INSTITUTO POLITÉCNICO DE LISBOA

ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO DE LISBOA

Atividades de investigação em Geometria: uma experiência no 2º ano de escolaridade

Dissertação apresentada à Escola Superior de Educação de Lisboa para obtenção de grau de mestre em Ciências da Educação, especialidade Educação Matemática na Educação Pré-Escolar e nos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico

Nádia Alexandra P. Cobrado de Azevedo

2013

INSTITUTO POLITÉCNICO DE LISBOA
ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO DE LISBOA

Atividades de investigação em Geometria: uma experiência no 2º ano de escolaridade

Dissertação apresentada à Escola Superior de Educação de Lisboa para obtenção de grau de mestre em Ciências da Educação, especialidade Educação Matemática na Educação Pré-Escolar e nos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico

Orientação da Professora Doutora Maria de Lurdes Serrazina

Nádia Alexandra P. Cobrado de Azevedo

2013

"That's one small step for [a] man, one giant leap for mankind".

Neil Armstrong,1969

RESUMO

O objetivo desta investigação é compreender como é que se desenvolve a atividade matemática dos alunos no decorrer de atividades de investigação na área da Geometria.

De forma a tornar mais claro o objetivo do estudo, elaborei três questões que orientaram toda a investigação. Assim, pretendo saber (i.) como se desenvolve a atividade matemática dos alunos quando se envolvem em atividades de investigação matemática em geometria? (ii.) que processos são utilizados pelos alunos no decorrer deste tipo de atividades? (iii.) E qual o papel do professor no acompanhamento e orientação dos alunos envolvidos em atividades de investigação matemática em geometria?

Este é um estudo que se enquadra no paradigma interpretativo, seguindo uma abordagem qualitativa, pelo que não se pretende generalizar os resultados, mas antes descrever e interpretar todo o processo, tendo em conta também o contexto pessoal e social onde se insere. Tomei como opção a realização de um único estudo com todos os alunos da minha turma do 2º ano de escolaridade, os quais estão organizados em dois grupos de 4 alunos cada.

A recolha dos dados foi feita em situação de sala de aula, destacando-se a observação participante enquanto Professora Tutelar da turma e investigadora, a análise dos registos audiovisuais e produtos escritos dos alunos. A análise teve como base os constructos teóricos de referência.

As conclusões desta investigação basearam-se na análise das estratégias dos alunos e no processo decorrente da atividade matemática inerente à atividade investigativa proposta, tendo em conta a teria de van Hiele e Taxonomia SOLO de Biggs e Collins. Os alunos investigaram triângulos e quadriláteros e foram capazes não só discriminar as características destas figuras, como também reconhecê-las visualmente e agrupá-las de acordo com uma classificação geométrica criada por si. No caso dos triângulos a classificação centrou-se na igualdade e diferenças entre o comprimento dos lados, em relação aos quadriláteros os alunos optaram por agrupá-los tendo em conta os ângulos internos, a partir da amplitude do ângulo reto.

Palavras-chave: geometria; visualização; níveis de van Hiele; Taxonomia Solo; materiais manipuláveis; raciocínio geométrico; triângulos; quadriláteros.

ABSTRACT

The purpose of this research is to understand how students developed their mathematical activity in the course of investigation activities in the geometry field.

In order to clarify the purpose of the study, three questions were formulated, which guided the entire research. Therefore, I want to know: (i.) how do students developed their mathematical activity when involved in investigational activities in geometry? (ii.) Which are the processes used by students during such activities? (iii.) What is the teacher´s role when monitoring and guiding the students involved in investigational activities in geometry?

This is a study that falls within the interpretive paradigm, following a qualitative approach, by which is not intended to generalize the results, but a fully comprehensive description and interpretation the whole process, taking into account also the personal and social context in which it operates. I opted to conduct a single study with all the students in 2nd grade class, which is organized into two groups of four students each.

The data collection was done in the classroom situation, highlighting a direct and participant observation while class teacher and researcher, video and audio records and written worksheets of students. The analysis was based on the theoretical constructs of reference.

The conclusions of this research are based on analysis of students' strategies and in the process due to the mathematical activity inherent to investigation activity proposed, but based on the theory of van Hiele levels, and taxonomy SOLO of Biggs Collis. Students investigated triangles and quadrilaterals and were able to discriminate not only the characteristics of these figures, but also visually recognize them and group them according to a geometric classification created by themselves. In the case of the triangles, the classification was focused on the differences and equal length sides; for the quadrilaterals, students chosen to group them in view of the interior angles from the amplitude of the angle.

Keywords: geometry, spatial visualization; van Hiele levels, SOLO Taxonomy, manipulative material, geometric reasoning, triangles, quadrilaterals.

AGRADECIMENTOS

À minha família próxima, por todo o apoio e ajuda prestada em todos os momentos.

Aos meus alunos, pela disponibilidade, vontade e motivação transmitida.

À Professora Doutora Maria de Lurdes Serrazina, pelo apoio incondicional, pelos conselhos e por toda a confiança e incentivo demonstrados.

Aos meus amigos e colegas de mestrado, que nunca me deixaram desistir e sempre me apoiaram.

Índice Geral

Índice de Figuras

Índice de Quadros

Índice de anexos

Capítulo I

INTRODUÇÃO

1. Problemática e objetivo do estudo

Atualmente a disciplina de matemática continua a ser vista por muitos alunos como aquela que é mais difícil e que apresenta resultados mais negativos. Segundo Ponte (2010) muitos alunos consideram que a disciplina não tem utilidade e que não vale a pena o seu esforço. De facto, se consideramos a Matemática como um produto acabado, os alunos apenas têm de se empenhar para aprender a resolver diversos tipos de exercícios, sem que tal lhes faça sentido, sem que estejam motivados para a sua aprendizagem.

Como refere Christiansen e Walther (1986) a Matemática escolar deve basear-se mais na atividade pessoal do aluno e deve ser dada prioridade ao processo educacional que permite levar os alunos a envolverem-se em atividades do tipo construtivo, exploratório e de resolução de problemas, nas quais podem trabalhar sozinhos, mas também em grupo. Torna-se necessário que consideremos a atividade matemática como um conceito organizador do ensino da Matemática tendo em conta os objetivos e o contexto educacional atual.

A escola deve procurar levar os alunos a "pensar matematicamente", e para tal, estes devem ter a possibilidade de se envolverem em problemas abertos e em explorações e investigações matemáticas. Neste sentido, considerando que a geometria é uma área da Matemática propícia à realização de atividades de natureza exploratória e investigativa, é fundamental proporcionar aos alunos diversos tipos de experiência de aprendizagem que os levem a realizar descobertas, sem a necessidade de um elevado número de pré-requisitos e evitando a visão da Matemática centrada na resolução de algoritmos e em receitas para resolver exercícios (Abrantes, 1999).

Deste modo, compreender a atividade matemática escolar inerente a propostas de investigação e exploração na geometria, com recurso natural a materiais manipuláveis, pode tornar-se interessante e relevante para aprofundar o conhecimento em educação matemática em Portugal.

É neste sentido que este estudo arroga como objetivo principal a análise da atividade matemática dos alunos inerente a atividades de investigação e exploração matemática em geometria nos primeiros anos de escolaridade, dando ênfase ao recurso a materiais manipuláveis, como o geoplano e o papel ponteado. Para atingir o objetivo definido, procurar-se-á dar resposta às seguintes questões de investigação:

- Como se desenvolve a atividade matemática dos alunos quando se envolvem em atividades de investigação matemática em geometria?

- Que processos são utilizados pelos alunos no decorrer deste tipo de atividades?

- Qual o papel do professor no acompanhamento e orientação dos alunos envolvidos em atividades de investigação matemática em geometria?

2. Pertinência do Estudo

Com a evolução da sociedade atual torna-se proeminente a necessidade de criar cidadãos capazes de se adaptarem a novas situações, munidos de saberes que lhes permitam intervir na sociedade e resolver problemas que lhes vão surgindo e que vão resolvendo com engenho, espírito crítico e destreza (Mendes,1997). Neste sentido, é necessário, proporcionar aos alunos momentos de trabalho na sala de aula, nos quais possam refletir e participar de forma ativa e significativa no seu processo de ensino aprendizagem. É cada vez mais difícil ir ao encontro das necessidades de cada aluno e torna-se impensável que o ensino da matemática seja meramente expositivo, no qual os alunos são apenas recetores da informação e o professor o detentor do saber matemático. Martins, Maia, Menino, Rocha e Pires (2002) consideram que os problemas são situações não rotineiras e que nas atividades de investigação os alunos têm a possibilidade de fazer pequenas cadeias de raciocínio dedutivo. As investigações matemáticas, consideradas como trabalho não rotineiro, permitem entre outros aspetos "(a) o desenvolvimento de uma competência matemática, integrando atitudes, capacidades e conhecimentos; (b) a oportunidade de abordar e relacionar dinamicamente conteúdos matemáticos, valorizando as suas conexões; (c) a realização de situações de trabalho diferenciado (…) (d) uma compreensão global da natureza da atividade matemática (…)" (p. 74).

Tal como refere Abrantes (1999), "As atividades investigativas em geometria conduzem rapidamente à necessidade de se lidar com diversos aspetos essenciais da natureza da própria Matemática. Formular e resolver problemas, fazer conjeturas, testá-las, validá-las ou refutá-las, procurar generalizações, comunicar descobertas e justificações, tornam-se processos naturais" (p.4). Este autor considera que explorações e investigações em geometria podem fazer-se em todos os níveis de escolaridade. Como tal, nos primeiros anos é essencial este trabalho. Considero no entanto, que a aprendizagem só poderá ser efetiva se os alunos puderem participar, discutir, refletir e construir, com a ajuda do professor, um conhecimento matemático consistente. Considerando a importância das atividades investigativas em matemática pelo seu carácter formativo, flexível e motivador para os alunos, é essencial aprofundar a investigação nesta área. Nas atividades investigativas atuam todos os intervenientes presentes na sala de aula contribuindo para a criação de uma cultura de sala de aula, onde todos participam de forma ativa e significativa. Progressivamente, os alunos fazem as suas próprias descobertas e através delas constroem significados matemáticos, fator essencial para o sucesso da aprendizagem dos alunos em Matemática.

Como professora do 1º Ciclo considero que poderá ser bastante motivante e enriquecedor profissional e pessoalmente, o desenvolvimento desta investigação. A Geometria é uma área para a qual os alunos estão motivados e empenhados. Além disso, e apesar de lecionar há apenas 7 anos, sinto que na minha sala de aula, por vezes falta algo quando trabalho com os meus alunos a Geometria. Sinto que poderia fazer muito mais, mas devido a alguma insegurança e incerteza sinto que tenho de ser eu a concretizar a aprendizagem. Assim, a dinâmica que está inerente à realização de atividades investigativas em Geometria, é muito mais surpreendente e incerta, o que me colocará muito mais à prova, mas será muito mais rica e motivante para os alunos.

Capítulo II

ENQUADRAMENTO TEÓRICO

O objetivo deste estudo é a análise da atividade matemática dos alunos no decurso de atividades de investigação em geometria, com recurso a materiais manipuláveis.

Em termos teóricos, este estudo implica a construção de um conjunto de referências que permitirão compreender, analisar e refletir acerca dos fenómenos a observar na atividade matemática dos alunos. Serão analisados textos teóricos, mas também trabalhos empíricos realizados na mesma área.

Neste sentido, ao longo deste capítulo é feita a caracterização dos constructos teóricos subjacentes a: a) Aprendizagem e atividade matemática dos alunos; b) Atividades de natureza investigativa nos primeiros anos da Matemática Escolar; c) Aprendizagem em geometria: O pensamento geométrico e espacial; O recurso a materiais manipuláveis – do concreto para o abstrato; d) Papel do Professor no decurso de atividades de natureza investigativa.

1. Aprendizagem e atividade matemática dos alunos

Tendo este estudo como objetivo principal a análise da atividade matemática dos alunos, é fundamental compreender e identificar os principais constructos que caracterizam a aprendizagem e a atividade matemática dos alunos.

Segundo Christiansen e Walther (1986), em todos os níveis de ensino da matemática os exercícios ocupam um lugar central, o que leva a uma sobrevalorização dos produtos em detrimento dos processos na aprendizagem da Matemática. É essencial levar os alunos a “fazer matemática” e neste sentido atividades do tipo investigativo poderão proporcionar aos alunos uma oportunidade de se envolverem em todo o processo de aprendizagem, valorizando o caminho e as opções que escolheram para chegar ao produto final, que por sua vez, se estende para novos caminhos. Ou seja, ao investigar o conhecimento matemático dos alunos vai sendo progressivamente alargado, tendo estes a oportunidade de fazer matemática ao descobrir, conjeturar ou apresentar explicações e justificações com a ajuda dos seus pares e professor. É aquilo que na perspetiva filosófica de Lakatos, se designa de falibilismo. Na génese desta perspetiva, temos o processo pelo qual criações matemáticas se transformam em saber matemático publicamente aceite por todos (cit. Ponte, Boavida, Graça & Abrantes, 1997). Considerando que nesta perspectiva, o conhecimento do aluno implica da sua parte uma atividade constante, será fundamental compreendermos também a teoria da atividade. Esta é desenvolvida e apresentada em diversas áreas, como a Psicologia, a Sociologia, etc. Considero que a atividade dos alunos deve passar pela compreensão dos objetivos do seu trabalho, da sua atividade. Deste modo, os alunos poderão desenvolver um conjunto de ações que lhes permitirão alcançar o objetivo inicial. É também fundamental não esquecer que, a discussão que se irá estabelecer entre os sujeitos, alunos e professores, também irá contribuir e influenciar o desempenho dos alunos, dando sentido e significado à sua atividade. Mas, para que possa surgir uma aprendizagem real, a atividade do aluno não pode acontecer isoladamente, mas deve ser mediada pelo professor e pelos seus pares, processando-se a aprendizagem dos alunos na sua zona de desenvolvimento proximal, como definido por Vygotsky. Ao mesmo tempo, essa aprendizagem tal como referem Christisiansen e Walther (1986) deverá ser realizada dentro de um grupo do qual um indivíduo faz parte.

A aprendizagem e a atividade matemática dos alunos estão implicitamente relacionadas. Os alunos não podem simplesmente efetuar tarefas de rotina que nada, ou muito pouco, acrescentam ao seu conhecimento e à real aprendizagem em matemática. Aos alunos tem de ser dada a oportunidade de fazer matemática, tal como referem Bishop e Goffree (1986), ao aprender Matemática fazendo, os alunos estão não só a manipular objetos, mas também a pensar sobre essa manipulação, refletindo acerca do procedimento e da execução. Ao fazer matemática, os alunos vão progressivamente construindo e alargando os seus conhecimentos numa perspetiva significativa e útil, o que não poderá estar exclusivamente dependente dos conhecimentos e competência explicitadas pelo professor (Abrantes, Boavida, Graça e Ponte, 1997).

Segundo a visão da matemática escolar dos Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2007) a aprendizagem da matemática deve feita com compreensão. No entanto, e de acordo com a minha experiência profissional considero que infelizmente, a aprendizagem sem essa compreensão tem continuado a estar bastante presente no ensino da

Matemática. Num segundo ano de escolaridade, a aprendizagem deve ser ativa, rica em linguagem natural e a matemática recheada de oportunidades. “Quando desafiados com tarefas criteriosamente selecionadas, os alunos, tornam-se confiantes na sua capacidade de lidar com problemas difíceis, ansiosos por chegar à resposta eles mesmos (…)” (NCTM, 2007, p. 22) . Ao trabalharem no decurso de uma proposta de investigação matemática, os alunos tornar-se-ão indivíduos cada vez mais competentes a nível matemático, o que lhes permitirá usar o conhecimento adquirido de forma adequada noutro tipo de situações. Ao mesmo tempo, serão também, mais autónomos e mais confiantes no seu conhecimento, nas suas capacidades. Como referem as Normas do NCTM (2007) já citadas, ao trabalharem neste tipo de atividade - atividades de natureza investigativa - os alunos adquirem maior vontade por quererem saber mais, por quererem aprofundar o seu conhecimento matemático.

2. Atividades de natureza investigativa nos primeiros anos da Matemática escolar

Tendo como objetivo principal levar os alunos a “pensar matematicamente” é fundamental criarmos situações, nas quais os alunos possam desenvolver uma atividade metacognitiva, refletindo sobre a sua própria aprendizagem. Ao mesmo tempo devemos levar os alunos a pensar sobre as estratégias que utilizaram face aos resultados obtidos. As atividades de investigação são um tipo de atividade na qual todos os alunos têm a oportunidade de investigar e de experimentar. No entanto, por se tratar de um tipo de trabalho no qual é mais difícil a programação exige muito mais do professor e dos seus alunos. Tal como referem Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) poder-se-á programar a forma como se vai iniciar uma aula de investigação, no entanto, é difícil prever os caminhos que serão seguidos pelos alunos, as discussões que serão tidas, e, muito menos, o modo como a turma irá reagir às intervenções do professor. Neste sentido, torna-se desafiante para o professor e, claro, para os alunos, o desenrolar de uma aula de investigação.

As atividades de natureza investigativa serão naturalmente confundíveis com a resolução de problemas matemáticos. Partilhando das ideias de Mendes (1997) as atividades de investigação possuem caraterísticas particulares: a) mais abertas, porque permitem que não se chegue logo à conclusão, nem eventualmente a uma mesma conclusão; b) permitem diversos caminhos e vários processos até se chegar à conclusão; c) a resposta não é única e da mesma atividade podem resultar produtos antagónicos.

A participação ativa de todos os alunos nas atividades investigativas é essencial, só deste modo os alunos poderão ser verdadeiros atores do seu processo de ensino-aprendizagem e não apenas meros espetadores daquilo que observam. De acordo com as Orientações Metodológicas do Novo Programa de Matemática (ME, 2007) os alunos devem poder resolver problemas, analisar e refletir sobre as suas resoluções e as resoluções dos colegas. É neste sentido, um trabalho não rotineiro, aspeto já referido por Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999), no qual os alunos têm a oportunidade de explorar situações problemáticas, procurar regularidades, fazer e testar conjeturas, formular generalizações. Esta é uma atividade complexa e exige um processo de apropriação por parte dos alunos. Para que os alunos possam apropriar-se da atividade inerente a uma tarefa de investigação matemática será essencial a criação de um ambiente de aprendizagem no qual possam aprender a raciocinar e comunicar matematicamente. O que mais tarde lhes irá permitir formular e validar as suas conjeturas, e adquirir a confiança necessária para que possam participar nas discussões dos seus argumentos (Martins, et al, 2002). Não é algo fácil de atingir, mas facilmente os alunos lhe atribuem significado e conseguem eles próprios elaborar conjeturas. Aliás, de acordo com Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2007) os alunos mais novos irão verbalizar as suas conjeturas e descrever os seus pensamentos pelas suas próprias palavras e explorá-los, muitas vezes através da utilização de objetos concretos. Pretende-se com estas atividades levar os alunos a aprender a raciocinar através da discussão, envolvendo toda a turma. Através deste tipo de comunicação matemática, os alunos podem partilhar as suas ideias e partilha-las com o seu grupo ou com toda a turma.

> “Os alunos começam por pensar as ideias matemáticas através da língua natural. É nela que, pouco a pouco, vão integrando aspectos da linguagem matemática. Uma das dificuldades que encontram neste processo resulta do facto que certos termos são usados tanto por uma como por outra por vezes com significados diferentes. (…) Permitir aos alunos os seus próprios meios de expressão é essencial para que eles possam desenvolver a sua competência no uso da linguagem matemática a partir da linguagem natural. (Ponte e Serrazina, 2000, p. 62)

As tarefas investigativas permitem que os alunos comecem a fazer pequenas cadeias de raciocínio indutivo a partir de padrões e casos específicos, podendo muitas vezes apresentar contra exemplos para contrariar conjeturas. À medida que vão progredindo, é preciso levar os alunos a aprender a formular argumentos dedutivos eficazes, baseados nas verdades matemáticas que vão estabelecendo nas aulas (NCTM, 2007).

Ao longo de uma tarefa de investigação, o trabalho dos alunos, e também do professor passará por várias fases. De acordo com Matos e Ponte (1992) as atividades de investigação podem ser agrupadas em três fases de trabalho principais "(a) formulação de objectivos, (b) definição de estratégias, (c) reflexão sobre os resultados das experiências conduzidas e formulação e verificação de conjeturas " (p.4). Da mesma forma, Ponte e Serrazina (2000) consideram que uma investigação matemática, tal como um problema, deve iniciar-se sempre por uma questão de certo modo imprecisa, o que diferencia do tipo de questão presente nos problemas, que é bem definida. Os mesmos autores referindo Ponte, Oliveira, Brunheira, Varandas e Ferreira (1999), apresentam ainda, um conjunto de quatro etapas, que caracterizam uma investigação: 1)Formular a questão a investigar; 2) Formular conjecturas relativamente a essa questão; 3) Testar as conjecturas e, eventualmente reformulá-las; 4) Validar e comunicar os resultados.

Na última fase do trabalho numa tarefa de investigação, os alunos, nomeadamente os do 1º ciclo, deverão ser encorajados a apresentar argumentos válidos, a verificar conjeturas, mas ao mesmo tempo, é importante, que lhes seja dado tempo para procurar evidências que as apoiem, ou não, mas que permitam justificar as suas ideias. Os alunos devem compreender que os exemplos são importantes, mas que os contra-exemplos são bastante úteis, principalmente quando os exemplos não são suficientes para provar as conjeturas apresentadas (Martins, et al, 2002). Para Ponte e Serrazina (2000) "(…) as investigações constituem processos característicos da actividade matemática que devem marcar uma forte presença no ensino-aprendizagem desta área disciplinar" (p. 59).

3. Aprendizagem em geometria

Ao nível do 1º ciclo, a aprendizagem da geometria deve ser feita de modo informal, valorizando a manipulação de materiais e a reflexão sobre as atividades realizadas, o que conduzirá os alunos à construção de conceitos neste domínio. Ou seja, é fundamental que tenham a oportunidade de explorar, visualizar e comparar objectos de forma concreta (Ponte e Serrazina, 2000). É fundamental que os alunos possam explorar o seu espaço de forma a compreenderem a realidade envolvente. Tal como refere Abrantes (1999) ao citar as ideias de Freudenthal (1973) a geometria é um campo propício a atividades que levam à matematização da realidade e à realização de descobertas. No entanto, é fundamental que para além dos alunos poderem explorar e fazer as suas descobertas, possam também ter oportunidade de discutir as suas ideias e conclusões. Além disso, de acordo com a teoria de Piaget, nos primeiros anos da matemática escolar, as crianças estão na fase das operações concretas, pelo que faz todo o sentido que o trabalho em geometria permita que os alunos explorem os objetos fisicamente.

> Com actividades bem concebidas, com ferramentas adequadas e com o apoio do professor, poderão formular e explorar conjecturas e poderão aprender a raciocinar cuidadosamente sobre as noções geométricas, logo desde os primeiros anos de escolaridade (NCTM, 2007, p.44)

Deste modo, atividades de natureza investigativa em geometria fazem todo o sentido pois permitem que os alunos se possam envolver naturalmente nas investigações sem que para isso tenham de ter um grande número de conhecimentos anteriores, (pré- requisitos). Além disso, diversas investigações demonstram que este tipo de trabalho é substancialmente rico em processos característicos da atividade matemática (Abrantes, 1999).

3.1. Visualização e Pensamento Espacial

Tendo como ponto de partida os objetivos, as orientações e indicações presentes no Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), é essencial que o professor tenha a preocupação de levar os seus alunos a desenvolver o sentido espacial que têm em relação aos objetos do mundo que os rodeia. Deste modo, com a aprendizagem no âmbito da Geometria, os alunos devem:

a. Desenvolver a visualização e ser capazes de representar, descrever e construir figuras no plano e no espaço.
b. Ser capazes de identificar e interpretar relações espaciais.

Segundo Del Grande (1987), as crianças começam a contactar com as noções de espaço assim que começam a compreender o mundo através da linguagem. Neste período, o pensamento das crianças é dominado pela interpretação que dão às suas experiências de visão, audição, tato, movimento, etc. Ou seja, da sua perceção do espaço. A perceção espacial é a capacidade de reconhecer e discriminar estímulos vindos do espaço e interpretar esses estímulos de acordo com as suas experiências anteriores. Como sabemos, antes de entrar para o 1º ano de escolaridade, os alunos contatam muitas vezes com jogos de materiais que os levam a desenvolver intuitivamente as suas capacidades de visualização espacial.

De acordo com Pestalozzi (citado em Guitérrez - 1996) a visualização é um dos componentes mais importantes da cognição. Quando se fala de visualização surgem diversos termos, nomeadamente: raciocínio visual, imaginação, pensamento espacial, imagens, imagens mentais, imagens visuais, imagens espaciais e outros. Visualização e pensamento espacial podem ter significados semelhantes, contudo, a visualização é considerada como uma componente necessária para o ensino e a aprendizagem em geometria.

Clements e Sarama (2007) consideram que a visualização espacial é a capacidade de gerar e manipular imagens, que envolve a compreensão e a capacidade de imaginar objetos em movimento, a duas e a três dimensões. Para tal, é necessário que os sujeitos sejam capazes de criar e manipular imagens mentais. As imagens são mais abstratas, mais maleáveis e menos nítidas do que as fotografias. Elas são segmentadas em partes e representam as relações entre essas partes (Shepard, 1978 citado por Clements e Sarama, 2007). As primeiras imagens são estáticas e não dinâmicas. Podem ser mentalmente representadas e mesmo examinadas, mas não podem ser transformadas. Quando possuímos a capacidade de imaginar de forma dinâmica, podemos imaginar o "movimento" de uma figura de um lugar para outro, ou mesmo estabelecer comparações entre uma imagem e outra imagem. De acordo com a teoria de Piaget (referenciada por Clements & Battista, 2007), as crianças só serão capazes de criar imagens dinâmicas depois de terem tido um conjunto de experiências visuais que lhes permitam confiar plenamente no seu pensamento percetual. Além disso, na teoria apresentada, as crianças só serão capazes de gerar imagens dinâmicas em níveis correspondentes ao ensino primário. Segundo Clements e Battista (2007) as atividades de visualização e orientação espacial que combinam simultaneamente movimento psicológico, lápis e papel e trabalho no computador podem facilitar a aprendizagem da matemática.

Por sua vez, Gordo (1994) refere outra categorização diferente para as capacidades espaciais, considerando dois tipos: a visualização e a orientação espacial (McGee, Connor e Serbin citados por Tartre, 1990). A visualização envolve a capacidade de imaginar como se apresentará um objeto representado numa gravura se for alterada a sua posição, alterando a representação mental do objeto. A orientação espacial envolve a capacidade de detetar combinações de objetos segundo um padrão e a capacidade para manter as perceções face à mudança, alterando a perspetiva percetual do observador.

Além desta categorização, surge uma outra proposta referida por vários autores (Gordo, 1994; Gutiérrez, 1996 que citam Bishop ,1980) que apresenta dois tipos de capacidades: capacidade de interpretar informação figurativa e capacidade de processamento visual.

A capacidade de **interpretar informação figurativa** (IFI) – capacidade que envolve a compreensão de representações visuais e de vocabulário espacial. Esta capacidade relaciona-se com a forma. A capacidade de **processamento visual** (VP) – envolve a transferência de relações abstratas e dados não figurativos, em termos visuais. Esta capacidade relaciona-se com o processo, e não com a forma.

Assim, é essencial termos em mente quais as capacidades de visualização espacial que os alunos devem desenvolver. Na sua pesquisa Del Grande (1990) reúne sete capacidades de visualização espacial. A *Coordenação visual-motora* é considerada como a capacidade de coordenar a visão com os movimentos do corpo. Os alunos começam a desenvolver esta capacidade desde muito cedo em atividades como vestir, sentar-se numa mesa, cortar e colar, etc. A *perceção figura-fundo* permite aos alunos identificar visualmente uma determinada figura dentro de um fundo complexo (figuras escondidas). Através da *Constância percetual*, os alunos tornam-se capazes de reconhecer a constância da forma, necessitando de reconhecer as propriedades das figuras geométricas: o tamanho, a forma, a posição, a textura… A *Perceção da posição no espaço* leva os alunos a distinguir entre figuras iguais, mas colocadas com orientações diferentes. Este tipo de atividades envolve rotações e colocação das figuras em posições opostas. Os professores devem procurar levar os alunos a compreender o que são figuras congruentes e com a mesma orientação. Esta capacidade é essencial para o desenvolvimento de muitas outras capacidades em Geometria. Pela capacidade de *Perceção de relações espaciais*, os alunos tornam-se capazes de ver um ou mais objetos numa relação consigo próprios ou em relação com os outros. Esta capacidade pode ser desenvolvida na escola com atividades adequadas, por exemplo, reproduzir uma construção com cubos igual à do professor ou colegas. Esta é uma capacidade que está presente na vida real das crianças em diversas situações, tais como, jogos, andar de bicicleta, etc. Através da *Discriminação visual* os alunos deverão ser capazes de identificar semelhanças e diferenças entre um amontoado de objetos/figuras. Por sua vez, a *Memória visual* – é uma das capacidades essenciais, pois permite que os alunos tenham capacidade de recordar um objeto que não está à vista, relacionando as suas caraterísticas com outros objetos. Ou seja, é a chamada "imagem fotográfica" que está mais desenvolvida em certas pessoas que noutras.

Concluindo, a atividade matemática como um processo construtivo, necessita de um ambiente motivador que proporcione aos alunos o desenvolvimento das suas capacidades. Neste sentido, tal como refere Gordo citando Bishop, as capacidade espaciais são importantes pelo tipo de processos mentais envolvidos, que por sua vez, podem ser transferidos para outras áreas da Matemática, por exemplo no pensamento algébrico e no pensamento aritmético.

3.2. Desenvolvimento do pensamento geométrico e raciocínio espacial

Segundo Clements e Sarama (2007) o pensamento espacial contribui de forma significativa para o desenvolvimento das capacidades matemáticas dos sujeitos, aliás muitos autores arrogam a ideia de que alunos com um pensamento espacial bem desenvolvido têm melhores desempenhos matemáticos. Por sua vez, Battista (2007) refere-se ao pensamento geométrico que consiste, primeiramente na invenção e uso formal de um sistema de conceitos para investigar a forma e o espaço.

Especificamente, no sistema conceptual de análise dos quadriláteros e triângulos, utilizam-se conceitos como, medidas de ângulos, medidas de comprimento, congruência, paralelismo, para conceptualizar as relações espaciais num universo de formas. Quando se descreve uma forma geométrica tendo em conta as suas características, tal, poderá ajudar o indivíduo a compreender a classificação das formas.

Piaget e Inhelder´s (1967), referidos por Clements (2003), apresentam a sua teoria acerca do pensamento espacial. Primeiro, as representações espaciais têm uma estreita relação com o desenvolvimento motor com as ações por parte do sujeito. Além disso, as representações espaciais não correspondem apenas à leitura que o sujeito faz do ambiente espacial, mas antes, à manipulação ativa que faz nesse ambiente. Segundo, a organização progressiva das ideias geométricas segue uma ordem definida que é mais lógica do que histórica. Isto é, inicialmente, as relações topológicas são construídas, seguidas por relações projetivas e euclidianas.

Relativamente ao pensamento geométrico, esse corresponde ao raciocínio espacial que é a capacidade de “ver”, analisar e refletir sobre os objetos espaciais, imagens, relações e transformações que implicam a criação e transformação de imagens ao serviço de operações mentais. O raciocínio espacial é não só o “input” para o raciocínio geométrico formal, mas também o essencial para o desenvolvimento cognitivo do pensamento crítico necessário à análise geométrica formal.

De acordo com Piaget (citado por Clements e Sarama, 2007) as crianças já nascem com conhecimento acerca das formas e dos objetos. As primeiras noções que as crianças têm são acerca da topologia do espaço e mais tarde de perspetiva e coordenação espacial. Considera que as crianças podem raciocinar acerca das perspetivas e distâncias espaciais, no entanto, as suas capacidades ir-se-ão desenvolver muito mais quando entrarem para a escola, pelo menos se forem confrontadas com atividades que lhes permitam explorar, conjeturar, comunicar…

Algumas das pesquisas efetuadas por Piaget e Inhelder (1967) (citados por Clements e Sarama, 2007) demonstram que a representação do mundo se baseia nas reflexões tidas por parte do sujeito acerca do espaço que o rodeia. Ou seja, por um lado, correspondem à representação que têm do próprio mundo, o que depende das suas ações (código espacial) e, por outro, correspondem à reflexão que têm sobre o próprio mundo (pensamento espacial). À medida que as crianças vão crescendo vão tendo um maior conhecimento espacial, o que vai ao mesmo tempo alargar os códigos que possuem acerca das representações do mundo. Neste sentido, o pensamento espacial vai-se desenvolvendo progressivamente e acompanhando a idade da criança. No entanto, o conhecimento que as crianças possuem acerca das formas não se desenvolve apenas através de uma visualização passiva. Pelo contrário, as crianças necessitam de explorar as figuras para depois as poderem entender. Tal como referem diferentes autores (por exemplo Arditi, Holtzman, & Kosslyn, 1988; Morrongiello, Timney, Humphrey, Anderson, & Story, 1995; Newcombe & Huttenlicher, 2009) as experiências de visualização espacial são um valoroso contributo para o desenvolvimento do pensamento espacial.

A orientação espacial é o conhecimento que temos acerca do mundo que nos rodeia, que nos permite movimentar e operar perante as relações entre as diferentes posições no espaço, seja em relação ao nosso próprio corpo, seja numa perspectiva mais abstrata que inclui mapas e coordenação a vários níveis (Clements & Sarama, 2007).

Segundo Clements e Sarama (2007), as crianças pequenas podem aumentar e melhorar as suas capacidades matemáticas através de experiências que têm no espaço que as rodeia. Inicialmente começam a representar mentalmente os seus ambientes espaciais e conseguem através das suas capacidades de representação espacial criar mapas espaciais simples. Ao construírem esses mapas é necessário estabelecerem correspondências geométricas entre os elementos, uma vez que estes variam em escala e perspetiva. No entanto, as crianças em idade pré-escolar apesar de poderem compreender os símbolos presentes nos mapas, apresentam maior dificuldade nas correspondências geométricas entre os mapas e o referido espaço real.

De acordo com a teoria de Piaget e Inhelder (1967) citados pelos mesmos autores, as crianças apresentam uma tendência inata para organizar objetos a duas ou três dimensões. No entanto a consciência espacial não se inicia com um quadro de referência a duas ou três dimensões, mas estas são por si o culminar do desenvolvimento do espaço euclidiano. As crianças mais novas possuem à partida capacidade para estruturar o espaço a duas dimensões, mas tem de lhes ser solicitado que a usem. No entanto, as crianças mais velhas, muitas vezes, não têm desenvolvida uma base concetual sólida e um sistema de coordenadas de referência. A estruturação espacial é uma forma de abstração de coordenação, de seleção, de unificação e registo na memória dos objectos mentais e das ações.

Perceção e conhecimento das formas geométricas

A forma é um constructo fundamental do desenvolvimento cognitivo que vai para além da geometria.

Segundo Piaget e Inhelder (1967), referidos por Clements e Sarama (2007) inicialmente, as crianças começam a descriminar os objetos através das caraterísticas tidas com base na proximidade em relação ao objeto – propriedades topológicas - ou então com base em caraterísticas de objetos equivalentes. Por outro lado, os mesmos autores consideram também, que as representações que as crianças têm acerca do espaço, não dependem apenas da leitura que fazem do mundo, mas sim da sua ação. Por exemplo, a abstração da forma é o resultado da coordenação das ações das crianças.

3.3. Teoria de van Hiele

Segundo Matos (1992), Dina van Hiele-Geldof e Pierre van Hiele desenvolveram a sua teoria na Holanda em meados dos anos 50. A investigação que realizaram e da qual resultou a sua teoria, sofreu influências do contexto de mudança ao nível da Educação Matemática, mesmo antes da Matemática Moderna, mas quando a comunidade internacional já começava a discutir novos métodos. Deste modo, Dina e Pierre van Hiele desenvolveram o seu trabalho seguindo um currículo no qual a geometria era vista como uma forma de treino das capacidades lógicas da mente, mas dado o seu ponto de vista contemporâneo, dava relevância à utilização do geoplano e aos desenhos dos alunos com régua e compasso. A teoria dos van Hiele é baseada em três elementos essenciais: a base estruturalista do trabalho, a influência da psicologia de *gestalt*, e, por último o desenvolvimento da didática da matemática, ou melhor o *insight* na sala de aula.

O mesmo autor refere que apesar da teoria dos van Hiele se basear no ensino atual da matemática, desvalorizando uma descrição psicológica, algumas das suas propostas têm uma base psicológica. Para os van Hiele a cognição desenvolve-se através da estruturação global da mente. Além disso, van Hiele e a psicologia de gestalt consideram que os objetos não surgem isolados, mas antes num determinado contexto, a estrutura. Pierre van Hiele não define estruturas, mas explica algumas das suas propriedades e descreve espécies de estruturas. Baseando-se na distinção de Popper, van Hiele considera que existem várias espécies de estruturas. Nomeadamente, as estruturas do mundo onde vivemos (Mundo 1), as estruturas na nossa mente (Mundo 2), e, as estruturas no mundo do conhecimento humano comum (Mundo 3). Considerando a cognição como uma estrutura mental, Matos (1992) continua dizendo que Pierre van Hiele recolheu da psicologia de gestalt quatro propriedades das estruturas: a primeira considera que as estruturas podem ser estendidas, a segunda que cada estrutura pode fazer parte de uma estrutura mais fina, a terceira que uma estrutura pode fazer parte de uma mais inclusiva e a quarta uma estrutura pode ser isomorfa de outra estrutura. A primeira e a quarta estrutura são inatas às atividades do pensamento humano, as outras duas propriedades devem ser ensinadas.

Segundo Matos (1992) na teoria dos van Hiele considera-se que o desenvolvimento mental progride à medida que as estruturas do aluno se vão alterando (trans – estruturação /*transtructuring* (itálico do autor)) ou são substituídas por outras (re-estruturação/*restructuring* (itálico do autor)). As estruturas de van Hiele são todas baseadas nas estruturas do Mundo 1 e podem ser percecionadas como um gestalt. O insight para Pierre van Hiele é essencial para que os alunos visualizem diferentes estruturas e construam conceitos mais complexos. Baseando-se na perspetiva da psicologia de gestalt van Hiele apresenta as seguintes propriedades do insight: Adequação, a uma nova situação o que requer um mecanismo social; Intenção, o que leva a que uma pessoa possa atuar numa estrutura percecionada. Não planeamento. O desenvolvimento do insight deve basear-se no desenvolvimento da capacidade dos estudantes verem estruturas como parte de estruturas mais finas, mais inclusivas. Van Hiele considera que as estruturas mentais têm dois atos de pensamento distintos, no caso da Geometria, a apresentação do material concreto, o que invoca estruturas mentais indiferenciadas. No entanto, tal exige a análise do objeto que irá levar ao surgimento de novas estruturas mentais. O segundo ato de pensamento que van Hiele apresenta é a classificação de estruturas interrelacionadas e que vão evoluindo através de um programa de ensino-aprendizagem e de acordo com níveis de pensamento mais elevados, o que acontece seguindo um processo de ensino – aprendizagem.

Matos (1992) refere os processos de aprendizagem na teoria dos van Hiele. Referindo-se a van Hiele e van Hiele-Geldof (1958), a aprendizagem é um processo recursivo que evolui através de níveis de pensamento. Van Hiele considera que existem vários níveis de aprendizagem em Geometria e que a progressão de um nível para outro depende do processo de ensino-aprendizagem. Van Hiele carateriza-os do seguinte modo: no nível um (visualização) as figuras são avaliadas pela sua aparência; no nível dois (descritivo) as figuras são portadoras de propriedades; nível três (teórico) as propriedades são ordenadas logicamente; nível quatro (lógica formal) a Geometria é entendida como um sistema axiomático. Em alguns trabalhos, van Hiele apresenta um quinto nível o nível da natureza lógica formal. Neste último nível os sistemas axiomáticos são estudados. Van Hiele considera que para o ensino da Geometria nos devemos centrar nos três primeiros níveis.

Mais recentemente diversos autores, nomeadamente Clements (2003) e Clements e Sarama (2007), referem-se à perspetiva construtivista tradicional da teoria de Pierre e Dina van Hiele referindo que esta considera que o progresso da aprendizagem das crianças é qualitativamente distinto em níveis de aprendizagem e pensamento da geometria. Tal processo inicia-se no nível mais elementar, o visual, até atingir o patamar superior, o nível de descrição, análise, abstração e prova. Estes níveis estão organizados de forma hierárquica e dependem da aprendizagem, ou melhor do ensino e não tanto da idade do indivíduo. Além disso, um indivíduo só poderá avançar para o nível seguinte se tiver compreendido todos os conceitos do nível anterior. Considerando os autores citados, estes apresentam os níveis de van Hiele: no nível 1 – o nível visual – os alunos reconhecem as figuras e formas como um todo, mas não são capazes de criar imagens mentais sobre elas. Por exemplo, neste nível, uma criança pode ser capaz de dizer que uma forma é um retângulo simplesmente porque se parece com uma porta e não porque tem determinadas características ou atributos.

Os mesmos autores referem que estudos recentes consideram a existência de um nível que antecede o nível visual, que designam por nível 0. No nível 0 – pré-recognição – as crianças não conseguem distinguir com segurança círculos, triângulos e quadrados de um conjunto de exemplos e não exemplos daquelas formas. As crianças neste nível inconscientemente começam a criar esquemas visuais acerca das formas. As crianças que operam nos níveis 0 e 1 demonstram evidências de reconhecimento das componentes e atributos das formas, no entanto esses recursos parecem não estar claramente definidos.

No nível 2 – nível descritivo/analítico - os alunos reconhecem e caraterizam as formas/figuras geométricas tendo em conta as suas propriedades. As propriedades são adquiridas através da experimentação, observação, medição, desenho… neste nível, os alunos ainda não são capazes de ver e estabelecer relações entre as classes das figuras. Por exemplo, um aluno pode considerar apenas, que uma figura não é um porque é um quadrado.

Acrescentam Clements e Sarama (2007) que o progresso dos alunos de uns níveis para os outros só será possível se as crianças tiverem a possibilidade de contatar com diversas representações geométricas das figuras que conhecem. Ao contatar com diversas figuras, desde cedo as crianças utilizam uma linguagem geométrica. No entanto, a primeira questão a que vão ter resposta é saberem o que é uma figura. Nomeadamente figuras que conhecem, como quadrados e círculos. Seguidamente as crianças começam a fazer a correspondência das novas palavras (figuras geométricas) a exemplos concretos do seu quotidiano. Só depois de combinarem as suas capacidades de produzir e criar nomes corretos para as figuras protótipos que conhecem, poderão começar a criar categorias acerca das diferentes figuras. Os nomes das figuras facilitam a organização e focagem de atenção para certas caraterísticas dos objetos.

Mesmo numa tenra idade, nos seus esquemas imaginários, as crianças são capazes de observar características específicas das figuras mesmo que sejam apenas os "biquinhos" ("prickliness") dos triângulos (e.f. Lehrer, Jenkins, & Osana, 1998). Assim que os seus esquemas mentais se tornam mais completos as crianças são capazes de descrever mais atributos que lhes vão permitir construir as definições acerca das figuras.

As crianças são capazes de identificar seguramente muitas figuras, mas só conseguem focar-se num determinado conjunto de caraterísticas. Depois de passarem pelo nível 1, as crianças mantêm, por vezes, a falta de capacidade para construir e manipular imagens visuais acerca das figuras geométricas. Este exemplo de concretização cíclica é consistente com a tradição de Piaget acerca da construção geométrica de objetos num "plano percetual" depois da reconstrução na "representação" do "plano imaginal" (Piaget & Inhelder, 1967 citados por Clements & Sarama, 2007).

A capacidade das crianças construírem e manipularem as imagens visuais que possuem acerca das figuras está intimamente relacionada com a sua capacidade para produzirem protótipos. No entanto, as crianças são capazes de identificar figuras sem necessariamente focarem a sua atenção nas componentes/caraterísticas específicas que lhes permitem identificar os protótipos. Para as crianças de todas as idades, os protótipos podem ser sub e super generalizados comparados com a categorização matemática, no entanto, tudo depende dos exemplos e dos não exemplos e das experiências de ensino pelas quais passam. Além disso, no progresso entre o nível 1 e o nível 2, a compreensão pode ser prolongada. Por exemplo, muitas crianças do ensino primário continuam a aplicar ações cognitivas sobre as figuras, de forma a identificar caraterísticas como gordo ou magro, ao compararem as formas protótipas. Deste modo, os alunos poderão procurar transformar determinada figura numa outra. (Clements e Battista, & Sarama, 2001; Lehrer, Jenkins, & Osana, 1998).

Outros autores e, especificamente Clements (2003), referem o nível 3 e o nível 4 da teoria dos van Hielle. No Nível 3 – nível abstrato/relacional – os alunos podem formar definições abstratas, distinguindo entre o conjunto de condições necessárias e suficientes acerca de um conceito, sendo capazes de apresentar argumentos lógicos no domínio da geometria. Os alunos são capazes de classificar hierarquicamente as figuras apresentando argumentos informais que justificam as suas classificações. Eles podem descobrir as propriedades de uma classe de figuras através de deduções informais. No entanto, os alunos neste nível ainda não são capazes de compreender que a dedução lógica é o método adequado para provar as verdades geométricas.

No Nível 4 – estabelecimento de teoremas dentro de um sistema axiomático - os alunos reconhecem um conjunto indefinido de termos, definições, axiomas e teoremas e são capazes de construir provas originais que produzem um conjunto lógico de declarações que justificam as conclusões a que apresentaram.

Mais tarde, Clements e Sarama (2007) referem que o nível 1, o nível visual da teoria dos van Hiele, dever-se-ia designar de Nível Sincrético. Neste nível, consideram que ocorre a fusão de diversas perspetivas, nomeadamente a visual e verbal. Neste sentido considera-se a existência de uma combinação entre o conhecimento verbal e aquele que corresponde às imagens que não incluem as componentes e propriedades específicas das figuras. Neste nível, as crianças facilmente utilizam conhecimento declarativo para explicarem porque é que determinada propriedade não faz parte de uma classe específica. Esta capacidade, segundo Gibson, 1985 (citado por Clements e Sarama, 2007), só é conseguida pelo contraste existente entre a figura e o protótipo visual que por sua vez promove a descrição das diferenças entre elas.

Os mesmos autores apresentam ainda uma outra teoria acerca da aprendizagem, a teoria do *interacionalismo hierárquico* (itálico dos autores). Na sequência do que foi dito anteriormente, consideram que as generalizações feitas pelas crianças com base na semelhança entre figuras parece ser adequada. Além disso, as crianças, ao abrigo desta teoria, desenvolvem fortes protótipos visuais e gradualmente adquirem conhecimento verbal declarativo.

Por último, Ponte e Serrazina, ao abrigo da teoria dos van Hiele, referem um último nível de aprendizagem o nível 5 – nível de Rigor – nele os alunos estudam diversos sistemas axiomáticos para a Geometria (Ponte e Serrazina, 2000).

De acordo com Matos (1992) van Hiele propõe que a passagem de um nível para o outro seja feita de forma natural, no entanto, tal implica a existência de um processo de ensino – aprendizagem. Neste sentido, o professor deve escolher uma abordagem adequada ao nível dos seus alunos, e deve levá-los a percorrer uma sequência de fases de aprendizagem, para que os alunos não cometam erros matematicamente incorretos e inconsistentes. Os alunos devem construir e tomar consciência das componentes e das propriedades geométricas das figuras. Este processo de aprendizagem, requere uma tomada de consciência e reflexão por parte das crianças. Ou seja, ao abrigo desta teoria os alunos devem percorrer de forma sequencial as diversas fases de aprendizagem através de um programa de ensino aprendizagem. A teoria dos van Hiele inclui ainda, um modelo de ensino que evolui em cinco fases. Matos (1992), Ponte e Serrazina (2000) e Clements (2003), sugerem que na 1ª fase (informação) o professor apresenta aos alunos, o trabalho a realizar. Por exemplo, pode mostrar triângulos aos alunos e dizer que são triângulos. Depois de orientados os alunos são guiados pelas atividades estabelecidas por si ou dadas pelo professor (orientação guiada). Neste sentido, os alunos irão estabelecer relações entre os objetos. A terceira fase (explicitação) baseia-se nas discussões que serão tidas com toda a turma, na qual os alunos expressam as suas opiniões e o que descobriram por palavras suas. Essa discussão permitirá que os alunos adquiram uma linguagem que exprime o que descobriram. Na quarta fase os alunos realizam tarefas mais complexas onde os seus conhecimentos se poderão ampliar (Orientação livre). Finalmente, na quinta fase (Integração), os alunos poderão tirar conclusões acerca do que aprenderam com a ajuda do professor. Deste modo, considero que os alunos poderão de forma progressiva adquirir novos conhecimentos que lhes irão permitir progredir nos níveis de aprendizagem. Contudo, o professor deverá ter a preocupação de adequar as atividades ao nível de desenvolvimento dos seus alunos.

> Para ser adequado, isto é, para ter em conta o nível de pensamento dos alunos, o ensino da Geometria no 1º ciclo deve ter como preocupação ajudá-los a progredir do nível visual para o nível de análise (…) favorecendo o progresso na aprendizagem (Ponte e Serrazina, 2000, pp.180-181) .

De acordo com as ideias apresentadas por Battista (2007) muitas pesquisas posicionaram os níveis de van Hiele de acordo com diferentes níveis e períodos de desenvolvimento. Diferentes tipos ou “ondas” de raciocínio dependem da competência de cada estudante, que neste caso dependem do nível de maturação e instrução de cada um.

Lehrer e tal. (1998) argumentam que uma “mistura de níveis” é típico em alunos em idade escolar, nível escolar primário. Ou seja, as crianças facilmente dão saltos entre os níveis de van Hiele, o que depende do seu raciocínio e do tipo de tarefa apresentada. Além disso, segundo Clements e Battista (2007) o pensamento geométrico das crianças é acompanhado de um conjunto de operações mentais, nomeadamente: comparação entre figuras; atribuição de características de uma figura noutra; descoberta de um conjunto variado de atributos das formas. Clements e Battista (2001) referidos por Battista (2007) consideram que os níveis de van Hiele se desenvolvem simultaneamente, o que é similar à sobreposição das “ondas”. No entanto, apesar desses níveis se poderem desenvolver em simultâneo, cada nível tende a ser ascendente e privilegiado na orientação das crianças na resolução de problemas geométricos.

Battista (2007), referindo-se a Clements e Battista (2001), considera que os níveis de van Hiele correspondem a períodos de tempo qualitativa e cognitivamente distintos, mas com um domínio específico. De acordo com diversos estudos empíricos, muitas pessoas exibem comportamentos que indicam diferentes níveis de desenvolvimento. Muitas vezes, os alunos apresentam diferentes níveis de desenvolvimento de acordo com as tarefas que são apresentadas e propostas. Considero deste modo que estas ideias implicam que o professor enriqueça a aprendizagem da geometria dos seus alunos, através do uso de materiais que vão além do currículo tradicional, baseado apenas no uso de papel, lápis e manuais escolares

Uma proposta alternativa à elaboração original dos níveis de van Hiele

Battista (2007) propõe uma alternativa à proposta original de van Hiele, que permita que os alunos possam progredir das conceptualizações intuitivas e informais das formas geométricas a 2 dimensões, para conceptualizações mais formais. Esta nova elaboração pretende expandir os níveis de van Hiele em dois espaços – o desenvolvimento das propriedades baseado no pensamento, e o desenvolvimento de inferências sobre as propriedades.

No nível 1, o nível de raciocínio holístico visual - os alunos identificam, descrevem e raciocinam sobre as formas e outras configurações geométricas a partir da aparência visual, do todo. Referem muitas vezes protótipos visuais, associando facilmente figuras semelhantes. Por exemplo, referindo-se a um retângulo os alunos podem dizer que se parece com uma porta.

No nível 1.1. Pré-recognição – os alunos são incapazes de identificar muitas figuras comuns. No nível 1.2. Recognição – os alunos reconhecem várias figuras comuns.

No nível 2, o nível de Raciocínio Analítico-componencial, os alunos tendem a conceptualizar e especificar as figuras geométricas a partir da descrição das partes da figura e as relações entre elas. Existem dois grandes fatores que contribuem para o desenvolvimento do raciocínio de nível 2: por um lado a capacidade e inclinação para contar as estruturas da figura através da análise das suas partes e da forma como se relacionam entre si. Por outro lado, a capacidade para entender e aplicar os conceitos geométricos formais na análise das relações entre as partes.

No nível 2.1. Raciocínio visual-informal - os alunos procuram descrever as partes e as propriedades que compõem a figura de forma informal. A descrição baseia-se apenas na visualização. Por exemplo: contagem do número de lados. Neste nível, os alunos recorrem a uma linguagem informal e apreendida nas suas experiências do dia-a-dia.

No nível 2.2. Raciocínio - assim que os alunos começam a adquirir conceptualizações formais que lhes permitem " ver " e descrever as relações entre as partes, os alunos usam a combinação entre descrições formais e informais. Nas descrições formais os alunos utilizam uma geometria standard e termos explícitos presentes currículo. No entanto, essas descrições são insuficientes para completar figuras específicas. O raciocínio dos alunos continua a ser visual, baseado nas descrições das propriedades das figuras, bem como as conceptualizações parecem ocorrer esporadicamente.

No nível 2.3. Raciocínio suficiente formal, baseado nas propriedades das figuras - Os alunos utilizam conceitos geométricos formais explícitos exclusivos para descrever as figuras. Utilizam um conjunto de propriedades que permitem especificar as figuras. No entanto, os alunos não são ainda capazes de interrelacionar propriedades ou compreender que algumas propriedades implicam outras. Este sub nível implica a utilização de conceitos formais tais como, lados, altura, ângulos e medida. A utilização destes conceitos aumentam o nível de abstração do aluno, o que lhe permite formular conceptualizações relacionais.

No nível 3, o nível do Raciocínio relacional – inferencial baseado nas propriedades - Os alunos inter-relacinam e fazem inferências sobre as propriedades geométricas das figuras. Por exemplo, se determinada figura tem a propriedade x por exemplo, também terá a propriedade

y. No entanto, o recurso a estas inter-relações inicia-se através das associações empíricas, que irão progredir para uma análise componencial - uma propriedade implica outra. Este tipo de inferência permite iniciar uma conceptualização que sugere uma classificação hierárquica das figuras.

No nível 3.1. – Relações empíricas – os alunos utilizam as evidências para tirar conclusões.

No nível 3.2. – Análise componencial – através da análise da construção das figuras, os alunos concluem que quando uma propriedade ocorre, outra tem de ocorrer necessariamente. Os alunos conduzem esta análise através de desenhos ou da imaginação da construção das figuras peça a peça.

No nível 3.3. – Inferência lógica – os alunos fazem inferências lógicas sobre as propriedades. Eles operam mentalmente nas propriedades e não nas imagens. Tais inferências implicam, que os alunos recorram às classificações hierárquicas. Os raciocínios dos alunos são "localmente lógicos" e as suas deduções lógicas são assumidas como verdadeiras. Os alunos neste nível utilizam a lógica, mas não questionam o ponto de partida da sua análise.

No níveis 3.4. - Classificação hierárquicos das figuras baseada nas inferências lógicas – os alunos utilizam argumentos lógicos que justificam as classificações hierárquicas. Os alunos recorrem à lógica para estabelecer conclusões que lhes permitem construir conhecimento novo. O novo conhecimento vai deste modo permitir a criação de verdadeiras deduções lógicas.

No nível 4, nível das provas formas dedutivas - Os alunos são capazes de compreender e construir provas geométricas formais. Tal, faz parte de um sistema axiomático, os alunos podem produzir uma sequência de declarações que justificam as conclusões. Reconhecem diferentes conjuntos de termos indefinidos, definições, axiomas e teoremas.

Criticas aos níveis de van Hiele

Uma das várias críticas à teoria de van Hiele tem que ver com a progressão entre níveis. O progresso dos alunos não parece realizar-se através de saltos de um nível para o outro, mas antes através de pequenos passos.

Battista (2007), referindo-se a Clements e Battista (2001) e Lether et al. (1998), considera que a maior parte dos níveis podem ser desenvolvidos ao mesmo tempo, mas os diferentes tipos raciocínio começam a ser dominados durante a aprendizagem e o desenvolvimento.

De acordo com o estudo de Matos (1992) a teoria dos van Hielle apoia-se na teoria de Gestalt, colocando de parte a perspetiva psicológica da autonomia. Ao mesmo tempo, deixa também de fora muitas áreas cruciais da aprendizagem da geometria, nomeadamente a visualização, orientação espacial e representação de objetos bi-dimensionais e tri-dimensionais. No seu essencial, a teoria dos van Hielle baseia-se na aprendizagem da geometria através da dedução. À parte das questões da autonomia, esta teoria também não tem em conta as diferenças individuais dos alunos, considerando-os apenas como grupo homogéneo. Ao mesmo tempo, a teoria dos van Hielle valoriza o papel do professor, considerando-o como principal detentor do saber. Tal, torna bastante limitado a implementação de um trabalho que permita que os alunos possam ser mais autónomos. O professor, ao abrigo desta teoria, torna-se o centro de todo o processo de aprendizagem, adquirindo o papel de "enculturador dos alunos na cultura matemática aceite para a sala de aula" (Matos, 1992, p.103). Deste modo, não será tido em conta o conhecimento matemático que os alunos já possuem. O mesmo autor Matos (1992), referindo-se a Vinher & Hershkowitz (1983) e Wilson (1986), considera que esta teoria é contraditória pois apesar do referido, os alunos parecem conseguir construir conceitos matemáticos não convencionais. Por outro lado, esta teoria apesar das limitações referidas continua a superar os paradigmas de outras teorias relacionadas com a aprendizagem em geometria, como é o caso das teorias de Piaget, Bruner ou os behavoristas.

Problemas relacionados com a classificação das figuras

Na teoria de van Hielle, de acordo com Matos (1992), as questões relacionadas com a classificação de quadriláteros vão de encontro à noção comum. Ou seja, no final do primeiro nível os alunos serão capazes de identificar quadrados, retângulos, losangos e outras figuras. No final do segundo nível, os alunos serão capazes de enumerar algumas propriedades das figuras. Deste modo, só no final do terceiro nível é que os alunos estarão preparados para assumir a classificação hierárquica e aceitam considerar que o quadrado é um caso especial do retângulos. Nesta teoria é considerado que num terceiro nível os alunos já compreendem as conexões entre as diversas propriedades, aceitando as consequências de uma definição.

Matos (1992) refere a investigação realizada por Villiers e Njisane (1987) que fez referência à inclusão de classes ao abrigo da teoria da hierarquia dos níveis. Eles referem oito categorias de pensamento geométrico, nomeadamente reconhecimento e representação de figuras, reconhecimento visual de propriedades, uso e compreensão de terminologia, descrição verbal de propriedades, dedução com um passo, dedução mais longa, classificação hierárquica e, por último, leitura e interpretação de definições. Em relação à última categoria, esta parece não estar de acordo com as restantes, uma vez que se relaciona mais com as capacidades linguísticas ao invés das geométricas. As restantes categorias relacionam-se entre si num sistema hierárquico, no qual a primeira (reconhecimento e representação de figuras) é a mais fácil e a última (classificação hierárquica) é a mais difícil, mesmo em relação às deduções com vários passos. Tal dificuldade, como refere o mesmo autor, tem sido alvo de investigações por parte de diversos autores, pelo que alguns (Fuys, Geddes e Tischler, 1985) consideram que a dificuldade pode estar relacionada com dificuldades anteriores, ao passo que Bruger (1985) refere os manuais e as práticas de ensino. Contudo, a classificação hierárquica de figuras ao nível da matemática escolar, é apenas um dos tipos, pois no universo da matemática, não existe uniformidade a este nível. No entanto, no estudo realizado por Matos (1992) acerca das representações mentais, conclui-se que começamos por categorizar no nível básico, o que pode estar associado ao nível 1 de van Hiele, onde a categorização é feita de forma global, adquirindo as crianças um determinado nome que mais tarde poderá ser diferenciado em categorias. A nível escolar, as crianças aprendem um determinado nome, que por sua vez será associado a uma determinada categoria de nível básico, dentro dos quadrados, triângulos, círculos. Mais tarde estas categorias de nível básico serão separadas em duas categorias correspondentes às formas bi e tri – dimensionais. No entanto, esta questão nem sempre é compreendida pelas crianças, pois como refere Matos (1992) “ (…) muitas crianças experienciam apenas representações de sólidos geométricos no livro de texto, outras experienciam quadrados e triângulos como prismas achatados “ (p. 108). Os níveis de van Hiele descrevem a progressão do pensamento que faz parte do pensamento matemático. Poderemos pensar nos níveis e ao mesmo tempo nos métodos científicos através de 4 fases – perceção (categorias e raciocínio informal e formal); conceptualização (explicitação dos conceitos e análises); organização (resulta na organização conceptual) e axiomatização (resulta nos tratamentos lógico formais). Neste sentido, ao abarcar estas quatro fases, os alunos, educandos matemáticos, poderão progredir de um raciocínio informal, para um raciocínio científico formal.

3.4. Taxonomia SOLO

Tal como vimos anteriormente a teoria dos van Hiele foi para muito investigadores o centro da sua investigação, no entanto, outros consideram que esta teoria se torna insuficiente e apresentam uma alternativa. De acordo com diversos autores (por exemplo Clements (2003), Battista (2007), Ceia, Filipe e Santos (2011), Pedro (1999)) é possível avaliar o desempenho de um determinado aluno durante a realização de uma tarefa específica sem que seja feita qualquer tipo de inferência acerca da sua estrutura cognitiva (Biggs e Collis, 1982). O desempenho de um individuo vai evoluindo de forma hierárquica de acordo com a complexidade das respostas dadas a determinadas tarefas. Deste modo, esta hierarquia dar-nos-á a informação do nível de aprendizagem de um aluno numa determinada tarefa (Biggs e Collis, 1991 in Pedro, 1999).

> Tal pressuposto implica que, de um ponto de vista prático, passaremos a atribuir uma categoria à resposta que um indivíduo é capaz de produzir no desempenho de certa tarefa, avaliando unicamente o seu desempenho (Estrutura dos produtos de aprendizagem observados – SOLO), em vez de pretender avaliar a estrutura cognitiva desse indivíduo (Estrutura Cognitiva Hipotética – HCS) (Biggs e Collis, 1982 in Ceia, 2002, p. 242).

Assim, é possível atribuir ao aluno uma categoria de acordo com as respostas dadas, analisando apenas o seu desempenho. Ou melhor, a estrutura dos produtos de aprendizagem observados, avalia o desempenho dos alunos num determinado momento independentemente da estrutura cognitiva dos mesmos (Ceia, Filipe e Santos, 2011). Deste modo, será possível que o desempenho de um indivíduo possa ser diferente em circunstâncias distintas. No entanto, de acordo com Biggs e Collis, referidos pelos autores citados, o nível de maturação dos indivíduos poderá influenciar a qualidade das respostas dadas, pelo que será possível estabelecer a ponte entre os estádios de desenvolvimento de Piaget – Sensório-motor, pré-operacional, concreto operacional e formal - com a qualidade da aprendizagem, ou seja, os níveis Solo - pré- estrutural, uni-estrutural, multi-estrutural, relacional e abstrato.

Segundo Ceia (2002) e Ceia, Filipe e Santos (2011) a taxonomia SOLO desenvolve-se nos cinco níveis já referidos, sendo definido para cada um dos níveis três tipos de características que vão permitir discriminar as diferentes categorias de resposta ou produções que lhes correspondem: as capacidades, o tipo de estrutura de resposta e consciência e capacidade de elaborar conclusões. No nível pré-estrutural não existe uma relação entre as questões e as respostas, sendo que a obtenção de uma conclusão será tida de forma muito rápida e sem que o sujeito tenha consciência da mesma. No nível uni-estrutural a resposta dada irá apenas abranger um aspeto relevante. As conclusões obtidas podem estar corretas, no entanto, não são coerentes entre si. No nível multi-estrutural a resposta pode abranger vários aspetos relevantes, mas sem qualquer relação lógica entre eles, pelo que pode apresentar inconsistências. No nível relacional a resposta demonstra a capacidade do indivíduo em estabelecer inter relações entre muitos aspetos, existindo como tal, uma coerência global. O nível abstrato será atingido quando um individuo for capaz de estabelecer uma estratégia para obter determinados resultados, tendo para tal uma consciência global das conclusões obtidas. "Na perspetiva de Biggs e Collis aprender significativamente quer dizer dar significado ao conhecimento existente, envolvendo o sujeito que aprende em duas tarefas: conhecer factos, capacidades, conceitos ou estratégias de resolução de problemas (1982 in Ceia, 2002).

3.5. Níveis de van Hiele e Taxonomia SOLO

De acordo com Pegg e Davey (1998) in Clements (2003) outros investigadores apresentaram uma proposta alternativa à teoria dos van Hiele. Uma síntese dos modelos de van Hiele e taxonomia Solo enfatizam que inicialmente os alunos têm a capacidade de identificar um aspeto ou característica de uma figura. No entanto, os alunos conseguem pensar em mais do que um aspeto ou característica, mas de forma independente. Só mais tarde, serão capazes de relacionar essas características.

Pegg and Davey (1998) in Battista (2007) integraram a teoria dos van Hiele com a teoria SOLO de Biggs e Collis. Na síntese das duas teorias Pegg e Davey discutem três modos de pensamento. Modo icónico que corresponde à forma como os alunos operam perante imagens mentais de objetos com os quais eles contataram. Modo concreto-simbólico, no qual os alunos estabelecem relação entre os conceitos e as operações para escrever símbolos, desde que os contextos se insiram nas suas experiências pessoais. Modo formal, onde os alunos deixam de estar restritos às referências concretas e podem sistematicamente considerar princípios e teorias. Começam a ser capazes de apresentar provas formais. Estes modos diferem entre si pela progressão de diferentes níveis de complexidade, neste caso uma progressão que em cada caso implica, pelo menos, atingir dois ciclos da taxonomia SOLO: Nível uniestrutural (U) no qual os alunos se focam em apenas um aspeto ou situação. Nível multiestrutural (M) no qual os alunos se focam num ou mais aspetos da situação. Nível relacional (R) onde os alunos inter-relacionam entre si muitos aspetos. De acordo com Pegg e outros autores (1998) in Battista (2007) a correspondência entre os níveis de van Hiele e SOLO poderá processar-se do modo como está presente na tabela seguinte que decidi elaborar de forma a facilitar a conexão entre as duas teorias.

van Hiele	**SOLO**
Nível 0 – pré-recognição	Modo icónico – primeiro ciclo UMR (U1, M1, R1)
Nível 1 – Visual	Modo icónico – segundo ciclo UMR (U2, M2, R2) U2 – o processo de imaginação ocorre apenas sobre um aspeto. M2 – alguns aspetos interrelacionados sobre a situação são considerados. R2- o individuo tem total controlo sobre o processo imaginativo e está apto a identificar diversas formas.
Modo concreto - simbólico – no primeiro UMR – nível de transição	
Nível 2 – Análise	Modo concreto simbólico – Segundo ciclo UMR . U2 – focagem numa única propriedade. M2- focagem em diversas propriedades.
Nível 3	Modo concreto - simbólico – in the R2
Nível 4	Modo formal - os estudantes acedem a este nível quando tiverem completado os dois ciclos UMR.

Quadro 1 – Correspondência entre os níveis de van Hiele e Taxonomia SOLO de Biggs e Collis, baseado em Battista, 2007

A correspondência entre a teoria van Hiele e a taxonomia SOLO poderá ser diferente, depende da fonte e das referências que se têm em conta (Battista, 2007). No entanto, considera-se que cada individuo ao entrar num determinado modo de funcionamento iniciará o seu desempenho no nível uni-estrutural e á medida que as respostas vão evoluindo irá atingir níveis mais complexos. Quando atingir o nível abstrato irá passar a funcionar no modo imediatamente a seguir (Ceia, Filipe e Santos, 2011).

3.6. O recurso a materiais manipuláveis – do concreto para o abstrato.

As crianças convivem com a matemática no seu dia-a-dia, e desde cedo manipulam objetos concretos e realizam jogos matemáticos, sem que ainda tenham iniciado a escolaridade. É essencial levar a criança a percorrer um caminho entre o concreto e o abstrato. “A noção de “concreto” relacionada com a utilização de materiais manipuláveis em sequências pedagógicas que procuram percorrer o caminho entre o “concreto e o abstrato”, em educação, está intimamente relacionada com as teorias e pesquisas em educação matemática (Clements, 1999).

Segundo o mesmo autor, os alunos que utilizam materiais manipuláveis na sala de aula apresentam melhores resultados e melhor capacidade de resolução de problemas, do que os alunos que não os utilizam. As atitudes dos alunos em relação à matemática são melhoradas quando o ensino se baseia no uso de materiais concretos, e ao mesmo tempo, mais facilmente os alunos atribuem significado à sua atividade matemática. No entanto, para que tal aconteça, os materiais manipuláveis não devem ser utilizados pelos alunos sozinhos, mas sempre com a supervisão de professores que dominem o conhecimento acerca da utilização dos mesmos.

Partilhando das ideias de Pastells (2004) considero que o material manipulável deverá ser utilizado sempre que os alunos dele necessitem. Principalmente nas etapas de elementar/primária (6-12 anos) e na fase da educação infantil (0-6 anos). Ao introduzir um novo conteúdo matemático, seria ideal que o processo de ensino-aprendizagem incluísse a manipulação de diferentes materiais, já que um ensino diversificado, rico em recursos e estratégias diversificadas poderá conduzir a aprendizagens significativas e ao aumento da consciência sobre elas.

Contudo, apesar de considerarmos que a criança tem de iniciar o seu processo de aprendizagem através da manipulação e do concreto, não podemos cair no erro do excesso de trabalho com materiais concretos, nem permitir que as crianças "olhem" para eles como meros instrumentos lúdicos. Tal como referem Matos e Serrazina (1988) é preciso levar os alunos à matematização e ela será conseguida através da manipulação de materiais, mas apesar de poder ter um carácter mais lúdico, o objetivo é fomentar o desenvolvimento do pensamento abstrato. A formação dos conceitos pertence à essência da aprendizagem da matemática e ela tem de ser fundamentalmente baseada na experiência, ou seja na aprendizagem concreta, na aprendizagem sensorial, só deste modo a criança poderá conhecer o espaço que a rodeia.

O ensino deve iniciar-se no concreto, recorrendo a materiais manipuláveis que devem ser utilizados antes do ensino formal. Contudo, e tal como refere Clements (1999) o sucesso dos materiais manipuláveis só será alcançado se forem utilizados pelos alunos num contexto educacional, no qual são propostas tarefas que os "obriguem" a pensar e a refletir sobre os conteúdos matemáticos trabalhados. Ao utilizar material concerto, os alunos irão mais facilmente atribuir significados à sua atividade matemática, mas é fundamental que posteriormente, com o auxílio do professor, possam refletir sobre as suas ações com os materiais. Deste modo, os alunos poderão de forma real e progressiva começar a construir as suas próprias ideias matemáticas.

Ou seja, a introdução de conceitos matemáticos, através do uso de materiais manipuláveis permite que a Matemática se torne real e que as ideias abstratas tomem um sentido, conseguido na experiência com objetos reais. Ao utilizar materiais manipuláveis os alunos têm necessariamente de recorrer ao uso dos seus sentidos, o que favorece a sua aprendizagem. "Aprender torna-se assim num processo ativo de construção do conhecimento, com significado" (Almiro, 2004 in Vale, 1999, p. 7).

Ainda de acordo com a opinião de Clements (1999), existem dois tipos de conhecimento concreto: **Conhecimento Concreto – Sensorial** e **Conhecimento Concreto – Integrado.** O primeiro diz respeito ao conhecimento que nós utilizamos quando temos necessidade de usar o material sensorial para dar sentido a uma ideia. Por exemplo, quando iniciam a escolaridade é importante que os alunos tenham materiais e coisas reais com os quais possam aprender a contar. O segundo refere-se aos conceitos "concretos" de mais alto nível, uma vez que estabelecem a conexão entre diversos conhecimentos. Os alunos que têm a capacidade de interligar estes conhecimentos, os objetos físicos e as ações que temos sobre eles, e abstrações fazem parte de uma estrutura mental forte. O que torna as ideias matemáticas num conhecimento concreto-integrado, não são as suas caraterísticas físicas. Aliás, de acordo com Piaget, o conhecimento físico é diferente do conhecimento lógico-matemático. O que dá sentido a este tipo de conhecimento concreto – integrado é a interligação que se estabelece entre as ideias existentes e as situações.

Os bons materiais manipuláveis são aqueles que ajudam os alunos a construir e a fortalecer conexões entre as várias representações de ideias matemáticas. Em Matemática, a Geometria é por si só, um campo propício ao uso de materiais manipuláveis que auxiliarão os alunos na compreensão dos problemas e conceitos abordados, que são mutas vezes abstratos e difíceis de compreender no vazio. “ (…) o contacto e manipulação das figuras (…) facilitando a passagem do concreto para o abstrato, podem contribuir para que o aluno construa conhecimento matemático mais sólido e duradouro” (Almiro, 2004, p. 8).

Em suma, podemos dizer que todos os alunos, especialmente os mais novos têm, bastante curiosidade pelas ideias geométricas e conseguem compreender muitas relações (quando apresentadas informalmente) que são difíceis de compreender formalmente. Para que os alunos se apropriem dos novos conceitos, não podem só participar em atividades concretas, mas é preciso que reflitam sobre as suas ações. Neste sentido, o recurso aos materiais manipuláveis é um ponto de partida ou mesmo um suporte para muitas tarefas escolares. Tal significa que, não é pelo facto de os alunos memorizarem nomes de figuras e sólidos geométricos ou enunciados de propriedades e teoremas que vão aprender a raciocinar e argumentar logicamente (Abrantes, Oliveira e Serrazina, 1999).

Por outro lado, não nos podemos esquecer que os alunos quando chegam à escola já trazem consigo muitos conhecimentos e nomeadamente conhecimentos geométricos e espaciais. Neste sentido, as atividades de investigação em geometria vão levar os alunos a ampliar os conhecimentos que trazem para a escola, através de investigações, explorações, discussões na sala de aula acerca das formas e estruturas geométricas.

4. Papel do professor

Sendo a atividade o elemento fulcral para a compreensão de que processos e produtos são utilizados pelos alunos no decorrer de uma proposta de trabalho, é fundamental compreendermos que o professor tem um papel essencial no sucesso da aprendizagem dos seus alunos. Segundo Bishop e Goffree (1986) " (…) o professor desempenha o papel de criador, iniciador, estimulador, controlador e gestor da referida actividade (p. 10)". Ao professor cabe a tarefa de motivar os seus alunos para a aprendizagem estimulando o seu interesse pelas atividades que lhes são apresentadas. No entanto, este tipo de trabalho implica da parte do professor um maior conhecimento, esforço e dedicação, ao mesmo tempo que implica que este dê espaço aos seus alunos para descobrirem e explorarem, deixando de ser o centro da atividade matemática na sala de aula. O professor deve procurar apoiar os seus alunos, levá-los a pensar, questioná-los, tronando-os ativos constantemente. No decorrer de atividades de investigação o professor tem um papel muito importante, deve procurar entender os alunos, deixar que a sua atividade se desenrole de forma natural e fluida, encorajar os alunos a manterem a sua atividade e acima de tudo, procurar não dar de imediato as respostas, mas pelo contrário, questionar os alunos novamente. A ideia é a de que " O aluno não é um aprendente passivo que absorve exposições, antes é um participante ativo no processo de partilha (…)" idem (p. 27).

De acordo com Ponte, Oliveira, Brunheira, Varanda e Ferreira (1999) em Portugal o Programa do Ensino Básico abrange as atividades do tipo investigativo, as quais devem envolver a exploração, pesquisa e até a elaboração de conjeturas por parte dos alunos. Neste sentido, o professor tem um papel fulcral no arranque, no desenvolvimento e, na fase final da atividade. No início da atividade, o professor deve procurar que os seus alunos assumam e se envolvam na tarefa proposta. No decorrer da atividade é essencial, que o professor verifique se os alunos estão a conseguir realizar a tarefa e ao mesmo tempo deve dialogar com eles, levando-os a testar e justificar determinadas conjecturas. No final da atividade o professor deverá levar os seus alunos a apresentar as suas conclusões de forma a verificar se todos atingiram os mesmos resultados. É pois necessário que o professor no decorrer de todo este processo, mantenha com os seus alunos um permanente diálogo, favorável a um bom ambiente, um ambiente onde seja possível partilhar e discutir todos os resultados. Considero que um ambiente rico é favorável não só a uma aprendizagem matemática significativa, mas também ao desenvolvimento de conteúdos matemáticos da aprendizagem em geral. O professor deve permitir que sejam apresentados os resultados obtidos pelos alunos, e, ao mesmo tempo estimular os alunos a questionarem-se mutuamente. Neste sentido, cabe ao professor dar liberdade aos alunos para entre pares, discutirem as suas ideias, permitindo que "(…) ganhem um entendimento mais rico do que significa investigar, e por outro lado desenvolvam a capacidade de comunicar matematicamente e de refletir sobre o seu trabalho. (Ponte, Brocardo, Oliveira, 2003, p. 41). Neste processo de interação, é fundamental que o professor tenha ao mesmo tempo a preocupação de orientar os alunos na utilização de uma linguagem matemática, progressivamente mais alargada e cientificamente correta.

No quadro de referência apresentado, apesar do conhecimento matemático estar centrado na atividade e aprendizagem do aluno, tal não exclui no entanto, o papel determinante do professor na condução e gestão da aula. Apesar de se considerar que o professor tem o papel de "facilitador", não o podemos considerar de forma errada, mas antes entender que os alunos é que estão a aprender e que ao professor cabe a tarefa de criar as condições mais favoráveis para que isso aconteça (Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999).

Por outro lado, e partilhando da opinião de Ponte, Oliveira, Brunheira, Ferreira e Varandas (1999), a atividade profissional de professor envolve as suas experiências do dia-a-dia, o que implica a capacidade de resolução de problemas e tomada de decisões. O professor deverá ser capaz de o fazer, também, em situação de sala de aula, em interação com os seus alunos. Nas aulas de tipo investigativo, a interação entre professor e aluno deve ser constante e as situações imprevistas testam a autoconfiança e a capacidade de improvisação do professor, perante situações novas.

Segundo Fonseca, Brunheira e Ponte (1999), para que as aulas de investigação constituam um momento de aprendizagem significativa para os seus alunos, o professor deve investir na preparação dessas aulas de forma cuidada e refletida, principalmente por exigirem uma maior complexidade e terem um maior caracter de imprevisibilidade. O professor deverá procurar ter uma "(…) atitude (…) também ela de carater investigativo e uma reflexão sobre os objectivos que se pretendem atingir com a realização de atividades de investigação" (p.10).

Para além disto, a preparação de uma aula de investigação é algo bastante exigente para o professor. Este deverá pensar e construir a(s) tarefa(s) potencialmente rica(s) de forma a que se desencadeie uma investigação por parte do alunos. Deste modo, o professor deve refletir muito bem, sobre a estrutura da aula e de como vai organizar o trabalho dos alunos, se de forma individual, se em pequeno grupo ou grupo turma. Por último, o professor deve preocupar-se com a organização criteriosa de todos os momentos de trabalho. Contudo, apesar de toda a preocupação e da elaboração de uma agenda, esta será apenas um plano e numa aula de investigação, o plano tem de ser dinâmico e permitir ao mesmo tempo, ao professor "deixar certas coisas para fazer ou resolver, introduzir ações ou tarefas inicialmente não previstas" (Ponte, Oliveira, Brunheira, Ferreira e Varanda, 1999, p. 6).

Posto isto e partilhando das ideias de Mendes (1997) o professor deve ser: " (a) *o administrador,* incumbido de preparar as propostas de atividades; (b) *o gestor*, discreto, estabelecendo a sequência das tarefas dentro do tema, problema a resolver, assunto a tratar, projeto a efetuar ou situação a investigar; (c) *o apresentador*, expondo tópicos de temas, conceitos, clarificando ideias ainda no ar (…); (d) *o guia*, emitindo opiniões e pistas sobre o caminho a seguir (…); (e) *o companheiro*, trabalhando num assunto ou discutindo uma situação, lado a lado com os alunos na sala de aula e (f) o *socorrista-salvador*, oferecendo ou dispondo sempre de informação e/ou outros recursos para que a ajuda quando solicitada possa ser oportuna e convincente.

Capítulo III

METODOLOGIA

1. Opções Metodológicas

Sendo o objetivo primordial deste estudo a análise da atividade matemática dos alunos inerente a atividades de investigação e exploração em geometria, nos primeiros anos de escolaridade, elaborei um conjunto de tarefas que fizeram parte de um estudo piloto e de uma experiência de ensino - aprendizagem, na qual, os alunos puderam desenvolver a sua atividade matemática com o meu apoio, assumindo os papeis de professora e de investigadora.

1.1 Abordagem Qualitativa

Dado que a investigação qualitativa considera como fonte principal dos dados o ambiente natural, onde o investigador é o instrumento principal (Bogdan e Biklen, 1994), neste estudo procurei analisar a atividade dos alunos no seu ambiente natural, a sala de aula, onde como investigadora, tive uma participação ativa em todo o processo de forma a poder compreender os acontecimentos a partir de uma perspetiva interna, tal como a de um participante (Hérbert, Goyette & Boutin, 1990).

Considerando que a escola é o ambiente natural das crianças, é essencial que a investigação decorra nesse mesmo ambiente, inserindo-se naturalmente na prática diária dos alunos. Neste sentido, os dados foram recolhidos e analisados tendo em conta os pormenores descritivos relativamente a pessoas, locais e conversas, ou seja este estudo, é nesse sentido, tal como refere Bogdan e Biklen (1994) uma investigação qualitativa de cariz interpretativo. Ao analisar o ambiente natural dos alunos, pretendi interpretar e descrever os acontecimentos/dados, procurando inter relacioná-los, de modo a ser possível construir um quadro de análise que foi ganhando forma à medida que os dados da investigação foram emergindo. Deste modo, foi necessário incluir na análise dos dados os resultados escritos da investigação, neste caso, citações que pretendem ilustrar as situações ocorridas de forma minuciosa e pormenorizada. Como referem Bogdan e Biklen “A descrição funciona bem como método de recolha dos dados, quando se pretende que nenhum detalhe escape ao escrutínio"(p.49). Por outro lado, sendo esta investigação uma experiência de ensino-aprendizagem, dei maior relevo, aos processos em detrimento dos resultados obtidos. Esta investigação resulta neste sentido na emergência natural dos dados que serão inter-relacionados permitindo assim, a construção de um quadro de análise que se irá complementando ao longo da investigação. É o que Glaser e Strauss (1967) designam de "teoria fundamentada" (cit. Bogdan e Biklen, 1994). Além disso, o processo de análise como Bogdan e Biklen (1994) referem vai-se estreitando, o que permite ao investigador qualitativo planear utilizar parte do estudo para perceber quais as questões mais importantes. De igual modo, tendo em conta que este estudo pretende analisar a atividade matemática dos alunos no decorrer da sua ação em atividades de investigação em geometria, foi tido como objetivo o permanente diálogo entre mim e os alunos, existindo um questionamento, de forma a ser possível, compreender e analisar o que estes experimentaram e o modo como interpretaram as suas experiências (Psathas, 1973 cit. Bogdan e Biklen, 1994).

Sintetizando, e de acordo com Ludke e André (1986), uma investigação qualitativa possui cinco características básicas, nomeadamente: a existência de um ambiente natural, no qual se recolhem diretamente os dados e o investigador é o instrumento principal; os dados recolhidos devem permitir fazer uma descrição da situação analisada; deve ser dada primazia à análise dos processos em detrimento dos resultados; o significado dado às coisas e situações pelos intervenientes é de estrema importância; e finalmente, a análise dos dados deve seguir o caminho do processo indutivo.

2. Participantes

Os participantes são os alunos de uma turma do 2º ano de escolaridade, lecionada por mim que tive aqui um duplo papel – professora e investigadora. A turma é formada por 8 alunos, sendo 2 rapazes e 6 raparigas. As idades dos alunos variam entre os seis e os setes anos e frequentam o 2º ano de escolaridade, todos pela primeira vez. A turma pertence a uma instituição privada a qual, devido à atual conjuntura económica, tem vindo a perder alguns dos seus alunos, por este motivo esta é uma turma com um número reduzido de alunos.

Os alunos demonstram muito interesse pela área de Matemática, destacando-se o seu gosto em atividades de geometria. No entanto, apesar de estarem habituados a resolver problemas matemáticos, nunca foram envolvidos em nenhuma atividade de investigação, como tal é algo novo para os participantes.

Os alunos estão organizados em grupos de trabalho de quatro alunos cada, e estão habituados a discutir as suas ideias e a trabalhar em grupo. Os alunos já foram meus no ano letivo anterior.

3. Recolha de Dados

Tendo em conta que este estudo é de natureza qualitativa elaborei uma experiência de ensino sendo a recolha dos dados realizada em situação de sala de aula. Esta foi realizada entre Outubro e Abril de 2012. Realizei, no entanto, primeiro aquilo que designei de Estudo Piloto acerca das figuras geométricas, no primeiro trimestre do ano letivo 2011/2012. As técnicas de recolha dos dados privilegiadas foram:

a) Observação participante – relato escrito da observação das aulas, a partir das gravações vídeo;

b) Gravações vídeo das sessões de trabalho com os alunos – gravação das aulas em que se realizaram as tarefas. A câmara estava fixa num tripé, num ponto estratégico da sala de aula;

c) Análise documental dos produtos escritos dos alunos – documentos produzidos pelos alunos, como as folhas de papel ponteado onde foi efetuado o registo das figuras desenhadas pelos alunos no geoplano.

Sendo eu a investigadora, e professora da turma, os alunos já estavam familiarizados comigo, o que facilitou o desenvolvimento da modalidade de trabalho referida. Assumi o papel de observadora participante. De acordo com Hebert, Goyette & Boutin (1990), e considerando os postulados epistemológicos do paradigma interpretativo, na qualidade de investigadora participante, tive a oportunidade de compreender o mundo social dos meus alunos, partindo do seu interior, interagindo com eles no decorrer do processo, pois "A experiência direta é o melhor teste de verificação de um determinado assunto" (Ludke e André, 1986, p. 45). Tal como referem os autores, essa é a melhor técnica de recolha de dados quando outras não estão disponíveis. Ao privilegiar a observação participante foi possível compreender ao pormenor os processos em que os alunos se envolveram na resolução das tarefas propostas e ao mesmo tempo as questões com que se depararam. Por outro lado, a observação participante permitiu conhecer globalmente os processos, as dinâmicas e as perspetivas dos participantes envolvidos (Ponte, 1994)

Tomando como a opção metodológica a análise de um estudo de caso qualitativo, nomeadamente um estudo de caso em Educação Matemática, considero que ao optar pela particularização/observação pormenorizada de um caso, este será essencialmente um estudo de caso de observação. (Bogdan e Biklen, 19994) Ou seja, tendo em conta que esta investigação dependeu do desenvolvimento de uma experiência de ensino, foi oportuno observar a interação e comportamento dos alunos no decorrer das atividades de investigação em geometria, dentro de um local específico, a sala de aula.

3.1. Estudo Piloto

Tal como referido anteriormente a Experiência de Ensino foi precedida de um Estudo prévio (que designei de Estudo Piloto), no qual propus aos alunos um conjunto de tarefas que pretendiam levá-los a alargar os seus conhecimentos acerca das figuras geométricas, ou melhor às figuras planas dando especial destaque aos triângulos e quadriláteros (quadrados, retângulos…). De seguida, apresento uma síntese desse trabalho. A maior parte das tarefas que fizeram parte do Estudo Piloto basearam-se em Matos e Serrazina (1988).

Primeiro Momento - **Figuras geométricas** – neste primeiro momento o objetivo era motivar os alunos para o trabalho que se iria desenrolar de seguida, no decorrer deste estudo. Optei por iniciar com uma vertente lúdica da aprendizagem. Neste caso, permiti que os alunos se envolvessem em dois jogos semelhantes, para os quais necessitaram de utilizar os conceitos que já possuíam acerca das figuras geométricas. No primeiro jogo, o **Jogo do Telegramas**, formaram-se dois grupos (4 alunos cada). Cada um dos grupos teve de desenhar algumas figuras geométricas, com três ou quatro lados. O outro grupo teve de representar estas figuras no seu geoplano, mas a partir das indicações verbais (telegramas) que lhes foram enviados pelo outro grupo. Pretendi levar os alunos a identificar e distinguir as características de algumas figuras geométricas (triângulos e quadriláteros), e, ao mesmo tempo levá-los a comunicar matematicamente.

Segundo Momento - **Triângulos/Procurando Triângulos** – neste segundo momento, pretendi que os alunos contactassem com exemplos e não exemplos de triângulos, levando-os a identificar visualmente as figuras que eram triângulos. Aos alunos foi apresentada uma folha de papel ponteado com algumas figuras representadas. Os alunos tiveram primeiro, em pequeno grupo e depois em grande grupo, de decidir sobre quais dessas figuras eram ou não triângulos (anexo 1). Desta feita, os alunos acabaram por dar início a uma classificação simples de triângulos. De seguida, solicitei aos alunos que representassem no seu geoplano e posteriormente em folhas de papel ponteado, triângulos, ou melhor, o maior número possível de triângulos diferentes. Pretendi aqui que os alunos descobrissem de forma natural a necessidade de classificar triângulos, aceitando triângulos diferentes e em posições diferentes e talvez pouco convencionais.

Terceiro Momento – **Retângulos/Procurando Quadriláteros-** no terceiro momento o objetivo era que os alunos reconhecessem uma figura geométrica como quadrilátero tendo em conta as suas características e que reconhecessem o quadrado como um caso especial do retângulo. Inicialmente, cada aluno teve de construir no seu geoplano 5 x 5 todos os quadriláteros possíveis, e de seguida, registá-los em folhas de papel ponteado. Posteriormente, cada aluno, recebeu uma folha de papel ponteado com uma área delimitada, correspondendo a um retângulo (anexo 4). Solicitei-lhes que procurassem descobrir quantos quadriláteros diferentes conseguiam desenhar no interior desse espaço. No final os alunos resolveram duas tarefas relacionadas com quadrados, que pretendiam levá-los a reconhecer e identificar facilmente os atributos dessa figura geométrica.

Quarto Momento – **Questionário -** Após a realização das tarefas referidas anteriormente, entreguei aos alunos, um pequeno questionário (anexo 9), no qual foram aferidos os conhecimentos dos alunos. Neste caso, sobre o que é um triângulo, o que é um quadrilátero, a inclusão do quadrado no retângulo, e a representação de triângulos e quadriláteros.

Quinto Momento – Repetição do Jogo dos Telegramas e Jogo das Adivinhas – Antes de dar início à Experiência de Ensino decidi solicitar aos alunos que voltassem a jogar os dois jogos iniciais. Pretendi aferir, de forma lúdica e direta, os conhecimentos adquiridos pelos alunos ao longo do Estudo Piloto.

Após a realização deste trabalho composto pelos cinco momentos referidos dei início à Experiência de Ensino, relacionada com triângulos e quadriláteros, e, sobre a qual esta investigação de debruça. Foram propostas aos alunos duas tarefas, uma designada de

Bandeiras Triangulares e outra designada de Bandeiras como Quadriláteros. Esta Experiência de Ensino teve como objetivo dar continuidade ao trabalho realizado no decorrer do Estudo Piloto, encaminhando os alunos no caminho da classificação de triângulos e quadriláteros.

3.2. Experiência de Ensino

Bandeiras Triangulares

Entreguei aos alunos o enunciado da tarefa (anexo 13) e em grande grupo foi feita uma leitura do mesmo. Solicitei de seguida que os alunos procurassem desenhar o maior número possível de bandeiras triangulares diferentes no seu geoplano 5 x 5. De seguida, os alunos tinham de reproduzir na folha de papel ponteado os triângulos desenhados (anexo 14 e 15). Durante a realização desta tarefa e nos momentos de discussão em pequeno e grande grupo, e sob minha orientação fui-lhes colocando diversas questões: Todas as figuras são triângulos? O que faz com que sejam triângulos? Serão todos iguais? Quais as diferenças? Como poderemos agrupá-las em sub grupos?

Esta tarefa dividiu-se em duas partes, na primeira os alunos representaram os triângulos e na segunda procuraram arrumá-los em subgrupos, ou seja classificá-los. No final da primeira parte, foi feita uma discussão e ponto de situação com ambos os grupos. Após a realização da segunda parte, foi sistematizado com todos os alunos, as descobertas que haviam sido feitas. O registo foi feito numa folha de papel ponteado grande que estava afixada no quadro e que permitia desenhar e apagar as figuras representadas.

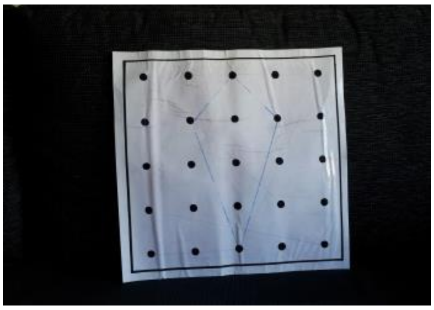


Figura 1 – Folha de papel ponteado grande

No início da primeira parte desta tarefa, optei por entregar aos alunos um fio de medição para que pudessem medir de forma informal o comprimento dos lados dos triângulos, e deste modo diferenciá-los.

Bandeiras que são quadriláteros

Semelhante à tarefa anterior solicite aos alunos que desenhassem bandeiras que fossem quadriláteros diferentes do primeiro que lhes apresentei na folha da proposta (anexo 16). De seguida, os alunos tiveram de reproduzir na folha de papel ponteado os quadriláteros desenhados (anexo 17 e 18). Durante a realização desta tarefa e nos momentos de discussão em pequeno e grande grupo, e sob minha orientação fui-lhes colocando diversas questões semelhantes às da tarefa anterior.

Esta tarefa, tal como a anterior, dividiu-se em duas partes, na primeira os alunos representaram os quadriláteros e na segunda procuraram arrumá-los em subgrupos, ou seja classificá-los. No final da primeira parte, foi feita uma discussão e ponto de situação com ambos os grupos. Após a realização da segunda parte, foi sistematizado com todos os alunos, as descobertas que haviam sido feitas. O registo foi feito numa folha de papel ponteado grande que estava afixada no quadro.

Entreguei aos alunos, no início do trabalho, um medidor de ângulos (canto) de uma folha de cartolina.

4. Análise de Dados

Dada a opção pela realização de um estudo de natureza qualitativa, a análise dos dados foi sendo feita ao mesmo tempo que a recolha dos dados, procurando dar respostas às questões de investigação apresentadas no início deste estudo. Ao mesmo tempo que os dados iam emergindo, estes foram analisados, numa primeira fase numa perspetiva mais aberta e, após a recolha de todos os dados foi objetivo o estreitamento dessa análise. Consideramos que este tipo de análise irá partir de um "processo essencialmente indutivo: caminha-se dos dados empíricos para a formulação de uma classificação que se lhes adeque" (Esteves, 2006, p. 110).

Ao longo da recolha dos dados foram analisados os registos vídeo das sessões de trabalho, bem como os documentos resultantes do trabalho dos alunos.

Capítulo IV

OS ALUNOS E AS ATIVIDADES DE INVESTIGAÇÃO EM GEOMETRIA

1. Síntese do Estudo Piloto: Figuras geométricas – triângulos e alguns quadriláteros

No início do ano letivo, realizei com os alunos da minha turma um estudo inicial, que considerei um Estudo Piloto, no qual propus aos alunos um conjunto de tarefas já referidas no capítulo anterior. A escolha das mesmas foi bastante ponderada e fruto de alguma pesquisa, tendo-se baseado, em grande parte em Matos e Serrazina (1988). O objetivo inicial deste estudo foi por um lado, compreender o que os alunos eram capazes de fazer e o que já sabiam acerca das figuras planas, no caso particular, triângulos e quadriláteros (quadrados e retângulos), por outro lado, levar estes alunos a progressivamente alargar os seus conhecimentos acerca das referidas figuras geométricas. Pretendia que os alunos naturalmente chegassem a conclusões e a algumas classificações geométricas simples, adequadas ao seu nível de desenvolvimento e escolaridade. Apresento aqui uma análise global desse estudo de modo a que melhor se compreenda o contexto onde foi desenvolvido o estudo que constitui a parte empírica desta dissertação e cuja análise será apresentada na seção seguinte.

O primeiro Momento – **Figuras Geométricas -** teve como o objetivo, motivar os alunos para as tarefas que se seguiam. Optei por iniciar com duas tarefas mais lúdicas. Propus aos alunos dois jogos semelhantes nos quais necessitaram de utilizar os conceitos que já possuíam acerca de figuras geométricas.

A primeira tarefa foi designada de **Jogo dos telegramas.** Os alunos organizaram-se em dois grupos (4 alunos cada). Um dos grupos desenhou no geoplano algumas figuras geométricas, com três ou quatros lados. O outro grupo teve de representar essas figuras no seu geoplano, mas a partir das indicações verbais (telegramas) que lhes eram enviadas pelo outro grupo. Pretendeu-se levar os alunos a comunicar matematicamente, identificando e distinguindo. Pretendia-se que os alunos fossem capazes, de por um lado, dar indicações corretas acerca das figuras desenhadas (número de lados, lados iguais ou lados diferentes, vértices, posição…), por outro lado, compreender as indicações dadas e reproduzir a figura desenhada pelos colegas. Inicialmente foi explicado aos alunos a tarefa e cada um dos grupos experimentou uma vez de forma a verificar se haviam compreendido. O 1º grupo começou por desenhar um triângulo isósceles“ quase equilátero”. O 2º grupo desenhou um quadrado, ocupando todo o espaço do geoplano.

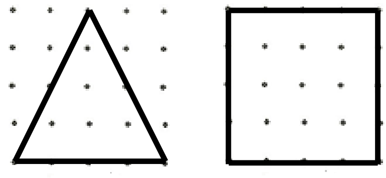


Figura 2 – triângulo isósceles “quase” equilátero e quadrado

As indicações dos alunos (telegramas) centraram-se essencialmente à volta do nº de lados, lados iguais ou diferentes; nº de vértices; e por vezes o nº de pregos no interior e lados de cada figura desenhada. Os alunos não demonstraram dificuldade nem na representação nem na nomeação de quadrados, triângulos e retângulos.

Na última representação, o 1º grupo representeou um triângulo escaleno retângulo.

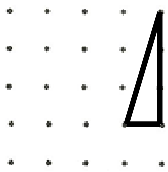


Figura 3 – triângulo escaleno retângulo grupo A

No grupo que representou a figura, foi um aluno que a sugeriu, mas apesar de ser aceite pelos restantes membros do grupo, levantou dúvidas, sobre se seria ou não um triângulo. Após alguma discussão os alunos reconheceram a figura como triângulo, no entanto, as indicações (telegramas) além de referirem o número de lados e vértices referiam também, na linguagem dos alunos: tem um vértice a apontar para cima/ no topo, sozinho. O 2º grupo, que tentava acertar na figura, teve relativa facilidade em representá-la. No entanto, alguns membros do grupo insistiam em transformá-la, como se não a aceitassem à partida. Foi necessária a minha intervenção, levando o 1º grupo a repetir algumas das indicações, ao mesmo tempo que o 2º grupo comparava com a sua. No final, questionei os alunos sobre que figura era aquela, como se chamava. Para meu espanto, os alunos não disseram que era um triângulo. Aliás, uma aluna transmite essa ideia: Quando eu era pequena desenhava assim os triângulos, mas depois vi que não era assim; outro aluno designou esta figura como "um três ângulos". Eu disse aos alunos, que mais tarde iriamos descobrir que figura era aquela. Aqui os alunos demonstraram que ainda não reconheciam todos os atributos que uma figura tem de ter para se considerar triângulo. Ou seja, os exemplos com os quais haviam contactado até aqui, início do 2º ano de escolaridade, apenas corresponderiam a protótipos, nomeadamente o habitual triângulo equilátero.

Na última oportunidade, o 2º grupo desenhou um losango, figura também que havia sido pouco explorada no ano anterior (1º ano de escolaridade)

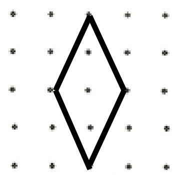


Figura 4 – losango

Foi necessário a minha ajuda para decidirem que indicações dar, demonstrando que ainda não conheciam a figura e muito menos as suas propriedades ou atributos. No entanto, o 1º grupo demonstrou muita facilidade em representá-la.

Passaram depois, ainda no mesmo dia, para o **Jogo das adivinhas,** formaram dois grupos (4 alunos cada). Um grupo desenhou uma figura no geoplano e escondeu o que desenhou. O outro grupo fez até 20 perguntas para descobrir qual é a figura de que se trata, e em que posição estava desenhada. As figuras desenhadas tinham de ser figuras para as quais pudessem ser feitas perguntas cuja resposta fosse Sim ou Não. Depois os grupos trocaram de funções. O objetivo era que os alunos fossem capazes de fazer perguntas pertinentes, que se relacionassem com os atributos das figuras geométricas que conheciam. A resposta a essas perguntas permitiu que os alunos representassem uma determinada figura. Esta tarefa no início correu bem, mas foi necessário clarificar bem as regras e dar exemplos. As perguntas dos alunos centraram-se essencialmente no número de pregos no interior da figura, número de pregos dos lados, número de vértices, número de lados…

No segundo dia, continuaram o **Jogo das Adivinhas**, mas foi necessário relembrar os alunos acerca das regras. Uma das figuras desenhadas por um dos grupos foi o triângulo escaleno retângulo, exatamente igual ao representado no Jogo dos telegramas. Questionei os alunos sobre como se chamava esta figura e referiram “três ângulos”. Procurei que os alunos me explicassem porque é que achavam que se chamava assim.

Rute – A mim vem dos três lados…

Prof. – Mas três lados… não percebo ângulos… não percebo essa palavra… se calhar têm de pensar bem nas características da figura para saberem como se chama. Mas discutimos isso noutra altura.

Definitivamente os alunos não reconheceram este triângulo como um triângulo, mas na figura seguinte desenharam novamente um triângulo escaleno retângulo, mas diferente.

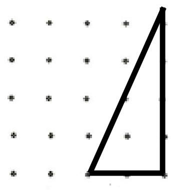


Figura 5 – triângulo escaleno retângulo B

Desta vez, os alunos aceitaram esta figura como um triângulo, provavelmente por ser maior e se assemelhar mais com os protótipos de triângulos que conheciam. Optei por levar os alunos a comparar este triângulo com o anterior.

Prof. – Agora temos aqui, duas figuras muito parecidas. Será que elas têm, o mesmo nome, ou não?

Alunos – Não… sim…

Cláudia – (disse que não) – Porque uma figura tem um preguinho no meio e a outra não.

Prof. – Mas têm características comuns, ou não? … O que é que elas têm de igual…

Magda – Têm três bico.

Cláudia – Tem três lados.

Prof. – Os lados são todos iguais?

Alunos – Não.

Prof. – Elas têm coisas muito parecidas…portanto, três lados, três vértices… como é que será que se chama esta figura?

Rute – Eu acho que é três ângulos…

Prof.- Não existe nenhuma figura com esse nome…nós haveremos…não vos vou dizer…no próximo dia vamos perceber como é que se chama esta figura.

Ambos os grupos tiveram alguma dificuldade em representar o triângulo escaleno retângulo. Apesar de bem identificados os atributos das figuras (nºde lados e vértices…), os alunos demoraram algum tempo a adivinhar as figuras desenhadas, aliás foi necessário referirem bem o nº de pregos que estavam no interior de cada figura, além disso, continuaram sem reconhecer esta figura como um triângulo.

Num outro dia, num segundo momento foi apresentada aos alunos a tarefa **Procurando Triângulos** (anexo 1 tarefa A). Aos alunos foi apresentada uma folha de papel ponteado com alguns exemplos e não exemplos de triângulos. Os alunos mantiveram a organização anterior, dois grupos (quatro alunos cada).

De seguida, os alunos tiveram de discriminar entre exemplos e não exemplos de triângulos num espaço em branco (anexo 1 tarefa B). Em ambas as situações, os alunos começaram por decidir primeiro em pequeno grupo e depois em grande sobre quais das figuras eram triângulos. Esta tarefa pretendeu levar os alunos a uma classificação simples de triângulos, ou melhor ao reconhecimento dos atributos necessários a uma figura para que seja considerada triângulo. Foi gerada uma discussão em grande grupo acerca das descobertas e dúvidas dos alunos. Os alunos estavam bastante motivados para o desenrolar de mais uma tarefa. Ao contrário das minhas espectativas, baseadas no seu desempenho nos dias anteriores, pensei que os alunos fossem identificar apenas os triângulos equiláteros ou quase equiláteros na posição habitual. No entanto, identificaram facilmente todos os triângulos. A discussão final em grande grupo permitiu aos alunos compreenderem que a posição de uma figura não altera as suas propriedades ou atributos.

À parte de terem assinalado todas as figuras que eram triângulos, num dos grupos, os alunos assinalaram a seguinte figura.

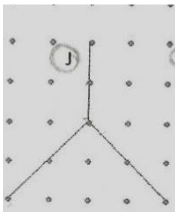


Figura 6 – não exemplo de triângulo

Alegaram que esta figura tinha, três lados e três vértices. No entanto, na discussão em grande grupo uma aluna do outro grupo disse: “não tem linha em baixo e, por isso, não pode ser”. A discussão que se gerou de seguida, permitiu que os alunos descobrissem mais um dos atributos de um triângulo, ou seja, tem de ter uma linha “poligonal” fechada. Uma outra figura (figura 7) suscitou dúvidas nos alunos pertencentes ao mesmo grupo que havia assinalado a figura anteriormente referida. Os alunos aceitaram-na, mas depois da discussão conjunta compreenderam que era uma figura só e não dois triângulos juntos. Contámos os lados e os vértices da figura para esclarecer eventuais dúvidas.

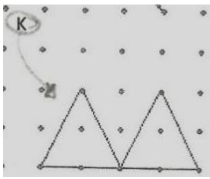


Figura 7 – não exemplo de triângulo

Também foi muito interessante, os alunos aceitarem os triângulos muito fininhos, pois de acordo com a minha experiência profissional os alunos têm tendência para não considerar como triângulos essas figuras.

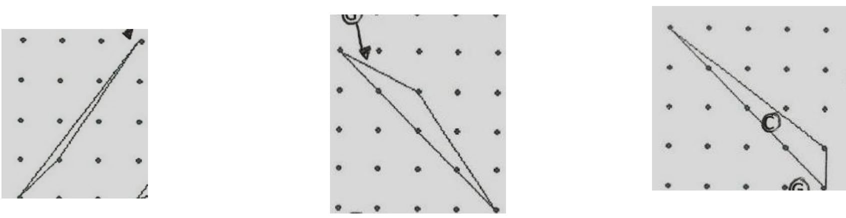


Figura 8 – exemplos de triângulos “fininhos”

Por outro lado, algumas figuras não tinham os lados compostos por uma única linha reta (figura 9), mas visualmente os alunos achavam que sim. Ao analisarmos esta figura, os alunos ficaram mais despertos e passaram a estar mais atentos para análise das características das figuras.

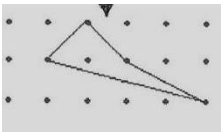


Figura 9 – não exemplo de triângulo

Na segunda tarefa, os alunos tiveram novamente de identificar visualmente triângulos, mas desta vez, sem a malha ponteada. Questionaram de imediato, se algumas figuras estavam mal por causa da fotocópia, uma vez que não tinham os lados todos desenhados. Um aluno tentou mesmo desenhar a linha em falta…

Figura 10 – não exemplos de triângulos, figuras abertas

Pensei que os alunos fossem considerar as figuras representadas (figura 11), pois têm três vértices e são figuras fechadas.

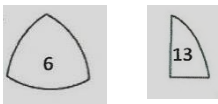


Figura 11 – não exemplo de triângulo, lados curvos

Os alunos rejeitaram ambas as figuras com a justificação que: “tem os lados “redondos” ... “curvos”.

No final foi construído, por mim, com as sugestões dos alunos, um pequeno cartaz sobre o que era um triângulo para afixar na sala de aula, no qual se destacavam os principais atributos: três lados, três vértices, uma figura fechada. Na ficha de avaliação do 1º Período foi apresentado um exercício de reconhecimento de triângulos e os alunos acertaram em tudo e não assinalaram nenhum que não fosse triângulo, demonstrando, por isso, uma evolução significativa dos seus conhecimentos.

Uma nova tarefa consistiu em desenhar **Triângulos** no geoplano e registá-los em papel ponteado. Cada aluno teve de representar triângulos no geoplano 5 x 5, e de seguida, registá-los em papel ponteado. Os alunos deveriam tentar descobrir todos os triângulos possíveis. Antes da atividade, em grande grupo procuramos definir o que são triângulos iguais, destacando os atributos. Esta tarefa pretendia levar os alunos à necessidade de classificar triângulos e aceitar triângulos diferentes e em posições diferentes e talvez pouco convencionais. Pretendeu-se, ao mesmo tempo, que através da discussão em pequeno e grande grupo, que os alunos fossem capazes de identificar os três tipos de triângulos: equiláteros, isósceles e escalenos. As representações dos alunos (anexo 6 e 8) demonstraram que os alunos já não representaram apenas os protótipos de figuras que conhecem, e em posições tradicionais. Pelo contrário, representaram inclusive triângulos escalenos retângulos e triângulos isósceles. Relativamente ao triângulo equilátero não seria possível os alunos o representarem no geoplano 5 x 5. Neste trabalho não surgiu nenhuma oportunidade para que os alunos conhecessem os nomes dos triângulos desenhados, até porque não era algo que lhes fizesse muito sentido, e nem estava no âmbito dos objetivos definidos inicialmente. Considero que para conhecerem as figuras é essencial que reconheçam os seus atributos, muito mais do que saberem os seus nomes apenas.

Num terceiro momento, as tarefas propostas foram no âmbito dos **Quadriláteros**. A primeira tarefa pretendia que **c**ada aluno representasse **retângulos** no geoplano 5 x 5, e de seguida, registá-los em papel ponteado. Os alunos tentaram descobrir todos os retângulos possíveis. Os alunos começaram por considerar o tamanho como o critério mais importante (pequeno, médio e grande). Em ambos os grupos surgiram retângulos e quadrados, e num grupo surgiu um paralelogramo (Figura 12).

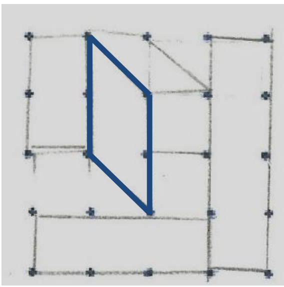


Figura 12 – Quadriláteros no geoplano 5 x 5

Na discussão em grande grupo, os alunos expuseram as suas dúvidas. Os três primeiros retângulos desenhados foram muito bem aceites e em grande grupo os alunos definiram três atributos para um retângulo: 4 lados, figura fechada, lados iguais 2 a 2.Na análise do paralelogramo desenhado, procurámos comparar os atributos das figuras passo a passo (retângulo e paralelogramo). Para os alunos, o paralelogramo era um retângulo inclinado. De forma a verificar as diferenças, pedi aos alunos para olharem para dentro dos cantinhos, e disse-lhes que essa parte tinha o nome de ângulo. Depois de observarem e de eu sobrepor (com um geoplano transparente por cima de um colorido) as duas figuras, os alunos verificaram que o paralelogramo não tinha os ângulos todos iguais, como o retângulo (ângulos retos). Procurei reforçar a ideia de que um retângulo tem os ângulos todos iguais e "direitos" (retos).

Quando passámos para a discussão em torno do quadrado, voltámos a fazer o mesmo que no caso do paralelogramo. Apesar de já ter sido referido, no 1º ano de escolaridade, que o quadrado é um retângulo, tal não foi evidente. Quando comparámos os ângulos do quadrado e do retângulo, os alunos puderam constatar que eram iguais e do mesmo tipo (ângulos retos). Deste modo, foi fácil levar os alunos a compreender que o quadrado é um caso "especial"/"particular" do retângulo, mas que apenas tem a particularidade de ter os lados todos iguais.

Na segunda tarefa **Procurando quadriláteros c**ada aluno teve acesso a uma folha de papel ponteado com uma área delimitada, correspondente a um retângulo (anexo 4 tarefa 2). Foi-lhes solicitado que descobrissem quantos quadriláteros diferentes conseguiam desenhar no interior dessa região (existiam pelo menos 14). Aqui surgiu uma palavra nova para os alunos – quadriláteros, pelo que foi bastante importante que antes da atividade os alunos compreendessem o que era um quadrilátero. Pretendia-se levar os alunos a distinguir entre quadriláteros e triângulos, destacando as principais diferenças e as características geométricas que deve ter um quadrilátero. Os alunos ao compreenderem que um quadrilátero é uma figura geométrica com quatro lados facilmente descobriram figuras diferentes, entre trapézios, paralelogramos, quadrados e retângulos. No entanto, a nomeação das figuras não foi algo que considerasse essencial para cumprir com os objetivos deste trabalho.

Na terceira tarefa, **Quadriláteros Especiais**, os alunos facilmente conseguiram representar quadrados, identificando o maior e menor quadrado possível.

Na quarta tarefa deste terceiro momento, **Descobrindo Quadrados**, os alunos do Grupo B identificaram facilmente o número de quadrados da figura A (5) e o número de quadrados da figura B (14) (anexo 5 e 7 tarefa 4). Na discussão os alunos do Grupo A conseguiram compreender porque erraram.

Num quarto momento, **Questionário Final**, foi entregue aos alunos, um questionário (anexo 9). O objetivo era aferir os conhecimentos adquiridos pelos alunos no decurso deste trabalho. Os alunos responderam facilmente às questões colocadas, no entanto, foi necessário reforçar que era importante dizerem tudo aquilo que sabiam acerca dos triângulos e quadriláteros. Inicialmente, os alunos referiram apenas os atributos mais básicos dos triângulos, número de lados e vértices. Na última questão sobre se o quadrado é ou não um retângulo, a maioria dos alunos respondeu que sim, no entanto, um dos alunos demonstrou ainda não ter compreendido que um quadrado é um retângulo, pois foi o único que respondeu que não.

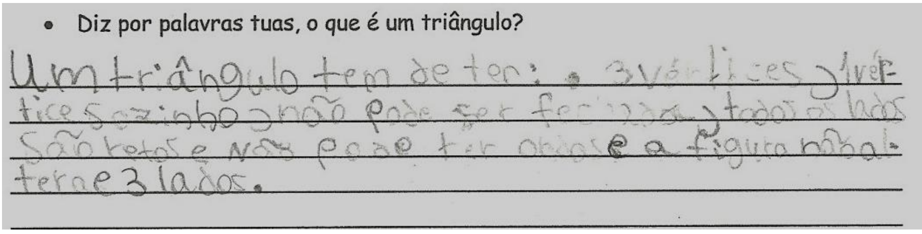


Figura 13 – Resposta completa sobre o que é um triângulo

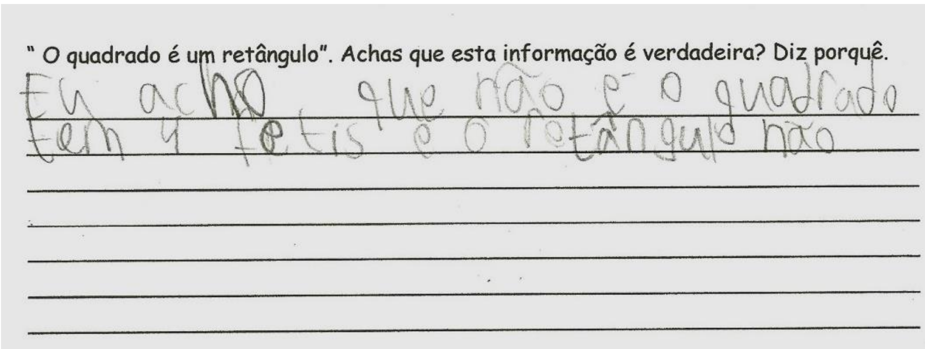


Figura 14 – Resposta incorreta sobre a inclusão do quadrado no retângulo

Apesar de não estar previsto inicialmente, no quinto momento decidi repetir o j**ogo dos telegramas** e o **jogo das adivinhas**. Pretendi verificar se os alunos haviam evoluído nos seus conhecimentos desde o primeiro momento, no qual jogaram estes jogos. Os alunos basearam as suas perguntas e indicações no número de lados e vértices. Na discussão com todo o grupo, questionei os alunos, sobre se uma figura poderia ter um número diferente de lados e vértices. Através de vários exemplos, os alunos constaram que não. Deixaram de referir os dois atributos e passaram a referir apenas um deles.

No triângulo escaleno retângulo foi necessário levar os alunos a comparar o comprimento dos dois lados maiores, pois para uma aluna esses lados eram iguais. Medimos através da marcação de uma folha e comparámos. Demonstraram bastante mais facilidade e "abertura" para a representação de triângulos e figuras diferentes. Outra figura que surgiu foi o losango, que alguns alunos consideravam como um quadrado se rodássemos o geoplano. Decidi levar os alunos a comparar um quadrado que já haviam desenhado e o losango em questão, pois os alunos não sabiam como se chamava o losango.

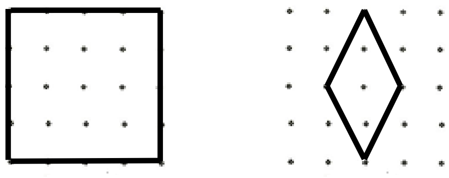


Figura 15 – quadrado e losango

Ao comparar as duas figuras alguns alunos ficaram na dúvida se o quadrado era ou não um losango. Os alunos rodaram o geoplano do quadrado para que ficasse numa posição semelhante à do losango. Os alunos reconheceram que não deixava de ser quadrado se alterássemos a posição. Questionei os alunos sobre os atributos do quadrado: "quatro lados…os ângulos todos iguais".

Ao comparar ambas as figuras levei os alunos a ver a diferenças e semelhanças. Neste caso que tem quatro lados todos iguais, mas os ângulos não são todos iguais.

Prof. – Então e como é que se chama esta? Não se pode chamar quadrado…ou pode?

Rute – Não… é um losango.

Hugo – Eu sabia.

Através desta discussão, os alunos passaram a considerar o quadrado e o losango como figuras diferentes, mesmo tendo ambas, os quatro lados iguais.

Notas finais do Estudo Piloto

Os alunos estiveram permanentemente interessados nesta investigação, pelo que considero que este foi um trabalho bastante rico, principalmente no decorrer das discussões em grande grupo. O geoplano permitiu que os alunos pudessem compreender no concreto (experimentar, observar, medir, desenhar) os atributos e os pontos-chave das discussões geradas. Este estudo piloto permitiu que os alunos evoluíssem nos seus conhecimentos geométricos acerca dos triângulos e quadriláteros, no entanto, considero que faz todo o sentido levar os alunos a continuar o seu caminho. A partir das suas descobertas neste estudo, aparentemente, os alunos ficaram mais seguros e mais conscientes dos atributos das figuras trabalhadas (triângulo, quadriláteros), mas não as analisaram ao pormenor.

Foi a partir desta experiência que elaborei o que designei por experiência de ensino que pretendeu levar os alunos a continuar o seu trabalho, partindo dos conhecimentos que entretanto já adquiriram ou sedimentaram.

2. Experiência de Ensino

2.1. Bandeiras Triangulares

Na sequência deste estudo, elaborei uma experiência de ensino que, como referido anteriormente, se focalizou nos triângulos e quadriláteros e pretendeu que os alunos avançassem no sentido da análise das propriedades e estabelecimento de uma classificação. Embora, os alunos da turma demonstrassem ser capazes de reconhecer exemplos e não exemplos de triângulos, recorrendo não só às questões de visualização, mas também ao reconhecimento de algumas propriedades dos triângulos.

A tarefa apresentada em primeiro lugar aos alunos foi designada de **Bandeiras Triangulares.**

- Bandeiras Triangulares -

“ A Professora Joana quer fazer uma bandeira de boas vindas, para colocar na sua sala de aula. Ela sabe que pretende fazer a bandeira com a forma de um triângulo, mas não sabe que tipo de triângulo pretende. A Professora Joana precisa de encontrar um triângulo de que goste”.

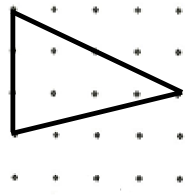
Procura ajudar, em conjunto com os teus colegas do grupo, a Professora Joana a criar o maior número possível de bandeiras triangulares diferentes.

1. Tarefa A – Bandeiras Triangulares

Observa a seguinte folha de papel ponteado e a bandeira triangular que está representada.

Quantas bandeiras triangulares, consegues encontrar?

Utiliza o teu geoplano e depois representa as figuras na folha de papel ponteado que te foi entregue.



Baseado em Britton, B. Candy Conundrum Problem (2005) Teaching Children Mathematics.

Figura 16 – Tarefa Bandeiras Triangulares

Os objetivos principais da tarefa foram: distinguir entre figuras iguais e diferentes, reconhecer e compreender que o tamanho e posição de uma determinada figura não alteram as suas propriedades relativamente à forma, desenvolver a capacidade de discriminação visual de determinadas figuras, nomeadamente entre figuras diferentes, fazer uma classificação de triângulos, de forma simples, arrumando as figuras desenhadas em sub grupos, desenvolver a capacidade de reprodução de figuras desenhadas no geoplano em papel ponteado e posteriormente reproduzidas em folhas de papel ponteado.

Os alunos trabalharam sempre em grupos de quatro alunos cada, mantendo-se a organização já existente na dinâmica de sala de aula. Estavam entusiasmados e disponíveis para a atividade proposta. Na proposta apresentada, foi-lhes solicitado que tentassem descobrir o maior número de bandeiras triangulares diferentes. Foi-lhes entregue o material necessário para a realização da atividade proposta, nomeadamente, a folha do enunciado (anexo 13), um geoplano para cada um, elásticos e uma folha de papel ponteado. Foi feita uma leitura em grande grupo do que lhes era pedido e esclarecidas dúvidas. De seguida, os alunos iniciaram a sua atividade em pequenos grupos, e eu, enquanto professora, fui circulando pelos dois grupos mantendo um diálogo e questionando-os sobre o que estava a fazer. A certa altura, os alunos já tinham descoberto alguns triângulos, mas começaram a surgir dúvidas sobre a sua diferenciação, seriam ou não diferentes?

Assim que os alunos dos dois grupos de trabalho, Grupo A e Grupo B, iniciaram a sua atividade senti que estavam a ter dificuldades em diferenciar entre triângulos visualmente semelhantes. Em alguns casos, bastava que os alunos contassem o número de preguinhos de cada um dos lados dos triângulos. No entanto, alguns dos triângulos desenhados, pela sua posição no geoplano, apresentavam o mesmo número de pregos dos lados, mas a medida do comprimento dos lados era diferente. Deste modo, considerei que era essencial que os alunos tivessem um outro material que os auxiliasse neste trabalho. Decidiu entregar a cada grupo um fio de medição. Ou seja, o objetivo foi levá-los a comparar o comprimento dos lados dos seus triângulos, deste modo, mais facilmente conseguiriam distinguir entre triângulos visualmente semelhantes. Claro, que tinha como objetivo prévio levá-los posteriormente a uma classificação simples de triângulos baseada no comprimento dos lados. Justifica-se assim a existência de um fio de medição.

Nesta fase do trabalho irei procurar descrever e analisar os dados recolhidos, mas tendo em conta os dois grupos de alunos, Grupo A e Grupo B, e discussão coletiva.

Grupo A

No início do trabalho, os alunos deste grupo representaram o maior triângulo "quase equilátero" no geoplano. Ao recorrerem à discriminação visual dos triângulos, mais especificamente ao tamanho, consideraram que eram a mesma figura, ou seja desvalorizaram as questões relacionadas com o tamanho.

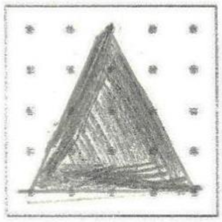


Figura 17 – triângulo quase equilátero

Paula- É igual, mas só que maior.

Na discussão que mais tarde se gerou entre os alunos deste grupo, com a minha intervenção, levei-os a decidir que o facto de ter tamanho diferente era na mesma considerado, pois eram bandeiras triangulares diferentes.

> Paula – Porque é igual a esta [apontando para um triângulo que já haviam representado (quase equilátero pequeno)], mas só que maior.
>
> Prof. – Então e achas que é a mesma bandeira? Essa ou aquela?
>
> Paula – Não…
>
> Prof. – Porque não? (…)
>
> Magda – [apontando para o triângulo maior] - Porque esta tem mais pregos…
>
> Prof. – (Estando as duas figuras lado a lado representadas no geoplano) – Então achas que são iguais?
>
> Patrícia – Não.
>
> Prof. – Porque que é que não são iguais?
>
> Patrícia-[apontando para os pregos do geoplano que estão em baixo] - Porque esta tem três e este tem cinco.
>
> Prof. – É só isso? Cláudia é só isso que elas têm de diferente?
>
> Cláudia – Não…
>
> Prof. – Então?
>
> Cláudia – Porque aqui vai até cá a cima e aquela não.

No início desta tarefa deixei que os alunos decidissem entre si qual o critério que queriam utilizar para saber se um triângulo era igual ou diferente de outro. O tamanho foi considerado para os alunos deste grupo como algo importante a considerar. Contudo, na continuidade do trabalho este foi um critério abandonado dando lugar à medida do comprimento dos lados dos triângulos. Estes alunos ao recorrerem apenas à visualização demonstraram algumas dificuldades em discriminar entre triângulos visualmente semelhantes. A atitude dos alunos passava por contar o número de pregos do geoplano que faziam parte de cada lado do triângulo.

Prof. – Então?

Cláudia – Ela diz que o que eu fiz é igual a este…

Prof. – E o que é que acham? Acham que é igual?

Alunos – Não…

Prof. – Porquê?

Cláudia – [referindo-se ao triângulo que pensam ser igual] – Tem três pregos e ali só tem dois…

Considerei que os alunos deste grupo não estavam muito seguros nas comparações efetuadas, além disso, por vezes surgiram triângulos que tinham o mesmo número de pregos dos lados, mas medidas de comprimento diferentes, como tal, decidi entregar-lhes o fio de medição. Deste modo, levei os alunos a recorrerem não só à visualização, mas também à medição.

Prof. – Sim, tu estás a dizer que este é igual aquele, mas como é que eu posso ter a certeza …

Cláudia – (referindo-se aos pregos que ficam no lado diferente, em baixo) - Mas este só tem dois e este tem três.

Prof- … Se tu quisesses ter a certeza como é que ias fazer?

Maria – Ia ver quantos preguinhos…

Prof. – E sem ser com os preguinhos, não posso medir com um fio?

Alunos – Sim…

Prof. – Então… podes pegar, medes um e depois vais comparar com o outro…faz lá isso… vamos lá ver [ajuda os alunos a medir o comprimento dos lados do triângulos]. – Dali, ali…pegas…agora com a mesma medida e vais ver se é igual…é igual… Maria?

Alunos- Não…

Prof. – É maior não é? São ou não são diferentes de comprimento?

Alunos – Sim.

Talvez para estes alunos não tivesse sido compreendido, e não lhes fizesse sentido, ainda, que ao utilizarem o fio de medição poderiam mais rapidamente diferenciar entre os triângulos. Este foi um processo acelerado por mim. Apesar de ter sido explicado aos alunos que existia a possibilidade de utilizarem o fio de medição, estes ainda estavam pouco proactivos na utilização do mesmo, e foi novamente necessário a minha ajuda.

Prof.- Então qual foi a outra descobriram...

Mário – Mas a Cláudia não concorda.

Prof. – Porquê? Dizes que não concordas porquê?

Paula – Ela já percebeu…

Prof. – Mas eu quero ouvir porque é que a Cláudia acha que não…Porque é que pensaste à primeira que não?

Cláudia – Porque por baixo tem três e a outra também tem três.

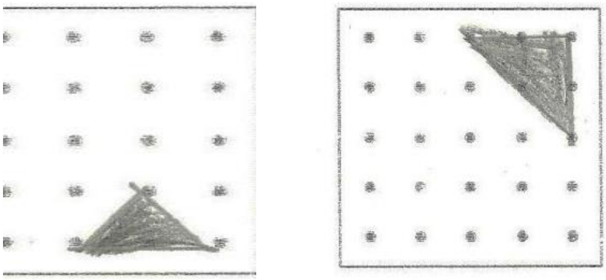


Figura 18 – triângulos considerados iguais visualmente

Prof. – Então, mas na dúvida façam as duas e meçam, o que é que eu disse que podem fazer? Representem as duas e meçam o comprimento dos lados…não são? Se temos dúvidas, vamos medir…

Nesta situação este grupo de alunos utilizou o fio para medir o comprimento dos lados após sugestão, efetuando a comparação entre os dois triângulos a partir da medida do comprimento dos lados. Desta vez, considero que lhes fez muito mais sentido a utilização do fio de medição, pelo menos no caso destas duas figuras, que embora tivessem o mesmo número de pregos num dos lados, não tinham a mesma medida.

Mais à frente neste trabalho os alunos deste grupo discutem entre si sobre dois triângulos que sendo iguais se encontravam em posições diferentes. Apesar de já termos analisado triângulos em várias posições, no estudo prévio anterior, e discutido o facto de a posição não alterar a figura, os alunos ainda hesitaram e necessitaram de ajuda para compreender este atributo, neste caso de todas as figuras geométricas.

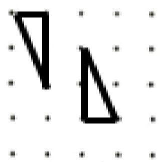


Figura 19 – triângulos retângulos iguais, mas em posições diferentes

Prof. – [Explicando para todos os alunos do grupo] – Há aqui uma dúvida…

[Duas alunas do grupo começam a medir um dos lados de um dos triângulos…]

Paula – São iguais…

Prof. – Mas será que basta só medir esse lado? Os lados são todos iguais dessa figura?

Cláudia – Não…

[O grupo continua a medir os restantes lados com a ajuda do fio de medição].

Prof. – E então?

Cláudia e Paula – São iguais…

Prof. – Então, apesar de estarem em posições diferentes, não deixam de ser a mesma figura.

Neste diálogo considero que fui demasiado interventiva e “dominadora”, não deixei que fossem os alunos a chegar à conclusão de que a posição de uma figura não altera as suas propriedades. Numa atividade invetigativa é essencial que os alunos tenham espaço para pensar, para elaborar as suas conjeturas. O professor não deve dar as respostas diretamente, deve através de um permanente questionameno levá-los a fazer eles próprios novas descobertas.

Grupo B

Após o início da atividade, os alunos deste grupo discutiram sobre a posição dos triângulos que desenharam. No entanto, um dos alunos considerou a certa altura que o facto de um triângulo estar numa posição diferente fazia com que já não fosse uma bandeira triangular.

Hugo – Aquilo não é uma bandeira…

Prof. – A bandeira tem a forma de um triângulo.

Maria – Tem a forma de um triângulo…

Prof. – Sim…

Rute – E acho que está bem.

Prof. – Aquilo para ti não é um triângulo? Aquela figura?

Hugo – É…

Prof. – Diz ai que tens de ajudar a Professora Joana a encontrar um triângulo de que ela goste… não sabes dos que estás a desenhar se ela vai gostar de algum…

Nesta situação fica evidente que este aluno não compreendeu bem o que lhe era pedido no enunciado. Para ele, deveria representar bandeiras triangulares que estivessem na mesma posição daquela que aparecia no enunciado.

Neste grupo de alunos, uma aluna revela dificuldades acerca de dois triângulos que são visualmente semelhantes. No entanto, os restantes elementos do grupo não concordaram e ajudaram a colega a compreender que eram figuras diferentes, com medidas de comprimento dos lados diferente.

Hugo – Já descobrimos seis.

Prof. – Diferentes?

Hugo- Sim.

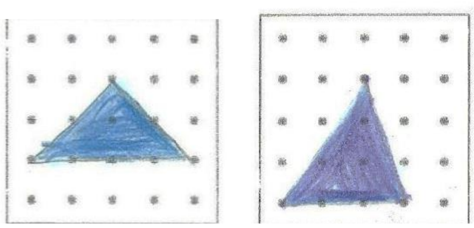


Figura 20 – triângulos considerados iguais visualmente

Cátia- [Apontando para duas figuras] – Eu acho que estas são iguais.

Prof. – (reforçando a ideia da aluna) – A Cátia acha que esta e esta são iguais.

Rute – Não. Eu acho que não.

Maria – Não, porque olha aqui…

Prof. – Representem no geoplano…um aqui, outro aqui.

Maria - Agora tens de desenhar esta. Esta tem, uma, duas, três, quatro [contando o número de pregos nos lados do primeiro triangulo].E esta tem … quatro, cinco (referindo-se ao segundo). [As colegas ajudam a Cátia a representar novamente os dois triângulos].

Prof. – Então vá, agora comparem… Achas que elas são iguais? (as figuras estão representadas em geoplanos diferentes, colocados, um ao lado do outro na mesa, em frente à aluna).

Maria – Volta a contar o número de pregos em baixo…

Prof. – Vai buscar o fio para medir. A Rute foi buscar o fio para se medir. Agora medes o comprimento de um lado… [As alunas medem o comprimento de um lado do 2º triângulo e depois vão comparar com o mesmo lado no 1º triangulo. ..]- Então achas que é igual?

Cátia – Não.

A interação gerada pelos alunos é essencial, no entanto, o fio de medição permitiu que a aluna compreendesse que o comprimento deste lado do triângulo era diferente, muito embora, e tal como uma das colegas sugere, ao recorrer à contagem dos pregos, poderia ter compreendido o mesmo.

Na continuidade do trabalho os alunos deste grupo discutem entre si sobre a forma como as figuras têm de ser reproduzidas na folha de papel ponteado em relação ao geoplano, demonstrando que consideram diferente se a folha e o geoplano, propriamento dito, estiverem em posições diferentes.

Rute – Essa já foi…

Hugo – Não, não foi.

Rute – Foi a que a Cátia fez.

Prof. – Muda a figura se mudarem a posição?

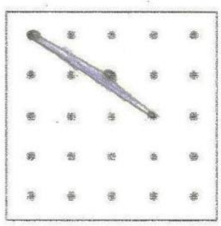


Figura 21 – triângulo escaleno

Hugo – Não.

Prof. – O facto de rodares, vai mudar a figura que tu desenhaste?

Maria – Não…

Uma das alunas do grupo, utiliza a folha de registo de papel ponteado ao contrário, tendo em conta o local onde escreveu o nome. No entanto, a aluna Rute, reforça que não tem mal, uma vez que não muda as figuras. Para esta aluna é claro que a posição da figura não altera as suas propriedades, demonstrando que possui um nível de conhecimento mais avançado que alguns dos seus colegas.

Discussão Coletiva

Após os alunos já terem descoberto alguns triângulos, e quase no final do primeiro dia de trabalho, foi feito um **ponto de situação** com ambos os grupos. Os alunos revelaram que já estão mais à vontade com os atributos de um triângulo. Além da questão relacionada com o número de lados, surge uma associação por parte de um aluno, em relação ao número de lados e vértices.

Cátia – Tem de ter três lados. (…)

Hugo – E por isso três vértices.

Prof. – E porque é que disseste e por isso três vértices? Perceberam o que ele disse? Ele não disse três vértices. E por isso… ou seja, por ter três lados tem três vértices. Mas porque é que é assim?

Hugo – Porque uma figura com o mesmo número de lados tem o mesmo número de vértices(…).

Neste diálogo fica claro que este aluno está num nível de desenvolvimento mais avançado, pois conseguiu fazer uma associação que não me parece que tenha sido compreendida por todos. Alguns alunos revelaram que ainda estão muito “presos” aos protótipos de triângulos com os quais contactaram até ao momento da realização desta tarefa. Nesta discussão conjunta uma aluna refere que um triângulo tem de ter um vértice apontado para cima, deixando de lado todos os triângulos que possam estar numa posição mais inclinada. Contudo, outros alunos referem-se ao facto da posição não alterar a figura em questão, no caso, uma aluna compreendeu esta questão e dá o exemplo de uma situação que surgiu no seu grupo.

> Prof. – Houve outra questão que vocês falaram, teve a ver com a posição.
>
> Rute – Sim. A posição não muda nada…Porque a Maria tinha desenhado um triângulo, por exemplo, em pé. E depois a Cátia desenhou-o de lado e…a Maria disse que não podia ser porque era uma bandeira, e a professora disse que não mudava nada.

Nesta primeira parte desta atividade investigativa os alunos puderam através das suas próprias descobertas,alargar os seus conhecimentos neste caso puderam descobrir que existem triângulos que apesar de visualmente semelhantes não são iguais, pois têm características/propriedades diferentes, nomeadamente a medida do comprimento dos lados diferente. No entanto, ao partilharem as suas descobertas, os alunos necessitaram da minha confirmação, de que o que tinham descoberto tinha sentido. Por vezes, os alunos estão inseguros e é necessário icentivá-los a continuar, para que de futuro estejam mais confiantes e possam elaborar eles próprios as suas conjeturas.

Na segunda parte da tarefa, que foi iniciada ainda no mesmo dia, foi proposto aos alunos que arranjassem uma forma de arrumar os triângulos em sub grupos, pintando da mesma cor as figuras que achassem pertencer ao mesmo sub grupo. Ambos os grupos utilizaram como critério de classificação o comprimento dos lados. Inicialmente previa que os alunos pudessem utilizar como critério o tamanho, uma vez que na primeira parte da tarefa surgiram situações em que a discussão tida em grupo se prendia com esta questão. No entanto, tal não se verificou e facilmente descobriram dois grupos. Penso que o facto de os alunos terem recorrido ao fio de medição na primeira parte da tarefa influenciou a escolha deste critério, ou seja agrupar os triângulos de acordo com a medida do comprimento dos lados.

Grupo A

Os alunos deste grupo consideram à partida que o primeiro triângulo analisado tinha os lados todos iguais. Decidi ajudá-los efetuando a medição do comprimento dos lados do triângulo.

> Prof. – Então que caracteristicas é que tem este triangulo? Os lados não são todos diferentes, mas também não são todos iguais… Então como é que são os lados?

Grupo- Dois lados iguais e um diferente.

Incentivei o grupo a continuar as suas descobertas, e estando mais desperto e mais à vontade com a medições, rapidamente, descobrem o grupo dos triângulos com os lados diferentes.

Prof. – Portanto, este que grupo é? É o grupo dos quê?

Cláudia – Dos lados todos diferentes.

Paula - … podemos descobrir outro grupo com os lados todos iguais?...

Prof. – Pode haver um grupo com os lados todos iguais, agora será que é esse? Não sei têm de ver.

Figura 22 – triângulo isósceles

Neste grupo, esta aluna que volta a questionar sobre a existência ou não de um grupo de triângulos com os lados todos iguais. Em grupo procuraram ver a diferença apenas através da visualização, mas depois chegaram a conclusão que o melhor era medirem. Ao medirem o comprimento dos lados do triângulo com o auxilio do fio de medição, concluiram que o triângulo tinha dois lados iguais e um diferente. Este é mais um exemplo, de alguns triângulos que visualmente parecem ter os lados todos iguais, mas na realidade a medida do comprimento dos lados não corresponde a essa característica.

Ao continuarem o trabalho, este grupo de alunos pintou os seus triângulos com duas cores, correspondentes ao grupo dos triângulos com os lados todos diferentes e o grupo dos triângulos com dois lados iguais e um diferente (ver anexo 14)

Grupo B

Este grupo de alunos, muito mais autónomos, rapidamente, descobriu que nos triângulos desenhados existiam triângulos que tinham os lados todos diferentes, mas quando questionados demonstraram alguma dificuldade em explicar porque é que tinham agrupado dois triângulos.

Prof. – Porque é que vocês acham que estas duas são parecidas? Os lados são todos iguais? São diferentes? Como é que são?

Rute – São diferentes…

Prof. – Todos diferentes? Estes dois lados são diferentes?... acho que há formas de termos a certeza…

Rute – É medir?

Prof. – Não sei o que é que achas?

Ao ajudar os alunos a efetuar a medição do comprimento dos lados estes chegam à conclusão de que apesar de visualmente parecerem iguais, há lados que são muito parecidos, mas que não são realmente iguais.

Prof. – O que é que acham? Então o que é que estes dois triangulos têm de parecido?

Rita – Têm os lados todos iguais…

Prof. – Iguais?

Grupo – Diferentes…

Prof. – Então pode ser um grupinho. Triângulos com os lados todos diferentes. Procurem outros se têm os lados todos diferentes…

Mais à frente os alunos deste grupo descobriram outro tipo de triângulos, no entanto, apesar de saberem que eram diferentes dos triângulos anteriores, não conseguiram identificar em que é que diferiam.

Rute – É que não são todos diferentes…

Hugo – Dois iguais e um diferente.

Prof. – Então a que grupo é que pertencem? Acham que podem ser do mesmo grupo?

Alunos – Não.

Prof. – Vai pertencer aquele primeiro. Se vocês estão a ir por aqueles que têm os lados iguais ou diferentes, têm de ver sempre assim.

Devido a questões logistas relacionadas com a instituição escolar, o trabalho do primeiro dia teve de terminar. No segundo dia, uma semana mais tarde, os alunos iniciaram o trabalho dando continuidade ao que já havia sido feito. Contudo, considerei que era importante verificar e levar os alunos a pensar novamente sobre os atributos de um triângulo. Considero que aqui, os alunos demonstraram estar mais seguros dos atributos de um triângulo, referindo não só o número de vértices, o facto de ter de ser uma figura fechada, mas também, o facto de ter tantos lados como vértices.

> Cátia – Três vértices.
>
> Prof. – Tem três vértices, eu acho que nós tinhamos falado alguma coisa em relação aos vértices e aos lados...?
>
> Alguns alunos – E por isso tem três lados.
>
> Prof. – Ora bem, chegamos à conclusão que… e até foi o Hugo que disse e muito bem, que o número de lados é sempre correspondente ao número de…
>
> Alunos – Vértices.

De facto, apesar de ter sido referida por mim, de certo modo, os alunos revelaram que compreenderam a questão da associação do número de lados para o número de vértices, o que anteriormente nesta investigação havia sido apenas referido por um dos alunos da turma. Os alunos continuaram a verificar a que grupo pertenciam os triângulos que desenharam, associando uma cor para cada grupo de triângulos. Os grupos continuaram o seu trabalho, mas recomendei aos alunos que voltassem a representar as figuras no geoplano e aí verificar a que grupo pertenciam. Os alunos tiveram novamente o fio de medição disponivel para as medições do comprimento dos lados. Até esta fase do trabalho, ambos os grupos encontraram dois grupinhos, o dos lados todos diferentes e o dois lados iguais e um diferente.

Discussão Coletiva

Depois dos alunos verificarem todos os triângulos que tinham desenhado foi feita uma discussão conjunta final. No quadro da sala de aula está afixado uma folha de papael ponteado ampliada. Esta serviu para que fosse possível representar para todos os alunos verem, alguns dos triângulos que haviam sido descobertos pelos alunos, principalmente aqueles que suscitaram maiores dúvidas, ou que foram alvo de discussão.

Uma das questões que suscitou maiores dúvidas, foi se existiam ou não triângulos com os lados todos iguais. Desta feita, optei por iniciar a discussão à volta deste tema, desenhando no geoplano afixado no quadro, um dos triângulos que levou os alunos a questionar se existia ou não um grupo de triângulos com os lados todos iguais.

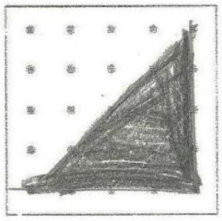


Figura 23 – triângulo isósceles “quase” equilátero

Prof. – (…) um, dois, três, quatro, cinco… [apontei para os preguinhos de todos os lados]. Todos os lados deste triângulo, apanham cinco preguinhos, mas …e a Paula e a Cláudia, normalmente era mais elas as duas, diziam logo assim, vocês lembram-se? O que é que vocês diziam?

Patrícia e Clara – Que tinha os lados todos iguais.

Prof. – Elas falaram de um grupo diferente… este é diferente. Tem os três lados iguais. Então o que é que elas fizeram? E vocês também faziam?

Alguns alunos – Medir…

(…)

Maria – Acho que aquele é maior do que aquele…

Contudo, decidi verificar se os alunos se recordavam de um trabalho que havia sido feito em torno das simetrias de um triângulo equilátero.

Prof. – Nós podemos representar triângulos sem ser no geoplano… de várias maneiras. E de facto com o geoplano é dificil… tem que ver com o tamanho com as medidas, não dá para fazermos… poderiam tentar fazer, mas não iriam conseguir. Ora bem… nós já falamos numa outra situação sobre ele, mas não foi no geoplano.

Cláudia – Eu ia dizer o nome…

Prof. – Já conheces o triângulo com os lados todos iguais?

Rute – Ah sim, a professora já nos disse…

Prof,. – Então ?

Cláudia – Triângulo equilátero….

Prof. – É esse… é o triangulo equilátero. Nós já falámos deles, quando falamos dos eixos de simetria, não é? Nós utilizamos um triângulo equilátero… que tem os três lados iguais.

Para que todos os alunos recordassem esse trabalho com as simetrias, fui buscar o cartaz que estava afixado na sala, e, no qual estavam representados os eixcos de simetria do triângulo equilátero.

Na continuação da discussão, optei por levar os alunos a pensar sobre um dos triângulos desenhados. De acordo com a minha experiência profissional, achei oportuno analisar com todos os alunos o triângulo muito "fininho (figura 21), por considerar que se trata de um dos triângulos onde, normalmente, apresentam mais dúvidas.

> Prof. – De facto, este triângulo… Será que esta figura também é um triangulo?
>
> Alunos – Sim…
>
> Prof. – Têm a certeza… olhem não tem aquela coisa… vocês falavam sempre numa característica… tem um vértice apontado para cima… olhem nenhum deles está direitinho a apontar para cima…
>
> Cláudia – Mas tem três lados…
>
> Hugo – E três vértices… e por isso três vértices.
>
> Magda – Nem todas as figuras têm …[faz o gesto como se se estivessem a referir ao vértice apontado para cima].

Neste diálogo a aluna Magda demonstra ter compreendido que os triângulos não têm sempre um vértice a apontar para cima, como achava no início desta investigação. Através da experimentação, da análise e da discussão em torno das características dos triângulos os alunos tiveram oportunidade de evoluir e alargar os seus conhecimentos. Por exemplo, na primeira parte desta ivestigação, os alunos consideraram como critério as questões relacionadas com o tamanho dos triângulos, considerando que um triângulo, mesmo que igual, se fosse maior ou mais pequeno, era uma bandeira triangular diferente. No entanto, na segunda parte da tarefa quando tiveram de arrumar os triângulos em grupinhos, os alunos colocaram esse critério de lado, considerando que o tamanho não altera a figura, nem as suas características.

> Prof. – Agora, achei piada que nenhum de vocês foi pelas questões do tamanho…podiam ter arranjado… de facto dentro desse dos lados, vocês têm figuras com tamanhos diferentes. Será que o tamanho, o facto… se eu agora tentasse fazer uma igual a esta mas mais pequena… 8desenhei um triangulo retângulo mais pequeno]… igual não, parecida. É parecida com esta…

Clara – só que é mais pequeno…

Prof. – E o facto de ser mais pequena, vai mudar esta característica? (referindo-se aos três lados de comprimentos diferentes)

Alunos – Não…

Por outro lado, inicialmente as questões relacionadas com a posição da figura suscitaram muitas dúvidas, no entanto parece ter ficado bastante mais claro para os alunos que o facto de uma figura mudar de posição não vai alterar as suas características.

Prof. – De facto o tamanho não muda esta característica que vocês definiram…agora se por exemplo eu pegasse no meu geoplano e fizesse isto… (rodei o geplano e coloquei-o na vertical).

Hugo – Era igual.

Outros alunos- É igual… igualzinho.

Prof. – O que é que não muda a figura?

Alunos – A posição…

Síntese – Bandeiras Triangulares

Ao longo deste trabalho, Bandeiras Triangulares, os alunos foram confrontados com duas grandes tarefas. Por um lado, tiveram de descobrir triangulos diferentes, o que exigia que já fossem capazes de identificar as características e propriedades dos triângulos. Por outro lado, foi-lhe solicitado que procurassem classificar os triângulos representados tendo em conta as suas caracteríticas.

Na primeira tarefa, os alunos revelaram poucas dificuldades, o que poderá estar relacionado com os conhecimentos adquiridos anteriormente, onde os alunos foram confrontados com diversos exemplos e não exemplos de triângulos. Após discussão em pequeno e grande grupo acerca desses exemplos e não exemplos, os alunos conseguiram adquirir as noções sobre as características e propriedades e conceito de triângulo. Neste trabalho, os alunos facilmente desenharam no seu geoplano triângulos diferentes, mas surgiram em alguns casos, dúvidas relativas à posição, e à diferenciação entre triângulos visualmente semelhantes. Aqui foi fundamental fornecer aos alunos um fio de medição de forma a poderem verificar a medida do comprimento dos lados dos triângulos. Deste modo, puderam colocar em prática a noção de comprimento que já haviam adquirido no seu dia a dia. A questão da posição levou-os a compreender que triângulos congruentes, não deixam de o ser se estiverem em posições diferentes.

Na segunda tarefa, e após os alunos compreenderem a diferença entre congruente e semelhante (mesmo sem contactar com estes nomes), os alunos facilmente conseguiram classificar de forma simples os triângulos. Ambos os grupos utilizaram como critério o comprimento dos lados, surgindo naturalmente, mas sem que fossem atribuidos nomes, o grupo dos triângulos com os três lados com comprimentos diferentes e o grupo com dois lados com o mesmo comprimento e um diferente. O grupo dos triângulos com os lados todos iguais, surgiu na discussão, mas naturalmente não foi possível os alunos descobrirem este grupo, pois tal não é possivel desenhar no geoplano.

Os alunos estiverem sempre muito disponíveis para a realizaçao desta tarefa, o que facilitou as suas descobertas. De forma natural os alunos puderam verificar e compreender que existem triângulos diferentes, mas que por serem congruentes entre si, podem ser agrupados em determinados grupos.

Ao longo desta atividade surgiram diversos momentos que eu me sentia pouco confiante no conhecimento que os alunos já possuiam, sentindo necessidade de ser demasiado informativa e até controladora. Este facto, acabou por dar pouco espaço para que os alunos pudessem eles próprios chegar as suas próprias conclusões.

1.2. Bandeiras como Quadriláteros

Na sequência da tarefa sobre Bandeiras Triangulares, propus aos alunos uma tarefa sobre quadriláteros. No estudo prévio os alunos identificaram as características, reconheceram as semelhanças e diferenças entre quadriláteros e em especial entre quadrados e retângulos. Contudo não ficou claro para todos os alunos o porquê do quadrado ser considerado um caso especial do retângulo (anexo 16). Também ao longo desse trabalho surgiu o conceito de ângulo, mas penso que tal não foi apreendido por todos os alunos, pelo que este estudo pretendeu levar os alunos a compreender melhor este conceito, e deste modo analisar e classificar hierarquicamente os quadriláteros a partir da análise dos seus ângulos internos.

Esta tarefa pretendeu, tendo em conta o conhecimento anterior dos alunos, levá-los a representar quadriláteros diferentes e a reconhecer características semelhantes, conduzindo-os de forma natural, a uma primeira classificação de quadriláteros. Além disso, manteve-se como objetivo principal a necessidade de levar os alunos a compreender e assumir o quadrado como um caso especial do retângulo.

- Bandeiras que são Quadriláteros -

" A Professora Joana que fazer, novamente, uma bandeira de boas vindas, mas desta vez para colocar na porta de entrada da sua sala de aula. Ela sabe que pretende fazer uma bandeira com a forma de um quadrilátero, mas não sabe que tipo de quadriláteros pretende. A Professora Joana precisa de encontrar um quadrilátero de que goste."

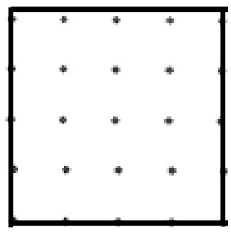
Procura ajudar, em conjunto com os teus colegas do grupo, a Professora Joana a criar o maior número possível de bandeiras diferentes com a forma de um quadrilátero.

2. Tarefa B – Bandeiras que são Quadriláteros

Observa a seguinte folha de papel ponteado e a bandeira com a forma de um quadrilátero que te é muito familiar.

Quantas **bandeiras diferentes**, com a forma de um **quadrilátero** consegues encontrar?

Utiliza o teu geoplano e depois representa as figuras na folha de papel ponteado que te foi entregue.



Baseado em Britton, B. Candy Conundrum Problem (2005) Teaching Children Mathematics.

Figura 24– Tarefa Bandeiras como Quadriláteros

Os alunos trabalharam sempre em grupos de quatro alunos cada, mantendo-se a organização já existente na dinâmica de sala de aula. Estavam entusiasmados, disponíveis e curiosos perante a tarefa apresentada. Na proposta, foi-lhes solicitado que tentassem descobrir o maior número de Bandeiras que são Quadriláteros diferentes.

Os objetivos principais da tarefa foram: distinguir entre figuras iguais e diferentes, reconhecer e compreender que o tamanho e posição de uma determinada figura não alteram as suas propriedades, desenvolver a capacidade de discriminação visual de determinadas figuras, nomeadamente entre figuras diferentes, fazer uma classificação, de forma simples, arrumando as figuras desenhadas em sub grupos, desenvolver a capacidade de reprodução de figuras desenhadas no geoplano em papel ponteado, compreender que o quadrado é um caso especial do retângulo.

A questão relacionada com a aceitação do quadrado como um caso especial do retângulo, tal como referido, foi abordada no estudo exploratório realizado. No entanto, tal não ficou claro para todos os alunos e foi necessário levá-los a refletir sobre o mesmo ao longo desta tarefa. No final da tarefa, penso que ficou bastante mais claro para os alunos que o quadrado é apenas um retângulo especial que tem os lados todos iguais.

Novamente irei fazer a descrição da tarefa, por grupos, Grupo A e Grupo B, e discussão coletiva.

Grupo A

O grupo começa por desenhar dois retângulos, sendo o segundo, mais estreito que o anterior. Decidi questioná-los sobre a diferença entre as duas figuras, de forma a compreender o critério que utilizaram para representar quadriláteros diferentes.

> Prof- Porque é que essa figura é diferente da anterior? A figura que desenharam antes qual era?
>
> Alunos – Retângulo.
>
> Prof – E a que desenharam agora?
>
> Alunos – Retângulo.
>
> Prof – O que é que tem de diferente em relação à outra?
>
> Magda- [apontando para o primeiro retângulo] - Porque esta figura é mais larga que esta.
>
> Prof – E o facto de ser mais larga, para vocês é diferente?

Os alunos consideraram que o tamanho não era algo a terem em conta na diferenciação entre quadriláteros. Para estes alunos sendo um retângulo, mas com tamanho diferente é o suficiente para que seja uma figura diferente, os alunos deste modo, compreenderam que as duas figuras desenhadas apresentam as mesmas características, apesar de terem tamanhos diferentes. Para terem a certeza contaram os pregos dos lados da figura. Posteriormente, um dos alunos procura utilizar o cantinho da folha de cartolina entregue no início do trabalho, para "medir" os ângulos internos dos quadriláteros e verificar se eram maiores , iguais ou mais pequenos que o ângulo reto. Apoiando-se, os alunos do grupo chegam à conclusão de que o retângulo tem os quatro ângulos iguais e que independentemente do tamanho, os ângulos continuam a ser iguais. Ao contrário da tarefa anterior, aqui os alunos recorreram à medição dos ângulos internos da figura.

Em discussão com os alunos deste grupo, estes demonstraram não reconhecer o losango como um quadrado.

Prof. – Então e que figura é essa Magda? Já a conheces?

Magda – Losango.

Prof.- Não é um quadrado?

Magda – É…

Prof. – É um quadrado ou um losango? Achas que é igual a um quadrado? A Cláudia diz que não.

Prof. – Porque é que dizes que isso é um quadrado? Justifica-me que isso é um quadrado. [A aluna roda o geoplano e começa a medir os ângulos internos].

Prof. - São iguais? (questionando acerca da medida dos ângulos).

Magda – Não.

A meu pedido os alunos desenharam um quadrado e mediram os seus ângulos internos, verificando facilmente que os quatro ângulos são iguais.

Prof. – Então acham que esta figura é igual a esta? [Apontei para o losango e para o quadrado].

Alunos – Não…

Prof. – O que é que têm de diferente? Será que os ângulos são todos diferentes?

Cláudia – São dois iguais e dois diferentes.

Nesta situação os alunos foram induzidos, por mim, para não considerar o quadrado como losango. Levei-os a ver as diferenças, deixando de lado as semelhanças. Mais à frente, os alunos do grupo desenharam um "papagaio" e, novamente, pelo facto de ser uma figura que não havia surgido nem em situação de sala de aula, nem nas tarefas anteriormente realizadas, os alunos não conheciam os seus atributos, nem como é designada.

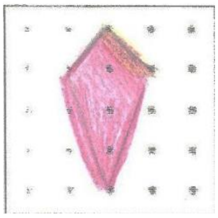


Figura 25 – papagaio

Prof. – Então e que figura é esta? Será que é um quadrado? Será que é um losango? Tem os ângulos todos iguais?

Magda – [apontando para a figura e referindo-se aos lados] Estes dois são iguais e estes dois são iguais.

Solicitei que os alunos verificassem os ângulos internos da figura, o que os levou a chegar à conclusão de que um ângulo era igual ao do quadrado, e neste caso ao medidor de ângulos que lhes havia sido entregue, ao passo que, os outros dois eram maiores e um era mais pequeno. Não achei essencial que os alunos conhecessem o nome da figura, mas antes que compreendessem os seus atributos.

Os alunos deste grupo demonstraram que sabiam o que é um quadrilátero pois em diversas situações representaram figuras que não correspondiam aos protótipos a que estão habituados. Na figura seguinte, os alunos com a minha ajuda começaram a "medir" os ângulos internos da figura, e compararam a amplitude dos ângulos a partir do medir de ângulos que corresponde a 90º do ângulo reto.

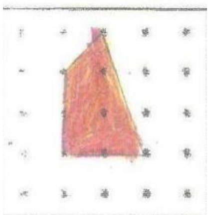


Figura 26 – Quadrilátero – Não Trapézio

Prof. – Como é que é esse ângulo em relação à folha que estão a utilizar? Não está a bater na figura…

Nesta primeira parte da tarefa este grupo facilmente desenhou quadriláteros, não revelando dúvidas perante o que é ou não é um quadrilátero. Por outro lado, a partir do medidor de ângulos que lhes havia sido entregue com a amplitude de 90º, tal como o ângulo reto. Descobriram que existiam, nos quadriláteros desenhados, ângulos internos maiores, mais pequenos e iguais ao ângulo reto. Contudo, não considerei essencial que os alunos soubessem os nomes dos ângulos maiores e mais pequenos que o ângulo reto. Por outro lado, surge uma discussão em torno do losango e do quadrado. Apesar de em ação ter considerado que não era oportuno levar os alunos a compreender a inclusão do quadrado nos losangos, penso que tal, teria sido facilmente compreendido se os alunos tivessem comparado a medida do comprimento dos lados das figuras. Teriam assim compreendido que os lados do losango são todos iguais tais como os do quadrado.

Grupo B

Apesar de na tarefa das Bandeiras Triangulares, ter sido bastante discutida a questão relacionada com a posição das figuras, alguns alunos deste grupo revelaram no início deste trabalho que ainda não assumiram essa característica como regra geral para qualquer figura geométrica. Ao analisar um quadrado numa posição diferente da tradicional, os alunos discutem acerca da igualdade ou não perante um quadrado numa posição habitual, questionando-se ao mesmo tempo se seria um losango.

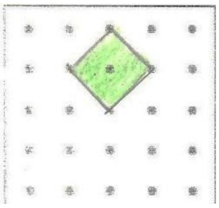


Figura 27 – Quadrado "inclinado"

Cátia – Não é igual ao da Maria? [A aluna Maria desenhou um quadrado pequeno, na posição tradicional □].

Hugo – Não…. então vamos medir.

[Voltam a representar no geoplano o quadrado anterior. Começam a "medir" o comprimento dos lados com a ajuda de um fio de medição].

Prof. – Esta que vocês desenharam primeiro… que figura é para vocês?

Alunos – Quadrado.

Prof. – A Cátia desenhou esta (a segunda) e diz que acha que é um losango. A Rute diz que acha que não.

Rute – Eu acho que é um quadrado.

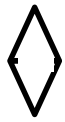
Prof. – Porquê?

[A aluna pega no geoplano e roda-o…] Rute - Não implica a posição da figura, mas só que se for assim (rodando novamente) já se vê melhor.

Ao contrário dos seus colegas, esta aluna revela que já compreendeu que o facto de uma figura mudar de posição, não leva à alteração das suas propriedades. Contudo, ao mesmo tempo está aqui em causa o facto de o quadrado ser um losango, pelo que os alunos demonstram que ainda não reconhecem o quadrado como um losango, por ter os lados todos iguais.

Maria – Eu acho que sim.

Prof. – Mas porque é que achas que sim? O que é que o losango… tem de diferente em relação ao quadrado? Não sei, estou-vos a perguntar?

Rute - Eu acho que é. [Desenha um losango no geoplano na posição habitual]  O losango é assim.

Prof. – Então e o que isso tem de diferente em relação ao quadrado.

Hugo - A rotação...

Rute – Mas se tu virares, não é nenhum quadrado.

Prof. – O que é que eu posso ver… o que é que o quadrado tem de igual?

Rute- [apontando para o losango] – Isto não tem os ângulos todos iguais.

Para estes alunos como o quadrado não tem os ângulos internos iguais aos do losango, não pode ser um losango. Poderia ter levado os alunos a analisar o comprimento dos lados da figura e deste modo, teriam compreendido a inclusão do quadrado no losango.

Em diversas situações surgiram quadriláteros com os quais os alunos do grupo ainda não haviam contactado, nomeadamente o trapézio, neste caso o trapézio isósceles (figura 28), aquele que surge mais vezes nos manuais escolares.

Figura 28 – Trapézio isósceles

Prof. - Vocês já conhecem esta figura, não conhecem?

Rute – É um quadrilátero.

Prof. – Está bem. E quais são as características desta figura?

Alunos – Tem quatro lados….

Hugo – E por isso quatro vértices.

Prof. – Se é um quadrilátero tem de ter quatro lados… essa característica não é muito relevante…

Os alunos deste grupo parecem estar muito presos às características gerais dos quadriláteros, quatro lados e quatro vértices, ao mesmo tempo também não manifestaram interesse em saber o nome da mesma. Enquanto discutiam acerca do trapézio isósceles, um aluno começou autonomamente a "medir" os ângulos internos do mesmo. Ao "medir" prontamente os ângulos internos de uma figura, este aluno revela que compreendeu que podemos analisar os ângulos de uma figura para a conhecermos melhor. A partir do medidor de ângulos retos inicialmente entregue, os alunos puderam constatar que há figuras que têm ângulos maiores e outras mais pequenos que o ângulo reto.

No entanto, na continuidade do trabalho, os alunos deste grupo discutiram entre si sobre um retângulo, considerei oportuno questioná-los acerca dos atributos de um retângulo.

Prof. - Que figura é esta que vocês desenharam?

Alunos- É um retângulo.

Prof.- É um retângulo ou é um quadrado?

Alunos – É um retângulo.

Prof. - O que é que tem um retângulo?

Hugo – Quatro ângulos iguais…

Prof.- Sim, tem os quatro ângulos iguais. E mais?

Hugo – Tem quatro lados…

Maris- Estes dois lados são iguais e estes dois são iguais (apontando).

Aqui os alunos reconhecem os atributos do retângulo, e mais à frente ao analisarem os atributos de um quadrado reconhecem que pode ser incluído como retângulo simplesmente porque tem os ângulos iguais aos do retângulo.

Prof. – Portanto, tem os ângulos iguais ao do….

Alunos – Retângulo.

No final da primeira parte da tarefa, que precedeu um intervalo, os alunos de ambos os grupos recorreram essencialmente ao medidor de ângulos retos para diferenciar entre as figuras desenhadas. Por vezes, apresentavam algumas dúvidas na utilização correta do medidor, no entanto, com a minha ajuda, facilmente conseguiram constatar que existiam ângulos internos diferentes, ou iguais aos do medidor de ângulos.

Em relação à inclusão do quadrado como um retângulo especial, penso que os alunos compreenderam melhor, agora, a partir da "medição" dos ângulos internos de retângulos e quadrados, que pelo facto de ter os quatro ângulos iguais e iguais aos do retângulo, faz do quadrado, um retângulo. No entanto, considero ao mesmo tempo que apesar de ter sido discutida a inclusão do quadrado como um losango, não me parece que os alunos a tenham compreendido nesta primeira parte da tarefa. Eu própria, em algumas situações incitei os alunos a considerar o quadrado uma figura completamente diferente do losango, não tendo surgido a comparação entre a medida do comprimento dos lados de ambas as figuras.

Na segunda parte desta tarefa, no decorrer do mesmo dia, mas após intervalo, solicitei aos alunos que procurassem arrumar os quadriláteros desenhados em pequenos grupos de acordo com um critério definidos pelos alunos, tal como na tarefa anterior, atribuindo para cada grupo uma cor diferente.

Prof. – Os quadriláteros que vocês desenharam são todos iguais?

Alunos – Não.

Prof. – Pois por isso é que os desenharam… agora, será que posso fazer grupinhos, tendo em conta as características. Em grupo, vão pensar em que característica é que nós nos vamos basear. Vocês analisaram dois tipos de coisas… o que é que vocês analisaram? Quando estavam a comparar as figuras para verem se eram iguais ou não, o que é que viam?

Cláudia – O comprimento dos lados.

Prof. - Por um lado, viam em relação ao comprimento dos lados, mas também viam outra coisa…

Alguns alunos – Os ângulos.

Prof. – Têm de pensar bem em grupo, o que é para vocês, mais significativo. Se é a parte do comprimento dos lados, e então vamos por ai, ou será que vamos ver pelos ângulos e depois agrupar pelas características dos ângulos. É isso que têm de discutir em grupo e depois de chegarem à decisão, vão orientar… e vão pintar.

Maria - Mas tem de ser da mesma cor?

Prof. – Sim, convém que seja a mesma cor.

[Os alunos começam a discussão em pequeno grupo para chegarem a um acordo].

Grupo A

Inicialmente este grupo de alunos, provavelmente porque na tarefa das Bandeiras Triangulares assim o fizeram, definiram, como critério, o comprimento dos lados. No entanto, e apesar de um dos objetivos desta tarefa ser a "arrumação" dos quadriláteros" em grupos de acordo com a amplitude dos ângulos internos, poderá ter sido um pouco forçado pela minha parte, a escolha do critério relacionado com a medida de amplitude dos ângulos internos dos quadriláteros, principalmente para que os alunos compreendessem a inclusão do quadrado como um retângulo especial.

Prof. – Então, mas se forem por aquilo que estão a dizer, quando forem arrumar o quadrado, já o vão colocar num grupinho diferente (em relação ao retângulo). Têm de pensar bem…Se vão escolher esse critério, por exemplo, em relação ao quadrado… o que é que sabem… não sabem nada? O quadrado para vocês é um retângulo?

Alunos – Sim.

Prof.- Porquê?

Alunos – Porque tem os ângulos todos iguais.

Cláudia – É um retângulo especial.

[Após efetuarem a "medição" dos ângulos internos com o medidor de ângulos…] Prof - Será que há mais figuras com os ângulos iguais? Serão do mesmo grupinho?

Neste diálogo, os alunos demonstram que consideram o quadrado como um retângulo, no entanto, só uma das alunas parece compreender o porquê do quadrado ser um caso especial do retângulo. Mais à frente, uma das alunas do grupo considera que um retângulo por ser mais estreito não deve fazer parte do mesmo grupo que um retângulo mais largo. Com a ajuda dos colegas do grupo, a aluna volta a “medir” a amplitude dos ângulos internos da figura e constata que é igual à do retângulo maior.

Ao analisarem outros quadriláteros, nomeadamente o losango, depararam-se com a dúvida se este quadrilátero devia ou não fazer parte do grupo do papagaio. Em discussão com os alunos e ajudando-os, “medimos” os ângulos internos de ambos os quadriláteros. Depois de “medir”, os alunos verificaram que o papagaio desenhado tem um ângulo igual ao do papel (anexo17), ou seja reto, dois maiores e um é mais pequeno, ao contrário dos ângulos do losango que são iguais dois a dois.

A certa altura, senti que os alunos de ambos os grupos estavam com dificuldades em utilizar corretamente o medidor de ângulos, por ser demasiado grande em relação às folhas de papel ponteado e geoplano. Decidi encurtá-lo, ficando mais pequeno, e desta forma mais semelhante ao “cantinho” do geoplano.

Na continuidade do trabalho de “arrumação dos quadriláteros, uma aluna deste grupo demonstra que está familiarizada com as características dos ângulos do retângulo, reconhecendo que são todos iguais.

Prof. O que é que vocês já sabem sobre o retângulo?

Cláudia – tem os ângulos todos iguais.

Grupo B

Este grupo de alunos, prontamente começou a analisar os seus quadriláteros tendo em conta a amplitude dos ângulos internos das figuras. Apesar de alguns alunos deste grupo terem demonstrado anteriormente que compreenderam a inclusão do quadrado nos retângulos.

Prof. – … e essa se é um quadrado, o que é que tem?

Maria – Tem quatro ângulos iguais… (solicitei de seguida que a aluna medisse os ângulos internos da figura).

Prof. Se tem os quatro ângulos iguais, por isso é que faz parte da família do retângulo, não é? Por isso é que é considerado um retângulo.

Rute – Tem os ângulos todos iguais.

Prof. – Também tem os ângulos todos iguais.

A minha intervenção levou a que entre algumas alunas existisse um diálogo semelhante. Pelo que demonstraram que compreenderam o que foi feito anteriormente. Ao analisar outro quadrado, ainda, uma aluna deste grupo não está certa sobre a que grupo deve pertencer o quadrado.

Rute – Cátia, achas que … se sabes como é que são os ângulos nesta figura?

Maria – Achas que são todos iguais? Todos diferentes? Dois são iguais, dois são diferentes?

Prof. – Se calhar convinha que ela desenhasse e verificasse no geoplano.

Rute – Como é que são os ângulos?

Cátia – São todos iguais.

Os alunos deste grupo centraram-se essencialmente na análise dos seus quadriláteros a partir da amplitude dos ângulos internos das figuras, sejam trapézios, quadrados, retângulos ou outras. Não demonstraram interesse em saber o nome de quadriláteros que não o quadrado, losango e retângulo.

Discussão Coletiva

Neste última parte da tarefa, optei por deixar os alunos em, cada um dos grupos, agrupar os seus quadriláteros, o mais autonomamente possível. No final da tarefa realizei com os alunos uma sistematização em coletivo de algumas das descobertas mais significativas de ambos os grupos.

Prof.- Então vamos lá parar com o que estavam a fazer. Vocês estabeleceram aqui um critério. Neste tipo de figuras nós tanto podemos usar o critério dos ângulos como o dos lados. De facto, vocês, os dois grupos escolheram o mesmo. Foi ir pelos ângulos. (registei no quadro… utilizei um ângulo reto feito num cartão maior). Olhando para esta figura, que vocês já tinham (figura inicial), é um quadrado… já tínhamos visto que o ângulo de um quadrado, é um cantinho de uma folha… uma folha normal… olhem lá para a vossa folha, vejam lá se não faz este cantinho?

Alunos – Faz.

Prof. – Ora bem, este tipo de cantinho, este ângulo assim chama-se um ângulo reto. Tem um nome, chama-se ângulo reto [registei no quadro]. Este tipo de ângulo que é assim direitinho [demonstrei] faz este efeito, como o canto da folha, é um ângulo reto. O quadrado [demonstrei], tem quatro ângulos retos… um, dois, três, quatro… são todos iguais não é? Um dos grupinhos que vocês fizeram… qual foi o critério? Foi figuras …

Alunos – Com os ângulos todos iguais.

Prof. – [Registei no quadro] – Portanto figuras com os 4 ângulos iguais. Portanto, que tipo de figuras é que surgiram? Que vocês conhecem de nome?

Alunos – Retângulo.

Prof. – Muito bem… surgiu o retângulo…

Alunos – E o quadrado…

Prof. – Vou desenhar ali com outra cor… vários retângulos… fizeram retângulos diferentes pelo tamanho, certo? [desenhei no geoplano grande que estava no quadro um dos retângulos maiores]. Estas vocês já conheciam… temos a azul… aliás a vermelho o retângulo, vocês desenharam várias. (escrevi a palavra no quadro) Se vocês repararem na própria palavra retângulo não vêm nada de engraçado?

Cláudia – Ângulo reto.

Alunos – Reto… ângulo.

Prof. – Reto e ângulo. O retângulo, portanto, tal como também o nome dele indica, tem os quatro ângulos retos… vamos lá confirmar [utilizei o meu canto de cartão. Medi para os alunos verem]. Ali o cantinho…

Alunos – Sim…

Prof. – Então, o retângulo é aquela figura geométrica, que para além daquela característica que vocês já falaram, da questão dos lados, ser dois a dois iguais… retângulo porque tem a ver com os quatro ângulos retos. Logo esta figura azul que vocês pintaram da mesma cor, faz parte da mesma família. Não foi? Pintaram ou não pintaram… Como é que se chama esta azul?

Alunos – Quadrado.

Prof. – [Registei no quadro] – São os quadrados não é? O que é que os quadrados têm para poderem pertencer aquela família?

Alunos – Os ângulos são todos iguais.

Prof. – E como é que são os ângulos?

Alunos – Retos.

Prof. – Por isso é que se diz que o quadrado é um retângulo, mas é um retângulo especial. É especial porquê? Porque tem os lados…

Alunos – Todos iguais.

Fica claro nestes diálogos que os alunos compreenderam a inclusão do quadrado nos retângulos. No entanto, a discussão foi mediada essencialmente por mim que fui questionando os alunos. Optei nesta discussão por introduzir o nome do ângulo reto, associando-o ao retângulo. Considero que os alunos compreenderam esta associação. Continuando a discussão analisei com os alunos outro grupo de quadriláteros, aqueles com os ângulos iguais dois a dois.

Prof. – Mas tendo em conta a característica dos quatro ângulos retos, não é? O quadrado também tem os quatro ângulos retos, portanto, pertence aos retângulos, correto? Agora, vocês descobriram outro grupo, para além deste com os ângulos todos iguais. Qual foi o outro grupo?

Alunos – Os ângulos iguais dois a dois.

Prof. – Muito bem. [registei no quadro]. Ângulos iguais dois a dois. Não é? [apaguei as figuras anteriores que estavam representadas no geoplano afixado no quadro]. Por exemplo, acho que todos os grupos… exato… a começar por… que inicialmente diziam que era um retângulo, quero dizer um quadrado. [desenha o losango]. Inicialmente estou eu a dizer. Não é? Todos têm está certo? Todos têm esta ou não?

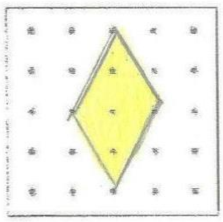


Figura 29 – losango

Alunos – Sim.

Prof. – E esta vocês pintaram com a cor do grupo dos ângulos iguais dois a dois… agora será que os ângulos são retos? Agora que já aprendemos este nome, este tipo de ângulo assim [apontando]… é reto.

Aluno – Sim…

Nesta situação, levei os alunos a diferenciarem os quadriláteros tendo em conta a amplitude dos ângulos internos. No entanto, e considerando que o losango poderá ser considerado um quadrado pelo facto de ter os lados todos iguais, não permiti que os alunos pudessem compreender esta associação. Nem mesmo, os encaminhei para analisarem e até compararem o quadrado com o losango. Considerei na altura que seria talvez, demasiado confuso para os alunos compreenderem que o quadrado é também um losango, e ao mesmo tempo um retângulo. No entanto, mais à frente, levei os alunos a analisarem o losango pela perspetiva do comprimento dos lados.

Prof. – [Registei no quadro]. Então, nestas figuras com os ângulos iguais dois a dois, vocês têm dois ângulos mais pequenos que o ângulo reto e dois ângulos como?

Alunos – Maiores que o ângulo reto.

Prof. – Ok. Esta figura, além dos ângulos, ela… vocês, alguns de vocês já disseram como é que ela se chamava, já a conhecem.

Alunos – Losango.

Prof.- Losango muito bem [registei no quadro]. O losango tem de facto os ângulos dois a dois iguais, mas não são iguais aos ângulos do retângulo e do quadrado, mas se nós quisermos olhar para os lados, o que é que ele tem também… como é que são os lados entre eles?

Rute – São todos iguais.

Prof. – Vamos confirmar [utilizei o fio para medir o comprimento dos lados]. Portanto, o losango o que é que tem de especial? Tem dois ângulos mais pequenos que o ângulo reto, dois ângulos maiores que o ângulo reto e tem os lados todos…

Maria – Iguais.

Prof. – Por isso é que vocês têm tendência para dizer que parece um quadrado, porque também … o quadrado tem os lados todos iguais. Mas depois os ângulos não são todos iguais. Portanto, não é um quadrado. Ou não é igual a um quadrado mesmo… isto considerando os ângulos…

A minha intervenção aqui induziu os alunos em erro. Refletindo sobre o que aconteceu, considero que teria feito todo o sentido levar os alunos a compreender o porquê do quadrado ser considerado um losango. Senti insegurança e fiquei com receio que os alunos não compreendessem e ficassem confusos em relação ao que já sabiam. Ou seja, de certo modo, subjuguei os alunos e considerei que sabiam menos do que provavelmente sabiam.

Ao continuar a discussão com os alunos, analisámos outras figuras como é o caso do trapézio isósceles, que tal como já referi anteriormente, tendo em conta a minha experiência profissional, é aquele que surge mais vezes nos manuais escolares.

Prof. – É mais aberto. Portanto é maior que o ângulo reto… agora… isto pelos ângulos, pertence ao mesmo grupo que o losango. Agora será que é mesmo um losango? O que é que o losango tem para além dos ângulos?...

Alunos – Os lados todos iguais.

Prof. – [apontei para o trapézio] Este tem os lados todos iguais?

Alunos – Não…

Rute – Tem os lados iguais dois a dois.

Prof. – [medi para os alunos verem o comprimento dos lados do trapézio, utilizando o fio de medição] Qual é que dizes que é igual a este? [falando para uma aluna] é o de cima? Este é mais pequeno.

Rute – Eu não tou a dizer que este…

Prof. – (Apontando). Estes dois é que são iguais.

Rute – Sim…

Prof. – Não é Hugo?

Hugo – Sim.

Os trapézios foram incluídos, por parte dos alunos, no mesmo grupo que o losango tendo em conta os ângulos internos (anexos 17 e 18). Contudo, nesta discussão não ficou muito claro, a que grupo deve ser associado o trapézio, até porque não falei com os alunos acerca da classificação de quadriláteros na qual podem ser separados os paralelogramos, trapézios ou não trapézios. Seriam mais palavras… no entanto, talvez tivesse feito sentido, pois poder-se-ia ter feito outra arrumação que não a que foi feita. Ao discutir com os alunos acerca do papagaio desenhado, procurei levá-los a compreender porque não poderia fazer parte do mesmo grupo que o losango.

Prof. – Parece um losango, assim olhando de repente. Mas não é. Este é o chamado papagaio. Regista o nome. O papagaio também tem outras características em relação aos ângulos. Vocês não pintaram desta cor (referindo-me à cor do trapézio e do losango).Não é? Porquê? Porque ele de facto não tem dois a dois iguais. [medi para os alunos verem]. Este ângulo aqui [medi o ângulo reto] é igual não é?

Rute – Ângulo reto.

Prof. – Então se é igual a este cantinho da folha como é que se chama?

Alunos – Ângulo reto.

Prof. – Quando é igual a isto (referindo-me à folha) encaixa aqui perfeitamente. Agora vamos ver este cantinho…é maior ou mais pequeno que o ângulo reto?

Alunos – maior.

Prof. – Hugo, vamos ver este cá debaixo.

Hugo – Mais pequeno…

Prof. – É mais fechadinho, muito mais para dentro. E este… Maria?

Maria – Maior.

Prof.- Portanto há aqui dois que são iguais. Este dois são iguais [apontando]. – volta a medir os ângulos para confirmarem…- Muito bem.

Surge um outro grupo de quadriláteros, os que têm apenas um ângulo reto, dois com uma amplitude maior e um menor.

Síntese – Bandeiras como Quadriláteros

Terminando a discussão com os alunos acerca dos quadriláteros desenhados surgiram, quadrados, retângulos, losangos, trapézios e paralelogramos.

Sendo um dos objetivos desta tarefa, levar a que os alunos compreendessem a inclusão do quadrado como um retângulo especial, penso que este foi atingido e que esta foi uma das situações mais discutida e que me pareceu, os alunos melhor compreenderam. Nas tarefas anteriormente realizadas, à volta dos quadriláteros, penso que exerceram alguma influência para que os alunos compreendessem esta associação. Os alunos estavam mais despertos e "abertos" para esta análise, pelo que apesar de inicialmente, alguns alunos, ainda se sentirem inseguros perante esta questão, no final, os alunos evoluíram e prontamente afirmavam que pelo facto de ter os ângulos todos iguais e iguais aos do retângulo o quadrado é também um retângulo. Considero que ao compreenderem isto, muito provavelmente os alunos estão num nível de desenvolvimento superior ao visual (na teoria dos van Hiele), o nível de análise seja o mais adequado.

No que toca à análise do losango, penso que poderia ter levado os alunos a compreenderem a inclusão do quadrado nesse grupo, mas considerei, no momento, em ação, que os alunos poderiam ficar confusos em relação ao que já sabiam sobre o quadrado e neste caso do retângulo.

O trapézio isósceles foi também uma figura analisada, e pelo facto de ter os ângulos iguais dois a dois, e neste caso, nenhum ângulo reto, tal como o losango, foi incluído nesse grupo. Fiquei na dúvida se faria sentido que os alunos compreendessem que os quadriláteros poderão ser classificados em trapézios e não trapézios…e por sua vez os trapézios, em paralelogramos e não paralelogramos. Além disso, em ambos os grupos surgiram outros tipos de trapézios, mas não indiquei aos alunos que também se enquadravam nesse grupo. Considerei que esse não era um dos objetivos desta investigação.

Por sua vez o papagaio desenhado ficou num grupo distinto, tendo em conta a amplitude diversa dos ângulos internos, e por só ter um ângulo reto. Este é um quadrilátero que não apresenta uma classificação simples, pelo que foi incluído no grupo dos quadriláteros com um ou dois ângulos retos.

No que diz respeito especificamente aos ângulos, neste trabalho com os alunos surgiu apenas a palavra ângulo reto. Este correspondeu ao ângulo do medidor de ângulos que foi entregue aos alunos. Foi bastante curioso que apesar de terem surgido outros ângulos, maiores e mais pequenos que o ângulo reto, os alunos não demonstraram interesse em saber o nome deles. No entanto, foi a partir deste medidor de ângulos que os alunos agruparam as suas figuras e apesar de intuitivamente, acabaram por surgir três tipos de quadriláteros: quatro ângulos retos, um ou dois ângulos retos e sem ângulos retos.

Sintetizando, nesta Experiência de Ensino, foi proposta aos alunos uma atividade investigativa os alunos, na qual puderam através das suas próprias descobertas,alargar os seus conhecimentos, descobrir que existem triângulos e quadriláteros que apesar de visualmente semelhantes não são iguais, pois têm características/propriedades diferentes nomeadamente a medida do comprimento dos lados diferente. No entanto, ao partilharem as suas descobertas, os alunos necessitaram da minha confirmação, de que o que tinham descoberto tinha sentido. Por vezes, os alunos estão inseguros e é necessário icentivá-los a continuar, para que de futuro estejam mais confiantes e possam elaborar eles próprios as suas conjeturas. Neste trabalho os alunos puseram à prova as suas capacidades de visualização espacial. Ao descobrirem os triângulos e quadriláteros, surgiram situações nas quais as mesmas figuras estavam em posições diferentes , o que nem sempre foi óbvio para todos os alunos. Quando representavam na folha de registo de papel ponteado, para alguns alunos, era muito importante que essa representação fosse tal e qual como no seu geoplano. No entanto, para outros alunos, poucos, a posição não alterava as características da figura. Para a maioria dos alunos, esta questão não estava clara. Tal facto, foi surpreendente, pois esta foi uma das questões abordadas no Estudo Piloto realizado anteriormente. Considero que aqui a discussão tida em torno desta questão foi essencial, pois no final da tarefa os alunos revelam estar mais à vontade com esta questão.

Por outro lado, alguns alunos também foram capazes de relacionar entre diferentes características, o que revela que estejam provavelmente num nível de desenvolvimento superior ao visual.

Além disso, o facto de no estudo realizado previamente os alunos terem tido oportunidade de analisar diferentes triângulos e alguns quadriláteros, poderá ter influênciado a facilidade com que os alunos foram desenhando triângulos e quadriláteros muito diferentes. Em nenhum momento os alunos se questionaram sobre se as figuras que estavam a desenhar eram ou não triângulos ou quadriláteros.Os alunos demonstraram ser capazes de identificar triângulos, mesmo que não se enquadrem nos protótiopos dos triângulos que já conhessem, e também foram capazes de compreender a inclusão do quadrado no retângulo.

Também poderemos afirmar que os alunos parecem, no final deste estudo, evidenciar um nível de desenvolvimento mais evoluido do que anteriormente no final do estudo exploratório realizado previamente, mas tal está sempre subjacente à utilização permanente de material manipulável.

Capítulo V

SÍNTESE, CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Nesta seção do documento pretendo fazer uma síntese de todo o trabalho até agora descrito, apresentando as principais conclusões. Deste modo, procurarei dar resposta às questões de investigação que no início do estudo defini, fazendo a ponte entre os referenciais teóricos, o trabalho dos alunos e os processos envolvidos no decorrer desta investigação.

1. Síntese

No início deste trabalho propus aos alunos um conjunto de tarefas acerca de triângulos e quadriláteros, os quais designei de Estudo Piloto. O objetivo destas tarefas foi, por um lado levar os alunos a contactar com exemplos e não exemplos de triângulos, e, por outro lado, levá-los a representar quadriláteros que não só quadrados e retângulos, mas ao mesmo tempo que compreendessem a inclusão do quadrado nos retângulos. Além disso, pretendi com estas tarefas, motivar os alunos para o trabalho que se seguiu.

Os alunos estiveram bastante disponíveis para este trabalho e no final das tarefas relacionadas com os triângulos, a maioria, se não todos os alunos sentiram-se bastante mais à vontade com a identificação visual, associada ao reconhecimento das características dos triângulos.

No que corresponde aos quadriláteros os alunos, na sua maioria compreenderam a inclusão do quadrado no retângulo. Contudo, em relação a outros quadriláteros não existiu um trabalho tão exaustivo, pois considerei que no decorrer desta investigação os alunos iriam ter oportunidade de os analisar com mais pormenor.

No final deste primeiro conjunto de tarefas apresentei aos alunos um pequeno questionário que pretendia aferir sobre os conhecimentos dos alunos, neste caso em relação às propriedades dos triângulos, quadriláteros e acerca da inclusão do quadrado no retângulo.

Na segunda parte desta investigação, designada de Experiência de Ensino, apresentei aos alunos a proposta de descobrirem o maior número possível de bandeiras triangulares (triângulos) no Geoplano 5 X 5. Inicialmente os alunos em grupo foram descobrindo triângulos diferentes e discutindo entre si e comigo as suas descobertas e incertezas perante a aceitação de determinada figura como triângulo, ou como sendo um triângulo diferente daqueles que haviam feito. Nem sempre foi óbvio, para os alunos, essa distinção, pelo que considerei na altura, que era importante que os alunos tivessem um fio que lhes permitisse a medição do comprimento dos lados dos seus triângulos. Deste modo, os alunos puderam distinguir entre triângulos visualmente muito parecidos mas que tinham medidas de comprimento dos lados diferentes. Posteriormente, e após uma sistematização de algumas das descobertas dos alunos, solicitei que procurassem arrumar os seus triângulos em grupos, tendo em conta as suas características. Os alunos optaram por utilizar cores para cada um dos grupos. Surgiu o grupo dos triângulos com os lados todos iguais, que os alunos já conheciam de outro trabalho na sala de aula, o grupo dos triângulos com dois lados iguais e um diferente e o grupo dos triângulos com os lados todos diferentes. No final, os alunos compreenderam esta classificação, até porque autonomamente, e com alguma ajuda da minha parte, encontraram esta arrumação, que me pareceu bastante correta.

Na terceira e última parte desta tarefa, foi apresentada aos alunos uma proposta semelhante à anterior, mas desta vez, em relação a bandeiras que são quadriláteros. Os alunos descobriram diferentes retângulos, quadrados, losangos, trapézios e outros quadriláteros. Considero que esta tarefa foi mais desafiante para os alunos e também para mim. Os alunos quando tiveram de agrupar os seus quadriláteros de acordo com as suas características fizeram-no tomando como ponto de partida o ângulo reto. Cada grupo recebeu um medidor de ângulos, ou seja, um cantinho de uma folha de cartolina (ângulo reto). A partir daí analisaram com a minha ajuda as figuras tendo em conta a amplitude do ângulo reto, se os ângulos eram maiores, iguais ou mais pequenos que o ângulo reto. Deste modo, os alunos compreenderam desta vez, de forma muito mais clara, a inclusão do quadrado no retângulo, pelo facto de termos analisado os ângulos de ambas as figuras. No entanto, penso que poderia ter avançado um pouco mais na classificação dos restantes quadriláteros de outro modo, por exemplo tendo em conta o paralelismo presente nas figuras. Ficamos "agarrados" à classificação dos quadriláteros como tendo ou não ângulos retos. Tal como Loureiro (2009) refere, esta é uma das três classificações possível dos quadriláteros, que se enquadrada mais na direção da geometria euclidiana, e assim corresponde a um nível de conceptualização mais elementar. Ou seja, os alunos intuitivamente classificaram os seus quadriláteros do seguinte modo: quadriláteros sem ângulos retos; quadriláteros com um ou dois ângulos retos e quadriláteros com quatro ângulos retos. Esta foi a base de trabalho dos alunos de ambos os grupos, apesar de não terem tido noção de que o estavam a fazer. Os alunos a partir do medidor de ângulos retos verificavam se os ângulos internos dos seus quadriláteros eram maiores, mais pequenos ou iguais. Foi bastante interessante que os alunos recorreram facilmente ao "medidor" de ângulos no lugar de utilizarem o fio de medição como fizeram na tarefa das bandeiras triangulares. Deste modo, através desta classificação os alunos puderam compreender a inclusão dos quadrados nos retângulos, como quadriláteros com os quatro ângulos retos.

2. Conclusões do Estudo

- Como se desenvolve a atividade matemática dos alunos quando se envolvem em atividades de investigação matemática em geometria?

Partilhando das ideias de Cristiansen e Walther (1986), em todos os níveis de ensino da matemática é ainda dada prioridade aos exercícios e aos resultados/produtos finais, no lugar de se valorizar mais os processos. É essencial que os alunos tenham oportunidade de "fazer matemática", e como tal, as atividades do tipo investigativo permitem que os alunos tenham um papel ativo, se não mesmo o principal, no decorrer de toda a investigação. Nesta investigação os alunos tiveram oportunidade de experimentar, tiveram oportunidade de "fazer matemática" tanto o grupo A como o grupo B, tiveram muitos momentos em que sozinhos iam fazendo as suas descobertas, e chegando às suas próprias conclusões. No entanto, foi essencial que os alunos tivessem oportunidade de aprender a raciocinar, através das discussões que foram sendo tidas em grande e pequeno grupo. Deste modo, puderam "arrumar" as suas ideias, e confirmar se os seus argumentos eram válidos ou não. Tal como refere o NCTM (2007) à medida que os alunos vão evoluindo no seu conhecimento, é preciso levá-los a aprender a formular argumentos dedutivos eficazes, baseados nas verdades matemáticas que vão estabelecendo nas aulas.

Especificamente na área da Geometria, os alunos têm imensas possibilidades de "fazer matemática". Esta é uma área propícia a atividades de investigação. Como diz Freudenthal (1973, citado por Abrantes, 1999) a geometria é um campo propício a atividades que levam à matematização da realidade e à realização de descobertas. Nesta investigação os alunos, tanto no Estudo Piloto, como no segundo conjunto de tarefas, tiveram oportunidade de realizar descobertas, que iam partilhando com os seus colegas de grupo. Tanto triângulos como quadriláteros são figuras com as quais estão permanentemente em contacto no seu dia-a-dia. Seja porque observam os sinais de trânsito, seja porque observam as bandeiras das praias, a bandeira de Portugal… Este grupo de alunos sempre esteve disponível para a realização desta investigação, a Geometria já era uma área na qual gostavam de trabalhar. Além disso, o facto de terem utilizado o Geoplano e o Papel Ponteado, fez com que os alunos não perdessem o interesse, o que foi essencial para a progressão deste trabalho.

Considero que o sucesso da experiência se deve por um lado à familiarização dos alunos com triângulos e quadriláteros, o que resultou provavelmente do Estudo Piloto. No início desta investigação, aquando da realização do Estudo Piloto, os alunos apenas reconheciam as figuras visualmente. O facto de terem que discutir com os seus pares e comigo, enquanto professora/investigadora levou-os a evoluir nos seus conhecimentos. Em atividades de investigação matemática em Geometria, os alunos vão progredindo e à medida que vão fazendo descobertas, vão tirando as suas próprias conclusões.

O desenvolvimento desta investigação passou por diversas fases que se assemelham às fases de trabalho dos alunos e do professor apresentadas por Matos e Ponte (1992) em relação a tarefas investigativas em matemática. Neste caso, a formulação do objetivo (1), a definição de estratégias (2), e a reflexão sobre os resultados e elaboração de conjeturas (3). Especificamente nesta investigação, na primeira fase, foram apresentadas aos alunos as propostas de trabalho, e esclarecidas dúvidas consoante o trabalho que lhes era proposto (1). Considero que para que os alunos possam fazer a suas descobertas, trabalhado de forma autónoma, é essencial que compreendam o enunciado da proposta de trabalho que lhes é apresentada, e neste caso aquilo que lhes é pedido. Depois os alunos começaram em pequenos grupos a fazer o que lhes era pedido, definindo uma estratégia, e fazendo as suas próprias descobertas. Nesta fase, ao mesmo tempo, eu foi circulando pelos dois grupos de trabalho, e procurei questionar os alunos de cada grupo acerca do que iam descobrindo. O objetivo foi levá-los a compreender as suas descobertas e a partir delas procurar fazer generalizações. No final, foi feita uma sistematização em grande grupo sobre todas as descobertas, tanto as do grupo A como as do grupo B. além disso, em conjunto refletimos sobre o que fizeram e procuramos formular de certo modo conjeturas. Por exemplo, que o quadrado é um caso especial do retângulo, porque tal como ele tem quatro ângulos retos, mas os lados são todos iguais; que o nome de retângulo advém do facto de ter quatro ângulos retos, etc.

Além disso, considero que no decorrer desta investigação foi essencial que os alunos se baseassem em exemplos e contraexemplos das figuras geométricas planas que estavam a trabalhar, no caso triângulos e quadriláteros. Tal como Martins, et al (2002) referem estes são essenciais, pois a certa altura os exemplos não bastam para compreenderem e provarem as conjeturas apresentadas.

- Que processos são utilizados pelos alunos no decorrer deste tipo de atividades?

No decorrer deste trabalho notei que os alunos foram ganhando confiança perante os seus conhecimentos e capacidades geométricas, e, foram concretizando o que lhes era pedido com cada vez mais facilidade e sucesso.

No primeiro conjunto de tarefas os alunos contactaram com exemplos e contra exemplos de triângulos. Alguns alunos consideraram inicialmente como triângulos figuras como a Figura L e J (anexo 1 tarefa A). A discussão que se gerou em torno desta análise e discriminação visual de triângulos permitiu aos alunos compreender e assumir as caraterísticas dos mesmos. Desta feita, na tarefa seguinte (ver anexo 1 tarefa B) a maioria dos alunos assinalaram apenas as figuras que correspondiam efetivamente a triângulos. Ao evoluírem no seu nível de conhecimento, os alunos deixaram apenas de reconhecer triângulos só porque se assemelham a algo, ou só porque alguém já lhes disse que aquelas figuras são triângulos.

No início do trabalho tal como já referi e pelo que podemos observar dos produtos escritos dos alunos, estes apresentavam um nível de desenvolvimento característico do nível Visual, tal como van Hiele refere. Neste nível as figuras são avaliadas pela sua aparência (Matos, 1992), o que justifica que os alunos tivessem assinalado triângulos com um dos lados côncavos ou mesmo uma figura da qual fizessem parte dois triângulos. Ao mesmo tempo, e mesmo após a discussão e análise das figuras exemplos e não exemplos de triângulos, no decorrer da experiência de ensino, especificamente das bandeiras triangulares, alguns alunos apresentam evidências de nível de pensamento visual. Num dos grupos, aquando da análise de dois triângulos visualmente parecidos, uma aluna demonstra pouca segurança em distingui-los como triângulos diferentes. Os colegas ajudam-na a verificar que não eram iguais através da contagem dos preguinhos que fazem parte de cada lado da figura. Considero que ao longo deste trabalho foram sendo feitas pequenas discussões em pequeno e grande grupo que contribuíram para que os alunos alargassem os seus conhecimentos.

Ainda no decorrer do final do Estudo Piloto apresentei, tal como já referi, aos alunos um pequeno questionário acerca do trabalho realizado, destacando as definições de triângulos, quadriláteros e o reconhecimento do quadrado como um retângulo. No que corresponde aos triângulos alguns alunos demonstraram que já são capazes de pensar nas figuras geométricas planas (triângulos e quadriláteros) um pouco mais além da sua imagem visual. Em alguns casos, os alunos confundiam um pouco as características, pelo que referiam tudo o que se lembravam, (ver anexo 11). Alguns alunos apresentam nas suas respostas evidências de nível de pensamento visual, uma vez que revelam alguma confusão entre as propriedades analisadas. Outros revelaram maior facilidade na análise das figuras, pelo que apresentam respostas que revelam um nível de pensamento superior (ver anexo12)

Ou seja, um nível de desenvolvimento mais avançado que o anterior e mais perto do nível de análise apresentado por van Hiele, onde as figuras são portadoras de propriedades (Matos, 1992). Alguns alunos do grupo assumiram essas propriedades, pelo que considero que o seu nível de conhecimento apresenta características do pensamento descritivo e analítico tal com van Hiele define.

Também Clements (2003) e Clements e Sarama (2007) se referem aos níveis de van Hiele e consideram que neste nível, descritivo/analítico, os alunos já são capazes de analisar as figuras tendo em conta as suas propriedades. Com base nos dados apresentados bastantes alunos, na tarefa da Bandeiras Triangulares, já eram capazes de dizer que uma figura é um triângulo quando tem atributos tais como: três lados, e por isso três vértices.

Além disso, alguns alunos estabelecem relações entre características, por exemplo, o caso do aluno Hugo que chegou à conclusão de que o número de vértices é igual ao número de lados. Este tipo de evidências apesar de bastante mais elaborado esteve sempre associado ao trabalho com materiais concretos (geoplano), pelo que ainda se enquadra no nível de pensamento geométrico descritivo/analítico.

Ao mesmo tempo, quando no final da tarefa das Bandeiras triangulares e das Bandeiras que são quadriláteros, lhes solicitei que arrumassem as suas figuras em "grupinhos", incentivei os alunos a ir um pouco mais além, a classificar hierarquicamente as suas figuras. Corresponderam às minhas espectativas e ambos os grupos foram capazes de agrupar as figuras tendo em conta as suas propriedades, seja no caso dos triângulos (isósceles, escaleno e equilátero) como no caso dos quadriláteros (sem ângulos retos, com um ou dois ângulos retos, com quatro ângulos retos). Em relação a estas classificações, ao longo desta investigação nunca foi meu objetivo que os alunos aprendessem os nomes dos triângulos e quadriláteros referidos, mas antes que compreendessem e estabelecessem relações entre eles, que lhes permitissem criar uma classificação de figuras tendo em conta as suas características. Tal como é referido no NCTM (2007) a terminologia convencional não deve ser a ênfase dos programas deste nível de ensino (2º ano de escolaridade).

Numa outra perspetiva de pensamento geométrico, outros autores tais como Ceia (2002) e Ceia, Filipe e Santos (2011) referem-se à taxonomia SOLO de Biggs Collis (1982). Ao abrigo desta teoria poderíamos analisar o desempenho dos alunos nos três momentos, Estudo Piloto, Bandeiras Triangulares e Bandeiras que são Quadriláteros e a partir das suas respostas atribuir uma determinada categoria de resposta, um nível de resposta. Refiro-me neste caso aos níveis, pré-estutural, uni-estrutural, multi-estrutural, relacional e abstrato. Considero que neste estudo poderemos considerar que os alunos oscilaram entre os níveis pré-estrutural e em alguns casos relacional. Inicialmente, no Estudo Piloto, quando lhes foi pedido que assinalassem quais das figuras apresentadas eram triângulos, os alunos responderam de forma intuitiva partindo dos seus conhecimentos prévios. Não lhes foi exigido nenhum pré requisito, e nem houve nenhum trabalho de preparação anterior. Em relação aos quadriláteros os alunos estiveram muito agarrados aos protótipos de quadriláteros, especificamente retângulos e quadrados. Tal como se pode verificar no registo escrito dos alunos, na folha de papel ponteado (ver anexos 10, 11 e 12) em ambos os grupos surgiram muitos quadrados e retângulos. Ou seja, após a seleção pelos alunos das suas respostas foi feita uma discussão onde foram discutidas e analisadas as propriedades das figuras, as propriedades dos triângulos e quadriláteros. Deste modo, nas tarefas seguintes da Experiência de Ensino, Bandeiras Triangulares e das Bandeiras que são Quadriláteros, os alunos revelaram maior facilidade em representar triângulos que não os protótipos "quase equiláteros" que estão habituados a visualizar nos manuais escolares, por exemplo. Tal nível de resposta, pode estar enquadrado nos níveis uni e multi-estrutural. Alguns alunos representavam triângulos e quadriláteros apenas porque os colegas do grupo o fizeram, ou então baseavam as suas representações nos protótipos de triângulos que conheciam. Mais à frente quando os alunos foram confrontados com a diferenciação entre triângulos e entre quadriláteros, já tiveram em conta mais do que um aspeto e acabaram por distingui-los muitas vezes pela medida do comprimento dos lados. Ou seja, não se limitaram apenas a discriminar triângulos visualmente.

Em relação à tarefa de classificação das figuras representadas, das Bandeiras Triangulares e que das que são Quadriláteros já lhes era exigido um nível de resposta mais avançado que pressuponha um conhecimento mais avançado das propriedades de ambos os grupos de figuras analisados (triângulos e quadriláteros), ao mesmo tempo que lhes era exigido que estabelecessem relação entre as referidas propriedades. Deste modo, ao corresponderem a esta exigência poderemos considerar que o seu nível de resposta, nesta situação se enquadra numa resposta do tipo relacional. Como referem Biggs e Collins (1982) no nível relacional a resposta mostrará que o aluno é capaz de estabelecer uma relação lógica entre os aspetos envolvidos, no entanto, tal, não é suficiente para que tenha uma visão global de todo o conceito.

- Qual o papel do professor no acompanhamento e orientação dos alunos envolvidos em atividades de investigação matemática em geometria?

No decorrer de qualquer trabalho o professor deve selecionar tarefas que contribuam para motivar seus alunos. No entanto, para que a aprendizagem dos alunos seja efetiva e significativa, este deve dar espaço para que os alunos possam pensar e discutir as suas ideias. Tal como referem Bishop e Goffree (1986), no decorrer de uma investigação o professor deve ser um participante ativo, mas não o centro das atenções, deve por outro lado, questionar os alunos permamentemente e também motivá-los para continuarem com o seu trabalho, com as suas descobertas. Nesta investigação, considero que procurei auxiliar os alunos, levando-os a pensar e a alargar os seus conhecimentos. Questionei-os acerca do que iam descobrindo, o que em diversas situações contribuiu para que os alunos avançassem e evoluíssem no seu nível de conhecimento. Contudo, penso que fui demasiado interventiva, e em algumas situações dei as respostas, sem dar espaço para que os alunos chegassem às suas próprias conclusões. Considero que a minha insegurança, pouca confiança nos conhecimentos geométricos dos alunos, e, de certo modo o receio de que os alunos não chegassem onde eu pretendia fez com que limitasse algumas das discussões geradas em pequeno e grande grupo. Estes constrangimentos levaram a que acelerasse o processo de aprendizagem dos alunos, por exemplo ao introduzir um fio de medição no início da tarefa das Bandeiras Triangulares, o que ao mesmo tempo condicionou as conclusões dos alunos, que muitas vezes foram apresentadas por mim. Numa investigação matemática, para que a aprendizagem dos alunos seja efetiva, tal como refere Lampert (cit. in Ponte, 1999), o professor deve apresentar informação sobre os conceito, procedimentos e notações matemáticas, mas à medida que ensina os alunos a fazer Matemática, e não de forma abrupta e descontextualizada.

Uma atividade de investigação deve ser constituída por diversos momentos que segundo Ponte (1999) deverão incluir o inicío, o desenvolvimento e a conclusão da atividade. Penso que no início das tarefas propostas, foi bastante útil que eu fizesse uma leitura com os alunos acerca do que era pedido e que ao mesmo tempo, mesmo no arranque da atividade, fosse circulando pelos grupos de trabalho, esclarecendo eventuais dúvidas acerca do trabalho pedido. No decorrer do trabalho, fui dando algum espaço para que os alunos fizessem as suas descobertas, ao mesmo tempo que procurei questioná-los para que começassem eles próprios a criar as suas conjecturas. Como já referi, penso que nesta fase do trabalho antecipei-me muitas vezes aos alunos, pelo que poderiam, talvez, ter chegado a outras conclusões. Ou seja, ao dar opiniões e respostas concretas limitei o espírito crítico e reflexão dos meus alunos. Na parte final do trabalho foi essencial sistematizar com os alunos as suas ideias, as descobertas e conclusões a que chegaram.

Próprio das atividades de investigação a imprevisibilidade é algo para o qual o professor deve estar preparado. As situações imprevistas colocam em check a capacidade de improvisação do professor e neste caso a sua autoconfiança. Considero que a minha autoconfiança foi posta à prova e que em algumas situações o facto de não estar segura perante os conhecimentos dos alunos e mesmo a sua capacidade de compreensão acerca de alguns dos conteúdos abordados, levou a que procurasse controlar o rumo dos acontecimentos limitando as discussões entre mim e os alunos. Partilhando das opiniões de Fonseca, Brunheira e Ponte (1999), penso que as aulas investigativas implicam que o professore esteja mais atento e disponível para perceber as descobertas dos alunos e neste sentido, dar continuidade a caminho que tomaram caso este se enquadre no trabalho desenvolvido.

3. Limitações e Recomendações

Na segunda parte desta investigação, no decorrer das tarefas Bandeiras Triangulares e Bandeiras como Quadriláteros, ao nível da classificação dos quadriláteros, poderia encaminhado a discussão dos alunos noutro sentido. Decidi à partida que os alunos iriam utilizar o medidor de ângulos retos e que a partir daí se iria gerar a classificação das figuras. Nem ponderei inicialmente que os alunos pudessem utilizar o fio de medição que utilizaram na tarefa das Bandeiras Triangulares, e nessa tarefa também não ponderei entregar-lhes o medidor de ângulos. Se não tivesse sido tão interventiva, os alunos poderia ter encontrado outra classificação, nomeadamente a classificação a partir dos lados paralelos, ou no caso dos triângulos a partir da amplitude dos ângulos internos.

No decorrer das tarefas propostas surgiram alguns momentos de discussão em grande grupo, penso que os alunos foram pouco participativos nestes momentos que foram essencialmente mediados por mim, mas baseados nas descobertas feitas pelos alunos.

Considero que do ponto de vista prático, poderia ter colocado um gravador em cima da mesa de cada grupo de trabalho, e deste modo, analisar de forma mais profunda as conexões e discussões tidas pelos alunos enquanto trabalhavam de forma mais autónoma.

Foi extremamente difícil abstrair-me do meu papel de professora, e de certo modo, se estivesse mais segura do ponto de vista de conhecimento teórico, provavelmente anteciparia alguns dos raciocínios dos alunos, e nesse sentido, não influenciaria tanto a direção que tomou a investigação.

Seria interessante dar continuidade a este trabalho, no 4º ano de escolaridade destes alunos. Poder-se-ia aferir que conhecimentos adquiriam e como se iriam comportar e que caminhos iriam seguir numa investigação semelhante, mas com um maior grau de complexidade de exigência.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abrantes, P. (1999). Investigações em Geometria na Sala de Aula. In: E. Veloso, H. Fonseca, J.P.Ponte & P. Abrantes (orgs.). *Ensino da Geometria no virar do Milénio* (pp. 1 – 15). Lisboa: DEFFCUL.

Abrantes, P., Serrazina, L., Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica*, Lisboa: Ministério da Educação – Departamento da Educação Básica.

Almiro, J. (2004). *Materiais manipuláveis e tecnologia na aula de Matemática*. Escola Secundária de Tondela. Obtido em Janeiro de 2012, de www. Educ.fc.ul/docentes/jponte/sd/textos/GTI- João-Almiro.pdf

Battista, M., Clements, D. et al (1998). Students' spatial structuring of 2D arrays of squares. *Journal for Research in Mathematics Education*, vol 29 (5), 503-532.

Battista, M. T. (2007). The development of geometric nd spatial thinking. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.843 – 891). Reston, VA: Natinal Council of Techers of Mathematics.

Bishop, A. J. & Goffree, F. (1986). Dinâmica e Organização da sala de aula. In A. H. B. Christiansen, *Perspectives on Mathematics Education*,pp.1-47, Dordrecht:Reidel.

Bogdan, R. Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação.* Porto: Porto Editora.

Britton, B., Tayeh, C. (2005). *Candy Conundrum*. Teaching Children Mathematics, 464-471.

Ceia, M. J.M., Filipe, A., Santos, C. (2011) *Provas de Aderição e Exames: A Qualidade das questões de Álgebra*. Obtido em Novembro de 2012, de http://cmup.fc.up.pt/cmup/eiem/grupos/documents/9.Ceia_Filipe_Santos.pdf

Ceia, M. J. M. (2002). *A taxonomia SOLO e os níveis de van Hiele. Obtido em Outubro de 2012, de* http://spiem.pt/DOCS/ATAS_ENCONTROS/2002/2002_15_MJMCeia.pdf

Christiansen, B. & Walther, G. (1986). Tarefa e Atividade. In B. Christiansen, A.G. Howson & M. Otte (Eds.) *Perspectives on Mathematics Education*. (pp. 243 - 307). Dordrecht: D. Reidel.

Clements, D. H. (1999). Concrete manipulatives, concrete ideas. *Contemporary Issues in Early Childhood*, 1 (1), 45-60.

Clements, D. H. & Sarama, J. (2007). In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, pp.843 – 891. Reston, VA: Natinal Council of

Techers of Mathematics.*Students and Learning.* Early Childhood Matematics, (pp. 461 – 555).

Del Grande, J.(1987. Spatial perception and primary geometry. Em M. Lindquist & A. Shulte, (Eds.), *Learning and teaching geometry K – 12,* pp.126-135. Reston: NCTM.

Del Grande, J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic Teacher*, 37 (2), 14 – 20.

Esteves, M. (2006) *Análise de Conteúdo,* in Ávila de Lima, J. e Pacheco, J.A. (Orgs) (2006). Fazer Investigação: Contributos para a elaboração de dissertações e teses. Porto: Porto Editora.

Fonseca, H., Brunheira, L.,& Ponte, J.P.(1999) As Actividades de investigação, o professor e a aula de matemática. Actas do Prof Mat 9. Lisboa: APM.

Gordo, M.F. (1994). A visualização especial e a aprendizagem da matemática: um estudo no 1º ciclo do ensino básico. *Quadrante,* 3(1), 55 – 73.

Gutiérrez, A. (1996). Visulization in 3-dimensional geometry: in search of a framework. P*roceedings of PME20,* Valencia.

Léssart- Hérbert, M., Goyette, G., &Goutin, G. (1990). *Investigação Qualitativa: Fundamentos e Práticas*. Lisboa: Instituto Piaget.

Loureiro, C. (2009). Geometria viva no ensino básico. In Atas do ProfMat 2009.

Ludke, Menga., André, Marli E. D. A. (1986) *Pesquisa em Educação: Abordagens qualitativas*. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária.

Martins, C., Maia, E. , Menino, H., Rocha, I., Pires, M. V. (2002). *O Trabalho investigativo nas aprendizagens iniciais da matemática* . Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. Obtido em Abril de 2011, de: www.spce.org.pt/sem/encontro/encontro2002.html

Serrazina, M. L. & Matos, J.P. (1988). *O Geoplano na Sala de Aula.* Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Matos, J. F. & Ponte, J. P. (1992). Processos Cognitivos e Interações Sociais nas Investigações Matemáticas. Tradução do artigo extraído do livro *Mathematical Problem Solving and New Information Technologies, Research in Contexts of Pratice*, editado por J. P. Ponte, J. F. Matos, J. M. Matos e D. Fernandes, (pp. 239-254) Verlag.

Matos, J.M. & Gordo, M. F. (1993). Visualização espacial: algumas actividades. *Educação e Matemática*, 26, 13-17.

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação.

Mendes, E. (1997). *A Atividade matemática escolar numa perspetiva investigativa e exploratória na sala de aula: implicações para a aprendizagem.* Tese de Mestrado. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática. (Trabalho original em Inglês, publicado em 2000)

Pastells, A. A. (2004). *O Desenvolvimento de competências matemáticas com recursos lúdico-manipulativos.Para crianças dos 6 aos 12 anos.* Porto: Porto Editora.

Pedro, H. M. (1999). *Los Niveles de Van Hiele y La Taxonomia SOLO: unanálisis comparado, una integración necesaria*. Valencia: Department de la Matemàtica – Enseñanza de las ciencias, 17 (2), 291-309.

Ponte, J. P. (1994). O Estudo de caso na nvestigação em Educação Matemática. *Quadrante*, 3 (1), 3-18.

Ponte, J.P., Boavida, A., Graça, M. & Abrantes , P. (1997). A Natureza da Matemática. In : *Didática da Matemática* (pp.1-37). Lisboa: DES do ME.

Ponte, J.P. & Serrazina, M. L . (2000). *Didáctica da Matemática do 1º Ciclo.* Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J.P., Brocardo, J.,Oliveira, H. (2003) *Investigações Matemáticas na sala de aula*. Colecção "Tendências em Educação Matemática". Autêntica Editora.

Ponte, J. P. (2010). Explorar e Investigar em Matemática:Uma atividade fundamental no ensino e aprendizagem, *Unión*, 21, 13-30.

ANEXOS

Anexo 1 – Enunciado das Tarefas acerca de Triângulos do Estudo Piloto

Atividade Investigativa num 2º ano de escolaridade – Geometria – Triângulos

Nome: ____ Data: __/__/__

- Triângulos -

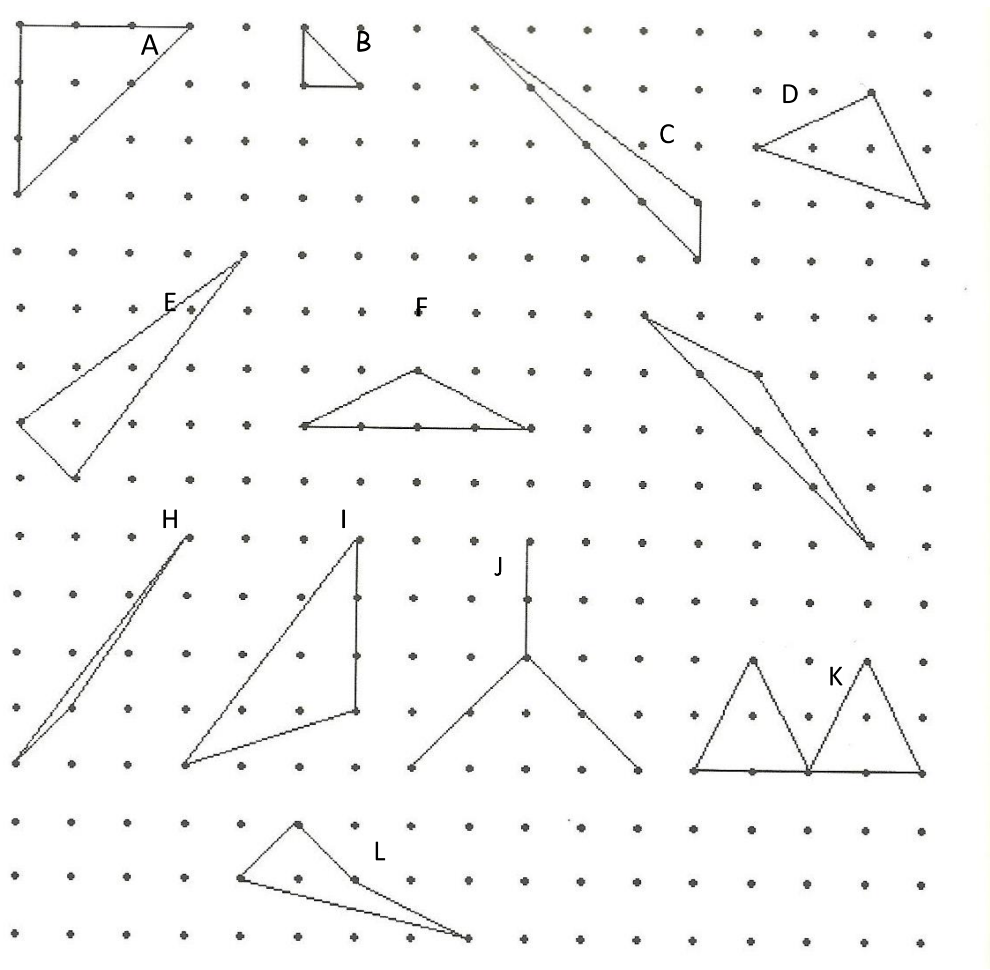
Proponho-vos agora um conjunto de tarefas acerca de triângulos.

1. **Tarefa 1 A – Procurando Triângulos.**

Observa a seguinte folha de papel ponteado e as figuras que estão desenhadas.

Será que todas as figuras são triângulos?

Discute com o teu grupo e depois assinala com um as letras das figuras que consideraram triângulos.

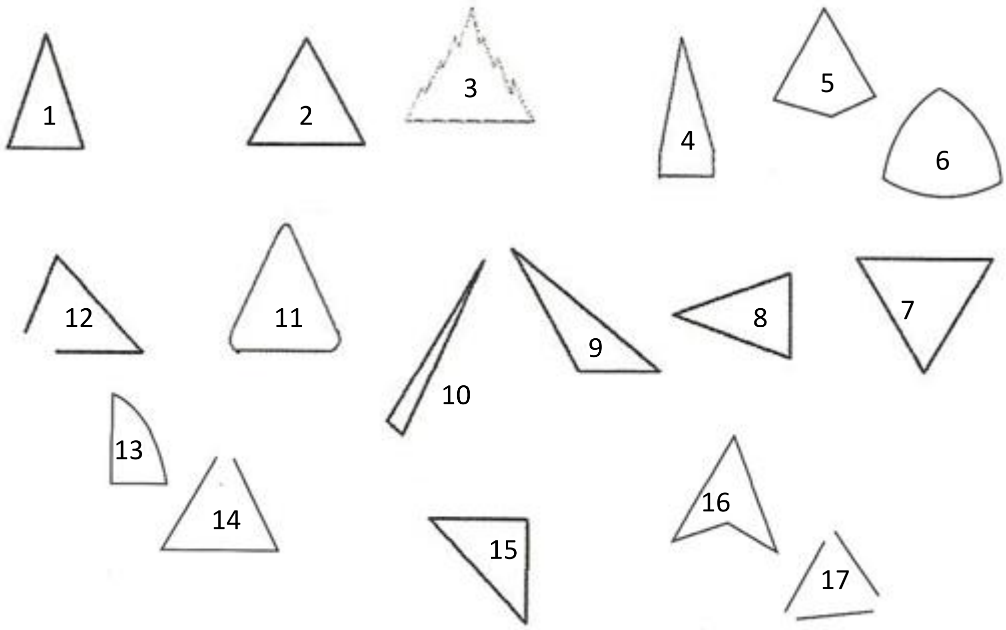


2. Tarefa 1 B – Procurando Triângulos.

Observa o seguinte conjunto de figuras.

Será que todas as figuras são triângulos?

Discute com o teu grupo e depois assinala com um ◯ os números das figuras que consideraram triângulos.

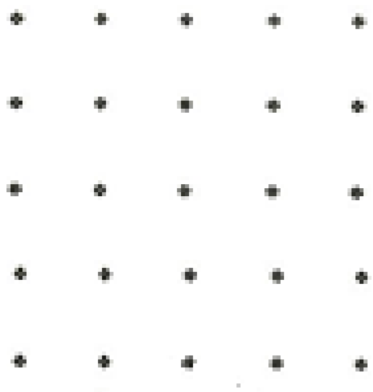


3. Tarefa 2 – Triângulos

Constrói triângulos no geoplano 5 X 5, com a ajuda do teu grupo.

Regista no papel ponteado todos os que conseguires desenhar, mas não te esqueças que têm de ser todos diferentes.

Quantos triângulos conseguem desenhar?



Anexo 2 – Produtos Escritos de um aluno do Grupo A das tarefas acerca de Triângulos do Estudo Piloto.

Atividade Investigativa num 2º ano de escolaridade – Geometria – Triângulos

Nom _ Data:

- Triângulos -

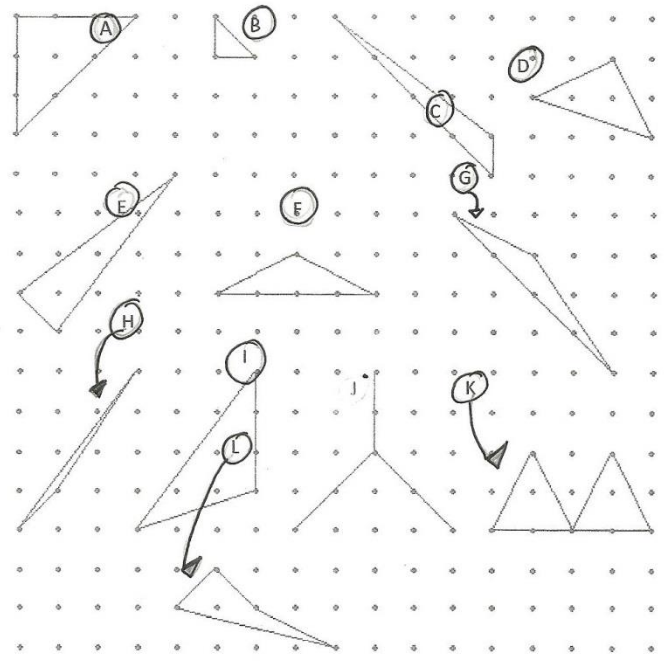
Proponho-vos agora um conjunto de tarefas acerca de triângulos.

1. Tarefa 1 A – Procurando Triângulos.

Observa a seguinte folha de papel ponteado e as figuras que estão desenhadas.

Será que todas as figuras são triângulos?

Discute com o teu grupo e depois assinala com um ◯ as letras das figuras que consideraram triângulos.

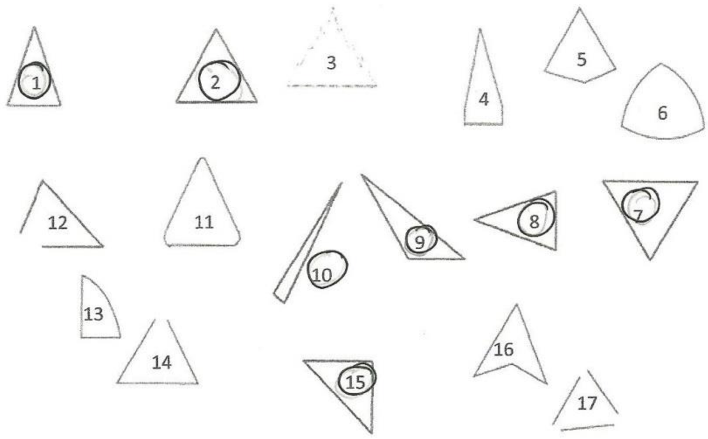


2. Tarefa 1 B – Procurando Triângulos.

Observa o seguinte conjunto de figuras.

Será que todas as figuras são triângulos?

Discute com o teu grupo e depois assinala com um ○ os números das figuras que consideraram triângulos.

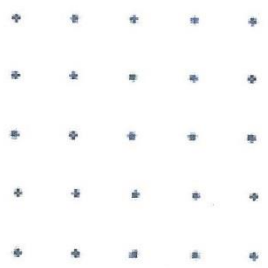


3. Tarefa 2 – Triângulos

Constrói triângulos no geoplano 5 X 5, com a ajuda do teu grupo.

Regista no papel ponteado todos os que conseguires desenhar, mas não te esqueças que têm de ser todos diferentes.

Quantos triângulos conseguem desenhar?



Anexo 3 - Produtos Escritos de um aluno do Grupo B das tarefas acerca de Triângulos do Estudo Piloto.

Atividade Investigativa num 2º ano de escolaridade - Geometria - Triângulos	
Nome	Data:

- Triângulos -

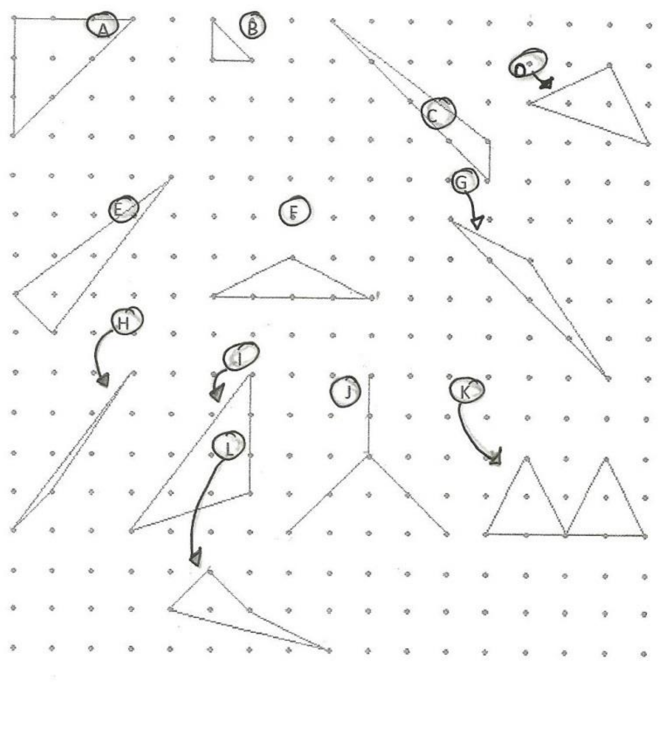
Proponho-vos agora um conjunto de tarefas acerca de triângulos.

1. **Tarefa 1 A - Procurando Triângulos.**

Observa a seguinte folha de papel ponteado e as figuras que estão desenhadas.

Será que todas as figuras são triângulos?

Discute com o teu grupo e depois assinala com um ◯ as letras das figuras que consideraram triângulos.

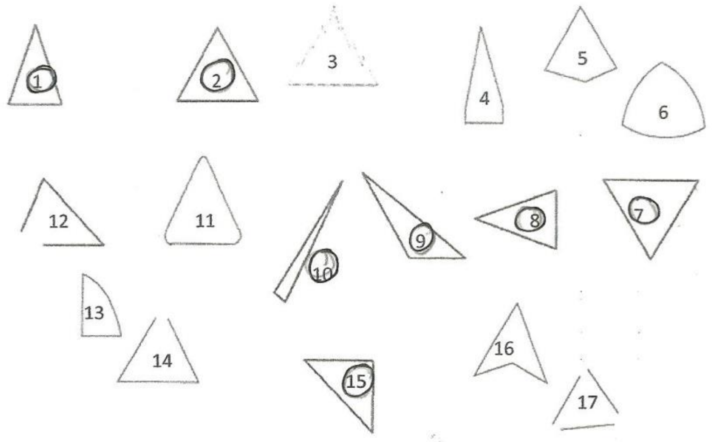


2. **Tarefa 1 B – Procurando Triângulos.**

Observa o seguinte conjunto de figuras.

Será que todas as figuras são triângulos?

Discute com o teu grupo e depois assinala com um ◯ os números das figuras que consideraram triângulos.

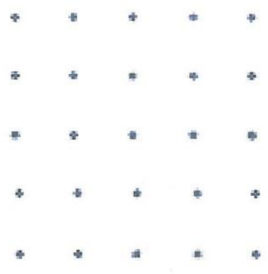


3. **Tarefa 2 – Triângulos**

Constrói triângulos no geoplano 5 X 5, com a ajuda do teu grupo.

Regista no papel ponteado todos os que conseguires desenhar, mas não te esqueças que têm de ser todos diferentes.

Quantos triângulos conseguem desenhar?



Anexo 4 – Enunciado das Tarefas acerca de Quadriláteros do Estudo Piloto

Atividade Investigativa num 2º ano de escolaridade – Geometria – Quadriláteros

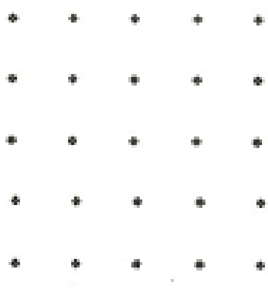
Nome: ____ Data: ___/___/_____

- Quadriláteros -

Proponho-vos agora um conjunto de tarefas acerca dos quadriláteros.

1. **Tarefa 1 – Retângulos.**

Constrói retângulos no geoplano 5 X 5, com a ajuda do teu grupo. Regista no papel ponteado todos os que encontrares. Quantos retângulos conseguiram desenhar?

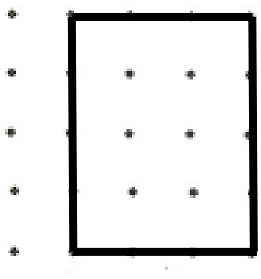


2. **Tarefa 2 – Procurando Quadriláteros**

Delimita no geoplano 5 x 5 a região indicada na figura em baixo.

Com a ajuda do teu grupo procura descobrir quadriláteros diferentes. Quantos quadriláteros conseguem desenhar? No interior dessa região?

Registem os vossos quadriláteros na folha de papel ponteado que vos foi entregue.



3. Quadriláteros Especiais

Com a ajuda do teu grupo, constrói quadrados no geoplano 5 x 5 e regista-os na folha de papel ponteado que te foi entregue.

Qual é o maior quadrado?

Qual é o menor quadrado?

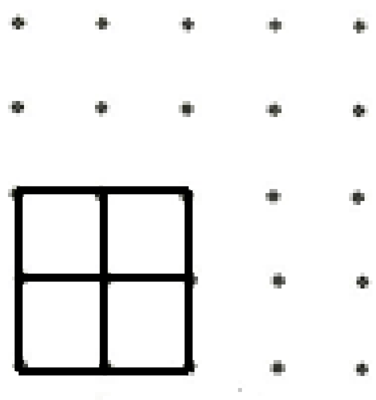
4. Descobrindo Quadrados

Em conjunto com o teu grupo observa a figura A e a figura B.

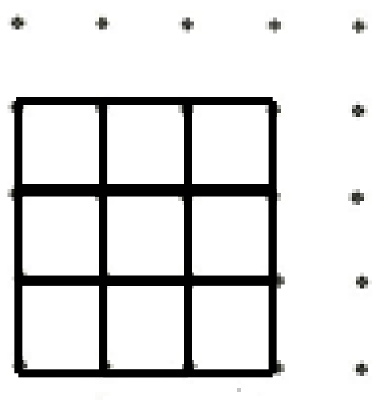
Quantos quadrados estão "escondidos" na figura A?

E na figura B?

A



B



Anexo 5 – Produtos Escritos de um aluno do Grupo A das tarefas acerca de Quadriláteros do Estudo Piloto.

Atividade Investigativa num 2º ano de escolaridade – Geometria – Quadriláteros

14

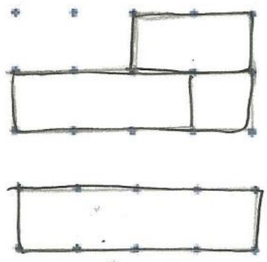
Nor _ Data

– Quadriláteros –

Proponho-vos agora um conjunto de tarefas acerca dos quadriláteros.

1. **Tarefa 1 – Retângulos.**

Constrói retângulos no geoplano 5 X 5, com a ajuda do teu grupo. Regista no papel ponteado todos os que encontrares. Quantos retângulos conseguiram desenhar?

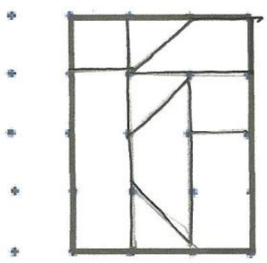


2. **Tarefa 2 – Procurando Quadriláteros**

Delimita no geoplano 5 x 5 a região indicada na figura em baixo.

Com a ajuda do teu grupo procura descobrir quadriláteros diferentes. Quantos quadriláteros conseguem desenhar? No interior dessa região?

Registem os vossos quadriláteros na folha de papel ponteado que vos foi entregue.



3. Quadriláteros Especiais

Com a ajuda do teu grupo, constrói quadrados no geoplano 5 x 5 e regista-os na folha de papel ponteado que te foi entregue.

Qual é o maior quadrado?

Qual é o menor quadrado?

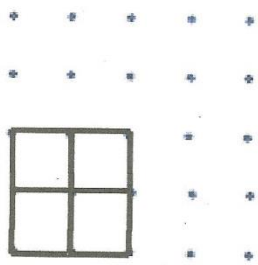
4. Descobrindo Quadrados

Em conjunto com o teu grupo observa a figura A e a figura B.

Quantos quadrados estão "escondidos" na figura A?

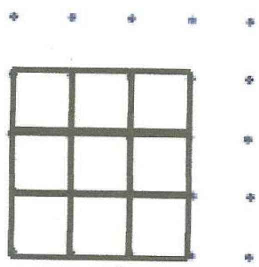
E na figura B?

A



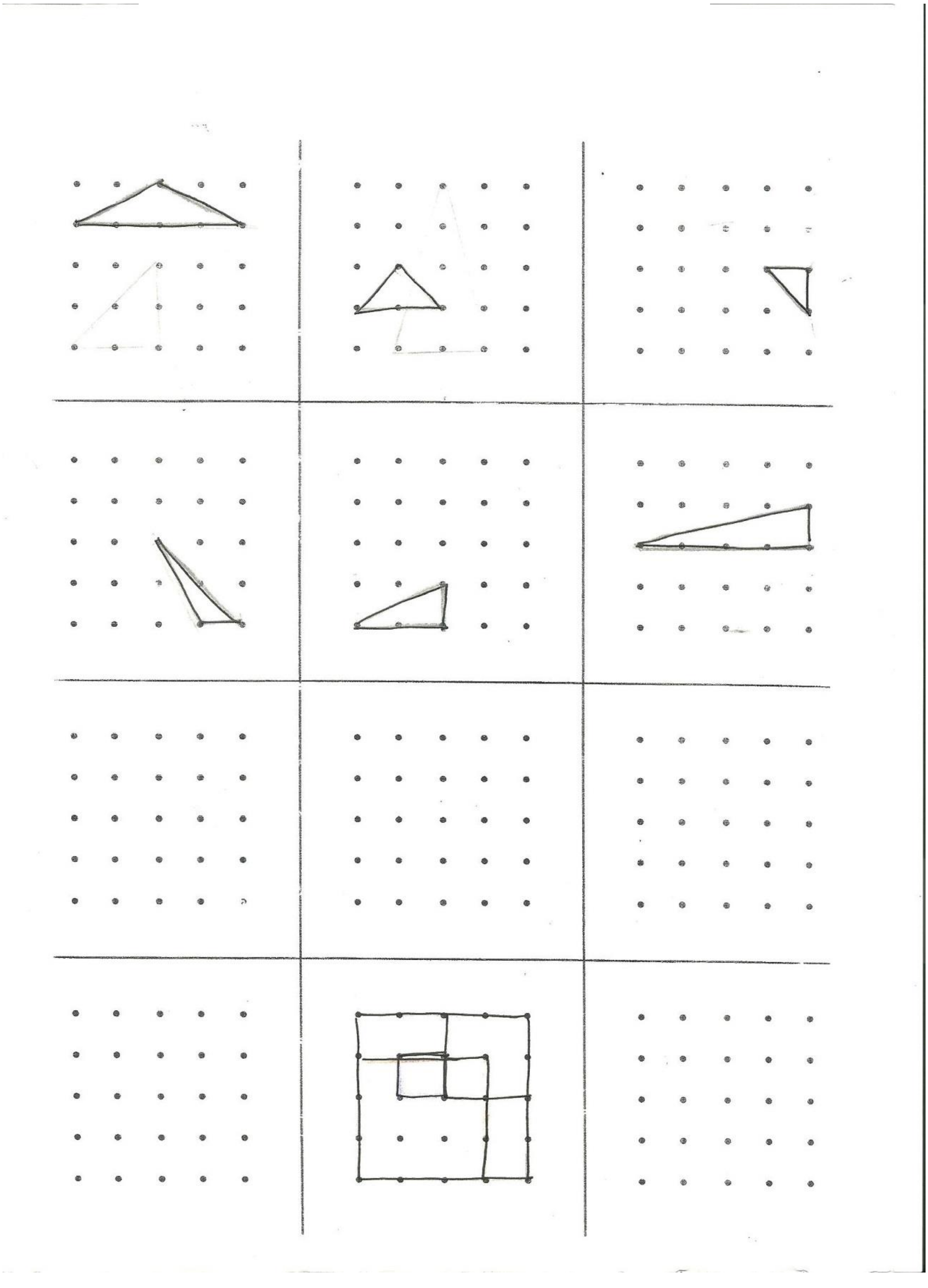
5

B



12

Anexo 6- Folha de Papel ponteado de registo de um aluno do Grupo A



Anexo 7 – Produtos Escritos dos alunos dos alunos do Grupo B das tarefas acerca de Quadriláteros do Estudo Piloto.

Atividade Investigativa num 2º ano de escolaridade – Geometria – Quadriláteros

Nome:

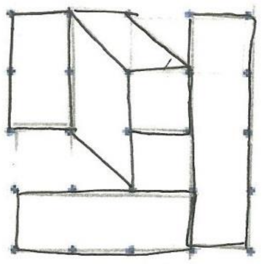
ata:

- Quadriláteros -

Proponho-vos agora um conjunto de tarefas acerca dos quadriláteros.

1. **Tarefa 1 – Retângulos.**

Constrói retângulos no geoplano 5 X 5, com a ajuda do teu grupo. Regista no papel ponteado todos os que encontrares. Quantos retângulos conseguiram desenhar?

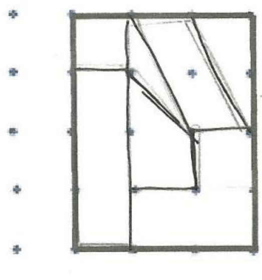


2. **Tarefa 2 – Procurando Quadriláteros**

Delimita no geoplano 5 x 5 a região indicada na figura em baixo.

Com a ajuda do teu grupo procura descobrir quadriláteros diferentes. Quantos quadriláteros conseguem desenhar? No interior dessa região?

Registem os vossos quadriláteros na folha de papel ponteado que vos foi entregue.



3. Quadriláteros Especiais

Com a ajuda do teu grupo, constrói quadrados no geoplano 5 x 5 e regista-os na folha de papel ponteado que te foi entregue.

Qual é o maior quadrado?

Qual é o menor quadrado?

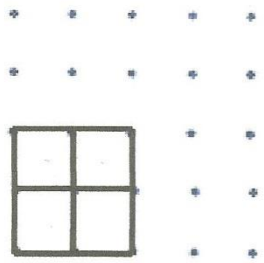
4. Descobrindo Quadrados

Em conjunto com o teu grupo observa a figura A e a figura B.

Quantos quadrados estão "escondidos" na figura A?

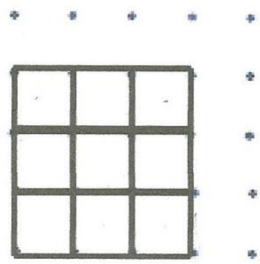
E na figura B?

A



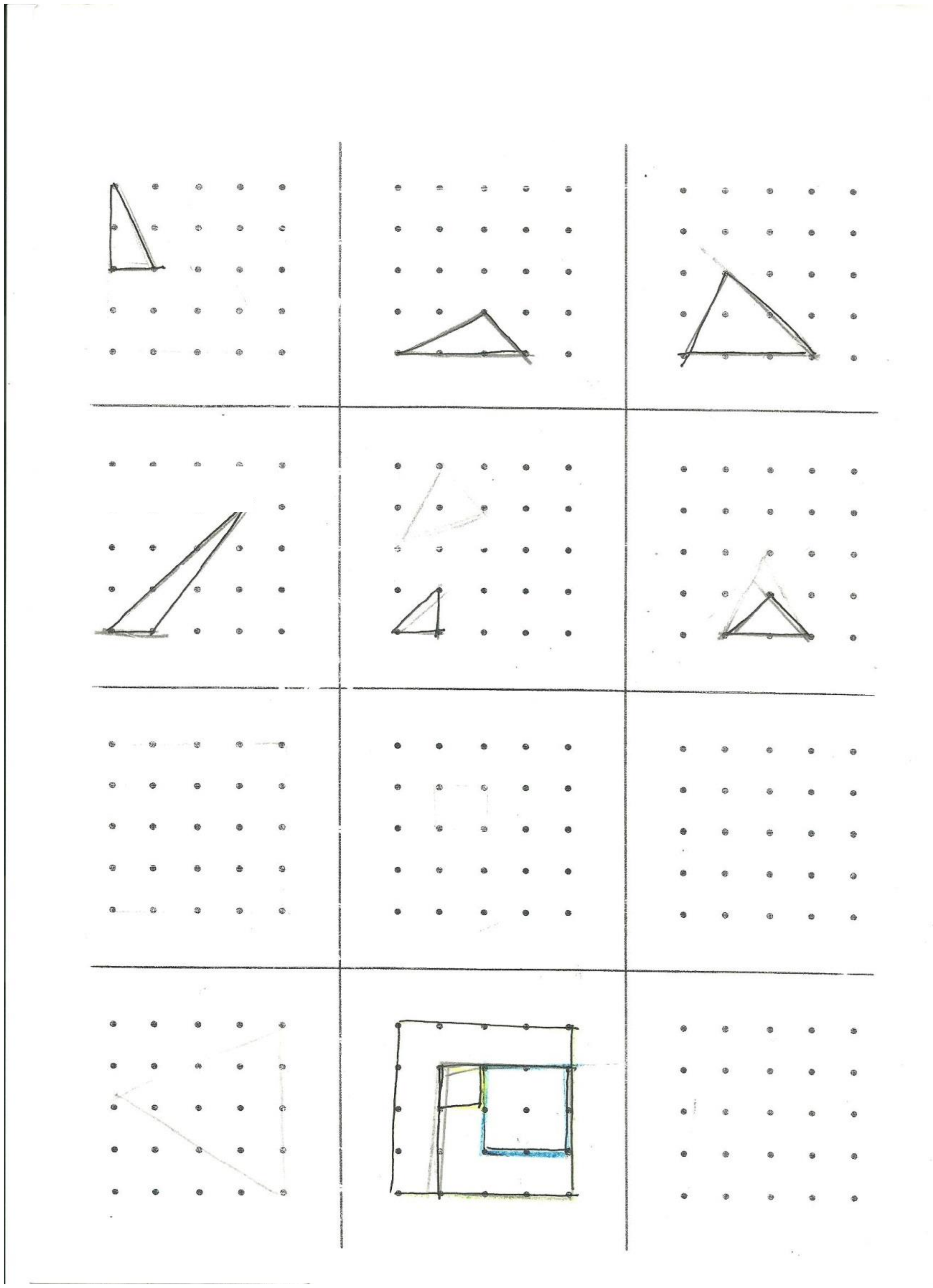
5

B



14

Anexo 8 – Folha de Papel Ponteado de registo de um aluno do Grupo B



Anexo 9 – Enunciado do Questionário Final do Estudo Piloto.

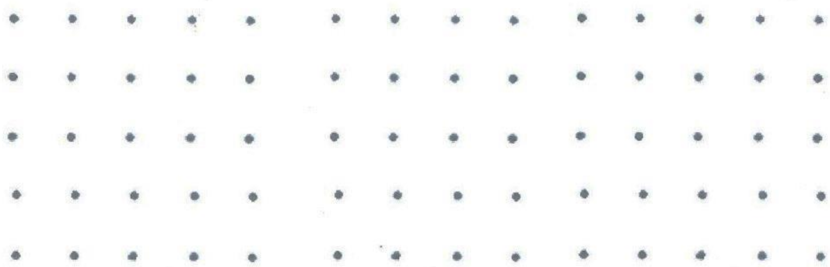
Atividade Investigativa num 2º ano de escolaridade – Geometria – Triângulos

Agora que já sabes muitas coisas sobre triângulos e quadriláteros procura pensar sobre o que aprendeste.

- Diz por palavras tuas, o que é um triângulo?

____
____
____
____
____
____
____

- Representa no papel ponteado, pelo menos, três triângulos diferentes. Se necessário utiliza um geoplano disponível no teu grupo.



- Diz por palavras tuas, o que é um quadrilátero?

____
____
____
____
____
____

Atividade Investigativa num 2º ano de escolaridade – Geometria – Triângulos

- Representa no papel ponteado, pelo menos, três quadriláteros diferentes. Se necessário utiliza um geoplano disponível no teu grupo.

" O quadrado é um retângulo". Achas que esta informação é verdadeira? Diz porquê.

Data: ___/___ /____

2º ano de escolaridade

Anexo 10 – Exemplo A - Respostas de um aluno ao Questionário Final do Estudo Piloto

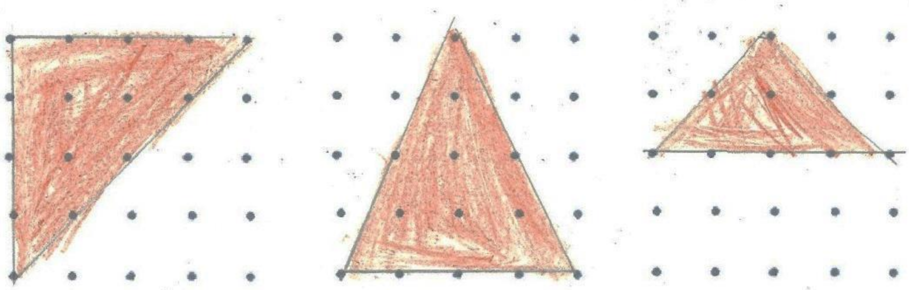
Atividade Investigativa num 2º ano de escolaridade – Geometria –

Agora que já sabes muitas coisas sobre triângulos e quadriláteros procura pensar sobre o que aprendeste.

- Diz por palavras tuas, o que é um triângulo?

um triângulo tem 3 lados, tem toudos os 3 lados são igoais.

- Representa no papel ponteado, pelo menos, três triângulos diferentes. Se necessário utiliza um geoplano disponível no teu grupo.

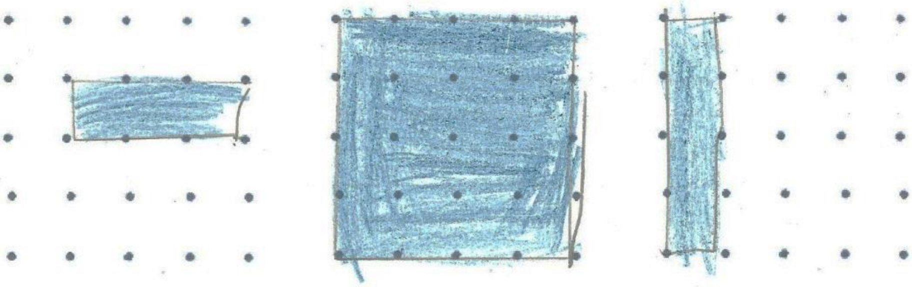


- Diz por palavras tuas, o que é um quadrilátero?

o quadrilátero tem 4 lados e tem 4 potos

Atividade Investigativa num 2º ano de escolaridade – Geometria –

- Representa no papel ponteado, pelo menos, três quadriláteros diferentes. Se necessário utiliza um geoplano disponível no teu grupo.



" O quadrado é um retângulo". Achas que esta informação é verdadeira? Diz porquê.

Eu acho que não é o quadrado
tem 4 fetis e o retângulo não

Anexo 11 – Exemplo B - Respostas de um aluno ao Questionário Final do Estudo Piloto

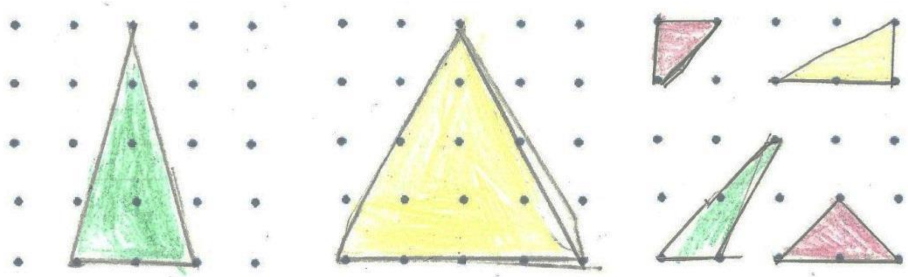
Atividade Investigativa num 2º ano de escolaridade – Geometria –

Agora que já sabes muitas coisas sobre triângulos e quadriláteros procura pensar sobre o que aprendeste.

- Diz por palavras tuas, o que é um triângulo?

Um triângulo tem de ter: • 3 vértices, 1 vértice sozinho, não pode ser fechado, todos os lados são retos e não pode ter abertos e a figura não altera e 3 lados.

- Representa no papel ponteado, pelo menos, três triângulos diferentes. Se necessário utiliza um geoplano disponível no teu grupo.

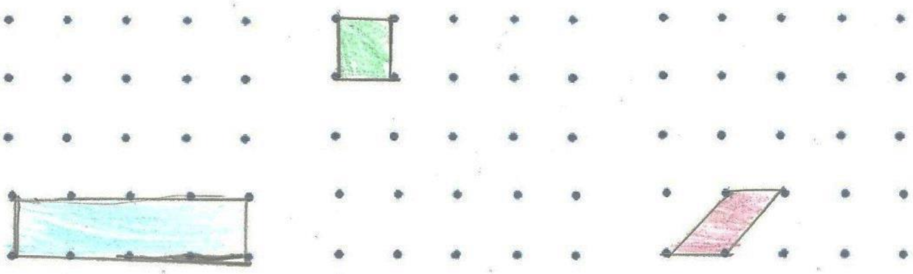


- Diz por palavras tuas, o que é um quadrilátero?

Um quadrilátero tem de ter: 4 vértices, 4 lados, a posição não altera, a figura é fechada e pode haver figuras: retângulos e quadrados e outros.

Atividade Investigativa num 2º ano de escolaridade – Geometria –

- Representa no papel ponteado, pelo menos, três quadriláteros diferentes. Se necessário utiliza um geoplano disponível no teu grupo.



" O quadrado é um retângulo". Achas que esta informação é verdadeira? Diz porquê.

sim, porque tem tudo igual e o retângulo
é mais esticado do que o quadrado e parece
muitos quadrados.

Anexo 12 – Exemplo C - Respostas de um aluno ao Questionário Final do Estudo Piloto -

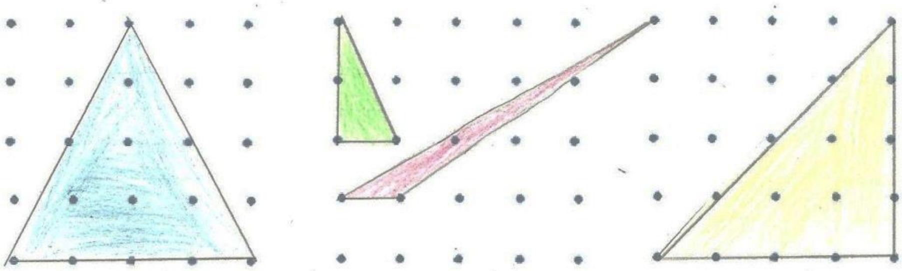
Atividade Investigativa num 2º ano de escolaridade – Geometria –

Agora que já sabes muitas coisas sobre triângulos e quadriláteros procura pensar sobre o que aprendeste.

- Diz por palavras tuas, o que é um triângulo?

Um triângulo é uma figura geométrica com três lados, três vértices e é uma figura fechada.

- Representa no papel ponteado, pelo menos, três triângulos diferentes. Se necessário utiliza um geoplano disponível no teu grupo.

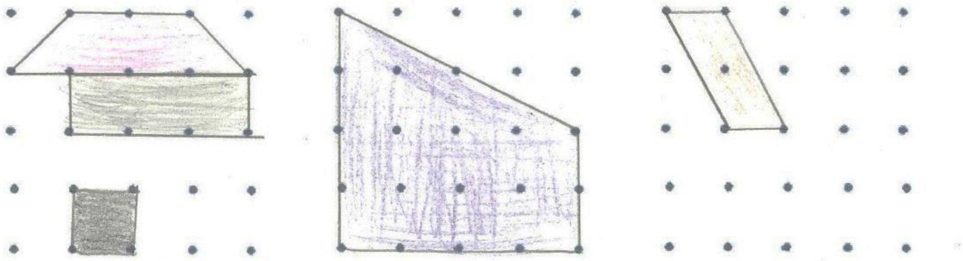


- Diz por palavras tuas, o que é um quadrilátero?

Um quadrilátero é uma figura com 4 lados.

Atividade Investigativa num 2º ano de escolaridade – Geometria –

- Representa no papel ponteado, pelo menos, três quadriláteros diferentes. Se necessário utiliza um geoplano disponível no teu grupo.



" O quadrado é um retângulo". Achas que esta informação é verdadeira? Diz porquê.

Sim é verdadeira, porque têm ambas 4 lados e 4 vertices e também porque têm ambas os angulos todos iguais.

Anexo 13 – Enunciado da Tarefa Bandeiras Triangulares

Atividade Investigativa num 2º ano de escolaridade – Geometria – Triângulos

Nome: ______________________________________ Data: ___/___/_____

- Bandeiras Triangulares -

"A Professora Joana quer fazer uma bandeira de boas vindas, para colocar na sua sala de aula. Ela sabe que pretende fazer a bandeira com a forma de um triângulo, mas não sabe que tipo de triângulo pretende. A Professora Joana precisa de encontrar um triângulo de que goste."

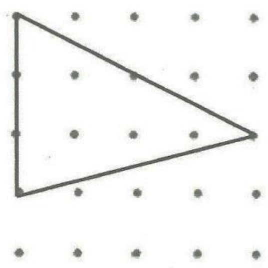
Procura ajudar, em conjunto com os teus colegas do grupo, a Professora Joana a criar o maior número possível de bandeiras triangulares diferentes.

1. **Tarefa A – Bandeiras Triangulares**

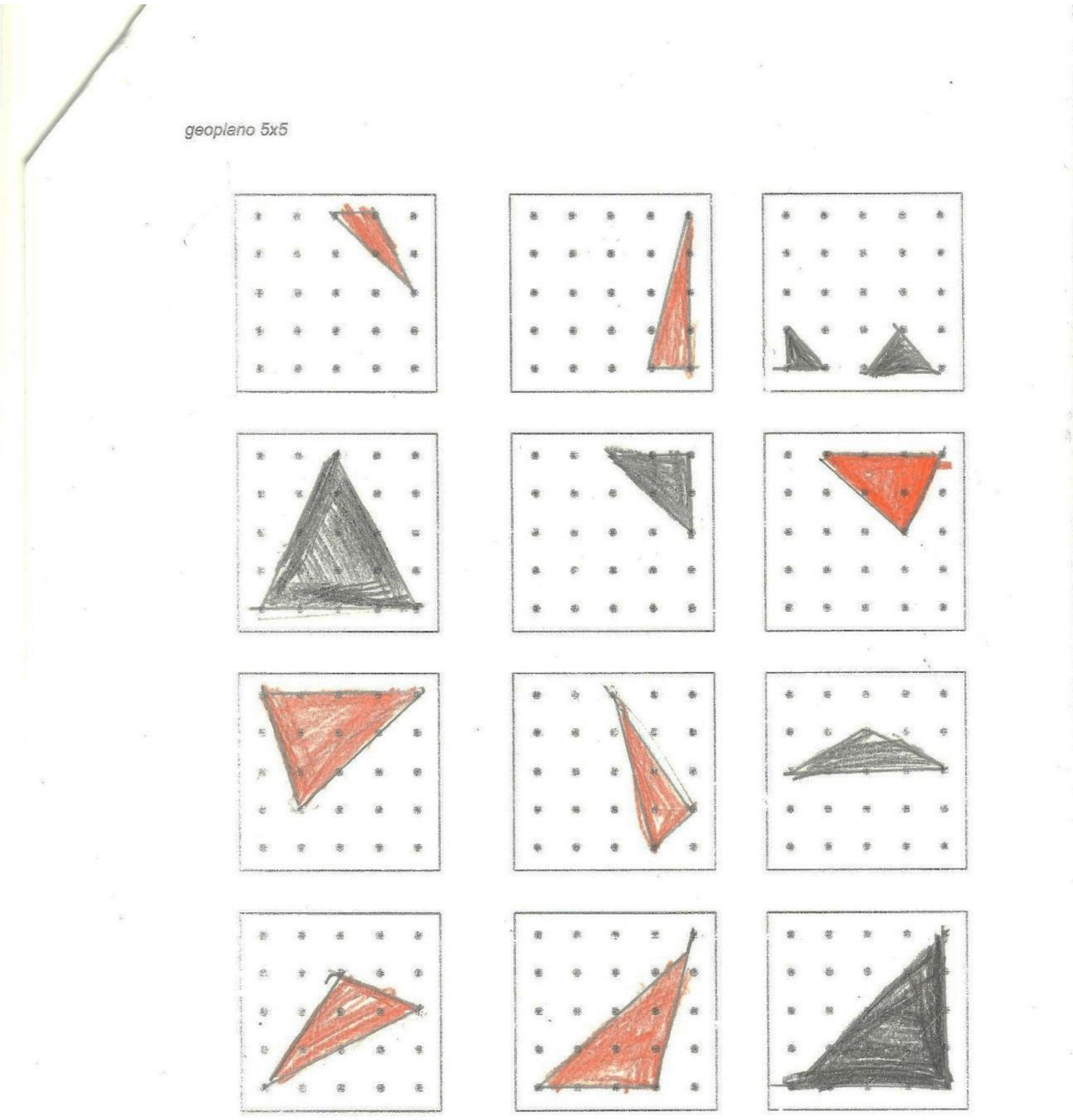
Observa a seguinte folha de papel ponteado e a bandeira triangular que está representada.

Quantas **bandeiras triangulares, diferentes**, consegues encontrar?

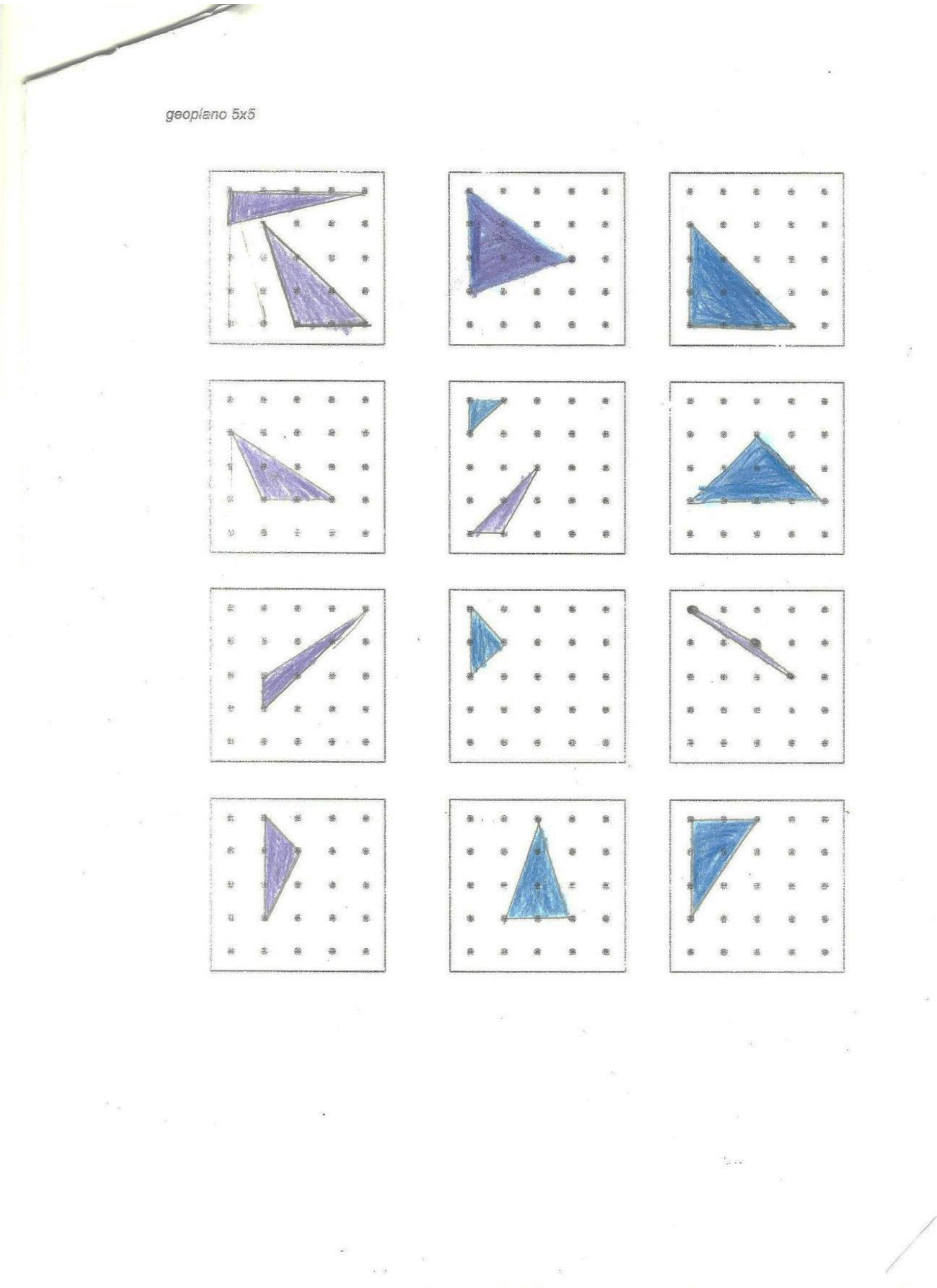
Utiliza o teu geoplano e depois representa as figuras na folha de papel ponteado que te foi entregue.



Anexo 14 – Produto Escrito de um aluno do Grupo A da Tarefa Bandeiras Triangulares



Anexo 15 – Produto Escrito de um aluno do Grupo B da Tarefa Bandeiras Triangulares



Anexo 16 – Enunciado da Tarefa Bandeiras como Quadriláteros

Atividade Investigativa num 2° ano de escolaridade – Geometria – Quadriláteros

Nome: ______________________________________ Data: ___/___/_____

- Bandeiras que são Quadriláteros -

"A Professora Joana quer fazer, novamente, uma bandeira de boas vindas, mas desta vez para colocar na porta de entrada da sua sala de aula. Ela sabe que pretende fazer a bandeira com a forma de um quadriláteros, mas não sabe que tipo de quadrilátero pretende. A Professora Joana precisa de encontrar um quadrilátero de que goste."

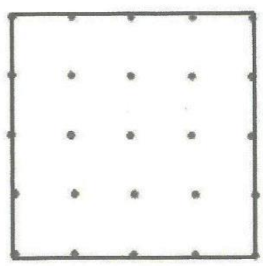
Procura ajudar, em conjunto com os teus colegas do grupo, a Professora Joana a criar o maior número possível de bandeiras diferentes com a forma de um quadrilátero.

2. Tarefa B - Bandeiras que são Quadriláteros

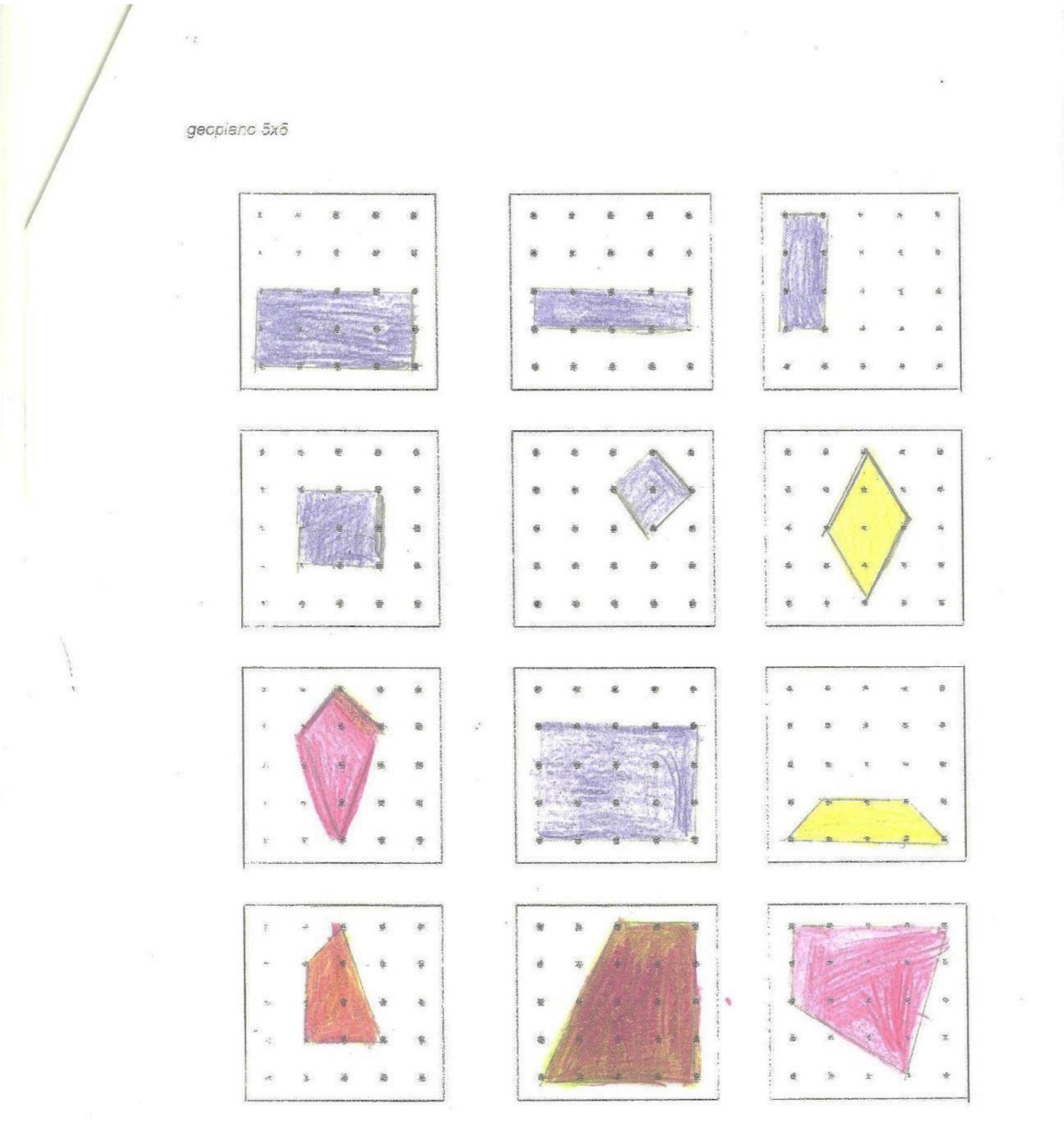
Observa a seguinte folha de papel ponteado e a bandeira com a forma de um quadrilátero que te é muito familiar.

Quantas **bandeiras diferentes**, com a forma de um **quadrilátero** consegues encontrar?

Utiliza o teu geoplano e depois representa as figuras na folha de papel ponteado que te foi entregue.



Anexo 17 – Produto Escrito de um aluno do Grupo A da Tarefa como Quadriláteros



Anexo 18 – Produto Escrito de um aluno do Grupo B da Tarefa Bandeiras como Quadriláteros