

ESTABELECENDO RELAÇÕES NUMÉRICAS: UM ESTUDO COM ALUNOS DE 2.º ANO

Margarida Rodrigues

ESELx - Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa, UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

margaridar@eselx.ipl.pt

Lurdes Serrazina

ESELx - Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa, UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

lurdess@eselx.ipl.pt

Ana Caseiro

ESELx - Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa

anac@eselx.ipl.pt

Resumo: Esta comunicação insere-se no projeto *Flexibilidade de cálculo e raciocínio quantitativo* e tem como objetivo identificar que relações numéricas estabelecem os alunos. Começa por discutir o que se entende por uma aula exploratória em Matemática, por flexibilidade e fluência de cálculo, bem como a importância de reparar nos números, identificando relações numéricas. Foca-se depois na análise da resolução de uma tarefa, integrada numa sequência de tarefas, realizada numa turma do 2.º ano de uma escola pública de Lisboa. Os dados foram recolhidos através da observação participante, apoiada por gravações áudio e vídeo da aula e dos registos dos alunos. Os resultados mostram que quando os alunos são capazes de estabelecer relações numéricas entre os números envolvidos, não se focando nos procedimentos, mostram flexibilidade de cálculo e facilidade em lidar com os números. Os dados realçam ainda a importância da discussão coletiva para os alunos caminharem no processo de reparar nas relações numéricas em vez de se focarem apenas nos procedimentos.

Palavras-chave: flexibilidade de cálculo, relações numéricas, fluência de cálculo, aula exploratória.

Introdução

Esta comunicação insere-se no projeto *Flexibilidade de cálculo e raciocínio quantitativo* que tem como objetivo caracterizar o desenvolvimento do raciocínio quantitativo e da flexibilidade de cálculo dos alunos entre os 6 e os 12 anos e descrever e analisar práticas dos professores que facilitem esse desenvolvimento. O objetivo deste artigo é identificar que relações numéricas estabelecem os alunos durante a resolução de uma tarefa, designada *Cartões com números*, realizada numa turma do 2.º ano e integrada numa sequência de tarefas que visou desenvolver nos alunos a flexibilidade de cálculo. Embora o objetivo do artigo se foque nas aprendizagens dos alunos, estas são desenvolvidas no contexto de um ensino

exploratório, o que nos levou a estruturar o enquadramento teórico em duas secções: a primeira foca a aula de natureza exploratória, permitindo contextualizar e discutir depois os dados empíricos, nomeadamente no que se refere ao papel da fase de exploração autónoma e da discussão coletiva; a segunda incide na apresentação do quadro teórico relativo à flexibilidade de cálculo.

Enquadramento teórico

A aula exploratória

A prática de ensino exploratório da Matemática, tal como é referido por Canavarro (2011), advoga que “os alunos aprendem a partir do trabalho sério que realizam com tarefas valiosas que fazem emergir a necessidade ou vantagem das ideias matemáticas que são sistematizadas em discussão colectiva” (p. 11). Desta forma, os alunos são envolvidos no processo de ensino-aprendizagem, tornando-se construtores ativos do conhecimento matemático (NCTM, 2007), conseguindo atribuir significado à Matemática com que se estão a deparar, desenvolvendo, em paralelo, “capacidades matemáticas como a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática” (Canavarro, 2011, p. 11).

Desta forma, o papel do professor é crucial numa prática de ensino exploratório. Inicialmente, cabe-lhe a seleção de uma tarefa potenciadora, adequada ao seu objetivo, pois, tal como Boston e Wolf (2006) afirmam, a natureza da tarefa é um dos aspetos que mais influencia a aprendizagem dos alunos. Após essa seleção, tem o papel de delinear a melhor forma de explorar as potencialidades da tarefa, preparando-se para lidar com a complexidade inerente à sua exploração em sala de aula (Stein, Engle, Smith, & Hughes, 2008) e, também, para responder a possíveis dúvidas e questões dos alunos sem que para isso reduza o nível de exigência cognitiva da tarefa (Stein & Smith, 1998).

Segundo Stein et al. (2008), uma aula exploratória é geralmente estruturada em três fases: a fase de “lançamento” da tarefa, a fase de “exploração” da tarefa, e a fase de “discussão e sintetização”. Na fase de lançamento, o professor deve garantir que todos os alunos compreendem o que lhes é pedido que façam. Na segunda fase, cabe ao professor o acompanhamento e apoio ao trabalho dos alunos, garantindo que todos se mantêm envolvidos e interessados na resolução da tarefa. Paralelamente a esse trabalho, o professor deve selecionar as produções dos alunos que considera mais adequadas e ricas para a discussão coletiva, ordenando-as (Stein et al., 2008). Por fim, na terceira fase, e após seleção ordenada das produções a serem apresentadas, o professor deve gerir o momento da discussão, orientando para a compreensão das relações existentes entre as diferentes produções e dos aspetos matemáticos nelas envolvidos. Tal como refere Canavarro (2011), cabe ao professor convidar “os alunos a analisar, comparar e confrontar as diferentes resoluções apresentadas, identificar o que têm de semelhante ou de distinto, quais são as potencialidades e mais valias de cada uma delas, esperando que desta meta-análise retirem heurísticas para abordar tarefas futuras” (p. 16).

Por todos os desafios referidos, o ensino exploratório da Matemática é uma atividade complexa e considerada difícil por muitos professores (Franke, Kazemi, & Battey, 2007; Stein et al., 2008) mas com diversas potencialidades para a aprendizagem dos alunos.

Flexibilidade de cálculo

Tradicionalmente, a aritmética iniciava-se pela aprendizagem dos factos básicos, muitas vezes aprendidos isoladamente e através da repetição. Baroody (2006) afirma que uma melhor aprendizagem acontece quando ela tem como foco a estrutura, isto é, subjacentes padrões e relações. Pensando numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número (McIntosh,

Reys, & Reys, 1992), os factos básicos devem ser aprendidos integrados numa rede de ideias, princípios e processos. Deste modo, a fluência nos factos básicos é alcançada através do que Baroody (2006) denomina de memorização significativa em que a aprendizagem relacional tem um papel chave. Entende-se aqui por fluência de cálculo a capacidade para usar procedimentos de modo adequado, eficiente e flexível (NRC, 2001). Nesta perspectiva, é importante que os alunos compreendam a ideia da combinação – isto é, que um número pode ser composto pelas suas partes de diferentes formas. Por exemplo, se sabem que $8+1$, $7+2$, $4+5$ constituem diferentes formas de representar o 9, são capazes de reconhecer que $1+8$, $2+7$ ou $5+4$ são factos relacionados pois também “dão” 9. Deste modo, estes factos passam a estar relacionados entre si constituindo uma rede de ideias interrelacionadas.

O reconhecer e saber que a adição é comutativa leva que os alunos sejam capazes de obter uma combinação desconhecida a partir de uma conhecida (por exemplo, para calcular $3+5=?$, fazê-lo a partir de $5+3$ que sabem que é 8). Se os alunos dominam a ideia de dobro (por exemplo, $7+7=14$), podem utilizar o raciocínio do dobro mais 1 (e fazer por exemplo, $7+8=7+7+1=14+1$). Deste modo, as estratégias de cálculo são automatizadas, constituindo uma base para a fluência de cálculo.

Segundo Baroody e Rosu (2004), a evolução da fluência de cálculo implica a crescente integração dos conhecimentos factual, conceptual e procedimental. Os alunos que aprendem os factos básicos deste modo são capazes de usar esse conhecimento básico correta e rapidamente, de modo eficaz, aplicando-o quer em situações familiares quer não familiares evidenciando flexibilidade.

Para Gravemeijer, Bruin-Muurling, Kraemer e Stiphout (2016), os alunos devem construir uma realidade matemática na qual os números se tornam objetos de pensamento que retiram o seu significado de uma rede de relações numéricas. Afirmam que os alunos são capazes de compreender um conjunto de relações numéricas, por exemplo, $34+28=62$, $28+34=62$, $62-28=34$ ou $62-34=28$. Generalizando este tipo de relações chegam à relação da adição e subtração como operações inversas. As somas e diferenças tornam-se assim objetos matemáticos com os quais os alunos podem agir e raciocinar. Os autores consideram esta ideia fundamental para a aprendizagem da álgebra, pois só assim são capazes de raciocinar com expressões como $x-7$. De outro modo, quererão primeiro calcular $x-7=$.

Assim, os professores devem ajudar os alunos a construir ideias fortes (*big ideas*), como as de composição e decomposição de números em duas parcelas, utilizando materiais, sempre que necessário, mas também a estabelecer relações entre as operações, nomeadamente a relação entre adição e subtração. Na memorização dos factos básicos, os professores devem encorajar os seus alunos a olhar para padrões e relações, usando estas descobertas para construir estratégias de cálculo. Vários autores (Heirdsfield & Cooper, 2004; Star & Newton, 2009) definem flexibilidade de cálculo como o conhecimento de estratégias diversificadas e a capacidade para escolher a mais eficiente para um dado problema. A este modelo de escolha de estratégia, Threlfall (2009) apresenta um modelo alternativo, o *zeroing-in*, processo não totalmente consciente, que envolve reparar nos números e realizar cálculos exploratórios parciais, ocorrendo em simultâneo até emergir a estratégia e a solução do problema. Este autor dá o exemplo do cálculo $64-37$ para ilustrar este processo. Dependendo da sua compreensão conceptual e do seu conhecimento dos números, os alunos podem reparar nos números envolvidos no cálculo, estabelecendo relações com outros: 64 é menos um que 65; 37 é menos três que 40; 60 é o dobro de 30; 7 é metade de 14; 64 é o dobro de 32; 37 é mais dois que 35, o dobro de 37 é 74; 7 é quatro e três. O processo de reparar nos números pode conduzir a cálculos exploratórios parciais que o autor ilustra com o mesmo exemplo: $65-35$; $64-40$; $64-14$; $37-32$; $74-64$; $64-34$. Estes cálculos parciais não são suficientes para indicar a estratégia a usar, mas sugerem o que fazer a seguir. Por exemplo: partindo de $65-35$ para chegar ao $64-37$, ainda tem de subtrair 3 ao 30; usando $64-40$, tem de adicionar 3 ao 24; em

64-14, subtrair 30 ao 50 e adicionar 7; em 37-32, subtrair 5 ao 32 obtido em 64-32; em 74-64, subtrair 10 ao 37 obtido em 74-37; e em 64-34, subtrair 3 ao 30. Assim, os números do problema não são considerados para decidir e escolher uma estratégia mas sim considerados para decidir o que fazer em seguida como, por exemplo, decompor o número de modo a facilitar o cálculo (nem sempre implica que seja uma decomposição pelas ordens; por exemplo, decompondo 64 em 34+30), aproximar o número à dezena ou a outros números que facilitem o cálculo (aproximando o 37 ao 40, ou aproximando o 64 ao 65 e o 37 ao 35), combinar as ordens separadamente ($60-30=30$; $4-4=0$; $30-3=27$) ou procurar dobros ou quase dobros ($74=37+37$).

Metodologia

Este estudo segue uma metodologia qualitativa de caráter interpretativo, visando a descrição e a explicação interpretativa de um fenómeno educacional (Erickson, 1986). O projeto, onde se insere, utiliza uma metodologia de investigação baseada em design, visando produzir teorias locais de ensino (Cobb & Gravemeijer, 2008) que possam constituir materiais de trabalho para o professor.

Os dados aqui apresentados foram recolhidos numa turma do 2.º ano com 25 alunos de uma escola pública de um bairro de Lisboa. A professora da turma é uma professora experiente, empenhada no seu desenvolvimento profissional, com uma boa relação com a matemática, respondendo sempre de modo afirmativo a propostas que ela considere que a enriquecem profissionalmente. Assim, dispôs-se a colaborar com a equipa do projeto, discutindo as tarefas e aplicando-as na sua sala de aula ao ritmo de uma por semana.

A tarefa analisada nesta comunicação, *Cartões com números* (a terceira de uma sequência de cinco tarefas) foi apresentada e resolvida pela turma na aula de 28 de outubro de 2015. Foram distribuídos aos alunos um conjunto de cartões, onde estavam registadas as seguintes expressões:

11+ 25	50 - 25	19 + 25	25 + 21	100 - 52
25 +25	50 - 21	50 - 30	52 - 30	100 - 48
25 +9	20 +25	50 - 20	100 - 50	52- 29

Figura 1 – Tarefa *Cartões com números* - expressões representadas nos cartões

Foi-lhes pedido que começassem por separar os “cartões que sabem” dos “cartões que não sabem”. A segunda questão era: “Consegues chegar ao valor dos que não sabes, utilizando os cartões que sabes? Como?”.

Pretendia-se que os alunos “reparassem” nos números e fossem capazes de estabelecer relações numéricas do tipo $n+1$ e $n-1$, por exemplo em $11+25$, os alunos reconhecerem que 11 é $10+1$, por isso podem calcular $10+25$, e juntar 1. Em outras situações, pode dar jeito arredondar para a dezena mais próxima, o compreender que 19 é próximo de 20 e retirar 1. A relação dobro/metade está presente em várias situações, por exemplo $25+25$ ou $50-25$, mas também em $100-52$ ou $100-48$, lembrando que 100 é o dobro de 50. O conhecer as características dos números implica usar, de modo dinâmico, o conhecimento do número e das suas relações, vendo as expressões apresentadas como números e não como um cálculo a efetuar, daí o aparecerem sem o sinal de igual no final da expressão.

A tarefa foi apresentada à turma, resolvida em trabalho autónomo pelos alunos organizados em pares e realizada posteriormente a discussão coletiva.

Os dados foram recolhidos através da observação participante das duas primeiras autoras, apoiada pela gravação áudio e vídeo das resoluções dos alunos e da discussão coletiva. Foram também recolhidos os trabalhos dos alunos. Durante o trabalho autónomo, foram videogravados dois pares de alunos, selecionados, segundo orientação da professora da turma, por terem facilidade em estabelecer interações durante a resolução das tarefas. O presente artigo foca-se apenas num desses pares, Luís e Lúcia, no que respeita à fase de exploração da tarefa.

Para analisar os dados, foram usadas categorias analíticas do quadro teórico de Threlfall (2009), apresentadas na Tabela 1.

Tabela 1 – Categorias analíticas

Categoria	Descrição
Processo de reparar	Reparar nos números e nas relações que se podem estabelecer entre eles.
Cálculos exploratórios parciais	Os cálculos exploratórios parciais decorrem do conhecimento pessoal dos alunos acerca dos números e das propriedades das operações quando este é usado para derivar.
Relações numéricas	O modo de relacionar os números para resolver o problema e alcançar a solução das situações de cálculo.
Estratégias de cálculo	O modo de relacionar as operações e usar as suas propriedades para resolver o problema e alcançar a solução das situações de cálculo.

Apresentação e discussão dos resultados

Explorando a tarefa

O par Luís e Lúcia, à medida que ia tirando os cartões, ia registando na folha as expressões e respetivos resultados. O Luís revelou um cálculo muito rápido, antecipando-se à Lúcia, e assim todos os resultados foram verbalizados pelo Luís, sendo que, na maior parte dos casos, Lúcia limitou-se a escrever o resultado indicado por Luís. O único cartão cujo cálculo foi efetuado por Lúcia foi $25+9$, sendo que contou pelos dedos, não tendo utilizado qualquer estratégia de cálculo. A aluna, após registados todos os cálculos na coluna da esquerda, verbalizou: "Eu só sabia uma. O resto era tudo difícil para mim". No entanto, ainda contribuiu para o cálculo de $25+25$, referindo com grande segurança ser 50 após Luís verbalizar inicialmente 40. Passemos a documentar o processo de resolução da tarefa por este par.

O primeiro cartão retirado foi $100-48$. Após Luís dizer à colega "Não sabemos rapidamente", ambos registam a expressão na coluna da direita, passando aos cartões seguintes. Os cartões seguintes foram registados na coluna da esquerda, sendo que os resultados das operações eram registados de imediato. O cartão $52-29$ foi registado na coluna da direita, após Luís reconhecer: "Não sabemos". A produção deste par encontra-se na Figura 2.

Sei rapidamente o valor	Não sei rapidamente o valor
$100 - 52 = 48$	$100 - 48 = 100 - 40 - 8 = 62$
$100 - 50 = 50$	$52 - 29 = 50 - 20 - 2 - 7 = 43$
$52 - 30 = 22$	
$25 + 21 = 46$	
$50 - 20 = 30$	
$50 - 30 = 20$	
$19 + 25 = 44$	
$20 + 25 = 45$	
$50 - 25 = 35$	
$50 - 21 = 39$	
$25 + 9 = 34$	
$25 + 25 = 50$	
$11 + 25 = 36$	

Figura 2 – Produção do par Luís e Lúcia

De entre as expressões colocadas na coluna da esquerda, a maior parte foi objeto de uma resposta imediata pelo Luís, constituindo factos básicos para este aluno, mas duas delas (100-52; 19+25) requereram a utilização de estratégias, tal como se pode verificar no seguinte extrato:

Luís (*falando para Lúcia, com o cartão 100-52 na mão*) - Já sei quanto é! É 42. Ai, é 48! 100-52 é 48.

Professora (*aproxima-se do par*) - Porquê?

Luís - Porque 100 menos 50 é 50, menos 2, é 48.

(...)

Luís (*falando para Lúcia*) - 19+25, 30... (*aponta para o 25 no cartão*), 40, dá 44. 44. Dá 44.

No cartão 100-52, infere-se que Luís começou por *reparar* no 52, realizando mentalmente, e sem verbalizar, o *cálculo exploratório parcial* $52-50=2$. Seguidamente, usou o facto básico $100-50=50$ (sem relacionar com a expressão do cartão seguinte, ainda não retirado), mobilizando a *relação numérica* entre 100 e 50, para então utilizar a *estratégia* da compensação, retirando 2 ao resultado 50 para obter 48, já que 50 é menos 2 do que 52. Apesar da precipitação inicial quando verbaliza 42, muito rapidamente Luís retifica para 48, e se não fosse a interpelação da professora, provavelmente nem chegaria a verbalizar o seu raciocínio. O modo como o Luís chega ao resultado 48 parece estar em consonância com a simultaneidade de processos indicada por Threlfall (2009), ao caracterizar o *zeroing-in*.

No cartão 19+25, Luís parece *reparar* no número 25, quando aponta para o mesmo. Poderemos inferir que quando diz 30, realizou mentalmente os *cálculos exploratórios parciais* $25+5=30$ e $19=10+(5+4)$. Seguidamente, Luís parece adicionar, sucessivamente, à soma 30, obtida parcialmente, as restantes parcelas resultantes da decomposição do 19 ($30+10=40$; $40+4=44$), por meio da *estratégia* da decomposição de uma das parcelas (19) da

expressão em causa e da aproximação de uma das parcelas (25) à dezena mais próxima, envolvendo, assim, as *relações numéricas* entre 25 e 30 e entre 19 e os seus componentes. Também aqui encontramos alguma evidência da emergência desta estratégia decorrente dos processos de reparar e de fazer cálculos exploratórios parciais, ao invés de uma escolha deliberada de uma dada estratégia.

Como se pode verificar na Figura 2, duas das expressões colocadas à esquerda apresentam erros de cálculo: " $50-25=35$ "; e " $50-21=39$ ". Nenhuma destas expressões foi objeto de reflexão por partes dos alunos do par, que revelaram grande segurança na sua correção quando as registaram. Daí que não tivesse sido estabelecida qualquer relação entre estas expressões e outras, já registadas antes ou posteriormente. Por exemplo, os alunos revelaram dominar como facto básico $25+25=50$, o qual poderia ter sido usado para calcular $50-25$. No caso de $50-21$, os alunos não relacionaram com o cartão anterior $50-20$, e assim não utilizaram um raciocínio análogo ao usado no primeiro cartão $100-52$.

No que respeita às expressões colocadas à direita, para $100-48$, Luís pegou no cartão $100-50$ e tentou relacionar com o facto básico $100-50=50$. No entanto, revelou dificuldade em fazê-lo, e após verbalizar "menos 2", acabou por cair num impasse. Assim, Luís parece *reparar* que 48 é menos dois que 50, mas não consegue lidar com a dificuldade associada à compensação, que implicaria adicionar 2 ao resultado 50. A dificuldade aqui evidenciada, que não ocorrera para o cartão $100-52$, pode dever-se ao facto de, neste caso, a compensação ser aditiva, de natureza inversa ao cálculo a efetuar. Passado algum tempo de impasse, Luís decidiu usar um outro facto básico, $100-40$, apesar de não estar em nenhum cartão, falando para Lúcia: "100 menos 40 é 60. Menos 8, 62". E ambos os alunos registaram este cálculo na coluna da direita. Luís usa a *estratégia* da decomposição do 48 nas suas ordens, fazendo subtrações sucessivas, mas acaba por errar o cálculo de $60-8$, sem se dar conta de que estava a obter um número maior do que 60. Neste cálculo, atendeu simplesmente à decomposição do 10 em 8 e 2, esquecendo que teria de retirar uma dezena a 60.

Também a expressão $52-29$ levantou dificuldades, apresentando erros de cálculo. Vejamos o respetivo extrato:

Luís (*falando para Lúcia*) - Olha, 30. $50-20$, é o que temos de fazer. Dá 30.

Lúcia - Mais 2.

Luís - Menos dois!

Lúcia - Menos 9, menos 2.

Luís - Dá 30. Agora, $32-9$ dá... Olha, pensa... $52-9$. Quanto é $52-9$? $52-9$? $52-2$, dá...

Lúcia - Menos 9, menos 2.

Luís - Távamos [sic] no 32. Menos 2...

Lúcia - Menos 2, menos 9!

Luís - Menos 2 que dá...

Lúcia - Um número amigo! 20!

Luís - Não, dá 50. Olha, $9-2$? Eu sei quanto é. É 7. Agora, menos 7, dá 43. Ou seja, igual a $50-20-2-7$. É 43 (*registista na folha*).

Luís parece usar, inicialmente, a *estratégia* de decomposição dos números nas suas ordens, operando $50-20$. Depois de alguma controvérsia entre Luís e Lúcia sobre o que fazer a seguir, se adicionar ou subtrair 2, atendendo ao algarismo das unidades de 52, Luís acaba por aceitar a sugestão inicial de Lúcia (imediatamente após ter negado a ideia "Menos dois!") e decide

subtrair 9 a 32, o que daria um resultado correto. Face à dificuldade em calcular $32-9$, Luís opta por subtrair 9 ao aditivo considerado no seu todo ($52-9$) e mais uma vez não consegue realizar o cálculo. Segue-se alguma confusão, com Luís a focar-se em $52-2$, voltando de novo a 32 para subtrair 2 (com Lúcia a enganar-se no respetivo resultado, ao verbalizar 20 como um "número amigo", isto é, um número múltiplo de 10) até que Luís parece voltar a incidir na decomposição do número nas ordens, determinando agora a diferença entre as unidades — $2-9 = -7$. Embora Luís tenha invertido a ordem da operação com $9-2$, fica em aberto se existiu compreensão associada à natureza dessa diferença que o levasse a subtrair 7, ou se o fez por o cálculo em causa se tratar de uma subtração. Assim, o facto de a confusão instalada ter levado Luís a reter-se em 50 como resultado de $52-2$ fez com que chegasse ao resultado 43 após subtrair 7. Ou seja, se tivesse retomado o procedimento inicial de obtenção de 30 ($50-20=30$) e subtraído depois 7, teria obtido o resultado correto, 23. O registo efetuado revela também a confusão associada a este cálculo com o registo de "-2-7" que acabou por não ser efetuado. Este é um exemplo ilustrativo da dificuldade em obter um resultado correto neste tipo de subtrações, em que o algarismo das unidades do aditivo é menor do que o algarismo das unidades do subtrativo, quando se usa a estratégia da decomposição do número em ordens. Esta dificuldade poderia ter sido minimizada se por exemplo, os alunos tivessem relacionado esta expressão com o cartão 52-30, cujo resultado já tinha sido escrito na coluna da esquerda.

A discussão da tarefa

Todos os cartões foram afixados no quadro. Seguidamente, a professora iniciou a discussão, pedindo para os alunos indicarem quais os cartões que tinham sido mais difíceis. Pediu ao par Gil e Mónica para ir ao quadro. Apresentamos o extrato do diálogo que se seguiu.

Professora - Vamos ver se conseguimos, a partir dos outros cartões, ajudar...

Gil retira o cartão 100-48 como tendo sido difícil.

Professora - Qual é o cartão parecido com este que possa ajudar?

Gil retira o cartão 100-50 e coloca-o por baixo de 100-48 e Mónica retira 100-52, colocando-o por baixo.

Professora - Porque é que esse (*referindo-se a 100-52*) também pode ajudar?

Alexandre e Maria vão ao quadro para apresentarem as suas justificações.

Alexandre - Este (*apontando para 100-50*) ajuda mais do que este (*apontando para 100-52*).

Professora - Porquê?

Alexandre - Porque este (*apontando para 50*) é metade deste (*apontando para 100*).

Professora - Porque 50 é metade de 100. Quanto é que dá 100-50, Mónica?

Maria - Porque 50 está mais perto de 48.

Professora - Então quanto é 100-50?

Alexandre - Este (*apontando para 100*) menos 50 vai dar 50.

Professora (*registra "=50" à frente do cartão 100-50*) - Como é que este pode ajudar a fazer 100-48? Vamos pensar.

Alexandre - 100-52 é 48.

Professora - Como sabes?

Alexandre - Se 100-50 é 50, então tira-se mais 2 e vai dar 48.

Professora - Tira-se 2, aonde?

Alexandre (*apontando para o resultado de 100-50*) - Ao 50.

Renato (*apontando para 100-48*) - Aqui é 52.

Professora - Porquê?

Renato - Porque 100-50 vai dar 50. E como 48 é menos 2, vai dar 52.

Como podemos verificar pelo extrato, os alunos conseguiram descobrir novos resultados a partir do facto conhecido $100-50=50$, estabelecendo relações numéricas de mais 2 e menos 2 do que 50 (resultado de $100-50$), pelo processo de repararem nas relações entre o subtrativo 50 e os subtrativos dos outros dois cartões. Este facto conhecido tem por base a ideia de dobro e de metade.

Seguidamente, a professora retirou os cartões 100-52 e 100-48 e colocou-os por baixo do cartão 100-50, registando à frente os respetivos resultados (Figura 3), chamando a atenção dos alunos para a relação entre eles.

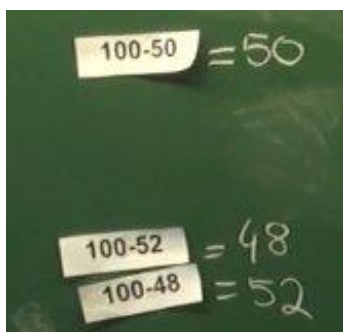


Figura 3 – Relações numéricas a partir do facto 100-50

Para conseguirem explicitar a relação entre os dois cartões de baixo, os alunos propuseram-se dar outros exemplos de números em que se verificasse o mesmo tipo de relação. Alexandre começou por escrever no quadro " $100-51=47$ ". Vejamos o diálogo que se seguiu:

Professora - Ao 100, se tirar 51, fico com 47? (*aponta para os números no quadro ao mesmo tempo que os verbaliza*) Alexandre, se ao 100, tirar 50, fico com 50. Ao 100, se eu tirar 51, fico com 47, perco logo 3, daqui (*aponta para 50*) para aqui (*aponta para 47*)?

Paulo - Não, perdes 1. Dá 49.

Alexandre - Dá 49. (*retifica*)

(...)

Professora - E agora?

Paulo - $100-49=51$ (*Alexandre regista no quadro*)

Professora - Então, porque é que aparece trocado? Já perceberam que se pode trocar. Porquê? Porque é que se pode trocar?

Os alunos não respondem por um breve momento.

Professora - Se calhar, se pensarmos ao contrário, ajuda um bocadinho...

Luís (*dirige-se ao quadro e aponta para os números quando os verbaliza*) - Porque $49+51$ dá 100 e $51+49$ dá 100. (*aponta para os cartões de cima*) $48+52$ dá 100. E $52+48$ dá 100.

(...)

Luís - E acontece em tudo.

O exemplo de Alexandre (Figura 4) acabou por suscitar mais uma vez o estabelecimento da relação numérica com o facto $100-50=50$, já que o aluno tinha compensado com menos 3, quando deveria ter compensado com menos 1. A professora questionou os alunos sobre o porquê de se poder trocar numa subtração o subtrativo e a diferença, e perante algum impasse, sugeriu que pensassem na operação inversa ("se pensarmos ao contrário").

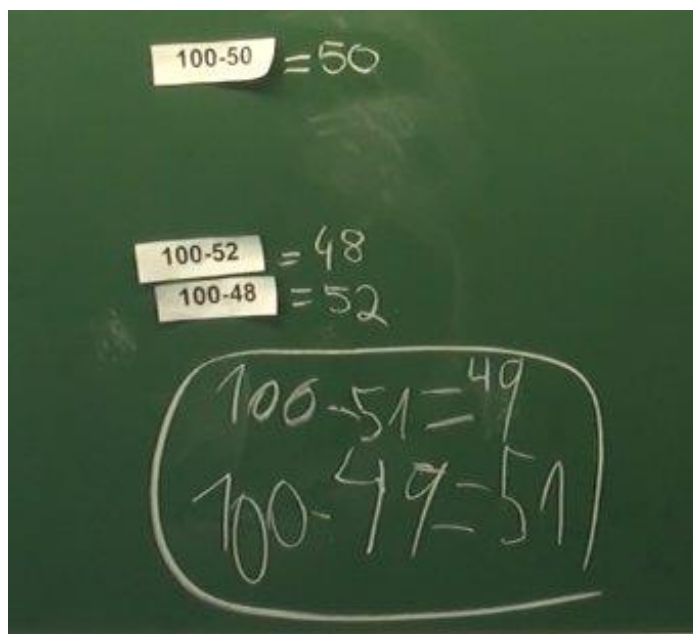


Figura 4 – Exemplo ilustrativo da relação parte-todo

Assim, Luís justifica essa troca com a explicitação da propriedade fundamental da subtração, verbalizada através do exemplo: o aditivo é igual à soma do subtrativo com a diferença. Poderemos inferir que, implicitamente, Luís compreende que se retirar uma parte x a um todo, obtendo y , então se retirar a parte y a esse todo, irá obter x , já que a união das duas partes constitui o todo. Parece verificar-se também uma compreensão implícita da propriedade comutativa da adição na explicitação da propriedade da subtração: $x+y=y+x$ ("Porque $49+51$ dá 100 e $51+49$ dá 100"). Apesar de Luís se apoiar em exemplos concretos, ele generaliza a todas as situações do mesmo tipo quando verbaliza "E acontece em tudo".

Esta discussão contribuiu para a construção de uma rede de relações numéricas em torno do número de referência 100, suportada pelas relações entre a parte e o todo, em que os números são decompostos e recompostos de diversas maneiras, bem como pela relação entre a subtração e a adição. Por um lado, o 100 foi visto como objeto mental expresso de múltiplos modos: $50+50$, $52+48$, $48+52$, $51+49$, e $49+51$. Por outro lado, a professora conduziu a discussão de modo a que os alunos compreendessem que tanto podiam usar a adição como a subtração para expressar essas relações.

A professora deu continuidade à discussão da tarefa solicitando aos alunos mais um cartão que tivesse sido difícil. O par Paulo e João foi ao quadro, tendo colocado o cartão $52-29$ como difícil. Quando a professora perguntou se existiria algum cartão que pudesse ajudar, Paulo retirou o cartão $50-30$. Maria sugeriu o cartão $50-20$ e Santiago retirou o cartão $50-29$. Após alguma discussão em torno do cartão $50-20$, os alunos acabaram por considerar que pouco

ajudava por 20 estar muito distante do 29 e assim, este cartão foi colocado de novo junto dos restantes, seguindo-se o diálogo seguinte:

Professora - Quanto é 50-30?

Paulo - É 20 (*escreve no quadro à frente do cartão*).

Professora - Quanto é 50-29? (*Paulo regista 19 no quadro à frente do respetivo cartão*)

Professora - 19? (*aproxima-se do quadro*) 50 menos 30 é 20. Aqui tiras menos 1 (*aponta para 29*), tem de lá ficar.

Paulo retifica para 21.

Professora - O que é que se passa daqui (*aponta para 50 no cartão 50-29*) para aqui (*aponta para 52*)?

Paulo - É mais 2.

Professora - Numa subtração, nós já vimos que se queremos manter o resultado, o que eu faço no aditivo, tenho de fazer no subtrativo (*aponta para os respetivos números*). Se eu só estou a fazer no aditivo, o resultado vai mudar. Se eu estou a pôr mais 2, o que vai acontecer aqui (*aponta para o local à frente do sinal de igual em 52-29*)?

Paulo - É mais 2 ou menos 2?

Professora - Boa questão. Vocês já sabem que quando eu aumento 1 ao aditivo, tenho que aumentar 1 ao subtrativo. Não estou a mexer no subtrativo (*aponta para os cartões 50-29 e 52-29*), estou a mexer aqui (*aponta para os aditivos dos cartões*). Faço mais 2. Mas aqui (*aponta para os subtrativos dos cartões*) não faço mais 2. O que é que acontece na resposta? Vai mudar.

Aluno - É 23. (*Paulo regista 23*)

Professora - Se eu estou a pôr mais 2 aqui (*aponta para 52*), estou a tirar o mesmo (*aponta para 29*), fico com mais 2, é o que está a dizer (*refere-se ao aluno que disse 23 cujo nome é inaudível*).

Os cartões que auxiliaram a determinar 52-29 encontram-se na Figura 5.



Figura 5 – Relações numéricas a partir do facto 50-30

O efeito inverso da compensação consoante a alteração seja no aditivo ou no subtrativo suscita alguma dificuldade aos alunos. Em 50-29, foi retirado 1 ao subtrativo (de 50-30), e o resultado tem de ser compensado de forma inversa com mais 1. Em 52-29, foi acrescentado 2 ao aditivo, e o resultado tem de ser compensado também acrescentando 2. A professora começou por lembrar a propriedade da invariância do resto para os alunos compreenderem que se só se alterar um dos termos da subtração, então essa alteração terá de ser compensada na diferença. A professora tentou, ainda, que os alunos entendessem o efeito da compensação simplesmente pelo significado do subtrativo ("Aqui tiras menos 1, tem de lá ficar") e do aditivo ("Se eu estou a pôr mais 2 aqui, estou a tirar o mesmo, fico com mais 2"), sem sentir necessidade de exemplificar com situações contextuais. Também aqui é de sublinhar o papel da professora ao guiar os alunos no estabelecimento de relações numéricas.

Conclusão

O processo *zeroing-in* descrito por Threlfall (2009) parece evidenciar-se no modo como Luís alcança as soluções de $100-52$ e $19+25$, estabelecendo relações numéricas em processos que ocorrem simultaneamente. Luís relaciona os cálculos desconhecidos com factos numéricos que domina, embora nem sempre tirando partido dos cartões disponibilizados. A flexibilidade associada às relações numéricas distingue-se marcadamente dos procedimentos processuais (Gravemeijer et al., 2016) usados por Lúcia, quando esta usa o processo de contagem pelos dedos, ou por Luís quando este usa o procedimento da decomposição dos números em ordens, em $52-29$.

A oscilação verificada entre o estabelecimento de relações numéricas e o uso de procedimentos que, além de terem conduzido a soluções incorretas, não se encontram plenamente ancorados numa base compreensiva de sentido de número (McIntosh et al., 1992), releva para a importância da fase de discussão coletiva (Stein et al., 2008) enquanto momento de socialização dos raciocínios desenvolvidos pelos alunos. É nesta fase que a professora potencia o estabelecimento de relações numéricas que levem os alunos a alcançar novas soluções a partir de factos numéricos conhecidos. Assim, a discussão ocorrida nesta turma contribuiu para a criação de uma rede de relações numéricas (Baroody, 2006) em que os números são encarados como objetos mentais (Gravemeijer et al., 2016) e simultaneamente como processos operatórios, ao serem decompostos e recompostos. Em particular, o foco que a professora fez da relação entre $100-52$ e $100-48$ levou os alunos à generalização da adição e subtração como operações inversas e da relação parte-todo, tendo contribuído para a construção do 100 (enquanto número de referência) como objeto mental e para o desenvolvimento de um raciocínio flexível envolvendo as somas e diferenças decorrentes dessa relação, tal como advogado por Gravemeijer et al. (2016).

Agradecimento

Este artigo foi desenvolvido no quadro do Projeto *Flexibilidade de cálculo e raciocínio quantitativo* financiado pelo Instituto Politécnico de Lisboa.

Referências

- Baroody, A. J. (2006). Why children have difficulties mastering the basic number combinations and how to help them. *Teaching Children Mathematics*, 13(1), 22-31.
- Baroody, A. J., & Rosu, L. (2006, April). Adaptive expertise with basic addition and subtraction combinations – the number sense view. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, San Francisco, CA.
- Boston, M., & Wolf, M. K. (2006). *Assessing academic rigor in mathematics instruction: The development of the instructional quality assessment toolkit*. CSE Technical Report 672 (No. 672). Los Angeles, CA: National Center for Research on Evaluation, Standards, and Student Testing (CRESST).
- Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática*, 115, 11-17.
- Cobb, P., & Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support learning and understand learning processes. In A. E. Kelly, R. A. Lesh, & J. Y. Baek (Eds.), *Handbook of design research methods in education* (pp. 68-95). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

- Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (3.^a ed.). New York: Macmillan.
- Franke, K. L., Kazemi, E., & Battey, D. (2007). Mathematics teaching and classroom practice. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 225-356). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Gravemeijer, K., Bruin-Muurling, G., Kraemer, J.-M., & van Stiphout, I. (2016). Shortcomings of mathematics education reform in The Netherlands: A paradigm case? *Mathematical Thinking and Learning*, 18(1), 25–44. <http://doi.org/10.1080/10986065.2016.1107821>
- Heirdsfield, A., & Cooper, T. J. (2004). Factors affecting the process of proficient mental addition and subtraction: Case studies of flexible and inflexible computers. *The Journal of Mathematical Behavior*, 23(4), 443-463.
- McIntosh, A., Reys, B., & Reys, R. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, 12, 2-8.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar* (M. Melo, Trans.). Lisboa: APM.
- National Research Council (NRC) (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. In J. Kilpatrick, J. Swafford, & B. Findell (Eds.). Washington, DC: National Academy Press.
- Star, J. R., & Newton, K. J. (2009). The nature and development of experts' strategy flexibility for solving equations. *ZDM Mathematics Education*, 41(5), 557-567.
- Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3, 268–275.
- Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Helping teachers learn to better incorporate student thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(4), 313-340.
- Threlfall, J. (2009). Strategies and flexibility in mental calculation. *ZDM Mathematics Education*, 41(5), 541-555.