



CONHECIMENTO DOS ALUNOS SOBRE GEOMETRIA NO INÍCIO DO 3.º CICLO

Dissertação apresentada para obtenção do grau de Mestre em Educação
Matemática na Educação Pré-Escolar e nos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico

Conceição Vanessa Açucarinho Tavares

2014



CONHECIMENTO DOS ALUNOS SOBRE GEOMETRIA NO INÍCIO DO 3.º CICLO

Dissertação apresentada para obtenção do grau de Mestre em Educação
Matemática na Educação Pré-Escolar e nos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico

Orientadora: Professora Doutora Maria Cecília Monteiro

Conceição Vanessa Açucarinho Tavares

2014

*Para a minha Avó Kika
que sempre quis que eu chegasse ao fim desta caminhada.*

*"Cada um que passa em nossa vida,
passa sozinho, pois cada pessoa é única
e nenhuma substitui outra.
Cada um que passa em nossa vida,
passa sozinho, mas não vai só
nem nos deixa sós.
Leva um pouco de nós mesmos,
deixa um pouco de si mesmo.
Há os que levam muito,
mas há os que não levam nada.
Essa é a maior responsabilidade de nossa vida,
e a prova de que duas almas
não se encontram ao acaso."*

Antoine de Saint-Exupéry

RESUMO

O presente estudo visa compreender e avaliar os conhecimentos que alunos no início do 3º ciclo possuem, relativamente aos conceitos de triângulo, paralelogramo, retângulo e quadrado. Com este propósito foram formuladas as seguintes questões orientadoras da investigação: 1. Que compreensão dos conceitos de triângulo, paralelogramo, retângulo e quadrado têm os alunos à entrada do 3º ciclo? a) Que figuras é que os alunos identificam como triângulo, paralelogramo, retângulo e quadrado? b) De que forma é que os alunos definem um triângulo, um paralelogramo, um retângulo e um quadrado? c) Que conhecimento têm os alunos sobre as propriedades dos triângulos, paralelogramos, retângulos e quadrados? 2. Quais as dificuldades (mal-entendidos) dos alunos relativamente aos conceitos de triângulo, paralelogramo, retângulo e quadrado?

A investigação seguiu uma abordagem metodológica mista: qualitativa e quantitativa. A recolha de dados teve por base a aplicação de um questionário a 25 alunos do 7º ano de escolaridade. O processo de análise dos dados teve em conta o objetivo do estudo, as questões de investigação e a literatura especializada.

Através da análise dos dados recolhidos foi possível verificar que os alunos revelam mal-entendidos relacionados com os conceitos de triângulo, paralelogramo, retângulo e quadrado, evidenciando na sua maioria, uma correspondência destes conceitos a exemplos protótipos das figuras em estudo, dando mais importância aos atributos não críticos, como o tamanho e a posição das figuras. Os participantes recorrem a imagens mentais que possuem para classificarem figuras, em vez de utilizarem definições referindo propriedades associadas ao conceito. Os alunos evidenciam ainda dificuldades nas classificações inclusivas, levando-os, nalguns casos, a excluir o quadrado ao classificar retângulos e a excluir retângulos e losangos quando classificam paralelogramos.

Verifica-se, ainda, que alguns alunos possuem um fraco conhecimento sobre as propriedades (atributos críticos) das figuras, bem como, sobre os conceitos de diagonal, ângulo, perpendicularidade e paralelismo, que estão intrinsecamente associados aos conceitos das figuras em estudo.

Palavras-chave: Geometria, triângulo, paralelogramo, retângulo, quadrado, protótipos, propriedades, atributos críticos, atributos não críticos, classificações inclusivas.

ABSTRACT

The current study aims to understand and assess students' knowledge at the beginning of the 3rd cycle regarding the concepts of triangle, parallelogram, rectangle and square.

With this purpose the following questions concerning the research were posed:

1) what understanding do the students have of the concepts of triangle, parallelogram, rectangle and square at 3rd cycle entry? a) What shapes do the students identify as triangle, parallelogram, rectangle, and square? b) In what way do the students define a triangle, a parallelogram, a rectangle and a square? c) What knowledge do the students have of the properties of triangles, parallelograms, rectangles and squares? 2) what difficulties (misunderstandings) do the students have as far as the concepts of triangle, parallelogram, rectangle, square are concerned?

The research followed a mixed methodological approach: both qualitative and quantitative. Data collection was based on a questionnaire carried out to 25 seventh-graders. The data analysis process took into account the purpose of the study, the research questions and specific literature.

Upon analysing the data collected, it was observed that students have misunderstandings regarding the concepts of triangle, parallelogram, rectangle and square. The majority of students make a mismatch between these concepts and prototype examples of the shapes under study, giving more importance to non-critical attributes, such as the size and the position of shapes.

The participants resort to mental images they have to classify shapes, instead of using the settings to refer to properties associated with the concept.

Students also showed difficulties in inclusive scoring, leading them in some cases to exclude the square when classifying rectangles, and excluding rectangles and diamonds when classifying parallelograms.

It was also observed that some students have poor knowledge of the properties (critical attributes) of the shapes, as well as the diagonal concepts, angle, perpendicular and parallelism, which are intrinsically linked to the concepts of the shapes in the study.

Keywords: geometry, triangle, parallelogram, rectangle, square, prototypes, properties, critical attributes, non-critical attributes, inclusive scoring.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço à minha orientadora, Professora Doutora Maria Cecília Monteiro, pela sua disponibilidade, pelos seus ensinamentos e por todo o apoio ao longo deste trabalho. A sua ajuda foi fundamental para concluir esta longa caminhada.

À Anabela por me ter ajudado a dar os primeiros passos neste caminho e aos alunos participantes neste estudo, pela sua colaboração e empenho.

Aos meus Pais por me terem apoiado incondicionalmente. Por tudo aquilo que fizeram e que abdicaram para que eu pudesse concluir este estudo.

Aos meus Padrinhos por terem sido aquela luz sempre presente.

Agradeço, em especial, à Ana pelas *partilhas e reflexões matemáticas* e por ter estado sempre presente, com as palavras certas e os silêncios necessários.

À Isabel pelas partilhas e reflexões sobre o ensino, sobre os sonhos, a magia e as crianças. Pelos sorrisos constantes. Por ter-me mostrado que o *essencial é invisível aos olhos*.

À Isilda e à Mónica pelas palavras de encorajamento.

Aos meus alunos que todos os dias plantaram sorrisos para me oferecer.

Aos meus amigos, em especial à minha avozita Ana, à Vanessa e ao meu afilhado, por estarem presentes sempre que precisei e compreenderem as longas ausências.

A todos aqueles que me ajudaram e que acreditaram no meu trabalho.

ÍNDICE

ANEXOS	VII
ÍNDICE DE QUADROS	VII
ÍNDICE DE FIGURAS.....	VIII
CAPÍTULO 1 - PROBLEMA E CONTEXTO DO ESTUDO	1
1.1 - ENQUADRAMENTO E PERTINÊNCIA DO ESTUDO	1
1.2- OBJETIVO E QUESTÕES DO ESTUDO	4
1.3 - MOTIVAÇÃO.....	4
1.4 - ORGANIZAÇÃO DO ESTUDO.....	6
CAPÍTULO 2 - REVISÃO DA LITERATURA.....	8
2.1- O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO E A FORMAÇÃO DE CONCEITOS GEOMÉTRICOS	8
2.1.1. <i>Os níveis de aprendizagem da geometria de Van Hiele.....</i>	<i>8</i>
2.1.2. <i>O modelo de formação de conceitos de Klausmeier (1977).....</i>	<i>15</i>
2.1.3. <i>Representações mentais de conceitos geométricos</i>	<i>18</i>
2.1.4. <i>Exemplos e contraexemplos.....</i>	<i>23</i>
2.2 - ENSINO E APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA	24
2.2.1. <i>Estudos sobre o ensino e aprendizagem da Geometria</i>	<i>25</i>
2.2.2. <i>Alguns resultados da investigação sobre ensino e aprendizagem das figuras geométricas ...</i>	<i>27</i>
2.3 - A IMPORTÂNCIA DA GEOMETRIA NOS CURRÍCULOS NACIONAIS	36
2.3.1. <i>Orientações curriculares sobre o ensino da Geometria</i>	<i>36</i>
2.3.1.1 - Currículos internacionais	36
2.3.1.2 - Currículos nacionais.....	38
CAPÍTULO 3 - METODOLOGIA	44
3.1 - OPÇÕES METODOLÓGICAS	44
3.2 - CARACTERIZAÇÃO DOS PARTICIPANTES	46
3.3 - PROCESSO DE CONSTRUÇÃO DO INSTRUMENTO DE RECOLHA DE DADOS	47
3.3.1.- <i>Construção do questionário.....</i>	<i>47</i>
3.3.2. - <i>Fundamentação das questões</i>	<i>49</i>
3.4 - PROCESSO DE RECOLHA DE DADOS	50
3.5 - PROCESSO DE ANÁLISE DE DADOS.....	51

CAPÍTULO 4 - ANÁLISE DOS DADOS E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	53
4.1 - ANÁLISE DAS RESPOSTAS DOS ALUNOS POR TÓPICO	53
4.1.1 - <i>Triângulos</i>	53
4.1.1.1 - Identificação de triângulos - Questão 1	53
4.1.1.2 - Definição de triângulo - Questão 2	57
4.1.1.3 - Propriedades dos triângulos - Questão 13	60
4.1.1.4 - Propriedades dos triângulos - Questão 18	62
4.1.1.5 - Propriedades dos triângulos - Questão 19	62
4.1.1.6 - Análise transversal do tópico “Triângulos”	63
4.1.1.7 - Síntese dos principais resultados do tópico “Triângulos”	64
4.1.2 - <i>Paralelogramos</i>	65
4.1.2.1 - Identificação de paralelogramos - Questão 7	65
4.1.2.2 - Definição de paralelogramo - Questão 8	68
4.1.2.3 - Propriedades dos paralelogramos - Questão 16	70
4.1.2.4 - Análise transversal do tópico “Paralelogramos”	71
4.1.2.5 - Síntese dos principais resultados do tópico “Paralelogramos”	72
4.1.3- <i>Retângulos</i>	73
4.1.3.1 - Identificação de retângulos - Questão 3	73
4.1.3.2 - Definição de retângulo - Questão 4	76
4.1.3.3 - Propriedades dos retângulos - Questão 14	80
4.1.3.4 - Análise transversal do tópico “Retângulos”	80
4.1.3.5 - Síntese dos principais resultados do tópico “Retângulos”	81
4.1.4 - <i>Quadrados</i>	82
4.1.4.1 - Identificação de quadrados - Questão 5	82
4.1.4.2 - Definição de quadrado - Questão 6	85
4.1.4.3 - Propriedades dos quadrados - Questão 15	88
4.1.4.4 - Análise transversal do tópico “Quadrados”	89
4.1.4.5 - Síntese dos principais resultados do tópico “Quadrados”	90
4.2 - ANÁLISE GLOBAL DOS TÓPICOS	91
4.3 - ANÁLISE POR ALUNO	92
4.4 - DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	98
4.4.1 <i>Identificação de triângulos, paralelogramos, retângulos e quadrados</i>	98
4.4.1.1 - Identificação de triângulos	98
4.4.1.2 - Identificação de paralelogramos	99
4.4.1.3 - Identificação de retângulos	100
4.4.1.4 - Identificação de quadrados	102
4.4.1.5 - Síntese	103
4.4.2 <i>Definição dos conceitos de triângulo, paralelogramo, retângulo e quadrado</i>	103
4.4.2.1 - Definição de triângulo	103

4.4.2.2 - Definição de paralelogramo	104
4.4.2.3 - Definição de retângulo	105
4.4.2.4 - Definição de quadrado	106
4.4.2.5 - Síntese	107
4.4.3 Propriedades dos triângulos, paralelogramos, retângulos e quadrados	108
4.4.3.1 - Propriedades dos triângulos	108
4.4.3.2 - Propriedades dos paralelogramos	108
4.4.3.3 - Propriedades dos retângulos	109
4.4.3.4 - Propriedades dos quadrados	110
CAPÍTULO 5 - CONCLUSÕES	111
5.1 - SÍNTESE DO ESTUDO	111
5.2 - CONCLUSÕES E REFLEXÕES SOBRE OS RESULTADOS	112
5.3 - REFLEXÃO SOBRE O ESTUDO	117
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	118

ANEXOS

Anexo I – Instrumento de recolha de dados (questionário)	127
Anexo II – Pedido de autorização à Direção da Escola.	136
Anexo III – Pedido de autorização aos Encarregados de Educação.	137

ÍNDICE DE QUADROS

Quadro 1 – Características dos três primeiros níveis de Van Hiele segundo (Battista,2009).....	12
Quadro 2 – Tipos de definições construídas pelos alunos de acordo com o nível de Van Hiele em que se encontram segundo (Villiers, 2010). .	14
Quadro 3 - Níveis cognitivos e operações mentais (adaptado de Proença e Pirola, (2009)).	17
Quadro 4 - Quadro comparativo dos objetivos ao nível das figuras planas do programa de Matemática de 1991 e do programa de Matemática de 2007 (adaptado de ME, 2007, pp.20-66; ME; 1991).	41
Quadro 5 – Categorização das questões do questionário.	49
Quadro 6 - Figuras identificadas como triângulos pelos alunos-respostas corretas....	54
Quadro 7 - Figuras identificadas como triângulos pelos alunos-respostas incorretas.....	55
Quadro 8 - Respostas dos alunos por categoria – Triângulos.	58
Quadro 9 - Distribuição das escolhas dos alunos na questão 13.	61
Quadro 10 - Figuras identificadas como paralelogramos pelos alunos-respostas corretas.	66
Quadro 11 - Figuras identificadas como paralelogramos pelos alunos-respostas incorretas.....	67
Quadro 12 - Respostas dos alunos por categoria – Paralelogramos.	68
Quadro 13 - Figuras identificadas como retângulos pelos alunos-respostas corretas.	74
Quadro 14 - Figuras identificadas como retângulos pelos alunos-respostas incorretas.....	75
Quadro 15 - Respostas dos alunos por categoria – Retângulos.	77

Quadro 16 - Figuras identificadas como quadrados pelos alunos- -respostas corretas.	83
Quadro 17 - Figuras identificadas como quadrados pelos alunos- -respostas incorretas.	84
Quadro 18 - Respostas dos alunos por categoria – Quadrados.	85
Quadro 19 – Propriedades dos quadrados evidenciadas pelos alunos.	87
Quadro 20 – Percentagens de acertos por tópico.	91

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 - Retângulos congruentes.	16
Figura 2 - Quadrados congruentes.	16
Figura 3 - Índice de respostas corretas na tarefa de identificação de triângulos retângulos em diferentes posições. (adaptado da Pesquisa de Hershkowitz, Bruckheimer e Vinner (1994)).	22
Figura 4 - Exemplos e contraexemplos de quadrados (Adaptado de Clements et al, 1999, p.211).	31
Figura 5 - Exemplos e contraexemplos de triângulos (Adaptado de Clements et al, 1999, p.211).....	32
Figura 6 - Exemplos e contraexemplos de retângulos (Adaptado de Clements et al, 1999, p.212).....	33
Figura 7 – Níveis dos alunos na disciplina de Matemática no 1.º período.	46
Figura 8 – Questão 1 do questionário.....	53
Figura 9 – Questão 2 do questionário.....	57
Figura 10 – Questão 13 do questionário.....	60
Figura 11 – Questão 18 do questionário.....	62
Figura 12 – Questão 19 do questionário.....	62

Figura 13– Questão 7 do questionário.....	65
Figura 14 – Questão 8 do questionário.....	68
Figura 15 – Questão 16 do questionário.....	70
Figura 16 – Questão 3 do questionário.....	73
Figura 17 – Questão 4 do questionário.....	76
Figura 18 – Questão 14 do questionário.....	80
Figura 19 – Questão 5 do questionário.....	82
Figura 20 – Questão 6 do questionário.....	85
Figura 21 – Questão 15 do questionário.....	88

CAPÍTULO 1

PROBLEMA E CONTEXTO DO ESTUDO

Neste capítulo apresento o enquadramento e pertinência do estudo, o seu objetivo e as questões orientadoras da investigação. De seguida, menciono os motivos que determinaram a escolha deste tema e qual a sua importância para a investigação ao nível do ensino e aprendizagem da Matemática. Por fim, apresento a organização do estudo.

1.1 - Enquadramento e pertinência do estudo

A importância da geometria e do desenvolvimento do sentido espacial, assente na visualização e na compreensão das relações espaciais, desde os primeiros anos, tem sido reconhecida por diversos autores (Clements e Sarama, 2000; Costa, 2005; Matos e Serrazina, 1996; Pirola, 1995; Ponte e Serrazina, 2000). Por outro lado, os documentos nacionais orientadores do ensino da Matemática (*Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais* (ME, 2001) e *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME, 2007)) e o documento internacional *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (NCTM, 2008) evidenciam uma preocupação em promover a aprendizagem da geometria desde os primeiros anos. Considera-se que as crianças antes de entrarem para a escola estão predispostas a desenvolver conceitos geométricos, sendo, deste modo, os primeiros anos escolares impulsionadores para a expansão e aperfeiçoamento dos conhecimentos que foram desenvolvendo antes do ensino formal (NCTM, 2008).

É de salientar que este estudo enquadra-se na transição do programa de matemática de 1991 (ME, 1991) para o programa de matemática de 2007 (ME, 2007) que enfatiza, além do desenvolvimento da visualização, as capacidades de representação e descrição de figuras no plano, identificando as propriedades que caracterizam essas figuras. Os alunos participantes neste estudo, no ano letivo anterior ao da recolha de dados, no 6º ano de escolaridade, foram abrangidos pelo programa de 1991 e, no 7º ano de escolaridade, ano da recolha de dados, já estavam a trabalhar com o programa de matemática de 2007 (ME, 2007). Assim sendo, focar-me-ei

essencialmente nos programas de matemática em vigor, ao longo da escolaridade dos alunos participantes neste estudo, até à data da recolha de dados, ou seja, no programa de matemática de 1991 (ME, 1991) e no programa de matemática de 2007 (ME, 2007).

Costa (2005) sugere que, desde os primeiros anos, os alunos tenham um ensino que promova experiências em pensamento visual-espacial e que sejam desenvolvidos ambientes de ensino impulsionadores do raciocínio mental complexo e de relações espaciais. Também, o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) refere que, até ao 2º ano de escolaridade, os professores devem facultar aos alunos os materiais e estruturar adequadamente o ambiente de sala de aula, de modo a encorajá-los a explorar figuras e as suas propriedades. Os alunos devem observar muitos exemplos de figuras correspondentes ao mesmo conceito geométrico, assim como observar figuras que não sejam exemplo desse conceito (NCTM, 2008, p. 114). É através das discussões de turma acerca desses exemplos e contraexemplos que os conceitos geométricos são desenvolvidos e aperfeiçoados (NCTM, 2008, p. 114). Entre o 3º e o 5º ano os alunos estudam as propriedades das figuras geométricas. De acordo com este documento, nestes anos os alunos deverão desenvolver modos mais precisos de identificação e descrição de figuras e das suas propriedades, utilizando vocabulário especializado associado a essas figuras e propriedades. Os alunos devem desenhar, figuras, comparar e discutir os seus atributos, classificá-las e elaborar definições (refletindo sobre elas) baseadas nas propriedades das figuras.

Segundo o NCTM (2008), os professores, nestes níveis de ensino, devem promover o desenvolvimento de argumentos matemáticos. O mesmo documento acrescenta, ainda, que a geometria é uma área de grande importância na matemática e o seu estudo permite aos alunos aprenderem as formas, as estruturas geométricas e o modo de analisarem as suas características e relações.

Para Jones (2012), é necessário ter em atenção que o ensino da geometria não se deve centrar na aprendizagem dos nomes de polígonos, por exemplo. Segundo o mesmo autor, embora o conhecimento da terminologia matemática seja importante para a modelagem, visualização e comunicação, nas diferentes áreas da matemática, uma excessiva importância à linguagem e definições descritivas, mesmo que informais, em detrimento da resolução de problemas geométricos, pode condicionar a progressão em geometria das crianças nos primeiros anos. Esta área da matemática possui especificidades que estão interligadas na aquisição de conhecimentos de outras áreas da matemática, assim como a situações do dia-a-dia. As ideias geométricas revelam-se muito úteis na representação e resolução de problemas, devendo, por isso, ser

integradas, sempre que possível, com outras áreas e trabalhada em diferentes situações. Tal como é salientado nas Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2008), a geometria ajudará os alunos em diferentes contextos, como por exemplo: as representações geométricas poderão ajudar os alunos a dar significado a áreas e frações; e os gráficos de coordenadas poderão estabelecer um elo entre a geometria e a álgebra. Também na utilização de mapas, trajetos, construção de plantas, onde está presente o raciocínio espacial, a geometria revela-se indispensável (NCTM, 2008). A visualização espacial, a construção e manipulação de representações mentais de objetos bi e tridimensionais e a perceção de um objeto, a partir de diferentes perspetivas, constituem-se como essenciais no desenvolvimento do raciocínio geométrico.

A geometria não se resume a um conjunto de definições, ela centra-se na descrição de relações e no raciocínio. Segundo o NCTM, é na geometria que os alunos aprendem a raciocinar e a aprender a estrutura axiomática da matemática. Uma outra capacidade que se revela importante no desenvolvimento do pensamento geométrico é a comunicação. Através dela processa-se a construção de significados e consolidação de ideias. Os alunos do 2º ciclo deverão compreender o problema das definições matemáticas e utilizá-las no seu trabalho. Contudo, é importante evitar a imposição precoce e prematura da linguagem matemática formal. Os alunos necessitam, primeiramente, de comunicar através das suas próprias palavras, expressando as suas ideias informalmente, desenvolvendo a necessidade de utilizarem definições exatas e recorrerem a termos matemáticos convencionais, posteriormente.

De acordo com Battista (2007) apesar dos esforços, para promover uma aprendizagem consistente dos conceitos geométricos, ao longo da escolaridade, os estudantes continuam a revelar dificuldades em aprendê-la com a profundidade pretendida e de forma significativa. Também, ao nível da investigação, têm existido poucos estudos sobre geometria, sendo esta área pouco trabalhada, ao longo dos tempos, no ensino básico (Loureiro, 2007). Costa (2005) alerta para a necessidade de se refletir sobre o tipo de ambientes de ensino que se devem impulsionar, de modo a que os alunos desenvolvam um pensamento “visual-espacial” de qualidade.

Deste modo, penso que há uma necessidade emergente, de investir em estudos que contribuam para uma valorização e melhoria do ensino e aprendizagem da geometria.

1.2- Objetivo e questões do estudo

O propósito principal do estudo é compreender e avaliar o conhecimento dos alunos sobre geometria, no início do 3º ciclo, em particular sobre os conceitos de triângulo, paralelogramo, retângulo e quadrado. De acordo com este **objetivo**, pretendo responder às seguintes questões:

- *Quais os conhecimentos em geometria que os alunos no início do 3º ciclo possuem, relativamente aos conceitos de triângulo, paralelogramo, retângulo e quadrado?*
 - *Que compreensão dos conceitos de triângulo, paralelogramo, retângulo e quadrado têm os alunos à entrada do 3º ciclo?*
 - *Que figuras é que os alunos identificam como triângulo, paralelogramo, retângulo e quadrado?*
 - *De que forma é que os alunos definem um triângulo, um paralelogramo, um retângulo e um quadrado?*
 - *Que conhecimento têm os alunos sobre as propriedades dos triângulos, paralelogramos, retângulos e quadrados?*
 - *Quais as dificuldades (mal-entendidos) dos alunos relativamente aos conceitos de triângulo, paralelogramo, retângulo e quadrado?*

1.3 - Motivação

A importância deste tema e os resultados da investigação levam-me a refletir sobre quais os conhecimentos dos alunos sobre geometria no início do 3º ciclo, visto que sou professora de matemática dos 1º e 2º ciclos e interessa-me a preparação dos alunos para a continuidade de ciclos. Considero importante compreender que conhecimentos sobre geometria os alunos possuem quando transitam de ciclo, nomeadamente quando iniciam o 3º ciclo, e que compreensão dos conceitos geométricos desenvolveram no ciclo anterior. Através da minha experiência, tenho constatado que não há uma retenção de determinados conceitos geométricos, em

particular dos conceitos de triângulo, paralelogramo, retângulo e quadrado, bem como de outros como os conceitos de ângulo, diagonal, perpendicularidade e paralelismo.

É de salientar que o triângulo, o retângulo e o quadrado fazem parte do quotidiano escolar destas crianças, mesmo antes do 1º ciclo. Muitas são as atividades que se promovem, em sala de aula, envolvendo estas figuras, como também existem orientações curriculares no 1.º ciclo que assim o exigem, como por exemplo: *“reconhecer propriedades de figuras no plano e fazer classificações”* (ME, 2007).

Enquanto professora de alunos dos 1º e 2º ciclos, e de acordo com a minha experiência, tenho verificado que os alunos apresentam “lacunas” relativamente a alguns conhecimentos de figuras planas que devem estar consolidados antes de transitarem de ciclo. Este facto é importante, pois são conceitos que serão a *“base de futuros conhecimentos”*, ou seja, onde novos conceitos vão assentar, tais como as transformações geométricas. Se um aluno aprender a nomear figuras geométricas, sem se apropriar das suas propriedades (atributos críticos), e conhecer apenas alguns exemplos prototípicos, será mais difícil para ele reconhecer relações entre as figuras transformadas através de reflexão, rotação ou translação. Se, ao contrário, esse aluno passar por experiências de manipulação e transformação de figuras (através de materiais manipulativos e/ou ambientes de geometria dinâmica) poderá estar mais apto a completar padrões de rotação ou reflexão. Estas experiências permitirão reconhecer uma mesma figura em diferentes posições ou tamanhos, compreendendo, o aluno, que um quadrado é sempre um quadrado independentemente da sua posição ou tamanho, pois possui um conjunto de propriedades que o distinguem de todas as outras figuras, tal como sugere Jones (2012).

Assim sendo, este estudo poder-me-á ajudar a orientar as minhas práticas, de forma a contribuir para uma melhor aprendizagem da geometria por parte dos alunos. Estes factos fundamentam a necessidade de estudar mais profundamente o conhecimento dos alunos, tentando compreender as suas dificuldades e facilidades sobre geometria em geral e sobre os conceitos de triângulo, paralelogramo, retângulo e quadrado, em particular.

Um outro aspeto que motivou esta investigação foi conhecer vários estudos que revelam debilidades ao nível do conhecimento de professores e futuros professores, tais como os de Gomes e Ralha (2005), Viseu, Menezes e Almeida (2013) e Tempera (2010). Se os adultos, futuros professores, manifestam lacunas ao nível do conhecimento matemático, como estarão os alunos mais jovens? Viseu et al. (2013) salientam a existência de dificuldades e limitações significativas por parte de

professores do 1º ciclo, no que diz respeito ao conhecimento de conteúdo matemático, no domínio da Geometria elementar. Gomes e Ralha (2005) também verificaram que o mesmo se sucede ao nível de conceitos matemáticos, especificamente com conceito de ângulo, em que futuros e jovens professores apresentam conceções limitadas desse conceito, assim como exemplos protótipos do mesmo. Trata-se de uma situação delicada, uma vez que os professores, principalmente os do 1º ciclo, são os responsáveis pela primeira abordagem a conceitos matemáticos elementares e a forma como os exploram em sala de aula traduzir-se-á na qualidade das aprendizagens dos alunos (Gomes e Ralha, 2005).

Por fim, outro motivo pelo qual quis estudar este tema, prendeu-se com o facto de, através de conversas informais com vários professores, aperceber-me que alguns desvalorizam a Geometria, sendo um tema abordado rapidamente, no final dos períodos, por ser considerado um tema que os alunos “percebem bem”.

1.4 - Organização do estudo

O estudo encontra-se organizado em cinco capítulos.

No primeiro capítulo apresento o enquadramento e pertinência do estudo, assim como a formulação do problema em estudo e as respetivas questões de investigação. Descrevo, ainda, o meu interesse pessoal na realização do mesmo.

O segundo capítulo refere-se à revisão de literatura e encontra-se dividido em três secções: (i) desenvolvimento do pensamento geométrico e a formação de conceitos geométricos, (ii) ensino e aprendizagem da geometria, onde são salientados alguns resultados de estudos relacionados com o tema deste estudo e (iii) a importância da geometria nos currículos.

No terceiro capítulo, descrevo as opções metodológicas do estudo, tendo em conta as questões que norteiam esta investigação. Apresento e justifico as opções tomadas relativas ao processo de recolha de dados, o instrumento de recolha de dados utilizado e sua aplicação, bem como o modo como foi analisado. Ainda, apresento uma descrição dos participantes envolvidos no estudo.

No quarto capítulo exponho os dados recolhidos e é feita a análise dos mesmos. Numa primeira fase apresento a análise por tópico, seguida de uma análise por categoria (identificação, definição e propriedades das figuras geométricas estudadas) e por aluno. Por fim é feita a discussão dos resultados, à luz da revisão da literatura que compõe o capítulo 2 deste estudo.

No quinto capítulo sintetizo as conclusões retiradas da análise dos dados, através de uma reflexão.

O estudo termina com a apresentação das referências bibliográficas e os anexos considerados relevantes.

CAPÍTULO 2

REVISÃO DA LITERATURA

Neste capítulo apresento o enquadramento teórico, assim como resultados de algumas investigações relativas ao tema deste estudo. Começo por apresentar uma primeira secção relativa ao desenvolvimento do pensamento geométrico e à formação de conceitos geométricos, seguindo-se uma secção referente ao ensino e aprendizagem da geometria, onde são salientados alguns resultados de estudos relacionados com o tema desta investigação. Por fim é apresentada uma parte que pretende abordar a importância da geometria nos currículos.

2.1- O desenvolvimento do pensamento geométrico e a formação de conceitos geométricos

A formação de conceitos geométricos e o desenvolvimento do pensamento geométrico têm sido estudados ao longo dos anos por diversos investigadores. Uma das teorias mais conhecidas é a do casal Van Hiele que, na década de cinquenta, elaborou um modelo que defende a existência de diferentes níveis do pensamento geométrico. Também, Herbert Klausmeier elaborou uma teoria cognitivista, na década de 1950, em que defendia que os conceitos geométricos são formados de acordo com determinados níveis de desenvolvimento. Este autor realizou várias pesquisas sobre o processo de formação de conceitos geométricos em várias faixas etárias, desde crianças a adolescentes, e publicou a sua obra em 1977.

2.1.1. Os níveis de aprendizagem da geometria de Van Hiele

Dina Van Hiele e Pierre Van Hiele, defendem que a aprendizagem da geometria se desenvolve numa sequência de cinco níveis hierárquicos do pensamento geométrico, em que os alunos, para atingirem um nível, têm de passar pelos níveis que o precedem (Van Hiele, 1999). Estes níveis podem ser descritos da seguinte forma:

- **Nível 1 – Visualização**

Neste nível as figuras são entendidas de acordo com a sua aparência global e os alunos não conseguem analisar as formas geométricas através das partes ou propriedades. Percebem e observam as figuras geométricas, mas não conseguem conceituá-las, por exemplo, como: quadrado, losango, retângulo. Uma criança a funcionar neste nível pode aprender algum vocabulário geométrico, pode identificar figuras específicas e dada uma figura pode reproduzi-la. Contudo, dado um quadrado ou retângulo, uma criança, nesta fase, não reconhece que essas figuras têm ângulos retos ou que os lados opostos são paralelos (Crowley, 1987). Os alunos tomam decisões baseadas na percepção e não no raciocínio, podendo utilizar atributos irrelevantes nas suas descrições, como: *“esta figura é um retângulo porque é achatado”*, *“isto é um vértice porque é um canto ou bico”*, utilizar termos do tipo: *“...parece com...”*, *“... lembra...”*. Há possibilidade de existir respostas tendo em consideração o tamanho, cores, ou a utilização de outros termos como: *“bicudo”*, *“ deitado”*, *“ redondo”*, *“achatado”* (Van Hiele, 1986).

Jaime e Gutierrez (1990) verificaram que de cada vez que um novo conceito geométrico é apresentado ao aluno este terá de passar pelo nível 1, uma vez que há um período de tempo em que os alunos identificarão, compararão e denominarão figuras geométricas com base nas suas aparências globais. Estes autores consideram que não são apenas nos anos de escolaridade iniciais que os alunos passarão pelo nível 1, mas sim quando um novo conceito geométrico é apresentado.

- **Nível 2 - Descritivo ou de Análise**

Neste nível, os alunos através da observação e experimentação começam a reconhecer as figuras pelo conjunto das suas propriedades. Ao descrever um objeto, um aluno, que se encontre neste nível, pode identificar todas as suas propriedades, mas não é capaz de discernir quais as que são necessárias e suficientes para descrever o objeto, não correlacionando figuras e as respetivas propriedades.

A aquisição do nível 2 envolve a obtenção da linguagem técnica para que as propriedades do conceito possam ser descritas. Porém, a passagem do nível 1 para o nível 2 envolve, também, o reconhecimento de novas relações entre os conceitos e o aperfeiçoamento de conceitos existentes (Villiers, 2010). Dando como exemplo o estudo dos quadriláteros, para que um aluno progrida do nível 1 para o nível 2 é necessário

que exista internamente uma reorganização e um refinamento dos conceitos envolvidos, estando a verbalização a par da reestruturação do conhecimento. Assim, é necessário que esta reestruturação ocorra antes de se iniciar a exploração de relações lógicas entre as propriedades, no nível 3 (ordenação) (Villiers, 2010).

- **Nível 3 – Ordenação**

No nível 2 a rede de relações envolve associação de propriedades a determinados tipos de figuras e relações entre figuras, já o nível 3 envolve uma rede de relações lógicas entre as propriedades das figuras. Os alunos são capazes de ordenar logicamente as propriedades das figuras e podem criar definições significativas, dando argumentos informais para justificar seu raciocínio. Segundo (Crowley, 1987), os alunos estão aptos a estabelecer relações entre as propriedades, quer dentro das figuras, (um quadrilátero que tenha os lados opostos paralelos, também tem de ter ângulos opostos iguais), quer entre figuras (um quadrado é um retângulo porque tem todas as propriedades de um retângulo). Os indivíduos são capazes de compreender inclusões de classes. Os três primeiros níveis, são os que, na escolaridade básica, se deve dar uma maior relevância no ensino da geometria e considera-se que a escolaridade básica deve contemplar atividades que promovam a aquisição deste nível (Van Hiele, 1999).

- **Nível 4 - Dedução**

Neste nível, os teoremas, provas e definições são compreendidos, bem como as condições necessárias e suficientes de uma figura. A geometria é compreendida como um sistema axiomático, em que os alunos compreendem o significado da prova matemática.

- **Nível 5 - Rigor**

O último nível implica que sejam estudados diferentes sistemas axiomáticos. Estes dois últimos níveis, aplicar-se-ão a estudantes num nível de ensino superior.

Pesquisas posteriores à teoria de Van Hiele, (por exemplo Clements & Battista, 1992; Clements, Swaminathan, Haníbal, & Sarama, 1999; Battista, 2007) sugerem a existência de um nível que antecede o primeiro nível de Van Hiele, um *nível 0*, denominado por nível de *precognição*, em que as crianças atendem apenas a um subconjunto de características visuais de uma figura e são incapazes de identificar muitas figuras comuns, ou fazer a distinção entre figuras pertencentes a uma mesma classe.

Investigações recentes corroboram a teoria de Van Hiele quando se afirma que esta descreve com precisão o desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos (Battista, 2007; 2009, Clements & Battista, 1992). Porém, alguns estudos, (Clements e Battista, 1992; 2001), sugerem que os níveis de desenvolvimento poderão ser contínuos e aplicáveis a diferentes domínios da geometria, em vez de níveis discretos e globalizantes, o que significa que os alunos para diferentes áreas da geometria poderão estar em níveis de desenvolvimento diferentes e que os diferentes níveis do pensamento geométrico podem estar a desenvolver-se simultaneamente, em *ritmos* diferentes, num mesmo indivíduo (Battista 2007).

Assim, os níveis de Van Hiele, ao longo dos anos, foram sendo reajustados, de acordo com estudos realizados, tais como os de Battista & Clements 1992; Battista 2007, 2009). No quadro seguinte, estão indicadas algumas características e exemplos para os três primeiros níveis do pensamento geométrico de Van Hiele adaptados por Battista (2009):

Quadro 1 – Características dos três primeiros níveis de Van Hiele segundo (Battista, 2009)

Os três primeiros níveis de Van Hiele	
Nível/ Subnível	Características
Nível 1 – Visual	<ul style="list-style-type: none"> Aparência visual como um todo; Os alunos consideram que duas figuras têm a mesma forma porque têm a mesma aparência; Há recurso a protótipos: uma figura é um retângulo porque “<i>parece uma porta</i>”; Existência de respostas como: “<i>Um quadrado não é um retângulo porque os retângulos são compridos</i>”; Identificação de quadrados quando os seus lados estão na vertical e na horizontal.
Nível 2 - Descritivo/ Análise	<ul style="list-style-type: none"> Os alunos observam as partes do todo e as relações espaciais entre elas; Descrições e conceitos variam muito entre alunos.
	<p>“Nível 2a” início do nível 2</p> <ul style="list-style-type: none"> Descrição das partes e propriedades das figuras de modo informal e impreciso. Os alunos podem dizer que uma figura é um retângulo porque “tem dois lados compridos e dois lados curtos”. Utilização de linguagem informal baseada na experiência do quotidiano.
	<p>“Nível 2b” subnível intermédio</p> <ul style="list-style-type: none"> Os alunos começam a adquirir alguns conceitos geométricos formais como o de ângulo e de paralelismo; Os alunos começam a combinar as descrições informais com as descrições formais das figuras. No entanto, as suas descrições não são suficientes para descrever especificamente uma figura.
	<p>“Nível 2c” final do nível 2</p> <ul style="list-style-type: none"> Os alunos já são capazes de descrever e “conceptualizar” as figuras de forma explícita, recorrendo exclusivamente à linguagem formal, usando conceitos geométricos formais. Nesta fase, os alunos são capazes de descrever as figuras atendendo a um conjunto de propriedades suficientes para especificar as figuras. Os alunos podem elaborar definições formais para classes de figuras, mas estas definições não são mínimas necessárias para definirem uma classe de figuras porque os alunos não interrelacionam as propriedades não sendo capazes de compreender que um subconjunto de propriedades implica outras propriedades. Os alunos pensam em termos de lista de propriedades de cada figura.
Nível 3 – Ordenação	<ul style="list-style-type: none"> Os alunos são capazes de deduzir relações entre as propriedades de figuras geométricas: “<i>Se uma figura tem uma propriedade X, então, também, tem a propriedade Y</i>”, por exemplo, poderão concluir que se um quadrilátero tem quatro ângulos retos, os lados opostos são iguais. Podem fazer inferências lógicas simples sobre as propriedades: um aluno definindo um retângulo como tendo “quatro ângulos retos e lados opostos iguais”, pode deduzir que um quadrado é um retângulo, pois tem “quatro ângulos retos, tal como os retângulos, e os lados iguais, e para ter lados iguais tem os lados opostos iguais, que um retângulo também tem”. Porém, o facto de fazerem estas inferências não significa que os alunos consigam estabelecer classificações hierárquicas. No final do nível 3, os alunos já são capazes de adotar argumentos lógicos para realizar classificações hierárquicas. Progressivamente vão compreendendo quais as definições mínimas necessárias para definir uma classe de figuras.

Também Burger e Shaughnessy (1986), nas suas pesquisas, utilizando entrevistas com base em tarefas, fazem uma reinterpretação dos níveis de Van Hiele, apontando algumas características para os quatro primeiros níveis do pensamento geométrico dos alunos:

Nível 1

- 1) *É costume os alunos recorrerem a propriedades visuais irrelevantes para identificarem, compararem, classificarem e descreverem figuras;*
- 2) *Normalmente referem-se a protótipos visuais de figuras, sendo facilmente “enganados” pela orientação das figuras;*
- 3) *Incapacidade de pensar numa variação infinita de um tipo específico de figura (em termos de orientação e forma, por exemplo);*
- 4) *Recurso a classificações inconsistentes de figuras, ou seja, uso de propriedades irrelevantes para classificar figuras;*
- 5) *Definições incompletas de figuras, realçando condições necessárias (usualmente visuais) como condições suficientes.*

Nível 2

- 1) *Comparação explícita de figuras com relação às suas propriedades subjacentes;*
- 2) *Não recorrem a inclusões de classe entre as diferentes classes de figuras (quadrados e retângulos são considerados disjuntos);*
- 3) *Na classificação de figuras, normalmente recorrem apenas a uma propriedade, por exemplo, ao considerarem a propriedade dos lados, deixam de parte propriedades como ângulos e diagonais e simetrias;*
- 4) *Utilização não económica das propriedades das figuras quando estão a descrevê-las (defini-las), não usando portanto somente as propriedades suficientes;*
- 5) *Rejeitam definições de terceiros, como por exemplo de professores ou de manuais, dando preferência apenas às suas definições pessoais;*
- 6) *Estabelecimento de uma abordagem empírica na procura da verdade de uma declaração, como por exemplo, o uso de observação e medição com base em diversos rascunhos.*

Nível 3

- 1) *Utilização de definições económicas e corretas para as figuras;*
- 2) *Capazes de transformar definições incompletas em definições completas e usar espontaneamente definições para novos conceitos;*
- 3) *Aceitação de diferentes definições equivalentes para um mesmo conceito;*
- 4) *Capacidade de classificar hierarquicamente as figuras, por exemplo os quadriláteros;*
- 5) *Uso de conjeturas, usando explicitamente a forma lógica “se... então...”.*
- 6) *Falta de certeza e clareza no uso de axiomas, definições e provas.*

Nível 4

- 1) *Compreensão das respectivas funções de axiomas, definições e provas;*
- 2) *Realização espontânea de conjecturas e esforços iniciados por vontade própria para verificá-los de maneira dedutiva.*

A teoria de Van Hiele realça que os alunos começam a compreender as definições formais presentes em livros somente no nível 3 e que facultá-las em níveis inferiores não é adequado. Segundo a teoria construtivista da aprendizagem, o aluno tem um papel ativo na construção do seu conhecimento e, portanto, esse conhecimento não pode, simplesmente, ser transferido diretamente de uma pessoa para outra. Desta forma, os alunos precisam de se envolver na construção de definições, participando ativamente na definição dos conceitos geométricos, tendo oportunidade de escolher as suas próprias definições em cada nível (Villiers, 1998, 2010). Deste modo, é necessário que sejam permitidas diferentes definições significativas em cada nível de Van Hiele. Vejamos um exemplo para o caso da definição de retângulo, de acordo com Villiers (2010):

Quadro 2 – *Tipos de definições construídas pelos alunos de acordo com o nível de Van Hiele em que se encontram segundo (Villiers, 2010)*

Nível de Van Hiele	Tipo de definição	Exemplo
Nível 1	Definições visuais	○ <i>“um retângulo é uma figura que parece com isto...”</i> (podendo desenhar ou identificar um quadrilátero cujos ângulos têm 90° e que possui dois lados curtos e dois lados longos).
Nível 2	Definições não económicas	○ <i>“um retângulo é um quadrilátero com lados opostos paralelos e iguais, todos os ângulos têm 90°, diagonais iguais, simetria de rotação, dois lados longos e dois lados curtos.”</i>
Nível 3	Definições económicas e corretas	○ <i>“um retângulo é um quadrilátero com dois eixos de simetria pelos lados opostos”.</i>

2.1.2. O modelo de formação de conceitos de Klausmeier (1977)

Klausmeier (1977) define *conceito* como a “*informação ordenada sobre as propriedades de uma ou mais coisas – objetos, eventos ou processos – que torna qualquer coisa ou classe de coisas capaz de ser diferenciada ou relacionada com outras coisas ou classes de coisas*”. (p.312) Referindo que um conceito é caracterizado pelas suas propriedades ou atributos definidores. Assim, distingue dois tipos de conceitos: o conceito como constructo mental e o conceito como entidade pública. O primeiro possibilita ao indivíduo a identificação de exemplos e de contraexemplos de objetos matemáticos, sendo construído a partir das experiências pessoais que o indivíduo tem sobre as coisas, objetos e situações. Por exemplo, quando um aluno define um triângulo, a partir da sua experiência pessoal com o objeto, pode verbalizar e defini-lo de acordo com a sua experiência. Tratando-se de uma formação conceptual que se realiza internamente. Já o segundo, o conceito como entidade pública, é aquele que é aceite pela sociedade e que se pode encontrar em dicionários e manuais didáticos, por exemplo (Pirola, 1995).

Para Klausmeier (1977), o processo de desenvolvimento conceptual ocorre através de 4 níveis cognitivos sucessivos: **concreto, identidade, classificatório e formal**:

- **No nível concreto**, o aluno, considerando as características perceptivas de uma figura, consegue discriminá-la de outras figuras e lembrar-se dela noutras situações. Por exemplo, se um aluno visualizou um retângulo e passado algum tempo reconhece-o, esse aluno formou o conceito de retângulo no nível concreto. Contudo, a denominação do conceito pode, ou não, ser apreendida pelo aluno, neste nível (Pirola,1995).
- O nível seguinte, **nível de identidade**, só poderá ser formado se o nível anterior, nível concreto, for adquirido pelo sujeito. Neste nível o aluno precisa de realizar generalizações de duas ou mais formas equivalentes (de um mesmo objeto), para além de discriminar outros objetos. É neste nível que se começa a analisar figuras geométricas e a efetuar generalizações, desenvolvendo duas ou mais propriedades de uma figura geométrica. Deste modo, é importante que o aluno seja confrontado com diferentes representações de uma figura, em posições diferentes, e que compreenda que o objeto é o mesmo apesar de se encontrar noutra posição, por exemplo. O aluno que, observando dois retângulos congruentes (Figura 1), consegue perceber que se trata da mesma figura

geométrica, independentemente das suas posições, possui o conceito de retângulo no nível de identidade.

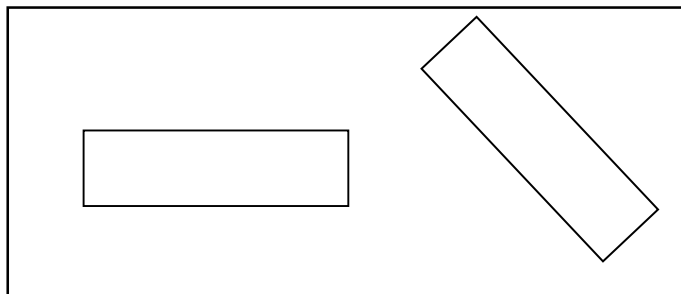


Figura 1 - Retângulos congruentes.

É comum encontrar alunos que, variando a posição de um quadrado (Figura 2), não o identificam como quadrado, mas sim como losango. Vários estudos salientam esta ocorrência (Battista, 2007; Clementes & Sarama, 2000, Pirola, 1995).

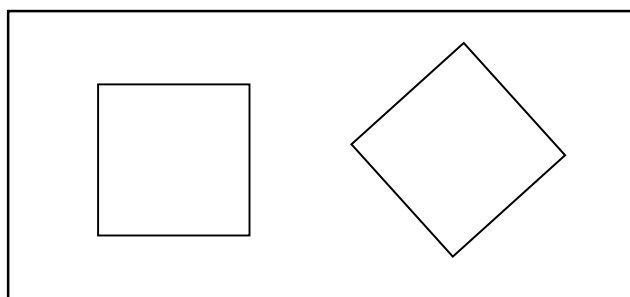


Figura 2 - Quadrados congruentes.

- **No terceiro nível, o classificatório**, para que um conceito seja formado é necessário que já tenha sido formado no nível anterior, o nível de identidade. Assim, um aluno está no nível classificatório quando é capaz de classificar pelo menos dois exemplos diferentes da mesma classe de objetos. (Klausmeier, 1977).
- **O Nível formal** é o nível mais elevado e verifica-se quando o aluno é capaz de realizar definições, recorrendo a atributos definidores, exemplos e contraexemplos e estabelecer relações entre os conceitos. Segundo Klausmeier (1977, p. 55) um conceito é formado neste nível *“quando o indivíduo sabe dar o nome do conceito, sabe definir o conceito em termos dos seus atributos*

definidores, discriminar e nomear os seus atributos e diferenciar exemplos e não exemplos em termos dos seus atributos definidores". Um aluno neste nível é capaz de identificar paralelogramos, num conjunto de diferentes polígonos, defini-los, discriminar os seus atributos (propriedades) e explicar a diferença entre os paralelogramos e os restantes quadriláteros.

Klausmeier (1977) realça que, no nível formal, o aluno pode formar o conceito através de dois processos de operações mentais e estratégias. Um, é aquele que através da formulação de hipóteses e sua avaliação e através de exemplos e contraexemplos o aluno constrói o conceito, o outro baseia-se na observação de propriedades comuns em exemplos do conceito.

É importante realçar que estes níveis se referem a conceitos específicos e um aluno pode estar no nível de identidade para o conceito de paralelogramo e no nível classificatório para o conceito de triângulo.

Ao aprender um conceito o aluno, através de processos de generalização, discriminação e abstração, alarga o seu conhecimento sobre esse conceito, incorporando os seus atributos, sabendo diferenciar os atributos críticos (aqueles que caracterizam um conceito) dos atributos não críticos (aqueles que fazendo parte não são suficientes para que o conceito seja entendido). Exemplificando: quando um aluno aprende o conceito de triângulo, ele precisa de incorporar os atributos críticos, necessários para que em qualquer situação identifique uma figura como triângulo (Brito, 1996). O Quadro 3 esquematiza os níveis cognitivos de formação de conceitos e as respetivas operações mentais envolvidas.

Quadro 3 - *Níveis cognitivos e operações mentais (adaptado de Proença e Pirola, (2009))*

Nível cognitivo	Operações mentais
Concreto	Prestar atenção a um objeto, discriminá-lo de outros objetos, representá-lo como uma imagem ou traço e lembrar-se dele.
Identidade	O aluno deve generalizar que duas ou mais formas do objeto são o mesmo objeto.
Classificatório	O indivíduo deverá generalizar que dois ou mais exemplos são equivalentes e pertencem à mesma classe de objetos.
Formal	Criar hipóteses sobre os atributos e relevantes; avaliar hipóteses usando exemplos e contraexemplos.

2.1.3. Representações mentais de conceitos geométricos

As pessoas criam imagens/representações mentais que as ajudam a recordar os conceitos. Essas representações podem, ou não, ser idênticas ao objeto em que estão a pensar, e podem manter as características desse objeto. Contudo, a palavra que denomina um objeto, muitas vezes, não está de acordo com a imagem que é representada na mente. Por exemplo, quando um indivíduo pensa em triângulos em geral, não pensa apenas em triângulos isósceles, triângulos equiláteros e outros. Contudo, um indivíduo pode ter imagens que podem apenas representar casos particulares de triângulos.

Hershkowitz, Bruckheimer e Vinner (1987), fazem a distinção entre *conceito* e *imagem conceptual*. O conceito decorre da definição matemática e a imagem conceptual é entendida como o conceito que está construído na mente do indivíduo. E, através de um processo evolutivo, o ensino da geometria deve permitir uma aproximação entre a imagem conceptual e o respetivo conceito. Um aluno pode possuir uma imagem conceptual de um determinado conceito diferente da própria definição formal do conceito, havendo, assim, um afastamento entre o conceito propriamente dito (definição formal) e a imagem conceptual. Salientam que o conceito possui atributos relevantes (críticos), ou seja, propriedades, e atributos irrelevantes (não críticos). Os atributos relevantes são os que fazem parte de um exemplo do conceito e os atributos irrelevantes são os que pertencem apenas a alguns exemplos. Na mesma perspetiva, Fischbein (1993), propõe que um objeto geométrico tem uma natureza dual - conceptual e figural. Conceptual, uma vez que, através da linguagem falada ou escrita, expressa propriedades de uma determinada classe de objetos e figural que corresponde à imagem mental que o indivíduo associa ao conceito. Na geometria a imagem mental pode ser manipulada através de transformações geométricas, não se verificando alterações em certas relações. Assim, segundo Fischbein (1993), todas as figuras geométricas representam construções mentais que possuem, simultaneamente, propriedades conceptuais e figurais. De acordo com esta noção, o raciocínio geométrico é caracterizado pela interação entre esses dois aspetos, o figural e o conceptual, que, ocorrendo simultaneamente, determinam a noção correta sobre o objeto geométrico.

Mariotti (1995) ao discutir noção de conceito figural de Fischbein, sublinha a relação dialética entre uma figura geométrica e um conceito geométrico. Referindo que a geometria é uma área em que é necessário que as imagens e conceitos se complementem, mas na perspetiva do estudante pode haver tensão entre estes dois componentes.

Também, Tall e Vinner (1981) propõem a existência de dois termos: “*concept definition*” (definição do conceito) e “*concept image*” (imagem do conceito), de forma a distinguir o conceito como definição matemática, que é aceite pela comunidade científica, e como o significado subjetivo que cada indivíduo lhe atribui. Estes autores definem a *imagem do conceito* como “*a estrutura cognitiva que está associada ao conceito, que inclui todas as imagens mentais e as propriedades e processos que lhes estão associados*”. A imagem do conceito é algo não-verbal que está associada na nossa mente com o nome do conceito. Ela pode ser uma representação visual do conceito, no caso do conceito ter representações visuais, mas também pode ser um conjunto de impressões ou experiências. As representações visuais, as imagens mentais, as impressões e as experiências associadas com o nome do conceito podem ser traduzidos em formas verbais (Vinner, 1991). A imagem do conceito poderá ser modificada e (re)construída através das experiências e maturação do indivíduo, ao longo dos anos. Quanto à *definição do conceito*, Tall e Vinner (1981) dizem que se trata de “*uma forma de palavras usadas para especificar o conceito*”. Estas definições poderão ser fornecidas aos alunos, já feitas, como podem ser os próprios alunos a elaborarem as suas próprias definições de conceitos. Através de um processo pessoal os alunos podem expressar por palavras a imagem do conceito que é evocada, construindo, assim, a sua *definição pessoal do conceito* que pode ser diferente da *definição formal do conceito*. Neste sentido, diferentes indivíduos poderão atribuir diferentes significados para um mesmo conceito, uma vez que as experiências de aprendizagem e os contextos, em que são apresentados diferentes exemplos desse conceito, podem variar de indivíduo para indivíduo. A imagem de um conceito pode ser fortemente influenciada por estes aspetos ao serem apresentados aos alunos, por exemplo, poucos exemplos de um determinado conceito, adquirindo os alunos imagens de conceitos incompletas e/ou incorretas (Gomes & Ralha, 2005).

Vinner e Hershkowitz (1980 citado em Clements & Battista, 1992, p.447) salientam o facto de, muitas vezes, se recorrer às imagens conceptuais (modelos mentais) na classificação de figuras, em vez de se utilizarem definições conceptuais (combinação entre modelos mentais e as propriedades associadas ao conceito), é o que Hershkowitz chama de “**fenómeno protótipo**” (Hershkowitz, 1990). Este autor refere que para cada conceito são alcançados um ou mais exemplos de protótipos, em primeiro lugar, habitando na imagem conceito da maioria dos indivíduos. Na maior parte das vezes, essas imagens conceptuais são coerentes com o tipo de definições que utilizam.

Estas, na maioria das vezes, são partitivas ou exclusivas, em vez de hierárquicas ou inclusivas (Jones, 2000; Villiers, 1994).

Algumas investigações (Clements et al., 1999, Tsamir, P., Tirosh, D., & Levenson, E., 2008) destacam a existência de *exemplos prototípicos* que condicionam a apreensão de conceitos, ou seja, exemplos que possuem atributos irrelevantes, mas que são considerados como modelos a serem seguidos quando se fala de um determinado conceito. Por exemplo, quando são apresentados dois quadrados congruentes em posições diferentes (Figura 2), há a tendência em considerar apenas o primeiro como quadrado e o segundo como losango, pois os alunos estão habituados a que o quadrado seja apresentado frequentemente nessa posição (Battista, 2007; Clementes & Sarama, 2000, Pirola, 1995). Nesta situação os alunos não pensaram nas propriedades (atributos relevantes/críticos) das figuras, mas sim na posição relativa dos lados (atributo irrelevante/não crítico).

Resultados de diferentes pesquisas revelam que existe uma insuficiente compreensão de conceitos afetada pelos distúrbios entre os seus atributos relevantes/críticos e os atributos irrelevantes/não críticos. Estes mal-entendidos sobre a compreensão dos conceitos podem estar relacionados com a forma como os exemplos são apresentados aos alunos por parte dos professores e de manuais didáticos. (Hanibal, 1999; Clementes & Sarama, 2000).

A título de exemplo, relativamente às propriedades das figuras geométricas, é usual os estudantes valorizarem pouco os ângulos como uma propriedade dessas figuras (Clements et al., 1999). Este conceito tem sido motivação para vários estudos destacando-se o de Matos (1999) que verificou que os alunos tendem a possuir uma imagem mental de ângulo que corresponde ao ângulo agudo e ao ângulo reto, tratando-se estes de protótipos de ângulo. Também existem ideias prototípicas relativas à posição de um ângulo quando este é apresentado com um lado na posição horizontal ou na vertical (Matos, 1999). Mitchelmore (1992) defende que o conceito de ângulo, pela sua complexidade, necessita de ser estudado relacionando representações estáticas com modelos dinâmicos. Salienta que os alunos relacionam o ângulo reto com as retas perpendiculares em posições convencionais (horizontalmente ou verticalmente), o que poderá estar na origem conceito restrito de ângulo reto. A noção de perpendicularidade não é “perceptualmente primitiva” como a noção de paralelismo, pois a relação entre retas paralelas é visualmente óbvia o que não acontece com retas perpendiculares.

Villiers (2010) chama a atenção para o facto de muitos professores e manuais escolares fornecerem definições, teoremas ou classificações, como conteúdos já

prontos a serem assimilados e decorados para serem expostos em testes e provas. Alerta, também, que Matemáticos e educadores de Matemática criticam este tipo de ensino direto, centrado nas definições de geometria sem realce no processo subjacente da definição. O facto de um aluno saber a definição de um conceito, não implica que compreenda o conceito. Um professor pode ensinar a um aluno a definição de paralelogramo, como sendo um quadrilátero com lados opostos paralelos e o aluno pode não considerar, ainda, retângulos, quadrados ou losangos como figuras pertencentes a esta classe, uma vez que a imagem conceptual de paralelogramo que o aluno tem se centra numa figura em que nem todos os ângulos ou lados são iguais.

De acordo com Hershkowitz, et al., (1987), para cada conceito, o indivíduo usa o exemplo prototípico como modelo para resolver vários problemas e, quando o aluno é confrontado com outros exemplos do conceito, tem a sua mente limitada por falta de atributos relevantes/não críticos. Num estudo destes investigadores (Hershkowitz, et al., 1987) com alunos e professores do 5º ao 8º ano dos Estados Unidos da América, em que se pretendia que os participantes traçassem a altura relativa ao lado \underline{a} de um triângulo obtusângulo, alguns traçaram a mediana de \underline{a} e outros a mediatriz de \underline{a} , não considerando a altura como um segmento externo ao triângulo. A imagem conceptual dos professores e dos alunos afastou-se do conceito de altura do triângulo. Também na mesma pesquisa quando se solicitou aos mesmos participantes que identificassem triângulos retângulos, em diferentes posições no papel, verificou-se que o fator posição influenciou uma análise prototípica do sujeito. Deste modo, enquanto que na posição prototípica o número de acertos foi elevado, nas outras posições o mesmo não se verificou (Figura 3).

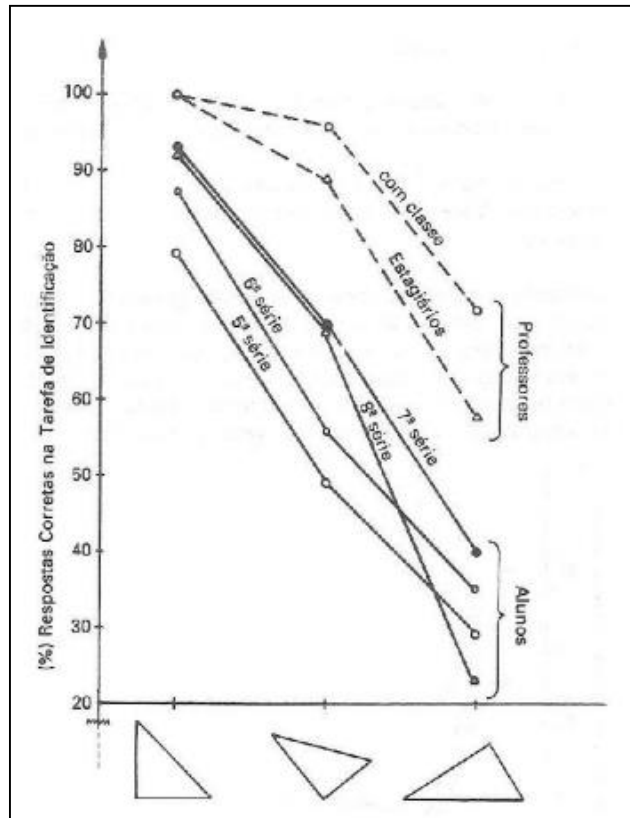


Figura 3 - Índice de respostas corretas na tarefa de identificação de triângulos retângulos em diferentes posições. (adaptado da Pesquisa de Hershkowitz, Bruckheimer e Vinner (1987)).

Segundo Hershkowitz et al., (1987), há 3 formas de *julgamento prototípico* quando se analisa um exemplo: o *julgamento visual*, o *julgamento analítico incorreto* e o *julgamento analítico correto*. Podemos caracterizá-los do seguinte modo:

- *Julgamento visual*: o indivíduo utiliza como modelo o exemplo protótipo, sendo o aspecto visual insuficiente para serem conhecidas todas as propriedades (atributos) de um conceito.
- *Julgamento analítico incorreto*: o indivíduo tem em consideração os atributos não críticos, considerando somente os atributos do exemplo protótipo.
- *Julgamento analítico correto*: o indivíduo baseia-se nos atributos críticos do conceito.

Este último tipo de julgamento aumenta com a progressão na escolaridade, enquanto o julgamento visual vai sendo menos frequente ao longo do percurso escolar. Contudo, poderá não desaparecer, como se verificou com o estudo realizado com professores.

Hershkowitz et al., (1987) sugerem a existência de um processo construtivo da imagem conceptual, de modo a melhorar a compreensão de um determinado conceito. Para isso, segundo estes autores, é necessário que os processos visuais permitam ao aluno o contacto com uma variedade de exemplos para que o protótipo não predomine sobre o conceito. Através deste processo, a compreensão visual irá melhorando e, conseqüentemente, o conhecimento dos atributos do conceito vai sendo aprofundado, tratando-se, este último, do processo de construção de conhecimento analítico. Por exemplo, ter três lados é um atributo relevante (crítico) para triângulo, já a cor, ou a posição do triângulo na página do livro é um atributo irrelevante (não crítico), pois não é essencial para que o conceito seja entendido (Brito, 1996).

2.1.4. Exemplos e contraexemplos

Num estudo realizado por Clements e Sarama (2000) com o objetivo de descobrir justificações e motivos para a existência da utilização generalizada de protótipos de figuras geométricas, foi verificado que, na maioria dos catálogos de materiais escolares, nos materiais de lojas de brinquedos e de apoio didático, é frequente encontrar protótipos de figuras geométricas como quadrados e retângulos representados com os lados na horizontal e vertical, sendo estes últimos apresentados na proporção 2 por 3 e triângulos equiláteros ou isósceles com a base na horizontal.

Vários investigadores (Clements & Sarama, 2000; Hershkowitz, et al.,1994) sugerem que se trabalhe com diferentes exemplos e contraexemplos, nas salas de aula, para os alunos não ficarem limitados a um número restrito de exemplos de figuras geométricas. Brito (1996) propõe que se apresentem exemplos e contraexemplos aos alunos, levando-os a trabalhar mentalmente os atributos relevantes (positivos) e os atributos irrelevantes (negativos), pois é provável que estes acertem mais e melhor os exemplos, permitindo uma formação do conceito mais eficaz.

Clements et al. (1999) salientam que esses exemplos limitados "impedem e, possivelmente, comprometem o desenvolvimento contínuo de esquemas significativos de figuras geométricas". Assim, é necessário, pois, contrariar uma abordagem baseada em protótipos visuais, a que alguns professores geralmente recorrem, e proporcionar aos alunos experiências com diferentes exemplos.

Os documentos orientadores para o ensino da matemática também realçam a importância da utilização dos exemplos e contraexemplos: o NCTM (2008) sugere a utilização de exemplos e contraexemplos na classificação de figuras geométricas, assim

como na formação dos diferentes conceitos geométricos, e o programa de matemática do ensino básico (ME, 2007) destaca a exploração do quadrado como um caso especial de retângulo.

Clements et al. (1999) sugerem que quando se analisam figuras geométricas estas sejam apresentadas em diferentes contextos, de diferentes tamanhos, posições, cores e texturas e que se promova a discussão acerca das propriedades das mesmas. Os contraexemplos também devem ser apresentados às crianças de modo a que estas, quando comparando com os exemplos, identifiquem as propriedades (atributos relevantes/críticos) de uma figura. Assim sendo, a aprendizagem da geometria passa pela criação de relações significativas envolvidas numa vasta rede conceptual que quanto mais ligações tiver, maior será o entendimento do aluno nessa área do conhecimento (Viana & Brito, 2005).

2.2 - Ensino e aprendizagem da geometria

A importância da geometria no ensino e aprendizagem, o desenvolvimento do sentido espacial, da visualização e da compreensão das relações espaciais, desde os primeiros anos, têm sido defendidos por vários autores e investigadores (Van Hiele, 1986; Clements & Sarama, 2000; Matos & Serrazina, 1996; Ponte & Serrazina, 2000; Costa, 2005).

Os documentos orientadores do currículo em geometria, assim como vários investigadores, têm considerado que as crianças antes de entrarem para a escola estão predispostas a desenvolver conceitos geométricos, sendo, deste modo, os primeiros anos escolares impulsionadores para a expansão e aperfeiçoamento dos conhecimentos que foram desenvolvendo antes do ensino formal (Clements et al., 1999); NCTM, 2008, ME, 2007).

Para Veloso (2007), desde os primeiros anos de vida que as crianças começam a construir conceitos, mesmo antes de entrarem para a escola, realizando aprendizagens naturais, como falar e andar, que farão parte de toda a sua vida. Assim sendo, as crianças vão construindo vários conceitos de forma natural através das interações sociais que estabelecem, quer com a comunidade familiar, quer com a comunidade escolar, começando em creches e jardins-de-infância. O mesmo autor refere que professores e educadores deverão estar atentos, respeitando o percurso próprio da experiência de cada aluno. E, no caso da geometria, *“o desejável é que a*

sucessão de experiências dos alunos acompanhe o desenvolvimento da sua maturidade, ao longo de toda a escolaridade” (Veloso, 2007). Assim, sugere que nos primeiros anos de escolaridade, 1º e 2º ciclos, o aluno vá, progressivamente, construindo, naturalmente, os conceitos geométricos, sem que o professor apresente formalmente as definições dos mesmos. Através das diversas explorações, em sala de aula, os novos termos vão aparecendo naturalmente, cabendo ao professor, através de um processo gradual, ir introduzindo e empregando esses termos de forma correta. Como por exemplo, em situações em que diz “vértice em vez de “bico” ou ângulo em vez de “cantinho””.

Tal como sugerem alguns investigadores (Burger & Shaughnessy, 1986 e Senk, 1989), a compreensão em geometria deve movimentar-se de um raciocínio informal para um raciocínio formal, isto é, do concreto para o abstrato. Assim, o professor não deve ter receio em introduzir estes termos mesmo que os alunos estejam a ouvi-los pela primeira vez, sem terem sido explicados anteriormente. Precisa, sim, de seguir o percurso dos alunos com atenção e *paciência*.

Cobb e Yackel (1996), ao abordarem o estudo das interações e normas sociomatemáticas em sala de aula, salientam que o que é valorizado, matematicamente, pelo professor, é transmitido implicitamente nas suas reações, às respostas dadas pelos alunos. Embora o professor não diga, exatamente, o que é considerado mais correto, pela expressão do seu comentário, as crianças deduzem quais os aspetos que o professor mais valoriza. É através desta interação que se vai dando a partilha e a compreensão do que é matematicamente valorizado, e, por conseguinte, o discurso matemático e o pensamento dos alunos também vão evoluindo. Já no 3º ciclo os alunos, para comunicarem entre si e com o professor, começam a entender que têm que ter algum cuidado na sua linguagem, com as palavras que usam. Digamos que terão de utilizar uma linguagem matemática mais sofisticada.

De acordo com Battista (2007) apesar dos esforços para promover uma aprendizagem consistente dos conceitos geométricos, ao longo da escolaridade, os alunos continuam a manifestar dificuldades em aprender geometria com a profundidade pretendida e de forma significativa.

2.2.1. Estudos sobre o ensino e aprendizagem da Geometria

Pesquisas realizadas evidenciam que a maioria dos alunos tem uma compreensão inadequada de conceitos geométricos e o raciocínio geométrico pouco desenvolvido (Battista & Clements, 1992; Clements, et.al, 1999; Clements & Sarama,

2000; Pirola, N. A., Carvalho, A., Nascimento, H., Mariani, J., Monger, W. (2004), Tsamir, Tirosh, & Levenson, 2008; Tempera, 2010; Wu & Ma, 2005). Estudos feitos, nomeadamente, os de Battista e Clements (1992), revelam que os alunos dos Estados Unidos da América estão abaixo de muito outros países, considerando que a causa desta situação se deve à forma como a geometria é ensinada nas escolas (Battista & Clements, 1992). Os currículos implementados consistem numa mistura superficial de conceitos, sem existir preocupação em promover a progressão para níveis mais elevados do pensamento geométrico (Battista, 2009).

Num estudo de Senk (1989), verificou-se que mais de 70% dos estudantes do ensino médio¹ iniciam o estudo da geometria abaixo do nível 2 de Van Hiele. Para este autor, é importante que os alunos atinjam o nível 2 de Van Hiele e que o seu pensamento comece a movimentar-se para o nível 3 antes de chegarem ao ensino secundário (Senk, 1989).

Um estudo (Halat, 2007) realizado, na Flórida, com 273 participantes do 6º ano, em que foi aplicado o Van Hiele Geometry Test (VHGT) criado por Usiskin (1982), com 25 questões de escolha múltipla sobre geometria, para medir em que níveis de Van Hiele se encontram os alunos na área da geometria, revelou que nenhum dos alunos do 6º ano progrediu além do nível 2, o nível de análise, (segundo Van Hiele). A maioria dos estudantes estava no nível 0 (precognição) e no nível 1 (visualização). Este estudo apoia a ideia de que uma grande parte dos estudantes e adultos dos Estados Unidos da América raciocinam nos níveis 1 e 2 de Van Hiele (Usiskin, 1982). Este resultado coincide com conclusões de outros estudos (Burger e Shaughnessy, 1986 e Crowley, 1987), em que se verificou que alunos do 8º ano estavam no nível 1 do pensamento geométrico de Van Hiele.

Usiskin (1982), na sua investigação, verificou que muitos estudantes não sabem noções básicas de geometria ao sair do ensino básico (Middle school), não conseguindo, assim, aprender geometria no ensino secundário (High school). Esta investigação confirma a necessidade de um ensino da geometria significativo antes do ensino básico, de modo a promover um maior conhecimento da geometria por parte dos alunos (Usiskin, 1982).

¹ Graus de ensino nos Estados Unidos da América: Elementary school – Preschool: 4,5anos; Kindergarten: 5,6 anos 1st grade:6,7 anos; 2nd grade: 7,8anos; 3rd grade:8,9 anos; 4th grade: 9,10 anos; 5th grade: 10,11 anos. Middle school – 6th grade: 11,12 anos; 7th grade: 12,13 anos; 8th grade: 13,14 anos. High school – 9th grade: 14, 15 anos; 10th grade: 15,16 anos; 11th grade: 16,17 anos; 12th grade: 17,18 anos.

Wu & Ma, (2005, 2006) baseando-se no Van Hiele Geometry Test (VHGT), construíram um instrumento de recolha de dados, *Wu's Geometry Test (WGT)*, centrado em três figuras geométricas básicas: triângulo, quadrilátero e círculo. Este estudo foi aplicado a 5581 alunos do 1º ao 6º ano de escolaridade de cidades de Taiwan. Os resultados deste estudo revelaram que alunos de anos superiores estão em níveis de Van Hiele superiores. No que diz respeito às questões sobre triângulos e quadriláteros, nenhum aluno do 1º ao 4º ano se encontrava no nível 3 e nenhum aluno dos 1º e 2º anos estava no nível 2, encontrando-se em níveis inferiores. Com base nas três figuras: triângulo, quadrilátero e círculo, a maioria dos alunos do 1º e 2º anos encontrava-se no nível 1 de Van Hiele e os alunos do 3º ao 6º ano estavam no nível 2. Alguns alunos dos 5º e 6º anos, cerca de 20%, revelaram estar no nível 3.

2.2.2. Alguns resultados da investigação sobre ensino e aprendizagem das figuras geométricas

Várias investigações têm sido desenvolvidas com o objetivo de conhecer o que as crianças e jovens sabem sobre as figuras geométricas. Pesquisas como as de Battista e Clements (1992), Clements, et al. (1999), Clements e Sarama (2000), Pirola (1995), Pirola, et al., (2004), Yin (2003) e Wu e Ma (2005), entre outras, mostram que os alunos manifestam algumas dificuldades e mal-entendidos na compreensão de conceitos geométricos, particularmente os relacionados com figuras geométricas.

Um estudo de Pirola, N.A., Quintiliano, L.C., Proença, M.C., (2003), em que foram investigados 187 sujeitos do 2º ciclo do ensino fundamental e alunos do ensino médio², revelou que o conceito de figura tridimensional e o conceito de figura bidimensional não é conhecido pelos alunos, verificando-se que existem alunos a desenhar poliedros como exemplos de polígonos, sendo que o cilindro também foi dado como exemplo de polígono. Pirola, et al., (2003), constataram que maior parte dos alunos não possui o conceito de polígono, nem o conceito de poliedro, de forma completa, havendo também falta de conhecimento de exemplos e de contraexemplos desses conceitos, apresentando dificuldades em classificar exemplos e contraexemplos das figuras geométricas, e respetivos atributos definidores (propriedades) de cada figura. Foi possível verificar que estes alunos se encontravam no nível concreto de

² No Brasil, o ensino fundamental, com alunos entre os 6 e os 14 anos, é constituído por nove graus de ensino, dividido em duas fases: o Ensino Fundamental I (da 1ª à 5ª série (denominadas em Portugal por ano de escolaridade)) e Ensino Fundamental II (da 6ª à 9ª série). O ensino médio tem três graus de ensino, com alunos com idades entre os 15 e os 17.

formação conceptual (segundo Klausmeier). Para estes investigadores, o conceito de figura tridimensional e o conceito de figura bidimensional não foram trabalhados de forma correta ao longo dos anos e escolaridade dos alunos. É preciso que o trabalho na sala de aula enfatize a discussão sobre “as características das figuras e a realização de suas representações” (Pirola, et al., (2003).

Num outro estudo, Moraco (2006) analisou os conhecimentos geométricos adquiridos e principais dificuldades em termos conceptuais e representacionais de 81 alunos do Ensino Médio de uma escola pública do Estado de São Paulo. Constatou-se que os sujeitos aprenderam muito pouco sobre geometria, ao longo de sua escolaridade, principalmente geometria espacial.

Também Proença e Pirola (2009) investigaram o conhecimento conceptual de polígonos, em termos de atributos definidores e exemplos e contraexemplos, de 76 alunos do ensino médio, e verificaram que os alunos não conseguiram definir/descrever por palavras o conceito de polígono, por não terem aprendido os seus atributos definidores (propriedades) de forma correta. Porém, quando tiveram de escolher exemplos de polígonos os alunos obtiveram melhores resultados, evidenciando saberem que um polígono é “uma figura formada por segmentos de reta e fechada”. Contudo, quando os alunos tiveram de discriminar exemplos de polígonos, como de triângulos e quadrados, apresentaram um desempenho pouco satisfatório. A maior parte dos alunos não foi capaz de distinguir polígonos de figuras tridimensionais, como o cubo e a pirâmide de base quadrada (Proença & Pirola, 2009). De acordo com estes dados, estes autores identificaram os alunos no segundo nível cognitivo de formação conceptual, o nível de identidade (segundo Klausmeier, 1977), uma vez que apresentaram dificuldades em identificar exemplos e contraexemplos. Assim, estes alunos não alcançaram, ainda, o nível formal, que é o objetivo da educação escolar. Para estes autores, “é preciso que o professor utilize formas didáticas diferenciadas para o ensino de conceitos em sala de aula” (Proença & Pirola, 2009).

A pouca compreensão dos conceitos geométricos também se verifica num nível de ensino superior, como evidenciam Viana e Brito (2009) num estudo com alunos do ensino superior da formação de professores, em que os dados mostraram que a maioria dos sujeitos não conseguiu descrever as propriedades das figuras geométricas e que muitos pareciam estar num nível de conhecimento ainda relativo aos conceitos quotidianos e não científicos. Também Tempera (2010) concluiu no seu estudo, envolvendo alunos do ensino superior do curso de Educação Básica, que os participantes classificam figuras geométricas apoiando-se em protótipos, considerando

atributos irrelevantes como a posição ou o tamanho das figuras, em vez de analisarem as suas propriedades para a sua classificação. Este estudo revela, ainda, que alguns dos participantes parecem encontrar-se no nível 1 de Van Hiele, o nível visual, e apresentam conhecimentos incorretos sobre a classificação de retângulos, triângulos e polígonos (Tempera, 2010).

Triângulos e quadriláteros

Estudos sobre o conhecimento que os alunos possuem sobre triângulos e quadriláteros têm sido realizados por autores como Battista (2007), Clements et. al. (1999), Clements e Sarama (2000), Pirola (1995), entre outros.

Pirola (1995) realizou um estudo para investigar a formação do conceito de triângulo e do conceito de paralelogramo com 137 alunos, da 5ª à 8ª série, de escolas públicas de São Paulo. Foi possível constatar que alunos de anos mais avançados tiveram desempenhos inferiores ao de alunos de anos inferiores. Os alunos da 8ª série não foram capazes de escrever nem verbalizar a definição de paralelogramo, nem desenhá-los; alunos da 5ª série mostraram não conhecer os diferentes paralelogramos; o trapézio foi identificado, por 65,6% dos alunos da 5ª série, como paralelogramo, evidenciando-se que pouco se valorizou o ensino dos contraexemplos do conceito (Pirola, 1995). Os alunos da 5ª série não foram capazes de identificar os atributos relevantes do conceito de triângulo e de paralelogramo, mas demonstraram um melhor desempenho na identificação de exemplos e contraexemplos do conceito, de forma “mais adequada e completa” do que alunos da 8ª série. Foi, também, verificado que alguns alunos conseguiram lembrar-se da figura “losango” e desenhá-la, mas quando questionados sobre as suas propriedades não conseguiram definir o que é um losango. De acordo com os resultados do seu estudo, Pirola (1995) sugere que o ensino de figuras planas nas escolas talvez esteja mais centrado no aspeto visual do que nos atributos definidores das figuras geométricas, como deveria ser.

Pirola, et al. (2004) realizaram uma pesquisa com 20 alunos, com idades compreendidas entre 11 e 14 anos (da 5ª à 8ª série), com o objetivo de conhecer os atributos relevantes que os alunos utilizam na definição de triângulo e de paralelogramo, tentando saber se os alunos conseguem discriminar exemplos e contraexemplos de triângulos e de paralelogramos. Os resultados revelaram que os alunos tiveram mais facilidade em definir um triângulo do que em definir um paralelogramo e não houve

nenhum aluno a dar três exemplos corretos de paralelogramos. Muitos deles desenharam trapézios e hexágonos, em vez de paralelogramos. Na identificação de exemplos e contraexemplos, no caso do triângulo, 88,3% dos participantes selecionaram as figuras corretamente. Sendo que a percentagem de acertos por ano variou (7ª série - 100%, 8ª série - 90,0%; 6ª série - 87,0% e 5ª série - 77%). Já nos paralelogramos houve uma acentuada descida em relação aos triângulos, havendo cerca de 58% a selecionarem corretamente estas figuras. A percentagem de acertos foi: 8ª série - 71%; 5ª série com 60%; 7ª série com 52% e 6ª série com 49%. Nenhum aluno confundiu o triângulo com o paralelogramo. Contudo, todos os alunos afirmaram que o trapézio é um paralelogramo. Quanto a casos especiais de paralelogramos, poucos alunos (7 dos 20 alunos) identificaram o quadrado como sendo paralelogramo. Já com o losango houve mais alunos a identificá-lo como paralelogramo (13 alunos). Quando foi apresentado o paralelogramo oblíquângulo, figura muito usual nos manuais escolares, houve, mesmo assim, 2 alunos que não o identificaram (Pirola, et al., 2004). Estes investigadores verificaram que os alunos revelaram dificuldades em definir o conceito (de triângulo e de paralelogramo) como entidade pública (como definição formal), de acordo com Klausmeier (1977). Relativamente ao triângulo, os alunos apresentaram dificuldades em definir de forma completa o conceito de triângulo, identificando-o como polígono, mas não apresentaram dificuldades significativas na identificação de exemplos e contraexemplos. Houve, também, uma grande dificuldade em definir e desenhar diferentes tipos de paralelogramos, apresentando dificuldades na inclusão de classes, não se encontrando, por isso, no nível classificatório (de Klausmeier). A maioria dos alunos não demonstrou encontrar-se no nível formal para o conceito de paralelogramo, pois os alunos não conseguiram identificar os atributos definidores nem os seus exemplos e contraexemplos.

No que se refere ao conhecimento de figuras geométricas 2D, foram realizados estudos (Clementes et al., 1999, Clements & Sarama, 2000) com crianças do pré-escolar, com idades entre os 4 e 6 anos para se saber o que as crianças sabem sobre figuras geométricas e quais os critérios utilizados para distinguirem figuras umas das outras. Os resultados revelaram que a maioria das crianças forma esquemas mentais com base na forma visual das figuras, recorrendo, essencialmente, à observação visual de correspondência para distinguirem figuras, sendo também capazes de distinguir propriedades simples e familiares, ou seja, conhecidas das crianças, que fazem parte do seu dia-a-dia. Relativamente aos quadrados, estes estudos demonstraram que: as crianças tendem a identificar o losango (imagem 3 da Figura 4) como quadrado,

denominando-o como “quadrado inclinado” (Clements et al., 1999, Clements & Sarama, 2000); a maioria das crianças (63% dos alunos de 4 e 5 anos e 68% dos de 6 anos) selecionou quadrados que não tinham lados na horizontal (imagem 5, 11 e 13 da Figura 4) (Clements et al., 1999). Quanto às justificações das crianças, estas basearam-se na visualização, sendo que respostas como “parece-se com...” foram as mais recorrentes. Ao nível das propriedades a resposta mais frequente foi “quatro lados” (Clements et al., 1999).

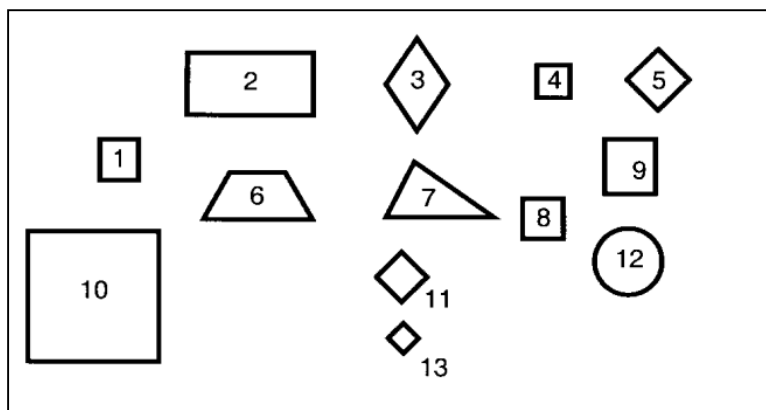


Figura 4 - Exemplos e contraexemplos de quadrados
(Adaptado de Clements et al, 1999, p.211)

Quanto aos triângulos (Figura 5), as crianças tiveram mais dificuldades em identificar exemplos destes polígonos: identificaram corretamente exemplos de triângulos, dando respostas verbais variadas, sem haver uma categoria visual dominante (Clements et al., 1999); aceitaram figuras com lados curvos como triângulos e rejeitaram triângulos muito “longos”, “curvos” ou que não tinham “um ponto no topo” (Clements et al., 1999, Clements & Sarama, 2000). Já as respostas com recurso a propriedades variaram entre 11% e 35%, sendo “o número de cantos” e “o número de lados” as respostas mais dominantes (Clements et al., 1999).

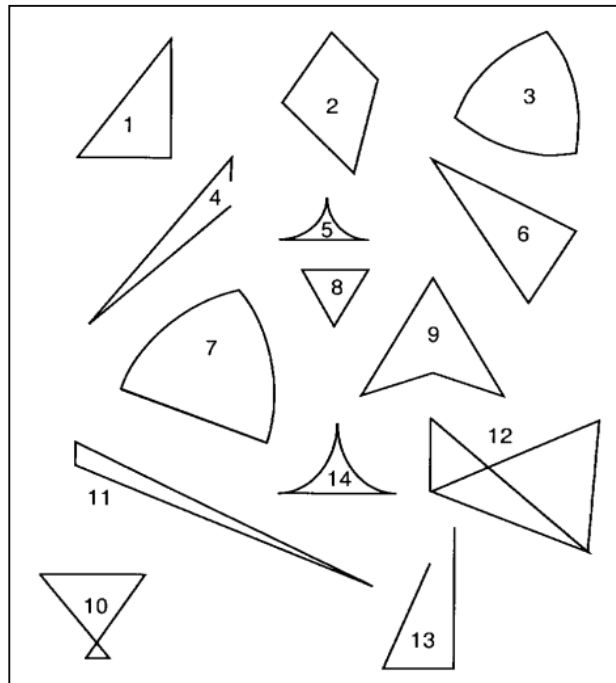


Figura 5 - Exemplos e contraexemplos de triângulos
(Adaptado de Clements et al, 1999, p.211)

No que diz respeito aos retângulos, os alunos de 4 anos foram os que mais aceitaram os quadrados como retângulos, sendo o quadrado 2 da Figura 6 escolhido por 28%, 17% e 10% das crianças com 4, 5 e 6 anos, respetivamente (Clements et al., 1999); a figura 7 foi selecionada por 16%, 3% e 7% dos alunos com 4, 5 e 6 anos (Clements et al., 1999). Os alunos identificaram paralelogramos “longos” e trapézios retângulos como retângulos (Clements et al., 1999, Clements & Sarama, 2000); os retângulos 9 e 12 foram os mais escolhidos e os investigadores sugerem que as crianças têm um protótipo de retângulo com um lado bem maior do que o outro e com uma ligeira obliquidade (Clements et al., 1999). Alguns alunos recorreram a respostas como “longo”, “magro”, “gordo” (Clements et al., 1999, Clements e Sarama, 2000), parecendo que as imagens que as crianças têm de retângulo é a de uma figura com quatro lados, dois lados paralelos longos e com “cantos quadrados” (Clements e Sarama, 2000). Estes investigadores sugerem que o motivo pelo qual crianças mais novas manifestarem mais eficácia a identificar quadrados como retângulos se deve ao facto de, provavelmente, as crianças terem um protótipo de retângulo menos memorizado em relação ao de quadrado, ou porque ainda não desenvolveram a capacidade para identificar a igualdade de todos os lados. Porém, Hanibal (1999) alerta ao dizer-nos que por volta dos 6 anos as decisões das crianças tendem a ser mais

consistentes, sendo as suas ideias, sobre os critérios que definem uma figura, mais seguras e fixas.

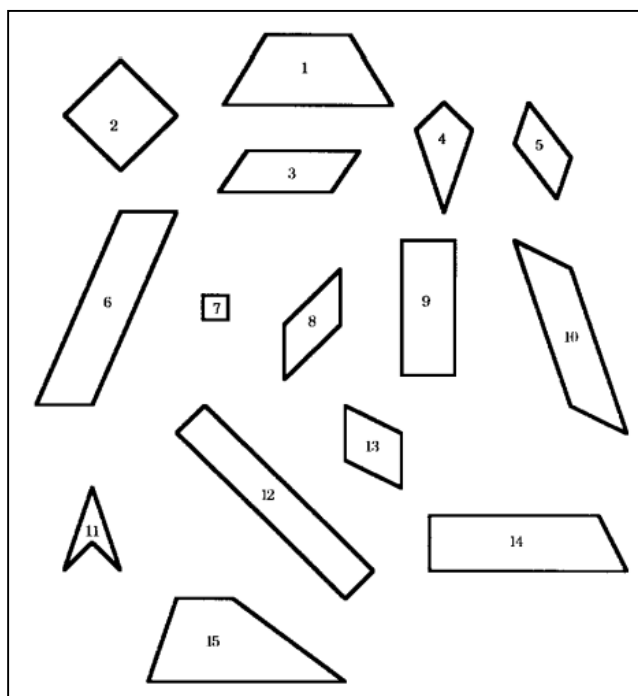


Figura 6 - Exemplos e contraexemplos de retângulos
(Adaptado de Clements et al, 1999, p.212)

Um estudo realizado por Yin (2003), inspirado em Clements et al. (1999), em que participaram 40 alunos, de Singapura, com idades compreendidas entre os 6 e 8 anos, revelou que os alunos tiveram facilidade em identificar quadrados, sendo a resposta mais frequente o “números de lados”; 25% dos alunos com idades compreendidas entre os 6 e os 7 anos identificaram o losango como quadrado e apenas 5% dos outros o fizeram; alguns alunos não aceitaram quadrados sem nenhum lado na horizontal (figuras 5, 11 e 13 da figura em cima) como sendo quadrados. No caso dos triângulos a resposta verbal mais dominante foi a do “número de lados” e os alunos não escolheram a figura 11, referindo que era muito “longa” ou “magra”. Yin (2003) salienta que uma justificação para essa escolha pode passar pelo facto de estas crianças terem associado um protótipo de triângulo forte nas suas mentes, não sendo capazes de distinguir de forma segura triângulos dos outros contraexemplos. Quanto aos retângulos, a resposta mais dada foi a de que os retângulos devem ser “longos”, sendo que uma percentagem elevada de crianças escolheu as figuras 3, 6 e 10 como retângulos, tal como foi também verificado em Clements et al. (1999); nenhum aluno

aceitou as figuras 2 e 7 (quadrados) como sendo retângulos, verificando-se que as crianças não foram capazes de identificar de forma confiável as figuras.

Wu e Ma (2005) também reforçam algumas das conclusões acima apresentadas, numa investigação realizada com 5581 alunos, do 1º ao 6º ano, para explorarem os conceitos geométricos dos alunos do ensino fundamental de Taiwan. Verificaram que foi difícil para os alunos identificarem figuras “extremamente obtusas” e o conceito de quadrilátero foi o mais difícil em contraste com o de círculo. Estes investigadores sugerem que uma das razões para que os alunos tenham dificuldades em identificar figuras “extremamente obtusas” passa pela ausência destas em manuais escolares e nas suas vidas.

Para Fujita e Jones (2007) definir e *classificar quadriláteros*, embora seja um tópico estabelecido no currículo escolar de matemática, parece ser um tema difícil para muitos alunos. Estes autores referem que as razões para tais dificuldades se relacionam com as complexidades em aprender a analisar os atributos de diferentes quadriláteros e distinguir entre atributos críticos e não-críticos. A classificação hierárquica dos quadriláteros é difícil porque requer dedução lógica, em conjunto com as interações adequadas entre conceitos e imagens. Os alunos têm dificuldades em chegar a um entendimento da relação hierárquica entre quadriláteros (e, como tal, muitos permanecem no nível 2 - ou mesmo o nível 1 - de Van Hiele). Parece existir uma lacuna entre “*conceitos figurais formais*” e os “*conceitos figurais pessoais*”. Tais que as imagens são tão influentes nos alunos e nos conceitos figurais pessoais que elas dominam sua tentativa de definir quadriláteros básicos (Fujita & Jones, 2007). Estes autores salientam a importância de pensar no ensino no sentido de melhorar o conhecimento dos alunos sobre de figuras geométricas. A partir da análise dos dados apresentados, Fujita e Jones (2007), pensam que pode existir uma ordem hierárquica de dificuldades entre a compreensão da relação entre quadriláteros. Por exemplo, os losangos podem ser mais propensos a ser reconhecido como tipos especiais de paralelogramos que quadrados ou retângulos, porque se “parecem mais” com o paralelogramo obliquângulo. Também, Vinner (1991) refere que a imagem que os alunos têm do conceito de paralelogramo é uma em que nem todos os ângulos ou lados podem ser iguais. Daí que os alunos possam não considerar retângulos, quadrados e losangos como paralelogramos.

Okazaki e Fujita (2007) no seu estudo que envolveu alunos do Japão e da Escócia, pretenderam compreender os processos de compreensão das relações de inclusão entre quadriláteros, que são conhecidos por serem difíceis de entender, em termos de fenómenos de protótipos e os caminhos cognitivos comuns (Fujita e Jones,

2007). Como resultado deste estudo, verificaram que a compreensão dos alunos foi significativamente diferente para cada relação de inclusão e que havia fortes “fenômenos de protótipo” relacionados com o quadrado e com o retângulo, no Japão, e relacionados com ângulos na Escócia, fatores que impedem os alunos de compreender totalmente as relações de inclusão entre quadriláteros. Salientam-se os principais resultados desta pesquisa:

- *Os alunos tiveram mais facilidade em identificar losangos como paralelogramos do que em identificar retângulos como paralelogramos.*
- *Muitos alunos não conseguiram identificar um quadrado como um retângulo especial e como um losango.*
- *O raciocínio destes alunos não é regido conceitualmente, mas é influenciado pelas imagens do protótipo de quadriláteros, isto é, que o fenômeno ocorre protótipo.*
- *Os alunos julgam com base nas suas próprias imagens, como também criam e utilizam propriedades "adicionais", como "paralelogramos não têm ângulos adjacentes iguais".*
- *Os alunos mostraram uma boa compreensão para as propriedades de quadriláteros, como "os ângulos opostos dos paralelogramos são iguais".*
- *Parece que a barreira comum cognitiva para os alunos é "o tamanho de ângulos", ou seja, é muito difícil para eles reconhecerem que paralelogramos ou losangos podem ter todos os ângulos iguais. O que foi também observado por Fujita e Jones (2006) em que os participantes tenderam a definir quadrados e retângulos, mencionando apenas "lados", mas não "ângulos". (Okazaki & Fujita, 2007)*

2.3 - A importância da geometria nos currículos nacionais

2.3.1. Orientações curriculares sobre o ensino da Geometria

No que diz respeito aos objetivos de aprendizagem na Geometria, há orientações a destacar nos documentos nacionais oficiais: Programa de Matemática (ME; 1991), Currículo Nacional do Ensino Básico: Competência Essenciais (ME, 2001) e Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), assim como em documentos internacionais: como os Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2008) que têm inspirado os currículos nacionais. Importa referir que aqui serão analisados os dois programas de matemática (ME; 1991; ME, 2007), em vigor aquando da recolha de dados, sendo que os participantes neste estudo, estiveram abrangidos pelo programa de matemática de 1991 (ME; 1991).³

2.3.1.1 - Currículos internacionais

Os Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2008), um documento de referência internacional no ensino da Matemática, publicado pela National Council of Teachers of Mathematics, estabelece os seguintes objetivos para o ensino da geometria do pré-escolar ao 12^o ano⁴:

- Analisar as características e propriedades de formas geométricas bi e tridimensionais e desenvolver argumentos matemáticos acerca de relações geométricas;
- Especificar posições e descrever relações espaciais;
- Aplicar transformações geométricas e usar a simetria para analisar situações matemáticas;
- Usar a visualização, o raciocínio espacial e a modelação geométrica para resolver problemas.

(adaptado de NCTM, 2008, p.44)

³ Visto que o estudo ocorreu com estes dois documentos em vigor, não considerarei o Programa de Matemática de 2013 (ME, 2013) na discussão de resultados.

⁴ Graus de ensino nos EUA: Elementary school – Preschool: 4,5anos; Kindergarten: 5,6 anos 1st grade:6,7 anos; 2nd grade: 7,8; 3rd grade:8,9 anos; 4th grade: 9,10 anos; 5th grade: 10,11 anos. Middle school – 6th grade:11,12 anos; 7th grade: 12,13 anos; 8th grade: 13,14 anos. High school – 9th grade: 14, 15 anos; 10th grade: 15,16 anos; 11th grade: 16,17 anos; 12th grade: 17,18 anos.

Ainda, neste documento, são apresentadas as expectativas do pré-escolar ao 2º ano, no âmbito da geometria, em que se espera que os alunos sejam capazes de:

- Reconhecer, designar, comparar e classificar figuras bi e tridimensionais;
- Descrever formas bi e tridimensionais através das suas propriedades e partes componentes;
- Investigar e prever os resultados obtidos pela composição e decomposição de várias figuras bi e tridimensionais;
- Descrever os movimentos que mostrem a congruência de duas figuras;
- Criar imagens mentais das figuras geométricas, usando a visualização espacial;
- Explorar a congruência e a semelhança;
- Descrever a posição e o movimento através da linguagem corrente e vocabulário geométrico;
- ...

(adaptado de NCTM, 2008, p.112)

Já do 3º ao 5º ano espera-se que os alunos sejam capazes de:

- Identificar, comparar, e analisar atributos de formas bi e tridimensionais e desenvolver vocabulário para descrever esses atributos;
- Classificar formas bi e tridimensionais através de propriedades e criar definições de classes de formas como triângulos e pirâmides;
- Formular e testar conjeturas sobre propriedades e relações geométricas, e justificar as conclusões com argumentos lógicos;
- Construir e desenhar objetos geométricos;
- Criar e descrever imagens mentais de objetos, padrões e trajetórias;
- ...

(adaptado de NCTM, 2008, p.190)

As normas da NCTM referem ainda que “à medida que passam do 3º para o 4º ano e deste para o 5º ano, os alunos deverão desenvolver clareza e exatidão na descrição das propriedades de objetos geométricos, classificando-os, seguidamente, de acordo com essas propriedades em categorias como por exemplo, triângulo ou retângulo.” (NCTM, 2008, p.191). Este documento sugere que é preciso que os alunos contactem com muitos exemplos de figuras que correspondam ao mesmo conceito geométrico, assim como de figuras que não representem esse mesmo conceito geométrico, ou seja, que explorem, também, contraexemplos. É através deste confronto de exemplo e contraexemplo que os conceitos geométricos serão desenvolvidos e aperfeiçoados. (NCTM, 2008).

2.3.1.2 - Currículos nacionais

Em 2001 foi publicado o Currículo Nacional do Ensino Básico (ME, 2001), que veio introduzir alterações curriculares ao nível das finalidades e objetivos de aprendizagem, alertando para os vários aspetos da competência matemática que é preciso desenvolver ao longo dos três ciclos de ensino. No domínio da Geometria, no que respeita às figuras geométricas, mais especificamente aos conceitos de triângulo e quadrilátero este documento refere que os alunos devem desenvolver:

- a aptidão para realizar construções geométricas e para reconhecer e analisar propriedades de figuras geométricas, nomeadamente recorrendo a materiais manipuláveis e a software geométrico;
- a aptidão para utilizar a visualização e o raciocínio espacial;
- o reconhecimento e utilização de ideias geométricas em diversas situações;

(adaptado de ME, 2001, p. 62)

Este documento, ainda, especifica mais quando alerta para as competências específicas para cada um dos ciclos. Assim, no 1º ciclo pretende-se que os alunos:

- reconheçam formas geométricas simples e descrevam figuras geométricas;
- identifiquem propriedades de figuras geométricas;

- compreendam o processo de medição e façam medições e estimativas em situações do cotidiano utilizando instrumentos apropriados.

E, no 2º ciclo, é esperado que desenvolvam:

- a predisposição para identificar propriedades de figuras geométricas, nomeadamente em triângulos e quadriláteros, bem como para justificar e comunicar os raciocínios efetuados.
- a aptidão para realizar construções geométricas, como ângulos e triângulos e para descrever figuras geométricas;

(adaptado de ME, 2001, p. 63)

Uma vez que os alunos que são objeto de estudo desta investigação estiveram abrangidos até ao 6º ano de escolaridade pelo programa de Matemática de 1991, importa realçar as principais finalidades e objetivos desse programa, no 1º e no 2º ciclo, no que respeita à geometria, em geral, e às noções de triângulo, quadrilátero e ângulo, em particular.

Assim, no anterior programa, as três grandes finalidades do ensino da Matemática para o ensino básico eram: o desenvolvimento da capacidade de raciocínio, de comunicação e de resolução de problemas.

No 1º ciclo o programa estava organizado em *blocos de conteúdos*, em que a geometria integrava o *bloco Forma e Espaço*. É considerado que as experiências do quotidiano que as crianças tenham vivido, mesmo antes de entrarem para a escola, é um motivo de interesse para novas aprendizagens e deve ser usado como fonte de motivação. Desta forma, o programa sugere que a escola proporcione atividades que promovam o desenvolvimento do sentido estético, assim como da criatividade, com recurso a diferentes objetos, num ambiente de interação entre professor e alunos, em que a criança, gradualmente vá adquirindo “o vocabulário e noções elementares de geometria”. (ME; 1991, p. 180).

No 2º ciclo, as orientações são similares às do 1º ciclo, considerando-se, tal como no 1º ciclo, que a geometria é um campo da matemática ligado à realidade e propulsor de interações com outros campos da matemática, assim como geradora de problemas de grande valor formativo em que podem “coexistir aspetos lúdicos e de interesse prático eminentemente favoráveis à aprendizagem” (ME; 1991, p. 148, 2º ciclo volume 1).

Neste ciclo, o programa está organizado por temas, sendo a Geometria um deles. Sugere-se que o estudo desta área esteja interligado com outras áreas da Matemática principalmente com os Números e Cálculo, outro tema do programa. O recurso a instrumentos de medida e de desenho e aperfeiçoamento do seu uso é realçado como elemento importante, assim como há o destaque de observações e sugestões metodológicas para o professor.

Visto o desenvolvimento da capacidade de comunicação ser uma das finalidades deste programa, também é realçado que o professor deverá aceitar que os alunos usem de início uma linguagem informal, para exprimirem as suas opiniões e ideias e explicarem os seus raciocínios, visto não terem, ainda, o vocabulário específico adquirido. Este deverá ser introduzido progressivamente para que os alunos vão gradualmente, passando de uma linguagem informal para uma linguagem formal. (ME; 1991, 2º ciclo volume 2).

Dando lugar ao programa de Matemática de 1991 (ME; 1991), surgiu o programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), apontando algumas alterações ao programa anterior. Neste, a Geometria, como tema, está contemplada nos três ciclos de ensino, e tem como objetivo central promover o desenvolvimento do sentido espacial dos alunos. Ao nível do 1º ciclo os objetivos gerais de aprendizagem são:

- Desenvolver a visualização e ser capazes de representar, descrever e construir figuras no plano e no espaço e de identificar propriedades que as caracterizam;
 - Ser capazes de identificar e interpretar relações espaciais;
 - Compreender as grandezas dinheiro, comprimento, área, massa, capacidade, volume e tempo;
 - Compreender o que é a unidade de medida e o processo de medir;
 - Ser capazes de realizar estimativas e medições, e de relacionar diferentes unidades de medida;
- Ser capazes de resolver problemas, raciocinar e comunicar no âmbito deste tema.

(adaptado de ME, 2007, p.20)

E os objetivos gerais de aprendizagem do 2º ciclo são:

- Compreender propriedades das figuras geométricas no plano e no espaço;
- Desenvolver a visualização e o raciocínio geométrico e ser capazes de os usar;
- Ser capazes de analisar padrões geométricos e desenvolver o conceito de simetria;

- Ser capazes de resolver problemas, comunicar e raciocinar matematicamente em situações que envolvam contextos geométricos.

(adaptado de ME, 2007, p.36)

Ao nível dos 1º e 2º ciclos, o propósito principal do ensino da geometria centra-se no desenvolvimento do sentido espacial, na visualização, na compreensão de propriedades de figuras geométricas bi e tridimensionais e na compreensão de grandezas geométricas e respetivos processos de medida, utilizando-os, também, na resolução de problemas em contextos variados.

De modo a estabelecer uma relação entre os dois programas, de seguida apresenta-se um quadro comparativo dos dois programas de Matemática, o de 1991 e o de 2007.

Quadro 4 - Quadro comparativo dos objetivos ao nível das figuras planas do programa de Matemática de 1991 e do programa de Matemática de 2007 (adaptado de ME, 2007, pp.20-66; ME; 1991)

	Programa de 1991	Programa de 2007
1º ciclo	<p style="text-align: center;">1º ano</p> <ul style="list-style-type: none"> • Reconhecer em objetos vários e em moldes geométricos, superfícies planas e não planas; • Reconhecer e nomear, nos sólidos geométricos, figuras planas como: quadrados, retângulos, triângulos e círculos; • Fazer composições com figuras geométricas (utilizando diferentes meios e instrumentos: recorte e colagem, dobragem, geoplano, tangram, «puzzles»); • Desenhar em papel quadriculado: <ul style="list-style-type: none"> ○ livremente; ○ seguindo regras simples; ○ reproduzindo figuras simples; • Reconhecer figuras geométricas em diversas posições; • Representar figuras geométricas planas utilizando materiais diversificados. 	<p style="text-align: center;">1º e 2º ano</p> <ul style="list-style-type: none"> • Identificar polígonos e círculos nos sólidos geométricos e representá-los. • Reconhecer propriedades de figuras no plano e fazer classificações. • Distinguir entre interior, exterior e fronteira de um domínio limitado por uma linha poligonal fechada; • Realizar composições e decomposições de figuras geométricas; • Identificar superfícies planas e não planas, em objetos comuns e em modelos geométricos; • Identificar linhas retas e curvas a partir da observação de objetos e de figuras geométricas e representá-las; • Resolver problemas envolvendo a visualização e a compreensão de relações espaciais;

	<p style="text-align: center;">2º ano</p> <ul style="list-style-type: none"> • Comparar as seguintes figuras planas: quadrado, retângulo, triângulo e círculo; • Fazer composições com figuras geométricas (utilizando diferentes meios e instrumentos: recorte e colagem, dobragem, geoplano, tangram, «puzzles»); • Representar, no geoplano, figuras geométricas. 	
	<p style="text-align: center;">3º ano</p> <ul style="list-style-type: none"> • Reconhecer lados paralelos nas figuras geométricas; • Reconhecer lados perpendiculares nas figuras geométricas; • Fazer transformações de figuras geométricas planas (utilizando diferentes meios e instrumentos: recorte e colagem, dobragem, geoplano, tangram, «puzzles»); • Representar livremente, no geoplano, figuras geométricas simples e reproduzi-las em papel ponteadado; • Representar, no geoplano, triângulos, retângulos e quadrados em diferentes posições e reproduzi-los em papel ponteadado; <p style="text-align: center;">4º ano</p> <ul style="list-style-type: none"> • Reconhecer ângulos em figuras geométricas planas e nos objetos; • Comparar a amplitude de ângulos e reconhecer: ângulo reto, ângulo agudo e ângulo obtuso. • Fazer transformações de figuras geométricas planas segundo algumas regras (utilizando diferentes meios e materiais: dobragens, geoplano...); • Desenhar figuras geométricas simples com algumas regras; • Representar, no geoplano, figuras geométricas e reproduzi-las em papel ponteadado. 	<p style="text-align: center;">3º e 4º ano</p> <ul style="list-style-type: none"> • Compreender a noção de ângulo; • Comparar e classificar ângulos (reto, agudo, obtuso e raso) e identificar ângulos em figuras geométricas; • Representar retas paralelas e perpendiculares; • Resolver problemas envolvendo a visualização e a compreensão de relações espaciais.

2º ciclo	5º ano	5º e 6º anos
	<p style="text-align: center;">5º ano</p> <ul style="list-style-type: none"> • Classificar triângulos quanto à amplitude dos ângulos e quanto ao comprimento dos lados; • Descobrir, experimentalmente, o valor da soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo. 	
	<p style="text-align: center;">6º ano</p> <p>Triângulos</p> <ul style="list-style-type: none"> • Construir triângulos sendo dados: o comprimento dos lados, ou o comprimento de 2 lados e a amplitude do ângulo por eles formado, ou o comprimento de um lado e a amplitude dos ângulos adjacentes a esse lado; • Descobrir uma relação entre os comprimentos dos lados de um triângulo; <p>Quadriláteros</p> <ul style="list-style-type: none"> • Classificar e descrever quadriláteros; • Descobrir experimentalmente propriedades dos paralelogramos; • Resolver problemas numéricos e de traçado aplicando propriedades dos paralelogramos; construir paralelogramos com instrumentos de desenho e de medição. 	<ul style="list-style-type: none"> • Identificar e representar retas paralelas, perpendiculares e concorrentes, semirretas e segmentos de reta, e identificar a sua posição relativa no plano; • Identificar os elementos de um polígono, compreender as suas propriedades e classificar polígonos; • Classificar triângulos quanto aos ângulos e quanto aos lados; • Construir triângulos e compreender os casos de possibilidade na construção de triângulos. • Compreender as relações entre os elementos de um triângulo e usá-las na resolução de problemas; • Compreender o valor da soma das amplitudes dos ângulos internos e externos de um triângulo; • Resolver problemas envolvendo propriedades dos triângulos e do círculo.

CAPÍTULO 3

METODOLOGIA

Neste capítulo enuncio e justifico as opções metodológicas do estudo, tendo em conta as questões de investigação e faço uma caracterização dos participantes. Descrevo o processo de construção do instrumento de recolha de dados utilizado, um questionário, justificando as questões que o compõem.

Por fim, explico o processo de aplicação do instrumento de recolha de dados e o modo como os dados foram analisados.

3.1 - Opções Metodológicas

Neste trabalho pretendo estudar o conhecimento dos alunos sobre triângulos e quadriláteros no início do 3º ciclo.

Mais concretamente, procuro saber:

- Quais os conhecimentos que os alunos no início do 3º ciclo possuem, relativamente aos conceitos de triângulo, paralelogramo, retângulo e quadrado, procurando responder às seguintes questões:
 - Que compreensão dos conceitos de triângulo, paralelogramo, retângulo e quadrado têm os alunos à entrada do 3º ciclo?
 - Que figuras é que os alunos identificam como triângulo, paralelogramo, retângulo e quadrado?
 - De que forma é que os alunos definem um triângulo, um paralelogramo, um retângulo e um quadrado?
 - Que conhecimento têm os alunos sobre as propriedades dos triângulos, paralelogramos, retângulos e quadrados?
 - Quais as dificuldades (mal-entendidos) dos alunos relativamente aos conceitos de triângulo, paralelogramo, retângulo e quadrado?

Após a elaboração e a aplicação de um questionário a 25 alunos de uma turma do 7º ano, de uma escola do concelho de Loures, procedi à análise aprofundada dos resultados, fazendo uma análise quantitativa (para as questões de escolha múltipla) e uma análise de conteúdo para as questões de resposta aberta.

Para analisar as questões relacionadas com as definições de triângulo, retângulo, quadrado e paralelogramo, elaborei categorias resultantes da análise das respostas.

A metodologia de um trabalho de investigação advém da natureza das questões de investigação. O objetivo deste estudo não é o de testar hipóteses, nem de proceder a generalizações, mas sim, compreender o conhecimento dos alunos participantes (Bogdan & Biklen, 1994), neste caso a partir da aplicação de um questionário, tendo optado por seguir uma *abordagem metodológica mista*. É reconhecido por diversos autores (e.g. Tashakkori & Teddlie, 1998, 2003) que distintos métodos de análise são úteis, uma vez que se direcionam para diferentes tipos de questões. Estes autores referem ainda que neste tipo de investigação, as abordagens quantitativa e qualitativa são utilizadas na definição das questões, nos métodos e recolha e análise de dados. Importa realçar que este estudo apresenta as características de uma investigação qualitativa, de acordo com Bogdan e Biklen (1994), uma vez que:

- o investigador é o instrumento principal;
- os dados recolhidos são de natureza descritiva;
- a análise dos dados é realizada de forma indutiva, ou seja, não há a preocupação em confirmar hipóteses;
- o investigador preocupa-se com o ponto de vista dos participantes.

Em termos de recolha de dados a opção por interligar as duas metodologias, quantitativa e qualitativa, passa por: (i) permitir a utilização de questionários com questões do tipo fechado; (característicos de abordagens quantitativas) e (ii) aplicação de questões de resposta aberta (característicos de abordagens qualitativas).

Na análise dos dados procedi ao cálculo de frequências e à análise de conteúdo das respostas dadas às questões abertas. A abordagem metodológica mista nesta investigação revela-se essencial, uma vez que, *permite procurar responder a questões de investigação que outras metodologias não conseguem, permite fornecer inferências mais consistentes, e permite a possibilidade de apresentar uma grande diversidade de pontos de vista acerca do mesmo problema* (Tashakkori & Teddlie, 2003)

3.2 - Caracterização dos participantes

Os participantes envolvidos neste estudo foram 25 alunos de uma turma do 7.º ano de escolaridade (vinte raparigas e cinco rapazes) de uma Escola Básica do concelho de Loures. Vinte e dois alunos tinham doze anos e os restantes treze anos.

Esta turma foi formada pela junção de duas turmas do 6.º ano anterior, dos alunos que transitaram de ciclo e por 2 alunos que repetiam o 7.º ano de escolaridade.

Relativamente às notas obtidas no primeiro período (Figura 7) do 7.º ano, a média dos níveis obtidos é de 3,24. Dois alunos obtiveram nível 2, um aluno teve nível 5, seis alunos nível 4 e os restantes dezasseis alunos obtiveram nível 3.

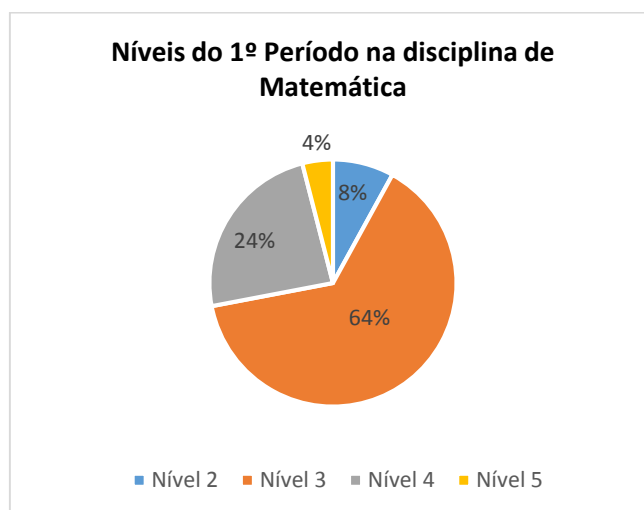


Figura 7 – Níveis dos alunos na disciplina de Matemática no 1.º período

Um dos critérios que me levou a escolher esta turma relaciona-se com o facto de até à data de implementação do questionário, ainda não terem trabalhado conteúdos relacionados com Geometria. Esta opção prende-se com o objetivo do estudo, que pretende averiguar os conhecimentos sobre geometria de alunos no início do 3.º ciclo e, portanto, não considerando o 3.º ciclo e os seus conteúdos nesta investigação.

3.3 - Processo de construção do instrumento de recolha de dados

3.3.1. Construção do questionário

Os questionários, utilizados como instrumento de recolha de dados em investigações, têm sido reconhecidos importantes por diversos autores (e.g. Bogdan & Biklen, 1994; Cohen, Manion & Morrison, 2001). Num questionário podemos ter questões fechadas ou abertas. O seu tratamento é diferente em cada um dos casos. Bogdan e Biklen (1994) sugerem que, às questões fechadas, pode ser atribuído um tratamento quantitativo, o mais indicado, não se tornando incompatível com um estudo de carácter interpretativo. Há questionários em que se opta por uma junção entre os dois tipos de questões (fechadas e abertas). (Lessard-Hérbert, Goyett. & Boutin, 1990).

O questionário (anexo 1) deste estudo foi elaborado tendo como objetivo obter informação sobre os conhecimentos individuais dos participantes, contemplando um conjunto de questões relacionadas com os conceitos de triângulo, paralelogramo, retângulo e quadrado. Pretendo saber que conhecimentos de geometria elementar têm os alunos, como por exemplo: saber de que forma identificam figuras geométricas que aparentemente conhecem desde os primeiros anos escolares (triângulo, quadrado e retângulo) e outras que conheceram mais tarde, no 2º ciclo, como é o caso do paralelogramo; como definem essas figuras e que conhecimentos têm sobre as respetivas propriedades (atributos relevantes). Desta forma, o processo de seleção e execução das questões esteve intimamente ligado a estudos idênticos já realizados (referidos no capítulo 2 deste estudo). Assim, as questões que compõem o questionário foram elaboradas segundo os estudos de Clements et al. (1999), Hannibal (1999), Tempera (2010), Usiskin (1982), e Tsamir et al. (2008). Também foram inspiradas nos testes de 1999 e 2003 do TIMSS (National Center for Education Statistics [NCES], n.d.) e também nas orientações do programa de Matemática de 1991 e dos *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* do National Council Teacher Mathematics (NCTM, 2008). Um aspeto que segui foi “olhar para o questionário através dos olhos dos participantes”, tal como sugere Cohen et. al. (2001), tentando perceber como é que eles o vão considerar (fácil, difícil, motivador, desmotivante...).

Considerando que o objetivo deste estudo é avaliar os conhecimentos dos alunos sobre Geometria, no início do 3º ciclo, em particular sobre os conceitos de triângulo, paralelogramo, retângulo e quadrado, o questionário foi elaborado tendo em

conta conceitos que estão previstos serem trabalhados até ao final do 2º ciclo do ensino básico, de acordo com o programa de Matemática de 1991, aquele que abrangeu estes alunos até ao 6º ano de escolaridade.

A testagem de um questionário é um fator de grande importância para o seu êxito. Um teste piloto tem como principais funções aumentar a confiabilidade, validade e viabilidade do questionário, sendo útil para:

Verificar a clareza dos itens do questionário, instruções e disposição; obter feedback sobre a validade dos itens do questionário e objetivos da pesquisa; eliminar ambiguidades ou dificuldades na redação; obter feedback sobre o tipo de pergunta e o seu formato (escolha múltipla, aberta, fechada...); obter feedback sobre a aparência e atratividade do questionário; verificar o tempo necessário para completar o questionário, assim como se é muito fácil ou muito difícil, muito longo ou muito curto); experimentar o sistema de codificação para análise de dados (Cohen et. al., 2001, pp.261-262).

Assim sendo, realizada a 1ª versão do questionário, pretendi testá-lo, de modo a averiguar eventuais insuficiências, particularmente no que se refere à formulação de questões, assim como verificar se o tempo de realização do teste que eu tinha determinado (40 minutos) era suficiente e realizar os ajustamentos necessários. Desta forma, o questionário foi testado por 3 jovens do 7º ano de escolaridade, (um considerado “bom”, um “médio” e outro considerado “fraco”, pela sua professora de matemática). A escolha destes três alunos teve como critérios pertencerem ao mesmo ano de escolaridade e a um contexto social e educativo idêntico ao grupo de estudo, não fazendo parte do grupo de alunos do presente estudo, tal como propõem Cohen et. al. (2001), que realçam a testagem do questionário como um dos fatores mais importantes para o sucesso do mesmo. Foi explicado aos três alunos o objetivo da testagem do questionário e solicitada uma participação dedicada e concentrada e que referissem as suas dificuldades ao responder ao mesmo. No final da realização do questionário, constatou-se que ao nível da interpretação não houve dificuldades significativas e o tempo de realização do questionário foi suficiente, pois os alunos responderam num intervalo de tempo que variou entre os 10 minutos e os 20 minutos. Procedeu-se à reformulação de algumas questões e alteração de algumas figuras do questionário. Foi, ainda, possível, com os dados recolhidos no teste piloto, experimentar o sistema de codificação das respostas e selecionar um *software* adequado para a análise dos dados.

Com o objetivo proceder à validação do questionário e de verificar se as questões estavam adequadas ao nível dos alunos, tive a colaboração de três professoras do 2º ciclo, com mais de três anos de experiência, que o analisaram e tivemos oportunidade de discutir a aplicabilidade do mesmo. A última versão do questionário resulta das opiniões das professoras que se centraram essencialmente em aspetos de linguagem e disposição de figuras. A versão final do questionário é constituída por 15 questões (10 de escolha múltipla e 5 de resposta aberta) sobre os conceitos de triângulo, paralelogramo, retângulo e quadrado.

Na construção deste questionário considerei que o tempo de realização não deveria exceder os 40 minutos, uma vez que mais tempo poderia levar à falta de interesse dos participantes e consequentes respostas irrefletidas. Foram, também, utilizadas questões maioritariamente de escolha múltipla e outras de resposta aberta.

3.3.2. Fundamentação das questões

O questionário (anexo 1) aplicado neste estudo é constituído por 15 questões (quadro 5), englobando quatro tópicos: “triângulos”, “retângulos”, “quadrados” e “paralelogramos”, sendo formado por 10 questões de escolha múltipla e 5 questões de resposta aberta. Cada tópico contempla um conjunto de questões pertencentes às categorias: identificação do polígono; definição do polígono; propriedades do polígono.

Quadro 5 – Categorização das questões do questionário.

TÓPICOS		N.º da questão	Descrição/finalidade
Triângulos		1	Identificação de triângulos
		2	Definição de triângulo
		9	Propriedades dos triângulos
		14	Propriedades dos triângulos
		15	Propriedades dos triângulos
Quadriláteros	Paralelogramos	7	Identificação de paralelogramos
		8	Definição de paralelogramo
		12	Propriedades dos paralelogramos
		13	Propriedades dos paralelogramos
	Retângulos	3	Identificação de retângulos
		4	Definição de retângulo
		10	Propriedades dos retângulos
		13	Propriedades dos retângulos
	Quadrados	5	Identificação de quadrados
		6	Definição de quadrado
		11	Propriedades dos quadrados

A estrutura do questionário foi pensada de modo a encadear questões de escolha múltipla com questões de resposta aberta, a fim de não desmotivar os participantes na resolução do mesmo. As questões de resposta aberta poderão captar especificidades de situações mais particulares, que as questões de resposta fechada não poderiam fornecer, uma vez que permitem aos inquiridos escrever uma resposta com os seus próprios termos, para explicar e qualificar as suas respostas (Cohen et al., 2001). A opção tomada foi a de em cada tópico apresentar a questão de identificação do polígono seguida da questão de definição do respetivo polígono (triângulo, paralelogramo, retângulo ou quadrado) e, por fim, as questões relacionadas com as propriedades destas figuras, estas últimas agrupadas por categoria (propriedades). Esta opção deve-se ao facto de existirem questões relacionadas com mais de uma figura e envolvendo outros conceitos.

3.4 - Processo de recolha de dados

Para aplicar o questionário, foram pedidas autorizações ao agrupamento da escola, ao conselho pedagógico, bem como aos encarregados de educação, em que expliquei o objetivo e importância deste estudo, assegurei a confidencialidade e anonimato dos participantes, facultei o meu contacto, colando-me à disposição para quaisquer esclarecimentos, agradecendo antecipadamente a sua colaboração, tal como sugerem Cohen *et. al.* (2001).

Por uma questão organizacional da escola, foi possível realizar a recolha de dados, somente no início do 2º período, após ter todas as autorizações dos encarregados de educação. Contudo, este aspeto não influenciou o objetivo desta investigação, uma vez que a turma ainda não tinha trabalhado conteúdos sobre Geometria até ao momento da aplicação do questionário.

Assim sendo, o questionário foi aplicado no dia 31 de Janeiro de 2012 numa aula de 45 minutos cedida pelo professor diretor de turma. Foi explicado aos alunos qual o objetivo da investigação e informei-os sobre a confidencialidade e anonimato da sua participação. Antes de iniciarem a resolução do questionário conversei com os alunos e respondi a algumas das suas questões. Entreguei a cada aluno um questionário e informei-os do tempo de realização do questionário (40 minutos). O tempo de resolução do questionário variou entre 17 minutos e 32 minutos. Durante este tempo tive oportunidade de observar que todos os alunos estavam concentrados e interessados a

resolverem o questionário. Os questionários foram anónimos, contudo foi criado um código de identificação que foi atribuído a cada aluno, com o objetivo de, numa segunda fase, se proceder à realização de uma entrevista semiestruturada, o que não veio a concretiza-se por motivos de limites de tempo.

3.5 - Processo de Análise de Dados

Após a recolha dos questionários iniciou-se o processo de análise de dados, tendo em conta o objetivo do estudo, as questões de investigação e a revisão da literatura realizada.

A análise dos dados pretendeu seguir um carácter interpretativo, procurando mostrar qual o conhecimento dos alunos sobre triângulos, retângulos, quadrados e paralelogramos no início do 3º ciclo.

Toda a informação do questionário à exceção das respostas às questões de resposta aberta sobre definição das figuras em estudo (questões 2, 4, 6 e 8), analisadas estatisticamente, através de uma base de dados elaborada com o software Statistical Package for the Social Sciences (SPSS). Após o tratamento estatístico relativo à análise quantitativa dos dados seguiu-se a análise (qualitativa) desses mesmos dados, onde se procurou analisar os resultados do ponto de vista interpretativo e os conhecimentos dos alunos no fim do 2º ciclo do ensino básico.

Os resultados relativos às questões abertas (sobre definição de triângulo, paralelogramo, retângulo e quadrado) foram alvo de uma análise de conteúdo, seguindo um quadro de categorias que emergiu da análise das respostas dos alunos:

- **Triângulo**
 - A) Possui o conceito podendo evidenciar algumas imprecisões de linguagem;*
 - B) Particulariza um determinado tipo de triângulo;*
 - C) Apresenta uma descrição incompleta, existindo dúvidas se o aluno tem o conceito de triângulo.*

- **Paralelogramo**
 - A) Possui o conceito de paralelogramo, podendo evidenciar algumas imprecisões de linguagem;*
 - B) Particulariza um determinado tipo de paralelogramo;*

C) Descrição incompleta ou imprecisa. (Existem dúvidas se o aluno tem ou não o conceito de retângulo);

D) Não respondeu.

○ **Retângulo**

A) possui o conceito de retângulo, podendo evidenciar algumas imprecisões de linguagem;

B) particulariza um determinado tipo de retângulo;

B)+C) descrição imprecisa que parece particularizar um retângulo não quadrado;

C) apresenta uma descrição incompleta, existindo dúvidas se o aluno tem o conceito de retângulo.

○ **Quadrado**

A) possui o conceito de quadrado, podendo evidenciar algumas imprecisões de linguagem;

B) particulariza um determinado tipo de quadrilátero - losango;

C) descreve características de um polígono regular qualquer;

D) apresenta uma descrição incompleta ou imprecisa, existindo dúvidas se o aluno tem o conceito de quadrado.

CAPÍTULO 4

ANÁLISE DOS DADOS E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

O objetivo principal deste estudo é avaliar o conhecimento dos alunos sobre triângulos, paralelogramos, retângulos e quadrados no início do 3º ciclo. Este capítulo encontra-se dividido do seguinte modo: primeiramente, faz-se uma análise por tópico (triângulos, paralelogramos, retângulos e quadrados). Dentro de cada tópico apresentam-se os resultados correspondentes à identificação, à definição e às propriedades da respetiva figura, seguindo-se uma análise transversal do tópico e uma síntese com os principais resultados. Os dados são apresentados de acordo com a respetiva análise (quantitativa ou qualitativa), procurando responder às questões de investigação.

No fim é feita a discussão dos resultados, à luz da revisão da literatura que compõe o segundo capítulo deste estudo.

4.1 - Análise das respostas dos alunos por tópico

Esta secção encontra-se dividida pelas categorias de questões que compõem o questionário. Deste modo, analisarei os grupos de questões que correspondem aos tópicos: “*triângulos*”, “*paralelogramos*”, “*retângulos*” e “*quadrados*”.

4.1.1 - Triângulos

4.1.1.1 - Identificação de triângulos - Questão 1

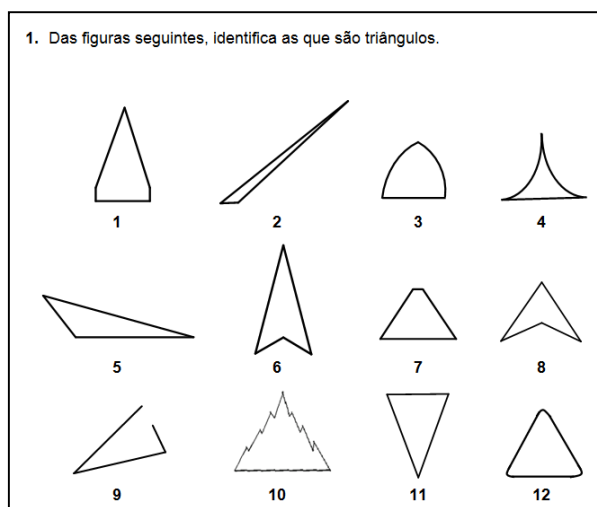
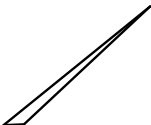
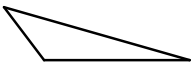
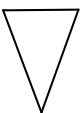


Figura 8 – Questão 1 do questionário

Analisando as respostas corretas nesta questão, constata-se que apenas 9 alunos, ou seja, 36,0% da turma, selecionaram só as figuras que representam triângulos, o que me leva a refletir sobre o facto da noção de triângulo poder não estar apreendida pela maioria dos alunos.

Relativamente às escolhas dos alunos, no que diz respeito às figuras que são triângulos, verifica-se que 96,0% dos alunos identificaram a figura 5⁵ (triângulo obtusângulo escaleno) e, também, 96,0% selecionaram a figura 11 (triângulo acutângulo isósceles), como sendo triângulos. Quanto à figura 2 (triângulo obtusângulo escaleno) esta foi selecionada por 76,0% dos alunos (quadro 6). Quase um quarto dos alunos não reconheceu esta figura como triângulo, o que me leva a questionar sobre o que terá influenciado estas escolhas dos alunos.

Quadro 6 - Figuras identificadas como triângulos pelos alunos-respostas corretas.

Figuras	Frequência absoluta	Percentagem
 Figura 2	19	76,0%
 Figura 5	24	96,0%
 Figura 11	24	96,0%





As figuras 5 e 11 parecem constituir exemplos claros de triângulos para a maioria dos participantes, podendo-se considerar protótipos de triângulos para estes alunos. Contudo, houve um aluno que não escolheu nenhuma destas figuras como triângulos. No caso da figura 2, quase um quarto dos alunos não a reconheceu como um triângulo. O facto de ser um triângulo “muito longo” (Clements & Sarama, 2000) e “muito estreito” (Clements, 2004) pode ter influenciado a não identificação deste triângulo por parte dos alunos, tal como se verificou em estudos realizados com crianças do pré-escolar e do 1º ciclo.

⁵ As figuras presentes na análise do questionário serão indicadas pelo número que têm em cada questão.






Relativamente à figura 11, uma elevada percentagem de alunos selecionou-a, o que se constatou, também, num estudo realizado com crianças entre 3 e os 6 anos (Clements, 2004). A sua posição não habitual parece não ter influenciado a identificação deste triângulo. O facto da figura 5 ser “extremamente obtusa” (Yin, 2003) parece não ter influenciado as escolhas da maioria dos alunos.

Houve outras figuras identificadas como triângulos (quadro 7): 48,0% dos estudantes selecionaram a figura 12 (linha curva fechada – designado “triângulo arredondado”^{*}), 28,0% selecionaram a figura 4 (figura formada por um segmento de reta e duas linhas curvas) e a figura 3 (figura formada por um segmento de reta e duas linhas curvas) foi escolhida por 24,0% dos alunos. Uma pequena percentagem de alunos, 8,0%, escolheu a figura 1 (pentágono) e as figuras 6 (quadrilátero não convexo), 7 (trapézio isósceles), 9 (linha poligonal aberta) e 10 (designado “triângulo” zig-zag^{*}) foram selecionadas, cada uma delas, por 4,0% da turma. Nenhum aluno escolheu a figura 8 (quadrilátero não convexo).

Quadro 7 - Figuras identificadas como triângulos pelos alunos-respostas incorretas.

Figuras	Frequência absoluta	Percentagem
 Figura 1	2	8,0%
 Figura 3	6	24,0%
 Figura 4	7	28,0%
 Figura 6	1	4,0%

^{*} Designação dada por Tsamir, Tirosh, & Levenson (2008)
 Designação dada por Tsamir, Tirosh, e Levenson (2008)

 Figura 7	1	4,0%
 Figura 8	0	0,0%
 Figura 9	1	4,0%
 Figura 10	1	4,0%
 Figura 12	12	48,0%

É de realçar as escolhas dos alunos pela figura 12 (“triângulo arredondado”) e pelas figuras 4 e 3 (compostas por um segmento de reta e duas linhas curvas). De facto, das representações que não são triângulos, estas três figuras são as que visualmente se assemelham mais ao protótipo de triângulo. Parece que os alunos escolheram estas figuras contando o número de linhas sem ter em atenção se se tratavam, ou não, de linhas poligonais fechadas, o que sugere, que estes alunos estão no nível visual, do desenvolvimento do pensamento geométrico, segundo Van Hiele. Estes resultados indicam que os alunos não sabem e revelam mal-entendidos em relação à noção de vértice e de lado de um polígono.

Em estudos realizados com crianças do pré-escolar (Clements, et al.,1999; Clements & Sarama, 2000; Tsamir, et al., (2008)) foram encontrados mal-entendidos semelhantes. Por exemplo, as crianças consideram a figura formada por uma linha curva fechada – triângulo arredondado – como sendo um triângulo (Clements & Sarama, 2000), assim como as figuras compostas por um segmento de reta e duas linhas curvas -figuras 3 e 4 - (Clements, et al.,1999; Clements & Sarama, 2000).

Embora em percentagem reduzida, houve alunos a selecionar a figura 1 (pentágono), 6 (quadrilátero não convexo), 7 (trapézio isósceles), 9 (linha poligonal aberta) e 10 (“triângulo” zig-zag) o que sugere que os alunos consideraram os atributos

visuais das figuras em vez dos atributos críticos das mesmas, tal como se verificou num estudo realizado com crianças do pré-escolar de Tsamir, Tirosh, & Levenson, (2008).

4.1.1.2 - Definição de triângulo - Questão 2

2. Descreve, por palavras, o que é um triângulo.

Resposta: *Um triângulo é*

Figura 9 – Questão 2 do questionário

Para analisar os dados obtidos nesta questão e nas restantes questões de resposta aberta foram criadas categorias, referidas no capítulo da metodologia que emergiram da análise dos dados. Assim, posso distinguir três categorias relacionadas com o conhecimento explícito dos alunos, evidenciado pela linguagem escrita: **A) Possui o conceito podendo evidenciar algumas imprecisões de linguagem;** **B) Particulariza um determinado tipo de triângulo e** **C) Apresenta uma descrição incompleta, existindo dúvidas se o aluno tem o conceito de triângulo.**

A análise das respostas dos alunos permite-me enquadrá-las em três categorias de análise (quadro 8), verificando que a maioria dos alunos, 60,0%, revela possuir o conceito de triângulo, embora nas suas descrições existam algumas imprecisões de linguagem:

- *“Uma figura geométrica que possui três lados, são todos linhas retas, os lados podem ser de vários tamanhos ou todos iguais.”*
- *“Uma figura com 3 lados e com 3 vértices.”*
- *Um polígono com 3 lados retos, em que a soma dos ângulos é 180°.*
- *Uma figura geométrica com 3 lados, ligados uns aos outros.*
- *Uma figura geométrica que tem três lados que podem ser iguais ou não.*
- *Uma figura com 3 vértices e 3 arestas.*
- *Um polígono de 3 lados iguais ou diferentes com 3 vértices e 3 arestas.*
- *Uma figura geométrica que tem 3 lados, é fechado e os cantos não são curvos.*
- *Um polígono com três lados e três vértices.*

- *Uma figura geométrica com 3 lados e 3 ângulos.*
- *Um polígono ou seja uma figura geométrica plana fechada com três lados.*
- *Um polígono fechado de 3 lados diferentes ou iguais.*
- *Um polígono com três ângulos.*
- *Um polígono com 3 lados, 3 vértices.*
- *Uma figura chamando-se polígono com 3 lados retos.*

Quadro 8 - Respostas dos alunos por categoria - Triângulos

Categorias de análise	Frequência absoluta	Porcentagem
A - Possui o conceito podendo evidenciar algumas imprecisões de linguagem.	15	60,0%
B - Particulariza um determinado tipo de triângulo.	5	20,0%
C – Descrição incompleta. (Existem dúvidas se o aluno tem ou não o conceito de triângulo).	5	20,0%

De realçar que um quinto dos alunos particulariza um determinado tipo de triângulo, verificando-se a possibilidade da existência de protótipos de triângulo por parte destes alunos:

- *Uma figura geométrica com três arestas e com dois lados iguais e um diferente, ou seja, esta figura em relação aos lados é isósceles e a soma da amplitude dos ângulos internos é sempre igual.*

Esta caracterização dos alunos revela, ainda, a confusão entre o conceito de aresta e lado.

- *Os triângulos têm de ter 3 lados cujo os seus ângulos têm de ter menos de 90°.*
- *Uma figura geométrica na qual todos os seus ângulos são agudos.*
- *Um polígono regular com três lados.*
- *“Uma figura geométrica que tem 2 lados iguais e 1 diferente.”*

Houve, ainda, 5 alunos, que não definiram um triângulo de forma explícita ou apresentaram uma descrição insuficiente para descrever este polígono:

- *Uma figura com 3 lados iguais ou diferentes.*
- *Uma figura com três ângulos.*

- *Uma figura unida por 3 pontos.*
- *Uma figura com 3 lados, os ângulos não podem ser redondos.*
- *Um polígono com todos os lados iguais.*

Estas definições revelam que o número 3 está associado ao conceito que os alunos têm de triângulo, sendo que a última evidencia também o protótipo do triângulo equilátero.

Linguagem, vocabulário geométrico e mal-entendidos encontrados nas descrições dos alunos

A análise dos dados aponta que a propriedade verificada em maior percentagem nas descrições dos alunos foi o “*número de lados*”, (76,0% dos alunos recorreram a esta propriedade para definirem um triângulo). Verificou-se que o “*número de vértices*” surgiu nas descrições de cinco alunos (20,0%) de forma correta e a referência ao “*número de ângulos*” apareceu apenas 3 vezes, sendo que o termo “*ângulo*” foi utilizado por mais alunos: “... *a soma da amplitude dos ângulos internos é sempre igual*” (Aluno 2) e “...*a soma dos ângulos é 180°*” (aluno 10), fazendo, estes, referência à soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo. Houve também, alunos que utilizaram este termo de forma incorreta quando definiram um triângulo: “*Uma figura geométrica na qual todos os seus ângulos são agudos.*” (aluno 7) e “*Os triângulos têm de ter 3 lados cujo os seus ângulos têm de ter menos de 90°.*” (aluno 4). O aluno 22 mencionou que nos triângulos “...*os ângulos não podem ser redondos*”.

Houve cinco alunos que, para além do número de lados, acrescentaram, nas suas definições, a possibilidade dos comprimentos dos lados serem diferentes, tal como podemos verificar:

- *“Uma figura com **3 lados iguais ou diferentes.**”* (aluno 1)
- *“Uma figura geométrica que possui **três lados**, são todas linhas retas, **os lados podem ser de vários tamanhos ou todos iguais.**”* (aluno 3)
- *“Uma figura geométrica que tem **três lados que podem ser iguais ou não.**”* (aluno 14)
- *“Um polígono de **3 lados iguais ou diferentes** com 3 vértices e 3 arestas.”* (aluno 17)
- *“Um polígono fechado de **3 lados diferentes ou iguais.**”* (aluno 23)

A análise das definições dos alunos permite-me, ainda, identificar alguns mal-entendidos relacionados quer com termos matemáticos, quer com o conceito de triângulo. Três alunos (12,0%) recorreram à palavra “*arestas*”, indicando o seu número, querendo focar-se, provavelmente, no número de lados. A palavra *ângulo* também foi usada por dois alunos que consideraram que nos triângulos “*os seus ângulos têm de ter menos de 90°*” (aluno 4) e “*todos os seus ângulos são agudos*” (aluno 7). Estas descrições parecem indicar que estes alunos têm uma imagem restrita de triângulo, considerando somente triângulos acutângulos.

Relativamente ao comprimento dos lados de um triângulo, houve alunos que descreveram um triângulo como “*uma figura geométrica...com dois lados iguais e um diferente, ou seja esta figura em relação aos lados é isósceles...*” (aluno 2), “*um polígono com todos os lados iguais*” (aluno 9), “*Um polígono regular com três lados*” (aluno 11) e “*uma figura geométrica que tem 2 lados iguais e 1 diferente*” (aluno 16). Parece que as descrições dos alunos 9 e 11 correspondem a triângulos equiláteros e que as dos alunos 2, 11 e 16 dizem respeito a triângulos isósceles, o que evidencia uma noção limitada de triângulo.

Os atributos visuais foram pouco utilizados, sendo que alguns alunos escreveram afirmações menos precisas como: “*os cantos não são curvos*” e “*os ângulos não são redondos*”. Dois alunos, ainda, utilizaram as descrições “*lados retos*” e “*três lados, todas linhas retas*” para evidenciar o tipo de linha dos lados dos triângulos. Um aluno (aluno 13) definiu um triângulo como *uma figura unida por 3 pontos*.

4.1.1.3 - Propriedades dos triângulos - Questão 13

<p>13. Assinala as afirmações verdadeiras para TODOS os triângulos:</p> <p>a) Todos os lados são iguais.</p> <p>b) Todos os ângulos são agudos.</p> <p>c) A soma da amplitude dos ângulos internos é sempre igual.</p> <p>d) Não possuem diagonais.</p>
--

Figura 10 – Questão 13 do questionário

Em relação às propriedades dos triângulos (questão 13), pode-se verificar, quanto ao número de acertos, que seis alunos (24,0%) escolheram as afirmações corretas (C e D).

Relativamente às opções corretas, a maioria dos alunos (21 alunos, 84,0%), selecionou a opção C (*a soma da amplitude dos ângulos internos é sempre igual*) e apenas 6 alunos (24,0%) dos alunos selecionaram a opção D (*não possuem diagonais*) (quadro 9). A baixa percentagem nesta opção sugere que poderão existir alguns mal-entendidos relacionados com o conceito de diagonal, levando-me a questionar se estes alunos conhecem e/ou compreendem este conceito.

Quadro 9 - Distribuição das escolhas dos alunos na questão 13

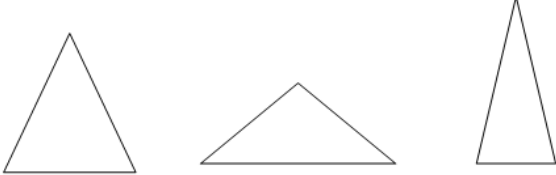
Afirmações	Frequência absoluta	Percentagem
a) Todos os lados são iguais.	0	0,0%
b) Todos os ângulos são agudos.	3	12,0%
c) A soma da amplitude dos ângulos internos é sempre igual.	21	84,0%
d) Não possuem diagonais.	6	24,0%

No que se refere às opções não verdadeiras para todos os triângulos, nenhum aluno selecionou a opção A (*todos os lados são iguais*), o que se supõe que, ao longo da sua escolaridade, abordaram diferentes tipos de triângulos relativamente ao comprimento dos lados, tendo uma visão mais abrangente da imagem de “triângulo”, no que se refere aos lados. Contudo, na questão 2 do questionário, em que os alunos tinham de definir um triângulo, o aluno 9 definiu um triângulo como “*um polígono com todos os lados iguais*”. Há, aqui, há uma incoerência nas respostas, o que pode indicar que o conceito de triângulo, bem como as suas propriedades, possam não estar totalmente compreendidos por este aluno.

A opção B (*todos os ângulos são agudos*) foi selecionada por 3 alunos (12,0%). Embora pouco significativos, estes dados indicam que os alunos poderão ter, associadas à imagem estereotipada de triângulo, apenas imagens mentais de triângulos acutângulos, o que se verificou, também na análise da questão 2 do questionário.

4.1.1.4 - Propriedades dos triângulos - Questão 18

18. Um triângulo isósceles é um triângulo com dois lados de igual comprimento. Aqui estão três exemplos.



Qual das afirmações seguintes é verdadeira para **TODOS** os triângulos isósceles?

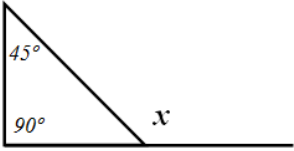
- a) Os três lados devem ter o mesmo comprimento.
- b) Um lado deve ter duas vezes o comprimento de outro lado.
- c) Deve haver pelo menos dois ângulos com a mesma amplitude.
- d) Os três ângulos devem ter a mesma amplitude.
- e) Nenhuma das afirmações anteriores é verdadeira para todos os triângulos isósceles.

Figura 11 – Questão 18 do questionário.

Relativamente à opção correta, 68,0% dos alunos selecionaram a opção C (*deve haver pelo menos dois ângulos com a mesma amplitude*). Poder-se-á supor que a relação dos lados do triângulo com os seus ângulos foi um tópico trabalhado ao longo da sua escolaridade. Contudo, outras opções também foram selecionadas, sendo que 16,0 % dos alunos escolheram a opção E (*nenhuma das afirmações anteriores é verdadeira para todos os triângulos isósceles*), 12,0% selecionaram a opção D (*os três ângulos devem ter a mesma amplitude*) e 4,0% selecionaram a opção B (*um lado deve ter duas vezes o comprimento de outro lado*).

4.1.1.5 - Propriedades dos triângulos - Questão 19

19. A figura seguinte é um triângulo retângulo. Qual o valor do ângulo x ?



Resposta: _____

Figura 12 – Questão 19 do questionário.

Nesta questão nenhum aluno respondeu corretamente, o que sugere que os alunos possam ter tido dificuldades em compreender qual era o *ângulo x*, ou não saberem como calcular a sua amplitude. A maioria dos alunos calculou a amplitude do ângulo interno do triângulo, onde não estava indicada a sua amplitude. Dificuldades de interpretação da figura, podem ter estado na origem destes resultados, isto porque na questão sobre as propriedades dos triângulos, a maioria dos participantes evidenciou conhecimentos sobre a soma dos ângulos internos dos triângulos ser sempre igual e nesta questão calculou o “ângulo interno desconhecido” do triângulo.

4.1.1.6 - Análise transversal do tópico “Triângulos”

A seguir apresento uma análise por aluno, tentando perceber como é que cada um compreende a noção de triângulo, quais os seus mal-entendidos, assim como qual a coerência ou incoerência das suas respostas.

Dos nove alunos que acertaram a questão 1, sobre identificação de triângulos, selecionando apenas as figuras 2, 5 e 11 como triângulos, 7 alunos (28,0%) apresentaram definições enquadradas na categoria A: *“Possui o conceito, podendo evidenciar algumas imprecisões de linguagem”*. Assim, podemos verificar que a representação mental que estes alunos possuem do conceito e a respetiva definição estão em concordância.

Houve, ainda, outros 7 alunos que apresentaram definições de triângulo enquadradas na categoria A - *“Possui o conceito, podendo evidenciar algumas imprecisões de linguagem”*, mas que selecionaram, para além das figuras que representam triângulos, outras figuras que não são triângulos, nomeadamente as figuras 3 e 4, compostas por segmentos de reta e linhas curvas e a figura 12 (*triângulo arredondado*). Houve só um aluno (aluno 19) que não selecionou nenhum triângulo, embora tenha apresentado uma definição de triângulo enquadrada na categoria A.

Quanto aos 5 alunos que escreveram definições de triângulo que tendem a particularizar um determinado tipo de triângulo (categoria B), é possível verificar que todos selecionaram os triângulos 5 e 11 e que o triângulo 2 e as figuras 3, 4 e 12, que não representam triângulos, também foram escolhidos. Verifica-se que o triângulo 2 foi selecionado apenas por três dos cinco alunos. Parece que há uma tendência em escolher figuras que aparentemente têm três lados e que se assemelham a triângulos equiláteros ou isósceles, o que vai de encontro às definições apresentadas por estes

alunos. Relativamente aos alunos que apresentaram descrições incompletas, (categoria C), as suas escolhas na questão 1 centram-se não só nos triângulos como nas figuras 3, 4 e 12. Em resumo, podemos verificar que apenas 28% dos participantes (7 alunos) apresentam uma concordância entre a representação mental do conceito (identificando corretamente as figuras que representam triângulos) e a definição que fazem.

Analisando as questões sobre as propriedades dos triângulos (questões 13 e 18) constata-se que apenas seis alunos selecionaram as afirmações corretas: “*A soma da amplitude dos ângulos internos é sempre igual*” e “*Não possuem diagonais*”. Destes seis alunos apenas um acertou a questão 1 sobre identificação de triângulos, apresentou uma definição de triângulo enquadrada na categoria A e identificou corretamente as propriedades dos triângulos. Assim sendo, de acordo com estas incoerências, posso verificar que apenas um aluno revela possuir o conceito de triângulo associado à representação mental do conceito, definição e suas propriedades.

4.1.1.7 - Síntese dos principais resultados do tópico “Triângulos”

Ao analisar os dados demonstrados acima, no que diz respeito ao conceito de triângulo, verifico que mais de metade dos alunos identifica como triângulos figuras que não são triângulos, admitindo como triângulos figuras formadas por uma linha curva fechada e figuras compostas por um segmento de reta e duas linhas curvas. Este facto sugere que os alunos consideraram os atributos irrelevantes das figuras em vez dos atributos relevantes das mesmas.

Quando os alunos descrevem triângulos são frequentemente encontrados mal-entendidos relacionados com ângulos, comprimento dos lados e vértices. Alguns alunos usam a palavra *aresta* em vez de *lado*. Verificam-se dificuldades e imprecisões em definir um triângulo, havendo tendência em definir o conceito de triângulo através de casos particulares de triângulos como o triângulo acutângulo, o triângulo equilátero e o triângulo isósceles. Verificam-se dificuldades na expressão escrita do conceito.

Quanto às propriedades dos triângulos, a maioria dos alunos identifica que a soma dos ângulos internos de todos os triângulos é sempre igual, mas não reconhece que os triângulos não possuem diagonais. Quanto ao comprimento dos lados de um triângulo, todos os alunos consideraram que os lados de um triângulo podem ser diferentes. Há, ainda, alunos a considerar que os ângulos internos de um triângulo são todos agudos.

A análise das respostas às questões relativas ao conceito de triângulo revela que, a maioria dos alunos não possui o conceito claro de triângulo, o que, supostamente, deveria ter sido desenvolvido durante os 1º e 2º ciclos do ensino básico.

Seguidamente, apresento a análise do tópico “Paralelogramos”, seguindo-se os tópicos “Retângulos” e “Quadrados”.

4.1.2 - Paralelogramos

4.1.2.1 - Identificação de paralelogramos - Questão 7

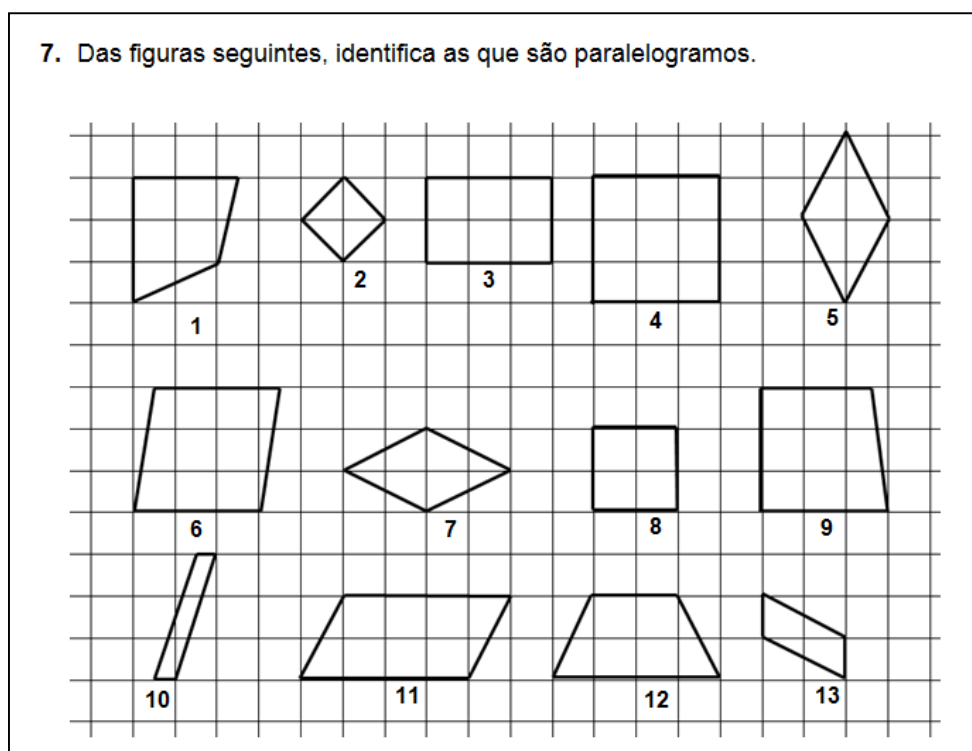



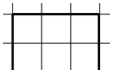
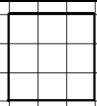
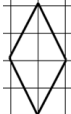
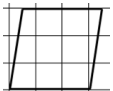
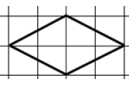


Figura 13 – Questão 7 do questionário.



Relativamente ao número de acertos nesta questão, é possível constatar que apenas dois alunos, 8,0%, selecionam apenas os paralelogramos (figuras 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, e 13), havendo três alunos que não selecionaram qualquer figura (3 respostas em branco).

Das figuras que são paralelogramos verificam-se as seguintes escolhas: a figura mais selecionada pelos alunos foi a figura 11 (paralelogramo oblíquo), com 72,0%;

(quadro 10) as figuras 6 (paralelogramo obliquângulo), e 10 (paralelogramo obliquângulo), foram selecionadas ambas por 52,0% dos alunos e a figura 13 (paralelogramo obliquângulo), por 48,0% da turma. Também escolhidas, mas em menor percentagem, foram a figura 5 (losango não quadrado vertical) e a figura 7 (losango não quadrado horizontal) cada uma selecionada por 24,0% dos alunos; a figura 2 (quadrado na posição oblíqua) por 16,0% e a figura 3 (retângulo), a figura 4 (quadrado com dois lado na horizontal) e a figura 8 (quadrado com dois lado na horizontal) foram selecionadas, cada uma delas, por 12,0% dos alunos.

Quadro 10 - Figuras identificadas como paralelogramos pelos alunos-respostas corretas.

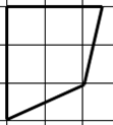
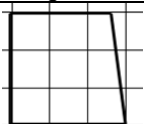
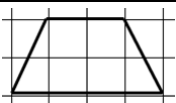
Figuras	Frequência absoluta	Percentagem
 Figura 2	4	16%
 Figura 3	3	12,0%
 Figura 4	3	12,0%
 Figura 5	6	24,0%
 Figura 6	13	52,0%
 Figura 7	6	24,0%
 Figura 8	3	12,0%
 Figura 10	13	52,0%

 Figura 11	18	72,0%
 Figura 13	12	48,0%

Os paralelogramos mais selecionados foram os paralelogramos oblângulos (figuras 6,10,11 e 13). Estas escolhas parecem indicar que os alunos têm associado à noção de paralelogramo somente o paralelogramo oblângulo, sendo menos notória a classificação inclusiva de paralelogramo como todo o quadrilátero com dois pares de lados paralelos. De notar que o paralelogramo mais selecionado pelos alunos é o que usualmente se apresenta nos manuais escolares, sendo designado do mesmo modo que a classe dos paralelogramos simplesmente por paralelogramo, daí que, provavelmente, será essa a razão dos alunos só reconhecerem o oblângulo como paralelogramo e não identifiquem os outros - o quadrado, o retângulo e o losango não quadrado como paralelogramos (Pirola, 1995). Os restantes paralelogramos, também foram selecionados mas em pequena percentagem, sendo que os menos escolhidos foram o retângulo (figura 3) e os dois quadrados com um lado na horizontal (figuras 4 e 8). Estes dados levam-me a refletir se o facto destes paralelogramos serem os únicos com ângulos retos, fez com que os alunos não os escolhessem.

Quanto às figuras que não representam paralelogramos, alguns alunos também as selecionaram (quadro 11).

Quadro 11 - Figuras identificadas como paralelogramos pelos alunos-respostas incorretas.

Figuras	Frequência absoluta	Percentagem
 Figura 1	3	12,0%
 Figura 9	4	16,0%
 Figura 12	6	24,0%

A figura 12 (trapézio isósceles) foi escolhida por 24,0% dos alunos e as figuras 9 e 1 (trapézios retângulos) foram escolhidas por 16,0% e 12,0%, respectivamente.

Estes resultados sugerem que há mal-entendidos sobre a noção de paralelogramo. Seria de esperar outros resultados, visto que o estudo das propriedades dos paralelogramos fez parte do programa de matemática do 6º ano de escolaridade (ME; 1991, 2º ciclo volume 2).

4.1.2.2 - Definição de paralelogramo - Questão 8

8. Descreve, por palavras, o que é um paralelogramo.

Resposta: *Um paralelogramo é*

Figura 14 – Questão 8 do questionário.

Para analisar as respostas dos alunos a esta questão, foram criadas 4 categorias de análise, com base nas respostas dos alunos. Assim sendo, podemos organizar as respostas dos alunos em: *A - Possui o conceito de paralelogramo, podendo evidenciar algumas imprecisões de linguagem; B - Particulariza um determinado tipo de paralelogramo; C - Descrição incompleta ou imprecisa. (Existem dúvidas se o aluno tem ou não o conceito de retângulo) e D – Não respondeu (quadro 12).*

Quadro 12 - Respostas dos alunos por categoria - Paralelogramos

Categorias	Frequência absoluta	Percentagem
A - Possui o conceito de paralelogramo, podendo evidenciar algumas imprecisões de linguagem.	0	(0,0%)
B - Particulariza um determinado tipo de paralelogramo.	4	(16,0%)
C - Descrição incompleta ou imprecisa. (Existem dúvidas se o aluno tem ou não o conceito de retângulo).	11	(44,0%)
D – Não respondeu.	10	(40,0%)

Nesta questão destaca-se o número de respostas em branco, havendo 10 alunos (40,0%) que não responderam. É possível verificar que nenhum aluno definiu o conceito de paralelogramo, não apresentando descrições em que se verificasse a definição deste polígono. Contudo, houve 11 alunos, 44,0%, que apresentaram definições incompletas ou imprecisas, não sendo suficientes para caracterizarem este quadrilátero:

- *“Uma figura com lados paralelos.” (aluno 5);*
- *“Um polígono que tem linhas paralelas, que tem linhas à mesma distância.” (aluno 11);*
- *“Uma figura geométrica.” (aluno 12);*
- *“Uma figura geométrica.” (aluno 14);*
- *“Uma figura.” (aluno 15);*
- *“Uma figura geométrica.” (aluno 16);*
- *“Um polígono irregular com 2 lados iguais e outros 2 iguais. Com 4 vértices e 4 arestas.” (aluno 17);*
- *“Um polígono com lados iguais 2 a 2 e com vértices iguais 2 a 2.” (aluno 19);*
- *“Uma figura geométrica que tem lados paralelos.” (aluno 20);*
- *“Uma figura onde o lado oposto é paralelo.” (aluno 22);*
- *“Uma figura com 4 lados.” (aluno 27).*

É possível verificar que vários alunos apenas descreveram um paralelogramo como “uma figura” ou “uma figura geométrica”, havendo alguns a fazer referência a “lados paralelos”. No entanto, estas definições são insuficientes para descrever um paralelogramo.

Houve, ainda, 4 alunos (16,0%) que apresentaram definições que tendem a particularizar um caso específico de paralelogramo, o paralelogramo oblíquângulo:

- *“Uma figura que tem de ter dois lados agudos e dois lados obtusos. Têm de ter 4 lados.” (aluno 4);*
- *“Um género de retângulo mas mais inclinado para um lado. Tem 4 vértices.” (aluno 6);*
- *“Uma figura com 4 lados, em que os seus paralelos são iguais, tem 2 ângulos agudos e 2 obtusos.” (aluno 10);*
- *“Um polígono com 4 lados 2 deles com um tamanho e outros 2 com outro, por norma os da largura são sempre inclinados.” (aluno 26);*

Parece que a noção de paralelogramo que estes alunos têm centra-se no paralelogramo oblíquângulo e não em todos os quadriláteros com dois pares de lados paralelos, o que sugere que os alunos apresentam dificuldade na classificação hierárquica dos quadriláteros, como é referido por Fujita e Jones (2007).

Linguagem, vocabulário geométrico e mal-entendidos encontrados nas descrições dos alunos

A propriedade mais utilizada foi o “*número de lados*”, com 4 alunos, 16,0%, a referirem que o paralelogramo tem quatro lados.

Um outro aspeto a salientar é a referência ao paralelismo dos lados. Em cinco descrições podemos verificar a sua existência, embora sejam descrições pouco precisas e pouco explícitas. Três alunos referiram que os paralelogramos têm “*lados paralelos*”, um aluno escreveu “*linhas paralelas*” e um outro escreveu que um paralelogramo é “*uma figura onde o lado oposto é paralelo*”. Podemos constatar que apenas um aluno considerou que, num paralelogramo, os lados opostos são paralelos. Nas outras descrições, os alunos só mencionam o paralelismo dos lados, não indicando quais dos lados é que são paralelos. As respostas indiciam que pode haver um mal-entendido no conceito de paralelismo.

4.1.2.3 - Propriedades dos paralelogramos - Questão 16

<p>16. Assinala as afirmações verdadeiras para TODOS os paralelogramos:</p> <p>a) Os lados opostos são paralelos.</p> <p>b) Os lados opostos são iguais.</p> <p>c) Todos os ângulos são retos.</p> <p>d) As diagonais são iguais.</p>
--

Figura 15 – Questão 16 do questionário.

Em relação às propriedades dos paralelogramos (questão 16), pode-se verificar, quanto ao número de acertos, que cinco alunos (20,0%) escolheram as afirmações corretas (A e B),havendo cinco alunos que não responderam. Relativamente às opções corretas verifica-se que 52,0% dos alunos selecionaram a opção A (*os lados opostos são paralelos*) e, também, 52,0% escolheram a opção B (*os lados opostos são iguais*).

Embora cerca de metade dos alunos tenha identificado corretamente as propriedades dos paralelogramos apresentadas, houve 80,0% que não identificaram simultaneamente as duas propriedades dos paralelogramos, o que indica que os alunos têm dificuldades na compreensão das propriedades dos paralelogramos.

Quanto às opções não verdadeiras, 16,0% dos alunos selecionaram a opção D (*as diagonais são iguais*) e 4,0% selecionaram a opção C (*todos os ângulos são retos*).

4.1.2.4 - Análise transversal do tópico "Paralelogramos"

A seguir apresento uma análise por aluno, tentando perceber como é que cada um compreende a noção de paralelogramo, quais os seus mal-entendidos, assim como qual a coerência ou incoerência das suas respostas.

Neste tópico, houve três alunos (12,0%) que não responderam às questões sobre paralelogramos. Dos dois alunos que identificaram corretamente todos os paralelogramos (questão 7), nenhum apresentou uma definição de paralelogramo enquadrada na categoria de análise "A - Possui o conceito de paralelogramo, podendo evidenciar algumas imprecisões de linguagem". Estes dois alunos escreveram: que um paralelogramo é "um polígono que tem linhas paralelas, que tem linhas à mesma distância" (aluno 11) e "uma figura onde o lado oposto é paralelo" (aluno 22). Parece que os alunos conseguem identificar paralelogramos, têm a imagem mental de paralelogramo, mas apresentam dificuldades em definir o conceito de paralelogramo, explicitando as suas propriedades por escrito.

Na questão sobre identificação de paralelogramos, 12 alunos (48%) escolheram apenas paralelogramos obliquângulos, sendo que, destes doze alunos, 5 selecionaram todos os paralelogramos obliquângulos (figuras 6, 10, 11 e 13). Houve, também 3 alunos (alunos 10, 12 e 22) a escolherem somente as figuras 6, 10 e 11 (paralelogramos obliquângulos com dois lados na horizontal). Analisando as descrições escritas destes alunos para a definição de paralelogramo, verifica-se que estas tendem a caracterizar um paralelogramo obliquângulo, indo de encontro às figuras que selecionaram na questão de identificação de paralelogramos. Parece existir uma relação entre o que estes alunos escreveram sobre paralelogramos e as figuras que selecionaram, pois escolheram paralelogramos obliquângulos (figuras 6, 10, 11 e 13). Todas estas figuras com ângulos agudos e obtusos, tal como referem nas suas descrições sobre

paralelogramos. Parece-me que há um entendimento limitado sobre o que são paralelogramos, uma vez que estes alunos selecionaram principalmente paralelogramos obliquângulos, notando-se a tendência, também verificada na questão 7, para considerar apenas estes paralelogramos.

4.1.2.5 - Síntese dos principais resultados do tópico “Paralelogramos”

No que diz respeito à identificação de paralelogramos, verifica-se que os alunos, na sua maioria, tendem a identificar como paralelogramos os paralelogramos obliquângulos. Parece que estes constituem exemplos prototípicos destes polígonos. Apenas dois alunos (8%) identificaram o quadrado, o retângulo e o losango não quadrado como paralelogramos. Houve seis alunos (24%) a considerar como paralelogramo o trapézio isósceles e o trapézio retângulo.

Relativamente à definição de paralelogramo, verifica-se que nenhum aluno escreveu uma definição correta de paralelogramo. Os alunos tendem a descrever casos particulares de paralelogramos como o paralelogramo obliquângulo: *“um género de retângulo mas mais inclinado”*. Constata-se que uma grande parte dos alunos não escreve qualquer definição de paralelogramo e os que o fazem apresentam descrições incompletas, sendo insuficientes para definir um paralelogramo. A noção de paralelogramo da maioria destes alunos centra-se no paralelogramo obliquângulo e não em todos os quadriláteros com dois pares de lados paralelos.

Quanto às propriedades dos paralelogramos, cerca de metade dos participantes identifica corretamente as propriedades dos paralelogramos: *“os lados opostos são paralelos”* e *“os lados opostos são iguais”*. Estes dados parecem indicar uma falta de conhecimento sobre as propriedades deste polígono, nomeadamente, sobre as noções de diagonal, perpendicularidade e posição relativa dos lados.

4.1.3-Retângulos

4.1.3.1 - Identificação de retângulos - Questão 3

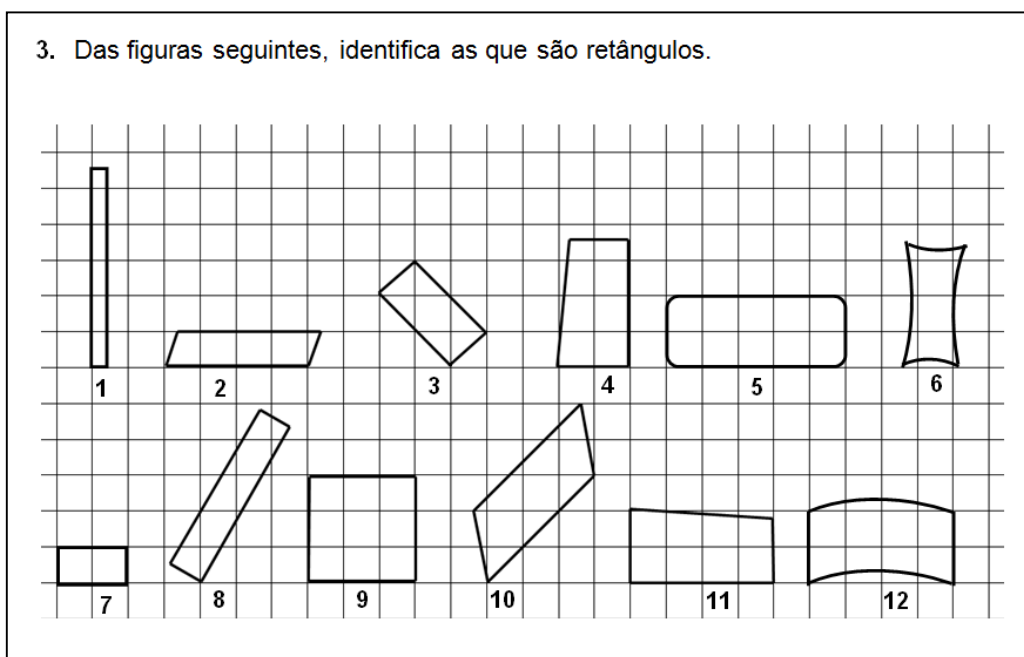
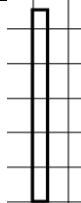



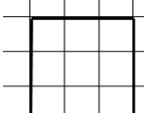


Figura 16 – Questão 3 do questionário.

Analisando todas as respostas dos alunos, verifica-se que nenhum aluno respondeu acertadamente a esta questão, selecionando apenas os retângulos.

Quanto ao número de acertos (quadro 13), constata-se que houve algumas diferenças percentuais nas escolhas das figuras 1,3,7 e 8: 92,0% dos alunos selecionaram a figura 3, 92,0% dos alunos a figura 7, a figura 1 foi escolhida por 88,0% da turma e 84,0% selecionaram a figura 8. Há a destacar que apenas um aluno considerou a figura 9 (quadrado) como retângulo.

Quadro 13 - Figuras identificadas como retângulos pelos alunos-respostas corretas.



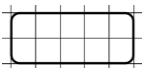
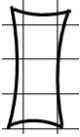
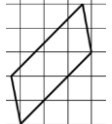

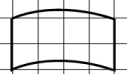
Figuras	Frequência absoluta	Porcentagem
 Figura 1	22	88,0%
 Figura 3	23	92,0%
 Figura 7	23	92,0%
 Figura 8	21	84,0%
 Figura 9	1	4,0%

Nenhuma figura foi escolhida por todos os alunos. As figuras 7 e 1, apesar de se apresentarem em posições habituais (dois lados na horizontal) não foram selecionadas por todos. O facto da figura 1 ser um retângulo “demasiado estreito” (Clements & Sarama, 2000) pode ter influenciado a identificação deste como sendo retângulo. Já as figuras 3 e 8, embora não estejam numa posição horizontal ou vertical, foram selecionadas por grande parte dos alunos o que parece que retângulos ligeiramente inclinados são identificados pelos alunos, tal como se verificou num estudo com crianças do pré-escolar de Clements et al. (1999). O quadrado, figura 9, foi apenas identificado por um aluno, o que sugere que este “retângulo especial” não é reconhecido como retângulo por estes alunos. O mesmo se verificou em estudos com crianças do pré-escolar (Clements et al. (1999).), do 1º ciclo (Yin, 2003) e com alunos do ensino superior (Tempera, 2010). O facto de uma elevada percentagem de alunos não considerar o

quadrado como retângulo, pode ser o motivo para a baixa taxa de acertos nesta questão. Se excluir o quadrado haveria 7 alunos, ou seja, 28,0% dos alunos a responder acertadamente a esta questão, existindo uma subida significativa (de 0,0% para 28,0%).

As figuras que não representam retângulos também foram selecionadas por alguns alunos (quadro14). A figura 5 (linha curva fechada) foi a mais selecionada entre as representações que não são retângulos, havendo 40,0% dos alunos a escolhê-la. A figura 10 (paralelogramo obliquângulo) foi selecionada por 16,0% dos alunos, a figura 2 (paralelogramo obliquângulo) por 12,0%, e as figuras 6 (figura formada por quatro linhas curvas) e 12 (figura formada por dois segmentos de reta e duas linhas curvas) foram selecionadas por 8,0% dos alunos. Nenhum dos alunos selecionou as figuras 4 e 11 (trapézios retângulos).

Quadro 14 - Figuras identificadas como retângulos pelos alunos-respostas incorretas.

Figuras	Frequência absoluta	Porcentagem
 Figura 2	3	12,0%
 Figura 4	0	0,0%
 Figura 5	10	40,0%
 Figura 6	2	8,0%
 Figura 10	4	16,0%
 Figura 11	0	0,0%
 Figura 12	2	8,0%

Uma elevada percentagem de alunos, 40,0%, selecionou a figura 5, o que sugere que os alunos identificam a figura pelos seus atributos visuais. Também existe uma percentagem significativa de alunos a selecionar os paralelogramos obliquângulos (figuras 2 e 10), verificando-se, tal como em estudos anteriores, a propensão dos alunos em considerar estes quadriláteros como retângulos (Clements & Sarama, 2000; Clements & Battista, 1992; Clements et al.; 1999; Yin, 2003).

Nenhum aluno selecionou os trapézios retângulos (figuras 4 e 11), o que parece sugerir que os alunos possuem a noção de que os lados opostos dos retângulos tem de ser paralelos. Em estudos com crianças do pré-escolar, verifica-se que há uma tendência para identificar este tipo de quadriláteros como retângulos. (Clements, Swaminathan, Hannibal, & Sarama, 1999; Clements & Sarama, 2000).

4.1.3.2 - Definição de retângulo - Questão 4

4. Descreve, por palavras, o que é um retângulo.

Resposta: *Um retângulo é*

Figura 17 – Questão 4 do questionário.

Para analisar os dados obtidos nesta questão foram criadas categorias que emergiram da análise dos dados. Assim, podemos distinguir quatro categorias relacionadas com o conhecimento explícito dos alunos, evidenciado pela linguagem escrita: **A)** possui o conceito de retângulo, podendo evidenciar algumas imprecisões de linguagem; **B)** particulariza um determinado tipo de retângulo; **B)+C)** descrição imprecisa que parece particularizar um retângulo não quadrado e **C)** apresenta uma descrição incompleta, existindo dúvidas se o aluno tem o conceito de retângulo. Deste modo, a análise das respostas dos alunos permite-me enquadrá-las em quatro categorias de análise (quadro 15), verificando que grande parte dos alunos, 48,0%, apresenta descrições incompletas e/ou imprecisas que não evidenciam a aquisição do conceito de retângulo, havendo somente 5 alunos (20,0%) que revelam compreender o que é um retângulo, embora apresentem algumas imprecisões de linguagem:

- “Uma figura com quatro ângulos todos iguais.” (Aluno 5);
- “Uma figura geométrica na qual todos os seus ângulos são retos.” (Aluno 7);
- “Uma figura geométrica em que os lados que são paralelos são iguais. Tem 4 ângulos retos.” (Aluno 10);
- “Uma figura geométrica com 2 a 2 lados. Com 4 ângulos retos.” (Aluno 12);
- “Uma figura geométrica com lados iguais dois a dois. Esta figura tem 4 lados e 4 ângulos retos.” (Aluno 20).

Quadro 15 - Respostas dos alunos por categoria - Retângulos

Categorias	Frequência absoluta	Porcentagem
A - Possui o conceito de retângulo, podendo evidenciar algumas imprecisões de linguagem.	5	20,0%
B - Particulariza um determinado tipo de retângulo.	3	12,0%
B + C - Descrição imprecisa que parece particularizar um retângulo não quadrado.	5	20,0%
C – Descrição incompleta ou imprecisa. (Existem dúvidas se o aluno tem ou não o conceito de retângulo).	12	48,0%

Também é possível verificar que alguns alunos, tendem a particularizar um determinado tipo de retângulo:

- “Um polígono regular com 4 lados.” (Aluno 11);
- “Um polígono regular de 4 arestas com 4 vértices e os lados opostos são iguais.” (Aluno 17);
- “Um polígono regular de quatro arestas, 4 vértices e 4 ângulos retos.” (Aluno 25).

Nestas descrições verificamos a particularização do quadrado pelo fato de se referirem a um polígono regular, provavelmente porque enfatizam o facto de terem os lados iguais.

Outras cinco definições, embora imprecisas, parecem descrever um retângulo, não quadrado:

- “Uma figura geométrica que tem 4 arestas, dois lados iguais e dois diferentes e tem as linhas maiores paralelas tal como as menores, tem linhas retas, os lados opostos são diferentes e todos os ângulos são retos.” (Aluno 2);
- “Uma figura geométrica com comprimento e largura diferente.” (Aluno 14);

- “Uma figura com comprimento e largura e que (tem) 4 vértices e 4 arestas. O comprimento tem que ser menor que a largura.” (Aluno 15);
- “Uma figura geométrica com 4 ângulos de 90° e tem de ter 4 lados e o comprimento maior que a largura.” (Aluno 18).
- “Uma figura onde os lados que representam o comprimento tem de ter a mesma distância um do outro e os da largura igualmente.” (Aluno 22).

Estas últimas cinco descrições podem justificar a não inclusão do quadrado como retângulo na questão 3 deste questionário, visto que descrevem características de um retângulo, não quadrado.

Linguagem, vocabulário geométrico e mal-entendidos encontrados nas descrições dos alunos

As propriedades mais utilizadas pelos alunos para definir um retângulo foram o “número de lados” (56,0%), seguindo-se o “número de ângulos”, com 24,0% e os “4 ângulos retos”, com 20,0%. Quanto à referência ao comprimento dos lados, houve 16 alunos (64,0%) que indicaram esta propriedade, mas de modos diferentes. Destes, podemos verificar que 7 alunos apenas referem a existência de “lados iguais dois a dois” sem mencionar o paralelismo dos lados:

- “Uma figura com 4 lados, iguais 2 a 2.” (Aluno 1);
- “Uma figura geométrica com 4 lados. É constituído por 2 linhas laterais mais pequenas que as outras.” (Aluno 3);
- “Uma figura com 4 lados e cada 2 são diferentes, tem 4 vértices.” (Aluno 6);
- “Polígono com 4 lados e 2 são iguais e os outros 2 também são iguais.” (Aluno 9);
- “Uma figura geométrica que tem 4 lados e tem 2 lados iguais e tem mais 2 iguais”. (Aluno 16);
- “Uma figura geométrica com quatro lados mas dois são diferentes.” (Aluno 21);
- “Um polígono fechado de 4 lados com 2 pares de lados diferentes.” (Aluno 23).

Pode-se constatar que estas definições são insuficientes para caracterizar um retângulo, pois, de acordo com elas, podemos considerar vários quadriláteros: um papagaio, com dois lados consecutivos iguais, um paralelogramo oblíquângulo, um losango ou um bumerangue (quadrilátero não convexo). Houve 1 aluno que escreveu que um retângulo é “Uma figura geométrica com lados iguais dois a dois. Esta figura

tem 4 lados e 4 ângulos retos” (Aluno 20). Neste caso, uma vez que acrescentou a existência de 4 ângulos retos, pode considerar-se que se trata de um retângulo. Os alunos 2, 10 e 17, para além de mencionarem a existência de lados iguais dois a dois, fizeram referência ao paralelismo dos lados:

- *“Uma figura geométrica que tem 4 arestas, dois lados iguais e dois diferentes e tem as linhas maiores paralelas tal como as menores, tem linhas retas, os lados opostos são diferentes e todos os ângulos são retos.”* (Aluno 2);
- *“Uma figura geométrica em que os lados que são paralelos são iguais. Tem 4 ângulos retos.”* (Aluno 10);
- *“Um polígono regular de 4 arestas com 4 vértices e os lados opostos são iguais.”* (Aluno 17).

Houve 3 alunos que recorreram aos termos *“comprimento”* e *“largura”*, parecendo indicar que têm uma imagem protótipo de retângulo:

- *“Uma figura geométrica com comprimento e largura diferente.”* (Aluno 14);
- *“Uma figura com comprimento e largura e que tem 4 vértices e 4 arestas. O comprimento tem que ser menor que a largura.”* (Aluno 15);
- *“Uma figura geométrica com 4 ângulos de 90° e tem de ter 4 lados e o comprimento maior que a largura.”* (Aluno 18).

Dois alunos apresentam referência ao comprimento dos lados, embora de forma imprecisa:

- *“Uma figura cujo seu comprimento tem de ser inferior ao comprimento dos lados, cada lado tem de ter 90°. Têm de ter 4 lados.”* (Aluno 4);
- *“Um polígono com 4 lados 2 a 2 com um tamanho de largura e comprimento.”* (Aluno 26).

No que diz respeito à utilização de vocabulário geométrico, verifica-se que a palavra *“arestas”* é utilizada, por quatro alunos: *“tem 4 vértices e 4 arestas”*; *“...4 arestas com 4 vértices e os lados opostos são iguais”*; *“tem 4 arestas, dois lados iguais e dois diferentes”*; *“unida por 4 pontos, tem 6 lados, 8 vértices e 12 arestas”*, o que indica que os alunos utilizam este termo em vez da palavra *“lados”* (do polígono).

4.1.3.3 - Propriedades dos retângulos - Questão 14

<p>14. Assinala as afirmações verdadeiras para TODOS os retângulos:</p> <p>a) Os lados opostos são diferentes.</p> <p>b) Todos os ângulos são retos.</p> <p>c) As diagonais são iguais.</p> <p>d) As diagonais são perpendiculares.</p>

Figura 18 – Questão 14 do questionário.

Em relação às propriedades dos retângulos (questão 14), pode-se verificar, quanto ao número de acertos, que dois alunos (8,0%) selecionaram apenas as afirmações corretas (B e C). Relativamente às opções corretas, verifica-se que 68,0% dos alunos selecionaram a opção B (*todos os ângulos são retos*) e 32,0% escolheram a opção C (*as diagonais são iguais*).

Quanto às opções que não correspondem a propriedades de todos os retângulos, constata-se que 28,0% dos alunos da turma consideraram a opção D (*as diagonais são perpendiculares*) correta e 24,0% dos participantes selecionaram a opção A (*os lados opostos são diferentes*). Estes dados sugerem que as propriedades dos retângulos poderão não estar totalmente apreendidas pelos participantes, assim como se constata a existência de alguns mal-entendidos relacionados com alguns conceitos geométricos, entre os quais: o de ângulo, de diagonal, de paralelismo ou posição relativa dos lados.

4.1.3.4 - Análise transversal do tópico “Retângulos”

A seguir apresento uma análise por aluno, tentando perceber como é que cada um compreende a noção de retângulo, quais os seus mal-entendidos, assim como qual a coerência ou incoerência das suas respostas.

Fazendo uma análise transversal, por aluno, das três questões acima analisadas, é possível constatar que, dos sete alunos que selecionaram somente os retângulos (exceto o quadrado), só dois (aluno 12 e aluno 20) apresentaram definições enquadradas na categoria A - “Possui o conceito de retângulo, podendo evidenciar

algumas imprecisões de linguagem.” Houve um aluno que selecionou os retângulos 1, 3, 7 e 9 (quadrado), apresentou uma definição enquadrada na categoria A e selecionou as afirmações verdadeiras para todos os retângulos, na questão sobre as propriedades deste polígono. Contudo, não selecionou um dos retângulos, a figura 8. Dos 8 alunos que apresentaram definições que tendem a particularizar um determinado tipo de retângulo, todos selecionaram as figuras 1, 3, 7 e 8 que representam retângulos. Havendo dois que, para além destas, consideraram como retângulo, também, a figura 5 (linha curva fechada).

Três alunos usaram o termo “polígono regular” para definirem um retângulo. Contudo, nenhum deles considerou o quadrado como sendo um retângulo. Parece que o conceito de “polígono regular” não é entendido por estes alunos. Praticamente metade dos participantes apresentou definições incompletas ou imprecisas, insuficientes para descreverem este polígono e, deste grupo, apenas dois alunos selecionaram todos os retângulos, à exceção do quadrado.

Verifica-se que os alunos utilizam uma linguagem com vocabulário geométrico, mas não demonstram conhecê-lo. Há definições em que os alunos utilizam termos como: “polígono”, “polígono regular”, mas, não de forma matematicamente correta.

4.1.3.5 - Síntese dos principais resultados do tópico “Retângulos”

Ao analisar os dados demonstrados acima, no que diz respeito ao conceito de retângulo, verifiquei que alguns alunos identificam como retângulo figuras formadas por linhas curvas fechadas, figuras compostas por linhas curvas e segmentos de reta e paralelogramos oblíquos. A maioria dos alunos identificou corretamente retângulos, embora nenhuma figura tenha sido considerada como retângulo por todos os participantes. O quadrado apenas foi selecionado por um aluno e nenhum selecionou apenas as figuras que representam retângulos.

Relativamente à definição de retângulo, verifica-se que a maioria dos alunos apresentou definições incompletas ou imprecisas, insuficientes para definirem um retângulo. A maioria dos alunos, 64,0%, (16 alunos) recorreu à propriedade “comprimento dos lados” nas suas descrições, mas de forma incorreta, havendo somente 2 destes 16 alunos que utilizaram a propriedade corretamente. Apenas 5 alunos (20,0%) revelam possuir o conceito de retângulo e 8 alunos (28,0%) tendem a particularizar um determinado tipo de retângulo: o quadrado (3 alunos) ou o retângulo

não quadrado (5 alunos). Parece que estes alunos têm o protótipo de retângulo. Alguns alunos usam a palavra *aresta* em vez de *lado*.

Quanto às propriedades dos retângulos, a maioria dos alunos identifica que para todos os retângulos “todos os ângulos são retos. Já no que diz respeito às diagonais deste polígono poucos alunos identificam-nas como tendo o mesmo comprimento e consideram, também, que estas são perpendiculares. Há alunos a considerar que no retângulo os lados opostos são diferentes. Estes dados indicam falta de conhecimento sobre as propriedades deste polígono.

4.1.4 - Quadrados

4.1.4.1 - Identificação de quadrados - Questão 5

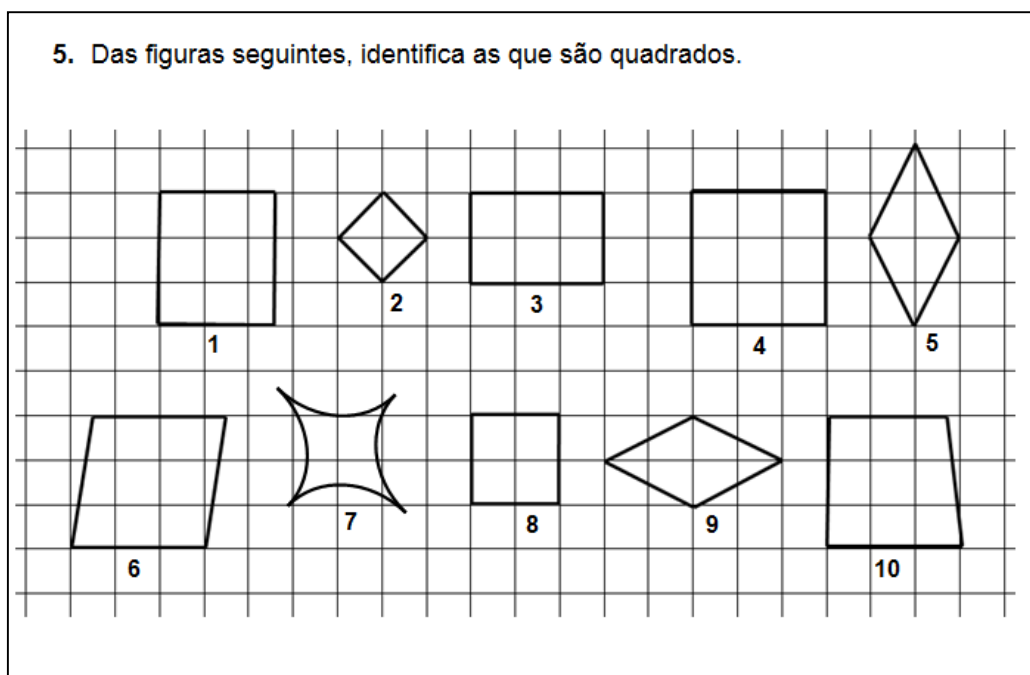
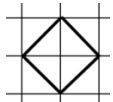
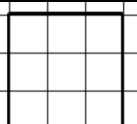
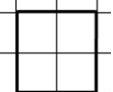


Figura 19 – Questão 5 do questionário.

Relativamente a esta questão, apenas 10 alunos (40,0%) selecionaram unicamente as figuras que representam quadrados.

No que diz respeito às escolhas dos alunos no que se refere à seleção das figuras que representam quadrados (quadro 16), posso verificar que todos os alunos escolheram as figuras 4 e 8 e que 60,0% dos alunos selecionaram a figura 2 (quadrado em posição oblíqua).

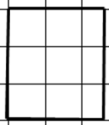
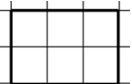
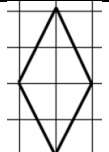
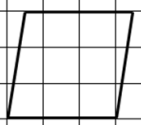
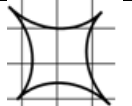
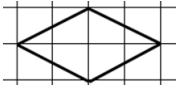
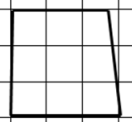
Quadro 16 - Figuras identificadas como quadrados pelos alunos-respostas corretas.

Figuras	Frequência absoluta	Porcentagem
 <p>Figura 2</p>	15	60,0%
 <p>Figura 4</p>	25	100,0%
 <p>Figura 8</p>	25	100,0%

Todos os alunos selecionaram as figuras 4 e 8. As dimensões dos quadrados parecem não ter influenciado as suas escolhas, o que sugere que os alunos conseguem identificar estes quadriláteros quando apresentados com um lado na horizontal. Houve uma percentagem significativa de alunos (40,0%) que não selecionou o quadrado em posição oblíqua (figura 2). O facto deste quadrado estar numa posição pouco habitual (oblíqua) parece ter influenciado as escolhas dos alunos. Outros estudos, como os de Clements & Sarama (2000) e Yin (2003), também revelaram a tendência para alunos não aceitarem quadrados nesta posição.

Quanto às figuras que não são quadrados algumas delas foram selecionadas (quadro 17). A figura 1 (retângulo) foi selecionada por 36,0% dos alunos e a figura 6 (paralelogramo oblíquângulo) por 12,0% dos alunos. As restantes figuras (o retângulo, os losangos, o trapézio retângulo, e a figura formada por linhas curvas) não foram escolhidas pelos alunos.

Quadro 17 - Figuras identificadas como quadrados pelos alunos-respostas incorretas.

Figuras	Frequência absoluta	Porcentagem
 Figura 1	9	36,0%
 Figura 3	0	0,0%
 Figura 5	0	0,0%
 Figura 6	3	12,0%
 Figura 7	0	0,0%
 Figura 9	0	0,0%
 Figura 10	0	0,0%

A escolha das figuras 1 e 6 pode estar relacionada com a aparência global das figuras, não analisando o comprimento dos lados e a amplitude dos ângulos de modo preciso. Ainda houve quatro alunos a selecionar as figuras 1 (retângulo), 4 e 8 (quadrados), todas elas com um lado na horizontal.

4.1.4.2 - Definição de quadrado - Questão 6

6. Descreve, por palavras, o que é um quadrado.

Resposta: *Um quadrado é*

Figura 20 – Questão 6 do questionário.

Tal como nas questões anteriores envolvendo definições das figuras em estudo, para a análise desta questão foram criadas categorias que emergiram da análise das respostas dos alunos (quadro 18). Deste modo, surgiram as seguintes categorias: **A)** possui o conceito de quadrado, podendo evidenciar algumas imprecisões de linguagem; **B)** particulariza um determinado tipo de quadrilátero - losango; **C)** descreve características de um polígono regular qualquer e **D)** apresenta uma descrição incompleta ou imprecisa, existindo dúvidas se o aluno tem o conceito de quadrado.

Quadro 18 - Respostas dos alunos por categoria - Quadrados

Categorias	Frequência absoluta	Percentagem
A - Possui o conceito de quadrado, podendo evidenciar algumas imprecisões de linguagem.	9	36,0%
B - Particulariza um determinado tipo de quadrilátero – losango não quadrado.	9	36,0%
C – Descreve características de um polígono regular qualquer.	4	16,0%
D – Descrição incompleta ou imprecisa. (Existem dúvidas se o aluno tem ou não o conceito de quadrado).	3	12,0%

Na análise dos dados verifica-se que menos de metade dos participantes, 36,0%, apresentaram uma definição do conceito de quadrado mais completa, revelando possuir o conceito de quadrado:

- “É uma figura cujo todos os seus lados têm de ter 90º e todos os lados têm de medir o mesmo. Têm de ter 4 lados.” (aluno 4);
- “Uma figura geométrica com 4 lados e todos eles iguais, quatro ângulos retos.” (aluno 10);
- “Um polígono regular com 4 lados iguais.” (aluno 11);

- “Uma figura geométrica com os lados todos iguais. Tem 4 ângulos retos.” (aluno 12);
- “Um polígono regular de 4 partes completamente iguais, de 4 vértices e de 4 arestas.” (aluno 17);
- “Uma figura geométrica com 4 lados e estes têm de ser iguais, têm de formar 4 ângulos de 90°.” (aluno 18);
- “Um polígono com 4 lados iguais e 4 vértices de 90°.” (aluno 19);
- “Uma figura geométrica com os lados todos iguais e com 4 ângulos retos. A figura tem 4 lados.” (aluno 20);
- “Um polígono regular de quatro arestas iguais, vértices e ângulos retos.” (aluno 25).

O mesmo número de alunos definiu um losango não quadrado, em vez de um quadrado. Como podemos observar através das suas descrições:

- “Uma figura com **4 lados todos iguais**.” (aluno 1);
- “Uma figura com **quatro lados todos iguais**.” (aluno 5);
- “Uma figura com **4 lados iguais** e 4 vértices.” (aluno 6);
- “Uma figura geométrica com **4 lados iguais**.” (aluno 14);
- “Uma figura geométrica com **4 lados iguais**.” (aluno 21);
- “Uma figura com **4 lados** com os lados **todos iguais**.” (aluno 22);
- “Um polígono fechado de **4 lados iguais**.” (aluno 23);
- “Um polígono com **4 lados todos iguais**.” (aluno 26);
- “Um polígono de **4 lados geometricamente iguais**.” (aluno 27).

Parece que estes alunos têm associado ao conceito de quadrado o número 4 e a palavra “iguais”.

Embora em menor número, houve quatro alunos que escreveram apenas que um quadrado é uma figura geométrica com os lados todos iguais:

- “Uma figura geométrica cujo os **lados** são **todos iguais**” (aluno 3);
- “Uma figura geométrica que tem **os lados todos iguais**.” (aluno 7);
- “É um polígono com **todos os lados iguais**.” (aluno 9);
- “Uma figura geométrica que tem **todos os lados iguais**.” (aluno 16).

Houve, ainda, três alunos que apresentaram definições incompletas ou imprecisas:

- “Uma figura geométrica com todos os lados iguais. Tem todos os lados paralelos, 4 arestas e tem apenas linhas retas.” (aluno 2);
- “Uma figura unida por 4 pontos com 6 lados, 8 vértices e 12 arestas.” (aluno 13);
- “Uma figura com largura igual ao comprimento, 4 arestas e 4 vértices.” (aluno 15).

Linguagem, vocabulário geométrico e mal-entendidos encontrados nas descrições dos alunos

No que se refere às definições do conceito de quadrado apresentadas pelos alunos, a característica mais utilizada foi o comprimento dos lados, sendo a propriedade “*lados todos iguais*” usada por 88,0% dos alunos, seguindo-se a propriedade “*4 lados*”, por 60,0% dos alunos. Em percentagens inferiores consideram as propriedades: “*ângulos retos (ou de 90°)*”, com 20,0%, “*4 ângulos*”, usada por 16,0% dos alunos, “*quatro ângulos retos*”, também com 16,0% e “*4 vértices*”, com 12,0 % dos alunos a utilizá-la nas suas definições. Importa salientar que não houve nenhuma descrição que fizesse referência às propriedades do quadrado quanto às suas diagonais ou ao número de eixos de simetria deste polígono. Ainda relativamente às propriedades mais enunciadas pelos alunos, se analisarmos globalmente as suas respostas (quadro 19), verifica-se que uma considerável percentagem de alunos, 36,0%, apenas descreve um quadrado como sendo uma figura com “*4 lados iguais*” e 16,0% consideram unicamente que um quadrado é uma figura com “*todos os lados iguais*”.

Quadro 19 – Propriedades dos quadrados evidenciadas pelos alunos

Propriedade evidenciada	Frequência absoluta	Percentagem
“Figura geométrica com todos os lados iguais”	4	16,0%
“Figura com 4 lados iguais”	9	36,0%
Outras respostas	12	48,0%

Embora os quadrados tenham as características mencionadas, não são elas que, por si só, definem este polígono, sendo necessárias mais condições. Um quadrado tem todos os lados iguais, mas não é a única figura geométrica a tê-los. O mesmo se verifica quando os alunos consideram um quadrado como uma figura com 4 lados iguais. Esta afirmação é verdadeira, mas insuficiente para descrever um quadrado, pois a um polígono que tem os 4 lados iguais chamamos losango. Visto que se trata de um polígono reconhecido pelas crianças, desde muito pequenas (Hannibal, 1999), seria de esperar que mais alunos referissem que os quadrados possuem quatro ângulos retos. Também o facto de nenhum aluno ter selecionado os losangos (figuras 3 e 9) da questão 5, levava a crer que estavam a considerar a amplitude dos ângulos internos dessas figuras.

No que diz respeito à utilização de vocabulário geométrico, podemos verificar que três alunos utilizaram o termo “*polígono regular*”, fazendo parte de uma descrição com mais informação: “*Um polígono regular com 4 lados iguais*”; “*Um polígono regular de 4 partes completamente iguais...*”; “*Um polígono regular de quatro arestas iguais, vértices e ângulos retos.*” Ao denominarmos uma figura como sendo um polígono regular subentende-se que esse polígono tem os lados todos iguais e os ângulos todos iguais. Parece que poderá existir algum mal-entendido sobre o que se entende por “*polígono regular*”. Surgiram, também, as seguintes descrições relativamente aos quadrados: “*os lados têm de ter 90°*” e “*4 vértices de 90°*”, o que evidencia um mal-entendido relativamente à noção de amplitude de ângulo. Também, tal como se verificou com a definição de retângulo, a palavra “*arestas*” aparece em cinco descrições que parecem referir-se ao termo “*lados*”.

4.1.4.3 - Propriedades dos quadrados - Questão 15

15. ABCD é um quadrado.
Qual a relação que é verdadeira para **TODOS** os quadrados?

- a) Os segmentos de reta AC e CB têm o mesmo comprimento.
- b) Os segmentos de reta DB e AC são perpendiculares.
- c) Os segmentos de reta AB e DC são perpendiculares.
- d) Os segmentos de reta AB e DB têm o mesmo comprimento.
- e) O ângulo D é maior do que o ângulo C.

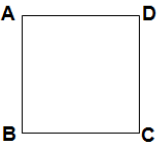


Figura 21 – Questão 15 do questionário.

Relativamente à opção correta, 56,0% dos participantes (14 alunos) selecionaram corretamente a opção B (*os segmentos de reta DB e AC são perpendiculares*). Contudo, somente 5 destes alunos selecionaram apenas a opção B, tendo os restantes selecionado outras opções, para além da correta.

Quanto às opções que não são corretas, verifica-se que 56,0% dos alunos selecionaram a opção A (*Os segmentos de reta AC e CB têm o mesmo comprimento*), 36,0% escolheram a opção D (*os segmentos de reta AB e DB têm o mesmo comprimento*) e 20,0% dos alunos selecionaram a opção C (*os segmentos de reta AB e DC são perpendiculares*). Apenas um aluno, 4,0% dos alunos da turma, selecionou a opção E (*o ângulo D é maior do que o ângulo C*).

As respostas a esta questão sugerem que poderão existir alguns mal-entendidos sobre as noções de perpendicularidade e paralelismo, ainda que a maioria dos alunos evidencia desconhecer as características de um quadrado.

4.1.4.4 - Análise transversal do tópico “Quadrados”

A seguir apresento uma análise por aluno, tentando perceber como é que cada um compreende a noção de quadrado, quais os seus mal-entendidos, assim como qual a coerência ou incoerência das suas respostas.

Fazendo uma análise transversal, das três questões acima analisadas, é possível constatar que apenas um aluno (aluno 10) respondeu acertadamente às três questões. Dos 10 alunos que identificaram corretamente as figuras que representam quadrados, apenas quatro apresentaram uma definição do conceito de quadrado enquadrada na categoria A - *Possui o conceito de quadrado, podendo evidenciar algumas imprecisões de linguagem*, havendo seis alunos a apresentarem definições que não correspondem ao conceito de quadrado. Podemos verificar que estes seis alunos, embora tenham identificado corretamente as figuras que representavam os quadrados, sugerindo que apresentam uma correta imagem mental do que é um quadrado, apresentaram dificuldades na definição deste polígono.

É possível constatar uma incongruência entre as definições escritas pela maioria dos alunos e as figuras selecionadas por estes, isto porque os alunos que selecionaram as figuras que não são quadrados (figura 1, retângulo e figura 6, paralelogramo oblíquângulo) escreveram nas suas definições a propriedade “*lados todos iguais*”.

Das nove descrições enquadradas na categoria A – “Possui o conceito de quadrado, podendo evidenciar algumas imprecisões de linguagem”, quatro pertencem a alunos que identificaram corretamente os quadrados, notando-se uma concordância entre a identificação e a definição de quadrado. Os outros cinco alunos, para além das figuras 4 e 8 escolheram a figura 1 (retângulo) e/ou não escolheram a figura 2 (quadrado em posição oblíqua). Verifica-se que a imagem mental que os alunos têm de quadrado (os que selecionaram apenas os quadrados) não corresponde à definição apresentada, parecendo existir dificuldades em traduzir explicitamente o que é um quadrado e quais as propriedades que dizem respeito a esta figura.

4.1.4.5 - Síntese dos principais resultados do tópico “Quadrados”

Ao analisar os dados demonstrados acima, no que diz respeito ao conceito de quadrado, verifica-se que menos de metade dos alunos identificou corretamente as figuras que representam quadrados (40,0%). Os quadrados com um lado na horizontal são mais reconhecidos pelos alunos (as figuras 4 e 8 foram escolhidas por todos os alunos) do que quadrados em posição oblíqua (figura 2). Quadriláteros não quadrados com um dos lados na horizontal (figura 1 e figura 6) são escolhidos por nove e três alunos, respetivamente.

Relativamente à definição de quadrado, verifica-se que a maioria dos alunos apresentou definições particularizadas de quadriláteros que não são quadrados ou definições imprecisas. Há tendência em particularizar o losango não quadrado e em escrever a descrição de polígono regular. Apenas 36,0 % dos alunos revelaram possuir o conceito de quadrado, podendo evidenciar algumas imprecisões de linguagem, enquanto que 36,0% dos alunos definiram um caso particular de quadrilátero (o losango não quadrado). Houve alunos a definirem um quadrado apenas como um polígono com os lados todos iguais. A propriedade mais utilizada (por 88,0% dos alunos) foi “*lados todos iguais*”, seguida da propriedade “*4 lados*”, enunciada por 60,0% dos alunos. Apenas 5 alunos (20,0%) fazem referência à amplitude dos ângulos internos do quadrado. Quanto à utilização de vocabulário geométrico, verifica-se a utilização matematicamente incorreta de alguns termos, como por exemplo: “*arestas*” em vez de “*lados*”, “*vértice de 90°*”, “*lados de 90°*”. Quanto às propriedades dos quadrados, apenas cinco alunos selecionaram a opção correta, o que sugere a existência de dificuldades ao nível do conceito de paralelismo e de perpendicularidade.

4.2 - Análise global dos tópicos

No que se refere à identificação de triângulos, paralelogramos retângulos, quadrados e, verifica-se que os alunos tiveram mais facilidade em identificar quadrados, seguindo-se os triângulos (36,0%), os paralelogramos (8,0%) e os retângulos (0,0%), com nenhum aluno a identificar todos os retângulos apresentados na questão (quadro 20) .é de realçar que estes resultados, relativos aos retângulos, se traduzem por nenhum aluno ter identificado o quadrado como retângulo. Se excluíssemos o quadrado existiriam 7 alunos (28,0%) a responder acertadamente a esta questão, existindo uma subida significativa (de 0,0% para 28,0%).

Quadro 20 – Percentagens de acertos por tópico.

	Figuras geométricas			
	Triângulo	Retângulo	Quadrado	Paralelogramo
Representação mental do conceito (identificação)	36,0%	0%	40,0%	8%
Definição do conceito	60,0%	20,0%	36,0%	0%
Propriedades do conceito	24%	8%	20%	20%


Quanto à definição dos conceitos de triângulo, retângulo, quadrado e paralelogramo, constata-se que os alunos conseguiram definir de forma mais completa o conceito de triângulo (60,0%), seguindo-se o quadrado (36,0%), o retângulo (20,0%) e por último o paralelogramo (0%).


Relativamente às propriedades dos polígonos estudados, aquele em que houve um melhor desempenho foi o triângulo (24,0%), seguido do quadrado e do paralelogramo, ambos com (20,0%), e por último o retângulo com 8,0%.




4.3 - Análise por aluno

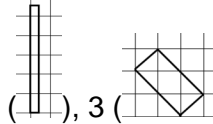
Seguidamente apresento uma análise por aluno, daqueles que levantaram uma maior reflexão sobre as respostas dadas, tentando entender como é que cada um compreende as noções de triângulo, paralelogramo, retângulo e quadrado e quais os seus mal-entendidos.

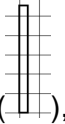


O **aluno 4** identificou corretamente os triângulos e definiu corretamente o conceito de triângulo. No tópico dos retângulos selecionou todos os retângulos, à exceção do quadrado, e apresentou uma definição do retângulo não quadrado: *Uma figura cujo seu comprimento tem de ser inferior ao comprimento dos lados, cada lado tem de ter 90°. Têm de ter 4 lados*. Pela definição que apresenta, parece que este aluno tem como conceito de retângulo um retângulo não quadrado.

No que diz respeito aos quadrados, este aluno selecionou todos os quadrados mais a figura 1 () que é um retângulo não quadrado. Contudo, na sua definição de quadrado salienta que os quadrados têm lados iguais: *“É uma figura cujo todos os seus lados têm de ter 90° e todos os lados têm de medir o mesmo. Têm de ter 4 lados.”*. Parece que o aluno considerou a aparência global da figura 1, não analisando com rigor as suas propriedades. O facto da medida dos lados maiores ser próxima da medida dos lados menores pode ter influenciado a escolha desta figura.

O **aluno 6** selecionou todos os triângulos mais a figura 12 () “triângulo arredondado”, e definiu um triângulo como sendo *“uma figura com 3 lados e com 3 vértices”*. Quanto às propriedades dos triângulos o aluno reconhece que a soma das amplitudes dos ângulos internos ser igual, mas não admite que o triângulo não possui diagonais.



Os paralelogramos selecionados por este aluno foram o 10 (), o 11 () e o 13 (), todos eles paralelogramos obliquângulos. A sua definição parece estar de acordo com as figuras que selecionou: *“um género de retângulo mas mais inclinado para um lado. Tem 4 vértices”*. Parece que este aluno tem interiorizado como conceito de paralelogramo a imagem de paralelogramo obliquângulo, sendo a propriedade “lados opostos paralelos” aquela que é reconhecida por este aluno.



No que diz respeito aos retângulos identificou as figuras 1 () , 3 () e 7 () e definiu um retângulo como: “*uma figura com 4 lados e cada 2 são diferentes, tem 4 vértices*”, parecendo que o aluno sabe que num retângulo todos os ângulos são retos. Contudo, não manifesta reconhecer o que são diagonais. Quanto aos quadrados identificou como quadrados apenas os que tinham um lado na horizontal, definindo quadrado como uma “*figura com 4 lados iguais e 4 vértices*”. Pode-se verificar que este aluno poderá ter alguma dificuldade em identificar quadrados em posições oblíquas. Também na definição que apresentou, não salientou a propriedade *quatro ângulos retos*. Será que este aluno só identifica ângulo retos em quadrados que estejam na horizontal?




O **aluno 7** selecionou apenas o triângulo escaleno e o triângulo isósceles definindo um triângulo como: “*Uma figura geométrica na qual todos os seus ângulos são agudos.*” Parece que o aluno tem um conceito de triângulo um pouco difuso, pois a sua definição não está de acordo com as figuras que selecionou, uma vez que o triângulo escaleno é obtusângulo.

Já com os paralelogramos parece que não conhece estas figuras, uma vez que não respondeu a nenhuma questão relacionada com esta figura.



Os retângulos parecem ser conhecidos do aluno, selecionando as figuras 3 () e 7 () e definindo retângulo como: “*Uma figura geométrica na qual todos os seus ângulos são retos.*” Pode-se verificar que a sua definição está correta, mas não está totalmente em concordância com as figuras que selecionou. Parece que retângulos “muito compridos” não são considerados pelo aluno, assim como o quadrado. A propriedade que está mais interiorizada pelo aluno é a de que todos os ângulos são retos. Já com os quadrados não teve dificuldade em identificá-los, mesmo em posições diferentes, tendo definido quadrado como: “*Uma figura geométrica que tem os lados todos iguais.*” Nesta situação não considerou os ângulos retos, o que se pode justificar pela falta de conhecimento sobre as propriedades deste polígono, uma vez que, também, teve dificuldades em identificar propriedades deste polígono.


O **aluno 10** parece que tem o conceito de triângulo e de quadrado, havendo dificuldades ao nível do que se entende por retângulo, uma vez que não selecionou o quadrado.




No que diz respeito aos paralelogramos, este aluno considerou como paralelogramos apenas os paralelogramos obliquângulos apresentados com dois lados


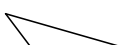



na horizontal: a figura 6 (), a 10 () e a 11 (), desvalorizando os quadrados, os retângulos não quadrados, os losangos não quadrados e os paralelogramos obliquângulos em posição oblíqua. Quanto à definição de paralelogramo referiu que é “uma figura com 4 lados, em que os seus paralelos são iguais, tem 2 ângulos agudos e 2 obtusos.” Esta situação parece evidenciar o protótipo de paralelogramo que este aluno possui, uma vez que realça o tipo de ângulos que um paralelogramo “deve”, na sua perspectiva, possuir.

Quanto às propriedades destas figuras, parece que este aluno não sabe o que são diagonais, uma vez que nas propriedades das figuras do estudo, raramente considera as diagonais e quando o faz, fá-lo de forma incorreta, por exemplo ao identificar a perpendicularidade das diagonais de um quadrado ou considerando que todos os paralelogramos têm as diagonais iguais. Uma vez mais verifica-se que a soma dos ângulos internos dos triângulos é reconhecida corretamente, assim como, a propriedade todos os ângulos retos nos retângulos.




O aluno 11 é dos únicos alunos que manifesta um conhecimento sobre a classe dos paralelogramos. Identificou corretamente todos os paralelogramos, embora tenha apresentado uma definição pouco precisa: “Um polígono que tem linhas paralelas, que tem linhas à mesma distância”. Este aluno conseguiu identificar as propriedades dos paralelogramos: “os lados opostos são paralelos” e, “os lados opostos são iguais”, foi capaz de identificar paralelogramos, tendo a imagem mental de paralelogramo, mas apresentou dificuldades em definir o conceito de paralelogramo, não explicitando as suas propriedades por escrito. Com as restantes figuras, triângulo, retângulo e quadrado pode-se verificar que há uma particularidade que se destaca nas definições escritas deste aluno, uma vez que utiliza o termo “polígono regular” para caracterizar estas três figuras. Refere que o triângulo é: “um polígono regular com três lados”, o retângulo é “um polígono regular com 4 lados” e o quadrado “um polígono regular com 4 lados iguais”. Parece que este aluno não sabe o que é um polígono regular. Relativamente à identificação de triângulos, este aluno para além de selecionar todos os triângulos também considerou as figuras 4 () e 12 () como triângulos. Quanto aos retângulos identificou os retângulos não quadrados e a linha curva fechada e conseguiu identificar todos os quadrados.





O aluno 12, no que diz respeito à identificação das figuras do estudo, selecionou corretamente os triângulos e apresentou a definição que parece estar de acordo com o que entende como triângulo: *“uma figura geométrica, com 3 lados ligados uns aos outros”*. Relativamente às propriedades identificou que a soma das amplitudes dos ângulos internos é igual, mas não foi capaz de identificar que nos triângulos não há diagonais. Quanto aos retângulos selecionou todos os retângulos não quadrados apresentando a definição: *“um retângulo é uma figura geométrica com 2 a 2 lados com 4 ângulos retos”*. Este aluno reconhece que todos os retângulos têm ângulos retos, mas quando se abordam propriedades relacionadas com as diagonais não demonstra conhecimento sobre esse tema. Como quadrados identificou apenas os que se apresentavam na posição horizontal e a figura 1, retângulo não quadrado na horizontal () . Definiu um quadrado como sendo: *“uma figura geométrica com os lados todos iguais. Tem 4 ângulos retos”*. Parece que este aluno tem uma imagem mental de quadrado que se prende com a posição horizontal, não identificando quadrados em posição oblíqua.








Relativamente aos paralelogramos, este aluno identificou as figuras 6 () , 10 () e 11 () , todas elas paralelogramos oblíquangulos e em posição horizontal, mas não conseguiu definir um paralelogramo. Quanto às propriedades dos paralelogramos conseguiu identificar que os lados opostos são paralelos e iguais, mas quando se pretende que relacione as propriedades dos retângulos com a classe dos paralelogramos já não é capaz. De um modo global, pode verificar-se que este aluno tem dificuldades nas propriedades das figuras em estudo.

O aluno 13 selecionou como triângulos as figuras 1 () , 5 () , 11 () e 12 () . Ao definir triângulo apenas referiu que *“é uma figura unida por 3 pontos”*. Considerou como propriedade de todos os triângulos todos os lados serem agudos e a soma das amplitudes dos ângulos internos ser sempre igual. Quanto aos retângulos identificou todos os retângulos não quadrados e a figura 5 () , linha curva fechada. Na sua definição de retângulo parece estar a confundir figuras 2D com figuras 3D: *“uma figura unida por 4 pontos, tem 6 lados, 8 vértices e 12 arestas”*. Na questão onde tinha de selecionar as propriedades dos retângulos este aluno selecionou as opções corretas: todos os ângulos são iguais e as diagonais são iguais. Na identificação de quadrados, tal como o aluno 12, apenas selecionou os que se apresentavam na posição horizontal e a figura 1, retângulo não quadrado na horizontal



() . Também definiu quadrado como “*uma figura unida por 4 pontos com 6 lados, 8 vértices e 12 arestas*”. Como paralelogramos, considerou as figuras 11 () e 13 () , paralelogramos obliquângulos e não foi capaz de definir um paralelogramo. Contudo, identificou, na questão sobre as propriedades, que todos os paralelogramos têm os lados opostos paralelos.

O aluno 17 selecionou todos os triângulos e as figuras 3 (), 4 () e 12 (), descreveu um triângulo como sendo “*um polígono com 3 lados iguais ou diferentes, com 3 vértices e 3 arestas*” e identificou que a soma dos ângulos internos dos triângulos é igual. No tópico sobre retângulos também identificou todos os retângulos e considerou a figura 5 () como retângulo. Disse que um retângulo “*é um polígono regular de 4 arestas, com 4 vértices e os lados opostos são iguais. Considerou que todos os ângulos são retos*”. Nos quadrados selecionou somente os que se apresentam na horizontal, definindo um quadrado como “*um polígono regular de 4 partes completamente iguais, de 4 vértices e de 4 arestas*”. Reconheceu que as diagonais dos quadrados são perpendiculares. Este aluno selecionou apenas os paralelogramos obliquângulos, definindo um paralelogramo como “*um polígono irregular com 2 lados iguais e outros 2 iguais. Com 4 vértices e 4 arestas*” e reconheceu que os lados opostos são paralelos.


O aluno 19 não selecionou nenhum triângulo e escolheu as figuras 1 () 6 () a 7 () e a 10 (). Contudo, na sua definição de triângulo escreveu que um triângulo é “*um polígono com três lados e três vértices*” e identificou que a soma das amplitudes dos ângulos internos é sempre igual, mas não considerou que os triângulos não possuem diagonais. O aluno identificou como paralelogramos todos os paralelogramos obliquângulos e definiu paralelogramo como “*um polígono com dois lados iguais 2 a 2 e com vértices iguais 2 a 2*”. Na identificação de propriedades dos paralelogramos identificou que os lados opostos são paralelos e iguais. Quanto ao tópico sobre retângulos também manifestou alguma dificuldade, pois selecionou todos os retângulos mais outras figuras que não são retângulos, as figuras 5 (), 6 () e 12 (). Definiu um retângulo como “*um polígono com lados iguais 2 a dois e com 4 vértices*”. Contudo, no que diz respeito às propriedades dos

retângulos, identificou que em todos retângulos os ângulos são retos e as diagonais são iguais. Já na identificação de quadrados parece não ter havido dificuldades, uma vez que os conseguiu identificar e descreveu um quadrado como sendo *“um polígono com 4 lados iguais e 4 vértices de 90°”*.

O aluno 20 identificou e definiu de forma correta os triângulos e quadrados, o que parece evidenciar um conhecimento sobre estes polígonos. Quanto aos retângulos, o aluno apenas não selecionou o quadrado, apresentando, no entanto, uma definição que inclui o quadrado na família dos retângulos: *“uma figura geométrica com lados iguais dois a dois. Esta figura tem 4 lados e 4 ângulos retos”*.

No que diz respeito aos paralelogramos parece que este aluno considera que os trapézios também são paralelogramos. Isto porque selecionou todas as figuras à exceção da figura 1, um quadrilátero sem lados paralelos e apoia estas escolhas com a sua definição: *“uma figura geométrica que tem lados paralelos”*, não referindo o número de pares de lados paralelos. Contudo, quando lhe foi solicitado que selecionasse as propriedades de todos os paralelogramos, este aluno considerou que os lados opostos são paralelos.

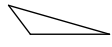

O Aluno 22 escolheu todos os triângulos e apresentou uma definição pouco precisa. O mesmo aconteceu com os retângulos em que selecionou todos exceto o quadrado e definiu retângulo como: *“uma figura onde os lados que representam o comprimento têm de ter a mesma distância um do outro e os da largura igualmente”*. No que diz respeito ao conceito de quadrados identificou todos os quadrados e considerou


a figura 1 () um quadrado. Como definição referiu que um quadrado é *“uma figura com 4 lados com os lados todos iguais”*. Nos paralelogramos escolheu todos os paralelogramos e o trapézio isósceles. Na definição escreveu que um paralelogramo é *“uma figura onde o lado oposto é paralelo”*. Parece existirem dúvidas sobre as propriedades deste polígono verificando-se que as diagonais e a noção de perpendicularidade estão pouco compreendidas por estes alunos.



4.4 - Discussão dos resultados





4.4.1 Identificação de triângulos, paralelogramos, retângulos e quadrados


4.4.1.1 - Identificação de triângulos

Relativamente à identificação de triângulos, o triângulo obtusângulo escaleno () e o triângulo acutângulo isósceles parecem constituir exemplos claros de triângulos para a maioria dos alunos, podendo-se considerar protótipos de triângulos para estes alunos. A posição não habitual do triângulo acutângulo isósceles, com um vértice em baixo (), parece não ter influenciado negativamente a identificação deste triângulo, o que se constatou, também, num estudo realizado com crianças entre 3 e os 6 anos (Clements, 2004). Contudo, houve um aluno que não escolheu nenhum dos triângulos acima mencionados triângulos.

O triângulo obtusângulo escaleno () foi selecionado por menos alunos, quase um quarto dos alunos não o reconheceu como um triângulo. O facto de ser um triângulo “muito longo” (Clements & Sarama, 2000) e “muito estreito” (Clements, 2004) pode ter influenciado a identificação deste triângulo por parte dos alunos, tal como se verificou em estudos realizados com crianças do pré-escolar e do 1º ciclo.

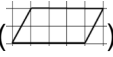
Quanto às figuras que não são triângulos, os alunos identificaram como triângulos figuras formadas por uma linha curva fechada () e figuras compostas por um segmento de reta e duas linhas curvas (). Este facto sugere que os alunos consideraram os atributos irrelevantes das figuras, em vez dos atributos relevantes das mesmas. Em estudos realizados com crianças do pré-escolar (Clements, et al. 1999; Clements & Sarama, 2000; Tsamir, Tirosh, & Levenson, 2008)) foram encontrados mal-entendidos semelhantes. Por exemplo, as crianças consideram a figura formada por uma linha curva fechada – triângulo arredondado – como sendo um triângulo (Clements & Sarama, 2000), assim como as figuras compostas por um segmento de reta e duas linhas curvas (Clements, et al., 1999; Clements & Sarama, 2000). Parece que estes alunos tomaram decisões baseadas na perceção e não no raciocínio, o que, segundo Van Hiele, significa que estes alunos se encontram no nível 1, o nível de visualização.

Houve alunos a selecionar o pentágono () o quadrilátero não convexo (), o trapézio isósceles (), a linha poligonal aberta ()

) e o “triângulo” zig-zag (), o que sugere que os alunos consideraram os atributos visuais irrelevantes das figuras, em vez dos atributos relevantes (críticos) das mesmas, tal como se verificou no estudo de Tsamir, Tirosh, & Levenson, (2008), realizado com crianças do pré-escolar. É de salientar que apenas 9 alunos (36,0%) selecionaram unicamente as figuras que representam triângulos. Parece que os alunos têm um protótipo de triângulo muito forte nas suas mentes, não sendo capazes de distinguir, de forma segura, triângulos de contraexemplos (Yin, 2003). Estes resultados levantam algumas questões: será que estes alunos usaram instrumentos de desenho, como régua, transferidor e esquadro, em anos anteriores? Será que no ensino destas figuras geométricas estas foram apresentadas somente em 2D e numa determinada posição? Os alunos terão recorrido a ambientes de geometria dinâmica?

4.4.1.2 - Identificação de paralelogramos

Relativamente à identificação de paralelogramos, apenas dois alunos, 8,0%, selecionaram só os paralelogramos, havendo três alunos que apresentaram resposta em branco.

O paralelogramo mais selecionado (72,0%) foi o paralelogramo obliquângulo “com um dos lados maiores na horizontal como base” () que é o que usualmente se apresenta nos manuais escolares, como paralelogramo obliquângulo (Hanibal, 1999). Os paralelogramos mais selecionados foram os paralelogramos obliquângulos. Estas escolhas parecem indicar que os alunos têm associado à noção de paralelogramo somente o quadrilátero paralelogramo obliquângulo, sendo menos notória a classificação inclusiva de paralelogramo como todo o quadrilátero com dois pares de lados paralelos. Os restantes paralelogramos também foram selecionados, mas em menor percentagem, sendo que os menos escolhidos foram o retângulo não quadrado e os dois quadrados com um lado na horizontal. Será que o facto de estes paralelogramos serem os únicos com ângulos retos, fez com que os alunos não os escolhessem? Terão estes alunos a imagem prototípica de um paralelogramo com ângulos obtusos e agudos? De acordo com estes resultados, parece que os alunos apresentam dificuldades na identificação de paralelogramos, mostrando não conhecer diferentes paralelogramos (Pirola, 1995). Poucos alunos identificaram o quadrado como paralelogramo, havendo mais alunos a identificar os losangos não quadrados do que os quadrados, tal como se verificou em estudos já realizados, como o de Proença e Pirola (2004). Parece que a obliquidade dos lados dos losangos não quadrados pode estar na

origem desta escolha, talvez por se assemelhar mais ao paralelogramo oblíquângulo, figura protótipo de paralelogramo. Os resultados indicam que os alunos tiveram mais facilidade em identificar losangos não quadrados como paralelogramos do que em identificar quadrados e retângulos não quadrados como paralelogramos, como verificado em Okazaki e Fujita (2007).

Constatou-se que, das figuras que não representam paralelogramos, o trapézio isósceles foi, também, considerado paralelogramo, sendo selecionado por 6 alunos (24,0%), o que também se verificou no estudo de Pirola (1995) com alunos do 2º ciclo e de Pirola et al. (2004) com alunos com idades entre 11 e 14 anos. Embora em menor número, os trapézios retângulos também foram escolhidos por alunos. De acordo em estes resultados, pode-se inferir que poderá existir pouca valorização de contraexemplos no ensino, valorizando-se pouco o ensino de contraexemplos do conceito de paralelogramo. Seria de esperar outros resultados, visto que o estudo das propriedades dos paralelogramos fez parte do programa de matemática do 6º ano de escolaridade (ME; 1991, 2º ciclo volume 2).

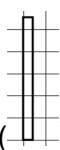
Estes dados parecem indicar que a imagem que estes alunos têm do conceito de paralelogramo é uma imagem em que nem todos os ângulos ou lados podem ser iguais, fazendo com que excluam os retângulos não quadrados, quadrados e losangos na classificação de paralelogramos (Vinner, 1991). Tal como em Fujita e Jones (2007), parece que os alunos têm dificuldade em chegar a um entendimento da relação hierárquica entre quadriláteros.

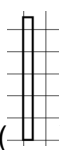
4.4.1.3 - Identificação de retângulos

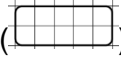
Quanto à identificação de retângulos, verificou-se que nenhum aluno identificou todas as figuras que representam retângulos e que nenhum retângulo foi identificado por todos os alunos, o que evidencia falta de conhecimento sobre as propriedades deste polígono, o que sugere que o conceito de retângulo possa, ainda, não estar totalmente apreendido.

Um dado importante é o facto de apenas existir um aluno (dos 25 alunos) a considerar o quadrado como retângulo. Este dado também se verificou em estudos já realizados, levando a crer que, no estudo dos quadriláteros, há dificuldade na inclusão de classes e que este tópico foi pouco trabalhado em anos de escolaridade anteriores, tal como sugerem Fujita e Jones (2007), havendo uma ideia prototípica de retângulo. Em contraste, pode verificar-se noutros estudos que crianças com 4, 5 e 6 anos

consideram o quadrado como retângulo, uma vez que têm um protótipo de retângulo menos memorizado em relação ao quadrado (Clements e Sarama, 2000). Verifica-se que, se excluíssemos o quadrado, do conjunto de figuras apresentadas para identificação e retângulos, existiriam 7 alunos (28,0%) a responder acertadamente a esta questão, existindo uma subida significativa (de 0,0% para 28,0%), o que sugere que este retângulo especial não é reconhecido como retângulo por estes alunos, o mesmo se verificou em estudos com crianças do pré-escolar (Clements, et al., 1999), do 1º ciclo (Yin, 2003) e com alunos do ensino superior (Tempera, 2010). Retângulos apresentados com dois lados na horizontal, apesar de se apresentarem em posições habituais para os alunos (Clements & Sarama, 2000), não foram selecionados por todos



os alunos. O facto da figura 1 () ser um retângulo “demasiado estreito” (Clements & Sarama, 2000) pode ter influenciado a identificação deste como sendo retângulo. Já os retângulos em posição oblíqua, embora não estejam numa posição horizontal ou vertical, foram selecionados por vários alunos, o que parece que retângulos ligeiramente inclinados são identificados pelos alunos, tal como se verificou num estudo com crianças do pré-escolar de Clements et al. (1999). No presente estudo, parece que os alunos têm um protótipo de retângulo com um lado maior do que o outro e com uma ligeira obliquidade (Clementes et al., 1999). Parece existir o “fenómeno protótipo”, em que, para um determinado conceito, são alcançados exemplos de protótipos, primeiramente, e são estes que permanecem como imagem do conceito da maioria dos indivíduos (Hershkowitz, 1990).

Uma elevada percentagem de alunos, 40,0%, selecionou a linha curva fechada (), o que sugere, em comparação com as escolhas dos alunos relativamente ao “triângulo arredondado”, que os alunos identificam a figura pelos seus atributos visuais (irrelevantes/não críticos). Também existe uma percentagem significativa de alunos que selecionou os paralelogramos oblíquângulos, verificando-se, tal como em estudos anteriores, a propensão dos alunos em considerar estes quadriláteros como retângulos (Clements & Sarama, 2000; Clements & Battista, 1992; Clements, Swaminathan, Hannibal, & Sarama, 1999; Yin, 2003). Estes alunos consideraram a aparência visual destas figuras, não analisando as suas propriedades, o que parece indicar que se encontram, ainda, no nível 1, o de visualização, de Van Hiele.

Nenhum aluno selecionou os trapézios retângulos, o que parece sugerir que os alunos possuem a noção de que os lados opostos dos retângulos têm de ser paralelos,

o que contrasta com estudos com crianças do pré-escolar, em que se verifica que há uma tendência para identificar este tipo de quadriláteros como retângulos (Clements, et al., 1999; Clements & Sarama, 2000). Parece existir o “fenómeno de protótipo” em relação ao conceito de retângulo, investigado em Okazaki e Fujita, (2007) que verificaram existir esses fenómenos com o quadrado e com o retângulo, impedindo os alunos de compreender totalmente as relações de inclusão entre quadriláteros.

4.4.1.4 - Identificação de quadrados

No que diz respeito à identificação de quadrados, somente 10 alunos (40,0%), selecionaram corretamente apenas as figuras que representam quadrados. Poder-se-á supor que durante os anos de escolaridade anteriores pouco se valorizou o ensino das propriedades deste polígono, bem como o recurso a contraexemplos desta figura.

Como seria de esperar todos os alunos selecionaram os quadrados apresentados com dois lados na horizontal. Parece que as dimensões dos quadrados não influenciaram as suas escolhas. Houve uma percentagem significativa de alunos que não selecionou o quadrado em posição oblíqua. Estarão estes alunos pouco habituados a visualizarem quadrados nesta posição? Parece que o facto deste quadrado estar numa posição pouco habitual (oblíqua) influenciou as escolhas dos alunos. Outros estudos também revelaram a tendência para alunos não aceitarem quadrados nesta posição (Clements & Sarama, 2000; Yin, 2003). Será que os alunos tiveram contacto com quadrados sempre apresentados na mesma posição (um lado na horizontal), condicionando assim o seu conhecimento sobre quadrados?

Poderá ter existido no ensino das figuras geométricas mais valorização dos atributos visuais do que dos atributos relevantes (propriedades das figuras).

No que diz respeito às figuras que não são quadrados, constata-se que há uma tendência para os alunos aceitarem retângulos com os “lados maiores com comprimento próximo da medida do lado menor” (9 alunos, 36,0%) e paralelogramos obliquângulos “pouco compridos” (3 alunos 12,0%) como quadrados. A identificação de retângulos e de paralelogramos como quadrados pode estar relacionada com a valorização dos atributos visuais, não analisando o comprimento dos lados e a amplitude dos ângulos de modo preciso, podendo estar associados protótipos visuais. Um motivo de discussão prende-se com o facto de existirem quatro alunos (16,0%) que selecionaram apenas o retângulo e os quadrados, todos com um lado na horizontal, evidenciando que poderão ter um protótipo de quadrado com dois lados na horizontal.

4.4.1.5 - Síntese

Relativamente à identificação de triângulos, paralelogramos, retângulos e quadrados, pode-se constatar que os alunos tiveram mais facilidade em identificar quadrados (40,0%) e triângulos (36,0%), do que os outros polígonos. Apenas 2 alunos (8,0%) identificaram corretamente os paralelogramos e não houve nenhum aluno que tivesse identificado corretamente todos os retângulos. Os alunos tiveram mais facilidade em identificar triângulos do que paralelogramos, resultado também encontrado por Pirola (1995). Através da análise dos dados, parece que os alunos têm uma maior propensão em identificar triângulos do que retângulos, também verificado em investigações com crianças do pré-escolar. (Clements, Swaminathan, Hannibal, & Sarama, 1999) e com futuros professores (Tempera, 2010).

4.4.2 Definição dos conceitos de triângulo, paralelogramo, retângulo e quadrado

4.4.2.1 - Definição de triângulo

Relativamente à definição do conceito de triângulo, a maioria dos alunos (60,0%) revelou possuir o conceito de triângulo. Cerca de um quarto dos participantes particularizou um determinado tipo de triângulo, verificando-se a existência de protótipos destes polígonos. Os alunos tendem a descrever casos particulares de triângulos, como o triângulo isósceles: *“uma figura geométrica com dois lados iguais e um diferente”*, como o triângulo acutângulo: *“os triângulos têm de ter 3 lados cujo os seus ângulos têm de ter menos de 90°”, “...todos os seus ângulos são agudos...”*, ou como o triângulo equilátero: *“...polígono regular com três lados”*, alguns alunos apresentaram dificuldades em definir um triângulo, apresentando descrições incompletas ou imprecisas. Os alunos apresentaram dificuldades em definir de forma completa o conceito de triângulo e apresentaram imagens prototípicas do conceito de triângulo, tendo como imagem do conceito de triângulo, triângulos acutângulos e triângulos isósceles resultado também encontrado em Pirola (1995). As definições apresentadas por estes alunos baseiam-se em definições visuais (Villiers, 2010), parecendo

enquadrar-se no nível visual de Van Hiele (nível 1), em que se considera a aparência visual como um todo.

A propriedade verificada em maior percentagem nas descrições dos alunos foi o “*número de lados*” (76,0% dos alunos recorreram a esta propriedade para definirem um triângulo), tal como se verificou em estudos com crianças do pré-escolar (Clements, et al., 1999) e do 1º ciclo (Yin, 2003).

O “*número de vértices*” surgiu nas descrições de cinco alunos (20,0%) de forma correta e a referência ao “*número de ângulos*” apareceu apenas em três descrições dos alunos (12,0%). É possível verificar a utilização de vocabulário geométrico envolvendo alguns mal-entendidos. Alguns alunos usaram a palavra “*aresta*” em vez da palavra “*lado*”.

Os atributos visuais foram pouco utilizados, sendo que alguns alunos utilizaram termos como: “*os cantos não são curvos*” e “*os ângulos não são redondos*”. Dois alunos, ainda, utilizaram as descrições “*lados retos*” e “*três lados, todos linhas retas*” para evidenciarem o tipo de linha dos lados dos triângulos. Houve, ainda, um aluno que definiu um triângulo como *uma figura unida por 3 pontos*. Estes casos parecem enquadrar-se no nível 1 de Van Hiele (1999), uma vez que tomaram decisões baseadas na percepção e não no raciocínio, tomando como referência a aparência global da figura, verificando-se dificuldades na expressão escrita do conceito.

4.4.2.2 - Definição de paralelogramo

Quanto à definição de paralelogramo, dado o número de alunos que apresentou uma resposta em branco (10 alunos (40,0%)) e o facto de não existir nenhum aluno que tenha apresentado uma definição completa de paralelogramo, parece que estes alunos têm uma grande dificuldade em definir o conceito de paralelogramo, tal como se verificou noutras investigações (Pirola, 1995; Pirola et al. (2004)) com alunos da mesma faixa etária, em que se constatou que os alunos não foram capazes de escrever, nem verbalizar, a definição de paralelogramo e outros revelaram não conhecer os diferentes paralelogramos. Pode-se afirmar que os alunos apresentaram dificuldades na inclusão de classes, não se encontrando, por isso no nível classificatório de Klausmeier (1977), tal como era de esperar, de acordo com o grau de escolaridade destes alunos. Porém, 44,0% dos alunos apresentaram definições incompletas ou imprecisas, não sendo suficientes para caracterizarem este quadrilátero. Vários alunos apenas descrevem um paralelogramo como “*uma figura*” ou “*uma figura geométrica*”, havendo alguns a fazer

referência a “*lados paralelos*”. Houve alunos (16,0%) que apresentaram definições que tendem a particularizar um caso específico de paralelogramo, o paralelogramo obliquângulo: “*Um gênero de retângulo mas mais inclinado para um lado...*”; “*Uma figura com 4 lados, em que os seus paralelos são iguais, tem 2 ângulos agudos e 2 obtusos.*”, “*Um polígono com 4 lados 2 deles com um tamanho e outros 2 com outro, por norma os da largura são sempre inclinados*”. Parece que os alunos apresentam dificuldade na classificação hierárquica dos quadriláteros, como é referido por Fujita e Jones (2007).

A propriedade mais utilizada foi o “*número de lados*”, com 4 alunos, 16,0%, a usarem-na, havendo também alunos a fazerem referência ao paralelismo dos lados. Parece que os alunos têm conhecimento que um paralelogramo tem lados paralelos: “*uma figura onde o lado oposto é paralelo*”, “*lados paralelos*”, “*linhas paralelas*”, mas poderá existir algum mal-entendido sobre o conceito de paralelismo, ou alguma dificuldade de expressão/verbalização. Os alunos descreveram casos particulares de paralelogramos, como o paralelogramo obliquângulo: “*um gênero de retângulo mas mais inclinado*”. Uma grande parte dos alunos não escreveu qualquer definição de paralelogramo e os que o fizeram apresentaram descrições incompletas, sendo insuficientes para definir um paralelogramo.

A noção de paralelogramo da maioria destes alunos centra-se no paralelogramo obliquângulo e não em todos os quadriláteros com dois pares de lados paralelos. Verifica-se que os alunos não conseguiram escrever a definição de paralelogramo, utilizando definições incompletas, realçando condições usualmente visuais como condições suficientes (Burger e Shaughnessy, 1986), parecendo enquadrarem-se no nível 1 de Van Hiele.

4.4.2.3 - Definição de retângulo

Tendo em atenção a análise dos dados, pode-se verificar que apenas 5 alunos (20,0%) apresentaram definições que revelam o conceito de retângulo, embora tenham registado algumas imprecisões de linguagem. Grande parte dos alunos (48,0%) apresentou descrições incompletas e/ou imprecisas que não evidenciam a aquisição do conceito de retângulo. É possível constatar que 3 alunos (12,0%) particularizaram um determinado tipo de retângulo, como o quadrado: “*Um polígono regular com 4 lados*”, usando nas suas descrições o termo “*polígono regular*”. Parece que estes alunos não sabem o significado do termo “*polígono regular*”. Houve um aluno que descreveu um retângulo como “*uma figura geométrica com 4 ângulos de 90° e tem de ter 4 lados e o*

comprimento maior que a largura”, evidenciando uma descrição do retângulo não quadrado. Outras quatro definições, pouco precisas, parecem descrever um retângulo não quadrado, evidenciando a existência de um protótipo de retângulo como um quadrilátero com quatro ângulos retos e com dois lados paralelos maiores que os outros dois: “...dois lados iguais e dois diferentes...”, “...figura geométrica com comprimento e largura diferente”, “...o comprimento tem que ser menor que a largura.” Estas descrições podem apoiar a não inclusão, por parte dos participantes, do quadrado como retângulo, uma vez mais pode-se estar na presença do “fenômeno protótipo” de Hershkowitz. Parece que estas definições se enquadram no nível 1 (visual) de Van Hiele, não se verificando a inclusão de classes (quadrados e retângulos são considerados disjuntos). Estes alunos não se encontram, também, no nível classificatório, de Klausmeier, uma vez que não são capazes de classificar pelo menos dois exemplos diferentes da mesma classe de objetos (Klausmeier, 1977).

A propriedade verificada em maior percentagem nas descrições dos alunos foi o “*número de lados*” (56,0%), seguindo-se o “*número de ângulos*”, (24,0%) e os “*4 ângulos retos*”, (20,0%). A palavra “*arestas*” é utilizada em vez da palavra “*lados*”, por quatro alunos, o que sugere que há confusão com estes dois conceitos, por parte destes alunos.

4.4.2.4 - Definição de quadrado

Relativamente à definição do conceito de quadrado, pode-se constatar que menos de metade dos participantes (36,0%) apresentaram uma definição revelando que possuíam o conceito de quadrado. Contudo, o mesmo número de alunos (nove) definiu um losango não quadrado em vez de um quadrado, recorrendo à expressão “*4 lados iguais*” para definir o quadrado. Houve, ainda, quatro alunos que escreveram apenas que um quadrado é uma figura geométrica com os lados todos iguais, sem mencionar o número de lados deste polígono. Nestas definições verifica-se que a maioria dos alunos recorreu apenas a uma propriedade para definir um quadrado, como o comprimento dos lados, deixando de parte propriedades como ângulos ou diagonais, o que é caracterizado por estarem no nível 2 de Van Hiele, de acordo com Burger e Shaughnessy (1986), que também verificaram este aspeto nas suas pesquisas. A característica mais utilizada foi o comprimento dos lados, sendo a propriedade “*lados todos iguais*” usada por 88,0% dos alunos, seguindo-se a propriedade “*4 lados*”, por 60,0% dos alunos. Em percentagens menores temos as propriedades: “*ângulos retos*

(ou de 90°), com 20,0%, “4 ângulos”, usada por 16,0% dos alunos, “quatro ângulos retos”, também com 16,0% e “4 vértices”, com 12,0 % dos alunos a utilizá-la nas suas definições. Visto que se trata de um polígono reconhecido pelas crianças desde muito pequenas (Hannibal, 1999), seria de esperar que mais alunos referissem que os quadrados possuem quatro ângulos retos. Também o facto de nenhum aluno ter selecionado os losangos (figuras 3 e 9), levava a crer que estavam a considerar a amplitude dos ângulos internos dessas figuras. Parece que estes alunos poderão ter tido um ensino centrado nos atributos visuais das figuras geométricas, valorizando-se pouco o conceito no seu todo, não relacionando os atributos visuais com os atributos relevantes (propriedades) destes polígonos. Parece que o número 4 e o termo “lados iguais” estão associados ao conceito que estes alunos têm de quadrado. Surgiram, também, as seguintes descrições relativamente aos quadrados: “os lados têm de ter 90° ” e “4 vértices de 90° ”, verificando-se que os alunos apresentaram uma linguagem matematicamente incorreta, uma vez que o que provavelmente queriam mencionar era a amplitude dos ângulos internos do quadrado. As afirmações destes alunos levantaram-me algumas questões: o que é que os alunos entendem por ângulo? Será que ao considerarem o ângulo, estão a focalizar-se somente nos lados deste? O aluno que escreveu a segunda descrição, considerará como ângulo apenas o vértice? Parece que os alunos têm o conceito de ângulo, ou sabem que o quadrado tem ângulos de 90° , mas não utilizam este termo. Estes dados sugerem que a análise das propriedades dos quadrados foi pouco valorizada nos anos de escolaridade anteriores, assim como o trabalho sobre as condições necessárias para que uma figura seja um quadrado. Como terá sido trabalhado o conceito de ângulo? Tal como verificámos com a definição de retângulo, a palavra “arestas” apareceu em cinco descrições que parecem referir-se ao termo “lados”.

4.4.2.5 - Síntese

Quanto à definição dos conceitos de triângulo, paralelogramo, retângulo e quadrado constata-se que os alunos conseguiram definir de forma mais completa o conceito de triângulo (60,0%), seguindo-se o quadrado (36,0%), o conceito de retângulo (20,0%) e por último o paralelogramo (0%). Também Pirola (1995) verificou que alunos do 8º ano não foram capazes de escrever nem verbalizar a definição de paralelogramo.

A análise dos dados revela que os alunos não conseguiram descrever por escrito as figuras triângulo, paralelogramo, retângulo e quadrado, provavelmente por não terem

aprendido de forma consistente e significativa as suas propriedades (atributos relevantes/críticos). Tal como Gomes e Ralha (2005) referem, a imagem de um conceito pode ser fortemente influenciada ao serem apresentados aos alunos poucos exemplos que o ilustrem, contribuindo assim para uma deficiente conceptualização.

4.4.3 Propriedades dos triângulos, paralelogramos, retângulos e quadrados

4.4.3.1 - Propriedades dos triângulos

Relativamente às propriedades dos triângulos constata-se que a propriedade mais selecionada foi “*a soma da amplitude dos ângulos internos é sempre igual*”, com (84,0%) e apenas 6 alunos (24,0%) consideraram que os triângulos “*não possuem diagonais*”. A baixa percentagem nesta opção sugere que poderão existir alguns mal-entendidos relacionados com o conceito de diagonal, levantando a questão: será que este conceito foi trabalhado nos ciclos anteriores? Parece existirem mal-entendidos relacionados com as propriedades dos triângulos, uma vez que apenas seis alunos (24,0%) identificaram corretamente as propriedades deste polígono. Nenhum aluno considerou que “*todos os lados são iguais*”, o que se supõe que na sua escolaridade abordaram diferentes tipos de triângulos, relativamente ao comprimento dos lados, tendo uma visão mais abrangente da imagem de “triângulo”, no que se refere aos lados, o que não se verificou em estudos de Clements & Battista, (1992).

Houve 3 alunos que aceitaram que num triângulo “*todos os ângulos são agudos*”, o que parece que têm associadas à imagem generalizada de triângulo, apenas imagens mentais de triângulos acutângulos (protótipos), o que se verificou, também na análise da questão 2 do questionário e em estudos com alunos do ensino básico (Clements & Battista, 1992) e do ensino superior (Tempera, 2010). A maioria dos alunos identificou que num triângulo isósceles “*deve haver pelo menos dois ângulos com a mesma amplitude*”. Poder-se-á supor que a relação dos lados do triângulo com os seus ângulos foi um tópico trabalhado ao longo da sua escolaridade.

4.4.3.2 - Propriedades dos paralelogramos

No que se refere às propriedades dos paralelogramos, verifica-se que cerca de metade dos alunos (56,0%) identificaram que nos paralelogramos “*os lados opostos são*

paralelos”. Mitchelmore (1992) refere que a percepção de paralelismo é mais óbvia do ponto de vista visual do que a de perpendicularidade, o que poderá justificar estes resultados. A mesma percentagem de alunos considerou, também, que “*os lados opostos são iguais*”. Contudo, apenas 20,0% identificaram só e corretamente as propriedades do paralelogramo: “*os lados opostos são paralelos*” e “*os lados opostos são iguais*”. Embora em percentagens relativamente baixas, houve alunos que consideraram que em todos os paralelogramos “*as diagonais são iguais*”. Houve apenas um aluno que considerou que “*todos os ângulos são retos*”, o que sugere a hipótese da maioria dos alunos terem associado ao conceito de paralelogramo a imagem mental de paralelogramo obliquângulo. Estes dados parecem indicar uma falta de conhecimento sobre as propriedades deste polígono, nomeadamente, sobre os conceitos de diagonal e perpendicularidade.

4.4.3.3 - Propriedades dos retângulos

No que diz respeito à identificação das propriedades dos retângulos, a maioria dos alunos (68,0%) identificou que para todos os retângulos “*todos os ângulos são retos*” o que parece indicar que à representação mental de retângulo está fortemente associada a representação de ângulo reto o que poderá permitir a estes alunos identificar ângulos retos noutras figuras, tal como verificou Mitchelmore (1992) num estudo realizado com alunos do 1.º ciclo. Já em menor percentagem, houve 32,0% dos alunos a considerar que “*as diagonais são iguais*”. Há, ainda, alunos a considerar que “*as diagonais são perpendiculares*” (28,0%) o que levanta, para além do mal-entendido do conceito de diagonal poderá haver também dificuldades percetuais relacionadas com conceito de perpendicularidade, também constatado no estudo de Mitchelmore (1992). Estes dados parecem indicar que poderão existir mal-entendidos relacionados com o conceito de diagonal, ou, mesmo, o desconhecimento deste conceito geométrico que é trabalhado com pouca frequência no ensino básico (Tempera, 2010).

Houve alunos que consideraram que nos retângulos “*os lados opostos são diferentes*” (24,0%), o que sugere que poderão existir dificuldades ao nível da compreensão da posição relativa dos lados de uma figura. Estes dados sugerem que as propriedades dos retângulos poderão não estar totalmente apreendidas por estes alunos, assim como levam a refletir sobre a existência de alguns mal-entendidos relacionados com alguns conceitos geométricos, entre os quais: o de ângulo, de diagonal, de paralelismo, de perpendicularidade e posição relativa dos lados.

4.4.3.4 - Propriedades dos quadrados

Relativamente à identificação das propriedades dos quadrados, 56,0% dos identificaram que as diagonais do quadrado são perpendiculares. Contudo, houve alguns alunos (20,0%) a considerar os lados dos quadrados como perpendiculares. A maioria dos participantes considerou que os lados do quadrado e as suas diagonais têm o mesmo comprimento. Parece que há dificuldades em identificar segmentos de reta num quadrado, sejam eles lados ou diagonais deste polígono. As respostas a esta questão sugerem que poderão existir alguns mal-entendidos sobre os conceitos de perpendicularidade e paralelismo.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES

Neste capítulo apresento uma síntese do estudo, seguida das conclusões e reflexões sobre os resultados desta investigação, assim como faço uma reflexão relativamente às contribuições que o mesmo teve para mim, quer como professora quer como investigadora.

5.1 - Síntese do estudo

Este estudo visou compreender e avaliar o conhecimento dos alunos sobre geometria, no início do 3º ciclo, em particular sobre os conceitos de triângulo, paralelogramo, retângulo e quadrado. Deste modo, especifiquei as seguintes questões orientadoras da investigação:

- *Quais os conhecimentos em geometria que os alunos no início do 3º ciclo possuem, relativamente aos conceitos de triângulo, paralelogramo, retângulo e quadrado?*
 - *Que compreensão dos conceitos de triângulo, paralelogramo, retângulo, e quadrado têm os alunos à entrada do 3º ciclo?*
 - *Que figuras é que os alunos identificam como triângulos, paralelogramos, retângulos e quadrados?*
 - *De que forma é que os alunos definem um triângulo, um paralelogramo, um retângulo e um quadrado?*
 - *Que conhecimento têm os alunos sobre as propriedades dos triângulos, paralelogramos, retângulos e quadrados?*
 - *Quais as dificuldades (mal-entendidos) dos alunos relativamente aos conceitos de triângulo, paralelogramo, retângulo, e quadrado?*

Na realização deste estudo optei por uma *abordagem metodológica mista*, recorrendo simultaneamente a dados quantitativos e qualitativos. A de recolha de dados foi realizada através de um questionário a 25 alunos de uma turma do 7º ano. Terminado este processo, procedi à análise dos dados que foi realizada de duas formas distintas: recorrendo a uma análise estatística com a ajuda de uma base de dados elaborada com o software Statistical Package for the Social Sciences (SPSS), para as questões de escolha múltipla; outra para as respostas dos alunos às questões de pergunta aberta. Neste caso as respostas foram analisadas através de uma análise de conteúdo seguindo-se a elaboração de um quadro de categorias que emergiu da análise dos dados. Foi realizada uma análise dos resultados dos inquéritos e no final uma análise e discussão globais dos resultados. O processo de análise foi seguido o paradigma interpretativo, na medida em que procurei compreender o significado das respostas dos alunos.

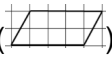
Após a análise dos dados e discussão dos resultados à luz da literatura, apresento as conclusões do estudo realizado, em que procuro responder às questões previamente formuladas.

5.2 - Conclusões e reflexões sobre os resultados

Através deste estudo constata-se que os alunos no início do 3.º Ciclo de escolaridade, apresentam dificuldades relativamente aos conceitos de triângulo, retângulo, quadrado e paralelogramo.

No que diz respeito às ***figuras que os alunos identificam como triângulos, paralelogramos, retângulos e quadrados***, verifica-se que estes têm mais facilidade em identificar quadrados e triângulos, do que retângulos e paralelogramos.

O triângulo obtusângulo escaleno e o triângulo acutângulo isósceles parecem constituir-se protótipos de triângulos para estes alunos, já os triângulos “muito longos” e “muito estreitos” são menos reconhecidos. Os alunos identificam como triângulos figuras formadas por uma linha curva fechada e figuras compostas por um segmento de reta e duas linhas curvas. Há alunos que identificam como triângulo o pentágono, o quadrilátero não convexo, o trapézio isósceles, a linha poligonal aberta e o “triângulo” zig-zag, considerando os atributos visuais irrelevantes das figuras, em vez dos atributos relevantes (críticos) das mesmas.

Quanto à identificação de paralelogramos, os mais selecionados foram os paralelogramos oblíquângulos, destacando-se o paralelogramo oblíquângulo “com um dos lados maiores na horizontal como base” () , provavelmente por ser aquele que usualmente se apresenta nos manuais escolares, como paralelogramo oblíquângulo (Hanibal, 1999). Estes resultados sugerem que os alunos possuem um protótipo de paralelogramo, sendo este o paralelogramo oblíquângulo, verificando-se dificuldades na classificação inclusiva na classe dos paralelogramos. Os resultados mostram que os alunos têm mais facilidade em identificar como paralelogramos os losangos não quadrados do que quadrados e retângulos e há alunos a considerar o trapézio isósceles um paralelogramo. Estes resultados poderão ser indicadores que houve pouca valorização de contraexemplos no ensino dos paralelogramos, valorizando-se pouco o ensino do conceito de paralelogramo, verificando-se dificuldades no que diz respeito à relação hierárquica entre quadriláteros, tal como referem Fujita e Jones (2007).

Na identificação de retângulos, os alunos não consideram o quadrado como retângulo, constatando-se que há, também nesta situação, dificuldades na inclusão de classes. Apresentam ainda dificuldade em identificar retângulos apresentados com dois lados na horizontal, assim como o retângulo “demasiado estreito” (Clements & Sarama, 2000). Já os retângulos em posição oblíqua, são reconhecidos por grande parte dos alunos. Estes resultados sugerem que os alunos têm um protótipo de retângulo com um lado maior do que o outro e com uma ligeira obliquidade (Clementes et al., 1999). Há alunos a identificar como retângulo uma linha curva fechada e paralelogramos oblíquângulos.

No que diz respeito à identificação de quadrados, os alunos manifestam mais facilidade em identificar quadrados com lados na horizontal do que quadrados em posição oblíqua. Terão os alunos um protótipo de quadrado como uma figura que apresenta lados na horizontal e ângulos retos? Há uma propensão para os alunos aceitarem como quadrados retângulos com a medida dos “lados maiores próxima da medida do lado menor” e paralelogramos oblíquângulos “pouco compridos”.

De uma forma geral, analisando os dados recolhidos, conclui-se que os alunos apresentam várias lacunas em termos de conhecimento sobre as figuras geométricas em estudo. Parece que, nos anos de escolaridade anteriores, pouco se valorizou o ensino das propriedades destes polígonos, bem como o recurso a contraexemplos. Os atributos irrelevantes como a posição, o tamanho e o aspeto das figuras, parecem

sobrepor-se aos atributos críticos, ou seja, ao conhecimento das propriedades das figuras, em particular, e das classes de figuras, em geral.

Parece existir o “fenómeno protótipo”, em que, para um determinado conceito, são alcançados exemplos de protótipos, primeiramente, e são estes que permanecem como imagem do conceito para a maioria dos indivíduos (Hershkowitz, 1990).

Tentando compreender **de que forma é que os alunos definem um triângulo, um paralelogramo, um retângulo e um quadrado**, verifica-se que os alunos conseguiram definir de forma mais completa o conceito de triângulo (60,0%), seguindo-se o de quadrado (36,0%), o conceito de retângulo (20,0%) e por último o de paralelogramo (0%).

Os alunos descrevem casos particulares de triângulos, como o triângulo isósceles, o triângulo acutângulo e o triângulo equilátero. Relativamente à definição de paralelogramo, constata-se que nenhum aluno conseguiu descrever o que se entende por paralelogramo. Os alunos tendem a descrever casos particulares de paralelogramos, como o paralelogramo obliquângulo: *“um género de retângulo mas mais inclinado”*. A noção de paralelogramo, da maioria dos participantes, centra-se no paralelogramo obliquângulo. Será que estes alunos não tiveram contacto com esta classe de polígonos durante a sua escolaridade, essencialmente, no 2º ciclo? No que diz respeito à definição de retângulo, 8 alunos (32%) particularizaram um determinado tipo de retângulo, figurando, assim, o quadrado ou o retângulo não quadrado como protótipos de retângulo. A inclusão do quadrado como definição de retângulo, prende-se com os mal-entendidos relacionados com a linguagem e vocabulário geométrico, levando os alunos a descreverem o conceito de retângulo de forma imprecisa: *“Um polígono regular com 4 lados;”* ou *“uma figura geométrica com 4 ângulos de 90º e tem de ter 4 lados e o comprimento maior que a largura.”*

Quanto à definição de quadrado, verifica-se que a maioria dos alunos tem enraizada a ideia dos “lados iguais” ou “quatro lados iguais”, desvalorizando a propriedade dos ângulos retos, havendo tendência em particularizar o losango não quadrado (*“uma figura com 4 lados todos iguais”*) ou um polígono regular qualquer, quando descrevem um quadrado como *“um polígono com todos os lados iguais.”*

É possível depreender que os alunos utilizam uma linguagem recorrendo a vocabulário geométrico, mas nem sempre adequado, ou insuficiente, para descrever os conceitos de triângulo, paralelogramo, retângulo e quadrado. Também foram detetados mal-entendidos relacionados com as propriedades (atributos relevantes/críticos) das figuras em estudo, talvez por não as terem aprendido significativamente.

Para dar resposta à questão: **conhecimento têm os alunos sobre as propriedades dos triângulos, paralelogramos, retângulos e quadrados**, pode-se constatar que há dificuldades e mal-entendidos relacionados com as propriedades das figuras em estudo. Há mais facilidade em identificar as propriedades dos triângulos, seguindo-se as dos quadrados, paralelogramos e, por último, as dos retângulos.

No que diz respeito aos triângulos, os alunos têm facilidade em identificar que “a soma da amplitude dos ângulos internos é sempre igual”, mas não reconhecem que os triângulos “não possuem diagonais”. Há alunos a considerar que nos triângulos “*todos os ângulos são agudos*”, evidenciando possuírem imagens mentais de triângulos acutângulos (protótipos), o que, também, se verificou em estudos com alunos do ensino básico (Clements & Battista, 1992) e do ensino superior (Tempera, 2010).

Relativamente aos paralelogramos a maioria dos participantes identifica que “os lados opostos são paralelos” e que “os lados opostos são iguais”, o que revela que estes atributos foram trabalhados nos anos de escolaridade anteriores. Houve alunos a considerar que em todos os paralelogramos “*as diagonais são iguais*”.

Na identificação das propriedades dos retângulos, a maioria dos alunos identificou que “*todos os ângulos são retos*”, indicando que a sua representação mental de retângulo está fortemente associada a representação de ângulo reto o que poderá permitir a estes alunos identificar ângulos retos noutras figuras, tal como verificou Mitchelmore (1992) num estudo realizado com alunos do 1.º ciclo. Há alunos a considerar que “*as diagonais dos retângulos são iguais*” e a considerar que “as diagonais são perpendiculares”, para além do mal-entendido do conceito de diagonal, poderá haver também dificuldades percetuais relacionadas com conceito de perpendicularidade, também constatado no estudo de Mitchelmore (1992).

Quanto às propriedades dos quadrados, a maioria dos alunos identifica que “os segmentos de reta DB e AC são perpendiculares”, segmentos estes que são as diagonais do quadrado. Os alunos revelam conhecimento sobre as diagonais do quadrado, mas a designação “diagonal”, como vimos no caso das outras figuras, não é reconhecida. Resumindo, as propriedades dos triângulos, paralelogramos, retângulos e quadrados não estão totalmente apreendidas pelos alunos. Estes dados evidenciam uma falta de conhecimento e a existência de mal-entendidos sobre as propriedades das figuras em estudo, nomeadamente, sobre os conceitos de diagonal, de ângulo, perpendicularidade e paralelismo.

De um modo geral, posso concluir que, muitas das imagens mentais que os alunos possuem sobre conceitos em estudo raramente correspondem ao que explicitam

por escrito nas suas definições, havendo dificuldades na expressão escrita, que se traduz pela falta de conhecimento profundo sobre as propriedades (atributos críticos) das figuras. Também na maioria das vezes, em que as imagens mentais sobre os conceitos correspondem a protótipos as suas definições reforçam essa ideia, tal como se verifica com o conceito de paralelogramo em que os alunos que identificaram como paralelogramo somente os paralelogramos oblíquângulos, também nas suas definições justificaram essa escolha.

Sendo a geometria uma área em que é necessário que as imagens mentais que se possuem se complementem com os respetivos conceitos, estes alunos revelam possuir alguma tensão entre estes dois componentes. Conclui-se, assim, que os participantes, recorrem às imagens conceptuais (modelos mentais) para classificarem figuras, em vez de utilizarem definições conceptuais que são a combinação entre modelos mentais e as propriedades associadas ao conceito, existindo, assim, aquilo que Hershkowitz denomina por “fenómeno protótipo” (Hershkowitz, 1990).

Comentários finais

De acordo com os resultados do estudo, considero que deverá existir uma especial atenção ao efeito que os protótipos das figuras geométricas podem ter nas aprendizagens dos alunos (Matos, 1999). Dever-se-á recorrer a diferentes recursos, como a utilização de ambientes de geometria dinâmica, que poderão ajudar os alunos a compreender melhor as propriedades das figuras, fazendo com que as suas conceções sobre as figuras sejam modificadas ou reforçadas positivamente, tal como vários autores e investigadores sugerem. Como se verifica neste estudo, há dificuldades nas classificações inclusivas, levando os alunos a excluir o quadrado ao classificar retângulos, ou a excluir retângulos e losangos na classificação de paralelogramos. Assim, é importante que se trabalhe desde os primeiros anos, as classificações inclusivas, partindo da análise das propriedades das figuras e das classes de figuras, de modo a corrigir conceções erradas. Parece importante que, no processo de ensino, os alunos analisem diferentes tipos de triângulos e paralelogramos em diversas posições e com vários tamanhos, assim como estudem as suas propriedades de forma profunda, uma vez que os tópicos do programa do 7º ano de escolaridade exigem que estes conceitos estejam consolidados.

5.3 - Reflexão sobre o estudo

Enquanto professora, este estudo ajudou-me a compreender melhor algumas dificuldades que os alunos revelam, fazendo com que possa orientar as minhas práticas, de forma a contribuir para uma melhor aprendizagem da geometria por parte dos alunos.

Penso que seria interessante estender este estudo a mais alunos do mesmo ano de escolaridade, permitindo, caso se verificasse, uma generalização, de algumas conclusões. Também a aplicabilidade deste estudo, com as devidas alterações no questionário, nos anos iniciais de ciclos de ensino (5.^o, 7.^o e 10.^o anos) possibilitava uma visão mais abrangente sobre quais são os conhecimentos dos alunos em diferentes “intervalos” ao longo do ensino. Um aspeto no qual reflito bastante baseia-se em saber se o conhecimento que estes alunos manifestaram sofrerá alterações futuras, ou seja, se as dificuldades e mal-entendidos evidenciados serão superados durante o 3.^o ciclo ou no ensino secundário. Tratando-se de conceitos que são trabalhados desde os primeiros anos de escolaridade, penso que é neles, ou seja, no 1.^o e 2.^o ciclo, que os alunos devem desenvolver o conhecimento sobre eles, cabendo ao professor o papel de proporcionar-lhes aprendizagens consistentes e significativas. Neste sentido, e como professora de matemática de alunos do 1.^o e do 2.^o ciclo, sinto que este estudo contribuiu para a minha afirmação enquanto defensora de uma perspetiva de ensino centrada na compreensão dos conceitos e não na memorização de procedimentos e definições.

No decorrer deste estudo, nomeadamente no processo de análise dos dados, detetei algumas limitações no questionário que serviu de instrumento de recolha de dados. Algumas questões poderiam ser expostas de outra forma, assim como deveria ter incluído os losangos como um tópico a analisar, uma vez que foi uma subclasse dos paralelogramos que não analisei aprofundadamente. Também posso considerar que o modelo de questionário que apliquei (na maioria questões de escolha múltipla) não me permitiu compreender de forma aprofundada algumas respostas dos alunos. Era minha intenção realizar entrevistas semiestruturadas após analisar os questionários, de modo a poder compreender o raciocínio dos alunos envolvido nas diferentes questões. Contudo, por motivos relacionados com a organização do tempo disponível, não foi possível. Esta será uma opção a considerar num futuro estudo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A matemática na educação básica*. Lisboa: Ministério da Educação. Departamento da Educação Básica.
- Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 2, Cap. 19, pp. 843-908). Charlotte, NC: Information Age & National Council of Teachers of Mathematics.
- Battista, M. T. (2009). Highlights of research on learning school geometry. In T. V. Craine, R. Rubenstein (Ed.), *Seventy-first Yearbook of Understanding Geometry for a Changing World*. (pp. 91-108). National Council of Teachers of Mathematics.
- Bernd, A. (2011). *As imagens conceituais e a geometria dinâmica. Trabalho de conclusão de curso de Licenciatura em Matemática*. Instituto de Matemática da UFRGS: Rio Grande do Sul, Brasil.
- Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.
- Brito, M.R.F.(Org.) (1996) *Psicologia na Educação: Articulação entre pesquisa. Formação e prática pedagógica*. Coletâneas da ANPEPP, Vol. 1, N° 5, pp. 73 - 94.
- Burger, W. F., & Shaughnessy J. (1986). Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education*, 17, 31-48.
- Clements, D., & Battista, M. (1992). *Geometry and Spatial Reasoning*. In D.A. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420-464). NY: Macmillan Publishing Company.

- Clements, D. H., & Battista, M. T. (2001). Length, perimeter, area, and volume. In L. S. Grinstead & S. I. Lipsey (Eds.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 406-410). New York: RoutledgeFalmer.
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2000). Young children's ideas about geometric shapes. *Teaching Children Mathematics*, 6(8), 482–488.
- Clements, D. H. (2004). Geometric and spatial thinking in early childhood education. In D. H. Clements, & J. Sarama (Eds.), *Engaging young children in mathematics* (pp.267-298). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Clements, H., Swaminathan, Hannibal, M., & Sarama, J. (1999). Young Children's Concepts of Shape. *Journal for Research in Mathematics Education* 30(2) .
- Cobb, P., Yackel, E.,. (1996). Normas sociomatemáticas, argumentação e autonomia em matemática. *Journal for Research in Mathematics Education*. 27(4), 458-477.
- Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2001). *Research methods in education* (5th ed.). London: Routledge Falmer (Obra original publicada em 2000).
- Costa, M. C. (2005). Modelo do pensamento visual-espacial: transformações geométricas no início da escolaridade. Tese de doutoramento. Lisboa: Universidade Nova de Lisboa Faculdade de Ciências e Tecnologia.
- Crowley, Mary L. (1987) "The van Hiele Model of the Development of Geometric Thought." In *Learning and Teaching Geometry, K-12, Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics*, edited by Mary Montgomery Lindquist, pp.1-16. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.
- Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts, *Educational Studies in Mathematics*, 24/2, 139-162.
- Fujita, T. Jones, K. (2007). Learners' understanding of the definitions and hierarchical classification of quadrilaterals: towards a theoretical framing. *Research in Mathematics Education*,(Vol. 9, iss.1).

- Gomes, A., Ralha, E. (2005). O conceito de ângulo: experiências e reflexões sobre o conhecimento matemático de (futuros) professores do 1.º ciclo. *Quadrante*, 14(1), 109-131.
- Halat, E. (2007). Reform- Based Curriculum & Acquisition of the Levels. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 3(1), 41-49.
- Hershkowitz, R., Bruckheimer, M., & Vinner S., (1987). Activities with teachers based on cognitive research. In M. M. Lindquist & A. P. Shulte (Eds.): *Learning and Teaching Geometry, K-12, Yearbook*, pp. 223-235. NCTM.
- Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. In P. Nesher, & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 70-95). Cambridge: Cambridge University Press.
- Jaime, A, Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de van Hiele, en S. Linares, M.V. Sánchez (eds.), *Teoría y práctica en educación matemática*. (Alfar: Sevilla, Spain), 295 – 384.
- Jones, K. (1998). Deductive and intuitive approaches to solving geometrical problems. In: C. Mammana and V. Villani (eds), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*. Dordrecht: Kluwer. pp78-83.
- Jones, K. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning: Students' interpretations when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1/2), 55-85.
- Jones, K. (2012). Geometrical and spatial reasoning: challenges for research in mathematics education. *Atas do XXIII Seminário de Investigação em Educação Matemática*. pp 3- 12.
- Klausmeier, H. J.; Goodwin, (1977) W. *Manual de Psicologia Educacional: aprendizagem e capacidades humanas*. (Tradução de Abreu, M. C. T. A.). São Paulo: Harper & Row.

- Lessard-Hérbert, M., Goyette, G. & Boutin, G. (1990). *Investigação Qualitativa: Fundamentos e Práticas*. Lisboa: Instituto Piaget.
- Loureiro, C. (2007). A Geometria na proposta de ajustamento — algumas questões. *Educação e Matemática*, 95, (p.25).
- Loureiro, C. (2009). Geometria no novo programa de matemática no ensino básico. *Educação e Matemática*, 105, 61-66.
- Mariotti, A. (1995). Images and concepts in geometrical reasoning. In R. Sutherland e J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in Mathematics Education*, (p. 97-116). Nova Iorque: Springer.
- Matos, J. M. (1999). Cognitive models for the concept of angle. Doctoral dissertation, University of Georgia, Athens, Georgia, USA.
- Matos, J. M., & Serrazina, L. (1996). *Didáctica da matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Ministério da Educação (1998). Organização curricular e programas – 1.º ciclo (4ª edição, pp.161-189). Lisboa: Ministério da Educação. Departamento da Educação Básica. (Obra original publicada em 1991).
- Ministério da Educação (2002). Programa de Matemática - plano de organização do ensino-aprendizagem, 2º ciclo. Vol II. (4ª edição). Lisboa: Editorial do Ministério da Educação. Departamento da Educação Básica.
- Ministério da Educação (2001). Currículo nacional do ensino básico – Competências essenciais (pp. 57-71). Lisboa: Editorial do Ministério da Educação. Departamento da Educação Básica.
- Ministério da Educação (2007). Programa de matemática do ensino básico. Lisboa: Ministério da Educação. Direção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular.

- Mitchelmore, M. (1992). Children's concept of perpendiculars. In W. Geeslin, & K. Graham(Eds.), Proceedings of the 16th PME International Conference (Vol. 2, pp. 120-127).Durham, NH: PME.
- Moraco, A. S. C. T. (2006). Um estudo sobre os conhecimentos geométricos adquiridos por alunos do ensino médio. Dissertação de mestrado. Bauru, SP, Brasil: Universidade Estadual Paulista.
- National Center for Education Statistics (n.d.). Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS). Consultado em 4 de novembro de 2011, de <https://nces.ed.gov/TIMSS/results03.asp>
- National Council of Teachers of Mathematics (2008). Princípios e normas para a matemática escolar (2.^a edição) (APM, Trad.). Lisboa: APM (Obra original publicada em 2000).
- Okazaki, M., Fujita, T. (2007) Prototype phenomena and common cognitive paths in the understanding of the inclusion relations between quadrilaterals in japan and scotland. In Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. & Seo, D. Y. (Eds.). Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4, pp. 41-48. Seul: PME.
- Pirola, N. A. (1995) . Um Estudo sobre a Formação dos Conceitos de Triângulo e Paralelogramo em alunos de primeiro grau. Dissertação de Mestrado. Campinas: SP. UNICAMP.
- Pirola, N. A., Carvalho, A., Nascimento, H., Mariani, J., Monger, W. (2004).Um estudo sobre a formação do conceito de triângulo e paralelogramo em alunos do ensino fundamental: uma análise sobre os atributos definidores e exemplos e não-exemplos. Actas do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática. Universidade Federal de Pernambuco: ENEM
- Pirola, N.A., Quintiliano, L.C., Proença, M.C., (2003). Estudo sobre o desempenho de alunos no Ensino Médio em tarefas envolvendo o conceito de polígonos e poliedros. In: Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. São Paulo: SBEM, 2003, v 1.

- Ponte, J. P., Serrazina, M. L. (2000). *Didáctica da Matemática do 1.º Ciclo*, Universidade Aberta.
- Proença, M.C. de, Pirola, N. A. (2009). Investigação em formação conceitual: o conhecimento de alunos do ensino médio sobre polígonos. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 379-387). Santander: SEIEM.
- Senk S. (1989). Van Hiele levels and achievement in writing geometry proofs. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(3), 309-321.
- Tall, D.; Vinner, S. (1981), Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics* 12(2): 151–169.
- Tashakkori, A., & Teddlie, C. (2003). The past and the future of mixed methods research: From data triangulation to mixed models design. In A. Tashakkori, & C. Teddlie (Eds.), *Handbook of mixed methods in social and behavioral research* (pp. 3-50). Thousand Oaks, USA: Sage Publications.
- Teddlie, C., & Tashakkori, A. (2003). Major issues and controversies in the use of mixed methods in the social and behavioral sciences. In A. Tashakkori, & C. Teddlie (Eds.), 106 *Handbook of mixed methods in social and behavioral research* (pp. 3-50). Thousand Oaks, USA: Sage Publications.
- Tempera T. (2010). *A geometria na formação inicial de professores: contributos para a caracterização do conhecimento dos estudantes*. Tese de mestrado. Lisboa: Escola Superior de Educação de Lisboa.
- Tsamir, P., Tirosh, D., & Levenson, E. (2008). Intuitive nonexamples: the case of triangles. *Educational Studies in Mathematics*, 69, 81–95.
- Tuckman, B. W. (1994). *Manual de investigação em educação*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

- Usiskin, Z. (1982). Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry. Chicago: Departamento de Educação da Universidade de Chicago.
- Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight. A theory of mathematics education*. Orlando, Florida: Academic Press.
- Van Hiele, P. M. (1999). Developing geometric thinking through activities that begin with play. *Teaching Children Mathematics*, 5 (6), 310-316.
- Veloso, E. (2007) Notas sobre o Ensino da Geometria- Sobre as definições (II) *Educação e Matemática*, 93, 19-22.
- Viana, O. A. (2000). O conhecimento geométrico de alunos do Cefam sobre figuras espaciais: um estudo das habilidades e dos níveis de conceito. Dissertação de mestrado. Campinas, SP, Brasil: Universidade Estadual de Campinas.
- Viana, O. A. (2005). O componente espacial da habilidade matemática de alunos do ensino médio e as relações com o desempenho escolar e as atitudes em relação à matemática e à geometria. Tese de doutoramento. Campinas, SP, Brasil: Universidade Estadual de Campinas.
- Viana, O. A., Brito, M. R. F. (2005). Os conceitos espontâneos e científicos: uma análise da linguagem utilizada por futuros professores para descrever figuras espaciais. Consultado em http://miltonborba.org/CD/Interdisciplinaridade/Anais_VII_EPEM/Comunicacoes_Orais/co0034.doc
- Villiers, M. (1994). The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 11-18.
- Villiers, M. (1998). To teach definitions in geometry or teach to define? In A. Olivier and K. Newstead (Eds.), *Proceedings of PME22*. (Vol. 2, pp. 248-255). PME: Stellenbosch.
- Villiers, M. (2010). Some reflections on the Van Hiele Theory, tradução de Celina A. A. P. Abar. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, v.12, n.3, pp.400-43.

- Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall, (Ed). Advanced mathematical thinking. Dordrecht: Kluwer.
- Viseu, F., Menezes, L., & Almeida, J. (2013). Conhecimento de Geometria e perspectivas de professores do 1.º ciclo do ensino básico sobre o seu ensino. *Revemat*, 8(1), 156-178.
- Wu, D.-B., & Ma, H.-L. (2005). A study of the geometric concepts of elementary school students at Van Hiele level one. In H. Chick, & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th PME International Conference (Vol. 4, pp. 329-336)*. Melbourne, Austrália: PME
- Wu, D.-B., & Ma, H.-L. (2006). The distributions of van hiele levels of geometric thinking among 1st through 6th graders. In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. & Stehlíková, N. (Eds.). *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 5, pp. 409-416*. Prague: PME.
- Yin, H. S., (2003). Young children's concept of shape: van Hiele Visualization Level of geometric thinking. *The Mathematics Educator*, 7(2),71-85. Singapore: Association of Mathematics Educators:

ANEXOS

Anexo 1. Instrumento de recolha de dados (questionário)

Questionário

Número de identificação _____ (não preencher)

Género Masculino Feminino

Idade _____

Ano de escolaridade _____

INSTRUÇÕES

Este questionário contém 15 questões.

Não se espera que saibas tudo sobre este questionário.

Quando começares a responder ao questionário:

- Lê, atentamente, cada questão.
- Decide sobre a resposta ou respostas que achas que estão corretas.
- Em algumas questões, as respostas deverão ser dadas assinalando **a** hipótese ou hipóteses corretas rodeando a opção.

Por exem

A) B) C) D)

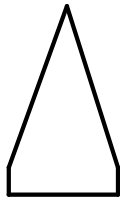
1 2 3 4 5

- Se desejares alterar uma resposta, risca completamente a primeira resposta e volta a rodear a hipótese que consideras correta.
- Noutras questões, tens de responder no local apropriado, que pode ser indicado da seguinte forma: **Resposta:** _____

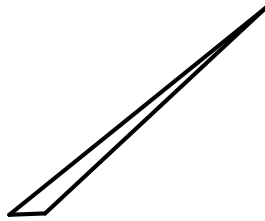
Nestas questões, se precisares de fazer desenhos, utiliza o espaço em branco do local da resposta.

- **Espera** até que teu professor diga que podes começar.

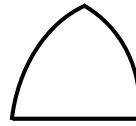
1. Das figuras seguintes, identifica as que são triângulos.



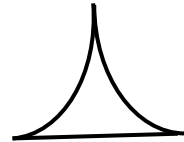
1



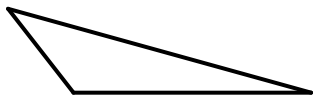
2



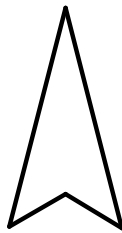
3



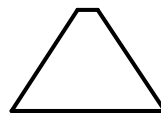
4



5



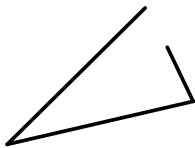
6



7



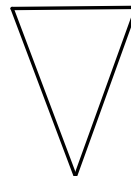
8



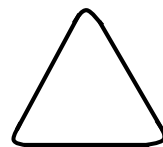
9



10



11

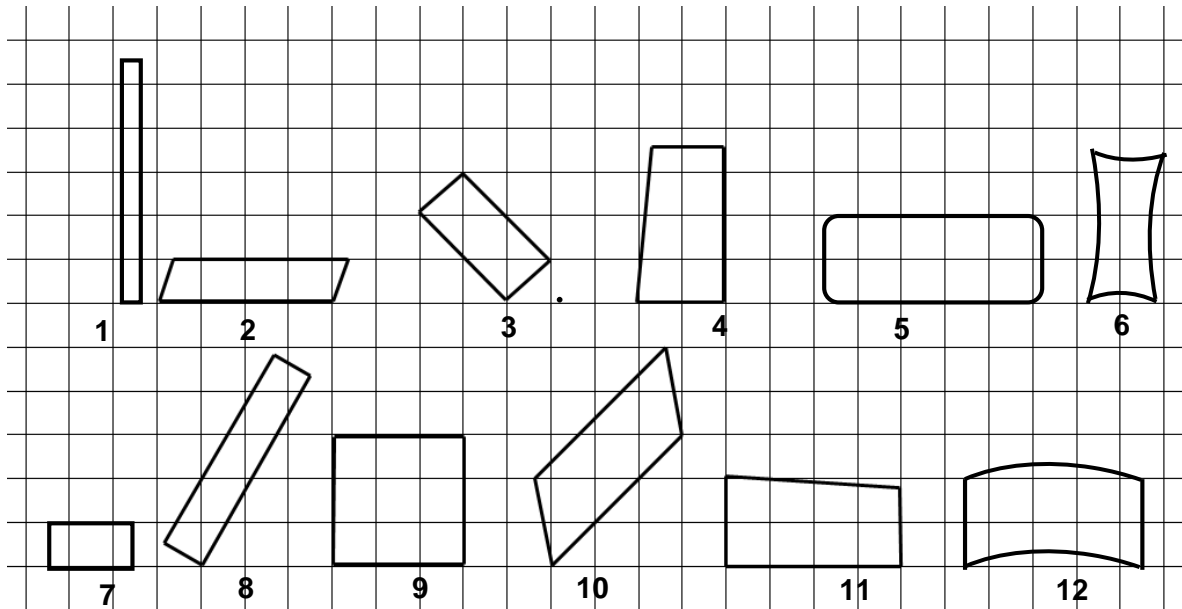


12

2. Descreve, por palavras, o que é um triângulo.

Resposta: *Um triângulo é*

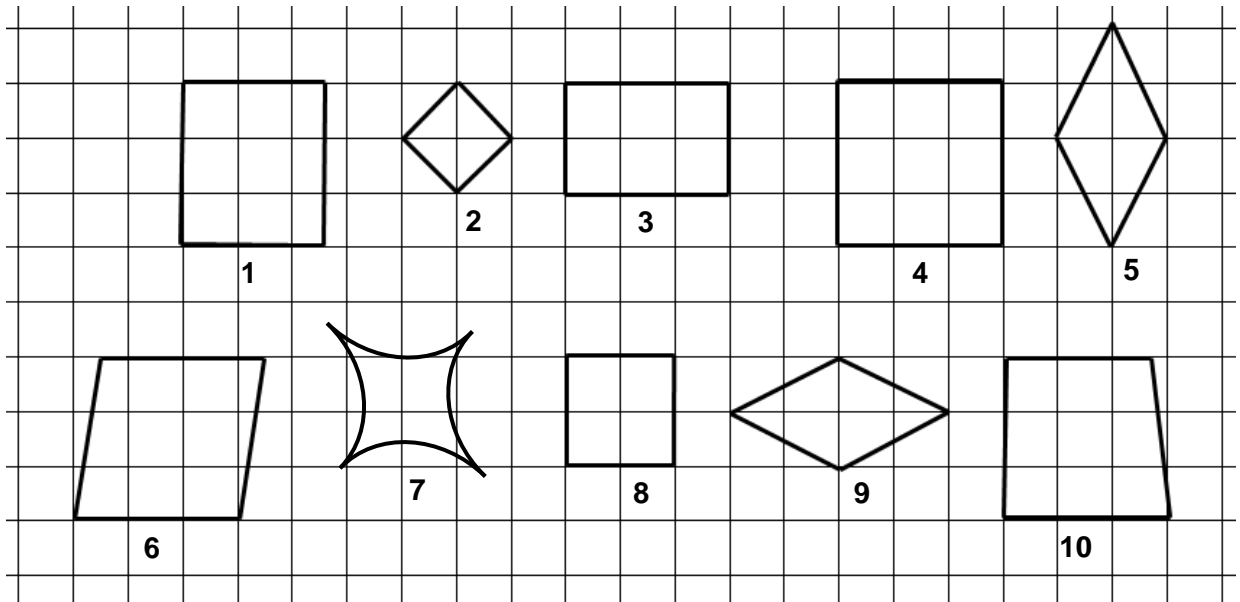
3. Das figuras seguintes, identifica as que são retângulos.



4. Descreve, por palavras, o que é um retângulo.

Resposta: *Um retângulo é*

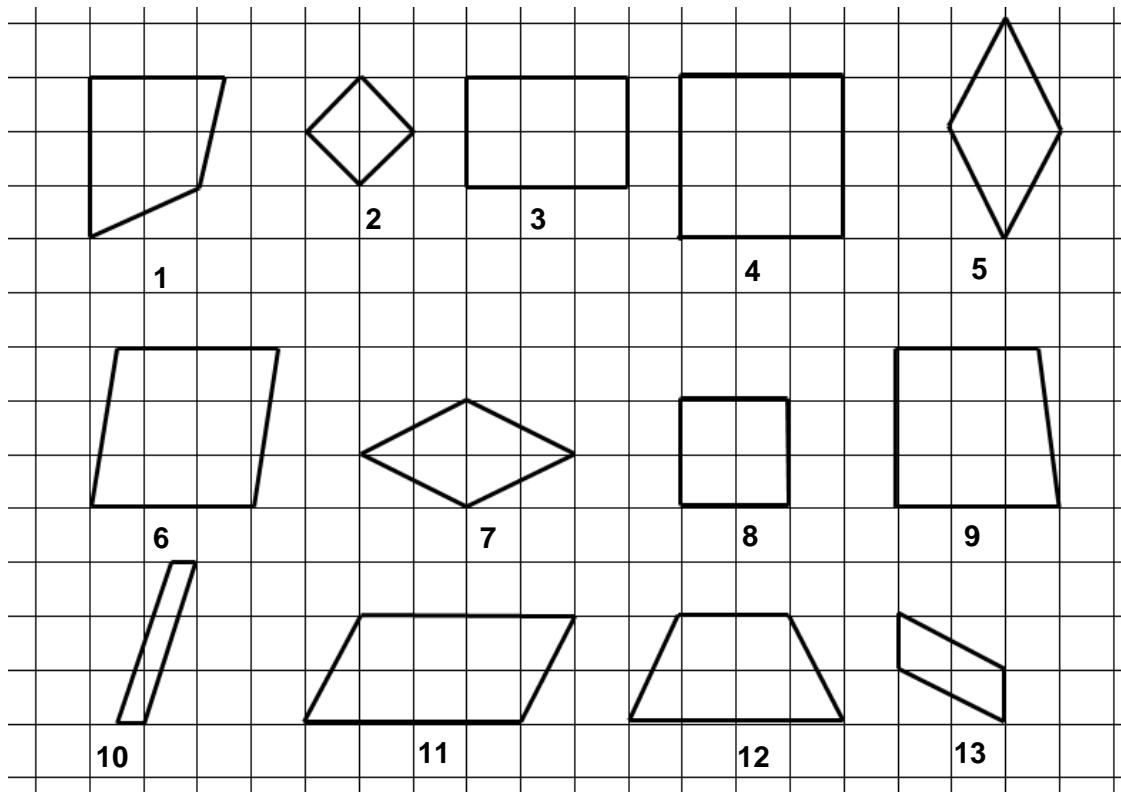
5. Das figuras seguintes, identifica as que são quadrados.



6. Descreve, por palavras, o que é um quadrado.

Resposta: *Um quadrado é*

7. Das figuras seguintes, identifica as que são paralelogramos.



8. Descreve, por palavras, o que é um paralelogramo.

Resposta: *Um paralelogramo é*

9. Assinala as afirmações verdadeiras para **TODOS** os triângulos:

- e) Todos os lados são iguais.
- f) Todos os ângulos são agudos.
- g) A soma da amplitude dos ângulos internos é sempre igual.
- h) Não possuem diagonais.

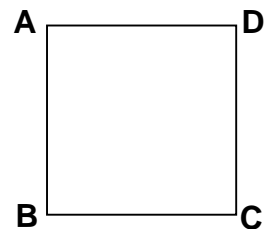
10. Assinala as afirmações verdadeiras para **TODOS** os retângulos:

- a) Os lados opostos são diferentes.
- b) Todos os ângulos são retos.
- c) As diagonais são iguais.
- d) As diagonais são perpendiculares.

11. ABCD é um quadrado.

Qual a relação que é verdadeira para **TODOS** os quadrados?

- a) Os segmentos de reta AC e CB têm o mesmo comprimento.
- b) Os segmentos de reta DB e AC são perpendiculares.
- c) Os segmentos de reta AB e DC são perpendiculares.
- d) Os segmentos de reta AB e DB têm o mesmo comprimento.
- e) O ângulo D é maior do que o ângulo C.



12. Assinala as afirmações verdadeiras para **TODOS** os paralelogramos:

- a) Os lados opostos são paralelos.
- b) Os lados opostos são iguais.
- c) Todos os ângulos são retos.
- d) As diagonais são iguais.

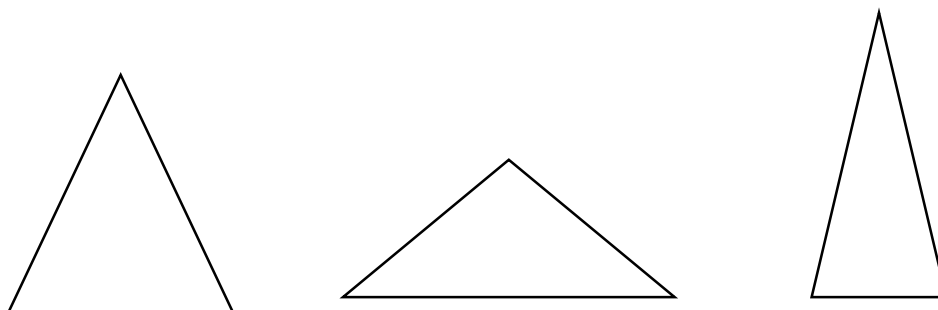
13. Qual das alíneas é resposta à seguinte questão:

“O que têm todos os retângulos que alguns paralelogramos não têm?”

- a) Lados opostos iguais.
- b) Diagonais iguais.
- c) Lados opostos paralelos.
- d) Ângulos opostos iguais.
- e) Nenhuma das afirmações anteriores.

14. Um triângulo isósceles é um triângulo com dois lados de igual comprimento.

Aqui estão três exemplos.

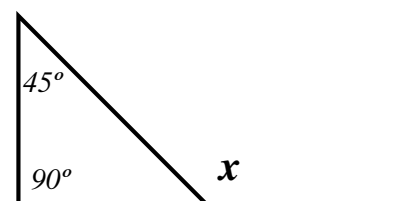


Qual das afirmações seguintes é verdadeira para **TODOS** os triângulos isósceles?

- a) Os três lados devem ter o mesmo comprimento.
- b) Um lado deve ter duas vezes o comprimento de outro lado.
- c) Deve haver pelo menos dois ângulos com a mesma amplitude.
- d) Os três ângulos devem ter a mesma amplitude.
- e) Nenhuma das afirmações anteriores é verdadeira para todos os triângulos isósceles.

15. A figura seguinte é um triângulo retângulo. Qual o valor do ângulo x ?

Resposta: _____



Obrigada, pela tua colaboração.

Anexo 2. Pedido de autorização à Direção da Escola

Exma. Sra. Diretora do Agrupamento de Escolas
de _____ -

Eu, Conceição Vanessa Açucarinho Tavares, professora do grupo 230, da Escola _____, estando a realizar a dissertação no âmbito do curso de Mestrado em Educação Matemática na Educação Pré-Escolar e nos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico, da Escola Superior de Educação de Lisboa, venho por este meio solicitar autorização para aplicar um inquérito à turma ____ do 7º ano de escolaridade e, posteriormente, realizar entrevistas vídeo e áudio gravadas a alguns alunos, da respetiva turma, a seleccionar posteriormente.

Os dados recolhidos serão exclusivamente para a realização da tese, cujo principal objetivo é avaliar os conhecimentos dos alunos sobre os conceitos de ângulo, triângulo e quadrilátero, no início do 3º ciclo.

Comprometo-me, desde já, a garantir o anonimato dos alunos e a confidencialidade dos dados obtidos.

Mais se informa que será pedida a necessária autorização aos Encarregados de Educação, tendo já sido efetuado contactos com a professora de Matemática da turma e com o Diretor de Turma, com o fim de os informar sobre os objetivos do projeto.

Para mais esclarecimentos estarei ao seu dispor.

Agradecendo desde já a atenção dispensada, solicito deferimento.

Lisboa, 13 de Janeiro de 2012

A Professora,

(Conceição Tavares)

Anexo 3. Pedido de autorização aos Encarregados de Educação

Exmo.(a) Sr.(a) Encarregado(a) de Educação

Eu, Conceição Vanessa Açucarinho Tavares, professora de Matemática, da Escola _____, por estar a realizar um projeto de investigação no âmbito do curso de Mestrado em Educação Matemática, venho por este meio solicitar autorização para a participação do meu educando neste projeto, cujo principal objetivo é investigar os conhecimentos dos alunos sobre Geometria no início do 3º ciclo do ensino básico.

Para a realização do projeto de investigação serão utilizados alguns trabalhos produzidos pelos alunos, bem como serão realizadas entrevistas a alguns alunos, sendo estas vídeo e áudio gravadas.

Comprometo-me, desde já, a garantir o anonimato dos alunos e a confidencialidade dos dados obtidos, que serão utilizados apenas no âmbito da investigação.

Para mais esclarecimentos estarei ao seu dispor para uma reunião, a marcar com o Diretor de Turma, e disponibilizo, também, o seguinte *email*: ctavares.am@gmail.com.

Agradeço, desde já, a atenção dispensada e apresento os meus melhores cumprimentos.

(Solicito que o destacável seja devolvido e assinado, se possível, até dia 24 de Janeiro).

Lisboa, 13 de Janeiro de 2012

A Professora,

(Conceição Tavares)

✂

(DESTACÁVEL A DEVOLVER ASSINADO AO DIRETOR DE TURMA)

Eu, _____, Encarregado(a) de Educação do aluno(a) _____ n.º _____, autorizo/não autorizo (riscar o que não interessa) a participação do meu educando neste projeto de investigação.

O (A) Encarregado(a) de Educação

_____, _____ de Janeiro de 2012