papel de compromisso perante o grupo e orientando a autoavaliação do final da semana.
[6] No final da semana, via os trabalhos de cada aluno e fazia comentários ou remetia para “trabalhos a rever”. Na semana seguinte, os trabalhos eram devolvidos e os alunos iam corrigir o que era necessário. Podiam fazê-lo sozinhos se fossem capazes, ou comigo (em apoio de TEA) se ainda necessitavam de ajuda.

tinham de a resolver durante os momentos de TEA dessa semana). As diferentes resoluções individuais ou a pares eram apresentadas e discutidas em coletivo, agendadas nas sessões de segunda-feira ou de quinta-feira, dependente dos outros trabalhos em curso. Estes problemas e as diferentes formas de resolução que emergiam dos trabalhos dos alunos, foram muitas vezes motores para novas investigações/explorações.

O diagrama que se segue (Tabela 4) sintetiza esta orgânica de trabalho, mostrando os pontos principais da dinâmica descrita.

Tabela 4 - diagrama da ação



Na dinâmica do trabalho que se foi desenvolvendo observa-se um ciclo de ações que vão produzindo uma espiral nas abordagens dos conteúdos/tópicos matemáticos do programa curricular. Investigações feitas em trabalho autónomo eram registadas e levadas para coletivo onde ocorria a discussão – os alunos argumentavam, justificavam, pediam esclarecimentos, conjeturavam, levantavam hipóteses, colocavam novas questões. Desta discussão saíam conclusões que eram escritas em cartazes seguidamente colocados nas paredes da sala. Os tópicos voltavam a ser trabalhados individualmente ou a pares, nos momentos de trabalho autónomo retornando depois à discussão coletiva através da apresentação dos trabalhos de todos os elementos. Frequentemente surgiram novas conclusões (abertura da espiral).

As questões levantadas, durante a discussão (dos trabalhos) na turma, eram muitas vezes devolvidas aos alunos com algumas orientações de como poderiam investigá-las. Estas novas questões eram por sua vez caminhos para a abordagem de novos tópicos do programa.

Muitas vezes, do mesmo assunto surgiu mais do que um novo tema a discutir. Esta espontaneidade de temas que surgiram das dúvidas e das questões que emergiam da discussão coletiva, bem como os vários caminhos possíveis da sua continuidade, marca bem a ideia dos conceitos matemáticos se relacionarem entre si, como uma teia.

3.3. O papel do professor

Neste contexto de trabalho, o principal papel do professor é o de promotor de um ambiente de trabalho propício, ao desenvolvimento de toda a ação dos alunos. O professor tem de:

- Preparar todo um ***cenário***, no qual os alunos possam agir autonomamente, sendo capazes de direcionar o seu trabalho indo ao encontro do programa curricular e simultaneamente dos seus interesses articulando com as questões emergentes do grupo-turma. É necessário estar atento para disponibilizar os materiais que possam ser mais estruturantes e necessários em determinados momentos os quais devem estar à disposição dos alunos. Por um lado, os próprios materiais são por vezes desafiadores e motores de exploração/investigação, por outro são facilitadores na concretização das investigações. Há também neste cenário uma preocupação nos registos/tabelas orientadores/reguladores do trabalho executado ou a executar pelos alunos. Devem ser definidos os espaços onde será possível a realização das diferentes experiências necessárias a algumas investigações.
- Promover, disponibilizar os **tempos letivos** necessários para a realização das investigações e para a comunicação das mesmas. É necessário que exista uma agenda partilhada e respeitada por todo o grupo, onde constem os momentos em que os alunos se podem dedicar a cada tipo de trabalho. Os alunos devem também participar na construção semanal dessa agenda, de modo a sentirem como pertença e consequentemente responsabilidade pelo seu processo de aprendizagem.
- Ser um dinamizador, orientador e gestor do **discurso coletivo**. Tem de estar consciente do programa curricular, para que possa gerir e direcionar o discurso coletivo, de modo a que a turma vá progredindo no currículo. Tem que assegurar um clima de respeito entre os elementos do grupo, para que ninguém fique constrangido a falar. Deve ter conhecimentos matemáticos para que possa salientar as intervenções relevantes dos alunos e questionar as que possam conduzir a ideias erróneas. Agir no

momento em que estão a emergir novas questões conducentes a outros tópicos. Fazer sobressair as conclusões significativas do tópico em discussão.

- Estar atento a trabalhos que surjam por parte dos alunos e que possam ser condutores a discussões de novos conteúdos.

Capítulo IV

Metodologia de Investigação

Neste capítulo indico e justifico as opções metodológicas que serviram de estrutura a este estudo. Seguidamente refiro as razões que levaram à escolha dos participantes. Por fim descrevo o modo como os dados foram recolhidos e analisados.

4.1 Opções Metodológicas

Com esta investigação pretendo estudar o desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos dos alunos do 4º ano do 1º ciclo, através de investigações e explorações feitas autonomamente por eles e sua posterior comunicação ao grupo turma - partilha e discussão coletiva dos trabalhos executados.

Mais pormenorizadamente pretendo saber:

- Em que medida é que o envolvimento dos alunos em investigações matemáticas contribui para o desenvolvimento do conhecimento matemático?
  - Quais os fatores que contribuem para esse envolvimento?
- De que modo é que a discussão coletiva contribui para o desenvolvimento do conhecimento matemático?
  - Qual é o papel do professor nessa discussão?
  - Que funções assume o discurso dos alunos?
- De que forma conhecimentos anteriores são usados para fundamentar as opiniões apresentadas nas discussões em coletivo e nas atividades investigativas?

Ao estudar as interações dos alunos (em pequeno grupo os a pares), no decorrer de atividades investigativas e exploratórias que desenvolveram regularmente na sala de aula, pretendo perceber como é que estas atividades, articuladas com a sua posterior comunicação à turma, influenciam o desenvolvimento do conhecimento matemático. Realço que este estudo foi feito com os alunos da minha turma e a investigação incidiu nos aspetos decorrentes das ações dos participantes situando-se no paradigma interpretativo tal como é caraterizado por Erikson (1986) (citado por Hérbert, Goyette, e Boutin, 2005). Um dos elementos determinante nesta investigação foi também o contexto social e cultural em que decorreu o trabalho de sala de aula. Todos os aspetos referidos como objetos de investigação estiveram condicionados aos fatores ambientais envolventes. Tal como refere Erikson (citado por Hérbert, Goyette, e Boutin, 2005) há três principais campos de interesse para uma investigação interpretativa no campo da educação: (1) a natureza da sala de aula como um meio social e culturalmente organizado para a aprendizagem; (2) a natureza do ensino como um, mas somente um, aspeto do meio da aprendizagem; (3) a natureza (e o conteúdo) das «perspetivas-significados» do docente e do discente como componentes intrínsecos do processo educativo. Por verificar que o contexto social e cultural da aprendizagem era um fator fulcral para este estudo, dediquei o terceiro capítulo deste trabalho (Contextualização das Práticas) à sua descrição.

Esta investigação seguiu uma abordagem qualitativa. De acordo com Bogdan e Biklen (1994) "na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal" (p. 47). Os dados foram recolhidos diretamente dos momentos de trabalho com os alunos e fui eu (enquanto professora e investigadora) que os recolhi. Este estudo foi também ao encontro do que estes autores referem a propósito de uma investigação descritiva em que os dados recolhidos foram em forma de palavras e imagens e nos resultados constam citações feitas com base nos dados obtidos. Outro aspeto da investigação qualitativa referido por estes autores refere-se ao foco de interesse do investigador pois "os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos." (Bogdan e Biklen, 1994, p. 49), sendo este um ponto central desta investigação em que o meu interesse de estudo foi o de perceber como é que os alunos procediam nas atividades investigativas (individualmente ou em pequeno grupo) e como eram as suas interações nessas atividades e em coletivo. De acordo com Bogdan e Biklen (1994) a análise dos dados numa investigação qualitativa tende a ser feita de modo indutivo, aspeto que também carateriza este estudo.

4.2 Participantes

Os participantes neste estudo foram os vinte e três alunos da minha turma do 4º ano, que era composta por treze rapazes e dez raparigas, e eu enquanto professora e dinamizadora do processo educativo. Simultaneamente era também a investigadora tendo assumido o papel de observadora participante e de professora.

A investigação foi feita numa escola privada em Lisboa, onde lecionava há oito anos. Os participantes neste estudo eram meus alunos desde o 1º ano. Os alunos tinham conhecimento do objetivo desta investigação e aceitaram participar. Foi pedido ao diretor da escola autorização para a elaboração deste trabalho dentro da sala de aula e foram igualmente pedidas as autorizações aos encarregados de educação para a participação dos seus educandos nesta investigação. Não se colocou nenhum constrangimento, tendo todos os encarregados de educação autorizado os registos de áudio e vídeo e a participação dos seus educandos. Para manter o anonimato os nomes constantes neste estudo são fictícios.

4.3 Recolha de dados

A recolha de dados foi feita através de gravações em áudio e vídeo, de notas resultantes da observação participante e de produções dos alunos. Neste tipo de observação o investigador constitui um instrumento importante na recolha de dados, como mencionam Hérbert, Goyette, e Boutin (2005), Bogdan e Biklen (1994).

Durante as observações foram escritas notas de campo contendo descrições e impressões do momento. No final dos momentos de trabalho escrevia no diário de bordo algumas reflexões pessoais sobre os momentos da aula as quais permitiram ir adequando o trabalho seguinte. Sendo o investigador um dos elementos do processo, estive nele envolvido e interagi com os restantes participantes.

> "…transcende o aspeto descritivo da abordagem (objetiva) para tentar descobrir o sentido, a dinâmica e os processos dos atos e dos acontecimentos. Neste caso o investigador está inserido na vida dos atores a que o estudo diz respeito. Ele procura obter o máximo de informações que lhe é possível sobre esta situação específica." (Pourtois e Desmet, 1988, citado em Hérbert, Goyette e Boutin, 2005, p. 156)

Estas notas tinham descrições de acontecimentos e também narrações dos processos, das dinâmicas e de sentidos que me apercebi dentro dos contextos. A pertinência das reflexões serem escritas no final dos momentos de trabalho, deve-se ao facto de como observadora ser também participante ativa no processo.

> "A participação ativa significa que o observador está envolvido nos acontecimentos e que os regista após eles terem tido lugar. Este tipo de observação participante permite ao observador apreender a perspetiva interna e registar os acontecimentos tal como eles são percecionados por um participante." (Evertson e Green, 1986, citado por Hérbert, Goyette, e Boutin, 2005, p.156)

Estando o investigador num nível tão elevado de envolvimento, as narrações decorrentes das observações terão sido também "afetadas" da subjetividade inerente ao contexto. Como referido em Hérbert, Goyette, e Boutin, (2005) "O investigador deverá definir o seu papel em relação ao continuum observação-participação. (…) Até que ponto a sua participação deverá conservar um caráter de neutralidade?" (p. 157). Nesta dualidade de papéis, tentei que houvesse um maior cuidado em distinguir os dados de observação enquanto descrições das situações e, as notas narrativas que continham toda a subjetividade própria do professor.

> "A observação participante permite recolher dois tipos de dados. Os dados registados nas «notas de campo» são do tipo da descrição narrativa e aqueles que o investigador anota no seu «diário de bordo» pertencem ao tipo da compreensão, pois que fazem apelo à sua própria subjetividade (Hérbert, Goyette e Boutin, 2005, p. 157)

Foram assim utilizados dois tipos de registos de notas: As notas de campo, nas quais foram registados os acontecimento, embora contendo também alguns apontamento referentes a significados percecionados por mim enquanto observadora e o diário de bordo, no qual constaram reflexões feitas sobre os processos decorrentes dos momentos de trabalho.

Visando ainda uma maior cobertura de observações das ações dos participantes, foram feitos registos de áudio e vídeo. Este tipo de registo, para além de permitir registar situações às quais o investigador não tem acesso - devido ao duplo papel de docente e investigador - também foi útil na complementaridade dos dados observados. No momento da análise, cruzaram-se estes registos, com os observados e descritos nas notas de campo e no diário de bordo.

> "Os sistemas tecnológicos de registo de dados são os mais abertos e são, geralmente, utilizados em complementaridade com outros tipos de sistemas. «o registo tecnológico pode ser utilizado *in situ*, ao mesmo tempo que os outros sistemas, ou pode ser um registo ao qual os outros sistemas se venham a aplicar.»" (Evertson e Green, 1986, citado em Hérbert, Goyette, e Boutin, 2005, p. 154)

Resumidamente, foram escritas notas das observações feitas por mim enquanto observadora, tanto das sessões de trabalho em que ocorreram comunicações como nos momentos de trabalho autónomo, sempre que assim se justificou. Essas notas foram complementadas com narrações em que constaram as minhas perceções. Seguidamente era escrito uma reflexão sobre esses momentos de trabalho no diário de bordo. Para complementar estes dados foram gravadas as sessões coletivas em que ocorreram comunicações dos alunos sobre assuntos matemáticos. Foram também gravados alguns momentos de trabalho em investigações (durante o tempo de estudo autónomo) bem como foram recolhidas e analisadas algumas produções dos alunos.

A tabela 5 apresenta um resumo explicativo de aspetos envolvidos na recolha de dados:

Tabela 5 - recolha de dados

Recolha de dados		
Momentos de trabalho	Momentos de trabalho autónomo	Momentos coletivos (gerido pelo professor)
Organização grupal	Individual / pequenos grupos	Grande grupo (turma)
Dados recolhidos	Diálogos, procedimentos, produções (registos das tarefas, etc.)	Intervenções, interações, produções
Tipos de registo	Vídeo, gravador, notas de campo, diário de bordo, produções dos alunos	Vídeo, gravador, notas de campo, diário de bordo

4.4 Análise dos dados

No decorrer da investigação, no final de cada semana e apoiando-me nas reflexões do diário de bordo e nas produções dos alunos, fazia uma primeira análise dos dados a qual possibilitou ir adequando as observações e as recolhas. Deste modo fui organizando a análise posterior tendo em conta o objetivo e as questões da investigação à luz da revisão da literatura realizada. Posteriormente, ouvi as gravações áudio e vídeo feitas das diferentes sessões de trabalho e selecionei as que deveriam entrar neste estudo. Selecionei duas sessões coletivas: "regularidades das tabuadas" por se tratar de uma sessão do início do ano letivo (20 de outubro); "o paralelogramo" por se tratar de uma sessão do meio do ano letivo (16 de março) e articular com uma das gravações feitas às investigações dos alunos. Para analisar as atividades investigativas dos alunos escolhi duas gravações que apresentavam alguma qualidade na audição dos comentários dos alunos e na visualização das suas ações. Assim, selecionei a investigação sobre "o paralelogramo" (5 e 6 de março) que possibilitou a articulação com a sessão coletiva; e a investigação sobre o "decímetro cúbico" que ocorreu já perto do final do ano letivo (3 de maio). Seguidamente transcrevi os diálogos constantes nas gravações intercalando com as notas de campo e com algumas reflexões escritas no diário de bordo. Seguiu-se a análise que foi feita com base em duas categorias:

1ª **Comunicação** (Onde foram incluídas as intervenções observadas tanto nos pequenos grupos de trabalho como no grande grupo).

2ª **Atividades investigativas** (Contemplou as observações feitas aos alunos em atividade: as suas escolhas; o modo como se organizaram para a execução da tarefa; como registam os trabalhos; dificuldades observadas; etc…)

Comunicação:

A análise desta categoria assume dois vetores distintos: o discurso efetuado em coletivo (grupo-turma) em que as interações foram marcadas por vários intervenientes; e as interações resultantes do trabalho em investigações em pequeno grupo (normalmente a pares). Nesta categoria distingui ainda o discurso dos alunos do papel do professor nesses discursos.

Atividades investigativas:

Nesta categoria analisei o trabalho dos alunos segundo os fatores que influenciaram o envolvimento dos alunos nas investigações, como conduziram o processo de investigação autonomamente e as conclusões a que conseguiram chegar.

A discussão dos dados foi feita apoiando-me nestas duas categorias e tendo em conta os diferentes aspetos. Assim, analisei as sessões coletivas e as sessões gravadas em TEA retirando de cada uma delas o que me pareceu pertinente enquadrar em cada categoria articulando com as questões orientadoras do trabalho.

Capítulo V

Análise dos dados

Neste capítulo faço a descrição das partes mais pertinentes das sessões de trabalho que selecionei para este estudo. Descrevo os diálogos dos alunos e faço algumas anotações resultantes da minha observação participante. Teço ainda alguns comentários decorrentes da reflexão feita após as sessões de trabalho.

Tema	Momento de trabalho	Data	Duração
Regularidades das tabuadas	Coletivo	20 de outubro de 2011	60 min
Investigação sobre o paralelogramo	TEA	5 e 6 de março de 2012 (2 sessões)	130 min
O paralelogramo	Coletivo	16 de março de 2012	60 min
Investigação sobre o decímetro cúbico	TEA	3 de maio de 2012	90 min

5.1 Comunicação sobre regularidades da tabuada

Escolhi esta como primeira sessão para análise por se tratar de uma sessão ocorrida em outubro, tendo apenas decorrido um mês de aulas. O assunto tratado neste episódio refere-se a investigações feitas pelos alunos sobre regularidades e relações entre tabuadas. Embora se refira a alunos de 4º ano, este era um assunto que não tinha sido explorado nos anos anteriores. Até então, o trabalho das tabuadas tinha incidido mais na construção de cada uma focada na adição sucessiva de parcelas iguais. Não havia um trabalho de observação de regularidades na mesma tabuada nem de observação das relações entre elas

A sessão passa-se em 20 de outubro com duração de uma hora e começa com a apresentação de investigações feitas por duas alunas, sobre as tabuadas do 2 e do 4. Durante a apresentação, os registos das investigações foram projetados no quadro (estavam digitalizados), de modo a que todo o grupo pudesse estar a observar o trabalho. As alunas que estavam a apresentar o trabalho, estavam junto ao quadro para poderem apontar os seus registos. Eu estava sentada numa carteira junto aos alunos, onde ia registando o que o grupo concluía. Desse lugar, ia regulando o diálogo e o ambiente da sala. A sessão encontra-se em anexo descrita na totalidade (AnexoVII).

1ª parte

As duas alunas em questão, eram alunas que sempre tiveram um percurso fraco em Matemática. A Marta apresentava mesmo muitas dificuldades. Na investigação que fizeram, tiveram algum apoio e orientação do professor.

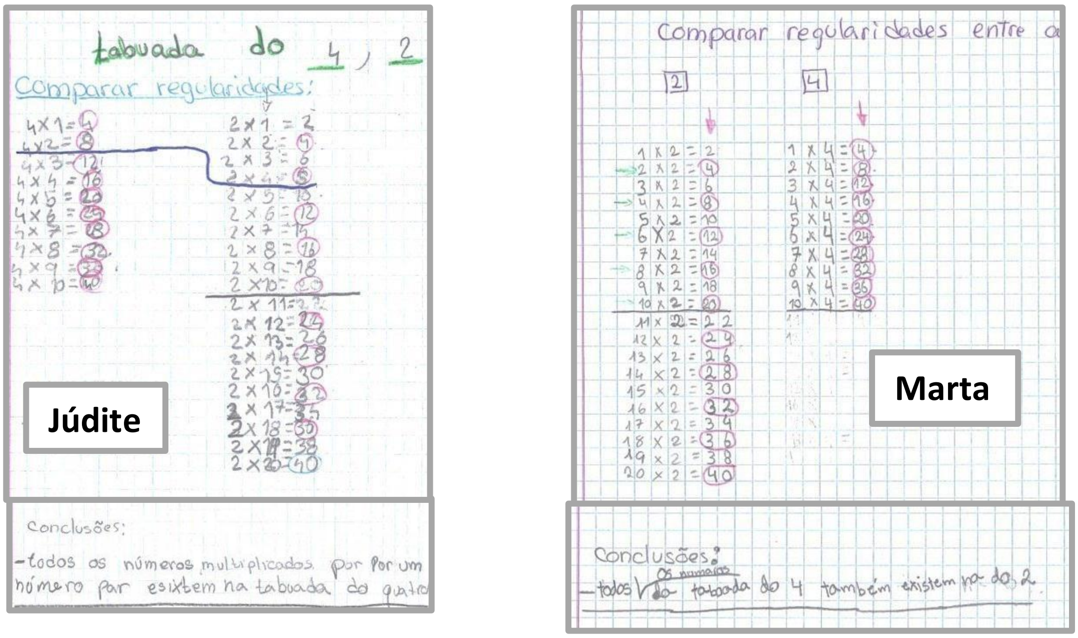


Fig. 1 Registos da investigação sobre as regularidades da tabuada do 2 e do 4 feito pelas alunas Júdite e Marta

Logo no início da apresentação, as alunas evidenciaram dificuldade em expor as suas ideias ao que eu devolvi ao grupo a responsabilidade de ajudá-las a clarificar melhor. Embora a minha intenção fosse a de questionamento por parte do grupo, um dos alunos, o Dionísio, interveio no sentido de sugerir um modo de como as colegas poderiam explicar melhor.

Marta e Júdite — Na do 4 é sempre par… e na do 2 é ímpar… (…) Nós não sabemos como explicar…

Prof: — Os colegas podem ajudar a explicar melhor fazendo perguntas…

Dionísio — É que vocês podiam dizer assim: fomos ver se havia números na tabuada do 4 que estivessem na tabuada do 2 … depois estavam a explicar que a tabuada do 4 é sempre ímpar e a do 2 é par…

…[mas] Eu acho que não. Eu acho que a do 2 é sempre par e a do 4 também.

Na sua intervenção o Dionísio respeitou as colegas, fazendo um esforço por entender as suas explicações. Fez uma sugestão para clarificarem melhor o que pretendiam explicar. Contudo, a certa altura não tem certeza se entendeu o que elas pretendem dizer, e confuso deixa a frase em suspenso esperando que elas continuem a explicação. Faz ainda uma nova intervenção, contrapondo a ideia que lhe pareceu ser transmitida pelas colegas.

O diálogo prossegue…

Marta	Sim, foi o que a Júdite disse
Dionísio	Na do 2 é sempre par mas na do 4 … eu estou confuso
Jordão	Na do 4 também…
Prof:	Então o que é que se está a passar aqui?
Dionísio	É que na do 4 é sempre ímpar e na do 2… [interrompido pelos colegas que contestam]…não [enganei-me]. É sempre par. Mas na do 2 não.
Jordão	Na do 2 não? Vês ali algum ímpar?
Dionísio	Vejo, 38
Jordão e Outros	38 é par…
Prof:	[percebe que há alguma confusão sobre os números pares, por parte de quem apresenta]. Então vamos lá ver quais são os números que estão na tabuada do 2 e na tabuada do 4? - vejam lá. Então vamos lá ver... tabuada do 2? - Marta queres nos dizer quais são os resultados na tabuada do 2? [A aluna que estava a apresentar]

Notava-se pouca segurança por parte da Marta que tentou defender o que a colega disse sem grande consistência. O Dionísio que tentou ajudar na clarificação das ideias das colegas, mostrou-se nesse momento confuso sobre a existência de números pares e ímpares nas tabuadas do 2 e do 4, e verbaliza-o. Outro aluno, o Jordão entrou na discussão, e foi acrescentando a sua opinião às falas do colega. Umas vezes afirmou, noutras questionou e ainda se opôs a algumas afirmações do colega.

Notou-se um crescente envolvimento na discussão por parte dos outros alunos que foram negociando o significado de par e ímpar.

Apesar de não ser este o tema que esperava que fosse discutido nesta sessão, apercebi-me que alguns alunos apresentavam algumas dúvidas sobre o conceito de par e ímpar. Sendo este um assunto que já tinha sido abordado várias vezes em anos anteriores, pensava que já estava bem consistente. Foi durante o diálogo dos alunos que vi emergir esta dificuldade. Era óbvio que tinha que conduzir o discurso para a clarificação deste conceito.

Marta	Na do 2 são: 4;…

Prof: Então, o 2? Não existe na tabuada do 2? … Vamos observar a tabuada do 2 para ver se são todos pares, ou não.

Então começa na tabuada do 2!... Então grupo?

Vários 2; começa por 2…

Marta e Júdite 2; 4; 6;…; 20

Prof: Também é tabuada, [as alunas têm no registo valores para além do 20] não deixa de ser, continuem.

Marta e Júdite 22; 24; …; 40

Prof: Então esses números são pares ou ímpares ou há pares e ímpares?

Vários são pares

Prof: Então uma das conclusões a que podemos chegar é...?

Dionísio ...é que na tabuada do 2 todos os números são pares.

Prof: [escrevendo as conclusões] Na tabuada do 2 todos os números são pares

Tentei envolver a turma na regulação do que a Marta e a Júdite estavam a apresentar, contudo, não o fizeram voluntariamente (só quando provocados para isso). Poderão ainda estar incertos quanto ao seu papel regulador do discurso dos colegas ou podem estar a refletir em simultâneo com as colegas e eu não ter dado tempo suficiente para reagirem. Nesta parte da comunicação, houve uma maior orientação minha sobre o caminho que deveríamos seguir para perceber a existência de pares e ímpares nestas tabuadas. Porém, sempre que surgiu uma questão levantada por mim, a turma respondeu prontamente mostrando assim o seu envolvimento no assunto. Um dos aspetos interessantes neste fragmento do diálogo é a conclusão ter sido elaborada espontaneamente pelo aluno que inicialmente apresentou a dificuldade de distinguir os pares dos ímpares.

À medida que eu escrevia e repetia em voz alta as conclusões a que tínhamos chegado, uma nova intervenção do Jordão surgiu e levou à reformulação da conclusão inicial.

Jordão …e do 4. Na do 2 e do 4

Prof: Então vamos lá ver na tabuada do 4

Marta e Júdite 4; 8;…;36; 40

Prof: Por aí fora, não é [podíamos continuar a tabuada do 4 para além do 40] … Então, são pares ou ímpares os números que aí estão. Ou há pares e ímpares?

Jordão e Outros pares. São pares. Só há pares

Prof: São todos pares…

[escrevendo as conclusões] Portanto, tanto na tabuada do 2 como na do 4 todos os números [resultados] são pares

Impulsivamente o Jordão referiu que também na tabuada do 4 os resultados eram sempre pares. Desta vez foi ele que fez avançar o nosso percurso de observações. Conduzi então a turma para as novas observações levantadas pelo Jordão. Foi então consensual que nas duas tabuadas só existiam números pares. Reformulámos a conclusão, comigo a escrever e a repetir em voz alta o que os alunos tinham concluído.

Quando estávamos a registar estas conclusões, outra aluna que até então não se tinha evidenciado neste diálogo, fez uma intervenção bastante pertinente. Mais uma vez, e embora não o tivesse previsto, deixei que o percurso seguisse segundo a emergência dos assuntos trazidos pelos comentários dos alunos.

Josefina	Eu acho que as tabuadas [referindo-se ainda às tabuadas do 2 e do 4] também são pares, por isso… o número da...
Prof:	Diz Josefina, diz. O que é que estavas a dizer? Mostra lá a tua ideia [no momento em que ouve em voz baixa um comentário pertinente de um dos alunos]
Josefina	Sempre que é número par… [hesitante na formulação do discurso]. O número da tabuada se é par, os números são sempre pares, não quer dizer que quando é número ímpar também não sejam pares…
Prof:	Boa, Josefina! Diz lá alto. (…) Estás a dizer que sempre que a tabuada é de número par, os números [resultados] são pares. Não quer dizer que quando for uma tabuada de número ímpar, o resultado não seja par. [repeti o que a aluna tinha dito] Estavas a dizer que tens reparado que uma tabuada de nº par o resultado vai ser sempre par

O comentário da Josefina foi num tom baixo, quase como se pensasse em voz alta. Pareceu estar envolvida numa reflexão sobre a qual ainda não conseguia exteriorizar o seu pensamento. Solicitei que repetisse num tom mais alto, mostrando assim o meu interesse pelo seu raciocínio. Deste modo, legitimei a continuação do assunto seguindo agora um novo caminho. A Josefina hesitou no seu discurso, reformulando a sua intervenção numa tentativa clara de produzir um discurso mais sofisticado e esclarecedor. Elogiando a sua intervenção, repeti em voz alta o que a aluna disse.

Seguidamente, a turma envolveu-se numa nova reflexão sobre a regularidade dos números pares nas tabuadas.

Dionísio	Os pares,… [quando se multiplicam] são [dão sempre números] todos pares

Prof:	Quer dizer que sempre que há um número que multiplica por um número par vai dar sempre par. É isso?
Joaquina	Depende da multiplicação. Por exemplo, se for na do 5…
Dionísio	Não. A do 5 vai dar…
Joaquina	Se for a tabuada do 5, alguns …
Prof:	Já investigaste a tabuada do 5?... [No momento em que o aluno refere que na tabuada do 5… esta não estava a ser observada na altura] Então tens que investigar [primeiro] tens que a relacionar com outras… …não é só fazer as tabuadas, devem fazer estas pesquisas [regularidades], estas relações [entre as tabuadas]. [escrevi conclusão ditando em voz alta o que estava a escrever, esperando e aproveitando as sugestões dos alunos para esta escrita - coletiva] - Sempre que há uma tabuada de nº par, os resultados são todos pares.

Neste fragmento do diálogo os alunos testavam a validade da hipótese sugerida pela Josefina e procuravam uma generalização. A certa altura o diálogo e as conjeturas direcionavam-se para outras tabuadas que não estavam a ser observadas e resolvi trazer o diálogo novamente para as tabuadas que estávamos a observar. Em primeiro lugar porque ainda faltava falar muito sobre as tabuadas que estavam a ser apresentadas por outro lado, queria que os alunos se fossem habituando primeiro a investigar os assuntos, registando e apresentando aos colegas as suas investigações. Para generalizar teriam que testar primeiro as suas hipóteses. Deste modo transmiti ao grupo o que eu desejava e como, que fosse investigado nos momentos de trabalho autónomo. Aproveitei uma conjetura que emergiu do discurso coletivo, para uma nova proposta de investigação. Mais uma vez fui registando a conclusão possível, repetindo em voz alta o que escrevia e integrando o que os alunos iam completando.

Orientei então a discussão para o registo que as alunas tinham das suas investigações.

(…)

Horácio	[estão a indicar] quais são os números que aparecem nas duas tabuadas.
Júdite	Sim. 4; 8; 12;…; 36; 40
Horácio	É sempre número sim número não.
Joaquina	Nos da tabuada do 2...
Prof:	Diz lá Joaquina, faz lá esse reparo que é muito importante. É sempre na do 2 que aparece um número que é igual a um da tabuada do 4, e outro não.

Mais uma vez a Júdite mostrou alguma dificuldade em explicar o que tinha registado. Embora mostre conhecimento sobre o que quer apresentar, tem dificuldade em exprimir-se numa linguagem matemática clara. Desta vez não foi necessário eu interceder para que o discurso fosse clarificado. O Horácio por sua iniciativa, ajudou as colegas a clarificarem o seu discurso. Parece evidente o clima de confiança que existe, pois os alunos mostram à-vontade em colocar as suas ideias mesmo quando sentem dificuldade em produzir o discurso. Por outro lado, nota-se por parte dos colegas que estão a ouvir a exposição dos trabalhos, um esforço por entenderem o que as colegas querem transmitir e é de uma forma natural que ajudam a clarificar as ideias expostas, estejam de acordo ou em desacordo com elas.

Novas observações são feitas pelo Horácio que repara que os números que são comuns às duas tabuadas, surgem na tabuada do 2 segundo o padrão - um sim, um não.

Observa-se também que os alunos vão intervindo espontaneamente de modo a completarem as ideias dos colegas. Mostram estarem a seguir o raciocínio uns dos outros, e vão contribuindo para a construção dos significados. Há uma constante partilha destes significados que vão sendo alicerçados pelas diferentes contribuições dos alunos.

Nesta parte do diálogo, após ter orientado as alunas Júdite e Marta para a apresentação dos seus registos, só voltei a intervir para evidenciar a observação da Joaquina. Nesse momento aproveito para tentar clarificar melhor o raciocínio que está subjacente nas intervenções dos dois últimos alunos.

(…)

Prof:	As vossas conclusões… estão aqui [projetando no quadro]. O que é que vocês tinham concluído?
Marta	Todos os números multiplicados por um número par, existem na tabuada do 4 [lendo as conclusões do registo]
Horácio	Todos os números multiplicados por um número par...???
Prof:	Lembram-se do que é essa conclusão? O Horácio não está a perceber. Vocês estão a perceber o que é que elas querem dizer? Vocês têm que explicar melhor para os colegas perceberem?
Horácio	Ah! Já percebi! Que todos os números [resultantes] da tabuada do 2, [que foram] multiplicados por um número ímpar não aparecem na tabuada do 4
Prof:	Exatamente. Querem ver?!... [segue uma demonstração feita pelo professor baseando-se nos registos dos alunos] - (demonstração feita após um aluno ter verbalizado o que acontecia) O 1 x 2 vai dar 2 e não aparece na tabuada do 4; o 2 x 2 vai dar 4 e já aparece na tabuada do 4...
Dionísio	é sempre de 2 em 2…
Prof:	Por isso faz confusão [o que têm escrito] Deveria estar mais explicado. Deveriam referir-se à tabuada do 2

	Na tabuada do 2, quando há um número par a multiplicar por 2, o resultado também aparece na tabuada do 4. Diz Josefina.
Josefina	É que... não é na do 4… é na do 2… É que a Júdite escreveu uma coisa e a Marta escreveu outra…
Júdite	Eu vou-te explicar… [aponta para as suas conclusões mas demora a iniciar a leitura]
Prof:	[apontando para as conclusões escritas da aluna] …todos os números que estão na tabuada do 4 existem na tabuada do 2
Josefina	É que não é na tabuada do 4 não há o 6, não há o 10,…
Prof:	É isso que ela está a dizer… falta ali dizer que é na tabuada do 2… isto é, o resultado de qualquer número par multiplicado por 2, aparece também na tabuada do 4 No fundo ela está a mostrar que [apontando para os registos das alunas] o 2 X 1 dá 2, não aparece na tabuada do 4; o 2 x 2 dá 4, aparece na tabuada do 4; o 3 x 2 dá 6, não aparece na tabuada do 4; o 4 x 2 dá 8, já aparece na tabuada do 4…

A linguagem imprecisa da Marta fez com que o Horácio solicitasse um esclarecimento. Embora eu tivesse percebido o que a aluna queria dizer, quis também provocar a evolução da linguagem matemática, aproveitando a necessidade que o colega demonstrou de esclarecimento. Contudo o Horácio esforçou-se por entender o que ela queria dizer e acabou por ser ele a corrigir o discurso. Neste caso a Marta perdeu a oportunidade de reformular o seu discurso e acomodou-se à correção do colega. Será que ela seria capaz de avançar mais se lhe fosse dado mais tempo?

Neste excerto do diálogo emerge a necessidade de aprimorar o discurso matemático. Os registos foram escritos com pouca correção. Embora tivessem sido apoiadas por mim para chegarem a algumas conclusões, deixei-as a registar sozinhas. Os esquemas que tinham feito eram percetíveis mas as conclusões escritas não eram muito precisas como se pode observar na figura (?). Na apresentação do trabalho foram surgindo também as suas fragilidades nesta área. A Júdite sabe o que quer transmitir e ainda faz uma tentativa dizendo à Josefina que lhe vai explicar. Contudo hesita e tem dificuldade em fazê-lo. Eu senti que era necessário ajudá-la nessa tarefa, apoiando-me nos seus registos. Também era importante valorizar o trabalho de pesquisa que tinha sido feito.

Prof:	Vocês também falaram de outras conclusões que não estão agora a falar… mas o grupo pode ajudar a ver mais relações…

Margarida Não é sobre os pares. É que também já se falou sobre os múltiplos. Era para perguntar se quando estiveram a fazer esses círculos à volta dos números, não repararam em nada?

Margarida Se vocês virem bem, isso faz um padrão

Vários Pois é…

Prof: Então que padrão é que faz?

Margarida 4; 8; 2; 6; 0; … É assim que eu decoro as tabuadas

Prof: Estás a ver na do 4… [escreve repetindo em voz alta] A tabuada do 4 faz um padrão

Joaquina E a do 2 também

Prof: Então vamos ver a do 4, qual é?... 4…

Vários 8; 2; 6; 0

Júdite [Apontando no registo do trabalho que está a apresentar] Depois está outra vez: 4; 8; 2; 6; 0

Prof: Até podíamos começar pelo 0. Se eu pusesse ali 4x0, dava 0. Ficava 0; 4; 8; 2; 6; 0; 4; 8; 2; … Pronto
Na do 2?

Vários 2; 4; 6; 8; 0; 2; 4; 6; 8; 0;…

A Margarida desviou o discurso para a observação do padrão numérico da tabuada do 4. Vários alunos aderiram de imediato à nova observação. A Joaquina verifica que a tabuada do 2 também faz um padrão. A Júdite, que não tinha feito esta observação na sua investigação, entendeu o que a colega estava a dizer e apontou para o seu registo verbalizando alto o padrão que estava a ser observado. De um modo geral, os alunos aderiram bem a esta nova observação.

(…)

Estava ainda interessada em que observassem a relação de dobros entre estas duas tabuadas. Como não surgiram outros assuntos por parte dos alunos, levantei a questão.

Prof: Mais alguma questão? Vejam lá bem o que é que acontece [aos resultados] da tabuada do 2 para a do 4?

Júdite Vai ser sempre mais 2… por exemplo, aqui [apontando para os registos] … Na do 4 vai estar sempre mais 2... [aponta para os resultados de uma e de outra tabuada]

Prof: Vai ser sempre mais 2?

Horácio e Vítor [Voz baixa] Vezes 2.

Prof: Diga! [olhando para os alunos que tinham falado]

Horácio e Vítor	Vezes 2.
Prof:	E o que é isso de «vezes dois»?
Horácio e Vítor	é o dobro
Prof:	[Ajuda a observar nas tabuadas que estão no quadro (registo dos alunos), apontando enquanto questiona] Não é?! Vezes dois é o dobro! E o 4 em relação ao 2 o que é?
Vários	É o dobro
Prof:	É o dobro! E o resultado da tabuada do 4 em relação à tabuada do 2, o que é?
Vários	É o dobro!
Prof:	São os dobros! «1x2 é 2» «1x4 é o dobro de 2… é 4» Era por isso que eu estava a dizer Horácio e Dionísio. Vocês não chegaram a uma conclusão semelhante com a [tabuada] do 2 e do 8?
Horácio e Dionísio	Sim. Mas na nossa era o quádruplo
Prof:	Reparem lá! 2x2 é 4. O dobro de 4 é 8...
Júdite	Ah, pois é!??...
Prof:	2x4 é 8… podemos registar essa [conclusão] também ou não?
Vários	Sim.
Prof:	Como é que eu escrevo?
Vários	A tabuada do 2… a do 4… é sempre duas vezes
Prof:	[escrevendo o que diz em voz alta] A tabuada do 4 é sempre… vamos utilizar o dobro que é assim uma linguagem matemática mais precisa… o dobro da do 2. Ou então eu também posso dizer que… a tabuada do 2 é sempre… é o quê em relação à do 4?...

Desta vez não foi difícil chegarem à ideia que eu pretendia. Conhecia os trabalhos do Dionísio e do Horácio (que eram os alunos seguidamente iriam apresentar as suas investigações) e sabia que eles tinham feito uma observação semelhante em relação às tabuadas do 2 e do 8. Por esse motivo apelo aos seus conhecimentos sobre o assunto. Aproveito a fluência das ideias e o consenso nas conclusões e vou promovendo nos alunos um discurso mais sofisticado. Simultaneamente tentei que fossem articulando conhecimentos anteriores.

Na minha tentativa de fazer emergir a ideia de metade como inverso de dobro surgiu alguma confusão.

Vários	é menos 2… é vezes…
Prof:	É vezes???

Josefina	É a dividir…
Prof:	Então???... Se é a dividir...
Josefina	É a dividir por 2!
Prof:	Então? Se numa [situação] eu digo o dobro na outra [situação] digo…
Alunos	[vários comentários sem fundamento]
Prof:	Parem lá! Escutem! Se na tabuada do 4 os resultados são sempre o dobro da do 2, na do 2 vão ser o quê em relação à do 4?
Horácio	Metade.
Prof:	Metade! Dividir por 2, Josefina… é metade. Não estou a dizer que disseste mal… só estou a dizer que em linguagem matemática fica melhor dizer, metade. [continuando a escrever] Ou seja, a do dois é a metade da do 4. Mais alguma questão aqui com a tabuada do 2 e do 4? Não? Eu gostava que passássemos para cartaz. Para começarmos a ter um registo com estas conclusões a que chegamos. E gostava de ir fazendo com as várias tabuadas. Vou pedir a quem apresenta os trabalhos que me ajude a fazer esse cartaz, neste caso à Júdite e à Marta. Obrigada, vem a seguir...

Curiosamente seguem o mesmo tipo de raciocínio que tinham feito para chegarem ao dobro.

Nitidamente grande parte dos alunos não estavam focados na minha perspetiva. Respondem sem nenhuma reflexão numa tentativa de "adivinhar" fazendo comentários sem fundamento.

Nesse momento parei os comentários e repeti o que já tínhamos registado como conclusão, deixando em aberto a última parte *" ...os resultados da tabuada do 2 vão ser o quê em relação à do 4?"*

O Horácio deu a resposta. Sublinhei que a Josefina não tinha errado ao dizer "dividir por 2" só que eu procurava um termo matematicamente mais elegante e sabia que eles o conheciam.

Terminámos esta parte da sessão com o meu apelo para que os alunos se envolvessem na elaboração de um registo coletivo sobre as conclusões a que tínhamos chegado. Esse registo ficaria na parede da sala.

2ª parte

Na mesma sessão de trabalho seguiram-se dois alunos cujas investigações incidiam nas regularidades e relações entre as tabuadas do 2 e do 8. Estes alunos, o Dionísio e o Horácio, eram alunos com maior sucesso em matemática do que as alunas anteriores. Começaram por apresentar os seus registos que mais uma vez estavam a ser projetados no quadro interativo.

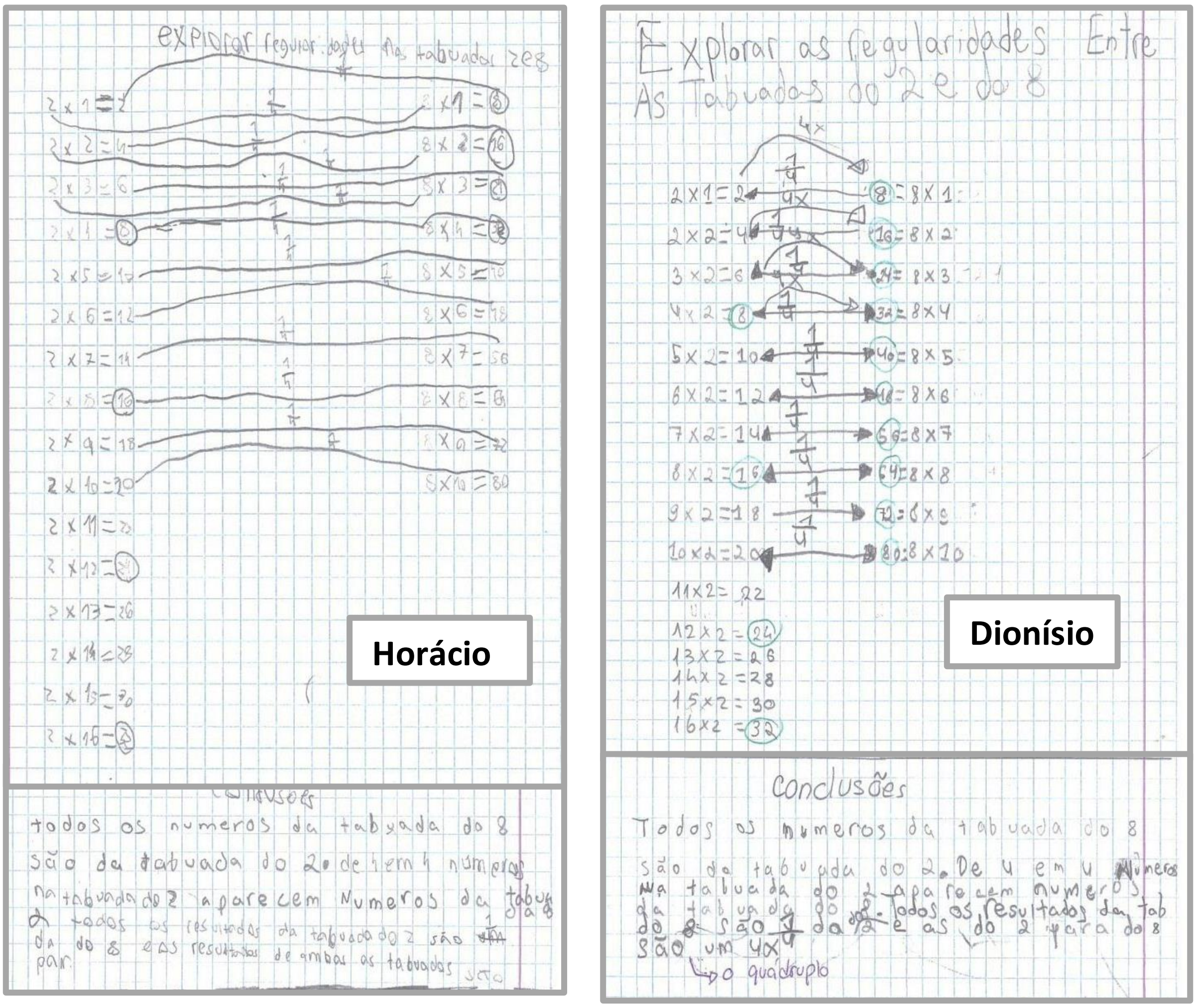


Fig. 2 Registo da investigação sobre as regularidades da tabuada do 2 e do 8 feito pelos alunos Dionísio e Horácio

Dionísio	Reparámos que da tabuada do 2 para a do 8 ia ser sempre um quarto
Horácio	Ao contrário, da do 8 para a do 2 é que ia ser sempre um quarto
Dionísio	É sempre um quarto da tabuada do 8 para a do 2… Do 80 para o 20, é um quarto; do 72 para o 18, é um quarto e depois é sempre assim [Vai explicando, apontando para o seu registo que está projetado no quadro]

Prof [escrevendo as conclusões] Portanto da tabuada do 8 para a do 2,… como é que nós dizemos? É sempre um quarto? Podíamos dizer de uma maneira mais correta
… é uma relação de um quarto, não é? Há uma relação de um quarto

Neste trabalho, os registos estavam bem organizados e os alunos estavam seguros do que tinham investigado. O Dionísio iniciou o seu discurso da relação de $\frac{1}{4}$ entre as tabuadas direcionando essa relação de forma inversa ao que constava no seu registo. O Horácio corrigi-o de imediato afirmando que era ao contrário, "da tabuada do 8 para a do 2 é que é $\frac{1}{4}$". Percebe-se no discurso, que estes dois alunos já procuram uma linguagem matematicamente mais sofisticada. Não suscitando nenhuma controvérsia e não havendo nenhum pedido de esclarecimento, registei as conclusões tentando melhorar um pouco mais a linguagem.

Horácio Depois, da [tabuada] do 2 para a [tabuada] do oito é o quádruplo

Josefina Porque é que vocês quiseram fazer essas tabuadas?

Horácio Porque não queríamos fazer sempre mais 2… sempre assim. Quisemos fazer de outra maneira

Dionísio Nós queríamos fazer [observar relações] com tabuadas mais difíceis, por exemplo não ser do 2 para o 4; do 3 para o 6. Assim é muito fácil…

Horácio É muito fácil?... é a mesma coisa, só que assim estão mais distantes

Embora neste excerto do diálogo não tenham ocorrido avanços nos significados matemáticos, parece-me de salientar a vontade que estes alunos mostravam em se desafiarem para explorar e investigar novas situações.

(…)

3ª parte

Seguiu-se o trabalho da Margarida e da Josefina que tinham investigado regularidades entre a tabuada do 3 e do 4.

Josefina Nós vimos que… é padrão no algarismo das unidades a tabuada do 4.

Dionísio É padrão no algarismo das unidades?

Prof Faz um padrão… se olharmos para os algarismos das unidades podemos observar um padrão. Que já vimos há bocado no trabalho da Marta e da Júdite, na tabuada do 2 e na do 4. Vocês também falaram disso… na tabuada do dois é 0, 2, 4, 6, 8,

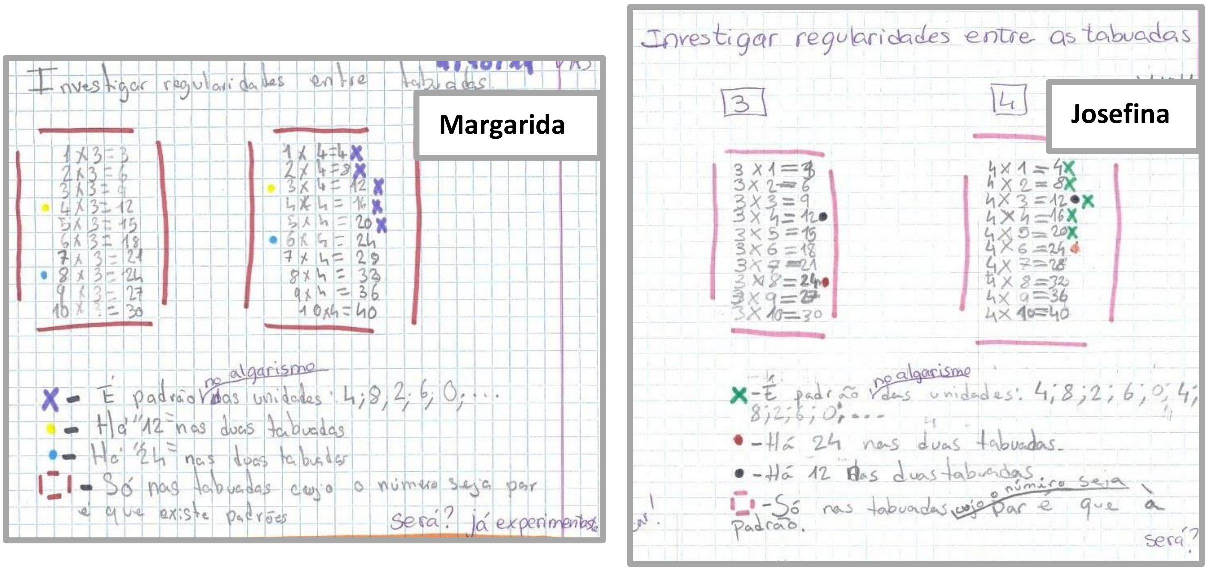


Fig. 3 Registo da investigação sobre as regularidades da tabuada do 3 e do 4 feito pelos alunos Margarida e Josefina

Uma das alunas que estava a apresentar o trabalho, começou por ler as conclusões a que o par tinha chegado durante a investigação. O Dionísio, questionou a colega, talvez por sentir a necessidade de uma explicação mais detalhada sobre a referência ao padrão. Nesse momento intervim para ajudar a clarificar relembrando o que já tinha sido falado em momentos anteriores da mesma sessão.

(…)

Dionísio	Eu tenho outra pergunta para fazer. Era para perguntar se vocês quando estavam a fazer isso repararam nos múltiplos?
Josefina e Margarida	Não.
Prof	O que queres dizer com o reparar nos múltiplos?
Dionísio	Estou a perguntar por múltiplos comuns nas duas tabuadas.
Prof	Quando elas dizem que o 12 aparece na tabuada do 3 em 4x3 e aparece na tabuada do 4 em 3x4, estão ou não a constatar que o 12…
Dionísio	Pois, é múltiplo comum.
Prof	entre…
Dionísio	entre o 3 e o 4.
Josefina	E o 24.
Prof	E o 24, também. Por isso ali diz [lendo um cartaz que está na parede, resultante de um trabalho anterior] «Os múltiplos de um número é o resultado que se obtém da multiplicação de qualquer outro número, por

esse. No outro dia, quando vieram apresentar o trabalho dos múltiplos, alguém disse que os múltiplos eram assim um bocadinho como a tabuada.

Quais são os múltiplos de 3, por exemplo… digam lá alguns múltiplos de 3.

vários 3, 6, 9, 12, 15, 18,…

Prof E quais são os múltiplos de 4, digam lá alguns, não acabam aqui, não é?

vários 4, 8, 12, 16,…

Prof Basta olhar para ali, não é? [apontando para as tabuadas do 3 e do 4 que estavam a ser projetadas no quadro]. O tema dos múltiplos relaciona-se com as tabuadas. O Dionísio tem razão na sua pergunta. Mas vocês repararam, só não estavam a pensar que eram múltiplos. Esses números que vocês dizem que aparecem nas duas tabuadas, são os múltiplos comuns entre o 3 e o 4.

O Dionísio percebeu que aquele assunto estava concluído e orientou o discurso para novas observações e nova análise do trabalho que as colegas estavam a apresentar. Conduziu as observações para os múltiplos comuns entre o 3 e o 4. Pareceu-me oportuno e deixei continuar embora fazendo algumas "pontes" entre o que já tinha sido observado dos resultados comuns e o que queriam agora analisar sobre os múltiplos. O próprio Dionísio completou o meu raciocínio e depois a Josefina acrescentou o número 24 como outro múltiplo comum. Seguiu-se então um momento que serviu de revisão sobre os múltiplos, assunto que também andava a ser investigado e explorado de diferentes maneiras pelos alunos. Fiz notar o cartaz das conclusões a que tínhamos chegado sobre esse assunto, que estava exposto na parede da sala.

(…)

Prof Vou escrever no placard estas questões para que vocês possam escolher as que querem explorar no Tempo de Estudo Autónomo. Por outro lado, vamos começar a escrever um cartaz, com estas conclusões que vão saindo das nossas discussões. Hoje apareceram umas e possivelmente vão surgir ainda mais. Vamos atualizando esse cartaz.

Terminámos!

Estando o tempo a terminar, fizemos um resumo do que ficou por investigar e com a ajuda dos alunos levantámos outras possibilidades de investigações.

Já fora do tempo letivo escrevi as questões para investigação e coloquei-as num placard para os alunos poderem escolher as investigações sobre as quais se queriam debruçar. Por outro lado, iniciei um cartaz grande com as conclusões a que tínhamos chegado nesta sessão mas com a possibilidade de ir completando à medida que outras tabuadas fossem sendo investigadas.

5.2 Investigação sobre o paralelogramo

5 e 6 de março

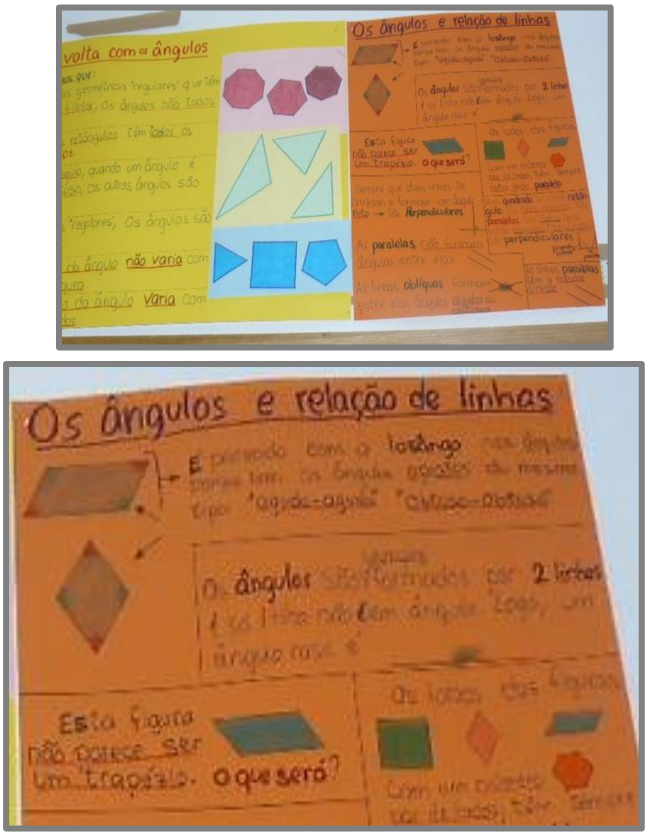


Fig. 4 – Cartazes de sessões que antecederam este trabalho

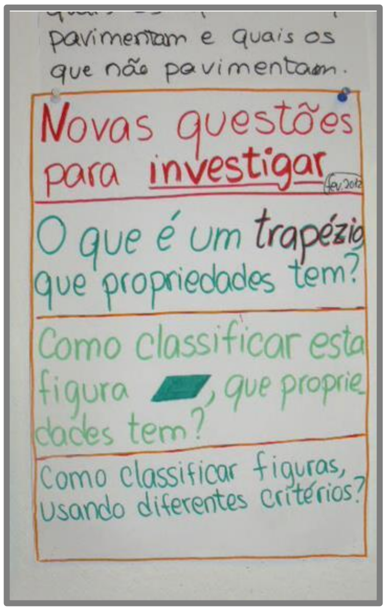


Fig. 5 – As questões de investigação que tinham sido levantadas nas sessões anteriores a este trabalho.

A investigação sobre o paralelogramo surge numa sequência de trabalhos que vínhamos realizando sobre as propriedades e classificação de figuras geométricas planas. Na sala existia uma caixa com uma boa diversidade de figuras planas, as quais os alunos utilizavam para suportar as suas investigações. Alguns alunos também utilizaram o programa *Geogebra* construindo diferentes figuras mas neste caso, eram figuras que tinham quase sempre os lados da mesma dimensão alterando apenas o número de lados. Numa das sessões coletivas, um par de alunos tinha apresentado várias figuras planas agrupadas segundo a igualdade de comprimento dos lados – num grupo estavam as figuras com os lados todos iguais; noutro grupo estavam as figuras que tinham os lados todos diferentes; noutro grupo as que tinham dois lados iguais e os outros diferentes; noutro as que tinham dois pares de lados iguais. Num dos agrupamentos os alunos tinham colocado o paralelogramo obliquângulo, figura que existia na caixa das figuras planas mas a turma não a sabia nomear. Emergiu então uma nova questão de investigação – Que figura é esta? Que propriedades tem? Qual será o seu nome?

Alguns alunos ficaram muito curiosos e tentaram adivinhar o seu nome. Eu não o desvendei mas disse que o nome da figura estava relacionado com uma das suas propriedades. Dois dos alunos (o Gonçalo e a Fátima.), que já andavam a explorar e a investigar figuras planas há algum tempo, envolveram-se de imediato nesta nova investigação – Que figura será esta? Se o nome está relacionado com alguma das suas propriedades, qual será?. Estiveram duas sessões de TEA (aproximadamente 1:30h no total) a trabalhar em redor do paralelogramo e das suas propriedades, terminando o seu trabalho com a execução de um cartaz que serviu de apoio para comunicarem as suas conclusões à turma. Utilizaram essencialmente as barras articuladas para explorar as figuras que iam construindo e explorando e algumas informações que eu fui fornecendo em relação ao nome.

Pegaram em 4 barras articuladas: 2 maiores mas do mesmo tamanho (vermelhas) e outras 2 mais pequenas também de tamanho igual entre si (azuis). Construíram a figura colocando as barras de igual tamanho em posições paralelas e unindo as barras com "atachas". Na folha de pesquisa tinham registado que iniciaram o estudo da figura comparando os ângulos e observaram que a figura só tinha ângulos agudos e obtusos. Depois foram observar os lados da figura e referiram o seguinte: "observámos que a figura tinha linhas oblíquas e também paralelas. Eu tinha colocado uma câmara de filmar perto deles para poder mais tarde ter acesso ao desenvolvimento do seu trabalho. Naquele momento eu não estava a apoiá-los, estava a trabalhar com outros alunos e noutros trabalhos (o TEA é um momento de grande diferenciação e diversidade de trabalhos, como já referi) O Gonçalo e a Fátima, começaram a descrever para a câmara como tinham feito, e disseram:

Gonçalo …nós concluímos que a figura tem dois ângulos obtusos e dois ângulos agudos; todas as linhas são oblíquas e paralelas.

[Depois numa tentativa de encontrar o nome da figura explicaram:]

Estivemos a discutir qual seria [a propriedade] mais importante para o nome da figura e pensámos que os ângulos não devem ser tão importantes então devem ser as "linhas" [lados]. Então serão as oblíquas ou as paralelas e pensámos – devem ser as paralelas. Então começámos a ver nomes -

	paralelolongo? – não; paralelosango? – não; paralelotango? – não; paralelograma? – não.
Fátima	Paralelograma?
Gonçalo	Sim. Depois descobrimos que esta figura é um paralelogramo. Agora estivemos a ver que outras figuras também podem ser esta… podem ser paralelogramos.

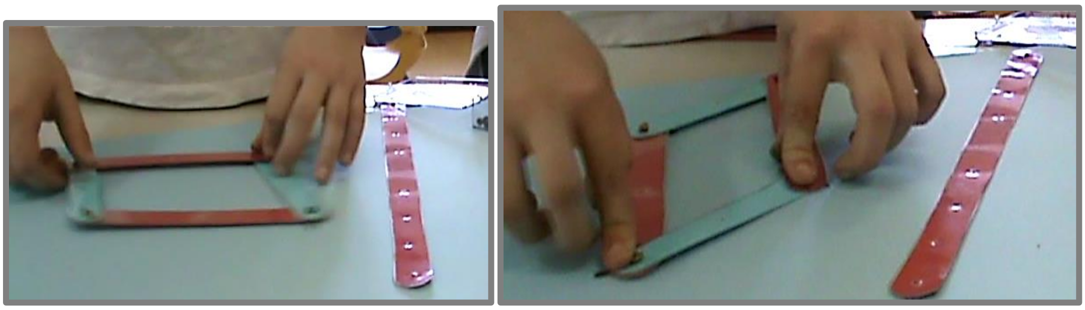


Fig. 6 – Construção do paralelogramo obliquângulo.

Na verdade, havia outros alunos que também andavam a tentar descobrir o nome da figura. Alguns tinham perguntado em casa, outros tinham ido pesquisar à internet e de vez em quando, questionavam-me se o nome que tinham obtido era o correto. Creio que este par terá ouvido os colegas e talvez até conversado sobre o assunto. Embora eu não tivesse dado uma resposta exata, sempre afirmava que o nome estava relacionado com alguma propriedade da figura. Aos que me iam intercetando, eu perguntava-lhes se eles achavam que o nome obtido estaria de acordo com alguma das propriedades da figura. Mais do que a designação, eu estava interessada em que eles se envolvessem no estudo e na pesquisa das suas propriedades. Eu queria que eles agissem: construíssem, desconstruíssem, alterassem ângulos, mexessem; refletissem sobre semelhanças e diferenças, padrões, regularidades; que fossem analisando e discutindo, incluindo e excluindo dos grupos de figuras que já conheciam. No fundo queria que experimentassem, refletissem e vivenciassem sobre o que é classificar figuras.

> [durante algum tempo, este par de alunos estiveram a construir figuras (quadriláteros) com as barras articuladas. Foram alternando os comprimentos dos lados e antes de colocarem as figuras na cartolina, mexiam um pouco fazendo variar os ângulos e observando o que acontecia. Nesta altura, eu já tinha dado sinais de que o nome «*paralelogramo*» estaria adequado.]

Gonçalo	Vais fazer um quadrado?
Fátima	Sim, o quadrado também é …
Gonçalo	…
Fátima	Se o losango dá [é paralelogramo], o quadrado também tem que dar…

Gonçalo [falando para a câmara] Nós agora pensámos assim, temos o paralelogramo [obliquângulo] temos o retângulo e temos um losango. Então se o losango dá o quadrado também dá.

Fátima Não é o losango é o retângulo…

Gonçalo Então, assumimos que o quadrado também dá [também é paralelogramo]

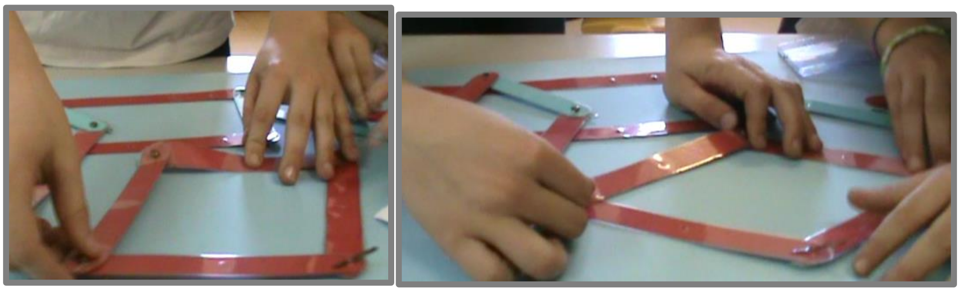


Fig. 7 – Os alunos mexem e experimentam as alterações do quadrado para losango não quadrado, observando e tentando verificar regularidades entre as duas figuras e o paralelogramo obliquângulo.

Gonçalo Pois é, mas isto fica um losango, que é o tal…

Gonçalo Não achas que aquela figura também dá? Aquela que parece um sapato. [referia-se a um trapézio retângulo não paralelogramo]

Fátima Experimenta! Sinceramente um «sapato» é assim… [experimentando mexer o retângulo para ver se consegue fazer um trapézio retângulo não paralelogramo] É difícil fazer o «sapato»!

Gonçalo Tenta lá fazer o «sapato».

Nesta fase, os alunos utilizam uma linguagem pouco formal «o sapato», misturada com alguns termos mais formais «o losango, retângulo, quadrado».

Formulam hipóteses «será que o "sapato" também dá?» e testam experimentalmente as suas hipóteses. Verificam algumas conclusões, embora ainda utilizem apenas a observação visual comparando semelhanças com outras figuras e com a figura alvo.

[Os alunos estiveram durante algum tempo a preparar o cartaz que iria servir de suporte para apresentar aos colegas as suas conclusões. Em simultâneo iam discutindo as ideias sobre as figuras que estavam a colar e a pertinência de outras entrarem nesta categoria.]

Gonçalo Esse é o retângulo.

Fátima Sim.

Fátima Acho que o quadrado não dá. Depois fica em losango.

Gonçalo Então e depois? O losango fica em…

Fátima Sim mas o losango é este losango que não é quadrado.

Gonçalo Vá cola lá.

Fátima Não, este aqui não é!

Gonçalo Mas porquê?

Fátima Porque não é!

Gonçalo Mas porquê? Explica lá.

Fátima Olha lá, achas que este losango é a mesma coisa que este?

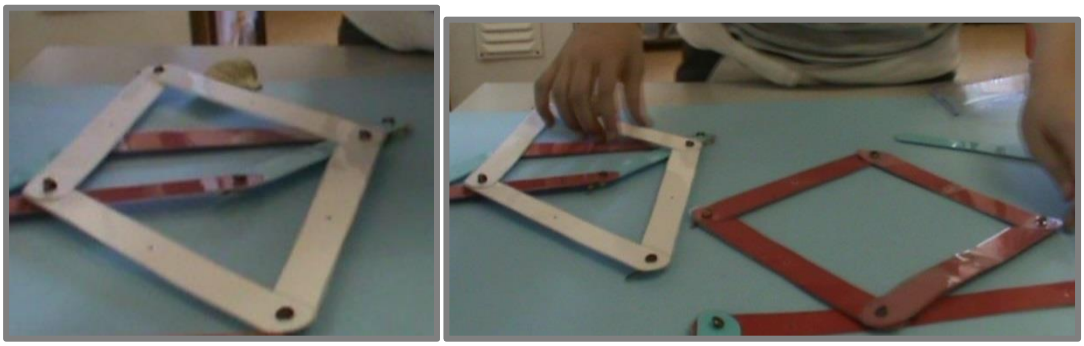


Fig. 8 – Comparando o losango com o quadrado

A Fátima recua na decisão anteriormente tomada sobre a inclusão do quadrado neste grupo de figuras. O Gonçalo não aceita a proposta da colega sem uma explicação. Para alterar a inclusão ou não do losango na categoria de paralelogramo ele exige que a colega explique a sua ideia. Por outro lado a Fátima não tem nenhum argumento que possa convencer o colega. Está a agir por uma intuição de observação. Nota-se que o par ainda não está muito seguro de quais são as propriedades que consideram pertencer ao paralelogramo.

Fátima Ah, Ah! [Lendo no dicionário] Losango é um quadrilátero plano formado por quatro lados iguais. Também é um paralelogramo.

Gonçalo Nós agora vimos que: este retângulo,… se dobrarmos [quis dizer se puxasse os vértices alterando os ângulo] fica semelhante [ao outro paralelogramo obliquângulo que já tinham feito] só que com os lados um pouco maiores. Da mesma maneira com o losango, se «dobrarmos» [querem dizer, se alterarmos os ângulos] também fica semelhante [à figura inicial].

Fátima Sim, mas se fizermos o outro um bocado maior fica igual.

Fig. 9 - Sobrepõem o losango sobre o paralelogramo para Compará-los.

Como não tinha argumentos para convencer o colega, a Fátima decide recorrer ao dicionário para esclarecer o que era um losango. Ao ler a definição de losango, desistiu da sua conjetura e aceitou a inclusão do losango na categoria de paralelogramo. Esta discussão levou a uma nova fase de experimentação. À semelhança do que já tinha sido apresentado por outro par numa sessão coletiva anterior, a propósito da transformação do quadrado em losango não quadrado, a Fátima e o Gonçalo experimentaram modificar os ângulos do retângulo. Observaram que este se torna no paralelogramo obliquângulo - a figura que inicialmente pesquisavam. Fizeram ainda a comparação com o que aconteceu no caso do quadrado e do losango não quadrado. Parece evidente a procura de semelhanças, de regularidades entre as propriedades destas quatro figuras.

Fátima	Vou tentar fazer a figura «sapato».
Gonçalo	É tão grande. Agora fica mais ou menos assim [vai movendo os vértices e alterando os ângulos da figura]. Fica um trapézio! [Creio que se referem ao trapézio isósceles não paralelogramo]
Fátima	Ah! [Exclama admirada]

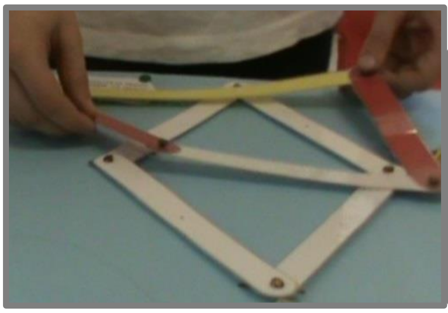
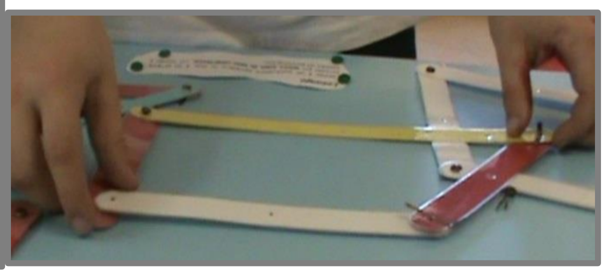



Fig. 10 – Os alunos tentam construir o trapézio retângulo não paralelogramo mas constroem o trapézio isósceles não paralelogramo.

Têm alguma dificuldade em executar a figura que pretendem – o trapézio retângulo não paralelogramo – devido ao material. Esta figura é mais exigente nas proporções das medidas dos lados e como as barras têm um tamanho definido, os alunos têm dificuldade em prever quais as barras que devem ser usadas. Contudo, mostram um grande interesse em investigar se esta figura pode ou não ser incluída na categoria dos paralelogramos. Necessitam de experimentar, de construí-la e compará-la com as outras que já estão incluídas.

Fátima Agora vamos ver os ângulos. Vou buscar o detetor de ângulos retos[7].

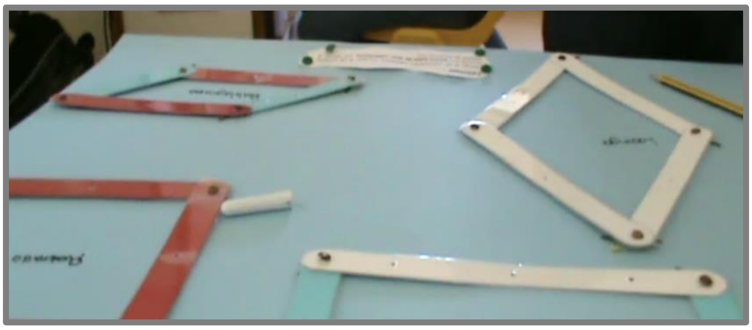


Fig. 11– Fase da construção do cartaz.

Fátima Aqui é agudo (Fig. 12),... aqui é obtuso (Fig. 13)…

Gonçalo Ó Fátima nós sabemos isso.

Fátima Está bem, mas eu quero ver.

Fig. 12 – Medição de um ângulo agudo.

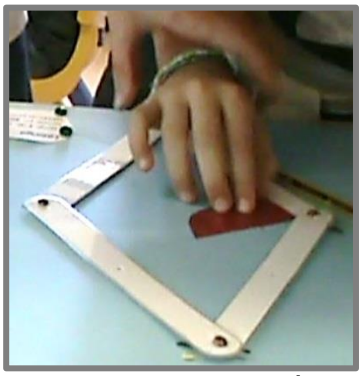


Fig. 13 - Medição de um ângulo obtuso

Embora o Gonçalo não sinta necessidade de observar os ângulos das figuras, pois já se tinham referido a eles no início do trabalho, a Fátima quer fazer essa observação. Mais uma vez, a aluna parece estar à procura de padrões para poder descrever as propriedades que são inerentes ao paralelogramo.

[7] O detetor de ângulos retos foi um instrumento que criei para que os alunos pudessem comparar o ângulo que estavam a observar com um ângulo reto. Desta maneira, mesmo antes de saber medir ângulos, poderiam verificar se o ângulo observado era obtuso, reto ou agudo. O instrumento é feito de plástico rígido e transparente.

Fátima	Vamos experimentar com o triângulo. Ah, não dá. Só dão figuras que tenham 4 lados. Que mais figuras é que têm quatro lados?
Gonçalo	Sim, mas isto não é para fazer classificação de figuras.
Fátima	Está bem, mas temos que pensar em mais figuras que tenham 4 lados.
Gonçalo	O trapézio. O trapézio tem 4 lados. Vamos fazer um trapézio. [trapézio isósceles não paralelogramo]
Fátima	Olha fazes com estas aqui,… e depois é só pores mais uma aqui.
Gonçalo	Afinal não dá por causa deste lado pequenino.
Fátima	Pois, só dá a figura «sapato»

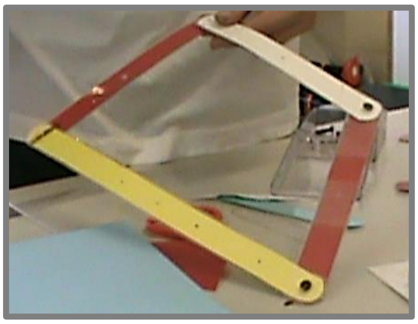


Fig. 14 – Articulando o trapézio isósceles não paralelogramo.

A Fátima caminhou para uma atitude de generalização. Queria esgotar todas as hipóteses de figuras que possam estar incluídas neste grupo dos paralelogramos. Parece que embora ainda pouco conscientes, os alunos foram comprovando propriedades destas figuras. Excluíram os triângulos, porque não têm quatro lados – logo estão a evidenciar que para incluir figuras no grupo dos paralelogramos, estas têm que ter quatro lados. O Gonçalo não vê neste trabalho uma classificação de figuras, embora toda a sua atividade se tenha centrado em incluir ou excluir figuras no grupo dos paralelogramos.

Por fim o Gonçalo aceita o convite da colega em procurarem outros quadriláteros diferentes para verificarem quais os que entrariam neste grupo.

Mais uma vez é evidente que usam os nomes das figuras não como pertencentes a grupos mas como se de nomes próprios se tratassem. Tal como no caso dos losangos também se referem ao trapézio como sendo nome exclusivo do trapézio isósceles não paralelogramo. Mostraram ainda alguma imprecisão na construção destas figuras. Não se apercebem da diferença de inclinação das barras - usando as mesmas barras, umas vezes julgam ver o trapézio retângulo não paralelogramo, outras vezes conseguem percecionar o trapézio isósceles não paralelogramo. Mais uma vez, avançaram no trabalho pondo de lado os trapézios não paralelogramos.

Gonçalo Olha vou pôr aqui aquelas coisas dos ângulos [marcar os ângulos nas figuras já feitas]

Fátima Vá, temos que escrever as conclusões.

[Gonçalo e Fátima continuaram a preparar o cartaz marcando na figura os ângulos e posteriormente o Gonçalo começou a marcar os lados, evidenciando a posição relativa uns com os outros.]

Gonçalo Aaah! Pois é… Repara – paralelas, paralelas; paralelas, paralelas; paralelas, paralelas!

Fátima Huuummm! Mas espera aí, então usa outras cores.

Fig. 15 – Marcação das linhas paralelas do losango não quadrado.

Começam a querer terminar o cartaz e empenham-se em evidenciar os aspetos que lhes parecem mais importantes. O Gonçalo resolveu marcar os ângulos das figuras. Repare-se que quando a Fátima falou na medição dos ângulos, ele não achava necessário fazer esse trabalho e até contestou a ideia da colega. Contudo, nesta fase do trabalho, mostra ter aceitado e respeitado a opinião da colega.

A Fátima mostrou a preocupação de registar o que já tinham concluído. Não se percebe se essa necessidade surge para não se esquecerem das conclusões quando fossem apresentar ao grupo ou se seria para "arrumar" as próprias ideias. Porém, era já uma cultura do grupo, ter um registo do que se estava a investigar e escrever conclusões sobre o trabalho que se estava a fazer.

Entretanto o Gonçalo ainda parece querer explorar outra propriedade – a posição relativa dos lados. Enquanto explora esta propriedade, faz uma observação que o entusiasma muito – em todas as figuras que têm no cartaz, os lados opostos são paralelos. Não sabe expressar esta observação com muito rigor mas é notório o seu entusiasmo ao constatar esta regularidade. A Fátima adere rapidamente à ideia do colega e sugere uma marcação ainda mais evidente desta regularidade, usando diferentes cores.

Gonçalo Agora vou pintar as oblíquas de vermelho.

Fátima As azuis com as azuis e as verdes com as verdes são paralelas e as vermelhas são as oblíquas. Assim já não se confunde.

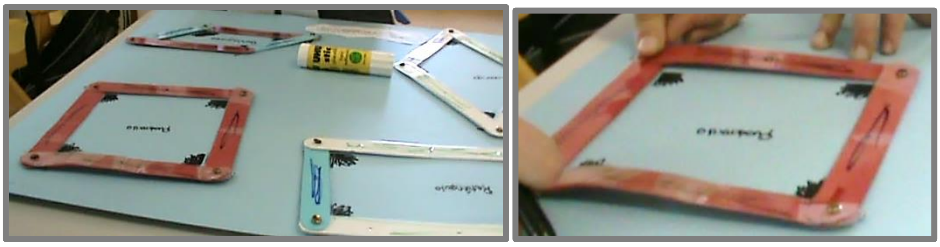


Fig. 16 – Fase da construção do cartaz em que já estão marcados os ângulos e os lados paralelos das figuras.

Fátima Não, não!... As vermelhas são perpendiculares, não são oblíquas!

Gonçalo Não, eu estou a marcar… [parou e observa as suas marcações] Ah, pois é! Então as vermelhas ficam as perpendiculares e a roxo são as oblíquas.

Houve uma preocupação na forma como o cartaz poderia ser mais facilmente entendido pelos colegas. Usaram cores diferentes e colocaram uma legenda para que se percebesse o significado das cores.

Nota-se que os próprios alunos nas suas discussões vão aprimorando o discurso e aumentando o uso de termos mais formais. Embora a marcação da posição relativa dos lados seja iniciativa do Gonçalo, a Fátima apropria-se também dessa investigação. Esteve atenta e emendou o colega quando este trocou os termos - perpendiculares por oblíquas.

Fátima [Explicando o que estavam a fazer, a uma colega que se aproximou] Esta figura (Fig. 17), pode ser esta (Fig. 18), esta (Fig. 19) ou esta (Fig. 20), percebeste Júdite?

Fig. 17 - Losango não quadrado

Fig. 18 – Retângulo não quadrado

Fig. 19 - Quadrado

Fig. 20 – Paralelogramo obliquângulo

Gonçalo [Enquanto escrevia no registo das conclusões] Depois de explorarmos,… descobrimos que o losango, o quadrado e o retângulo também são paralelogramos.

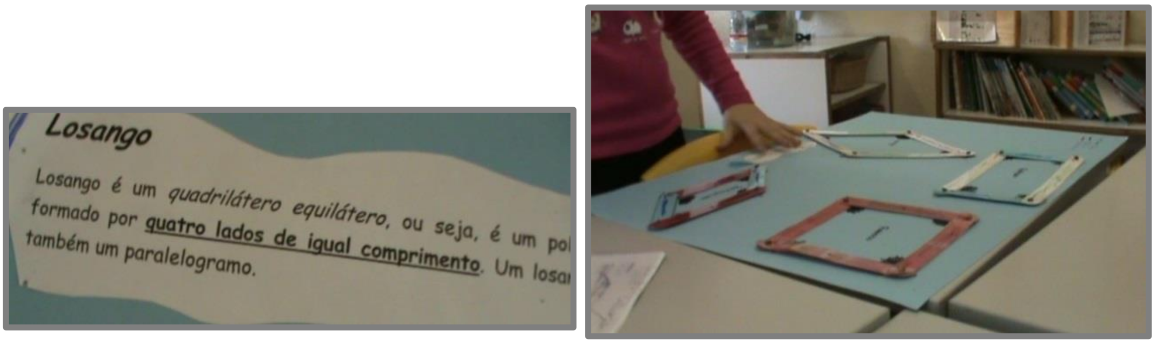


Fig. 21 – Aspetos do cartaz no final da primeira sessão de trabalho.

[antes de finalizar a sessão de trabalho o Gonçalo pega na câmara e filmando o cartaz vai resumindo algumas das ideias que estão registadas]

Fim da sessão de trabalho do dia 5 de março.

No início da segunda sessão em trabalho autónomo (dia 6 de março), a Fátima e o Gonçalo começaram por registar nas suas folhas, as conclusões a que já tinham chegado.

Fig. 22 – A folha de registo das conclusões do Gonçalo

Fátima [Parou de escrever e falando para a câmara diz:] Agora estava aqui a pensar: o quadrado tem quatro lados, o retângulo tem quatro lados, o losango tem quatro lados e o paralelogramo também tem quatro lados

[Os dois colegas retomam a construção de figuras. O Gonçalo tenta fazer um trapézio isósceles não paralelogramo e a Fátima vai experimentando outras figuras.]

Fátima	Agora vamos experimentar com figuras que não tenham quatro lados. Por exemplo, com este triângulo,… não dá.

Fig. 23 – Triângulo feito pela Fátima

Gonçalo	Pois, o triângulo só tem três lados.
Fátima	Agora vamos experimentar com figuras com mais de quatro lados.
Gonçalo	Com o hexágono, será que dá? Eu acho que dá com o octógono porque é o dobro…[refere-se ao número de lados comparativamente com o número de lados dos quadriláteros que tinham no cartaz.]
Fátima	O octógono, também dá!

Fig. 24 – Octógono construído pelo Gonçalo

[Terminaram o cartaz e passaram para outros trabalhos.]

Contrariando o que parecia já estar assumido na sessão anterior, os alunos querem experimentar figuras que não sejam quadriláteros.

Este trabalho foi apresentado à turma e discutido em sessão coletiva, no dia 16 de março - na semana seguinte.

5.3 Comunicação da investigação sobre o paralelogramo

Já há algum tempo que vínhamos a explorar as figuras geométricas planas, as suas propriedades, a que grupos pertenciam e que classificação teriam. Esta sessão teve lugar em 16 de março e uma duração de 60m. Veio no seguimento de uma investigação feita por um par de alunos em TEA sobre os paralelogramos cuja investigação vinha na sequência de outra sessão coletiva na qual tinha emergido a necessidade de saber que figura seria "o paralelogramo obliquângulo". Esta questão surgiu a partir da apresentação de uma investigação feita por outro par de alunos em que tinham apresentado várias figuras planas agrupadas segundo a igualdade de comprimento dos lados. Nesse trabalho tinham agrupado as figuras em quatro grupos: com os lados todos iguais; com os lados todos diferentes; com dois lados iguais e os outros diferentes; com dois pares de lados iguais, onde incluíram o paralelogramo obliquângulo.

Fig. 25 – Cartaz da classificação de figuras quanto aos lados feito numa investigação que antecedeu a investigação sobre o paralelogramo

Entre outros meios, os alunos utilizaram uma caixa das figuras planas que existia na sala e onde se encontrava esta figura mas que a turma não a sabia nomear.

A sessão teve uma duração de aproximadamente 90min.

Gonçalo e Fátima	…Primeiro estivemos a ver os ângulos desta figura (…). Depois reparámos que os lados eram todos paralelos. Soubemos pela Lena que o nome estava relacionado com os lados e vimos que na definição do losango dizia que este também era um paralelogramo (…) então concluímos que esta figura [o paralelogramo obliquângulo] era um paralelogramo

Durante a investigação a Fátima e o Gonçalo nem sempre pareceram conscientes em relação à importância do paralelismo, como um critério para a inclusão neste grupo de figuras. Já quase no final, o Gonçalo constata admirado que todos os lados opostos das figuras que tinham representado, são paralelos. Pareceu ver nessa observação, a grande descoberta. Iniciou a apresentação aos colegas, evidenciando esta propriedade.

(…)

Belmira	Vocês disseram que os lados são todos paralelos mas aqueles lados que fazem um ângulo obtuso não são paralelos
Horácio	Eles estão a falar dos que não são adjacentes.
Jordão	As linhas paralelas não formam ângulos entre elas, por isso…
Gonçalo	Depois lembrámo-nos do quadrado. Como o losango também é paralelogramo, o quadrado é … também dá um paralelogramo.

Na comunicação ao grupo, os alunos mostram um cuidado maior na utilização de termos mais convencionais. Esta terminologia matematicamente mais convencional surge tanto da parte de quem está a apresentar, como da parte dos colegas que estão a ouvir a apresentação. É ainda de destacar a transferência de conhecimento sobre as linhas paralelas que o Jordão utiliza, para justificar que a afirmação dos colegas sobre o paralelismo dos lados se refere aos lados opostos.

Ao longo do tempo em que fui trabalhando com este grupo, sempre me preocupei em estabelecer "pontes" entre a utilização de termos menos convencionais frequentemente utilizados pelos alunos e uma utilização de termos convencionais próprios da Matemática. Aos poucos, foi-se estabelecendo na turma uma cultura de utilização destes vocábulos. Porém, nunca foi impeditivo para os alunos, a utilização de termos menos convencionais para exporem as suas ideias. Para além da progressiva utilização de uma linguagem mais convencional, alguns alunos (como é exemplo o Jordão), também já foram capazes de utilizar argumentos matematicamente sofisticados para justificarem as suas ideias - *"As linhas paralelas não formam ângulos entre elas, por isso…"*.

(…)

Fátima	Depois fomos ver o retângulo. A certa altura começámos a pensar que as figuras que têm quatro lados davam melhor.
Horácio	Eu acho que o retângulo não é um paralelogramo porque tem os ângulos retos.
Jordão	Sim!
	(…)
Gonçalo	Se tu alterares os ângulos ao retângulo, ele fica como o paralelogramo [obliquângulo]
Jordão	Está bem, mas para ser retângulo tem que ter sempre os ângulos retos.

Sem nenhuma interferência minha, os alunos foram se intercetando e refletindo em conjunto sobre as propriedades das figuras que estavam a ser discutidas. No discurso que proferiam utilizavam os seus conhecimentos para argumentarem e justificarem as suas conjeturas. Nos diálogos que iam mantendo, notou-se o respeito que tinham pelas opiniões uns dos outros e constatou-se que a crítica que emergia focalizava-se nas ideias matemáticas.

Os alunos que estavam a apresentar o trabalho esforçaram-se para que as suas ideias fossem entendidas pelos colegas enquanto os outros tentavam compreender o que estes queriam transmitir não o fazendo no entanto de modo passivo.

Nesta fase, o Gonçalo ainda mostrou alguma incoerência nos argumentos, deixando de considerar as figuras como estáveis. Quando argumentava que o retângulo se podia transformar alterando os ângulos, não foi aprovado pelos colegas que contestaram e contra-argumentaram.

Nestas interações entre os alunos, consegui perceber quais os conceitos que os alunos já se tinham apropriado e quais os conceitos em que ainda persistiam algumas dúvidas ou imprecisões. Deste modo, no papel de professor tive a possibilidade de promover na turma uma reflexão sobre o assunto.

Prof	Mas o que é que nós estamos a observar na figura, qual é a propriedade?
Horácio	Têm os lados paralelos, por isso… se calhar até pode ser… [paralelogramo]

Ao aperceber-me que os alunos abandonaram a observação inicial sobre o paralelismo, e que se afastavam da propriedade que nesta situação era mais importante, coloquei uma questão que os fez refletir sobre o assunto. De imediato, o aluno que tinha contestado a inclusão do retângulo no grupo dos paralelogramos, apercebeu-se do erro e reformulou a sua opinião. A minha questão provocou no Horácio uma reflexão que o conduziu a confrontar-se com os seus conhecimentos, tomou consciência do seu erro e modificou a sua opinião.

Neste ambiente de trabalho, os alunos não apresentavam dificuldade em assumir quando estavam errados e eram os primeiros a reformular as suas conjeturas assim que tomavam consciência do seu engano. Nesses momentos, aceitavam sem nenhum constrangimento a ideia que tinham contestado.

(…)

Horácio	Então quase todas as figuras geométricas têm os lados paralelos - são todos paralelogramos.
Prof	Não,… o Gonçalo e a Fátima trouxeram aqui uma figura, que eu vou dizer já que não é um paralelogramo.
Jordão	O hexágono.

(…)

Prof	Então o hexágono tem ou não os lados paralelos?
Vários	Tem!
Prof	Então quer dizer que [o paralelogramo] para além de ter os lados opostos paralelos tem que ter outra caraterística.

Vários	Tem que ter quatro lados.

O Horácio tentou generalizar. Nesse momento, viu no paralelismo a única propriedade necessária para incluir as figuras no grupo dos paralelogramos. Pareceu-me que esta também era uma das conceções a que tinham chegado o par que estava a apresentar o trabalho. Julguei então ser oportuno, corrigir a inclusão do hexágono neste grupo de figuras. Fi-lo indiretamente declarando apenas que uma das figuras não estava incluída nos paralelogramos. O Jordão foi o primeiro a verbalizar qual era a figura. No entanto parece que já outros colegas também estavam a tomar consciência da outra propriedade que levaria à caraterização dos paralelogramos pois quando coloquei a questão de qual seria a outra caraterística foram vários os que responderam que tinha que ter quatro lados.

A construção do conceito de paralelogramo foi sendo feita de modo progressivo. Simultaneamente, e trazido pela necessidade de suportar este novo conceito foram-se reforçando outros conceitos anteriormente abordados. Todavia, os conceitos já estudados voltavam a ser retomados para sustentar e voltar a integrar as novas abordagens e consequentemente solidificar a sua aprendizagem.

(…)

Prof	[Lendo uma definição que tinha trazido para dar aos alunos no final da sessão] Um paralelogramo é um polígono de quatro lados (…) cujos lados opostos são iguais e paralelos
Gonçalo	Tem que ter quatro lados, mas por exemplo, o trapézio [refere-se ao trapézio isósceles não paralelogramo] não é um paralelogramo.
Jordão	Mas o trapézio [não paralelogramo] não tem os lados paralelos iguais.
Jordão	... e tem que ter os lados (…) opostos paralelos. O trapézio [não paralelogramos] não tem todos os lados opostos paralelos.

[Os alunos envolvem-se numa discussão sobre trapézios. O Gonçalo e a Fátima falam do trapézio considerando apenas o trapézio isósceles não paralelogramo. O Jordão refere-se a duas figuras: aos trapézios não paralelogramos isósceles e reto. A professora tinha também trazido informação sobre os trapézios.]

Entendi ser o momento de validar as conclusões a que já tínhamos chegado. Referi então uma definição que já tinha preparado para esta sessão, concluindo assim parte da discussão sobre o paralelogramo.

Entretanto surge o momento de clarificar o conceito de trapézio. O Gonçalo e a Fátima mostram ter uma conceção de trapézio muito reduzida. O Jordão tem uma conceção mais alargada, até porque ele já tinha feito e apresentado uma investigação sobre como classificar figuras geométricas quanto à igualdade de comprimento dos lados. Nessa investigação tinha surgido alguma discussão sobre estas figuras.

Embora estas sessões coletivas sejam conduzidas consoante as intervenções dos alunos, é no entanto previsível algumas das discussões que poderão surgir. Mesmo que tal não aconteça, o professor terá algum objetivo a alcançar e poderá ser ele a levantar as questões para essa discussão. Deste modo, reveste-se de alguma importância que planeie e prepare algum material para que possa enriquecer o trabalho.

> [Como o Gonçalo e a Fátima tinha marcado os ângulos nos polígonos que tinham explorado, durante algum tempo estivemos a verificar a igualdade dos ângulos opostos nos paralelogramos.]
>
> (…)
>
> Prof Vamos então resumir o que já sabemos do paralelogramo.
>
> Vários O paralelogramo é um quadrilátero. Tem os ângulos opostos iguais. Tem os lados opostos iguais (…) e paralelos.
>
> [Continuou a sessão tendo ainda sido discutidas conexões entre este trabalho e outros sobre classificação de figuras, já anteriormente apresentados. Reforçou-se ainda a ideia, que a formação de grupos de figuras está dependente dos critérios considerados. No final, eu apresentei no quadro interativo algumas definições sobre trapézio e sobre paralelogramo. Houve ainda oportunidade de fazer um cartaz com diferentes trapézios agrupados em dois conjuntos: os que tinham todos os lados opostos paralelos e os que só tinham um par de lados paralelos.]

Aproveitando o estudo que o Gonçalo e a Fátima tinham feito sobre os ângulos, conseguiu-se explorar mais uma propriedade dos paralelogramos, inerente às suas caraterísticas. O grupo validou as conclusões a que o Gonçalo e a Fátima tinham chegado, clarificando melhor algumas ideias. Explorou-se ainda a ideia de classificação segundo diferentes critérios, que já vínhamos a trabalhar e a inclusão das figuras em diferentes grupos.

No final, com o meu apoio, os alunos produziram um cartaz em forma de tabela, resumindo as conclusões a que chegámos.

Como foi permitido e até incentivado o fluir das ideias dos alunos, onde muitas vezes ocorreram conceitos não corretos, pareceu-me importante que no final das sessões ficasse bem demarcado quais as ideias que estavam corretas. A execução de um cartaz que ficava exposto na sala ajudava a lembrar o que tinha ficado definido em relação ao tema. Por outro lado, em futuros trabalhos, este cartaz pode servir de recurso para argumentar e justificar outras conjeturas.

5.4 Investigação "Como fazer metade de um decímetro cúbico?"

3 de maio

Na sessão coletiva de dia 2 de maio, alguns alunos apresentaram trabalhos sobre medições de volumes de caixas diversas (cereais, bolachas, etc.), que tinham feito utilizando como unidade de medida cubos de $1cm^3$ (material MAB). Nestas medições surgiram números muito elevados em cm^3, o que fez emergir a necessidade de converter em outras unidades de medida. Ainda não tínhamos abordado as equivalências nas medidas de volume e resolvi provocar a turma para essa investigação – descobrir a relação entre o cm^3, o dm^3, o m^3, etc. De imediato surgiram hipóteses. Uma das alunas (Margarida), servindo-se do seu conhecimento em relação ao m^2, disse prontamente que deveríamos ter que diminuir três ordens. Referi que essa seria uma hipótese e que teriam que provar e mostrar ao grupo.

O par de alunos Gustavo e Miguel, provocados por mim, iniciaram essa investigação no momento de TEA do dia seguinte. Começaram por tentar descobrir quantos cm^3 cabiam num cubo cujo volume era de $1dm^3$. Depois dessa verificação, eu desafiei-os a construírem um sólido cujo volume fosse metade de $1dm^3$.

O trabalho foi elaborado durante os momentos de trabalho autónomo (TEA). No decorrer da gravação apercebemo-nos que durante a investigação foram emergindo novas questões e os alunos foram reformulando as suas conjeturas autonomamente. À medida que se vão envolvendo na pesquisa sentem necessidade de responder a novas situações para poderem chegar ao seu objetivo e assim vão reformulando o seu percurso de investigação. Porém, em alguns momentos senti a necessidade de intervir colocando algumas questões para os ajudar a refletir. Fiz também algumas sugestões de metodologia.

Parte do processo de pesquisa obtém-se através do relato dos alunos, sobre o modo como desenvolveram o seu trabalho. Como eu não estive sempre presente durante o processo de investigação, sempre que me aproximei deles questionei-os para que explicassem o que tinham feito e assim ficasse registado no vídeo.

Este par de alunos construiu um cubo com $10cm$ de aresta ($1dm$). Depois, encheram o cubo que fizeram, com 1000 unidades do material Multibásico (MAB) – cada unidade dessas mede $1cm^3$. Constataram que $1dm^3$ (cubo com $1dm$ de aresta) é equivalente a 1000 cm^3. Nesta primeira parte da investigação, os alunos não tiveram dificuldade em estabelecer a relação entre o cm^3 e o dm^3. Os materiais de que dispunham eram facilitadores dessa observação e já tinham a hipótese levantada pela Margarida. Facilmente chegaram à conclusão de que $1dm^3$ é equivalente a $1000cm^3$ e conseguiram prová-lo experimentalmente.

Desafiados por mim, mas também porque manifestaram desejo de continuar a explorar este conteúdo, lançaram-se para uma nova questão de investigação: *Como fazer um sólido que meça metade de 1dm*^{3}?

Os alunos mostraram-se motivados e lançaram-se em novos desafios que lhes pode proporcionar uma maior consciência das relações que investigavam.

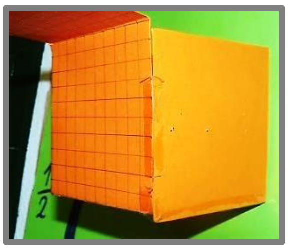


Fig. 26 – Cubo com 1dm de aresta construído pelo Gustavo e pelo Miguel.

Fig. 27 – Cubo com 5cm de aresta, construído pelo Gustavo e pelo Miguel

Prof	Então fizeram este cubo (Fig. 27) porquê?
Gustavo	Tentámos fazer metade, só que este não chega a ser metade.
Miguel	É um quarto.
Prof	Porquê? Vocês já mediram quantos [*cm*^{3}] é que este leva?
Gustavo	Esse é um quarto.
Prof	Este é um quarto?
Miguel	Deve ser.
Prof	Deve ser, ou é mesmo?
Gustavo	É um quarto, é.
Prof	Vamos lá ver. Se este é um quarto, quantos é que aqui (Fig. 26) cabiam dentro?
Gustavo e Miguel	Quatro!
Miguel	Nós fizemos cinco em todos. [5*cm* em cada aresta] Cinco vezes cinco são vinte e cinco…
Prof	Então?...
Miguel	Então é o dobro disso que temos que fazer.
Prof	Então vamos lá ver quantos [Cubos de 5*cm* de aresta] é que aqui (Fig. 26) cabem dentro! Iguais a este (Fig. 27)?
Gustavo	[Ao ver o cubo com 5*cm* de aresta a entrar dentro do de 10*cm* de aresta] Ah, não. Eu acho que são oito.

[Contam e verificam que cabem 8 cubos de 5*cm* de aresta dentro do cubo de 10*cm* de aresta.]

Prof	Então não é um quarto?…
Miguel	É um oitavo.
Prof	Como é que vocês construíram este?
Gustavo e Miguel	Cinco em todos [5*cm* de aresta]
Prof	Porquê?
Gustavo	Porque como o outro era 10 [10*cm* de aresta] e nós estávamos a pensar fazer metade.
Prof	Ah! Como metade de dez é cinco, então fizeram cinco de cada lado.
Gustavo	Só que por acaso não era assim mas nós já tivemos a ideia [de como fazer metade].

Aproximei-me do par para verificar como estava a decorrer a investigação. Reparei que tinham construído um sólido que não correspondia ao que procuravam visto que tinham construído um cubo com 5*cm* de aresta correspondendo a $125cm^3$ de volume e não aos $500cm^3$ de volume que corresponderia a metade de $1dm^3$. Embora percebendo que eles já tinham reconhecido o engano, e que já se tinham lançado em uma nova construção, quis entender qual tinha sido o raciocínio que os tinha levado àquele cubo.

Os dois alunos envolvidos perceberam que o que tinham construído não correspondia a metade de $1dm^3$, mas não foram verificar a que parte do dm^3 correspondia aquele cubo. Talvez por semelhança das figuras planas, acharam que o cubo construído, correspondia a $\frac{1}{4}$ do dm^3. Perante esta hipótese, quis levá-los a provarem se era correta ou não. O Miguel explicava-me que tinham feito um cubo de 5*cm* de aresta e como para eles correspondia a $\frac{1}{4}$ do dm^3, tinham que fazer um sólido com o dobro da aresta. Não estavam a conseguir ser muito coerentes nem muito firmes com as suposições que faziam. Continuei a incitá-los a verificarem que parte do dm^3 é que tinham construído. Colocando o cubo recém construído dentro do cubo de 1*dm* de aresta, compararam e verificaram que o cubo mais pequeno cabia 8 vezes dentro do outro. Finalmente, conseguem perceber que o que tinham construído correspondia a $\frac{1}{8}$ do dm^3.

Antes de me afastar do par, tentei perceber porque é que tinham escolhido aquelas dimensões. Demonstraram um raciocínio bastante lógico, bastante comum nestas situações. Como o primeiro cubo tinha 10*cm* de aresta e queriam fazer metade do volume, pensaram que o conseguiriam fazendo metade de cada aresta (5*cm*). No entanto, a possibilidade de experimentarem medindo com os cubos de 1cm^3 a sua construção, possibilitou que autonomamente encontrassem um novo caminho.

[A professora deu orientações para que os alunos não se esquecessem de registar os passos todos da investigação e pediu-lhes que medissem com os cm^3 do MAB, o cubo de 5*cm* de aresta.]

Prof — Reparem numa coisa. Eu disse que não era preciso fazerem mesmo um cubo. Pode ser outro sólido! Vocês já estão habituados a medir as caixas dos cereais com cm^3 e elas não têm a forma de um cubo.

Gustavo — Pois é! Pois,… Nós pensámos no paralelepípedo.

A professora afasta-se do par e vai apoiar outros alunos que no momento trabalhavam atividades de diferentes áreas curriculares…

[Enquanto o Miguel enche o cubo de 5*cm* de aresta com as unidades do MAB, o Gustavo desenha numa cartolina, a planificação de um paralelepípedo.]

Fig. 28 – Miguel verificando quantos cm^3 cabem dentro do cubo de 5cm de aresta

Fig. 29 – Gustavo desenhando a planificação do paralelepípedo para obter metade de $1dm^3$.

Após algum tempo de trabalho…

Gustavo — Sabes que eu tenho uma teoria [queria dizer estimativa] de quanto é que esse cubo leva? Leva 250. [refere-se às unidades de MAB]

Miguel — Aaah!

Gustavo — 250 mais 250 dá 500. 500 mais 500 é 1000.

Miguel — Não! Não, é 250.

Gustavo — Dá 125, eu sei.

Gustavo — 8 vezes 125 é mil. Mil a dividir por 4 dá 250. 250 a dividir por 2 é 125.

Antes de me afastar do par, relembrei que o sólido não tinha que ser um cubo mas percebi de imediato que o Gustavo já estava a trabalhar na planificação de um paralelepípedo retângulo.

O Miguel inicia a medição em cm^3, do cubo que corresponde a $\frac{1}{8}$ do dm^3. Utiliza para isso, as unidades do material MAB. Embora cada um esteja a executar uma tarefa diferente, não deixam de interagir na tarefa do outro. Nota-se que os dois mostram um envolvimento no "todo" da investigação. Isto é, embora por vezes dividam as tarefas e cada um concretiza uma das partes da investigação, não deixa de haver partilha e controlo pela tarefa do outro. O Gustavo está a planificar o sólido que corresponde a metade do dm^3, mas, simultaneamente está a pensar numa estimativa da medição que o Miguel está a fazer. Numa primeira aproximação do Gustavo, o Miguel expressa uma interjeição representativa de quem ainda não tinha refletido sobre o assunto e vai iniciar o seu envolvimento na nova questão. O Gustavo sente então necessidade de explicar ao colega o raciocínio que o levou a tal conclusão. Com a explicação do Gustavo, o Miguel apercebe-se que o colega está errado e rejeita a estimativa de 250. Quase em simultâneo, o Gustavo também se apercebe do seu erro e emenda de imediato o valor para 125. Segue logo com a explicação de como chegou ao novo valor.

Continuaram a trabalhar cada um na sua tarefa…

Miguel	As unidades não chegam. Vou ver se arranjo mais.
Prof	[Aproximando-se do par para ver como decorria a investigação] Já conversaram sobre o que estão a fazer?
Gustavo	O Miguel foi buscar mais unidades…
Prof	[dirigindo-se ao Miguel] Então, não conseguiste mais?
Gustavo	Nós achamos que é 125 porque 1000 a dividir por 8, é 125.
Miguel	E 125 vezes 8 é 1000.
Prof	Olha, tu não consegues ver isto de outra maneira? Repara! Sabes quantas estão na camada de baixo? Para além destas camadas [que já fizeste] ainda faltam outras duas, repara. Então? Quantas é que estão aí?

Fig. 30 – Verificando quantas camadas faltam para preencher o cubo.

Fig. 31 – As novas placas que o Gustavo foi buscar para a medição do cubo

Miguel [Verificando uma camada] São 125…[por camada]

[O Gustavo foi buscar umas placas que têm 25*cm*^{3} (5x5) e sugeriu ao colega que as usasse]

Miguel [Contando as unidades uma a uma e as placas como sendo 25 cada] 1, 2, 3,… uma [placa] é 25, duas é 50, ou seja… aqui estavam 75… 3 grupos de 25 e aqui estão 50… dá 125.

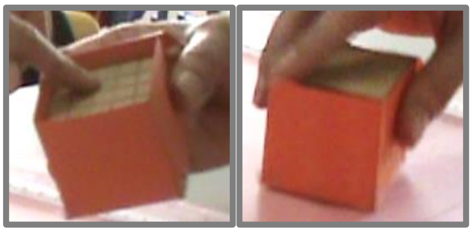


Fig. 32 – Utilização das placas para medição do espaço que faltava.

Fig. 33 – Contagem final das unidades e das placas

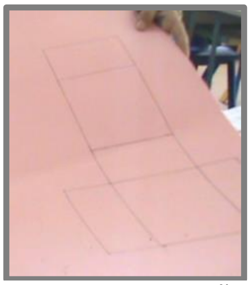


Fig. 34 – Planificação do paralelepípedo retângulo feita pelo Gustavo.

[Enquanto o Gustavo continua a trabalhar na construção do paralelepípedo, o Miguel continua a medir em *cm*^{3}, o cubo de 5*cm* de aresta. Foi buscar um outro material – cubo de 5 unidades de aresta (cada unidade mede 1*cm*^{3}. Colocou-o dentro do seu cubo de cartolina e comparou. Cabia mesmo à justa. Depois contou quantos *cm*^{3} tinha de aresta e calculou 125*cm*^{3}.]

Miguel Tem 125!

Fig. 35 – Medição com o cubo com 5 unidades (*cm^3*) de aresta. Primeiro coloca o cubo de madeira dentro do cubo de cartolina. Depois conta e calcula os *cm^3* correspondentes. Por fim confirma que o cubo de cartolina corresponde a 125cm^3.

Eu estava preocupada com os registos deste trabalho. Sentia que estavam a fazer descobertas muito importantes para serem transmitidas à turma e tinha receio que não estivessem despertos para isso. Voltei a aproximar-me para ver como estavam a conduzir o trabalho. Para que avançassem mais rápido, sugeri que medisse utilizando o conhecimento que tinha sobre quantas camadas de cm^3 já tinha completado e quantos cm^3 tinha cada camada. Depois era só perceber que ainda caberia em altura, mais duas camadas iguais. Eles aderiram facilmente e até arranjaram novas alternativas de material – placas de 25cm^3 e posteriormente um cubo de 125 cm^3 de volume.

Depois de terminada a planificação do paralelepípedo, recortaram-na e uniram as faces de modo a construir uma caixa.

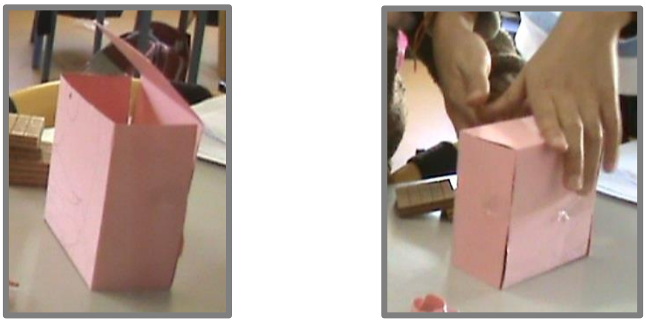


Fig. 36 – Paralelepípedo-caixa, construído pelo Gustavo para obter metade de *$1dm^3$*.

Prof	[Voltando a aproximar-se do par.] Então? Já conseguiram? E já provaram que é metade?
Gustavo	Ainda não, mas temos uma ideia.
Miguel e Gustavo	[Colocam os cubos de madeira (que já sabem que mede 125cm^3 cada) dentro do paralelepípedo de cartolina e vão contando.] 125, 250, 375,…, 500! É metade!
Prof	Isto é um trabalho excelente! É muito bom para mostrar aos colegas! Boa!

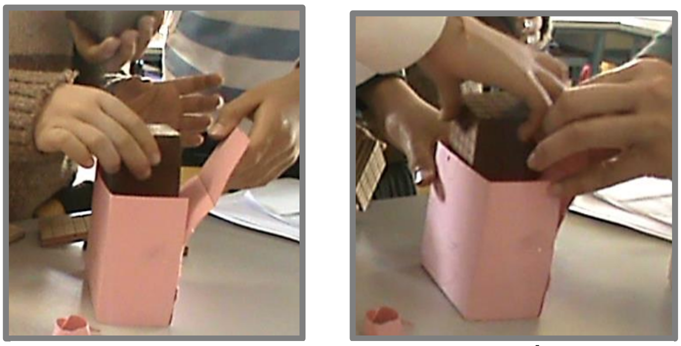


Fig. 37 – Verificando o volume do paralelepípedo que consideram metade de 1*dm*³.

Ao aproximar-me lembro-os da necessidade de provarem que o sólido que construíram, corresponde a metade de $1dm^3$. Contudo, o par refere que já têm uma ideia para o fazer o que sugere que estavam conscientes que tinham que provar a sua conclusão. Utilizando o mesmo método que já tinham usado para a primeira construção, medem o novo sólido (paralelepípedo retângulo), com o auxílio dos cubos de 125 cm^3 de volume. Contando de 125 em 125, chegam à conclusão que o paralelepípedo mede $500cm^3$ de volume e concluem de imediato que corresponde a metade de $1dm^3$.

Estando verdadeiramente fascinada com o que este par conseguiu executar, valorizei o trabalho e elogiei-os.

Miguel	Agora apetecia-me fazer mais, não sei porquê, mas...
Prof	Então…, formulem outras conjeturas, outras ideias e experimentem.
Gustavo	Já sei! Podíamos fazer metade deste! [refere-se ao paralelepípedo de $500cm^3$.]
Prof	Eu gostava que vocês vissem as dimensões e que as escrevessem. É que eu não vos vejo a registar nada! A aresta deste (Fig. 26), depois como pensaram fazer aquele (Fig. 27) e depois as dimensões deste último (Fig. 36).

[Começaram a escrever nas suas folhas mas a certa altura o Miguel para e volta a mexer/explorar os sólidos que tinham construído e observando compara os cubos de madeira com os sólidos de cartolina.]

Fig. 38 – Enquanto o Gustavo regista algumas conclusões, o Miguel continua a explorar.

A vontade de continuar mostra uma grande motivação trazida pela experimentação. Enquanto professora, fico muito satisfeita com isso e encorajo-os a continuarem. Não é necessário dar sugestões porque o Gustavo lança logo uma nova questão para investigar bastante pertinente. A minha preocupação é o registo. Ao envolverem-se nas pesquisas eles tinham tendência a esquecerem-se de registar e eu estava a visualizar neste trabalho tantas ideias boas para partilhar com a turma.

No final da sessão de trabalho, pedi ao Gustavo e ao Miguel que explicassem toda a sua investigação, à professora de apoio[8] *(Laura) que estava connosco naquela sessão.*

Gustavo e Miguel	Nós fizemos $1cm^3$, com $1cm$ de aresta. Depois fizemos $1dm^3$ que tinha $1dm$ de aresta. Depois a Lena provocou-nos para fazer metade do dm^3. E deu-nos isto (Fig. 41). Nós fizemos $5cm$ de aresta [um cubo com $5cm$ de aresta]. Mas isto era um oitavo.
Jordão	Como assim um oitavo?
Horácio	Porque um quarto era metade disto (Fig. 40)... então metade vai ser um oitavo!
Laura	Então, primeiro fizeram qual? A Lena provocou-vos para fazerem metade deste e vocês fizeram aquele (Fig. 41)? Porquê?
Miguel	Porque nós pensávamos que [fazer metade de $1dm^3$…] era fazer a metade das arestas. Como este (Fig. 39) era $10cm$ [de aresta], metade ia ser $5cm$ [de aresta].
Gustavo	Estes cubos [de madeira] são iguais a este. Se nós pusermos aqui dentro (Fig. 41), cabem oito logo cada um é um oitavo.
Laura	Então e a que conclusões é que chegaram?
Miguel	Que…$1dm^3$ tem 1000 cm^3. Meio dm^3 tem 500 cm^3. Um oitavo tem $125cm^3$.

[8] Como nesta turma existiam 3 meninos com necessidades educativas, tínhamos uma professora de apoio que estava connosco durante os momentos de TEA.

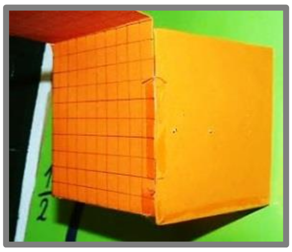


Fig. 39 - Cubo com 1 *dm* de aresta (volume = 1*dm*^{3})

Fig. 40 - Paralelepípedo com 500 *cm*^{3} de volume (metade de 1*dm*^{3})

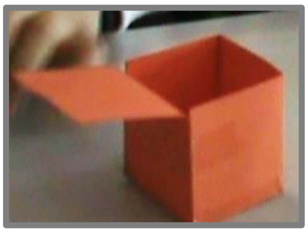


Fig. 41 - Cubo com 5*cm* de aresta, volume = a 125*cm*^{3} (um oitavo de 1*dm*^{3}).

Com o objetivo de que ficasse gravado um resumo de tudo o que tinham feito, pedi ao par que explicassem a outra professora (professora de apoio Laura) o que tinham estado a fazer. Outros dois alunos que estavam ali perto a trabalhar noutras atividades, também ficaram interessados e naturalmente interagiram questionando-os para entenderem melhor.

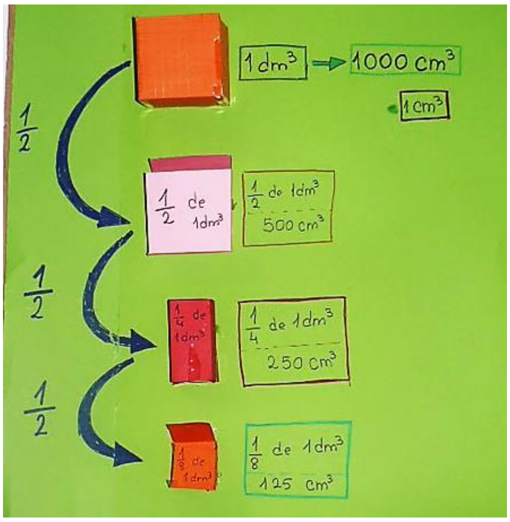


Fig. 42 – Cartaz final das conclusões de toda a investigação.

Capítulo VI

Discussão dos Resultados e Reflexão

Neste capítulo apresento a discussão dos resultados obtidos relativamente às seguintes questões: (1) Em que medida é que o envolvimento dos alunos em investigações matemáticas contribui para o desenvolvimento do conhecimento matemático? Quais os fatores que contribuem para esse envolvimento? (2) De que modo é que a discussão coletiva contribui para o desenvolvimento do conhecimento matemático? Qual é o papel do professor nessa discussão? Que funções assume o discurso dos alunos (3) De que forma os conhecimentos anteriores são usados para fundamentar as opiniões apresentadas? Apresento também uma reflexão pessoal sobre o trabalho realizado com os alunos no contexto de aprendizagens desenvolvidas com enfoque na investigação e na experimentação matemática bem como na partilha e discussão dessas investigações na turma.

6.1 Discussão dos resultados

6.1.1 Em que medida é que o envolvimento dos alunos em investigações matemáticas contribui para o desenvolvimento do conhecimento matemático?

- **Quais os fatores que contribuem para esse envolvimento?**

a) A motivação dos alunos para as investigações

Na análise das investigações descritas foi relevante a motivação dos alunos para desenvolverem as investigações que se propuseram realizar. As duas situações que analisei referem-se: a descoberta de propriedades dos paralelogramos - embora como questão inicial os alunos tentavam descobrir que figura (nome ou grupo) pertenceria o paralelogramo obliquângulo; na segunda investigação, os alunos propuseram-se a descobrir a quantos centímetros cúbicos correspondia um decímetro cúbico e acabaram por investigar também construções de metade de um decímetro cúbico, um quarto de um decímetro cúbico e um oitavo de um decímetro cúbico.

O par de alunos que investigou sobre o paralelogramo iniciou o seu trabalho porque estavam curiosos sobre a questão levantada em coletivo – que figura era aquela?… (tratava-se do "paralelogramo obliquângulo"); que nome tinha e em que grupo se deveria incluir? Mais tarde surgiram novas questões que contribuíram para que a investigação avançasse – quiseram saber se haveria outras figuras que poderiam entrar no grupo dos paralelogramos.

Como indica Zuckerman (2003), através do que o autor apelida de *learning activity*, os professores procuram desenvolver nos alunos motivos para aprender, os quais ocorrem da utilidade imediata: ou por interesse cognitivo dos alunos; ou pelo prazer de questionar o que ainda não conhecem; ou pela simples satisfação de aperfeiçoamento.

No caso dos alunos que começaram por investigar a quantos cm^3 correspondia um dm^3, fui eu que os desafiei para uma nova questão de investigação – *Como construir um sólido que meça metade de 1* dm^3*?* Desafiados por mim, mas também porque manifestaram desejo de continuar a explorar este assunto, lançaram-se para uma nova questão de investigação – *como construir um sólido que meça metade de 1*dm^3. Quase no final da sessão de trabalho o Miguel comenta para o colega "Agora apetecia-me fazer mais, não sei porquê, mas…» o Gustavo responde-lhe "Já sei! Podíamos fazer metade deste! [refere-se ao paralelepípedo]».

b) Novas questões que emergem durante a investigação

Ao analisar estas investigações observei que durante o processo de investigação os alunos foram levantando novas conjeturas e colocando novas questões que conduziram a novas investigações. Notei que quando verificavam hipóteses que constatavam não ser verdadeiras, conduzia a uma nova reflexão levando a novas conjeturas que voltavam a ser verificadas. No caso do dm^3, após terem construído o cubo com 5*cm* de aresta verificaram, medindo com os cm^3 do material MAB, que esta figura não correspondia à metade de 1dm^3. Então, lançaram-se à construção de um novo sólido. Na investigação dos paralelogramos, verifiquei que o par Gonçalo e Fátima dedicaram grande parte do tempo da investigação para averiguarem se o "trapézio retângulo não paralelogramo" poderia ou não ser incluído no grupo de figuras que estavam a considerar – os paralelogramos. Não limitaram a sua investigação à questão inicial sobre o "paralelogramo obliquângulo" e colocando novas conjunturas foram testá-las.

Nestes casos, verifica-se tal como Ernest (1996) refere que frequentemente de uma investigação inicial, surgem novas questões conducentes a novas pesquisas e consequentemente a novas aprendizagens - "embora as investigações possam iniciar por uma só situação ou questão matemática, o foco da atividade muda assim que novas questões são postas, e novas situações são geradas e exploradas." (Ernest, 1996, p. 29).

É nesta teia de conceitos encadeados uns nos outros que os alunos pareceram construir e refinar o seu conhecimento matemático.

c) Autonomia dos alunos na condução das investigações

Constatei que durante os processos investigativos, os alunos, apropriaram-se das investigações, tomando-as como suas. Não existiam guiões nem perguntas orientadoras do percurso que deveriam seguir. Contudo, algumas vezes eu no meu papel de (professora) ajudei a refletir sobre o trabalho que estava a ser executado e também lancei novos desafios.

De alguma forma "nasceu-lhes" uma vontade interior que os motivou para a atividade. Parece que é esta motivação que os vai conduzir à verdadeira investigação onde são os alunos que conduzem o processo investigativo segundo as necessidades que surgem e orientam o seu percurso através de novas questões as quais vão contribuir para sustentar o conceito em construção.

A propósito da atividade matemática na sala de aula Martins et al (2002) sugerem que esta surge de propostas abertas e cujos percursos de investigação são negociados por quem investiga " a definição destes percursos faz crescer, nos alunos, o espírito de iniciativa e autonomia, a persistência e a criatividade." (p. 67)

Quer na investigação sobre o paralelogramo, quer na investigação sobre a metade do decímetro cúbico, os pares envolveram-se num processo ativo sobre as entidades a que se propuseram investigar. No par que se envolveu no estudo sobre o paralelogramo, foram construindo e alterando as figuras com as barras articuladas agindo assim sobre a transformação dos lados e dos ângulos. É evidente através dos seus diálogos, as observações que vão fazendo e as conclusões que vão tirando. Conseguem, embora de uma forma ainda básica, conjeturar "Nós agora pensámos assim, temos o paralelogramo [obliquângulo] temos o retângulo e temos um losango. Então se o losango dá, o quadrado também dá.", formular hipóteses "Não achas que aquela figura também dá? Aquela que parece um sapato. [referia-se a um trapézio retângulo não paralelogramo]", testar "Tenta lá fazer o «sapato»" e alterar as suas conceções. Desta forma, manipulando e discutindo as suas ideias com o par, vão construindo os conceitos inerentes às propriedades das figuras. "O ambiente em que decorre o trabalho possibilita que os alunos levantem questões, formulem hipóteses, exprimam ideias e negoceiem o significado das palavras." (Martins et al, 2002, p. 67) é neste envolvimento que segundo os mesmos autores os alunos clarificam o seu pensamento matemático, vão apreciando e desenvolvendo uma melhor compreensão conceptual da Matemática.

Também o par que investigou sobre o dm^3, na procura de um sólido que representasse metade de $1dm^3$, construiu um cubo e ao verificarem que não correspondia ao que desejavam – "Tentámos fazer metade, só que este não chega a ser metade.", formularam uma nova hipótese "Porque como o outro era 10 [10*cm* de aresta] e nós estávamos a pensar fazer metade… Só que por acaso não era assim mas nós já tivemos a ideia [de como fazer metade]… Nós pensámos no paralelepípedo.” e lançaram-se na construção de um novo paralelepípedo.

Esta nova investigação faz com que os alunos vão observar de outra perspetiva, as relações de volume: por um lado conjeturam e constroem um sólido apoiando-se nas medições exteriores e nas relações entre as arestas do cubo com $1dm^3$ de volume e o novo sólido; por outro lado auxiliam-se dos cm^3 do MAB para efetuarem medições. Ainda em Martins et al (2002) temos que a definição dos percursos que vão sendo negociados pelos intervenientes desenvolve nos alunos, o espírito de iniciativa e autonomia, a persistência e a criatividade. Notei que à medida que os alunos se foram envolvendo na sua atividade investigativa, houve um aumento de motivação e interesse pelo trabalho matemático. Depois de já terem concluído a construção de metade de $1dm^3$, o Miguel comenta – “Agora apetecia-me fazer mais, não sei porquê, mas...”. Enquanto professora, apoiei esse interesse e referi a possibilidade de continuarem – “Então…, formulem outras conjeturas, outras ideias e experimentem.”. Os alunos conseguiram propor uma nova questão investigativa, a qual era de grande pertinência em relação ao trabalho matemático que tinham estado a fazer – “Já sei! Podíamos fazer metade deste! [refere-se ao paralelepípedo de $500cm^3$.”. Os alunos tiveram espaço para se tornarem condutores do seu próprio processo educacional (Alro e Skovsmose, 2006) e definiram os seus próprios problemas (Ernest, 1996). Neste trabalho que foi feito em março, já é visível uma boa autonomia de trabalho investigativo por parte dos alunos. Já são capazes de formular as suas questões de investigação levantando novas hipóteses que emergem da questão inicial. De acordo com Ernest (1996) na abordagem investigativa é o aluno que define os seu próprios problemas dentro de cada situação e ao professor cabe o papel de escolher a situação de partida ou aprovar a escolha do aluno. Verifica-se também que já têm interiorizado a necessidade de testar e provar as suas conjeturas. Esta necessidade não surge só para poderem argumentar para os outros. Eles também querem ter a certeza de que é como pensaram. Sentem a necessidade de compreender porque será assim, e lançam-se na procura dessas respostas. Para Ponte e Matos (1996) numa investigação matemática os alunos definem o objetivo, escolhem e concretizam as experiências para verificarem o que acontece, formulam conjeturas que serão testadas em novas experiências.

d) Os avanços e recuos que ajudam a estruturar os conceitos.

Outro aspeto que sobressaiu nestas investigações dos alunos prende-se com a variabilidade das suas aquisições, sendo que umas vezes indicavam ter adquirido determinados conhecimentos e mais tarde parecia terem-nos perdido de novo. Por outro lado, em certos momentos fizeram grandes avanços apoiando-se em conhecimentos anteriores e noutros momentos demoraram a entender os seus enganos. Contudo, à medida que experimentaram, enquanto agiam sobre as situações, os alunos mostraram maior facilidade em compreender os seus erros/enganos e em reformularem as suas conjeturas. Aos poucos foram conseguindo estruturar melhor os conceitos inerentes, apoiando-se em outros conhecimentos anteriormente adquiridos.

Em certo momento da investigação, o Gonçalo e a Fátima encetaram uma discussão sobre a inclusão ou não do losango no grupo do paralelogramo. O início desta abordagem em coletivo era ainda recente. Por essa altura, ainda era comum tratarem as figuras por um nome como se fosse um nome próprio e não associavam esse nome a um determinado grupo. Estavam neste momento a descobrir essa nova organização, e a experimentar incluir e excluir as figuras nos diferentes grupos que iam surgindo segundo os critérios considerados. Ainda lhes era difícil admitir que o losango e o quadrado pudessem pertencer ao mesmo grupo de figuras embora esse assunto já tivesse sido discutido na turma muitas vezes.

Já quase a terminar a sua investigação, este par recua novamente nas suas conclusões e depois de terem concluído (no dia anterior) que os paralelogramos tinham que ser quadriláteros, voltaram a querer experimentar com polígonos que não fossem quadriláteros o que evidenciou que um paralelogramo ter de ser um quadrilátero ainda não estava consistente.

Por vezes, da experimentação, surgiram observações e conclusões que não faziam parte dos objetivos iniciais mas sustentaram a compreensão sobre o conceito que investigavam como aconteceu na investigação do dm^3. Constataram que o cubo com 5cm de aresta não correspondia a $\frac{1}{4}$ do dm^3 mas sim a $\frac{1}{8}$ do dm^3 em que o Miguel comenta "é um oitavo!" mais tarde articularam este conhecimento para estimarem o volume desse cubo ($\frac{1}{4}$ do dm^3) desta vez é o Gustavo baseando-se nos cm^3 fez uma estimativa que inicialmente não foi a correta "leva250 [referindo-se às unidades do MAB]" e após a sua explicação "250 mais 250 dá 500. 500 mais 500 dá mil" o Miguel estava atento ao raciocínio do colega e refuta "Não! Não é 250" o Gustavo reformula a sua opinião e chega à resposta correta "Dá 125, eu sei. 8 vezes 125 é mil. Mil a dividir por 4 dá 250. 250 a dividir por 2 é 125".

De acordo com Vygotsky (1981c) e Lúria (1992) referidos em Moysés (1997), podem ocorrer regressões diante de determinadas situações mesmo após os alunos já terem demonstrado a aquisição de uma determinada habilidade. Para estes autores esta regressão pode estar subordinada ao desenvolvimento geral do aluno ou ao domínio técnico da situação e ocorre com maior frequência quando as funções mentais estão em processo de consolidação. Consideram ainda que estas regressões no desenvolvimento mental são inerentes ao próprio processo. Por outro lado evidencia que a formação do conceito se vai construindo como refere Vygotsky "como um movimento do pensamento dentro da pirâmide de conceitos" sujeita a reformulações e novas análises "oscilando do particular para o geral e do geral para o particular" até ser compreendida e aceite – integrada como conhecimento. (Vygotsky, 1987 citado por Moysés, 1997, p.36)

No trabalho dos paralelogramos, nota-se que a preparação do cartaz não serve só para colocar as conclusões a que chegaram mas também foi servindo para novas constatações. Na preocupação de fazerem com que os outros os entendam, foram refletindo sobre o que estavam a construir e foram reformulando e melhorando as suas ideias. Afinal o cartaz não é só uma forma de comunicação mas também é um suporte que ajuda à estruturação dos conceitos. O Gonçalo toma consciência do paralelismo das figuras, quando as está a incluir no cartaz - "Aaah! Pois é… Repara – paralelas, paralelas; paralelas, paralelas; paralelas, paralelas!". A sua colega entende o que ele está a comentar porque esteve sempre envolvida no mesmo trabalho. Tanto um como o outro, foram aprimorando a ideia de paralelogramo, apoiando-se nos padrões que iam observando e partilhando. Verifica-se tal como indica César (1994) a importância dos alunos serem capazes de se descentrarem das suas posições e de estabelecerem uma intersubjetividade comum com o seu par tal como aconteceu com a Fátima. Para esta autora, estes movimentos de descentração dos seus raciocínios com o objetivo de conseguirem compreender as ideias diferentes do colega numa procura de significados, promove o desenvolvimento cognitivo e a apreensão de saberes. Também Alro e Skovsmose (2006) reforça a importância da "escuta ativa" em que o ouvinte tem uma responsabilidade bem definida. Não é um sujeito passivo mas tenta entender o que ouve e ajudar quem fala, a proferir as suas ideias.

Síntese das conclusões dos alunos nas suas investigações:

Na investigação sobre o paralelogramo os alunos Gonçalo e Fátima concluíram que os paralelogramos eram figuras cujos lados opostos são paralelos e os ângulos opostos são iguais. Aperceberam-se que os retângulos e os losangos também entravam neste grupo mas ainda ficaram hesitantes sobre se os paralelogramos seriam todos quadriláteros ou não. Foi depois no momento de apresentação e discussão em coletivo que se esclareceu que estas figuras eram quadriláteros.

Na investigação sobre o decímetro cúbico os alunos Gustavo e Miguel concluíram que $1dm^3$ corresponde a $1000cm^3$, meio dm^3 corresponde a $500cm^3$ e que um cubo com $5cm$ de aresta (metade da medida da aresta ($1dm$) do decímetro cúbico que tinham feito) corresponde a 125 cm^3 de volume. Constataram que ao fazer um sólido com arestas cujas medidas sejam metade das medidas das arestas de $1dm^3$, o resultado não é a metade de $1dm^3$ (como tinham pensado inicialmente). Relacionaram a que parte do dm^3 correspondia cada sólido que tinham obtido e qual o volume correspondente em cm^3: $\frac{1}{2}$ de $1dm^3$ correspondia a $500cm^3$, $\frac{1}{4}$ de $1dm^3$ correspondia a $250cm^3$, $\frac{1}{8}$ de $1dm^3$ correspondia a $125cm^3$

6.1.2 De que modo é que a discussão coletiva contribui para o desenvolvimento do conhecimento matemático?

6.1.2.1 Qual é o papel do professor nessa discussão?

a) Nas atividades investigativas

Uma das atitudes que enquanto professora tentei conservar, foi a de evitar dar respostas imediatas. Em vez disso, aproveitei as questões que me eram dirigidas para devolvê-las aos alunos em forma de questão de investigação. Tentei sempre aproveitar as curiosidades dos alunos para os motivar a envolverem-se em investigações matemáticas. A investigação sobre o paralelogramo iniciou-se porque em sessão coletiva os alunos queriam saber o nome daquela figura. Optei por não a identificar e apenas indiquei que estava relacionada com alguma das suas propriedades. Desta forma suscitei nos alunos uma curiosidade e uma motivação para investigarem e para se envolverem no estudo de propriedades das figuras. A minha intensão era desencadear neles o verdadeiro interesse de investigar. Consegui transferir o meu objetivo (enquanto professora) de explorarem propriedades das figuras geométricas para uma vontade interior dos alunos em descobrirem, e consequentemente explorarem, propriedades daquela figura. Tornou-se numa motivação intrínseca; saber classificar a figura, passou a ser uma necessidade dos alunos.

Zuckerman (2003) refere que parte da desmotivação dos alunos para a aprendizagem advém da descontextualização em que os assuntos são abordados em sala de aula. Esta aprendizagem reveste-se de pouco sentido e torna-se desinteressante para os alunos retirando-lhes motivação. É necessário criar neles interesse para se envolverem nas aprendizagens – terem vontade de aprender. “Educators must seek to develop new motives of learning activity beyond immediate utility,… cognitive interest, pleasure of inquiry into the unknown, and the joy of self-perfection.” (Zuckermn, 2003, p. 179).

Por outro lado, sempre que emergiam situações que conduziam à necessidade de novos conhecimentos, tentei aproveitar essa necessidade de modo a incentivar os alunos a investigarem e descobrirem novas relações. Foi a situação que está na génese da investigação da metade do dm^3. Quando alguns alunos apresentaram ao grupo os seus trabalhos de medição de caixas em cm^3, surgiram valores muito elevados despontando a necessidade de converter esses valores em unidades de ordem superior. Em vez de transmitir o meu conhecimento sobre a conversão de cm^3 em dm^3, optei por devolver ao grupo, uma nova questão de investigação – *A quantos* cm^3 *corresponderia* $1dm^3$*?* Esta atitude enquanto professora é defendida por (Walle, 2004) que refere que para que a Matemática faça sentido “Teachers must stop teaching by telling and start letting students make sense of the mathematics they are learning.” (p. 14)

Para além do papel motivador e desencadeador da vontade de investigar, realço as minhas intervenções que possibilitaram desbloquear ou avançar as pesquisas. O professor deve constituir um suporte em que: por um lado deve deixar os alunos seguirem o seu percurso investigativo; por outro lado deve questionar as descobertas dos alunos de modo a que estes possam avançar nas suas investigações. Na Investigação sobre o dm^3, comecei por questionar o par porque é que tinham feito o cubo que tinha 5*cm* de aresta. Constatei que já tinham concluído que não era a metade do dm^3 como tinham objetivado. No entanto, verifiquei que ainda restavam algumas conclusões incorretas sobre a que parte do dm^3 correspondia a construção que tinham feito. Questionei-os então na tentativa de os fazer chegar a conclusões mais corretas “Porquê? Vocês já mediram quantos [cm^3] é que este leva?”. Fui dirigindo o discurso “colocando questões e propondo atividades que facilitem, promovam e desafiem o pensamento de cada aluno” (NCTM, 1994, p. 37). Por outro lado, ao fazer este tipo de questionamento, fui dando o modelo de reflexão sobre o próprio trabalho: a necessidade de questionar as conclusões a que chegavam - “Este é um quarto?”; “Deve ser, ou é mesmo?”; e a pertinência de testar as conjeturas que formulavam – “Vamos lá ver. Se este é um quarto, quantos é que aqui cabiam dentro?”; “Então vamos lá ver quantos [Cubos de 5*cm* de aresta] é que aqui cabem dentro! Iguais a este?”. Parece ser evidente a minha função como um “…intermediário criativo no processo de construção do conhecimento” (Pedrosa, 2000, p.

149). Com este questionamento, o par conseguiu estabelecer um novo percurso de investigação.

Noutras situações, as minhas intervenções foram facilitadoras do processo sem que contudo tenha dado a solução. Fui dando sugestões que conduzissem os alunos às soluções ou questionava-os de modo a fazê-los refletir e encontrarem o seu caminho. No par Gustavo e Miguel, quando estes estavam a medir o volume do cubo com 5*cm* de aresta, senti a necessidade de os ajudar a avançar mais rapidamente. Então sugeri que fizessem essa medição utilizando o conhecimento que já possuíam de outros trabalhos de visualização de volumes. Inquiri-os sobre quantas camadas de cm^3 já tinham completado e quantos cm^3 tinha cada camada - "Olha, tu não consegues ver isto de outra maneira? Repara! Sabes quantas estão na camada de baixo? Para além destas camadas [que já fizeste] ainda faltam outras duas, repara. Então? Quantas é que estão aí?". Depois era só perceber que ainda caberia em altura, mais duas camadas iguais. Eles aderiram facilmente. Verificando uma camada, o Miguel respondeu - "São 125…[por camada]". Depois, arranjaram novas alternativas com o material que dispunham na sala – placas de $25cm^3$ e posteriormente um cubo de 125 cm^3 de volume. "[O Gustavo foi buscar umas placas que têm 25*cm3* (5x5) e sugeriu ao colega que as usasse]… [O Miguel, contando as unidades uma a uma e as placas como sendo 25 cada]… 1, 2, 3,… uma [placa] é 25, duas é 50, ou seja… aqui estavam 75… 3 grupos de 25 e aqui estão 50… dá 125."

b) Nos momentos coletivos

Nas sessões de trabalho em que os alunos apresentavam as sua investigações a toda a turma, um dos papéis que me pareceu importante assumir, foi o de regulador da comunicação no grupo. Essa regulação teve como objetivo garantir as regras de comunicação entre os diferentes membros, dar modelos de modo a ir construindo uma melhor comunicação matemática e, também, transferir progressivamente para o grupo, a responsabilidade desta regulação. Tal como é Referido nas Normas Profissionais para o Ensino da Matemática (NCTM, 1994), é no ambiente da sala de aula que se estabelece a base de aprendizagem do aluno. Nesta envolvente circulam mensagens subentendidas do que se pretende na aprendizagem Matemática. O professor é o responsável pela criação deste ambiente e pela manutenção do compromisso com o pensamento matemático. Os alunos vão modelando as suas intervenções de modo análogo ao que observam no seu professor e no que percecionam que é aceitável por parte deste e do restante grupo. Oliveira (1993) refere que Vygotsky (1988) sugere que esta imitação consiste numa reconstrução individual do que o indivíduo observa nos outros e não numa mera cópia de um modelo. Também Rogoff (1990) desenvolveu o conceito a que chamou de "guided participation" no qual se deve entender a orientação e a participação, envolvidas em atividades válidas culturalmente, são essenciais para que as crianças aprendam a pensar. Esta orientação pode ser explícita ou implícita. É num processo colaborativo entre professor e alunos e entre alunos que se desenvolvem competências que irão permitir os indivíduos (alunos) a intervirem adequadamente na sua comunidade (a turma).

Na sessão descrita sobre as relações das tabuadas, logo no início da sessão, relembrei o grupo de um dos papéis que deveria ter - "Os colegas podem ajudar a explicar melhor fazendo perguntas…". Emergiu de imediato da parte de um dos alunos, o Dionísio, um caminho que contribuiu para que as colegas que estavam com dificuldade em apresentar o seu trabalho, pudessem avançar - "É que vocês podiam dizer assim: fomos ver se havia números na tabuada do 4 que estivessem na tabuada do 2 … depois estavam a explicar que a tabuada do 4 é sempre ímpar e a do 2 é par…[mas] Eu acho que não. Eu acho que a do 2 é sempre par e a do 4 também.". No decorrer da sessão, são vários os comentários que fui fazendo no sentido de envolver o grupo e de os responsabilizar por pedirem às colegas as explicações necessárias de modo a compreenderem o que era apresentado: "Vocês estão a perceber o que é que elas querem dizer?". Silver e Smith (1996) salientam que os alunos devem sentir-se encorajados em questionarem-se uns aos outros sobre as suas ideias e sobre as suas afirmações.

Analisando a sessão coletiva de apresentação da investigação sobre o paralelogramo que ocorreu em março (5 meses depois da apresentação das tabuadas), parece ser evidente que os alunos já conseguem participar no discurso de modo adequado, sem grande interferência do professor. Questionam os colegas na tentativa de compreender as suas ideias - "Vocês disseram que os lados são todos paralelos mas aqueles lados que fazem um ângulo obtuso não são paralelos"; justificam utilizando argumentos matemáticos – "As linhas paralelas não formam ângulos entre elas, por isso…"; esforçam-se por utilizar uma linguagem cada vez mais formal – "Eles estão a falar dos que não são adjacentes."; servem-se de termos e argumentos já com algum nível de sofisticação para validarem as suas conclusões.

Em simultâneo, aos alunos que apresentavam trabalhos, também fui dando indicadores no sentido de se esforçarem por explicar as suas ideias de modo a que os colegas entendessem como se pode observar na sessão sobre as relações das tabuadas - "Vocês têm que explicar melhor para os colegas perceberem?". Tal como Silver e Smith (1996) indicam, os professores devem levar os alunos a melhorar o seu discurso matemático, através de justificações que sejam matematicamente mais significativas.

Observa-se que em março, na sessão de apresentação do paralelogramo, os alunos já conseguem usar justificações sobre as suas conclusões - "…Primeiro estivemos a ver os ângulos desta figura (…). Depois reparámos que os lados eram todos paralelos. Soubemos pela Lena que o nome estava relacionado com os lados e vimos que na definição do losango dizia que este também era um paralelogramo (…) então concluímos que esta figura [o paralelogramo obliquângulo] era um paralelogramo".

No decorrer das sessões coletivas, fui dando aos alunos reforços positivos os quais pretendia que fossem orientadores do que eu entendia como bom discurso matemático, do que eu pretendia que fosse discutido e de que modo - "Boa, Júdite! Estás a dizer que sempre … [repeti o que a aluna tinha dito]"; "Diz lá Joaquina, faz lá esse reparo que é muito importante. É sempre na do 2 que aparece um número que é igual a um da tabuada do 4, e outro não.". Como enfatizam Yackel e Coob (1996) o modo como o professor reage às respostas e soluções dos alunos são indicadores implícitos do que é valorizado matematicamente.

Para continuar a evidenciar os aspetos que me pareceram mais significativos na construção coletiva de um discurso matemático, refiro mais uma vez Yackel e Coob (1996) que nos mostram a diferença entre as normas sociais e as que denominaram de normas sociomatemáticas. Para estes autores, estas normas regulam a comunicação matemática na aula, mas também servem de base para o desenvolvimento da atividade cognitiva. Assim, para além dos indicadores e reforços que já referi, sempre que considerei oportuno, preocupei-me em mostrar, como seria um percurso de investigação. Ao levar os alunos a observarem as regularidades dos seus registos e refletirem sobre os dados que obtiveram - "Então esses números são pares ou ímpares ou há pares e ímpares?"; "são pares. – responderam vários alunos" - e chegar a conclusões - "Então uma das conclusões a que podemos chegar é...?"; "...é que na tabuada do 2 todos os números são pares. – completou o Dionísio". Desta forma tentei que os alunos construíssem a ideia de como poderiam provar uma descoberta a que chegaram e, em simultâneo, de como poderiam proceder nas investigações que realizassem. Relembro Silver e Smith (1996) que defendem a participação do professor neste questionamento, de modo a orientar o discurso e fazer emergir as ideias matemáticas, oferecendo-lhes assim o modelo de questionamento e proporcionando aos alunos expectativas explícitas de participação. Também me pareceu importante a participação da turma na redação das conclusões a que chegávamos. Seria um modo de as legitimar perante toda a nossa pequena comunidade. Aos vários contributos orientados por mim, acrescem os que surgem voluntariamente como enriquecimento do que já estava escrito. – "…e do 4. Na do 2 e do 4 – sugeriu o Jordão"; "[Digo em voz alta, enquanto escrevo as conclusões] Portanto, tanto na tabuada do 2 como na do 4 todos os números [resultados] são pares.” Parece que progressivamente, os alunos se foram apropriando de como deveriam participar neste discurso.

Foi também minha preocupação, estimular os alunos ao uso de termos matematicamente convencionais ou mais avançados. Sempre que possível, tentei ajudar os alunos a fazer paralelos entre uma linguagem mais corrente e linguagem convencional. Evidencio alguns excertos nos quais creio que essa preocupação está patente: Na sessão das regularidades da tabuada, em certo momento o Horácio e o Vítor disseram «Vezes 2.» e eu tentei conduzi-los de outro modo a fim de usarem o termo o dobro “E o que é isso de «vezes dois»?”, “é o dobro” Mais à frente, noutra intervenção insisti na utilização do termo “metade” - “Metade! Dividir por 2, Josefina… é metade.” de modo a salientar a relação inversa entre metade e dobro. Assim, por um lado fui ajudando a fazer ligações entre a linguagem corrente dos alunos e os termos matemáticos mais convencionais, por outro, tentei fomentar nos alunos a utilização desses termos no seu próprio discurso.

Realço também, a flexibilidade na condução do discurso a qual me pareceu ser relevante na condução das aprendizagens. Quando emergiram novas situações que não estavam previstas ser abordadas mas que se tornaram pertinentes para o entendimento do que se estava a tratar, deixei fluir as ideias e o discurso dos alunos - “Apesar de não ser este o tema que esperava que fosse discutido nesta sessão, apercebi-me que alguns alunos apresentavam algumas dúvidas sobre o conceito de par e ímpar. (…) Era óbvio que tinha que conduzir o discurso para a clarificação deste conceito.” (nota de campo, 20-10-2011). Silver e Smith (1996) referem que os professores devem ter uma fronteira flexível sobre os conteúdos e alternativas pedagógicas.

São várias as situações em que aproveitei as intervenções dos alunos referentes a novas constatações, para as evidenciar e levar todo o grupo a refletir sobre as mesmas. O Jordão observa a tabuada do quatro e verifica que os resultados também são todos pares - “…e do 4. Na do 2 e do 4”. De imediato, evidenciei a sua intervenção e apelei ao grupo que observa-se também esta regularidade - “Então vamos lá ver na tabuada do 4”; (…) “Então, são pares ou ímpares os números que aí estão. Ou há pares e ímpares?”. Os alunos verificaram - “4; 8;…;36; 40” - e concluíram - “pares. São pares. Só há pares.”. Nestes casos as intervenções dos alunos conduzem muitas vezes à reformulação das conclusões - “[escrevendo as conclusões] Portanto, tanto na tabuada do 2 como na do 4 todos os números [resultados] são pares”.(nota de campo 20-10-2011) Por vezes, foram estas participações que me fizeram mudar o rumo do percurso que tinha planeado.

Logo no momento seguinte, a Josefina deu o seu contributo para novas constatações - "Eu acho que as tabuadas [referindo-se ainda às tabuadas do 2 e do 4] também são pares, por isso… o número da..." (…) "Sempre que é número par… [hesitante na formulação do discurso]. O número da tabuada se é par, os números são sempre pares, não quer dizer que quando é número ímpar também não sejam pares…". Desta vez, ajudei a aluna a formular melhor a sua ideia e a fazê-lo de modo a que o grupo ouvisse. Assim mostrei a importância que tinha para mim esta intervenção - "Diz Josefina, diz. O que é que estavas a dizer? Mostra lá a tua ideia [no momento em que ouve em voz baixa um comentário pertinente de um dos alunos]". Esta intervenção terminou com a aprovação e repetição do que a aluna tinha dito e assim focar a turma nas novas conjeturas apresentadas e consecutiva análise. - "Boa, Josefina! Diz lá alto. (…) Estás a dizer que sempre que a tabuada é de número par, os números [resultados] são pares. Não quer dizer que quando for uma tabuada de número ímpar, o resultado não seja par. [repeti o que a aluna tinha dito]".

Este contínuo vai vem de ideias e assuntos emerge, quando acontece um discurso coletivo. Cobb e Bauersfeld (1995) mencionam que é no desenvolvimento deste discurso coletivo que em conjunto vão sendo construídas as ideias Matemáticas, sustentando-se umas às outras. Assim, professor e alunos partilham a construção da realidade matemática negociando continuamente os significados matemáticos (taken-as-shared). Estes autores salientam ainda a importância da ação do professor enquanto questionador orientando e reforçando os comentários que irão conduzir a níveis mais elevados de raciocínio. É fundamental existir uma grande flexibilidade por parte do professor para deixar que o percurso seja aquele que no momento faz sentido e dá sentido às aprendizagens dos alunos. Sherin, Mendez, e Louis (2000) esclarecem que enquanto os alunos explicam as suas ideias e discutem as suas estratégias criam a oportunidade do professor adequar o percurso de aprendizagem às necessidades dos alunos. É nesta teia de conceitos que se cruzam e suportam as aprendizagens. Neste discurso coletivo, os alunos vão fazendo emergir os conceitos que lhes vão dar consistência às novas aquisições. Ao professor cabe o papel de ajudar a conduzir o percurso que a turma vai definindo, realçando comentários dos alunos, devolvendo-lhes questões e ajudando a focar em novas observações. Para Vygotsky, "O professor tem o papel explícito de interferir na zona de desenvolvimento proximal dos alunos, provocando avanços que não ocorreriam espontaneamente." (Oliveira, 1993, p. 62). Contudo, parece-me importante não permitir que o discurso se disperse para caminhos que desviem muito do que se está a abordar. Em alguns momentos, tentei não permitir explorar novas conjeturas, que embora fossem semelhantes ao que se estava a tratar, já não eram passíveis de ser observadas com os dados que estavam presentes. A certa altura, a Joaquina lembrou-se dos seus conhecimentos sobre a tabuada do 5 e queria articular com o que se estava a discutir. Nesse momento a turma não estava a visualizar essa tabuada e achei melhor não deixar fluir o discurso por esse percurso - “Já investigaste a tabuada do 5?... [No momento em que o aluno refere que na tabuada do 5… esta não estava a ser observada na altura] Então tens que investigar [primeiro] tens que a relacionar com outras…”. Tentei não negar de todo a importância do que a aluna referia mas antes, provoquei-a para que ela investigasse e trouxesse à turma as suas conclusões para serem analisadas em coletivo. Tentei assim dar o modelo que não bastava dizer o que sabiam mas tinham que o demonstrar a toda a nossa comunidade de aprendizagem.

A análise referente às sessões coletivas deste estudo, evidencia a importância do papel do professor enquanto modelador e regulador da comunicação na sala de aula. Parece ser relevante o seu papel como responsável pela construção e evolução de um discurso que se pretende cada vez mais matemático.

6.1.2.2 Que funções assume o discurso dos alunos

a) Nas atividades investigativas

Nos alunos que investigaram sobre os paralelogramos, notou-se que por vezes utilizavam uma linguagem mais despreocupada «o sapato», misturada com a utilização de alguns termos convencionais «o losango, retângulo, quadrado». A utilização de uma linguagem correta, vai evoluindo progressivamente à medida que os alunos se vão apropriando (interiorizando) desses termos, quando estes já fazem parte do seu vocabulário - quando já são pertença sua. O par que investigou os paralelogramos, consegue explorar as figuras mesmo sem as identificarem corretamente. Entre parceiros estabeleceram uma linguagem cujo objetivo foi o de se entenderem sobre o que estavam a falar. “Notou-se ainda algumas imprecisões na utilização de alguns termos como é o caso do «losango» mas o que parece importante entre eles (pares), é que entendam o que o outro quer transmitir”. *(*diário de bordo, 6-3-2012)

Desafiam-se para novas experiências, formulando novas hipóteses “Não achas que aquela figura também dá? Aquela que parece um sapato.”; “Experimenta! Sinceramente um «sapato» é assim… [experimentando mexer o retângulo para ver se consegue fazer um trapézio retângulo não paralelogramo] É difícil fazer o «sapato»!”; “Tenta lá fazer o «sapato».”

Nas sessões observadas podemos constatar que os pares ponderam as afirmações dos colegas e reprovam ou corrigem as ideias que não lhes parecem corretas. Estão envolvidos na mesma atividade partilhando as mesmas experiências. Deste modo vão regulando as conjeturas que emergem. No caso do par Gonçalo e Fátima pude reparar que a Fátima contraria a ideia do colega quando este quer incluir o quadrado no grupo dos losangos. Ela não está de acordo e não aceita a ideia do colega passivamente - “Acho que o quadrado não dá. Depois fica em losango.” Por outro lado o Gonçalo acha que tem razão e contesta - “Então e depois? O losango fica em…”. O par inicia uma discussão centrada na conjetura levantada – o losango e o quadrado entram ou não no grupo dos paralelogramos? - “Sim mas o losango é este losango que não é quadrado.” (Fátima); “Vá cola lá.” (Gonçalo); “Não, este aqui não é!”. Nem um nem outro cedem à ideia do colega sem que estejam convencidos de que essa é a ideia correta.

A mesma situação se verifica nos alunos que investigavam sobre o dm^3. Quando o Gustavo faz a sua estimativa sobre o volume do cubo de 5*cm* de aresta “Sabes que eu tenho uma teoria [queria dizer estimativa] de quanto é que esse cubo leva? Leva 250. [refere-se às unidades de MAB]…250 mais 250 dá 500. 500 mais 500 é 1000.”, o Miguel não aceita passivamente as ideias do colega “Não! Não, é 250.”. Embora talvez ainda não tenha chegado a um valor, apercebe-se pela justificação do colega, que o valor não serve para o caso que estão a estudar. Esta negação faz com que o Gustavo reformule o seu raciocínio e faça uma nova estimativa - “Dá 125, eu sei.” - que desta vez parece ser aceite pelo colega. É realçado em Greenes e Shulman (1996) a importância deste tipo de comunicação por parte dos alunos, nos trabalhos de exploração e investigação matemática. Constatei que ao partilharem os seus pensamentos e descobertas, vão debatendo, avaliando e clarificando as suas ideias e estratégias para convencerem o seu par.

As explicações e clarificações de opinião são frequentes ao longo das investigações observadas. Por vezes é o par que as pede, outras vezes é o próprio que tece uma clarificação da sua ideia para que o colega possa entender a sua opinião. No caso referido anteriormente sobre a inclusão do quadrado e do losango no grupo dos paralelogramos, o Gonçalo continuou a discussão questionando a colega - “Mas porquê?”. Esta não tinha nenhum argumento válido para provar a sua ideia - “Porque não é!”. O Gonçalo insiste que a colega tenha uma explicação que o convença - “Mas porquê? Explica lá.”. A Fátima pouco confiante ainda argumenta “Olha lá, achas que este losango é a mesma coisa que este?”. No entanto sente que o seu argumento é pouco válido e recorre ao dicionário para procurar o significado de losango - “Ah, Ah! [Lendo no dicionário] Losango é um quadrilátero plano formado por quatro lados iguais. Também é um paralelogramo”. Os dois constatam que era o Gonçalo que estava com razão. Embora durante a discussão o ponto de vista destes dois alunos fosse divergente, o diálogo foi sempre centrado no tema em discussão esteve sempre presente o respeito um pelo outro não deixando no entanto de se questionarem e de se confrontarem nas ideias. Neste par podemos observar que há um equilíbrio de estatutos. Nenhum aceita o que o outro diz sem entender. Entre eles, nenhum é considerado mais competente do que o outro. Em caso de dúvida recorrem a outros meios para desempatar – nesta situação foi o dicionário.

Igualmente, na situação referida anteriormente sobre o par que investigou o dm^3, o Gustavo não se limita a afirmar um valor estimado sem demonstrar o raciocínio que o levou àquele valor - “250 mais 250 dá 500. 500 mais 500 é 1000.”. Esse procedimento terá levado o Miguel a verificar o engano do colega e a refutar esse valor - “Não! Não, é 250.” - fazendo com que o Gustavo reformulasse os seus cálculos - “Dá 125, eu sei... 8 vezes 125 é mil. Mil a dividir por 4 dá 250. 250 a dividir por 2 é 125.”.

Geralmente a orientação do trabalho não surge como uma combinação antecipada entre o par. O padrão que se verifica neste caso é que um avança na sua ideia e quando está a executar é intersectado pelo colega que questiona o que está a ser feito. Nesses momentos surge uma explicação que pode ser logo aceite ou pode ser contestada. O Gonçalo, quando começa a marcar os lados das figuras segundo as suas posições relativas, constata e comenta - “Aaah! Pois é… Repara – paralelas, paralelas; paralelas, paralelas; paralelas, paralelas!” A Fátima nesse momento entende o que o colega quer dizer e aderindo à ideia, quer reforçar essa evidência - “Huuummm! Mas espera aí, então usa outras cores.”.

É evidente a partilha resultante da interação do par dos paralelogramos. Ambos assumiram o papel de questionadores sempre que não entendiam o que o colega fazia; estiveram atentos ao trabalho do outro, corrigindo-se em algumas situações ou exigindo esclarecimentos; aderiram às iniciativas do colega sempre que as acharam pertinentes; apelaram à atenção do parceiro nas novas descobertas.

Nesta turma surgiu uma cultura de partilha de saberes. Estamos perante uma comunidade de aprendizagem em que todos podem interagir. Estas interações são genuínas e aparecem por verdadeiro interesse em entender o que os outros estão a investigar. No final do trabalho sobre o dm^3, quando o par envolvido explica o seu trabalho, outros dois alunos intervêm por interesse no trabalho e questionam com o objetivo de perceberem o que os colegas estão a transmitir - “Como assim um oitavo?” (Jordão); “Porque um quarto era metade disto (fig. 40) ... então metade vai ser um oitavo!” (Horácio).

b) Nos momentos coletivos

Com o envolvimento dos alunos nas discussões sobre os assuntos que foram apresentado pelos colegas, surgiram vários contributos que ajudaram a um melhor entendimento dos conceitos inerentes. Umas vezes foram as próprias observações e constatações que efetuaram num determinado momento, outras vezes foram as dúvidas que levantaram e que permitiram esclarecimentos, por parte dos colegas ou por mim, sobre o que estava a ser discutido.

Na sessão sobre as regularidades da tabuada, após a turma ter concluído que na tabuada do 2 os resultados eram todos pares, o Jordão constata e comenta: “…e do 4. Na do 2 e do 4”. Fomos então observar o que o Jordão tinha conjeturado chegando a turma à conclusão que: “pares. São pares. Só há pares” - todos os resultados desta tabuada também eram pares. No entanto, tinha sido a dúvida sobre os números pares e ímpares trazida pelo Dionísio, que nos tinha conduzido à discussão desta regularidade nas tabuadas - “É que na do 4 é sempre ímpar e na do 2… [interrompido pelos colegas que contestam]…não [enganei-me]. É sempre par. Mas na do 2 não.” “Na do 2 não? Vês ali algum ímpar?[comentário do Jordão]” “Vejo, 38” “38 é par…[comentário de vários alunos]”. Neste pequeno excerto, evidencia-se a participação dos colegas na tentativa de esclarecimento ao Dionísio.

Mais à frente, a Josefina formula uma nova hipótese e conduz o grupo a novas observações, orientando a discussão para alguma generalização. “Eu acho que as tabuadas [referindo-se ainda às tabuadas do 2 e do 4] também são pares, por isso… o número da…” (…) “Sempre que é número par… [hesitante na formulação do discurso]. O número da tabuada se é par, os números são sempre pares, não quer dizer que quando é número ímpar também não sejam [alguns] pares…”. Um pouco apoiada por mim e ajudada no seu discurso, a Josefina acabou por guiar o grupo para outro rumo de observações. O Dionísio aderindo à ideia da colega constata que “Os pares,… [quando se multiplicam] são [dão sempre números] todos pares”. Parece que este discurso encadeado e partilhado por diferentes elementos, vai levando os alunos a aprofundarem e a evoluírem nos conceitos inerentes ao tema em discussão. Oliveira (1993) destaca a importância das interações entre os alunos as quais vão provocar intervenções nos seus desenvolvimentos. Segundo a autora, Vygotsky defende que as crianças privilegiam as interações sociais para aceder às informações ao invés de um empenho estritamente individual. Para Pimm (1987) é na verbalização das ideias, é quando precisamos de as explicar aos outros, que reformulamos o nosso discurso e é nesse processo de reflexão que nos aproximamos do nosso próprio pensamento.

Com os mesmos exemplos retirados da sessão das regularidades da tabuada, podemos observar a mudança de percursos que os alunos incutiram quando fizeram novas observações. Iniciámos a sessão observando os resultados que se repetiam nas tabuadas do 2 e do 4. Devido a um discurso mal formulado por parte de uma das alunas que estava a apresentar, surgiu alguma confusão entre números pares e números ímpares. Um dos alunos, o Dionísio, mostrou algumas incertezas sobre a paridade dos números. Estas incertezas, levaram a uma mudança do percurso que estávamos a fazer. Surgiu a necessidade de esclarecer este tema. Com o decorrer da discussão, outra aluna, a Josefina, possivelmente por estar influenciada com a discussão da paridade dos números, altera de novo o percurso, desta vez para nos fazer observar a regularidade da paridade dos resultados destas duas tabuadas. Creio que todas estas oscilações entre assuntos que se interligam, ajudam a suportar, a construir ou a consolidar melhor os conceitos que estão intrínsecos. Moysés refere que segundo Vygotsky, a formação de conceitos surge num movimento do pensamento entre os diferentes conceitos hierarquizados em pirâmide, numa constante oscilação do particular para o geral e do geral para o particular (1997).

Na continuação do diálogo, podemos observar que o discurso foi continuando a sofrer modificações. Uma outra aluna, Margarida, levou-nos a observar os padrões que estas tabuadas faziam na sequência dos resultados. Concluiu-se com a observação dos resultados da tabuada do 4 serem o dobro dos resultados correspondentes da tabuada do 2.

Estas mudanças de percurso resultaram das necessidades que os alunos evidenciaram no momento em que estruturavam o seu conhecimento. Parece que à medida que querem estruturar interiormente o novo entendimento, sentem a necessidade umas vezes de se apoiarem em conhecimentos já adquiridos outras vezes em fazerem ligações com novas observações efetuadas. Muitas vezes, estas novas observações parecem funcionar como validações do conhecimento que se está a estruturar.

6.1.3 De que forma os conhecimentos anteriores são usados para fundamentar as opiniões apresentadas?

a) Nas atividades investigativas

O par que investigou as propriedades dos paralelogramos iniciou o seu estudo observando os ângulos e verificaram que a figura só tinha ângulos agudos e obtusos. Mesmo entre eles, onde frequentemente surgem vocábulos menos formais, identificam corretamente estes ângulos mostrando assim uma boa apropriação deste conceito. Por outro lado, também foram observar os lados da figura - “observámos que a figura tinha linhas oblíquas e também paralelas” – mostrando uma boa apropriação de conceitos que tinham sido abordados anteriormente noutros trabalhos. Ao longo da sua investigação, este par foi procurando regularidades e semelhanças entre as várias figuras que lhes ocorria como passíveis de se encaixarem no grupo do paralelogramo obliquângulo. Procurar regularidades e semelhanças foi uma prática que sempre procurei instituir neste grupo.

A certa altura da investigação da metade do dm^3, um dos alunos está a medir com os cm^3 do material “MAB” o cubo de 5*cm* de aresta e o seu par interpela-o levantando uma estimativa sobre qual seria a quantidade de cm^3 que iriam precisar para encher aquele cubo - “Sabes que eu tenho uma teoria [queria dizer estimativa] de quanto é que esse cubo leva? Leva 250. [refere-se às unidades de MAB]… 250 mais 250 dá 500. 500 mais 500 é 1000.” Embora a sua estimativa estivesse errada, levou o par a refletir sobre a relação algébrica que estava patente na medição do volume. O colega corrigiu prontamente - “Não! Não, é 250.”. Simultaneamente, parece que o primeiro aluno deu conta do seu engano e autocorrigiu-se “Dá 125, eu sei… 8 vezes 125 é mil. Mil a dividir por 4 dá 250. 250 a dividir por 2 é 125.” Mobilizaram conhecimentos anteriores que tinham acabado de atestar nas suas investigações junto com conhecimentos algébricos articulados com a medição.

Ao agirem sobre as entidades Matemáticas, os alunos vão interagindo com os conhecimentos que já possuem, na tentativa de interpretar o que estão a observar. Deste modo vão construindo as novas conceções suportadas pelos conceitos já adquiridos anteriormente.

b) Nos momentos coletivos

Na 2ª parte da sessão sobre a regularidade das tabuadas, os alunos Horácio e Dionísio, iniciam a sua apresentação, focando que os números da tabuada do 8 são o quádruplo dos respetivos números da tabuada do 2 e reciprocamente os números da tabuada do 2 são um quarto dos respetivos resultados na tabuada do 8. Embora esta conclusão já estivesse escrita nos seus registos, talvez por termos acabado de estar a discutir esse assunto em relação às tabuadas anteriores, eles iniciaram com essa comparação. Contudo, se olharmos para os seus registos, podemos observar que os alunos utilizaram a fração $\frac{1}{4}$ como operador, na investigação sobre as regularidades das tabuadas.

Na 3ª parte da mesma sessão, a Josefina inicia a apresentação com a observação do padrão que estava patente na tabuada - “Nós vimos que… é padrão no algarismo das unidades a tabuada do 4.”. Nesta frase bem como no registo que suportou a comunicação, mostram alguma preocupação em utilizar termos mais precisos - algarismo das unidades. Outro aspeto que estas alunas mostraram estar muito despertas, foi o da observação de padrões. Já no ano anterior tínhamos trabalhado algumas situações de padrões tanto numéricos como geométricos e estas alunas parecem saber utilizar adequadamente os seus conhecimentos para a investigação que fizeram. Ainda nesta parte da sessão, o Dionísio utiliza o seu conhecimento sobre os múltiplos comuns, para questionar as colegas - "Estou a perguntar por múltiplos comuns nas duas tabuadas."

Meses mais tarde, como é exemplo a sessão de apresentação do paralelogramo em março, parece haver uma maior utilização dos conhecimentos anteriores para fundamentarem as suas opiniões - "Eu acho que o retângulo não é um paralelogramo porque tem os ângulos retos."; "Está bem, mas para ser retângulo tem que ter sempre os ângulos retos."; "Mas o trapézio [não paralelogramo] não tem os lados paralelos iguais."; "... e tem que ter os lados (…) opostos paralelos. O trapézio [não paralelogramos] não tem todos os lados opostos paralelos.".

Comentários finais:

Em síntese verifica-se que as interações entre os alunos assumem um papel importante na construção do conhecimento matemático e que as investigações sugerem um maior significado matemático proporcionando aos alunos uma atitude positiva face a esta disciplina.

Nas sessões de trabalho em coletivo onde ocorria a discussão sobre as investigações que faziam, os alunos foram adequando progressivamente o seu discurso. A partilha de ideias a tentativa de compreender as estratégias e as ideias do outro foram-se tornando uma prática comum no grupo. O próprio discurso foi evoluindo no sentido de ser mais claro e com justificações progressivamente mais elaboradas.

No decorrer do ano, as investigações tornaram-se cada vez mais frequentes havendo por vezes investigações diferentes (feitas por grupos distintos), na mesma sessão de trabalho. Os alunos foram-se tornando mais autónomos e mais organizados no seu trabalho.

A discussão das investigações nos momentos coletivos permitiu a partilha das descobertas feitas pelo grupo que investigou, a consciencialização de ideias que apoiaram o conhecimento que estava a ser estruturado e ainda a deteção de fragilidades nas aprendizagens. O conhecimento matemático foi sendo construído e regulado em coletivo e o percurso curricular foi sendo traçado consoante as necessidades de conhecimento que surgiam.

6.2 Reflexão

Considerando a minha posição de professora investigadora nesta investigação, este estudo marcou fortemente o meu desenvolvimento profissional, permitindo-me analisar como a dinâmica de trabalho que desenvolvi com os meus alunos lhes proporcionou o desenvolvimento dos conhecimentos de matemática.

Embora o ambiente de trabalho fosse já o de uma comunidade de aprendizagem onde ocorria a partilha de saberes, no que respeita à Matemática iniciei uma prática diferente sustentada pelas investigações dos alunos e como prática recente, deparei-me com algumas incertezas ao longo de todo o percurso. Diria mesmo que foi uma dinâmica que junto com os meus alunos se foi reconstruindo e modificando à medida que o tempo ia avançando. Para esta regulação também foram contribuindo as reflexões que ia fazendo e a visualização das gravações. Por outro lado, à medida que íamos avançando neste percurso, tornavam-se mais sólidas as minhas convicções sobre a importância dos alunos desenvolverem os seus conhecimentos matemáticos através das suas investigações e da posterior discussão na turma. A crescente motivação e gosto que foram mostrando pelo trabalho de Matemática seria só por si um fator favorável a este tipo de dinâmica mas, ao analisar o modo como foram evoluindo nos seus argumentos e nas suas justificações e de como foram capazes de desenvolver as suas investigações cada vez com maior autonomia mostra-me que é possível os alunos se apropriarem do currículo com base neste tipo de trabalho.

Notei que novos assuntos para pesquisar emergiam constantemente das sessões em coletivo. Realço a pertinência de não ter antecipado as respostas e ter devolvido essas questões ao grupo pois as questões levantadas ou as hipóteses formuladas alimentaram o trabalho de investigação e traçaram o percurso curricular. Saliento ainda a importância de conhecer o programa curricular do Ensino Básico permitindo-me utilizar questões emergentes do diálogo dos alunos para a condução de temas que fossem ao encontro do mesmo programa.

Na cultura de grupo que se foi instalando ao longo do ano, os alunos foram-se apropriando de várias etapas de uma investigação científica na medida em que levantaram hipóteses, experimentaram e depois provavam-nas ao grupo-turma. Em algumas situações ainda estimaram ou formularam novas conjeturas. Justificavam as suas ideias aos colegas e reformulavam sempre que se apercebiam que estas não estavam corretas. Por outro lado, também questionaram ou rejeitaram as justificações dos colegas quando estas não satisfazem o seu entendimento sobre o assunto e principalmente acreditaram que podiam investigar, que eram capazes de descobrir relações e regularidades matemáticas. Com este vivenciar de uma atividade Matemática mais significativa consegui proporcionar-lhes uma atitude positiva face à Matemática.

Contudo, senti fragilidades que requerem algumas retificações. Em algumas sessões coletivas, a participação do grupo diminuía sobretudo no que respeitava aos alunos que apresentavam maior insegurança em Matemática. Estes alunos tendencialmente participavam mais nas sessões em que apresentavam os seus trabalhos ou que também eles tinham estado envolvidos em investigações semelhantes. Neste sentido, uma das práticas que no futuro pretendo incrementar nos momentos em que ocorrem apresentações de investigações, é a de proporcionar aos outros alunos algumas tarefas que os possam envolver no mesmo assunto (talvez até possa prepará-las com os alunos que vão apresentar as investigações). Verifiquei também que em algumas investigações os materiais que os alunos utilizaram tornaram-se um pouco limitadores. Seria bom que os alunos fossem diversificando os materiais para abordar o mesmo assunto. Tomando como exemplo a investigação dos paralelogramos em que os alunos só utilizaram as barras articuladas, talvez a utilização de outros recursos como o geoplano ou um programa de computador (de geometria) poderia ter permitido uma melhor experimentação. Como nem sempre foi possível acompanhar todos diretamente, tornou-se difícil sugerir estas estratégias. Seria bom que no decorrer das investigações o professor pudesse pontualmente se aperceber do ponto da situação e ajudasse mais a orientar o percurso dessas investigações. Outra dificuldade que senti foi a de incrementar nas rotinas dos alunos o registo de todas as etapas das suas investigações. Habitualmente os seus registos continham as conclusões a que tinham chegado e tinham poucas informações sobre o percurso feito. Talvez seja necessário encontrar um maior significado para estes registos para que os alunos se apropriem dessa rotina.

Em síntese, creio que esta dinâmica de trabalho é vantajosa para a aprendizagem da Matemática trazendo benefícios tanto para a aquisição de conhecimento mais significativo como para o desenvolvimento de atitudes positivas face à Matemática.

Referências Bibliográficas

Alro, H. e Skvsmose, O. (2006). *Diálogo e Aprendizagem em educação Matemática.* São Paulo: Autêntica.

Boavida, A. M. (2005). A argumentação na aula de Matemática: Olhares sobre o trabalho do professor. *Atas do XVI Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 13-43). Setúbal: APM.

Bogdan, R. e Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos* . Porto: Porto Editora.

César, M. (1994). O papel da interacção entre pares na resolução de tarefas matemáticas: trabalho em díades vs. trabalho individual em contexto escolar. *Dissertação de doutoramento.* Lisboa: DEFCUL.

Christiansen, B. e Walther, G. (1986). Task and activity. In A. G. B. Christiansen, *Perspectives on mathematics education* (pp. 243-307). Dordrecht: D. Reidel.

Cobb, P., & Bauersfeld, H. (1995). The Coordination of Psychological and Sociological Perspectives in Mathematics Education. In P. Cobb, & H. Bauersfeld, *The Emergence of Mathematical Meaning.*

Cobb, P., Boufi, A., McClain, K., & Whitenack, J. (1997). Reflective Discourse and Collective Reflection. *JRME*, 258-277.

Ernest, P. (1996). Investigações, Resolução de Problemas e Pedagogia. In P. Abrantes, P., L. Leal, e J. P. Ponte, *Investigar para aprender Matemática.* APM.

Greenes, C. e Schulman, L. (1996). Communication Processes in Mathematical Explorations and Investigations. In NCTM, *1996 Yearbook - Communication in Mathematics, K-12 and Beyond* (pp. 159-169). NCTM.

Guerreiro, A. M. (2007). Comunicação: da Transmissão à Interação. Desafio Colaborativo no 1º ciclo do ensino básico. *XVIII SIEM.* Angra do Herroísmo - Açores.

Lampert, M., & Cobb, P. (2003). Communication and Language. In J. M. Kilpatrick, *A Research Companion to Principles and Standars for school Mathematics* (pp. 237-249). NCTM.

Lave, J. (1999). The culture of acquisition and the practice of understanding. In *Cultural Psychology.* Cambridge: Cambridge University Press.

Léssart-Hérbert, M., Goyette, G. & Boutin, G. (2005). *Investigação Qualitativa: Fundamentos e práticas.* Lisboa: Instituto Piaget.

Martins, C., et al (2002). O trabalho investigativo nas aprendizagens iniciais da matemática. In Ponte, J. P. et al, *Atividades de Investigação na Aprendizagem da Matemática e na*

Formação de Professores (pp. 59 – 82). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Menezes, L. (2010). Concepções sobre a comunicação matemática de uma futura Professors. *Investigação em Educação Matemática - Comunicação no Ensino e na Aprendizagem da Matemática* (pp. 238-253). Caparica, Portugal: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: ME. DGIDC.

Moysés, L. (1997). *Aplicações de Vygotsky à Educação Matemática.* Campinas: Papirus editora.

NCTM. (1994). *Normas Profissionais para o Ensino da Matemática - Versão portuguesa.* APM e IIE.

Niza, S. (1998). A organização social do trabalho de aprendizagem no 1º ciclo do ensino básico. *Revista Escola Moderna, MEM*.

Niza, S. (2009). Editorial . *revista Escola Moderna nº 35, 5ª série, MEM*.

Niza, S. (2010). Editorial. *revista Escola Moderna nº 37, 5ª série, MEM*.

Niza, S. (2012). A organização social do trabalho de aprendizagem no 1º ciclo do ensino básico. In S. Niza, *escritos sobre educação* (pp. 353-379). Lisboa: Tinta da China.

Niza, S. (2012). A socialização dos produtos culturais da escola. In S. Niza, *Escritos sobre Educação* (pp. 405-406). Lisboa: Tinta da China.

Niza, S. (2012). Contextos cooperativos e aprendizagem profissional. A formação no Movimento da Escola Moderna. In S. Niza, *Escritos sobre a educação* (pp. 599-616). Lisboa: Tinta da China.

Niza, S. (2012). Todo o trabalho humano requer a idealização de um projeto. In S. Niza, *Escritos sobre a educação* (pp. 520-522). Lisboa: Tinta da China.

Oliveira, M. K. (1993). *Vygotsky: Aprendizado e Desenvolvimento um Processo Sócio-Histórico*. S. Paulo: Ed. Scipione.

Pedrosa, M. H. (2000). A Comunicação na sala de aula: As perguntas como elementos estruturadores da interação didática. In C. Monteiro et al *Interações na aula de Matemática*. Viseu: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Pimm, D. (1987). *Speaking Mathematically: Communication in Mathematics Classrooms.* New York: Routledge.

Ponte, J. P., Brocardo, J., e Oliveira, H. (2003). *Investigações matemáticas na sala de aula.* Belo Horizonte.

Ponte, J. P. e Matos, J. M. (1996). Processos Cognitivos e Interações Sociais nas Investigações Sociais Matemáticas. In P. Abrantes, e L. C. Leal, *Investigar para aprender Matemática.* Lisboa: APM.

Ponte, J. P., e Serrazina, L. (2000). *Didática da Matemática para o 1º ciclo do ensino básico*. Lisboa: Universidade Aberta.

Reynolds, A. M., Wheatley, G. H. (1992). The elaboration of images in the process of mathematics making. . *Proceedings of the 16th International Group for Psycology of Mathematics Education Conference* (pp. II-242-II-249). Durham, NH.

Rodrigues, M. (2010). O processo de demonstrar na aula de Matemática: Um olhar sobre a comunicação emergente. *Investigação em Educação Matemática - Comunicação no Ensino e na Aprendizagem da Matemática* (pp. 24-50). Caparica, Portugal: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.

Rogoff, B. (1990). *Apprenticeship in Thinking: Cognitive Development in Social Context*. Nova York: Oxford University Press.

Sfard, A. (1996). On Acquisition Metaphor and Participation Methafor for Mathematics Learning. In C. Alsina, et al *8th InternationalCongress on Mathematics Education Seleted Lectures* (pp. 397 – 411). Sevilha: SAEM TAALES.

Sherin, M., Mendez, E., & Louis, D. (2000). Talking about Math Talk. In NCTM, *Yearbook 2000: Learning Mathematics for a New Century* (pp. 188-196). NCTM.

Silver, E. A., & Smith, M. S. (1996). Building Discourse Communities in Mathematics Classrooms:. In NCTM, *Yearbook 1996: Communication in Mathematics K-12 and Beyond* (pp. 20-28). NCTM.

Walle, J. A. (2004). *Elementary and Midle School Mathematics.* Boston: Pearson Education.

Wenger, E. (2008). Communities of Practice, Learning, Meaning, and Identity. Cambridge University Press.

Wenger, E. Comunities of Pratice. http://www.ewenger.com/theory. Consultado em 10/12/2012

Yackel. (1995). Children's Talk in Inquiry Mathematics Classrooms. In H. B. Paul Cobb, *The Emergence of Mathematical Meaning.* Routledge.

Yackel, E., & Coob, P. (1996). Normas sociomatemáticas, argumentação e autonomia em matemática. *JRME*.

Zuckerman, G. (2003). The Learning Activity in the First Years of Schooling. In B. G. Alex Kozulin, *Vygotsky's Educational Theory in Cultural Context* (pp. 177-199). Cambridge University Press.

Anexos

Anexo I

PIT – Plano Individual de Trabalho

(Instrumento regulador do trabalho semanal em TEA – Tempo de Estudo Autónomo)

P.I.T. (Plano Individual de Trabalho) 4º ano

P.I.T. nº

Nome:

Responsabilidades:____

	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	Total
Código						
Tempo						

	Atividades	Previsto	O que fiz	Revisões	Realizados
Português	Textos				
	Melhorar texto				
	Fichas de Leitura				
	Fichas de ortografia				
	Fichas de gramática				
	Ditado a pares				
	Leituras				
Matemática	Fichas de Matemática				
	Inventar problemas				
	Resolver problemas / F. Problemas				
	Atividades investigativas				
Outros					
	Total			*Total*	

Apoios e Parcerias:	*com quem:*	*O quê:*	dia	*com quem:*	*o quê:*	dia

A minha avaliação:	Comentários dos colegas e do professor:

Trabalhos a rever:

Anexo II

Tópicos do Programa para atividades Investigativas e Exploratórias

(Tabela com alguns tópicos do programa para os alunos investigarem e/ou explorarem)

<table>
<tr><th colspan="3">Geometria</th></tr>
<tr><th colspan="2">Orientação espacial</th><th></th></tr>
<tr><th>Tópico</th><th>Investigar/Explorar</th><th>Atividades/materiais</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Posição e localização</td><td>- Posições direções e movimentos</td><td rowspan="4">Utilização de:
• Geoplano
• Grelhas
• Mapas
• Plantas
• Materiais para construção de maquetas</td></tr>
<tr><td>- Posições e figuras em grelhas quadriculadas através de coordenadas</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Mapas plantas e maquetas</td><td>- Utilização de mapas e plantas</td></tr>
<tr><td>- Utilização de maquetas</td></tr>
<tr><th colspan="2">Figuras no plano e sólidos geométricos</th><td></td></tr>
<tr><td rowspan="6">Propriedades e classificação. Planificação</td><td>- Processos de classificação de figuras planas</td><td rowspan="6">Utilização de:
• Geoplano
• Barras
• Geogebra
• Papel e recorte
• Papel ponteado
• Papel quadriculado
• Régua e esquadro
• … outros…</td></tr>
<tr><td>- Propriedades das figuras planas</td></tr>
<tr><td>- Diferentes maneiras de desenhar as figuras planas</td></tr>
<tr><td>- Processos de classificação de sólidos geométricos</td></tr>
<tr><td>- Propriedades dos sólidos geométricos</td></tr>
<tr><td>- Construção e planificação de sólidos geométricos</td></tr>
<tr><td>Círculo e circunferência</td><td>- Relações entre o círculo, a circunferência, o raio e o diâmetro</td><td>Utilização de:
• Compasso
• Objetos circulares</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Ângulo</td><td>- Diferenças entre os ângulos</td><td></td></tr>
<tr><td>- A existência dos ângulos</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Relações espaciais</td><td>- Simetrias</td><td>Utilização de:
• Espelhos, miras, etc…
• Geogebra
• Moldes
• Compasso</td></tr>
<tr><td>- Pavimentações</td><td>Utilização de:
• Moldes de figuras planas
• Geogebra</td></tr>
</table>

Medida		
Comprimento, massa, capacidade, área e volume		
Tópico	**Investigar/Explorar**	**Atividades/materiais**
Medida e medição Unidades de medida do SI	- Comprimentos medindo, comparando e ordenando	Utilização de: • Balanças de diferentes tipos • Medidores de capacidade • Metro, fita métrica, régua, pedómetro, etc… • Garrafas • Objetos de uso diário • Espaços
	- Capacidades medindo, comparando e ordenando	
	- Massas medindo, comparando e ordenando	
	- Processos de estimação das diferentes medidas de grandeza	
	- Qual o instrumento de medição mais adequado	
	- Medição de perímetros (de polígonos e de bases circulares)	
	- O cálculo de perímetros de polígonos	
	- A construção de polígonos com um dado perímetro	
Áreas ➢ Medida e medição ➢ Unidades de medida do SI	- O cálculo de áreas de diferentes superfícies	
	- A construção de polígonos com uma determinada área	
	- Como estimar áreas de figuras irregulares, por enquadramento	
Volumes ➢ Medida e medição ➢ Unidades de medida do **SI**	- O volume do cubo	
	- O volume de outros sólidos	
	- Como estimar o volume de paralelepípedos	
	- Como calcular o volume de paralelepípedos	

Organização e tratamento de dados		
Representação e tratamento de dados		
Tópico	**Investigar/Explorar**	**Atividades**
Situações aleatórias	- Situações aleatórias que envolvam o acaso	Utilização de: • Nomes de um grupo • Dados • Moedas • Objetos de diferentes cores …
	- Situações em que se utilize os diferentes vocábulos: certo, possível, impossível, provável e improvável	
	- A previsão sobre o que se vai investigar	

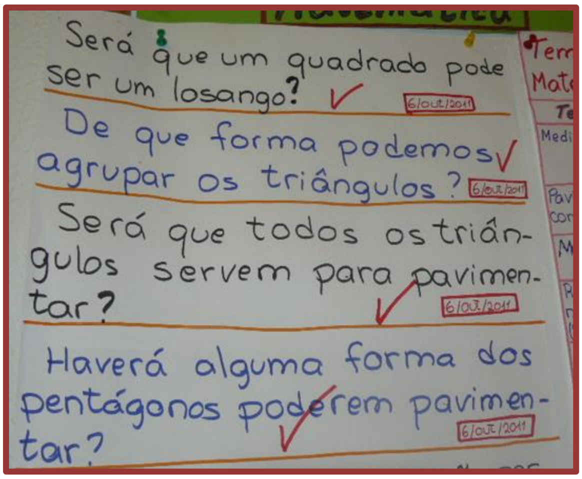
Números e Operações		
Números naturais		
Relações numéricas; Múltiplos e Divisores		
Tópico	**Investigar/Explorar**	**Atividades/materiais**
Múltiplos	- Múltiplos de um número natural	
	- Relações entre múltiplos de números diferentes	
	- Regularidades nos múltiplos de um número	
Divisores	- Divisores de um número natural	
	- Relações entre divisores de números diferentes	
	- Relações entre divisores de um número e os divisores dos seus múltiplos	
	- Relações entre os múltiplos de um número e os múltiplos dos seus divisores	
Operações com números naturais		
Adição	- Diferentes processos escritos (algoritmos) para a adição de números naturais (com e sem composição) por mais de dois números (parcelas)	
	- Estratégias que possam facilitar o cálculo mental na adição	
	- Regularidades na adição (propriedades)	
Subtração	- Diferentes processos escritos (algoritmos) para a subtração de números naturais (com e sem decomposição)	
	- Estratégias que possam facilitar o cálculo mental na subtração	
	- Regularidades na subtração (propriedades)	
	- A relação entre a adição e a subtração	
Multiplicação	- Diferentes processos escritos (algoritmos) para a multiplicação de números naturais por mais de um algarismo	
	- Estratégias que possam facilitar o cálculo mental na multiplicação	
	- Regularidades na multiplicação (propriedades)	
	- Regularidades entre as tabuadas	
	- Os padrões em cada tabuada	
	- Regras para calcular o produto de um número por 10; 100; 1000	
Divisão	- Diferentes sentidos da divisão	
	- Significados do quociente na divisão inteira	
	- Significados do resto na divisão inteira	
	- Diferentes processos escritos (algoritmos) para a divisão de números naturais por um e por dois algarismos	
	- Estratégias que possam facilitar o cálculo mental na divisão	
	- Regras para calcular a divisão de um número por 10; 100; 1000	
Regularidades		
Sequências	- Regularidades numéricas (tabelas)	
	- Regularidades em sequência de figuras e relacioná-las com os padrões numéricos implícitos (relação algébrica)	

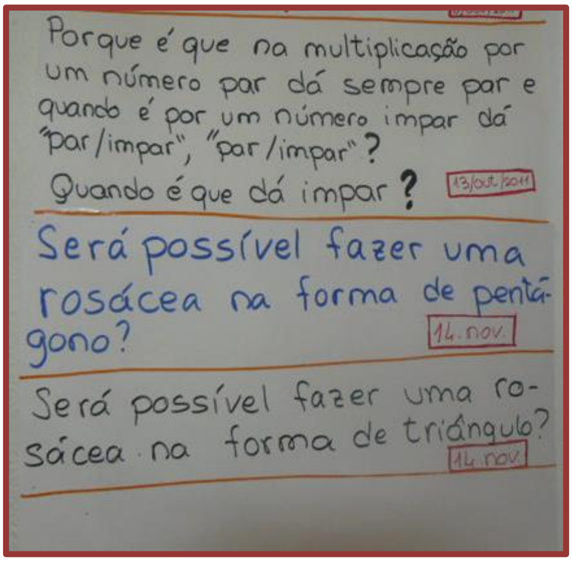
Números e Operações		
Números racionais não negativos		
Frações; Decimais		
Tópico	**Investigar/Explorar**	**Atividades/materiais**
Frações	- Diferentes sentidos das frações	
	- Relações entre frações, representação decimal de números racionais e percentagens	
	- Diferentes representações da unidade através das suas partes	
	- O posicionamento de diferentes números racionais na reta numérica	
Decimais	- Relações de ordem entre números racionais de representação decimal	
	- O posicionamento de diferentes números racionais de representação decimal, na reta numérica	
Operações com números racionais (rep. Decimal)		
Adição com números decimais	- Diferentes processos escritos (algoritmos) para a adição de números decimais (com e sem transporte) por mais de dois números (parcelas)	
	- Estratégias que possam facilitar o cálculo mental na adição com decimais	
	- Regularidades na adição com números decimais (propriedades)	
Subtração com números decimais	- Diferentes processos escritos (algoritmos) para a subtração de números decimais (com e sem “empréstimo”)	
	- Estratégias que possam facilitar o cálculo mental na subtração com decimais	
	- Regularidades na subtração com números decimais (propriedades)	
Multiplicação com números decimais	- Diferentes processos escritos (algoritmos) para a multiplicação de números decimais (com e sem “empréstimo”) por mais de um algarismo	
	- Estratégias que possam facilitar o cálculo mental na multiplicação com decimais	
	- Regularidades na multiplicação com números decimais (propriedades)	
	- Regras para calcular o produto de um número decimal por 10; 100; 1000	
	- Regras para calcular o produto de um número natural ou racional de rep. decimal por 0,1; 0,01; 0,001	
Divisão com números decimais	- Diferentes processos escritos (algoritmos) para a divisão de números decimais por um e por dois algarismos	
	- Estratégias que possam facilitar o cálculo mental na divisão	
	- Regularidades na divisão com decimais (propriedades)	
	- Regras para calcular a divisão de um número decimal por 10; 100; 1000	
	- Regras para calcular a divisão de um número natural ou racional de rep. decimal por 0,1; 0,01; 0,001	
	- Relações entre a multiplicação e a divisão por 10; 100; 1000 e por 0,1; 0,01; 0,001	

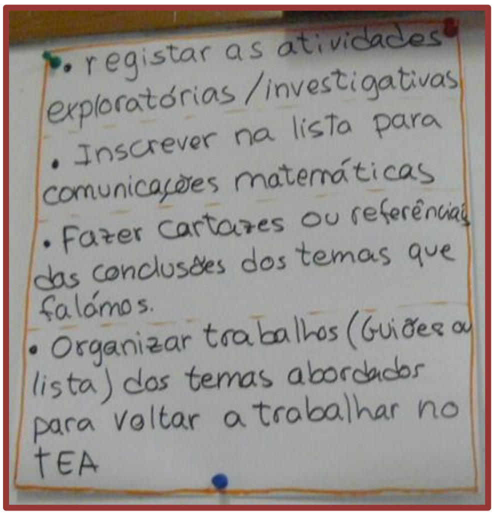
Anexo III

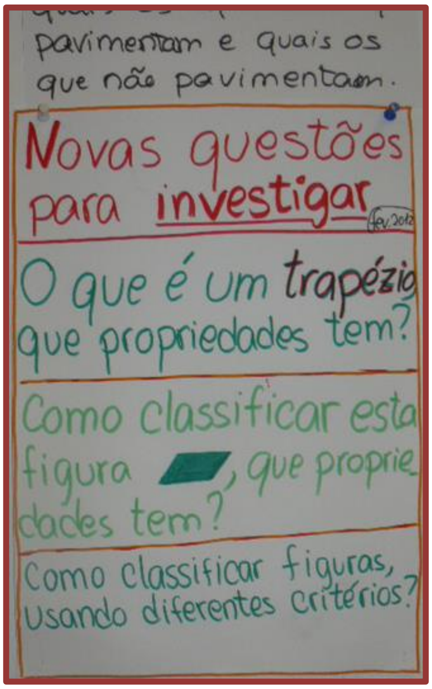
Questões para investigação

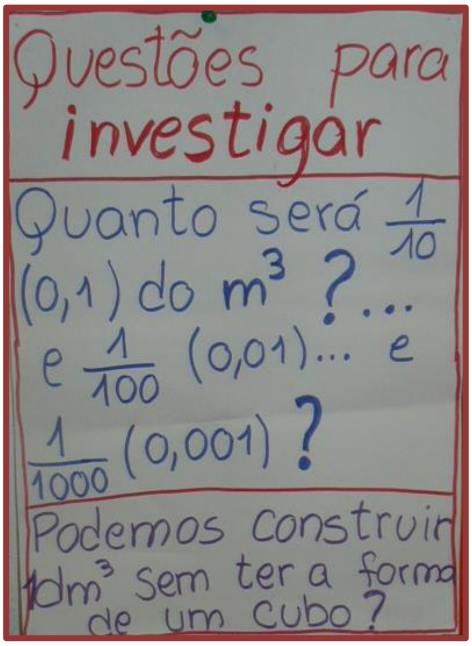
(Questões que foram emergindo das discussões em coletivo)







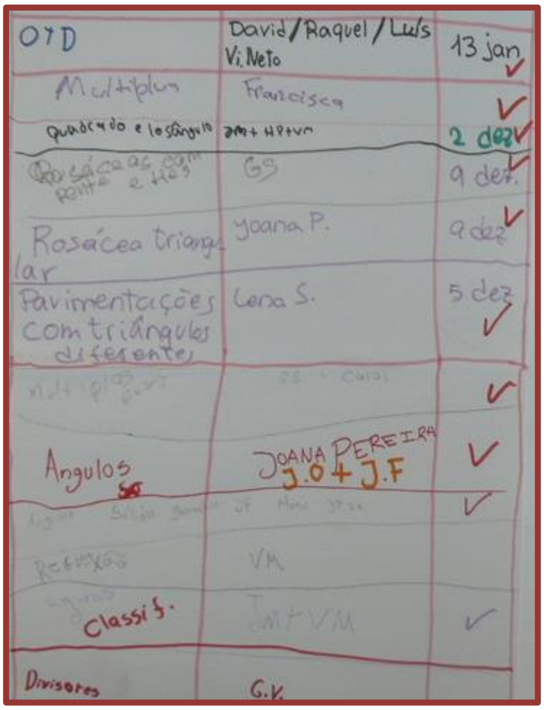


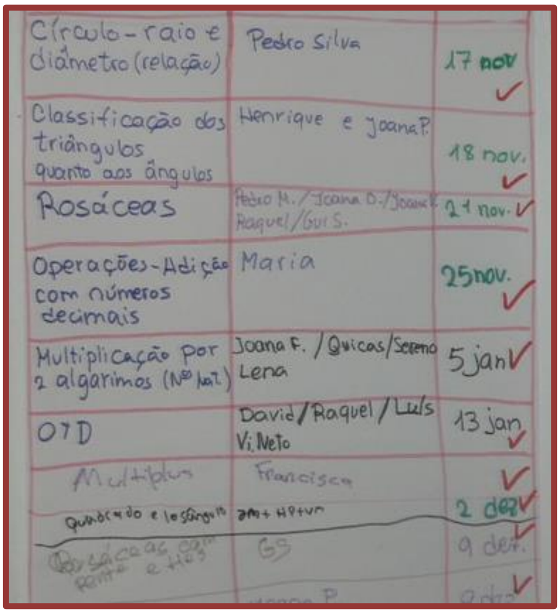


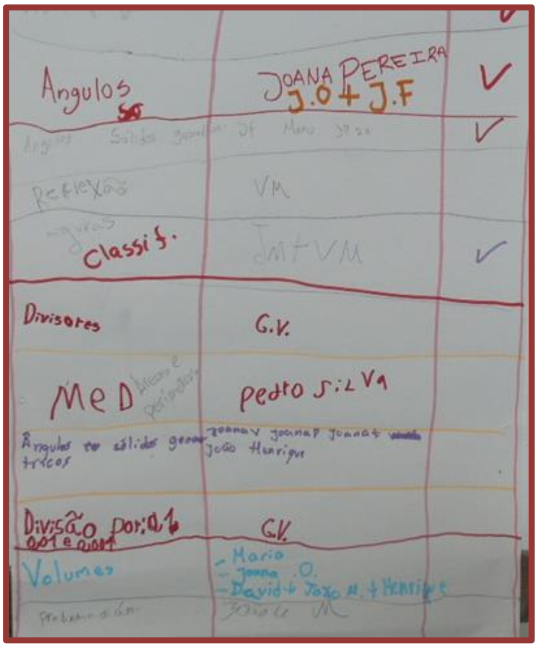
Anexo IV

Registo das investigações para comunicar

(Tabela onde os alunos se inscreviam para comunicar a sua investigação. Depois decidia-se o dia e marcava-se na agenda)







Anexo V

Materiais 1: ***Investigação dos Paralelogramos***

(Alguns materiais referidos na investigação sobre os paralelogramos. Estes materiais estavam à disposição dos alunos e eles utilizaram-nos muito para explorarem/investigarem as figuras planas)

Caixas com figuras geométricas

Barras articuladas

Anexo VI

Materiais 2: *Investigação sobre o dm^3*

(Alguns materiais referidos na investigação sobre o dm^3. Este material é referido como MAB – *multi básico* – está estruturado para representações de base 5 e base 10. Nesta turma os alunos constataram que o cubo mais pequeno tinha 1cm de aresta e começaram a utilizar este material em medições de volume fazendo inferências para a quantidade de cm^3 que representavam as placas e os cubos de 5cm de aresta e 10cm de aresta)

MAB – cubos e placas de diferentes dimensões

Placas 10X10 (representam 100 unidades)
Volume = 100cm^3

Placas 5X5 (representam 25 unidades)
Volume = 25cm^3

Unidade do MAB
volume = 1cm^3

Cubo 5X5X5 (representam 125 unidades)
volume = 125cm^3

Cubo 10X10X10 (representa 1000 unidades)
volume = 1000cm^3 = 1dm^3

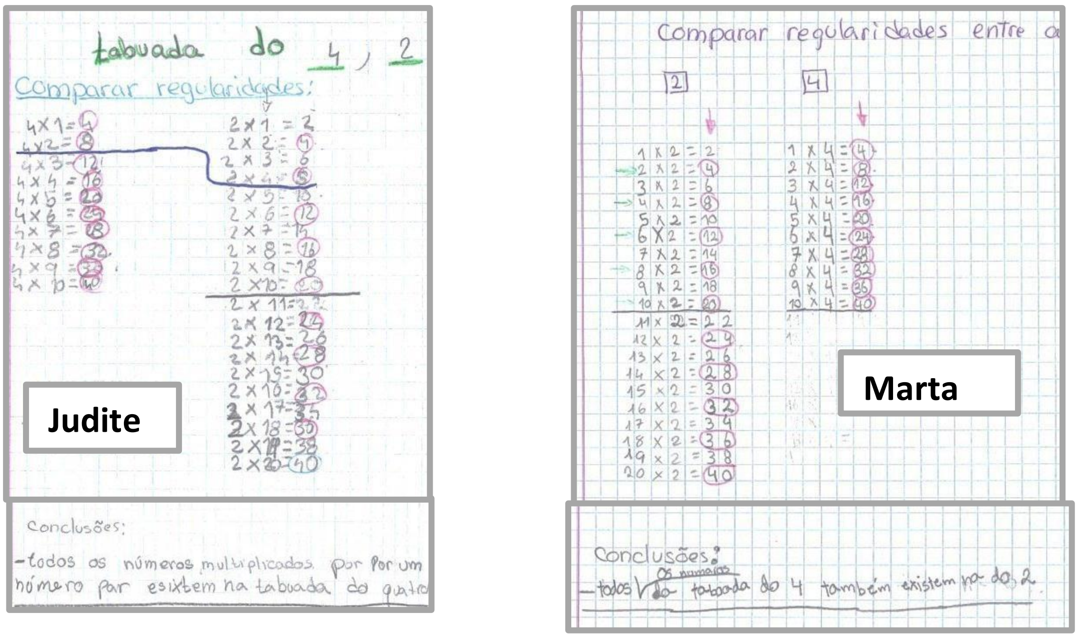
Anexo VII

Sessão coletiva completa sobre as regularidades das tabuadas

Comunicação sobre regularidades da tabuada

1ª parte

As duas alunas em questão, eram alunas que sempre tiveram um percurso fraco em Matemática. A Marta apresentava mesmo muitas dificuldades. Na investigação que fizeram, tiveram algum apoio e orientação do professor.



Registos da investigação sobre as regularidades da tabuada do 2 e do 4 feito pelas alunas Judite e Marta

Logo no início da apresentação, as alunas evidenciaram dificuldade em expor as suas ideias ao que eu devolvi ao grupo a responsabilidade de ajudá-las a clarificar melhor. Embora a minha intenção fosse a de questionamento por parte do grupo, um dos alunos, o Dionísio, interveio no sentido de sugerir um modo de como as colegas poderiam explicar melhor.

Marta e Judite — Na do 4 é sempre par… e na do 2 é ímpar… (…) Nós não sabemos como explicar…

Prof: — Os colegas podem ajudar a explicar melhor fazendo perguntas…

Dionísio — É que vocês podiam dizer assim: fomos ver se havia números na tabuada do 4 que estivessem na tabuada do 2 … depois estavam a explicar que a tabuada do 4 é sempre ímpar e a do 2 é par…

…[mas] Eu acho que não. Eu acho que a do 2 é sempre par e a do 4 também.

Na sua intervenção o Dionísio respeitou as colegas, fazendo um esforço por entender as suas explicações. Fez uma sugestão para clarificarem melhor o que pretendiam explicar. Contudo, a certa altura não tem certeza se entendeu o que elas pretendem dizer, e confuso deixa a frase em suspenso esperando que elas continuem a explicação. Faz ainda uma nova intervenção, contrapondo a ideia que lhe pareceu ser transmitida pelas colegas.

O diálogo prossegue…

Marta	Sim, foi o que a Judite disse
Dionísio	Na do 2 é sempre par mas na do 4 … eu estou confuso
Jordão	Na do 4 também…
Prof:	Então o que é que se está a passar aqui?
Dionísio	É que na do 4 é sempre ímpar e na do 2… [interrompido pelos colegas que contestam]…não [enganei-me]. É sempre par. Mas na do 2 não.
Jordão	Na do 2 não? Vês ali algum ímpar?
Dionísio	Vejo, 38
Jordão e Outros	38 é par…
Prof:	[percebe que há alguma confusão sobre os números pares, por parte de quem apresenta]. Então vamos lá ver quais são os números que estão na tabuada do 2 e na tabuada do 4? - vejam lá. Então vamos lá ver... tabuada do 2? - Marta queres nos dizer quais são os resultados na tabuada do 2? [A aluna que estava a apresentar]

Notava-se pouca segurança por parte da Marta que tentou defender o que a colega disse sem grande consistência. O Dionísio que tentou ajudar na clarificação das ideias das colegas, mostrou-se nesse momento confuso sobre a existência de números pares e ímpares nas tabuadas do 2 e do 4, e verbaliza-o. Outro aluno, o Jordão entrou na discussão, e foi acrescentando a sua opinião às falas do colega. Umas vezes afirmou, noutras questionou e ainda se opôs a algumas afirmações do colega.

Notou-se um crescente envolvimento na discussão por parte dos outros alunos que foram negociando o significado de par e ímpar.

Apesar de não ser este o tema que esperava que fosse discutido nesta sessão, apercebi-me que alguns alunos apresentavam algumas dúvidas sobre o conceito de par e ímpar. Sendo este um assunto que já tinha sido abordado várias vezes em anos anteriores, pensava que já estava bem consistente. Foi durante o diálogo dos alunos que vi emergir esta dificuldade. Era óbvio que tinha que conduzir o discurso para a clarificação deste conceito.

Marta	Na do 2 são: 4;…

Prof:	Então, o 2? Não existe na tabuada do 2? … Vamos observar a tabuada do 2 para ver se são todos pares, ou não. Então começa na tabuada do 2!... Então grupo?
Vários	2; começa por 2…
Marta e Judite	2; 4; 6;…; 20
Prof:	Também é tabuada, [as alunas têm no registo valores para além do 20] não deixa de ser, continuem.
Marta e Judite	22; 24; …; 40
Prof:	Então esses números são pares ou ímpares ou há pares e ímpares?
Vários	são pares
Prof:	Então uma das conclusões a que podemos chegar é...?
Dionísio	...é que na tabuada do 2 todos os números são pares.
Prof:	[escrevendo as conclusões] Na tabuada do 2 todos os números são pares

Tentei envolver a turma na regulação do que a Marta e a Judite estavam a apresentar, contudo, não o fizeram voluntariamente (só quando provocados para isso). Poderão ainda estar incertos quanto ao seu papel regulador do discurso dos colegas ou podem estar a refletir em simultâneo com as colegas e eu não ter dado tempo suficiente para reagirem. Nesta parte da comunicação, houve uma maior orientação minha sobre o caminho que deveríamos seguir para perceber a existência de pares e ímpares nestas tabuadas. Porém, sempre que surgiu uma questão levantada por mim, a turma respondeu prontamente mostrando assim o seu envolvimento no assunto. Um dos aspetos interessantes neste fragmento do diálogo é a conclusão ter sido elaborada espontaneamente pelo aluno que inicialmente apresentou a dificuldade de distinguir os pares dos ímpares.

À medida que eu escrevia e repetia em voz alta as conclusões a que tínhamos chegado, uma nova intervenção do Jordão surgiu e levou à reformulação da conclusão inicial.

Jordão	…e do 4. Na do 2 e do 4
Prof:	Então vamos lá ver na tabuada do 4
Marta e Judite	4; 8;…;36; 40
Prof:	Por aí fora, não é [podíamos continuar a tabuada do 4 para além do 40] … Então, são pares ou ímpares os números que aí estão. Ou há pares e ímpares?
Jordão e Outros	pares. São pares. Só há pares
Prof:	São todos pares… [escrevendo as conclusões] Portanto, tanto na tabuada do 2 como na do 4 todos os números [resultados] são pares

Impulsivamente o Jordão referiu que também na tabuada do 4 os resultados eram sempre pares. Desta vez foi ele que fez avançar o nosso percurso de observações. Conduzi então a turma para as novas observações levantadas pelo Jordão. Foi então consensual que nas duas tabuadas só existiam números pares. Reformulámos a conclusão, comigo a escrever e a repetir em voz alta o que os alunos tinham concluído.

Quando estávamos a registar estas conclusões, outra aluna que até então não se tinha evidenciado neste diálogo, fez uma intervenção bastante pertinente. Mais uma vez, e embora não o tivesse previsto, deixei que o percurso seguisse segundo a emergência dos assuntos trazidos pelos comentários dos alunos.

Josefina	Eu acho que as tabuadas [referindo-se ainda às tabuadas do 2 e do 4] também são pares, por isso… o número da...
Prof:	Diz Josefina, diz. O que é que estavas a dizer? Mostra lá a tua ideia [no momento em que ouve em voz baixa um comentário pertinente de um dos alunos]
Josefina	Sempre que é número par… [hesitante na formulação do discurso]. O número da tabuada se é par, os números são sempre pares, não quer dizer que quando é número ímpar também não sejam pares…
Prof:	Boa, Josefina! Diz lá alto. (…) Estás a dizer que sempre que a tabuada é de número par, os números [resultados] são pares. Não quer dizer que quando for uma tabuada de número ímpar, o resultado não seja par. [repeti o que a aluna tinha dito] Estavas a dizer que tens reparado que uma tabuada de nº par o resultado vai ser sempre par

O comentário da Josefina foi num tom baixo, quase como se pensasse em voz alta. Pareceu estar envolvida numa reflexão sobre a qual ainda não conseguia exteriorizar o seu pensamento. Solicitei que repetisse num tom mais alto, mostrando assim o meu interesse pelo seu raciocínio. Deste modo, legitimei a continuação do assunto seguindo agora um novo caminho. A Josefina hesitou no seu discurso, reformulando a sua intervenção numa tentativa clara de produzir um discurso mais sofisticado e esclarecedor. Elogiando a sua intervenção, repeti em voz alta o que a aluna disse.

Seguidamente, a turma envolveu-se numa nova reflexão sobre a regularidade dos números pares nas tabuadas.

Dionísio	Os pares,… [quando se multiplicam] são [dão sempre números] todos pares

Prof: Quer dizer que sempre que há um número que multiplica por um número par vai dar sempre par. É isso?

Judite Depende da multiplicação. Por exemplo, se for na do 5…

Dionísio Não. A do 5 vai dar…

Judite Se for a tabuada do 5, alguns …

Prof: Já investigaste a tabuada do 5?... [No momento em que o aluno refere que na tabuada do 5… esta não estava a ser observada na altura] Então tens que investigar [primeiro] tens que a relacionar com outras…

…não é só fazer as tabuadas, devem fazer estas pesquisas [regularidades], estas relações [entre as tabuadas].

[escrevi conclusão ditando em voz alta o que estava a escrever, esperando e aproveitando as sugestões dos alunos para esta escrita - coletiva] - Sempre que há uma tabuada de nº par, os resultados são todos pares.

Neste fragmento do diálogo os alunos testavam a validade da hipótese sugerida pela Josefina e procuravam uma generalização. A certa altura o diálogo e as conjeturas direcionavam-se para outras tabuadas que não estavam a ser observadas e resolvi trazer o diálogo novamente para as tabuadas que estávamos a observar. Em primeiro lugar porque ainda faltava falar muito sobre as tabuadas que estavam a ser apresentadas por outro lado, queria que os alunos se fossem habituando primeiro a investigar os assuntos, registando e apresentando aos colegas as suas investigações. Para generalizar teriam que testar primeiro as suas hipóteses. Deste modo transmiti ao grupo o que eu desejava e como, que fosse investigado nos momentos de trabalho autónomo. Aproveitei uma conjetura que emergiu do discurso coletivo, para uma nova proposta de investigação. Mais uma vez fui registando a conclusão possível, repetindo em voz alta o que escrevia e integrando o que os alunos iam completando.

Orientei então a discussão para o registo que as alunas tinham das suas investigações.

Prof: Mais coisas, o que é que têm mais para apresentar? [escrito nas conclusões que registaram do trabalho] - [pergunta dirigida às alunas que estão a apresentar o trabalho]

Vá lá o que é que têm aí registado? O que são esses círculos à volta dos números?

Judite Na tabuada do 2 são… os que têm bolinha num lado, pronto, está aqui [aponta para a do 4, fazendo corresponder cada valor da do 4 a um valor da do 2]

Horácio [estão a indicar] quais são os números que aparecem nas duas tabuadas.

Judite Sim. 4; 8; 12;…; 36; 40

Horácio	É sempre número sim número não.
Joaquina	Nos da tabuada do 2...
Prof:	Diz lá Joaquina, faz lá esse reparo que é muito importante. É sempre na do 2 que aparece um número que é igual a um da tabuada do 4, e outro não.

Mais uma vez a Judite mostrou alguma dificuldade em explicar o que tinha registado. Embora mostre conhecimento sobre o que quer apresentar, tem dificuldade em exprimir-se numa linguagem matemática clara. Desta vez não foi necessário eu interceder para que o discurso fosse clarificado. O Horácio por sua iniciativa, ajudou as colegas a clarificarem o seu discurso. Parece evidente o clima de confiança que existe, pois os alunos mostram à-vontade em colocar as suas ideias mesmo quando sentem dificuldade em produzir o discurso. Por outro lado, nota-se por parte dos colegas que estão a ouvir a exposição dos trabalhos, um esforço por entenderem o que as colegas querem transmitir e é de uma forma natural que ajudam a clarificar as ideias expostas, estejam de acordo ou em desacordo com elas.

Novas observações são feitas pelo Horácio que repara que os números que são comuns às duas tabuadas, surgem na tabuada do 2 segundo o padrão - um sim, um não.

Observa-se também que os alunos vão intervindo espontaneamente de modo a completarem as ideias dos colegas. Mostram estarem a seguir o raciocínio uns dos outros, e vão contribuindo para a construção dos significados. Há uma constante partilha destes significados que vão sendo alicerçados pelas diferentes contribuições dos alunos.

Nesta parte do diálogo, após ter orientado as alunas Judite e Marta para a apresentação dos seus registos, só voltei a intervir para evidenciar a observação da Joaquina. Nesse momento aproveito para tentar clarificar melhor o raciocínio que está subjacente nas intervenções dos dois últimos alunos.

Prof:	Agora o Horácio também estava a dizer uma coisa muito interessante. Diz lá Horácio.
Horácio	Todos os números pares que existem, estão na tabuada do 2
Prof:	Ao que é que esta constatação do Horácio, nos pode levar?
Horácio	Como os números estão de 2 em 2 é sempre par
Jordão	E na do 1? Na tabuada do 1 também!
Vários	Não, não!
Jordão	Na tabuada do 1 estão todos os números. Estão todos os números!
Vários	[alguma confusão e discussão]
Prof:	O Horácio disse que todos os números pares estão na tabuada do 2. O Jordão está a dizer que na do 1 existem todos os números
Jordão	Sim! Por isso também existem todos os pares.

Horácio	Mas é só na do 2
Prof:	É só na do 2, o quê?
Horácio	[É só na do 2] …que existem todos os números pares
Jordão	Não é, não.
Horácio	Só na do 1 e do 2, são as únicas em que aparecem [todos os números pares]
Jordão	Podes dizer isso de outra maneira. Na do 2 é a única em que aparecem todos os números pares e que não tem nenhum ímpar
Prof:	Ai que conclusões tão boas [que vocês estão a tirar]. Vamos lá ver o que estamos aqui a dizer: Na tabuada do 2 só aparecem…[introdução de palavras dos alunos] pares e nenhum ímpar; É a única em que aparecem todos os pares e nenhum ímpar…
Jordão	…todos os pares. Só pares...
Vítor	…e nenhum ímpar…

Neste diálogo notou-se que uma nova intervenção do Horácio focou-nos em novas observações e numa nova discussão. Desta vez ele constatou que todos os números pares estão na tabuada do 2. Eu tentei que a sua observação não ficasse apenas por uma constatação e questionei o grupo no sentido de levar os alunos a refletirem sobre uma possível razão para que tal aconteça. Entretanto surgiu uma nova intervenção, desta vez por parte do Jordão o qual referiu que na tabuada do 1 também existem todos os números pares. Reparei então que o que o Horácio disse foi alvo de uma interpretação diferente. Grande parte do grupo contestou o que o Jordão referiu. Este, muito confiante afirmou que a tabuada do 1 tem todos os números logo também tem os pares. Surgiu alguma confusão entre os alunos. Percebi que era na clarificação do discurso que estava a solução. Tínhamos que aperfeiçoar o discurso de modo a que a justificação se tornasse matematicamente aceitável. Fiz então um ponto da situação da nossa discussão, referindo que o Horácio disse que todos os números pares se encontravam na tabuada do 2 (o que é uma verdade) e que o Jordão disse que na tabuada do 1, existem todos os números logo, também os pares (o que também é uma verdade). Senti que a observação do Horácio ia para além do seu comentário e que o Jordão também queria que o discurso fosse mais preciso. Estes dois alunos continuaram envolvidos no aperfeiçoamento da formulação desta nova conclusão até que é o Jordão proferiu o que ficaria como conclusão – a tabuada do 2 é a única em que aparecem todos os pares e não tem nenhum ímpar. Entusiasmada com toda a discussão, soltei uma expressão de grande acolhimento da conclusão do Jordão e de todo o envolvimento dos alunos. Creio que estes reforços também motivam os alunos a participar e a envolverem-se mais na discussão. Registei a conclusão, agora também com a participação de vozes de outros alunos o que mostra que embora a discussão se tenha passado mais entre o Jordão e o Horácio, os outros também estiveram envolvidos e estavam agora a validar a conclusão a que chegámos.

Judite Oh Lena, estava aqui a ver que se 10 é par… aqui no 14. Se 10 é par e como o 4 também é par…

Prof: Se 10 é par e 4 também é par, na tua ideia o que é que acontece?
Estás a dizer que se 10 é par e o 4 também, quando se multiplica… O que achas que vai dar?
[explicação sobre como surgem sempre números pares após a multiplicação de pares com pares] - (surgiu da observação de uma das alunas que estava a apresentar em que referiu que isso acontece mas não percebia como). O que é que temos aí? Se 10 é par, já está organizado em pares, sejam quais forem as vezes que se repita, vai dar sempre par

A Judite continuou a refletir sobre a estrutura que leva à paridade dos números, parecendo que estava a tentar integrar este conceito. A discussão coletiva alterou-lhe o significado de número par bem como da estrutura dos números e das tabuadas levando-a a alcançar uma nova dimensão.

Pela primeira vez durante toda esta discussão, eu fiz uma explicação. Até então, o meu papel tinha sido o de regular o diálogo; orientar o percurso questionando, evidenciando alguns comentários pertinentes e não permitindo desvios inoportunos; legitimar as conclusões.

Por outro lado, os alunos foram delineando o percurso das aprendizagens à medida que fizeram os seus pedidos de esclarecimento, conjeturaram, discutiram as ideias matemáticas que emergiram. Estiveram a refletir sobre as entidades matemáticas. Estiveram a fazer matemática. Foi-se negociando significados matemáticos muito para além do que o par de alunas tinha trazido para apresentar.

Prof: As vossas conclusões… estão aqui [projetando no quadro]. O que é que vocês tinham concluído?

Marta Todos os números multiplicados por um número par, existem na tabuada do 4 [lendo as conclusões do registo]

Horácio Todos os números multiplicados por um número par...???

Prof: Lembram-se do que é essa conclusão? O Horácio não está a perceber.
Vocês estão a perceber o que é que elas querem dizer?
Vocês têm que explicar melhor para os colegas perceberem?

Horácio Ah! Já percebi! Que todos os números [resultantes] da tabuada do 2, [que foram] multiplicados por um número ímpar não aparecem na tabuada do 4

Prof: Exatamente. Querem ver?!... [segue uma demonstração feita pelo professor baseando-se nos registos dos alunos] - (demonstração feita após um aluno ter verbalizado o que acontecia) O 1 x 2 vai dar 2 e não aparece na tabuada do 4; o 2 x 2 vai dar 4 e já aparece na tabuada do 4...

Dionísio é sempre de 2 em 2…

Prof: Por isso faz confusão [o que têm escrito] Deveria estar mais explicado. Deveriam referir-se à tabuada do 2

Na tabuada do 2, quando há um número par a multiplicar por 2, o resultado também aparece na tabuada do 4. Diz Josefina.

Josefina É que... não é na do 4… é na do 2… É que a Judite escreveu uma coisa e a Marta escreveu outra…

Judite Eu vou-te explicar… [aponta para as suas conclusões mas demora a iniciar a leitura]

Prof: [apontando para as conclusões escritas da aluna] …todos os números que estão na tabuada do 4 existem na tabuada do 2

Josefina É que não é na tabuada do 4 não há o 6, não há o 10,…

Prof: É isso que ela está a dizer… falta ali dizer que é na tabuada do 2… isto é, o resultado de qualquer número par multiplicado por 2, aparece também na tabuada do 4

No fundo ela está a mostrar que [apontando para os registos das alunas] o 2 X 1 dá 2, não aparece na tabuada do 4; o 2 x 2 dá 4, aparece na tabuada do 4; o 3 x 2 dá 6, não aparece na tabuada do 4; o 4 x 2 dá 8, já aparece na tabuada do 4…

A linguagem imprecisa da Marta fez com que o Horácio solicitasse um esclarecimento. Embora eu tivesse percebido o que a aluna queria dizer, quis também provocar a evolução da linguagem matemática, aproveitando a necessidade que o colega demonstrou de esclarecimento. Contudo o Horácio esforçou-se por entender o que ela queria dizer e acabou por ser ele a corrigir o discurso. Neste caso a Marta perdeu a oportunidade de reformular o seu discurso e acomodou-se à correção do colega. Será que ela seria capaz de avançar mais se lhe fosse dado mais tempo?

Neste excerto do diálogo emerge a necessidade de aprimorar o discurso matemático. Os registos foram escritos com pouca correção. Embora tivessem sido apoiadas por mim para chegarem a algumas conclusões, deixei-as a registar sozinhas. Os esquemas que tinham feito eram percetíveis mas as conclusões escritas não eram muito precisas como se pode observar na figura (?). Na apresentação do trabalho foram surgindo também as suas fragilidades nesta área. A Judite sabe o que quer transmitir e ainda faz uma tentativa dizendo à Josefina que lhe vai explicar. Contudo hesita e tem dificuldade em fazê-lo. Eu senti que era necessário ajudá-la nessa tarefa, apoiando-me nos seus registos. Também era importante valorizar o trabalho de pesquisa que tinha sido feito. Considero que não deixo de ser também um membro desta comunidade de aprendizagem e tal como já tinha acontecido anteriormente com alguns alunos eu também poderia ajudar a esclarecer o que as alunas não estavam a conseguir explicar.

Prof: Vocês também falaram de outras conclusões que não estão agora a falar… mas o grupo pode ajudar a ver mais relações…

Margarida Não é sobre os pares. É que também já se falou sobre os múltiplos. Era para perguntar se quando estiveram a fazer esses círculos à volta dos números, não repararam em nada?

Margarida Se vocês virem bem, isso faz um padrão

Vários Pois é…

Prof: Então que padrão é que faz?

Margarida 4; 8; 2; 6; 0; … É assim que eu decoro as tabuadas

Prof: Estás a ver na do 4… [escreve repetindo em voz alta] A tabuada do 4 faz um padrão

Joaquina E a do 2 também

Prof: Então vamos ver a do 4, qual é?... 4…

Vários 8; 2; 6; 0

Judite [Apontando no registo do trabalho que está a apresentar] Depois está outra vez: 4; 8; 2; 6; 0

Prof: Até podíamos começar pelo 0. Se eu pusesse ali 4x0, dava 0. Ficava 0; 4; 8; 2; 6; 0; 4; 8; 2; … Pronto
Na do 2?

Vários 2; 4; 6; 8; 0; 2; 4; 6; 8; 0;…

A Margarida desviou o discurso para a observação do padrão numérico da tabuada do 4. Vários alunos aderiram de imediato à nova observação. A Joaquina verifica que a tabuada do 2 também faz um padrão. A Judite, que não tinha feito esta observação na sua investigação, entendeu o que a colega estava a dizer e apontou para o seu registo verbalizando alto o padrão que estava a ser observado. De um modo geral, os alunos aderiram bem a esta nova observação.

Contudo, houve ainda necessidade de esclarecer melhor, de aperfeiçoar mais a linguagem.

Prof: O que é isto? 2; 4; 6; 8; 0?

Dionísio Eu não estou a perceber ...

Horácio É um padrão, oh Dionísio!

Dionísio Não estava a perceber muito bem o «0», mas…

Prof: Ah!...O Dionísio não está a perceber muito bem o «0»

Dionísio Já percebi, já percebi. O «0» é do 10

Prof: Estamos a falar do quê?

Judite Estamos a falar de padrões

Prof: Mas onde é que vamos ver o padrão?, Marta?

Judite Agora estamos a ver na do [aponta para a tabuada do 2]

Marta e Judite [Um pouco confusas, apontam para os registos dos seus trabalhos]

Prof: Mas não está aí nenhum «0»!?

Dionísio ...é o «0» do 10…

Prof: Então estamos a olhar para que sítio?

Alunos [Faz-se silêncio no grupo.]

Dionísio Para que sítio? Como assim?

Prof: Do 10. Estás a dizer que é o «0» do 10 mas o 10 não é um «0»

Dionísio É um 1 e um «0». É o «0» do…

Judite Das unidades…

Prof: Do algarismo…

Dionísio Das unidades… [Ouvem-se murmúrios de outros alunos a dizerem o mesmo]

Prof: Das unidades…

Dionísio do número 10

Prof: Do algarismo das unidades… porque depois vamos olhar para o número 12, aqui no caso da tabuada do 2, e também é o algarismo das unidades que estamos a olhar para o 2. 0; 2; 4;… tudo no algarismo das unidades
Então digam-me lá… Reparem bem no padrão da tabuada do 2

Vários 2; 4; 6; 8; 0;…

Tentei que os utilizassem uma linguagem mais sofisticada mas, as questões que fui colocando eram pouco precisas. Estava com dificuldade em questionar, sem ser muito direta no que queria que surgisse. A dúvida do Dionísio em relação ao 0 do 10 foi um bom ponto de partida. Aos poucos consegui que os alunos verbalizassem que o padrão que observávamos era visto nos algarismos das unidades dos números que resultavam das tabuadas. Verifiquei com surpresa que foi a Judite que verbalizou primeiro a palavra “unidades”. Apesar das suas fragilidades, senti que esta, esteve bastante envolvida em toda a discussão.

No momento seguinte, direciono as observações para a tentativa de avançar para alguma generalização e para a utilidade de conhecer estes padrões.

Prof:	[Levanta-se e dirigindo-se ao quadro escreve «100»] Será que eu posso dizer… Acham que o número 100 pertence à tabuada do 2?
Josefina e Vítor	Sim!... Porque tem um «0»
Prof:	E a seguir, qual era?
Vários	Era o 102
Prof:	[Regista no quadro o que os alunos dizem; «102»] E a seguir?
Vários	104
Prof:	[Regista no quadro o que os alunos dizem; «104»] E a seguir?
Vários	106
Prof:	[Regista no quadro o que os alunos dizem; «106»] E a seguir?
Vários	108
Prof:	[Regista no quadro o que os alunos dizem; «108»] E a seguir?
Vários	110
Prof:	[Regista no quadro o que os alunos dizem; «110»] Isto no fundo, permite-nos..., sabendo estes padrões,… permite-nos ver um caminho é claro que pode não ser bem, bem em todas as tabuadas. Temos que explorar bem e ver se é sempre assim!
Judite	[Apontando no registo dos números escritos em coluna pela professora, para os algarismos das unidades] Este lado vai ser sempre um padrão

Os alunos respondem com segurança. Mostraram um bom entendimento do assunto. A Judite ainda teve necessidade de apontar para os algarismos das unidades e repetir que ali estava um padrão. Talvez estivesse a integrar melhor esta ideia.

Prof:	Olhem, e reparem numa coisa… [apontando para os algarismos das unidades dos números que escreveu no quadro] Quais são os números que faltam aqui?... [Apontando para os números «100» e «102» daqui para aqui quais são os números que faltam?
Vários	101
Prof:	[Regista no quadro, numa coluna ao lado, o que os alunos dizem; «101»] e daqui para aqui? [apontando para o «102» e para o «104»]
Vários	103
Prof:	[Regista no quadro o que os alunos dizem; «103»] e daqui para aqui? [apontando para o «104» e para o «106»]
Vários	105
Prof:	[Regista no quadro o que os alunos dizem; «105»] e daqui para aqui? [apontando para o «106» e para o «108»]
Vários	107

Prof:	[Regista no quadro o que os alunos dizem; «107»] e depois?...
Vários	109
Prof:	[Regista no quadro o que os alunos dizem; «109»] e depois?...
Vários	111
Prof:	[Regista no quadro o que os alunos dizem; «111»] Voltamos ao mesmo
Gonçalo	É [não percetível] mas só com ímpares
Prof:	Diga meu amigo…
Gonçalo	É a tabuada do 2 mas só com ímpares
Prof:	Não é a tabuada do 2,...
Dionísio	pois não...
Prof:	... na tabuada do 2 estão os pares todos, não estão?. Então quer dizer...
Joaquina	Aqui estão os ímpares todos.
Prof:	Aqui estão os ímpares todos e ali ...
Joaquina	...estão os pares todos.
Prof:	Quer dizer que sempre que os números terminem naqueles algarismos… [apontando para a coluna dos números pares]
Joaquina e outros	São pares
Prof:	Se terminarem nestes... [aponta para a coluna dos ímpares]
Vários	São os ímpares
Prof:	São os ímpares

Estando consciente que grande parte da discussão desta sessão tinha andado à volta dos números pares e dos números ímpares, pareceu-me oportuno conduzir o grupo a uma pequena síntese sobre o assunto. Deste modo orientei para uma nova investigação e fui conduzindo o processo para que chegassem a conclusões. Fui então pedindo que me dissessem os números que faltavam entre os pares que estavam escritos no quadro. Com vários alunos a participarem, foram dizendo o “101, 103, 105, 107 e o 109”. Desta vez foi o Gonçalo que verbalizou primeiro a observação dos números ímpares, embora ainda de uma forma pouco precisa. Referiu-se à tabuada do 2 mas só com ímpares. Estava a tentar formular o seu discurso mas verbalizou a sua ideia ainda pouco estruturada. Como quem pensa em voz alta, para refletir melhor sobre o que está a observar. Aproveitando o que o aluno disse fui levantando questões para conduzir a um melhor discurso – para que o significado fosse mais partilhado. Os alunos envolvidos na construção desta ideia, iam-me completando. São exemplo disso, as intervenções do Dionísio e da Joaquina.

Conseguimos então concluir que os números que terminavam nos algarismos 0, 2, 4, 6 ou 8 eram números pares e que os que terminavam nos algarismos 1, 3, 5, 7 ou 9 eram os números ímpares.

De volta aos padrões, o Horácio não visualiza nenhum padrão nos números ímpares. Na verdade eu tinha parado precocemente a escrita destes números. Apercebi-me do meu erro e continuei essa escrita. Imediatamente o Horácio sentiu-se satisfeito com a minha demonstração.

Horácio	mas nesses já não há padrão
Prof:	Ah! 111, a seguir? [regista no quadro o «111»]
Vários	113
Prof:	Reparem…
Horácio	Agora já há.
Narciso	Mas a seguir ao 111 não vem o 113, vem o 112!
Prof:	Não, mas o 112 é dos pares, o 113 é dos ímpares. A seguir ao 111 vem o 113 como número ímpar
Joaquina	… nesta tabuada mas na tabuada do 5 o padrão é sempre…
Prof:	minha amiga, estamos à espera desses trabalhos…

Reparo que o Narciso (um menino com graves dificuldades de aprendizagem) se sente perdido em relação a esta sequência de números. Mais uma vez noto que a imprecisão da linguagem pode levar a diferentes interpretações do mesmo assunto. Ao corrigir para o número ímpar seguinte, creio que ficou mais claro para o Narciso.

A Joaquina no final volta a referir-se à tabuada do 5. Mais uma vez corto-lhe a palavra e provoco-a para trazer essa investigação para apresentar ao grupo. Naquele momento gostaria que o grupo se sentisse motivado para explorarem/investigarem, vários padrões e relações entre diferentes tabuadas. Quanto mais trabalhos surgissem, melhor entenderiam estes padrões e todas as relações inerentes. Porém, queria que surgissem de um modo mais organizado e mais refletido. Primeiro deveriam investigar no momento de estudo autónomo e depois então trazê-lo para a discussão no grupo. Embora me sinta bem a gerir os momentos de modo pouco formal, saltando mesmo a regra de por o dedo no ar (desde que se mantenha o respeito de falar na sua vez, esperando que o outro termine), queria manter alguma organização nos trabalhos e respeitar a agenda que tínhamos estabelecido.

Estava ainda interessada em que observassem a relação de dobros entre estas duas tabuadas. Como não surgiram outros assuntos por parte dos alunos, levantei a questão.

Prof:	Mais alguma questão? Vejam lá bem o que é que acontece [aos resultados] da tabuada do 2 para a do 4?

Judite	Vai ser sempre mais 2… por exemplo, aqui [apontando para os registos] … Na do 4 vai estar sempre mais 2... [aponta para os resultados de uma e de outra tabuada]
Prof:	Vai ser sempre mais 2?
Horácio e Vítor	[Voz baixa] Vezes 2.
Prof:	Diga! [olhando para os alunos que tinham falado]
Horácio e Vítor	Vezes 2.
Prof:	E o que é isso de «vezes dois»?
Horácio e Vítor	é o dobro
Prof:	[Ajuda a observar nas tabuadas que estão no quadro (registo dos alunos), apontando enquanto questiona] Não é?! Vezes dois é o dobro! E o 4 em relação ao 2 o que é?
Vários	É o dobro
Prof:	É o dobro! E o resultado da tabuada do 4 em relação à tabuada do 2, o que é?
Vários	É o dobro!
Prof:	São os dobros! «1x2 é 2» «1x4 é o dobro de 2… é 4» Era por isso que eu estava a dizer Horácio e Dionísio. Vocês não chegaram a uma conclusão semelhante com a [tabuada] do 2 e do 8?
Horácio e Dionísio	Sim. Mas na nossa era o quádruplo
Prof:	Reparem lá! 2x2 é 4. O dobro de 4 é 8...
Judite	Ah, pois é!??...
Prof:	2x4 é 8… podemos registar essa [conclusão] também ou não?
Vários	Sim.
Prof:	Como é que eu escrevo?
Vários	A tabuada do 2… a do 4… é sempre duas vezes
Prof:	[escrevendo o que diz em voz alta] A tabuada do 4 é sempre… vamos utilizar o dobro que é assim uma linguagem matemática mais precisa… o dobro da do 2. Ou então eu também posso dizer que… a tabuada do 2 é sempre… é o quê em relação à do 4?...

Desta vez não foi difícil chegarem à ideia que eu pretendia. Conhecia os trabalhos do Dionísio e do Horácio (que eram os alunos seguidamente iriam apresentar as suas investigações) e sabia que eles tinham feito uma observação semelhante em relação às tabuadas do 2 e do 8. Por esse motivo apelo aos seus conhecimentos sobre o assunto. Aproveito a fluência das ideias e o consenso nas conclusões e vou promovendo nos alunos um discurso mais sofisticado. Simultaneamente tentei que fossem articulando conhecimentos anteriores.

Na minha tentativa de fazer emergir a ideia de “metade como inverso de dobro” surgiu alguma confusão.

Vários	é menos 2… é vezes…
Prof:	É vezes???
Josefina	É a dividir…
Prof:	Então???... Se é a dividir...
Josefina	É a dividir por 2!
Prof:	Então? Se numa [situação] eu digo o dobro na outra [situação] digo…
Alunos	[vários comentários sem fundamento]
Prof:	Parem lá! Escutem! Se na tabuada do 4 os resultados são sempre o dobro da do 2, na do 2 vão ser o quê em relação à do 4?
Horácio	Metade.
Prof:	Metade! Dividir por 2, Josefina… é metade. Não estou a dizer que disseste mal… só estou a dizer que em linguagem matemática fica melhor dizer, metade. [continuando a escrever] Ou seja, a do dois é a metade da do 4. Mais alguma questão aqui com a tabuada do 2 e do 4? Não? Eu gostava que passássemos para cartaz. Para começarmos a ter um registo com estas conclusões a que chegamos. E gostava de ir fazendo com as várias tabuadas. Vou pedir a quem apresenta os trabalhos que me ajude a fazer esse cartaz, neste caso à Judite e à Marta. Obrigada, vem a seguir...

Curiosamente, seguem o mesmo tipo de raciocínio que tinham feito para chegarem ao dobro.

Nitidamente, grande parte dos alunos não estavam focados na minha perspetiva. Respondem sem nenhuma reflexão numa tentativa de “adivinhar” fazendo comentários sem fundamento.

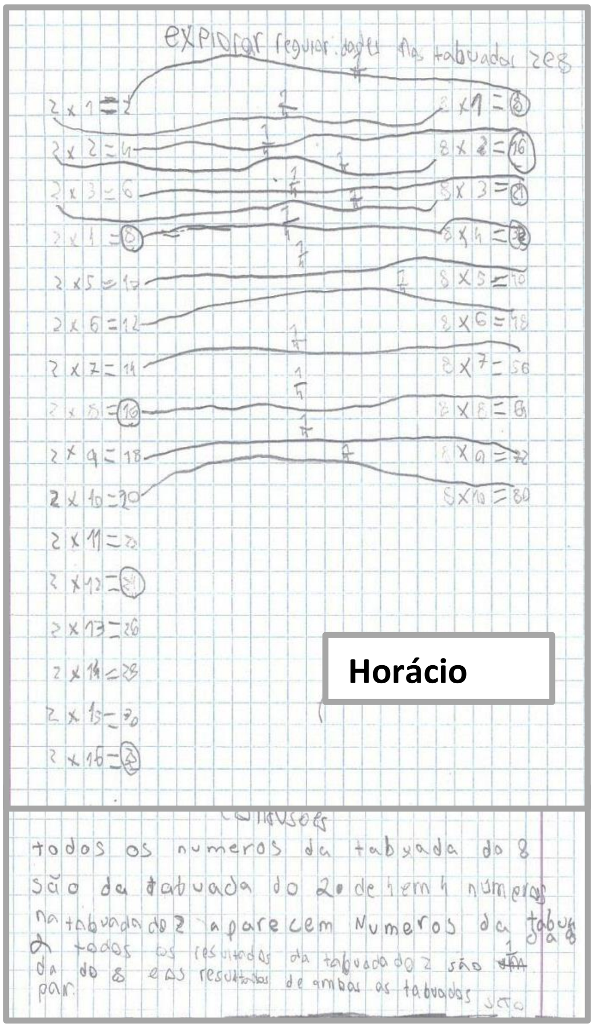
Nesse momento parei os comentários e repeti o que já tínhamos registado como conclusão, deixando em aberto a última parte “ …os resultados da tabuada do 2 vão ser o quê em relação à do 4?”

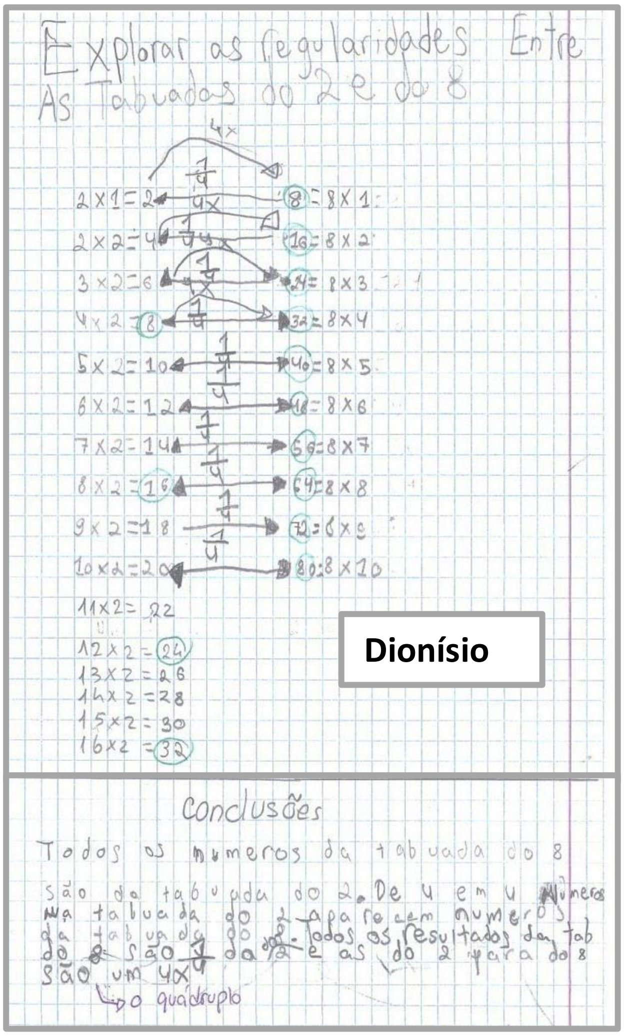
O Horácio deu a resposta. Sublinhei que a Josefina não tinha errado ao dizer “dividir por 2” só que eu procurava um termo matematicamente mais elegante e sabia que eles o conheciam.

Terminámos esta parte da sessão com o meu apelo para que os alunos se envolvessem na elaboração de um registo coletivo sobre as conclusões a que tínhamos chegado. Esse registo ficaria na parede da sala.

2ª parte

Na mesma sessão de trabalho seguiram-se dois alunos cujas investigações incidiam nas regularidades e relações entre as tabuadas do 2 e do 8. Estes alunos, o Dionísio e o Horácio, eram alunos com maior sucesso em matemática do que as alunas anteriores. Começaram por apresentar os seus registos que mais uma vez estavam a ser projetados no quadro interativo.





Registo da investigação sobre as regularidades da tabuada do 2 e do 8 feito pelos alunos Horácio e Dionísio

Dionísio	Reparámos que da tabuada do 2 para a do 8 ia ser sempre um quarto
Horácio	Ao contrário, da do 8 para a do 2 é que ia ser sempre um quarto

Dionísio É sempre um quarto da tabuada do 8 para a do 2… Do 80 para o 20, é um quarto; do 72 para o 18, é um quarto e depois é sempre assim [Vai explicando, apontando para o seu registo que está projetado no quadro]

Prof [escrevendo as conclusões] Portanto da tabuada do 8 para a do 2,… como é que nós dizemos? É sempre um quarto? Podíamos dizer de uma maneira mais correta

Prof … é uma relação de um quarto, não é? Há uma relação de um quarto

Neste trabalho, os registos estavam bem organizados e os alunos estavam seguros do que tinham investigado. O Dionísio iniciou o seu discurso da relação de $\frac{1}{4}$ entre as tabuadas direcionando essa relação de forma inversa ao que constava no seu registo. O Horácio corrigi-o de imediato afirmando que era ao contrário, da tabuada do 8 para a do 2 é que é $\frac{1}{4}$. Percebe-se no discurso, que estes dois alunos já procuram uma linguagem matematicamente mais sofisticada. Não suscitando nenhuma controvérsia e não havendo nenhum pedido de esclarecimento, registei as conclusões tentando melhorar um pouco mais a linguagem.

Horácio Depois, da [tabuada] do 2 para a [tabuada] do oito é o quádruplo

Josefina Porque é que vocês quiseram fazer essas tabuadas?

Horácio Porque não queríamos fazer sempre mais 2… sempre assim. Quisemos fazer de outra maneira

Dionísio Nós queríamos fazer [observar relações] com tabuadas mais difíceis, por exemplo não ser do 2 para o 4; do 3 para o 6. Assim é muito fácil…

Horácio É muito fácil?... é a mesma coisa, só que assim estão mais distantes

Embora neste excerto do diálogo não tenham ocorrido avanços nos significados matemáticos, parece-me de salientar a vontade que estes alunos mostravam em se desafiarem para explorar e investigar novas situações.

Prof Mais… Querem olhar as vossas conclusões, para ver se nos lembramos de mais alguma…

Dionísio [Lendo as conclusões que estavam no seu registo, projetadas no quadro] todos os números da tabuada do 8, [também] são da tabuada do 2

Prof Olha, mais uma vez,… vem ao encontro…

Jordão Não, todos os números da tabuada do 8…

Horácio Todos os números da tabuada do 8 são da do 2!

Prof Tinham dito bem!... Vem ao encontro das conclusões que tínhamos tirado no trabalho anterior [relação das tabuadas do 2 e do 4]. O que é que é o 8? É um número…

Vários …par

Perante a observação feita, tentei articular com a discussão anterior sobre os números pares e a tabuada do 2. Os alunos corresponderam bem à provocação não hesitando em reconhecer a paridade.

Horácio	Os números que aparecem na tabuada do 2 e do 8 vêm sempre de 4 em 4, os números iguais… [apontando para o seu registo projetado no quadro]
Prof	Ora bem. 2, não aparece. 1X8=8
Horácio	O 8 aparece [aponta para a tabuada do 8 e do 2]. Depois passado 4 [apontando para a do 2 (2x8)] é que aparece o 16, que é o número que vem a seguir na tabuada do 8
Prof	O 8, aparece aqui [apontando na tabuada do 2 (2x4)] no quarto lugar
Horácio	Aparecem sempre de 4 em 4. O 8 é o primeiro [apontando para a tabuada do 8]…Depois vem o 16, que aparece aqui [apontando para a tabuada do 2] quatro números depois (8X2). É sempre assim, de quatro em quatro
Prof	[Escrevendo as conclusões] Então, os números da tabuada do 8 estão todos na tabuada do 2. Os números comuns… podemos dizer comuns às duas tabuadas, aparecem na [tabuada] do dois, como?
Horácio	De 4 em 4 vezes

Mais uma vez nesta parte da sessão, o diálogo centrou-se só nos alunos que apresentavam o trabalho e com alguns reforços meus. Estes reforços surgiram numa tentativa de manter os outros alunos envolvidos visto não estarem a participar na discussão. Escrevi as conclusões que o Horácio e o Dionísio tinham registado nos seus trabalhos, ditando em voz alta e tentando elevar um pouco mais a linguagem matemática.

Prof	Vejam lá bem se conseguem perceber porque é que acontece isso de 4 em 4 vezes? Grupo, todo
Miguel	Se fizermos 2X4 vai dar o 8
Prof	Escutem lá o Miguel. [Repetindo num tom mais alto, o que o aluno dizia] Se fizermos 4X2, que é aqui [apontando na tabuada] vai dar o 8 Aqui temos o 4X2 que vai dar o 8 [apontando na tabuada do 2]. E aqui temos o 1X8 que vai dar 8 [apontando na tabuada do 8]. Ora o 4 e o 1, que relação é que têm?
Horácio	É de quatro…
Prof	Do 1 como é que eu obtenho o 4?
Horácio	É vezes 4
Prof	E o que é isso de vezes 4?
Dionísio	É multiplicar por 4.
Gonçalo	É o quádruplo.

Prof	O 4 é o quádruplo do 1, não é? E o 8, em relação ao 2
Horácio	É o quádruplo, também.
Prof	É o quádruplo, também. Então vamos lá ver a outra a seguir. 2X8 …
Horácio	É 16...
Prof	Sim, mas quando é que aparece ali o 16
Vários	No 8X2
Prof	O que é que é o 8 em relação ao 2?... Mais alguma conclusão a acrescentar?

O silêncio do resto da turma preocupava-me. Será que aprovavam tudo o que os colegas estavam a dizer ou estariam menos envolvidos, no que estava a ser apresentado? Como o par que apresentava os trabalhos era já bastante competente nas observações e nas justificações que expunham, os colegas também não tinham muito que acrescentar. Numa tentativa de alargar a discussão a mais alunos, desafiei-os para analisarem as razões que levavam à regularidade indicada pelos Horácio e Dionísio. Estas não tinham sido exploradas e sendo uma observação nova talvez levasse a alguma discussão. Surgiu então um comentário por parte do Miguel. Evidenciei-o e questionei o grupo dirigindo o raciocínio para a observação que eu pretendia. Poderia ter tentado que o Miguel esclarecesse melhor a sua observação sem me antecipar ao raciocínio do aluno mas, não tive tempo para refletir. Esta parece-me ser uma das dificuldades com que nos deparamos enquanto professores, neste tipo de aula. Por vezes temos de agir sem ter tempo de refletir. Só mais tarde, se refletirmos sobre o nosso trabalho, é que percebemos que poderíamos ter conduzido o assunto de maneira diferente.

Continuei a conduzir o diálogo ajudando a tornar o discurso matematicamente mais sofisticado. Um outro aluno, o Gonçalo, acabou por dizer “o quádruplo” – a expressão que eu desejava. Continuámos a verificar para os outros casos e já foram vários os alunos que deram sinais de estarem envolvidos, respondendo ao questionamento.

Horácio	Mas ainda há mais conclusões. Há sim, já tínhamos visto. Todos os resultados são pares.
Prof	Parando aqui, que a próxima é entre a do 3 e do 6, gostaria de fazer um apelo. Reparem, tivemos a comparar as tabuadas do 2 e do 4; as tabuadas do 2 e do 8 e andámos a falar muito da questão dos pares.
Joaquina	Mas são iguais…?
Prof	Não, mas têm relações semelhantes. Numa temos o dobro e na outra temos o quádruplo. O 4 é o dobro do 2 e o 8 é o quádruplo da do 2. Os resultados das tabuadas também coincidem com este jogo. É uma maneira… A Maria estava a dizer que memoriza as tabuadas por padrões, assim também é uma

maneira de podermos saber as tabuadas. Sabendo a do 2, se calhar pelos dobros e pelos quádruplos é uma maneira mais fácil de chegar lá.

Já comparámos a do 2 com a do 4; a do 2 com a do 8. Se calhar era interessante compararmos com as outras tabuadas pares. A do 2 com a do 6; a do 2… com qual?

Vários Com a do 10… com a do 12.

Prof Era interessante explorarmos também a tabuada do 12

Aproveitando a discussão da regularidade que estávamos a discutir – relação de $\frac{1}{4}$ ou do quádruplo entre as tabuadas do 2 e do 8 – e relembrando a discussão no trabalho anterior sobre a relação de $\frac{1}{2}$ ou do dobro entre a tabuada do 2 e do 4, aproveitei para desafiar os alunos para novas investigações. Podiam explorar este tipo de relação entre outras tabuadas. Nos momentos de trabalho autónomo, poderiam continuar estas investigações (em pequenos grupos ou individualmente) que apresentariam depois à turma.

Prof Falta-nos ver aqui se há padrões. Vamos ver se há padrões da tabuada do 8. Já vimos na do 2, vamos ver na do 8

Vários 0; 8; 6; 4; 2; 0;…

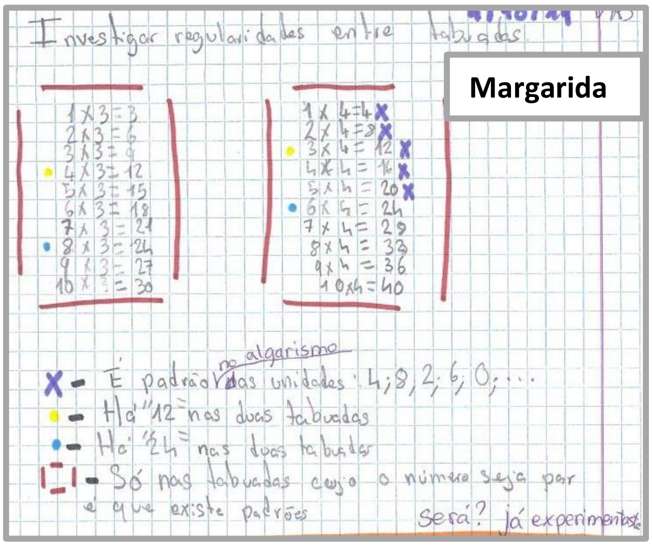
Prof [Registando] 0; 8; 6; 4; 2; 0;… Tem também um padrão muito regular.

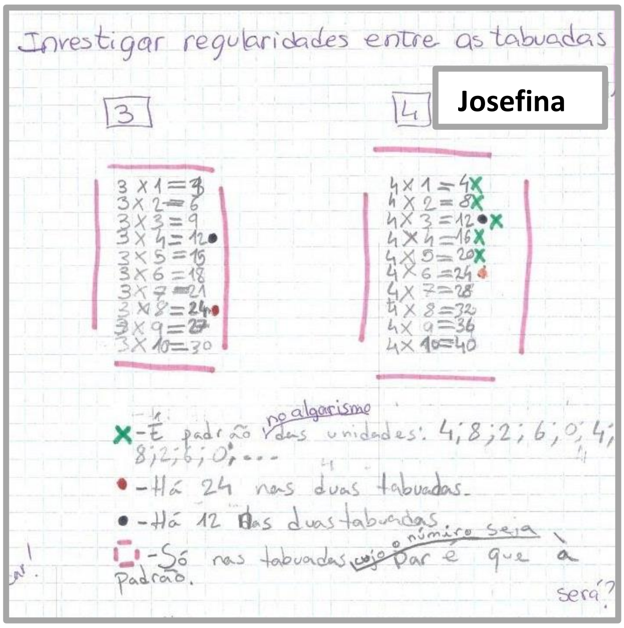
Jordão É sempre menos 2.

Prof Há mais algum comentário a fazer? Não? Então passamos ao próximo trabalho.

No trabalho apresentado pela Judite e pela Marta, a Margarida tinha trazido à discussão a observação de padrões nos resultados das tabuadas, observáveis nos algarismos das unidades. Pareceu-me importante, tomá-la como uma prática regular nos próximos trabalhos sobre as tabuadas. O Horácio e o Dionísio, não tinham feito esta observação nas suas investigações e fui eu que questionei a turma. Sem dificuldade, vários alunos foram dizendo os números que faziam o padrão da tabuada do 8.

3ª parte





Registo da investigação sobre as regularidades da tabuada do 3 e do 4 feito pelos alunos Margarida e Josefina

Seguiu-se o trabalho da Margarida e da Josefina que tinham investigado regularidades entre a tabuada do 3 e do 4.

Josefina Nós vimos que… é padrão no algarismo das unidades a tabuada do 4.

Dionísio É padrão no algarismo das unidades?

Prof Faz um padrão… se olharmos para os algarismos das unidades podemos observar um padrão. Que já vimos há bocado no trabalho da Marta e da Judite, na tabuada do 2 e na do 4. Vocês também falaram disso… na tabuada do dois é 0, 2, 4, 6, 8,

Uma das alunas que estava a apresentar o trabalho, começou por ler as conclusões a que o par tinha chegado durante a investigação. O Dionísio, questionou a colega, talvez por sentir a necessidade de uma explicação mais detalhada sobre a referência ao padrão. Nesse momento intervim para ajudar a clarificar relembrando o que já tinha sido falado em momentos anteriores da mesma sessão.

Josefina Há o 24 nas duas tabuadas,… há o resultado de 24 nas duas tabuadas

Prof Há o resultado de 24 nas duas tabuadas, em que sítio?

Josefina e Margarida É no 6x4 e no 8x3

Josefina e Margarida Há o resultado de 12 nas duas tabuadas, também. No 3x4 e no 4x6

Prof Portanto no 3x4… e no 4x3, está bem...

Continuando a ler as conclusões, as alunas referiram dois resultados comuns nas duas tabuadas, o 12 e o 24. No seu discurso, a Josefina fez uma retificação, incluindo a palavra “resultado” tornando assim o seu discurso mais correto do ponto de vista matemático - mais sofisticado.

Josefina	Só nas tabuadas em que o número seja par é que há padrão.
Dionísio	Hã?! Só nos números quê?
Josefina	Só nas tabuadas em que o número seja par é que há padrão. Depois a Lena [a professora] escreveu aqui «será?»
Dionísio	Será o quê?
Prof	Será o quê?... Elas dizem que só nas tabuadas com o número par é que há padrão. Acham que elas podem provar isso com esta investigação?

Numa das conclusões destas alunas, estava escrito que só nas tabuadas pares é que existia um padrão nos resultados. Como eu já tinha estado a ver esses trabalhos, tinha escrito um comentário em que questionava a credibilidade dessa afirmação «será? Já experimentaste?». A Josefina não hesitou em ler o meu comentário levantando assim uma nova questão. Aproveitei para esclarecer o meu comentário. Tentei levar o grupo a refletir sobre a necessidade de serem feitas várias experiências para se poder formular uma generalização.

Alguns alunos	Não.
Jordão	Têm que fazer uma tabuada ímpar mais longe… [até números mais elevados].
Prof	Não percebi bem. Têm que fazer uma tabuada ímpar mais longe?
Margarida	Não é preciso.
Jordão	É, é!
Prof	Jordão, para a semana que vem fazes uma [tabuada ímpar com números mais elevados]?
Jordão	Sim, não me importo.
Prof	Só uma tabuada chega?
Jordão e outros	Sim... Não! Várias.
Prof	Para afirmarmos que é sempre assim, temos que fazer muitas.
Vítor	Duas ou três.
Dionísio	Se for só uma [tabuada], uma pode dar e [depois] as outras?
Prof	Está bem, assim já saberíamos que pelo menos uma [tabuada] dá. Já ia contrariar esta teoria delas [Josefina e Margarida]
Jordão	Eu acho que devíamos explorar mais para além do 10. [fazer as tabuadas para além do 10x…]
Horácio	Eu acho que há.

Prof	Então provem. Na próxima semana vamos explorar as tabuadas ímpares, para ver se há padrões ou não, e também esta ideia do Jordão, explorar para além do 10.
Horácio	Mas é que já vimos há bocado que pelo menos na do dois há.
Prof	Mas elas estão a dizer que nas tabuadas dos pares é que há [padrões]. Nas [tabuadas] dos ímpares é que nunca há!
Horácio	Há! Na [tabuada] do 3.
Prof	Na [tabuada] do 3, na do 5, na do 7,…

Os alunos foram discutindo sobre como seria mais eficaz e mais credível fazer uma generalização sobre os padrões nas tabuadas de números ímpares. Aos poucos, e com diferentes contribuições os alunos foram negociando o que seria aceitável para se poder generalizar esta afirmação ou contestá-la. A turma estava dividida entre uns que acreditavam que só existiam padrões nas tabuadas de números pares e outros que não tinham a certeza que assim fosse. No decorrer da discussão, fui colocando algumas questões para que ficasse mais claro o que os alunos iam sugerindo. Uma das minhas intervenções "Para afirmarmos que é sempre assim, temos que fazer muitas." surgiu para legitimar a ideia que seria mais correta pois na discussão surgiram opiniões divergentes e era necessário orientar qual era a posição correta. Numa outra intervenção, "Está bem, assim já saberíamos que pelo menos uma [tabuada] dá. Já ia contrariar esta teoria delas [Josefina e Margarida]"" faço notar que uma das formas em refutar uma hipótese levantada é fazendo uma contraprova. Assim, para este assunto, bastava encontrarem uma tabuada ímpar que apresentasse um padrão, que iria logo contrariar a conjetura que a Margarida e a Josefina tinham apresentado à turma. Noutros momentos, falei no sentido de projetar novas investigações. À medida que os alunos iam levantando novas hipóteses ou sugestões de como poderiam generalizar, eu tentava estabelecer compromissos de trabalho com os que faziam essas sugestões, tentando também um envolvimento do resto do grupo neste trabalho. Fui também tentando transmitir ao grupo que na matemática não basta dizer "eu acho que…", é necessário provar. Contudo, a verbalização do "eu acho que…", pode ser aproveitado para o início de uma investigação.

Dionísio	Eu tenho outra pergunta para fazer. Era para perguntar se vocês quando estavam a fazer isso repararam nos múltiplos?
Josefina e Margarida	Não.
Prof	O que queres dizer com o reparar nos múltiplos?
Dionísio	Estou a perguntar por múltiplos comuns nas duas tabuadas.

Prof Quando elas dizem que o 12 aparece na tabuada do 3 em 4x3 e aparece na tabuada do 4 em 3x4, estão ou não a constatar que o 12…

Dionísio Pois, é múltiplo comum.

Prof entre…

Dionísio entre o 3 e o 4.

Josefina E o 24.

Prof E o 24, também. Por isso ali diz [lendo um cartaz que está na parede, resultante de um trabalho anterior] «Os múltiplos de um número é o resultado que se obtém da multiplicação de qualquer outro número, por esse. No outro dia, quando vieram apresentar o trabalho dos múltiplos, alguém disse que os múltiplos eram assim um bocadinho como a tabuada. Quais são os múltiplos de 3, por exemplo… digam lá alguns múltiplos de 3.

vários 3, 6, 9, 12, 15, 18,…

Prof E quais são os múltiplos de 4, digam lá alguns, não acabam aqui, não é?

vários 4, 8, 12, 16,…

Prof Basta olhar para ali, não é? [apontando para as tabuadas do 3 e do 4 que estavam a ser projetadas no quadro]. O tema dos múltiplos relaciona-se com as tabuadas. O Dionísio tem razão na sua pergunta. Mas vocês repararam, só não estavam a pensar que eram múltiplos. Esses números que vocês dizem que aparecem nas duas tabuadas, são os múltiplos comuns entre o 3 e o 4.

O Dionísio percebeu que aquele assunto estava concluído e orientou o discurso para novas observações e nova análise do trabalho que as colegas estavam a apresentar. Conduziu as observações para os múltiplos comuns entre o 3 e o 4. Pareceu-me oportuno e deixei continuar embora fazendo algumas "pontes" entre o que já tinha sido observado dos resultados comuns e o que queriam agora analisar sobre os múltiplos. O próprio Dionísio completou o meu raciocínio e depois a Josefina acrescentou o número 24 como outro múltiplo comum. Seguiu-se então um momento que serviu de revisão sobre os múltiplos, assunto que também andava a ser investigado e explorado de diferentes maneiras pelos alunos. Fiz notar o cartaz das conclusões a que tínhamos chegado sobre esse assunto, que estava exposto na parede da sala.

Paulo As regularidades das tabuadas e os múltiplos são a mesma coisa.

Prof Não são bem. Mas há alguma relação entre os dois trabalhos. No entanto as regularidades focam também outros aspetos.
Mais coisas. Vocês só viram o 4x3 e 0 8x3 como tendo resultados iguais nas duas tabuadas? Vejam lá bem se não há mais nada?

Josefina e Margarida	Há o 30…
Prof	Humm… o 30 aparece na tabuada do 4?
Josefina e Margarida	Ah! não, não!
Prof	Então vamos lá ver… é só esses que há?
Josefina e Margarida	[As alunas que estão a apresentar o trabalho, observam os seus registos tentando encontrar outros resultados comuns nas duas tabuadas que estão a observar] No que estamos aqui a ver, são só esses… 3x3... não é, 3x4 é...
Prof	[Levantando-se e dirigindo-se para o quadro onde estão projetados os registos do trabalho] O 3 [indicando na tabuada do 3 o resultado do 3x1] aparece ali na do 4?
vários	Não
Prof	O 6?
vários	Não
Prof	O 9?
vários	Não
Prof	O 12?
vários	Sim.
	[A professora faz um círculo à volta do resultado 12 nas duas tabuadas e continua a questionar os resultados seguintes (15, 18, 21, 24) seguindo-se as mesmas respostas dos alunos. No resultado 24 volta a fazer os círculos nas duas tabuadas]
Prof	O 27?
vários	Não.
Prof	O 30?
vários	Não.
Prof	[Os registos só iam até ao 10x3 (30)] Qual seria o próximo?…[resultado comum às duas tabuadas]
Josefina e Margarida	O 33.
Jordão	Não, o 33 não pertence à tabuada do 4!
Prof	Vamos lá ver aqui uma coisa… 1, 2, 3, 4. Temos o 12. [Contando na tabuada do 3, o intervalo dos resultados em que volta a aparecer resultados iguais às duas tabuadas] 1, 2, 3, 4. Temos o 24. 1, 2, …
Jordão	Agora daqui a 4 era o 36…
Prof	Como é que era o 3 x 12?
vários	É o 36
Josefina	Nesta [apontando para a tabuada do 4] aparece de 3 em 3
Jordão	Depois vinha o 48.

Provoquei a turma para observarem mais resultados comuns entre as duas tabuadas. A Josefina e a Margarida perceberam que eu pretendia o resultado seguinte da tabuada do 3 mas o Jordão que já estava a perceber o meu raciocínio, avançou logo que o resultado 33 não era comum às duas tabuadas. Tentei então demonstrar a frequência com que surgia na tabuada do 3, os resultados comuns às duas tabuadas em estudo. O Jordão apercebe-se do padrão e comenta "Agora daqui a 4 era o 36…". Questionei o grupo sobre qual seria o resultado de 3x12, como forma de provar o que estava a demonstrar. Nesse momento a Josefina já se tinha apropriado do padrão que eu estava a levá-los a observar e fez a mesma observação mas sobre a tabuada do 4. Concluiu que nesse caso a frequência dos múltiplos comuns às duas tabuadas, surgia de 3 em 3. O Jordão continuou envolvido na procura dos resultados comuns que se seguiam.

Prof	Mais coisas. Como é que é na tabuada do 3… é a primeira tabuada ímpar que aqui aparece. Não há mais nada a observar?
	[Alguns ruídos de tentativas de novas descobertas]
	Reparem lá… digam alguns resultados da tabuada do 3.
Dionísio	Há [resultados] pares na do 3…
Prof	Nós até agora só tínhamos tido resultados pares. Na tabuada do 2 era tudo par, na do 4 era tudo par, na tabuada do 8 era tudo par, e agora temos aqui uma primeira tabuada de um número ímpar… Dá [os resultados são…] tudo ímpar?
vários	Não! Ímpar, par, ímpar, par,…
Jordão	Ah! Um ímpar mais um ímpar dá um par, um par mais um ímpar dá um ímpar.
Prof	Está bem, mas nós aqui estamos na multiplicação…
Paulo	Porque se tu multiplicares um ímpar por um par vai dar um par.
Prof	Multiplicar um ímpar por um par vai dar [o resultado vai ser] par? Vejam lá se é isso que o Paulo está a dizer?
Paulo	4 é par, 3 é ímpar, 4x3 é 12 que é par.
Prof	É par! Então agora explica lá da outra maneira, utilizando só ímpares.
Paulo	Com dois ímpares vai dar par.
Prof	Vai? Vê lá.
Paulo	Com ímpares… por exemplo 3x5 vai dar 15… é ímpar
Prof	Ahhh! Então não vai dar par.
Jordão	3x2, é um ímpar e um par vai dar 6 que é um par.

Prof Aqui na tabuada do 3, nós estamos a observar que quando se multiplica um par com um ímpar, por exemplo o 2x3 dá [o resultado é] um par. E quando se multiplica um ímpar com um ímpar…

Jordão 3x5 é 15 dá um ímpar…

Prof …dois ímpares multiplicados dá um ímpar. Mais.

Jordão e outros 3x9 dá 27, é ímpar. 3x7 é 21, é ímpar. 3x3 dá 9, é ímpar…

Prof Então o que é que está a qui a acontecer?

Dionísio Um ímpar mais… vezes um ímpar vai dar ímpar,… um ímpar. Um par vezes um par vai dar par.

Jordão …um ímpar vezes um par. Nós estamos a falar dos ímpares!

Fiz retomar a discussão sobre os pares e os ímpares que tínhamos tido nos primeiros trabalhos desta sessão, na apresentação das tabuadas do 2 e do 4. O Jordão fez uma primeira observação embora referindo-se ao que já conhecia da adição de pares e ímpares. Chamei à atenção de que estávamos a observar multiplicações. Prontamente o Paulo corrigiu a observação do colega e proferiu uma primeira generalização sobre a multiplicação entre um número ímpar e um número par. Conduzi-os então para a generalização feita pelo Paulo e induzi-os a testarem essa hipótese com os elementos que estávamos a observar projetados no quadro. Seguidamente, pedi que analisassem o que acontecia, no caso de ser uma multiplicação entre dois números ímpares. O Paulo um pouco confuso precipitou-se na resposta e disse que o resultado seria um número par. Pedi então que verificasse e ele conseguiu perceber que estava errado. Com as contribuições do Paulo e de outros alunos fomos então chegando às generalizações pretendidas sobre a multiplicação entre números pares e ímpares.

Joaquina 7x7 dá par!

Prof 7x7 dá par. Está aqui a Joaquina a dizer…

Dionísio [Murmurando] 7x7 dá par… Então!?...

Joaquina 5x5 dá par!

Prof 5x5 dá par! Está a Joaquina a dizer outra vez

Jordão 5x5 não dá par… dá 25…

Josefina 5x5 dá 25!? é ímpar!

Jordão 5+5 é que dá par!

Prof Nós estamos a falar de multiplicação. Esqueçam agora a adição. Ela disse 5x5 e o resultado é 25, é um número ímpar. E ela [a Joaquina] tinha falado que 7x7 dava par...

Jordão Então 49, é ímpar

Prof É ímpar, também não estava certo… Então quando se multiplica um número ímpar, por um número ímpar de vezes, o que é que vai acontecer?

vários Vai dar um ímpar.

Embora as intervenções da Joaquina estivessem nitidamente erradas, e eu pudesse ter corrigido de imediato, quis transferir para o grupo essa correção, para que fossem sentindo a responsabilidade de ouvirem, refletirem e corrigirem o que os colegas iam dizendo. Em vez de fazer eu a correção, devolvi para o grupo a afirmação da Joaquina, num tom mais elevado e numa expressão que chamava a atenção. Entre eles foram corrigindo o que a colega tinha dito. Repeti a conclusão a que já tínhamos chegado.

Prof Porquê? [Segue-se uma demonstração no quadro representando com traços as várias situações]. Por exemplo, 2x3 o que é que acontece? Vamos juntá-los a pares e não sobra nenhum. Se for mais 3, ou seja 3x3, fazemos mais um par e sobra um fica então ímpar…

Paulo …pois, fica um de fora…

Prof Se vier mais outro 3, que é 4x3, já se vai juntar com este e volta a ser par… mas se vier mais outra vez o 3, fica 5x3 que é um número ímpar de vezes, volta a ficar ímpar…

Dionísio É sempre: ímpar, par, ímpar, par,…

Prof O número ímpar de vezes que vai multiplicar um número ímpar vai dar sempre aquele que fica solto. Quando é um número par de vezes, juntam-se aqueles soltos e vai dar um número par…

Vasco …quando se multiplica um número um par de vezes, é par… o 2 é par, quando são dois 3 [2x3] é par. O 3 é ímpar, quando são três 3 [3x3] fica um número ímpar

Prof Reparem! Por isso é que nas tabuadas pares estão sempre a aparecer números pares… seja qual for o número é sempre um número par de vezes...

[No decorrer da demonstração ouvem-se vários murmúrios e comentários dos alunos, evidenciando que estão a acompanhar o raciocínio]

Resolvi fazer uma demonstração no quadro concretizando a situação com "traços" para que todos pudessem entender o que acontece naquela estrutura matemática. Os alunos iam proferindo alguns comentários, o que me dava para perceber que estavam a acompanhar a demonstração.

Prof Eu vou pôr estas questões no placard para investigarem: Fazerem as tabuadas dos ímpares até números para além do 10, para observarem os

padrões das tabuadas dos ímpares, não se esqueçam que ficámos de ver os padrões das tabuadas dos ímpares...
Digam lá os algarismos das unidades nos resultados da tabuada do 3...

vários 3, 6, 9, 2, 5, 8, 1, 4, 7, 0,…

Prof Pelo menos... se houver algum padrão nas tabuadas de números ímpares,… vamos procurar descobrir em que tabuadas? Na do 3 com números para além do 10…

vários …na do 5, 7, 9.

Prof Na do 11, também podem ver a do 11…

Neste momento, quis fazer um ponto da situação do que ficava por investigar. Aproveitando as questões que tinham sido levantadas pelos alunos ou que não tínhamos conseguido concluir por falta de provar. Com a ajuda dos alunos construímos algumas orientações de trabalho.

Prof Então, há mais alguma questão a colocar? Digam-me lá uma coisa, do 3 para o 4 ninguém observou aquelas relações do dobro, do quádruplo…

Josefina Ah! Eu tenho uma. [apontando para os resultados da tabuada do 3 e para o correspondente da tabuada do 4] mais 1, mais 2, mais 3,… [1x3=3, 1x4=4 (mais 1); 2x3=6, 2x4=8 (mais 2); 3x3=9, 3x4=12 (mais 3);…]

Prof E porque é que é sempre mais 1, mais 2, mais 3,…?

Josefina Porque o 3 é mais 1… menos 1 do que o 4.

Prof Porque o 4 é mais 1 do que o 3 e então vai sempre somando mais um do que o anterior. Quando chega ao 10 na tabuada do 4 vai ser mais quantos do que na do 3?

Jordão 10x3 é 30 e 10x4 é 40, são mais 10

Prof Já somou mais 10. Já aconteceu 10 vezes mais 1 logo são mais 10.

Como tínhamos observado nos trabalhos anteriores as relações de dobro entre os valores das tabuadas do 2 e do 4 e de quádruplo entre as tabuadas do 2 e do 8, não quis deixar de os fazer refletir sobre a possibilidade dessas relações nestas tabuadas. Surgiu então por parte da Josefina uma nova observação com a qual eu não contava. Mais uma vez questionei a turma no sentido de tentarem entender por que razão essa relação descoberta pela Josefina, acontecia. A própria Josefina conseguiu explicar a razão dessa regularidade.

Prof Há mais alguma coisa? Então o que é que se pode dar de continuidade a este trabalho?

Dionísio Explorar os padrões dos [das tabuadas] pares e dos ímpares.

Prof Investigar os padrões das tabuadas dos números ímpares - 5, 7, 9, 11.

Dionísio Havia também aquelas do par…

Prof	Ah! Íamos também fazer mais comparações com a do 2. Tínhamos visto a do 4, vimos a do 8, falta ver a do 6 e a do 10 e a do 12. E depois também podemos fazer outras comparações. Por exemplo a do 3. Não vos dá vontade de comparar a do 3 com outras tabuadas?
Dionísio	Sim, com a do 9...
Josefina	...e do 6.
Prof	Porque é que querem comparar a do 3 com a do 9?
Dionísio	Porque 3x3 é 9…
Prof	É o triplo, não é? E a do 6?
Josefina e outros	É o dobro…
Prof	Como será os resultados da do 6 em relação à do 3? Se 6 é o dobro de 3… será que os resultados também serão o dobro? O que é que vos parece?
Dionísio	Também me dá vontade de comparar a do 3 com a do 12. E depois a do 15
Prof	Todas estas questões que se estão aqui a levantar, podem ser atividades experimentais ou investigativas. São questões que vocês devem explorar. Em vez de estarem só a escrever as tabuadas para memorizar, é mais importante estarem a investigar estas relações... eu acredito que depois vos será mais fácil compreender e saber a tabuada. Vou escrever no placard estas questões para que vocês possam escolher as que querem explorar no Tempo de Estudo Autónomo. Por outro lado, vamos começar a escrever um cartaz, com estas conclusões que vão saindo das nossas discussões. Hoje apareceram umas e possivelmente vão surgir ainda mais. Vamos atualizando esse cartaz. Terminámos!

Estando o tempo a terminar, fizemos um resumo do que ficou por investigar e com a ajuda dos alunos levantámos outras possibilidades de investigações.

Já fora do tempo letivo escrevi as questões para investigação e coloquei-as num placard para os alunos poderem escolher as investigações sobre as quais se queriam debruçar. Por outro lado, iniciei um cartaz grande com as conclusões a que tínhamos chegado nesta sessão mas com a possibilidade de ir completando à medida que outras tabuadas fossem sendo investigadas.