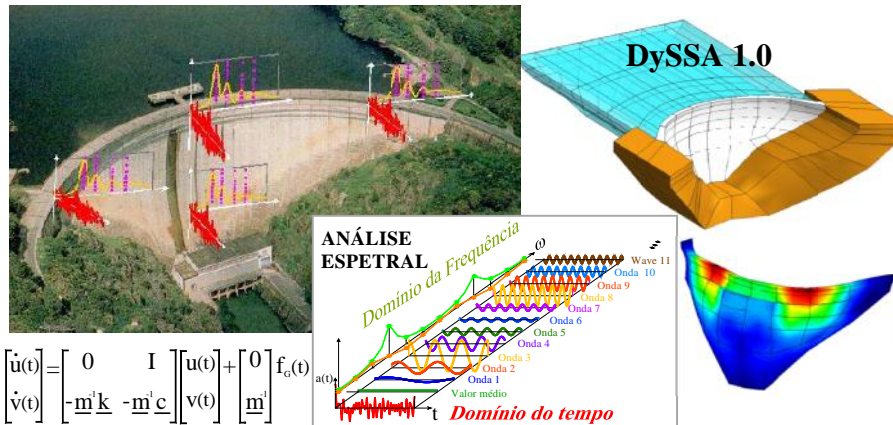




INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DE LISBOA
Área Departamental de Engenharia Civil



MODELAÇÃO DO COMPORTAMENTO DINÂMICO DE SISTEMAS BARRAGEM-FUNDAÇÃO-ALBUFEIRA. FORMULAÇÃO NO ESPAÇO DE ESTADOS COM AMORTECIMENTO GENERALIZADO

ANDRÉ FILIPE DE MATOS SILVESTRE
Licenciado em Engenharia Civil

Trabalho Final de Mestrado elaborado no Laboratório Nacional de Engenharia Civil (LNEC) para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil pelo Instituto Superior de Engenharia de Lisboa no âmbito do protocolo de cooperação entre o ISEL e o LNEC
(*Documento Definitivo*)

Orientadores:

Doutor Sérgio Bruno Martins de Oliveira
Doutor Paulo Xavier Candeias

Júri:

Presidente: Mestre Cristina Ferreira Xavier de Brito Machado
Vogais:

Doutor Alfredo Campos Costa
Doutor Sérgio Bruno Martins de Oliveira
Doutor Paulo Xavier Candeias

Dezembro de 2012

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer à minha família, em especial aos meus pais, Fernanda e Carlos Silvestre por todo o apoio, força e incentivo que me deram para tirar o curso.

Gostaria de agradecer ao Engenheiro Sérgio Oliveira todo o apoio, entusiasmo, dedicação, disponibilidade e ensinamentos transmitidos que muito contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho.

Gostaria igualmente de agradecer aos Engenheiros Paulo Candeias e Romano Câmara a disponibilidade que sempre demonstraram e sugestões importantes que contribuíram para a realização deste trabalho.

Por fim, agradeço ao LNEC a possibilidade que me concedeu de realizar este trabalho no Departamento de Barragens de Betão (Núcleo de Modelação Matemática e Física).

MODELAÇÃO DO COMPORTAMENTO DINÂMICO DE SISTEMAS BARRAGEM-FUNDAÇÃO-ALBUFEIRA. FORMULAÇÃO NO ESPAÇO DE ESTADOS COM AMORTECIMENTO GENERALIZADO

Resumo

Com este trabalho mostra-se a importância da utilização integrada de modelos numéricos e de resultados da observação do comportamento dinâmico de barragens com vista ao controlo da segurança de sistemas barragem-fundação-albufeira.

Neste trabalho utilizou-se o MATLAB para desenvolver um programa de elementos finitos 3D (DySSA 1.0, “Dynamic State Space Analysis”) para análise do comportamento dinâmico de sistemas barragem-fundação-albufeira considerando uma formulação em deslocamentos com a albufeira discretizada em elementos finitos com módulo de distorção nulo. Utiliza-se uma formulação no espaço de estados o que permite considerar amortecimento não proporcional à massa e à rigidez e conduz a modos de vibração complexos.

Apresentam-se os fundamentos do método dos elementos finitos na perspectiva da sua implementação computacional para análise dinâmica de estruturas, e apresenta-se sumariamente o programa DySSA 1.0, o qual permite a análise estática e dinâmica de estruturas utilizando elementos finitos tridimensionais isoparamétricos do segundo grau (tipo cubo com 20 pontos nodais), e correspondentes elementos de junta (com 16 pontos nodais, 8 por cada face).

O programa foi testado com base na análise dinâmica de uma parede em consola submetida à pressão hidrodinâmica. Os resultados numéricos foram comparados com soluções analíticas e com resultados experimentais obtidos no laboratório de estruturas do ISEL.

Descrevem-se os fundamentos da análise dinâmica de estruturas no domínio do tempo, e referem-se os princípios em que se baseiam as metodologias de identificação modal no domínio da frequência.

Analisa-se o comportamento dinâmico da barragem do Cabril em termos de frequências naturais e configurações modais, utilizando um modelo 3D representativo do sistema. Os resultados deste modelo numérico são comparados com resultados experimentais obtidos com base no sistema de monitorização dinâmica em contínuo, que foi instalado pelo LNEC em 2008.

MODELING THE DYNAMIC BEHAVIOR OF DAM-FOUNDATION-RESERVOIR SYSTEMS. STATE SPACE WITH GENERALIZED DAMPING FORMULATIONS

Abstract

This work shows the importance of integrated use of numerical models and monitoring results of dam's dynamic behavior, in the scope of the safety control of dam-reservoir-foundation systems.

In this work it was developed a 3D finite element MATLAB program (DySSA 1.0, "Dynamic State Space Analysis") for the analysis of the dynamic behavior of dam-reservoir-foundation systems, considering a displacement formulation with the reservoir discretized into finite elements with null shear modulus. It was used a state formulation which allows to consider non proportional damping leading to complex vibration modes.

The fundamentals of the finite element method are presented in the perspective of its computational implementation for dynamic analysis of structures. The program DySSA 1.0, which allows static and dynamic analysis of structures is briefly described. This program uses 3D finite isoparametric elements of the second degree (cube type with 20 nodal points), and the corresponding joint elements (16 nodal points, 8 per face).

A concrete cantilever wall subjected to hydrodynamic pressure was used as a test example. The numerical results were compared with analytical solutions and with experimental results obtained in the ISEL laboratory of structures.

The fundamentals of structural dynamic analysis in the time domain are referred, as well as the basics of modal identification methodologies in the frequency domain.

The dynamic behavior of the dam Cabril is analyzed in terms of natural frequencies and mode shapes, using a 3D model of the system. The results of this numerical model are compared with experimental results gathered with the continuous dynamic monitoring system, which was installed late 2008 in Cabril dam, by LNEC.

PALAVRAS CHAVE / KEYWORDS

Amortecimento modal / modal damping
Barragens de betão / Concrete Dams
Comportamento dinâmico / Dynamic behaviour
Comportamento estático / Static behaviour
Controlo da segurança / Safety control
Dinâmica de estruturas / Structural dynamics
Elementos finitos / Finite elements
Ensaio de vibração ambiental / Ambient vibration tests
Frequências naturais / Natural frequencies
Formulação espaço de estados / State Space formulation
Identificação modal / Modal identification
Método dos elementos finitos / Finite element method
Modelos numéricos / Numerical models
Modo de vibração / Mode shape
Sistemas barragem-fundação-albufeira / Dam-Foundation-Reservoir Systems

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Justificação e Enquadramento.....	1
1.2	Objetivos da Dissertação	3
1.3	Estruturação do trabalho	5
2	COMPORTAMENTO DINÂMICO DE BARRAGENS DE BETÃO	7
2.1	Considerações Iniciais.....	7
2.2	Barragens.....	8
2.2.1	Tipos de Barragens de Betão e Principais Características.....	9
2.2.2	Sistemas de Barragem-Fundação-Albufeira.....	11
2.3	Observação do Comportamento Dinâmico de Barragens de Betão.....	12
2.3.1	Incidentes em barragens	12
2.4	Barragem do Cabril	13
2.4.1	Medição de Acelerações na Barragem do Cabril	16
2.5	Considerações Finais.....	17
3	DESENVOLVIMENTO DE UM PROGRAMA DE ELEMENTOS FINITOS EM MATLAB. FUNDAMENTOS DO MEF E TIPOS DE ELEMENTOS UTILIZADOS	19
3.1	Considerações Iniciais.....	19
3.2	Fundamentos do MEF. Elementos 3D.....	19
3.3	Tipos de Elementos Considerados	27
3.3.1	Elementos Tipo Cubo de 20 Nós.....	28
3.3.2	Elementos de Junta de 16 Nós.....	30
3.3.3	Elementos Tetraédricos de 4 Nós	37

3.4	Desenvolvimento de um Programa de MEF de Elemento Finitos 3D para Análise Estática e Dinâmica (Componente Estática).....	41
3.4.1	Algoritmo do Programa	41
3.4.2	Exemplo de teste	44
3.5	Considerações Finais	46
4	ANÁLISE DINÂMICA. FORMULAÇÃO NO ESPAÇO DE ESTADOS	49
4.1	Considerações Iniciais	49
4.2	Análise Dinâmica. Formulação clássica e formulação de estado	51
4.2.1	Formulação modal Clássica	51
4.2.2	Formulação no Espaço de Estados.....	54
	Formulação em velocidades e deslocamentos (espaço de estados). Modelo de 1GL	55
	Formulação em velocidades e deslocamentos (espaço de estados). Modelos de vários graus de liberdade N_{GL}	56
	Diagonalização da equação de estado.....	58
4.3	Análise no Domínio da Frequência. Análise de Fourier	63
4.3.1	Utilização de programas para o cálculo de TDF	66
4.4	Desenvolvimento do programa DySSA1.0. Análise Dinâmica de Estruturas (EF3D) com base numa formulação de estado	67
4.4.1	Algoritmo do Programa	67
4.4.2	Exemplos de teste	69
4.5	Considerações Finais	71
5	APLICAÇÕES	73
5.1	Considerações Iniciais	73
5.2	Análise do Comportamento Dinâmico de uma parede em Consola. Estudo experimental e numérico com interação água-estrutura.	73
5.3	Análise do Comportamento Dinâmico de um Sistema Barragem-Fundação-Albufeira. Comparação de resultados numéricos e experimentais para o caso da Barragem do Cabril	82
5.3.1	Barragem do Cabril.....	82
5.3.2	Estudo da influência da fissuração no comportamento dinâmico da barragem	92
5.4	Considerações Finais	93

6	CONCLUSÕES E PERSPETIVAS FUTURAS	95
6.1	Síntese do trabalho.....	95
6.2	Contribuições inovadoras.....	95
6.3	Apreciação dos resultados obtidos.....	96
6.4	Desenvolvimentos Futuros.....	97
7	BIBLIOGRAFIA.....	99
8	WEBGRAFIA.....	101

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1: a) Modelo físico da parede em consola e do correspondente tanque para contenção de água; b) Barragem do Cabril.

Figura 1.2: a) Malha EF3D da parede em consola e do tanque com água à cota máxima; b) Malha de EF3D da barragem do Cabril (sistema barragem-fundação-albufeira).

Figura 1.3: Programa DySSA 1.0. Exemplo de aplicação.

Figura 2.1: Distribuição geográfica das barragens em Portugal. Fotos de algumas das grandes barragens de betão portuguesas (Oliveira, 2012).

Figura 2.2: a) Barragem Rogun no Tadjiquistão (uma das maiores barragens do mundo com 335 m de altura e 660 m de comprimento no coroamento).

Figura 2.3: a) Barragem do Beliche (Tipo Aterro); b) Barragem de Castelo de Bode (Tipo Betão); c) Barragem de Penide (Tipo Alvenaria) (Wiki, s.d.).

Figura 2.4: a) Barragem do Gameiro (gravidade); b) Barragem de Miranda (contraforte); c) Barragem do Alto Ceira (arco); d) Barragem do Alqueva (abóbada de dupla curvatura); e) Barragem de Odivelas (abóbadas múltiplas) (INAG, s.d.).

Figura 2.5: Sistema barragem-fundação-albufeira (adaptado de Oliveira et al., 2012).

Figura 2.6: Barragem de Gleno antes e depois do incidente

Figura 2.7: Barragem do Cabril, vista da albufeira vazia e da torre de tomada de água.

Figura 2.8: Evolução ao longo dos anos da distribuição das fendas no alçado de jusante na barragem do Cabril. Esquema da deformação da barragem que levou ao aparecimento das fendas no paramento a jusante (Oliveira, 2012).

Figura 2.9: Barragem do Cabril: a) Vista de montante; b) Planta; c) Perfil transversal (INAG, s.d.).

Figura 2.10: Principais componentes do sistema de monitorização em contínuo do comportamento dinâmico da barragem do Cabril (Oliveira, 2011).

Figura 2.11: Análise espectral resultante das acelerações obtidas através do sistema de monitorização dinâmica instalado na barragem do Cabril. Dia 3 de Novembro de 2011, cota da água 264,3 m (Oliveira, et al., 2012).

Figura 3.1: Elementos finitos com 3 G.L. de translação por nó para a análise de estruturas 3D.

Figura 3.2: Esquema de mudança de referencial (Oliveira, 2012).

Figura 3.3: Esquema de montagem da matriz rigidez global.

Figura 3.4: Elemento finito tridimensional isoparamétrico tipo cubo com 20 pontos nodais. Representação dos eixos e coordenadas locais dos nós. Convenção adotada para a numeração de pontos nodais e faces. Funções de interpolação.

Figura 3.5: Representação das funções de interpolação segundo cada G.L para os pontos nodais 1, 2 e 20 do elemento finito tridimensional tipo cubo de 20 nós (Espada, 2009).

Figura 3.6: Distribuição dos Pontos de Gauss no elemento. Coordenadas locais e pesos.

Figura 3.7: Elemento de junta. Relação entre tensões e deformações e entre tensões e diferenças de deslocamento entre faces. Definição de rigidez tangencial K_T e normal K_N de uma junta (Oliveira & Espada, 2012).

Figura 3.8: Elemento de junta 3D de 2x8 nós (48 GL). Funções de interpolação utilizadas (idênticas às dos elementos finitos bidimensionais do 2º grau, de 8 nós).

Figura 3.9: Elemento de junta de 8x2 nós. Representação dos três sistemas de eixos utilizados: i) sistema de eixos gerais (triorтогоnal); ii) sistema de eixos locais y_1 e y_2 (eixos curvos e não ortogonais) segundo a superfície do elemento junta; e iii) sistema de eixos triortogonal definido em cada ponto P da junta, no qual é estabelecida a relação constitutiva da junta através da matriz diagonal D_j (definida na figura 1).

Figura 3.10: Numeração de pontos nodais e coordenadas locais. Posição dos pontos de Gauss no e correspondentes áreas de influência a utilizar na integração numérica da matriz de rigidez.

Figura 3.11: Cálculo da deformada de uma consola fissurada pelo programa DySSA 1.0.

Figura 3.12: Esquema de divisão de um elemento tipo cubo de 21 em 28 elementos tetraédricos de 4 nós.

Figura 3.13: Elemento finito tridimensional isoparamétrico tetraédricos com 4 pontos nodais. Representação dos eixos locais e das coordenadas locais dos nós. Funções de interpolação e matriz Jacobiana.

Figura 3.14: Utilização do método dos elementos finitos na resolução da equação de Navier (adaptado de (Oliveira, 2012)).

Figura 3.15: Programa DySSA 1.0 em Matlab. Cálculo estático da barragem do Cabril para uma cota de água de 265 m. Desenho dos deslocamentos e tensões na barragem.

Figura 3.16: Esquema de uma folha de dados. Folha de dados referente aos nós, elementos de junta e elementos da malha.

Figura 3.17: Parede em consola sujeita pressão hidrostática.

Figura 3.18: a) Malha de elementos tipo cubo; b) Malha de elementos tipo cubo na discretização da consola e tetraédricos na discretização da água.

Figura 4.1: Ilustração do conceito de sobreposição de modos (baseado em (Alves, 2005)).

Figura 4.2: Representação da curva de Rayleigh.

Figura 4.3: Modo natural de vibração de um modelo de 1 GL, com consideração do efeito de amortecimento. Representação no domínio do tempo e no espaço de estados (em velocidades e deslocamentos: espaço $u - v$).

Figura 4.4: Discretização temporal das forças aplicadas.

Figura 4.5: Análise dinâmica de estruturas pelo MEF. Formulação no espaço de estados com amortecimento generalizado (quadro de resumo) (Oliveira, et al., 2012).

Figura 4.6: Decomposição da função $f(t)$, definida entre o intervalo de tempo $[0, T]$, em ondas sinusoidais (adaptado de (Oliveira, et al., 2012)).

Figura 4.7: Uso do conceito de integral no cálculo do valor médio de uma função $f(t)$ num intervalo de tempo $[0, T]$ (Oliveira, et al., 2012).

Figura 4.8: Representação da resposta estrutural com base em gráficos no domínio do tempo e no domínio da frequência. Utilização da TDF.

Figura 4.9: Programa DySSA1.0 em MATLAB. Cálculo dinâmico da barragem do Cabril para uma cota de água de 265 m (cota do coroamento: 297 m).

Figura 4.10: Análise dinâmica de uma consola de betão sujeita a uma aceleração na base, constante no tempo, igual à aceleração da gravidade.

Figura 4.11: Primeiros três modos de flexão da consola. Expressões de cálculo dos valores teóricos das frequências naturais de uma consola (teoria das peças lineares).

Figura 5.1: a) Modelo físico do tanque usado para a obtenção de valores experimentais. b) Cálculo do tanque com o programa DySSA1.0.

Figura 5.2: Planta, corte e alçado da malha do tanque utilizada no programa de cálculo DySSA 1.0.

Figura 5.3: Discretização em elementos finitos 3D, tipo cubo de 20 nós. Parâmetros de deformabilidade e de amortecimento utilizados no cálculo numérico (DySSA 1.0): betão, água e interfaces.

Figura 5.4: Espectros da resposta medida na consola, para as diferentes alturas de água. Comparação entre os resultados obtidos experimentalmente e os obtidos através do DySSA 1.0 .

Figura 5.5: Linhas de influência das frequências naturais considerando em função da altura de água. Comparação entre os resultados obtidos experimentalmente e do DySSA1.0. Configurações modais para o tanque vazio.

Figura 5.6: Espectro da resposta (DySSA 1.0). Configurações modais (modos aproximadamente estacionários) considerando a situação de tanque cheio (sem representação dos modos na água).

Figura 5.7: Gráficos dos amortecimentos modais no tanque para diferentes alturas de água. Comparação entre os valores globais calculados com o DySSA 1.0 para os diferentes modos e os valores das leis de Rayleigh dadas para a água, para a base e para as paredes do tanque.

Figura 5.8: Representação de três configurações modais para a situação de tanque cheio, mostrando, separadamente a estrutura de betão (paredes e base do tanque) e a água.

Figura 5.9: a) Barragem do Cabril. b) Cálculo dinâmico da barragem do Cabril com o programa DySSA 1.0.

Figura 5.10: Modelação do comportamento dinâmico da barragem do Cabril. Parâmetros de deformabilidade e de amortecimento considerados nos vários componentes do sistema barragem-fundação-albufeira (DySSA 1.0).

Figura 5.11: Distribuição das forças aplicadas no instante inicial.

Figura 5.12: Espectro da resposta calculada no ponto central do coroamento (DySSA1.0) para a situação de albufeira vazia. Configurações modais (modos estacionários).

Figura 5.13: Comportamento dinâmico da barragem do Cabril. Comparação entre resultados experimentais (obtidos com uma técnica de identificação modal por decomposição no domínio da frequência) e resultados numéricos obtidos com o programa DySSA 1.0 (adaptado de (Oliveira, et al., 2012)).

Figura 5.14: Primeiros modos de vibração da barragem do Cabril (com fenda) e respetivas frequências naturais obtidas com o modelo 3D do conjunto barragem-fundação-albufeira. Albufeira à cota 265m.

Figura 5.15: Análise dinâmica da barragem do Cabril. Modelo com fenda e albufeira à cota 265 m. Resultados do programa DySSA1.0.

Figura 5.16: Espectro da resposta medida na torre da tomada de água e configurações modais dos sete primeiros modos de vibração e respetivas frequências naturais obtidas numericamente (modelo em SAP 2000). Albufeira à cota 281,3m (Espada 2009) (Oliveira, et al., 2012).

Figura 5.17: Espectro calculado com o programa DySSA1.0, espectro medido na torre das tomadas de água e espectro medido na barragem (6Nov2011) (Oliveira, et al., 2012).

Figura 5.18: Modelo com fenda e sem fenda. Espectros da resposta e amortecimentos modais calculados com o programa DySSA1.0 (albufeira à cota 265m).

Figura 5.19: Representação dos primeiros modos da barragem calculados com o modelo sem fenda (DySSA1.0) para a situação de albufeira vazia.

SIMBOLOGIA

Latinas maiúsculas

\underline{A}	Matriz de estado
A_{PG}	Área de influência de um ponto de Gauss
A_{mp}	Amplitude dos espectros da resposta
\underline{B}	Matriz com as derivadas das funções de interpolação ($\underline{B}=\underline{L} \underline{N}$)
\underline{D}	Matriz de elasticidade
E	Módulo de elasticidade
E_c	Energia Cinética
$\underline{E}_{c,s}$	Vetor das energias cinética da estrutura
\underline{F}	Vetor global das forças
\underline{F}^e	Vetor elementar das forças
F_T	Transformada discreta de Fourier
G	Módulo de distorção (água 0)
\underline{I}	Matriz identidade
\underline{L}_E	Vetor dos fatores de participação modal na representação de estado.
\underline{J}	Matriz jacobiana
J	Jacobiano (determinante \underline{J})
K_n	Rigidez normal
K	Rigidez tangencial
K_v	Módulo de compressibilidade volumétrica (água: 2,07GPa)
\underline{L}	Matriz dos fatores de participação
\underline{L}_E	Matriz dos fatores de participação modal
\underline{T}	Matriz transformação
V_{PG}	Peso de um ponto de Gauss
W_{ext}	Trabalho das forças exteriores
W_{int}	Trabalho das forças interiores

Latinas minúsculas

\underline{a}_s	Vetor de aceleração sísmica
\underline{c}	Matriz de amortecimento global
\underline{c}^e	Matriz de amortecimento elementar
c_α	Coefficiente de amortecimento multiplicativo em relação a \underline{m}^e
c_β	Coefficiente de amortecimento multiplicativo em relação a \underline{k}^e
\underline{f}	Vetor de forças nodais

$\underline{\tilde{f}}_g$	Vetor das forças mássicas
\underline{k}	Matriz de rigidez global
\underline{k}^e	Matriz de rigidez elementar
m	Massa específica de um material (ton/m ³)
\underline{m}	Matriz de massa global
\underline{m}^e	Matriz de massa elementar
\underline{s}	Vetor com a distribuição espacial das acelerações sísmicas
\underline{u}	Vetor global de deslocamentos
\underline{u}^e	Vetor elementar de deslocamentos
$\underline{\dot{u}}$	Vetor de velocidades
$\underline{\ddot{u}}$	Vetor de acelerações
v	Velocidade de propagação das ondas de pressão no betão (3800 m/s)
\underline{y}	Vetor de velocidades na formulação de estado
$\underline{\dot{y}}$	Vetor de acelerações na formulação de estado
\underline{x}	Vetor de estado
\underline{x}^*	Vetor das coordenadas modais de estado
x_n	Coordenadas globais dos elementos finitos (n=1,2,3)
y_n	Coordenadas locais dos elementos finitos (n=1,2,3)

Gregas

$\underline{\tilde{\varepsilon}}$	Vetor das deformações
$\underline{\tilde{\sigma}}$	Vetor das tensões
	Peso volúmico de um material (kN/m ³)
n	Amortecimento modal
n	Frequências naturais
$\underline{\tilde{\lambda}}$	Vetor dos valores próprios da matriz de estado
$\underline{\tilde{\Phi}}$	Vetor das configurações modais, forma complexa
	Coefficiente de Poisson
	Ângulo de fase
fase	Ângulo de fase da transformada discreta de Fourier
	Amplitude das vibrações
$\underline{\quad}$	Matriz de vetores próprios da matriz de estado
$\underline{\tilde{\Phi}}$	Matriz com as velocidades das configurações normais

Introdução

1.1 Justificação e Enquadramento

Na análise estrutural e, em particular, na análise do comportamento de obras de grandes dimensões como pontes, viadutos, túneis e barragens, é essencial o desenvolvimento de modelos numéricos sofisticados que permitam simular da melhor forma o seu comportamento sob os diversos tipos de ações, estáticas ou dinâmicas. Estes modelos são essenciais no apoio às atividades de controlo de segurança ao longo da vida das obras, desde a fase de projeto até à fase de demolição (Costa & Rodrigues, 2001).

O desenvolvimento de modelos numéricos para o controlo da segurança de barragens, baseia-se geralmente na utilização do Método dos Elementos Finitos (MEF), o que conduz à elaboração de programas que permitem efetuar cálculos estáticos e dinâmicos considerando a hipótese de comportamento linear e não linear dos materiais.

Os novos desenvolvimentos ao nível da análise computacional de estruturas recorrendo a linguagens de alto nível como a do MATLAB só são possíveis devido à recente disponibilização de computadores pessoais com grande quantidade de memória RAM (neste trabalho foi utilizado um portátil com 8 Gbytes de RAM e um processador dual core de 2,53 GHz).

Para utilizar este tipo de programas, é necessário, aprofundar os conhecimentos sobre as formulações e métodos em que os mesmos se apoiam.

Na perspetiva de aprofundar os conhecimentos sobre modelação numérica com vista à análise do comportamento dinâmico de estruturas usando o MEF, foi desenvolvido no âmbito deste trabalho um programa de elementos finitos em MATLAB que permite efetuar a análise estática e dinâmica de estruturas tridimensionais que possibilita a realização de estudos de interação água estrutura. Este programa permite a leitura de dados a partir de ficheiros em Excel (.xls) e a saída de resultados também para Excel e ainda para formato ASCII adequado à leitura por programas de visualização gráfica de resultados como é o caso do Graphic Interface Design (GID) (Catalunha, 2012).

O aprofundamento dos conhecimentos nesta área da modelação numérica, tem como objetivo a sua implementação computacional e subsequente confrontação com resultados experimentais, com o objetivo de ser utilizado de forma eficiente, explorando todas as potencialidades do mesmo.

Neste trabalho é importante o confronto entre resultados numéricos e experimentais. Nesta perspectiva analisaram-se dois casos: i) o primeiro corresponde a uma parede em consola submetida à ação da água tendo sido efetuados ensaios dinâmicos, em laboratório, para diferentes alturas de água, com aplicação de impactos e medição de acelerações (ver **Figura 1.1.a**); ii) o segundo é referente à análise do comportamento da barragem do Cabril na qual estão a ser efetuadas medições de acelerações sob excitação ambiente e operacional (ver **Figura 1.1.b**).

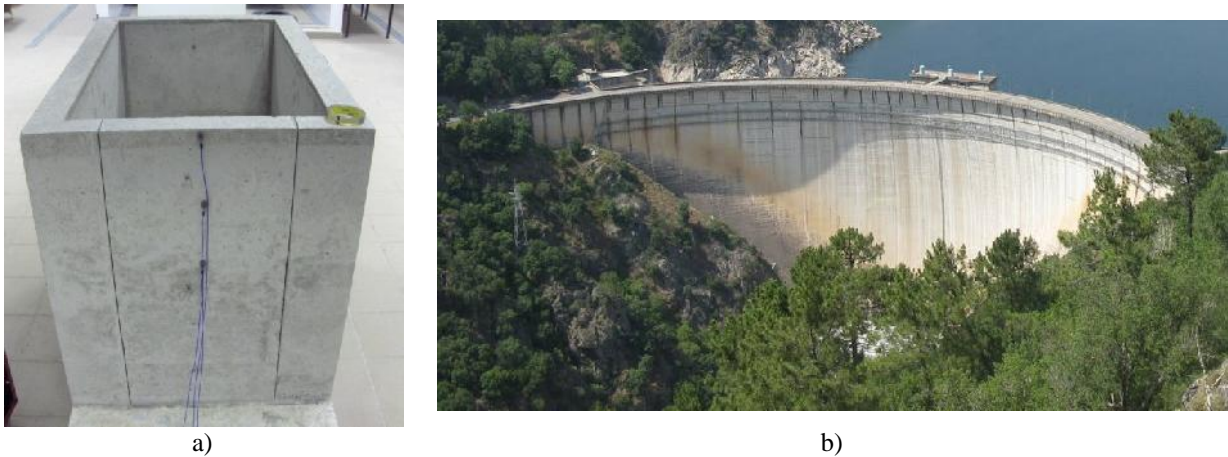


Figura 1.1: a) Modelo físico da parede em consola e do correspondente tanque para contenção de água; b) Barragem do Cabril.

Estes resultados observados, depois de serem devidamente tratados e analisados através de técnicas de identificação modal (no domínio da frequência), são comparados com os resultados dos modelos numéricos 3D como se pode ver na **Figura 1.2**.

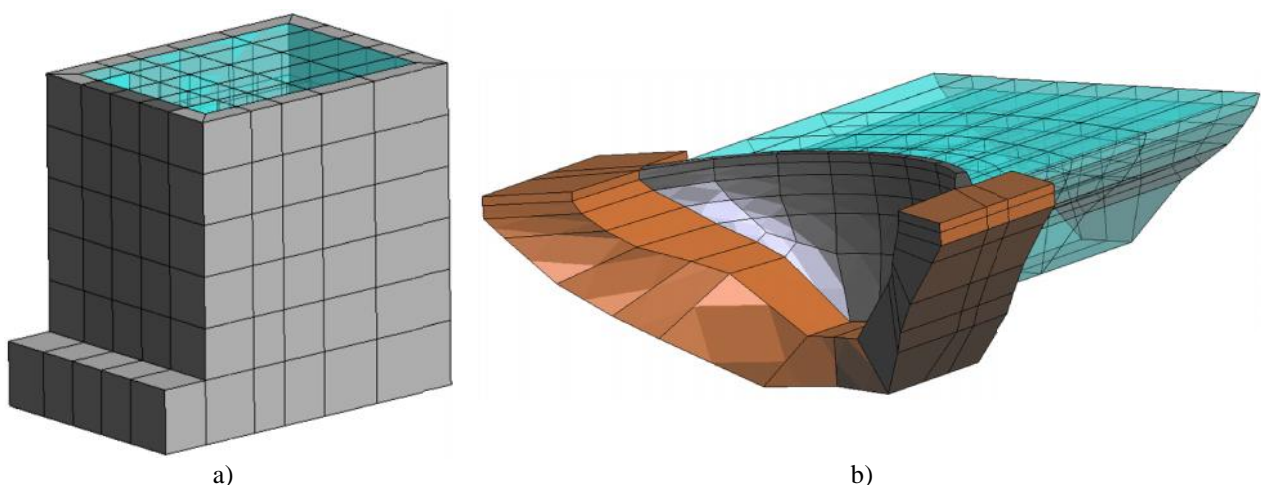


Figura 1.2: a) Malha EF3D da parede em consola e do tanque com água à cota máxima; b) Malha de EF3D da barragem do Cabril (sistema barragem-fundação-albufeira).

A utilização concomitante de resultados numéricos e observados permite ajustar parâmetros fundamentais relativos aos modelos numéricos (no caso em estudo, o módulo de elasticidade, coeficientes de amortecimento, rigidez tangencial e normal das fendas no caso do estudo do comportamento da barragem do Cabril e as condições de fronteira), para que os principais parâmetros modais (frequências próprias e respectivas configurações modais) calculados numericamente, convirjam com os identificados experimentalmente.

1.2 Objetivos da Dissertação

A presente dissertação tem como objetivo o desenvolvimento de um programa de elementos finitos 3D denominado Dynamic State Space Analysis (DySSA 1.0), utilizando o MATLAB, que permite o efetuar cálculo estático e dinâmico de estruturas usando para a utilização deste último do método dos espaços de estados (ver **Figura 1.3**) com a possibilidade de realização de cálculos no domínio do tempo (ação definida por histórias de forças aplicadas em vários graus de liberdade da estrutura (impactos) ou histórias de acelerações impostas na base (sismo)).

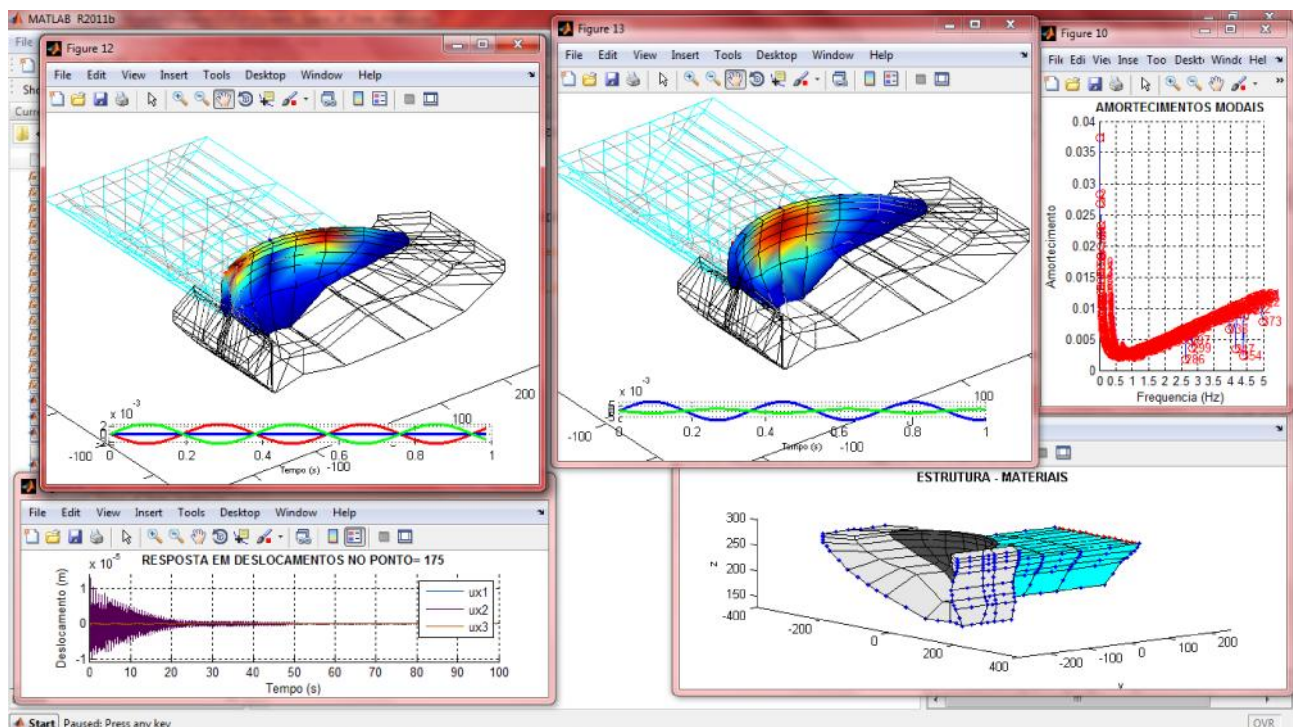


Figura 1.3: Programa DySSA 1.0. Exemplo de aplicação.

Para além do objetivo principal referido atrás também se pretende:

- Apresentar os fundamentos do MEF com vista à modelação numérica do comportamento estático e dinâmico de estruturas;
- Aprofundar os conhecimentos relativos à formulação do espaço de estados para o cálculo dinâmico de estruturas;
- Testar a fiabilidade do programa DySSA 1.0 comparando os resultados obtidos com soluções analíticas conhecidas para estruturas simples (exemplo: parede encastrada);
- Apresentar os fundamentos das metodologias de identificação modal;
- Compreender melhor o funcionamento de elementos finitos tipo cubo, tetraédros e de junta;
- Realçar a importância da utilização conjunta de resultados obtidos nos modelos numéricos com os resultados observados, para calibrar os modelos numéricos;
- Focar o interesse na utilização de modelos numéricos para a total compreensão das características das estruturas sendo esta uma forma importante na monitorização das mesmas;
- Utilizar resultados de ensaios de vibração ambiental na barragem do Cabril, com medição de acelerações no topo da barragem e junto à faixa de fendas na direção montante-jusante para caracterizar o seu comportamento dinâmico;
- Mostrar as potencialidades do DySSA 1.0 e da formulação dos espaços de estado para a análise dinâmica de uma parede em consola em contacto com água, através da realização de um cálculo dinâmico e da imposição de impactos na parede, considerando várias alturas de água, com representação gráfica 3D, com animação dos campos dos deslocamentos, modos e tensões no corpo da parede;
- Mostrar as potencialidades do DySSA 1.0 e da formulação do espaço de estados para a análise dinâmica de estruturas maciças, através da realização de um cálculo dinâmico da barragem do Cabril considerando várias alturas de água na albufeira, com representação gráfica 3D, com animação dos campos dos deslocamentos, modos e tensões no corpo da barragem durante o período de atuação do sismo;
- Utilizar resultados de ensaios de ultrassons para a determinação experimental do módulo de elasticidade do betão da barragem do Cabril e de uma parede em consola;
- Estimar as configurações modais e frequências próprias da barragem do Cabril, antes do aparecimento da faixa de fendas à cota 280 e comparar com os resultados correspondentes à barragem do Cabril na atualidade;
- Compreender a interação dinâmica água-estrutura para o caso do modelo físico de uma parede de betão em consola inserida num tanque com água e para o caso da barragem do Cabril analisada na perspetiva de um sistema Barragem-Albufeira-Fundação, considerando várias alturas de água (Oliveira, et al., 2012);

1.3 Estruturação do trabalho

Nesta secção está descrita a estrutura adotada neste trabalho com uma síntese dos tópicos abordados em cada um dos capítulos

***Capítulo 2-* COMPORTAMENTO DINÂMICO DE BARRAGENS DE BETÃO**

Este capítulo tem como principal objetivo a descrição de estruturas de grande importância para uma nação, nomeadamente as barragens de betão e das suas funcionalidades.

Neste capítulo apresentam-se os principais tipos de barragens de betão, assim como a descrição de um sistema barragem-fundação-albufeira. Apresentam-se ainda incidentes em barragens, devidos a sismos assim como uma breve descrição da barragem do Cabril, barragem na qual se vão basear os resultados experimentais para a elaboração desta dissertação.

***Capítulo 3-* DESENVOLVIMENTO DE UM PROGRAMA DE ELEMENTOS FINITOS EM MATLAB. FUNDAMENTOS DO MEF E TIPOS DE ELEMENTOS UTILIZADOS**

Neste capítulo são abordados os conceitos do MEF relativos à modelação do cálculo estático assim como uma descrição dos elementos finitos usados para o cálculo no DySSA 1.0 (elementos tipo cubo de 20 nós, elementos tetraédricos de 4 nós e elementos de junta de 16 nós).

É também apresentado neste capítulo o algoritmo relativo à componente estática do programa (DySSA 1.0) desenvolvido em MATLAB. Apresentam-se ainda alguns exemplos de estruturas simples, que foram usadas para testar a fiabilidade do programa desenvolvido relativamente ao cálculo estático, através da comparação dos resultados numéricos com soluções analíticas.

***Capítulo 4-* ANÁLISE DINÂMICA. FORMULAÇÃO NO ESPAÇO DE ESTADOS.**

Neste capítulo são abordados os conceitos relativos à modelação do cálculo dinâmico, indicando quais os dois métodos de cálculo, com principal ênfase em relação à formulação do espaço de estados na qual se baseia o programa DySSA1.0. Tal como ocorre no capítulo anterior também é apresentado o algoritmo do programa, mas relativamente à componente dinâmica. Apresentam-se ainda alguns exemplos de estruturas simples que foram usadas para testar a fiabilidade do programa desenvolvido relativamente ao cálculo dinâmico através da comparação dos resultados numéricos com soluções analíticas.

Capítulo 5- APLICAÇÕES

Este capítulo encontra-se dividido em duas partes.

A primeira corresponde ao cálculo da parede em consola. Nesta parte procede-se a uma análise do comportamento dinâmico da parede em consola, com o objetivo de:

- Comparar os resultados experimentais com os numéricos usando a formulação no espaço de estados e a formulação convencional com massas de água associadas;
- Compreender de que forma a variação das alturas de água modifica o comportamento da consola;
- Identificar quais as causas que geram os modos com configurações não estacionárias;

A segunda corresponde ao cálculo da barragem do Cabril. Nesta parte procede-se a uma análise do comportamento dinâmico da barragem do Cabril, com o objetivo de:

- Estudar e melhor compreender o sistema barragem-fundação-albufeira;
- Comparar os resultados obtidos através do sistema de medição de acelerações instalado no Cabril com os resultados numéricos
- Compreender de que forma a faixa de fendas existentes no Cabril á cota 280 alteram o normal comportamento da barragem. Estimar as frequências próprias e respetivas configurações modais para o caso da não existência das fendas;
- Identificação dos modos de vibração da Barragem do Cabril;

Capítulo 6- CONCLUSÕES E PERSPETIVAS FUTURAS.

Apresentam-se as principais conclusões do trabalho e perspetivam-se desenvolvimentos futuros.

Comportamento Dinâmico de Barragens de Betão

2.1 Considerações Iniciais

Na análise estrutural e, em particular, na análise de grandes estruturas como é o caso das barragens de betão, é fundamental desenvolver modelos numéricos que permitam simular o seu comportamento sob diversos tipos de ações, estáticas ou dinâmicas. Estes modelos permitem apoiar as atividades de controlo de segurança das obras ao longo da sua vida útil, desde a fase de projeto até ao final do período de exploração.

Atualmente, o controlo da segurança de grandes barragens assume uma grande importância em face das crescentes exigências de segurança e economia.

No entanto, as atividades de controlo de segurança requerem uma atualização contínua, não apenas em termos dos equipamentos de medição utilizados e das técnicas de armazenamento dos dados da observação, mas também em termos das aplicações computacionais para automatização das medições e *software* para análise dos dados (Oliveira, et al., 2012).

Desta forma a monitorização do comportamento destas obras é realizada através da comparação de resultados experimentais obtidos em sistemas de observação em contínuo e/ou através de ensaios de vibração e, de resultados numéricos obtidos em modelos de apoio à interpretação do comportamento observado, constituindo uma metodologia de grande interesse no âmbito do controlo de segurança destas obras.

A atividade de desenvolvimento de modelos numéricos adequados aos diversos tipos de estudos que se efetuam no âmbito do controlo da segurança, exige a utilização de programas de análise estrutural cada vez mais sofisticados, que muitas vezes se baseiam no método dos elementos finitos (M.E.F.). Com vista à análise do comportamento dinâmico de estruturas pelo M.E.F., foi desenvolvido no âmbito deste trabalho, um programa de elementos finitos que permite ter em conta a interação barragem-albufeira-fundação,

Na sequência do processo de comparação entre resultados numéricos e observados, com vista à calibração dos modelos para análise do comportamento dinâmico, podem ser desenvolvidos estudos de simulação do comportamento das obras sob ações sísmicas, com vista à reavaliação

da segurança tendo em conta a nova regulamentação. Estes estudos de reavaliação da segurança sob ações sísmicas podem, em alguns casos, levar a adotar medidas de modernização/reforço do sistema de observação instalado, nomeadamente complementando-o com dispositivos para medição em contínuo da resposta dinâmica das obras (Mendes, 2010).

2.2 Barragens

Uma barragem é uma barreira artificial num curso de água, executada com o objetivo de reter a água. As barragens têm como principais funções:

- Abastecimento de água às populações;
- Produção de energia elétrica;
- Controlo de cheias;
- Reservatório para irrigação;
- Navegação.

Neste capítulo são referidos os diversos tipos de barragens, nomeadamente as barragens de betão. Na **Figura 2.1** apresenta-se a distribuição geográfica das barragens portuguesas e imagens das principais barragens de betão de Portugal.



Figura 2.1: Distribuição geográfica das barragens em Portugal. Fotos de algumas das grandes barragens de betão portuguesas (Oliveira, 2012).

2.2.1 Tipos de Barragens de Betão e Principais Características

Segundo o ICOLD (International Commission on Large Dams) (CIGD, s.d.) , as barragens podem ser classificadas de acordo com:

- a sua altura e volume de água armazenado em pequenas barragens ou grandes barragens, uma grande barragem (ver **Figura 2.2**) possui uma altura superior a 15 m, medida desde a cota mais baixa da fundação até ao coroamento ou que o seu reservatório permita armazenar um volume de água superior a 3 milhões de metros cúbicos);



Figura 2.2: a) Barragem Rogun no Tadjiquistão (uma das maiores barragens do mundo com 335 m de altura e 660 m de comprimento no coroamento).

- o tipo de materiais utilizados na sua construção, podendo estas ser em aterro (terra ou blocos rochosos), betão ou alvenaria (**Figura 2.3**);



a)

b)

c)

Figura 2.3: a) Barragem do Beliche (Tipo aterro); b) Barragem de Castelo de Bode (Tipo betão); c) Barragem de Penide (Tipo alvenaria) (Wiki, s.d.).

- a sua geometria, podendo ser classificadas em (ver **Figura 2.4**):

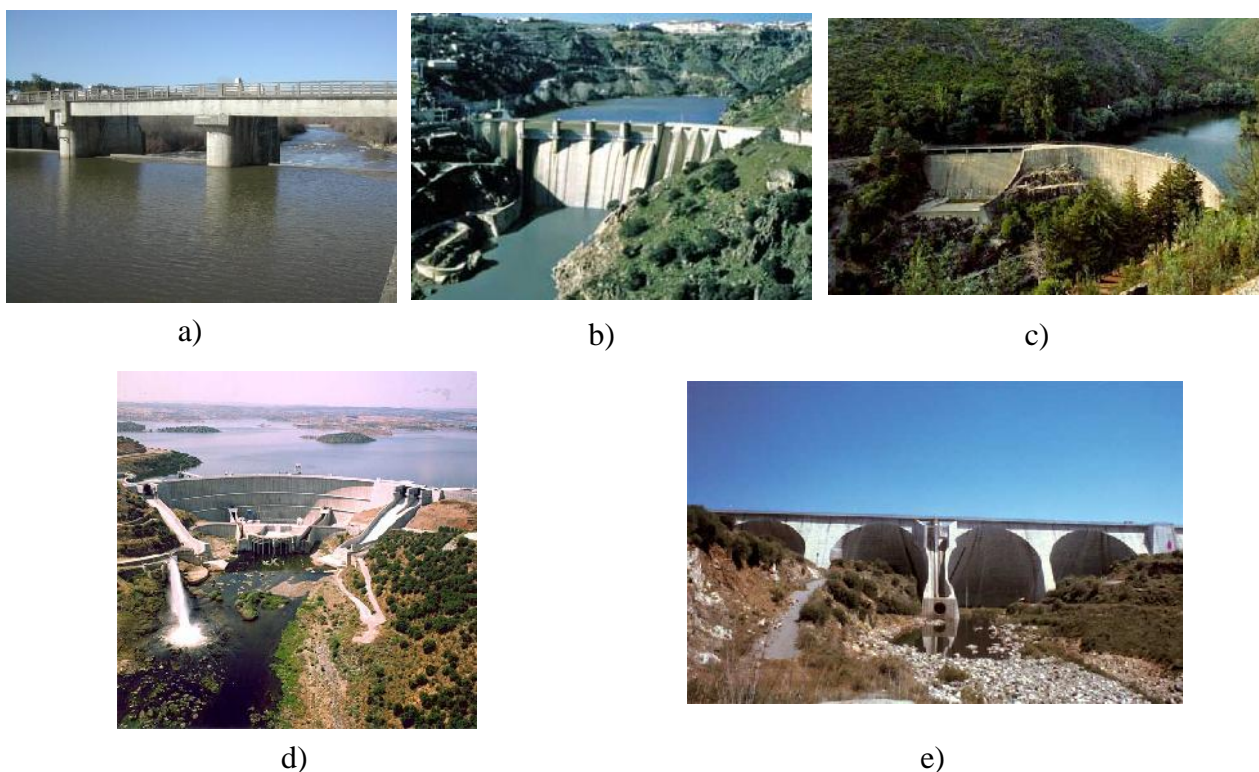


Figura 2.4: a) Barragem do Gameiro (gravidade); b) Barragem de Miranda (contraforte); c) Barragem do Alto Ceira (arco); d) Barragem do Alqueva (abóbada de dupla curvatura); e) Barragem de Odivelas (abóbadas múltiplas) (INAG, s.d.).

➤ **Barragens de gravidade (maciças ou vazadas);**

Estruturas com uma secção transversal típica aproximadamente triangular concebidas para resistir, apenas pelo seu peso, aos impulsos da água que retêm. Podem ser totalmente preenchidas (maciças) ou vazadas. Este tipo de barragens pode apresentar em planta uma forma retilínea, curvilínea ou uma forma quebrada. A escolha da forma depende essencialmente das condições do terreno, do sistema construtivo, das condições topográficas, etc...

➤ **Barragens de contrafortes;**

Estrutura do tipo gravidade aligeirada que para além da mobilização do seu peso, aproveita a existência de contrafortes (elementos estruturais transversais à secção do vale) para resistir ao impulso da massa de água sobre o paramento de montante por forma a aumentar a sua estabilidade. São adequadas para regiões de topografia suave com vales amplos e com rocha muito resistente para a fundação.

➤ **Barragens de arco-gravidade;**

Estrutura do tipo gravidade curvilínea que para além da mobilização do seu peso transmite o impulso da água para os encontros

➤ **Barragens em abóbada, com simples ou dupla curvatura;**

Estrutura com curvatura em planta, com a convexidade voltada para montante, concebida por forma a transmitir o impulso da água principalmente para os encontros e não para o fundo do vale. Este tipo de barragens podem ser simples (segundo um eixo) ou de dupla curvatura (dois eixos)

➤ **Barragens de abóbadas múltiplas.**

Conjunto de várias abóbadas.

2.2.2 Sistemas de Barragem-Fundação-Albufeira

No caso das grandes barragens em abóbada a construção é feita através de um sistema de blocos verticais, separados por juntas de contração.

O comportamento dinâmico global da estrutura (**Figura 2.5**) é significativamente condicionado pela interação água-estrutura e possibilidade de ocorrência de movimentos relativos entre blocos e ao nível de outras discontinuidades, como, por exemplo, fissuras no corpo da obra ou diaclases e falhas geológicas no maciço rochoso de fundação (Oliveira, 2000).

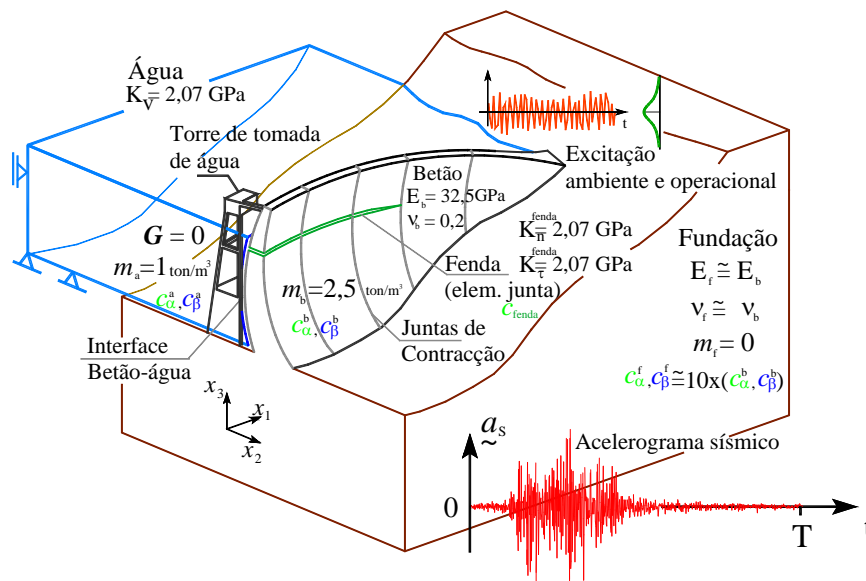


Figura 2.5: Sistema barragem-fundação-albufeira (adaptado de Oliveira et al., 2012).

O comportamento do maciço rochoso de fundação é condicionado pela existência das várias famílias de diaclases e de eventuais falhas geológicas, em geral preenchidas com materiais muito deformáveis e de baixa resistência (Oliveira, 2000). Durante a ocorrência de ações sísmicas podem-se registar deformações no maciço de fundação o que leva ao aparecimento de danos estruturais na zona de inserção na fundação.

É necessário ter em atenção que a acumulação de sedimentos no fundo pode ter um efeito de acréscimo de massa.

Em face da presença da água é de esperar um aumento das subpressões no interior das várias superfícies de descontinuidade (fendas, diaclases e juntas de construção com problemas ao nível das lâminas de estanqueidade) devido aos movimentos de abertura/fecho durante a resposta dinâmica das obras (Uchita, et al., 2005).

Quanto à interação dinâmica com a albufeira, é de salientar a importância do nível da albufeira na resposta global do conjunto *barragem-fundação-albufeira*, a subida do nível da albufeira pode desencadear fenómenos sísmicos - sismicidade induzida (Chen, 2004).

A interação dinâmica com possíveis estruturas anexas ligadas diretamente à estrutura deve ser tida em conta, nomeadamente a interação com a central de produção de energia quando esta se situa no pé de jusante e com as próprias torres de tomada de água (como no caso da Barragem do Cabril, ver capítulo 5).

2.3 Observação do Comportamento Dinâmico de Barragens de Betão

De uma maneira geral as barragens de betão apresentam uma boa resistência estrutural, essencialmente por serem projetadas para as elevadas forças horizontais devidas à pressão hidrostática e pelo facto de serem as primeiras estruturas em que existe uma sistematização dos processos de projeto em relação às ações sísmicas. Porém, para sismos com elevados valores de aceleração podem ocorrer danos importantes capazes de afetar a funcionalidade das obras. Existem referências a alguns incidentes que envolvem o aparecimento de fissuras e deslocamentos permanentes, bem como a problemas associados à fundação, tais como percolação anómala por rotura das cortinas de impermeabilização, escorregamento de blocos do maciço rochoso formado a partir das descontinuidades (falhas e diaclases).

A partir da análise dos referidos incidentes tem-se constatado que as patologias e anomalias detetadas advêm por vezes de hipóteses desadequadas admitidas ao nível do projeto e da construção daquelas obras. Assim, para mitigar esta situação é imperativo obter mais e melhor informação experimental, que permita caracterizar a resposta destas obras quando solicitadas por eventos sísmicos, bem como obter mais elementos que permitam caracterizar melhor a própria ação sísmica.

2.3.1 Incidentes em barragens

As causas mais comuns que promovem incidentes em barragens são (Wiki, s.d.):

- Falhas nas técnicas de construção e na escolha dos materiais utilizados, exemplo: Barragem de Gleno em Itália (**Figura 2.6**), de abobada múltipla em betão. Inicialmente projetada como uma barragem de gravidade com uma ligeira curvatura, mas foi alterada para uma barragem de

arco múltipla pelo cliente para economizar dinheiro. O fracasso da barragem foi atribuído a muitos aspetos da sua construção, mão-de-obra em última análise de materiais. O betão não se encontrava completamente curado quando o reservatório foi cheio. A ligação Barragem-fundação era quase inexistente. Em 1923 ano da sua finalização a barragem não aguentou com as pressões hidrostáticas e colapsou.

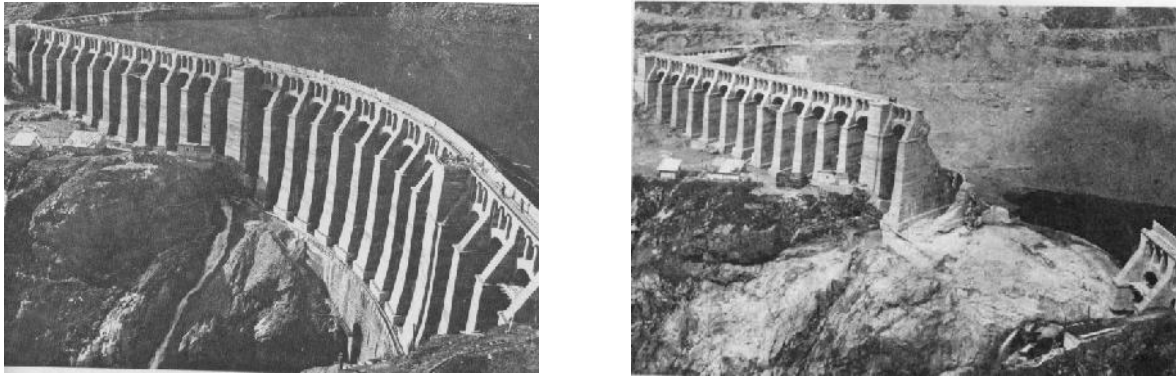


Figura 2.6: Barragem de Gleno antes e depois do incidente

- Instabilidade geológicas causadas pelas variações das cotas de água na albufeira, exemplo: Barragem de Malpasset (barragem de betão, em abóbada) em França 1988; Barragem de Vajont (barragem em abóbada de betão) em Itália 1963;
- Falta de manutenção, exemplo: Barragem de Saint Francis nos EUA em 1928 (barragem em arco de gravidade em betão); Barragem Val di Stava em Itália em 1985 (aterro);
- Grande enchente na albufeira apos grandes chuvadas, exemplo: Barragem de Campos de Goytacazes no Brasil em 2012 (aterro), Barragem de Delhi (barragem de gravidade em betão) nos EUA em 2012;
- Sismos, exemplo: Barragem de Fujinuma (aterro) no Japão destruída apos o sismo Tohoku em 2011.

2.4 Barragem do Cabril

A barragem do Cabril (ver **Figura 2.7**) é a mais alta barragem de Portugal. Trata-se de uma barragem em abóbada de dupla curvatura, localizada no distrito de Castelo Branco no rio Zêzere e encontra-se em funcionamento desde 1954.

É uma barragem em betão, com uma altura máxima acima da fundação de cerca de 132 m; a cota do coroamento é de 297 m e o desenvolvimento entre encontros é de 290 m, encontra-se fundada num maciço granítico e tem a particularidade de apresentar uma zona de maior espessura ao nível do coroamento.



Figura 2.7: Barragem do Cabril, vista da albufeira vazia e da torre de tomada de água.

Este aumento na espessura do coroamento não foi contabilizado no projeto, o que levou ao aparecimento de uma significativa fissuração horizontal no paramento de jusante, situada numa faixa entre os 15 e os 30 m abaixo do coroamento, como pode ser observado na **Figura 2.8**, causada pelas trações provocadas pelo aumento de espessura do coroamento (Oliveira, 2000). A consideração da zona fissurada no cálculo numérico é essencial para o estudo do correto comportamento dinâmico da barragem, como se poderá ver no Capítulo 5.

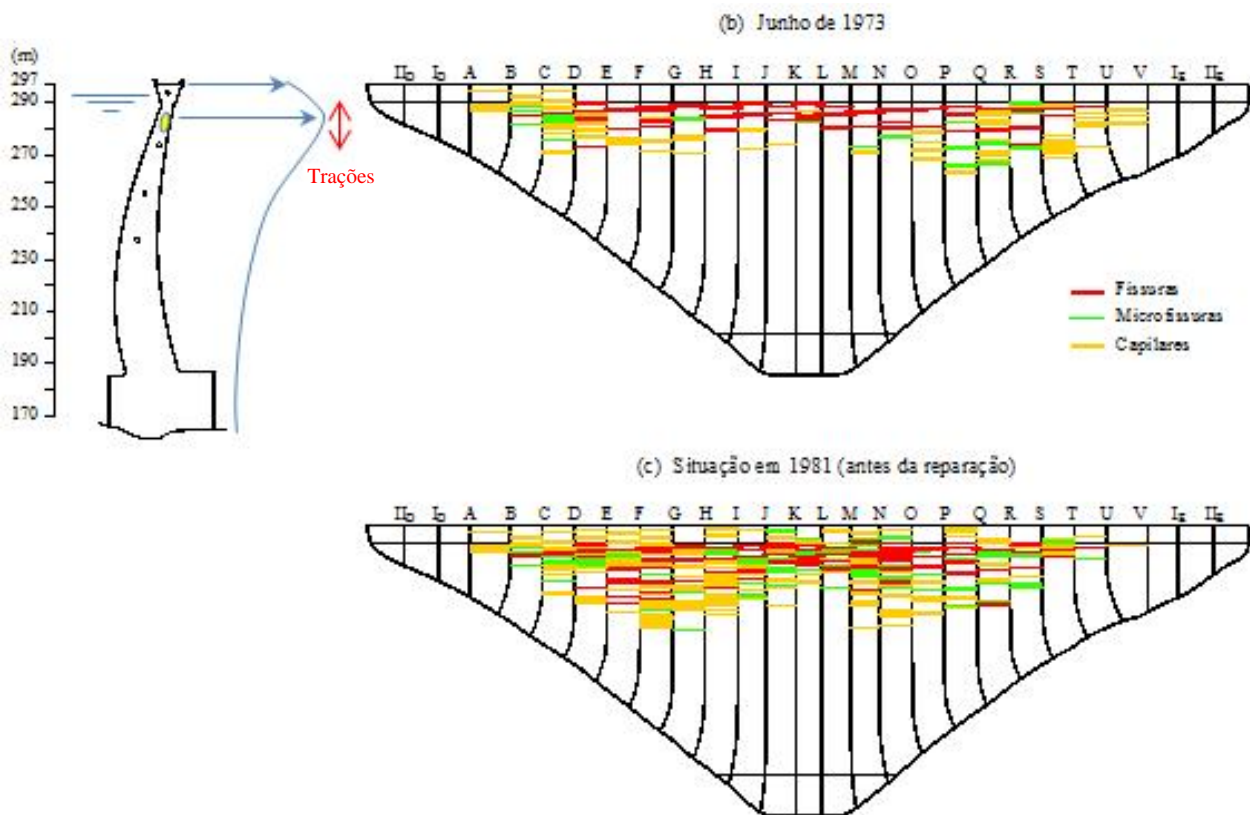


Figura 2.8: Evolução ao longo dos anos da distribuição das fendas no alçado de jusante na barragem do Cabril. Esquema da deformação da barragem que levou ao aparecimento das fendas no paramento a jusante (Oliveira, 2012).

O sistema da barragem do Cabril é constituído por quatro órgãos de grande importância, nomeadamente, a barragem, a central, a torre das tomadas de água e o sistema de evacuação de cheias (**Figura 2.9**).

A torre das tomadas de água é uma estrutura em betão armado com uma altura de 132 m que se encontra ligada ao coroamento através de um passadiço que é materializada por intermédio de um apoio vertical com uma junta que permite os deslocamentos relativos entre a barragem e o passadiço na direção montante-jusante.

A torre permite o controlo das comportas das duas tomadas de água para os grupos e da descarga de fundo. A parte inferior da torre engloba as tomadas propriamente ditas com grades metálicas finas na entrada de água para os grupos e a descarga de fundo com uma grade de betão armado na entrada.

É de notar que, o funcionamento dos grupos de produção, para determinadas situações de funcionamento, excitam de forma significativa a torre das tomadas de água. Este facto justifica o interesse da consideração do comportamento dinâmico da torre no estudo do sistema.

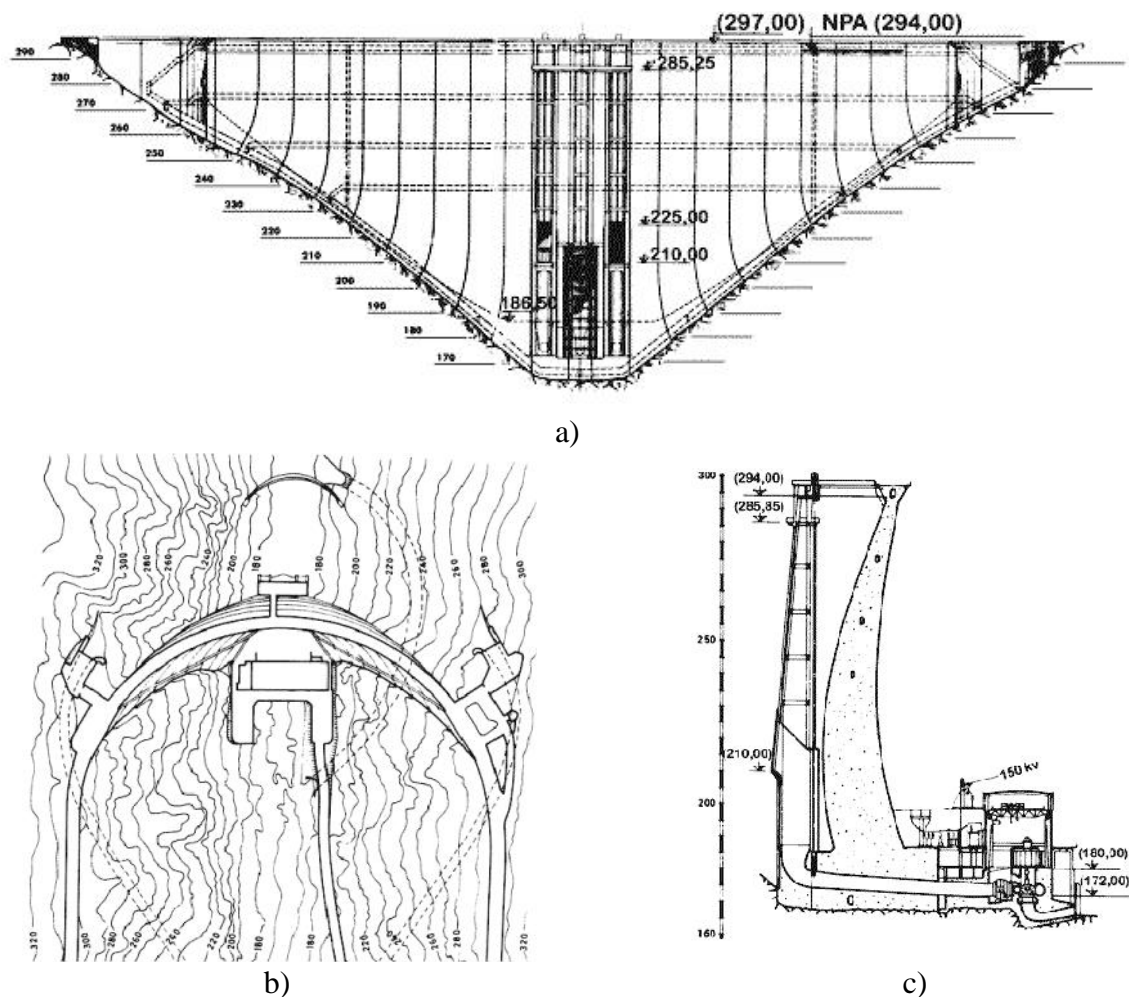


Figura 2.9: Barragem do Cabril: a) Vista de montante; b) Planta; c) Perfil transversal (INAG, s.d.).

2.4.1 Medição de Acelerações na Barragem do Cabril

No âmbito do programa de investigação do LNEC, foi desenvolvido em 2008 um sistema pioneiro de monitorização dinâmica em contínuo instalado na barragem do Cabril, com o apoio financeiro da Fundação para a Ciência e Tecnologia (FCT) e da EDP, e no âmbito do Plano Nacional de Re-Equipamento Científico. Este sistema, constituído por 16 acelerómetros uniaxiais e 3 triaxiais, permite a medição de acelerações em contínuo, com uma frequência de amostragem de 1000 Hz, na zona superior da barragem e nos encontros, como se pode observar na **Figura 2.10**.

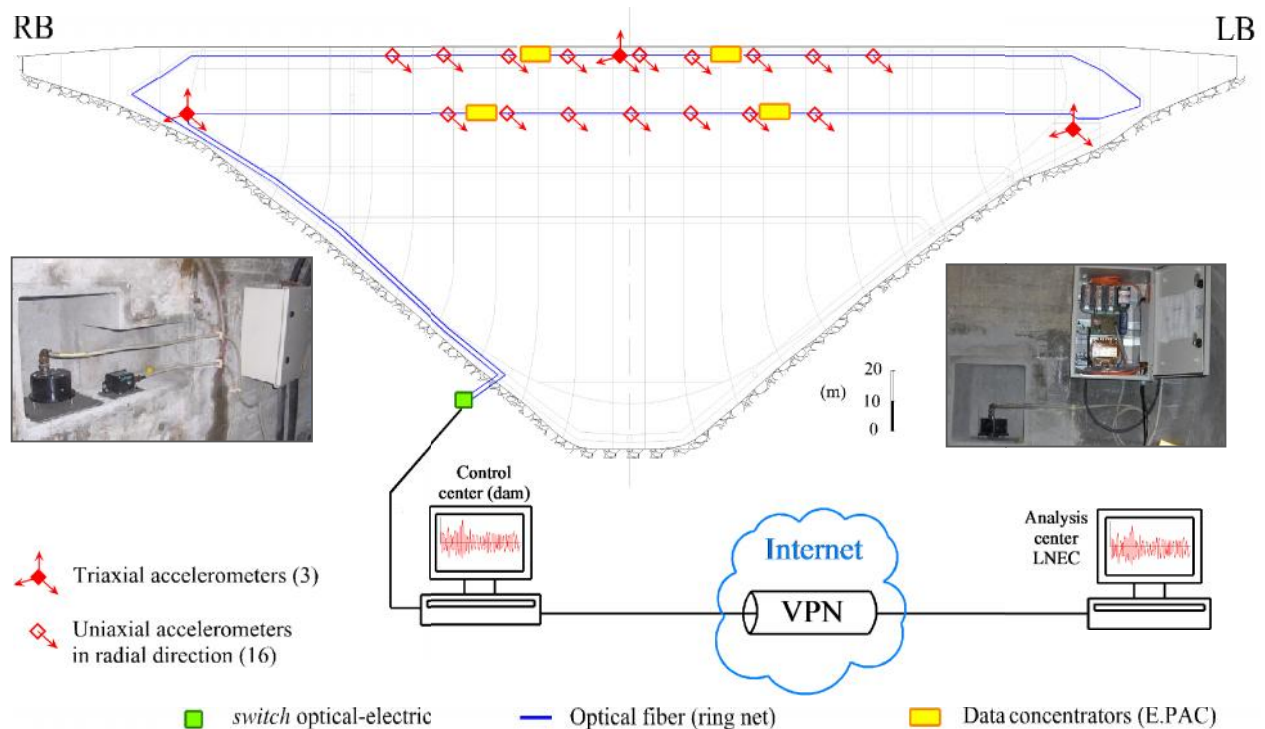


Figura 2.10: Principais componentes do sistema de monitorização em contínuo do comportamento dinâmico da barragem do Cabril (Oliveira, 2011).

Os principais parâmetros de configuração deste sistema são definidos de modo a ter uma alta gama dinâmica, capaz de medir continuamente e com precisão a resposta dinâmica da barragem sob diferentes ações: excitação ambiente, excitação operacional e ações sísmicas de diferentes magnitudes (Oliveira, et al., 2012).

Os acelerómetros encontram-se ligados a um sistema modular composto por unidades de aquisição e de digitalização, que são controlados por quatro concentradores de dados que recebem os dados que são enviados através de uma rede de fibra ótica (intranet) para um computador instalado na central. Os dados recolhidos são armazenados e processados continuamente utilizando procedimentos automáticos de identificação modal para armazenar as

principais frequências naturais, modos de vibração (amplitude e ângulo de fase para cada ponto de medição) e amortecimento modal.

Na **Figura 2.11** apresentam-se os espectros correspondentes aos acelerogramas medidos com o sistema de observação em contínuo instalado no dia 3 de novembro de 2011, entre as 22 e as 23h, com o nível da albufeira à cota de 264,3 m (grupos em funcionamento). Da análise deste espectro, destacam-se as elevadas amplitudes de vibração que ocorreram próximo do centro na galeria superior, nomeadamente nos pontos 4, 5 e 6, sendo identificados cinco importantes picos de maior amplitude que surgem para as frequências de 2,34, 2,53, 2,64, 2,73 e 2,76 Hz. No intervalo de frequências situado entre 0,50 a 2,00 Hz, são identificados também picos espectrais relacionados com o comportamento dinâmico da torre das tomadas de água (Oliveira, et al., 2012).

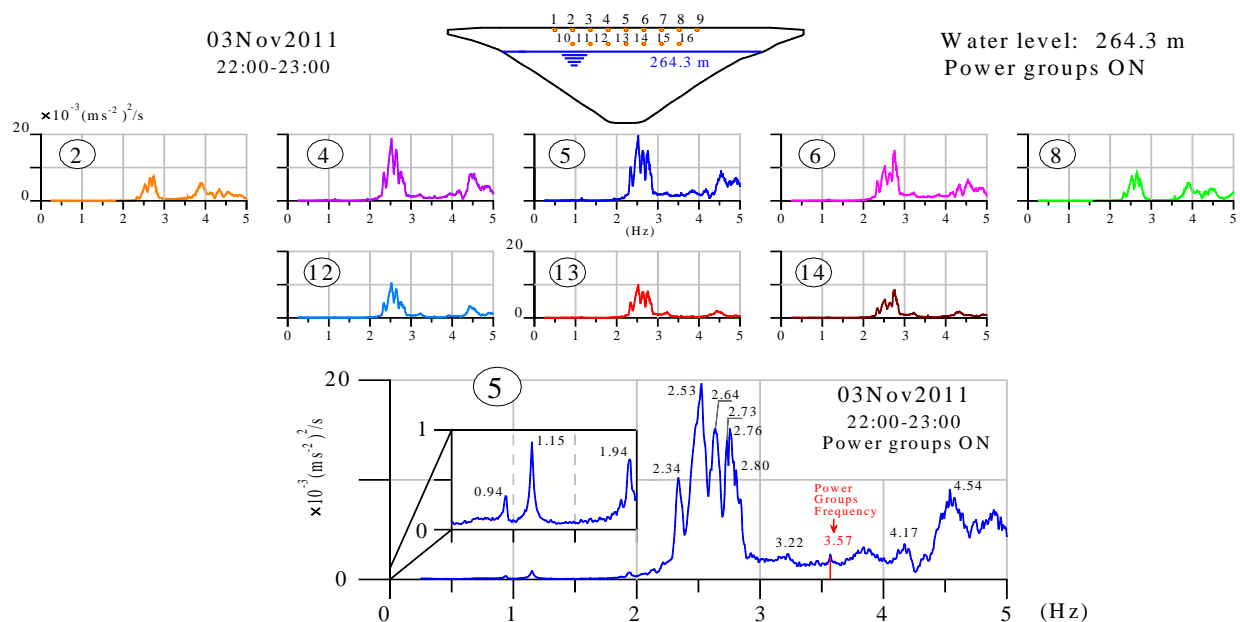


Figura 2.11: Análise espectral resultante das acelerações obtidas através do sistema de monitorização dinâmica instalado na barragem do Cabril. Dia 3 de Novembro de 2011, cota da água 264,3 m (Oliveira, et al., 2012).

2.5 Considerações Finais

Neste capítulo descreveu-se a importância, do controlo de segurança de barragens e estruturas auxiliares e a importância de elaboração de métodos de cálculo numérico que permitam descrever o comportamento das mesmas.

Estas atividades de controlo de segurança, envolvem a instalação de adequados sistemas de observação, a realização de inspeções visuais de modo a detetar antecipadamente falhas

estruturais, e o desenvolvimento de modelos de interpretação e previsão do comportamento das obras em exploração, de forma a prevenir situações de acidente ou incidente.

Atualmente, com as crescentes preocupações em termos de segurança das estruturas sob ações sísmicas, tem aumentado o interesse em desenvolver sistemas que visam a observação e a análise do comportamento dinâmico destas estruturas. Com estes sistemas é possível obter mais informação sobre o estado global das barragens e respetivas estruturas auxiliares, o que permite complementar as informações resultantes das outras atividades de controlo de segurança (Oliveira, et al., 2012).

3

Desenvolvimento de um Programa de Elementos Finitos em Matlab. Fundamentos do MEF e Tipos de Elementos Utilizados

3.1 Considerações Iniciais

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é um método numérico de resolução de equações diferenciais cuja aplicação à análise estrutural é baseada na discretização da estrutura em elementos (finitos). A origem do desenvolvimento deste método ocorreu em meados do século XX, e a sua generalização tornou-se possível somente com a evolução dos computadores.

3.2 Fundamentos do MEF. Elementos 3D

Para ilustrar os fundamentos do M.E.F 3D descrevem-se os vários passos de cálculo numa sequência de etapas.

A. Escolha da aproximação a adotar quanto ao tipo de equilíbrio

Tratando-se de estruturas em 3D tal implica que cada ponto da estrutura possui 3 graus de liberdade (N_{GL}), como tal, em cada ponto há que determinar 3 componentes de deslocamento, 6 componentes de deformação e 6 componentes de tensão:

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} ; \quad \underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} ; \quad \underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

- \underline{u} - Vetor de deslocamentos;
- $\underline{\varepsilon}$ - Vetor de extensões;
- $\underline{\sigma}$ - Vetor de tensões;

B. Comportamento do material. Matriz de Elasticidade \underline{D}

Admitindo a hipótese de que os materiais são elásticos e isotrópicos, para o caso 3D a matriz de elasticidade assume a seguinte forma (Chen & Saleeb, 1994):

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} K_v + \frac{4}{3}G & K_v - \frac{2}{3}G & K_v - \frac{2}{3}G & & & \\ & K_v + \frac{4}{3}G & K_v - \frac{2}{3}G & & & \\ & & K_v + \frac{4}{3}G & & & \\ & & & K_v + \frac{4}{3}G & & \\ & & & & G & 0 & 0 \\ & \text{sim.} & & & G & 0 & 0 \\ & & & & & G & 0 \\ & & & & & & G \end{bmatrix}}_{\underline{D}} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} ; \quad \begin{aligned} K_v &= \frac{E}{3(1-2\nu)} \\ G &= \frac{E}{2(1+\nu)} \end{aligned} \quad (3.2)$$

- K_v - Módulo de compressibilidade volumétrica;
- G - Módulo de distorção;
- E - Módulo de elasticidade;
- ν - Coeficiente de Poisson (0.2)

C. Escolha do tipo de elementos finitos

Para o caso de estruturas 3D, há que adotar uma discretização em elementos finitos com três graus de liberdade (G.L) por nó. No caso do programa DySSA 1.0 foram considerados elementos tipo cubo de 20 nós e tetraédricos de 4 nós como os que se mostram na **Figura 3.1**.

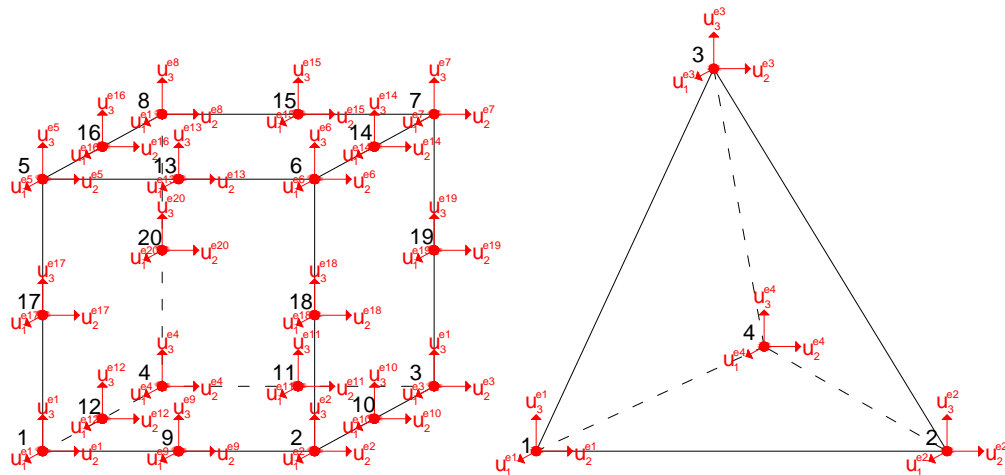


Figura 3.1: Elementos finitos com 3 G.L. de translação por nó para a análise de estruturas 3D.

Para os elementos o deslocamento em cada ponto P do seu interior é obtido como uma média ponderada dos deslocamentos dos seus nós, sendo os fatores de ponderação correspondentes aos valores das funções de interpolação nesse ponto. Como tal, as componentes de deslocamento são dadas por:

$$u_i = \sum_{j=1}^{NP^e} N_j u_i^{ej} \quad (i=1,2,3) \quad (1) \quad (3.3)$$

O que escrito na forma matricial corresponde à equação que traduz a aproximação fundamental do M.E.F. onde NP^e corresponde ao número de pontos do elemento.

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}_{(3 \times 1)_P} = \underbrace{\begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & N_{NP^e} & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_{NP^e} & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & N_{NP^e} \end{bmatrix}_N \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u_1^{e1} \\ u_2^{e1} \\ u_3^{e1} \\ \vdots \\ u_1^{eNP^e} \\ u_2^{eNP^e} \\ u_3^{eNP^e} \end{bmatrix}}_{(NP^e \times 1)} \quad (3.4)$$

N -Matriz das funções de interpolação.

D. Discretização em elementos finitos

Ver secção 3.3 – tipos de elementos considerados

⁽¹⁾ Os valores N_j são as funções de interpolação no ponto P do interior do elemento finito, sendo que a sua soma é igual a 1.

E. Estabelecimento da equação de equilíbrio de um elemento finito recorrendo ao Princípio dos Trabalhos Virtuais

O Princípio dos Trabalhos Virtuais (P.T.V.) é um princípio energético segundo o qual é condição necessária e suficiente para que um corpo elástico esteja em equilíbrio, que o trabalho de todas as forças exteriores seja igual ao trabalho correspondente às forças interiores, para todo o campo de deslocamentos virtuais $\underline{u}_v = u_v(x_1, x_2, x_3)$, ou seja,

$$W_{\text{int}} = W_{\text{ext}} \Leftrightarrow \int_V \underline{\varepsilon}_v^T \cdot \underline{\sigma} \, dV = \int_V \underline{u}_v^T \cdot \underline{f} \, dV, \quad \forall \underline{u}_v \quad (3.5)$$

W_{int} - Trabalho das forças interiores

W_{ext} - Trabalho das forças exteriores

\underline{f} - Vetor das forças

Sabendo que em cada ponto do interior do elemento finito as equações de compatibilidade ($\underline{\varepsilon} = \underline{L} \cdot \underline{u}$) e as equações constitutivas ($\underline{\sigma} = \underline{D} \cdot \underline{\varepsilon}$) têm que ser verificadas, e tendo em conta que as mesmas podem ser escritas usando a aproximação fundamental do M.E.F. então, estas equações podem ser introduzidas na expressão geral do P.T.V. de modo a obter-se a equação de equilíbrio de um elemento finito formulado em deslocamentos na forma:

$$\underbrace{\underline{k}^e}_{(N_{\text{GL}}^e \times N_{\text{GL}}^e)} \cdot \underbrace{\underline{u}}_{(N_{\text{GL}}^e \times 1)} = \underbrace{\underline{F}^e}_{(1 \times N_{\text{GL}}^e)} \quad (3.6)$$

\underline{k}^e - Matriz rigidez elementar;

\underline{F}^e - Vetor elementar das forças;

onde $N_{\text{GL}}^e = \text{GL} \times \text{NP}^e$. Para o caso de estruturas em 3D $\text{GL}=3$

Considerando toda a estrutura, a equação de equilíbrio global é semelhante e obtém-se por sobreposição ou montagem das matrizes elementares anteriores.

$$\underbrace{\underline{k}}_{(N_{\text{GL}} \times N_{\text{GL}})} \cdot \underbrace{\underline{u}}_{(N_{\text{GL}} \times 1)} = \underbrace{\underline{F}}_{(1 \times N_{\text{GL}})} \quad (3.7)$$

\underline{k} - Matriz rigidez global;

\underline{F} - Vetor das forças global;

e $N_{\text{GL}} = \text{GL} \times \text{NP}$.

F. Coordenadas Globais e Coordenadas Locais

Na programação do método dos elementos finitos é conveniente utilizar o conceito de elemento finito “master” o qual é definido como um quadrado que num sistema de eixos local tem vértices com coordenadas -1 e 1 (ver **Figura 3.2**).

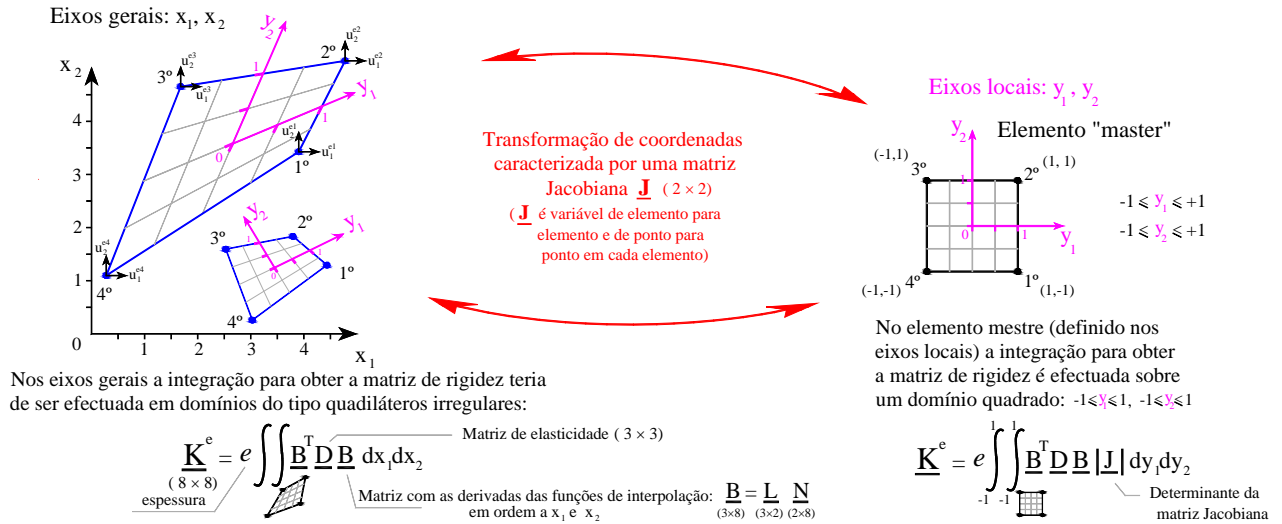


Figura 3.2: Esquema de mudança de referencial (Oliveira, 2012).

G. Coordenadas globais e coordenadas locais. Transformação de coordenadas

a) Funções de interpolação em coordenadas locais

É conveniente proceder à transformação de coordenadas globais (x_1, x_2, x_3) para um sistema de coordenadas locais (y_1, y_2, y_3) em que todos os elementos finitos são isoparamétricos com coordenadas entre -1 e 1, para facilitar a análise de elementos do mesmo tipo mas com geometrias diferentes. Assim, as funções de interpolação são facilmente definidas em termos destas coordenadas locais.

A continuação deste ponto encontra-se no capítulo referente aos elementos finitos (secção 3.3)

b) Matriz Jacobiana da transformação de coordenadas e respetivo determinante

A relação entre as coordenadas gerais e locais pode ser estabelecida através da matriz jacobiana. Em cada ponto P do interior de um elemento finito 3D, é necessário verificar a seguinte relação:

$$\begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix}}_{\underline{J}} \cdot \begin{bmatrix} dy_1 \\ dy_2 \\ dy_3 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Dir. eixo local y_1
Dir. eixo local y_2
Dir. eixo local y_3

vector das coord. globais
vector das coord. locais

\underline{J} - Matriz Jacobiana

O determinante da matriz Jacobiana $|\underline{J}|$ designa-se por jacobiano e tem de ser maior que 0.

Para se poder obter a matriz Jacobiana em cada ponto de um elemento finito, é necessário conhecer as coordenadas globais dos pontos nodais e as derivadas parciais das funções de interpolação em ordem às coordenadas locais. A matriz Jacobiana é dada pelo seguinte produto matricial:

$$\underbrace{\underline{\mathbf{J}}}_{(GL \times GL)} = \underbrace{\begin{bmatrix} X_1^{e1} & \dots & X_1^{eNP^e} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{GL}^{e1} & \dots & X_{GL}^{eNP^e} \end{bmatrix}}_{(GL \times NP^e)} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial N_1}{\partial y_{GL}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial N_{NP^e}}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial N_{NP^e}}{\partial y_{GL}} \end{bmatrix}}_{(NP^e \times GL)} \quad (3.9)$$

H. Cálculo da matriz de rigidez elementar

A matriz de rigidez de um elemento finito é calculada como o integral de uma matriz, dada pelo produto $\underline{\mathbf{B}}^T \underline{\mathbf{D}} \underline{\mathbf{B}}$, estendido ao volume do elemento finito,

$$\underline{\mathbf{k}}^e = \int_V \underline{\mathbf{B}}^T \underline{\mathbf{D}} \underline{\mathbf{B}} dx_1 dx_2 dx_3 \quad (3.10)$$

$\underline{\mathbf{B}}$ - Matriz que contém as derivadas das funções de interpolação ($\underline{\mathbf{B}} = \underline{\mathbf{L}} \underline{\mathbf{N}}$)

$$\underline{\mathbf{B}}_{(6 \times NP^e)} = \underline{\mathbf{L}}_{(6 \times 3)} \underline{\mathbf{N}}_{(3 \times NP^e)} = \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \end{bmatrix}}^{\text{Operador diferencial}} \cdot \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & N_{NP^e} & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_{NP^e} & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & N_{NP^e} \end{bmatrix}_{PG} \quad (3.11)$$

A expressão (3.10) pode ainda ser reescrita em termos de coordenadas locais ($dx_1 dx_2 dx_3 = |J| dy_1 dy_2 dy_3$):

$$\underline{\mathbf{k}}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underline{\mathbf{B}}^T \underline{\mathbf{D}} \underline{\mathbf{B}} |J| dy_1 dy_2 dy_3 \quad (3.12)$$

I. Integração numérica da matriz de rigidez elementar pelo método de Gauss

Em geral, não é possível calcular analiticamente o integral da equação anterior, recorre-se desta forma ao método numérico de Integração de Gauss para efetuar o cálculo, que consiste na transformação do volume do elemento em vários incrementos volúmicos dependentes da

localização dos pontos de Gauss assim como do número dos mesmos considerados para o cálculo. Deste modo, o cálculo numérico da matriz de rigidez \underline{k}^e da equação (3.12) é dado pelo seguinte somatório em relação ao número de pontos de Gauss (N_{PG}):

$$\underline{k}^e = \sum_{i=1}^{N_{PG}} \underline{B}_i^T \underline{D} \underline{B}_i |J_i| V_i \quad (3.13)$$

J. Determinação da matriz \underline{B}

Para concluir o cálculo da matriz de rigidez elementar falta apenas conhecer a matriz \underline{B} .

Esta matriz, definida em cada ponto, contém as derivadas parciais das funções de interpolação em relação às coordenadas globais (x_1, x_2, x_3) . Como se mostrou anteriormente em (3.11), a matriz \underline{B} é obtida (tendo como base a equação de compatibilidade) através da aplicação do operador diferencial \underline{L} à matriz das funções de interpolação, isto é, $\underline{B} = \underline{L} \cdot \underline{N}$. As derivadas parciais das funções de interpolação em ordem às coordenadas globais obtêm-se através do produto da matriz das derivadas em ordem às coordenadas locais e da inversa da matriz Jacobiana:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial N_1}{\partial x_{GL}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial N_{NP^e}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial N_{NP^e}}{\partial x_{GL}} \end{bmatrix}_{PG} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial N_1}{\partial y_{GL}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial N_{NP^e}}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial N_{NP^e}}{\partial y_{GL}} \end{bmatrix}_{PG} \times \underline{J}_{PG}^{-1} \quad (3.14)$$

Assim, a matriz de rigidez \underline{K}_e é uma matriz quadrada com um número de linhas e colunas igual ao número total de graus de liberdade do elemento.

K. Montagem da matriz de rigidez global e introdução das condições de fronteira

Uma vez calculadas as matrizes de rigidez elementares, a matriz de rigidez global \underline{K} obtém-se através da sobreposição das várias matrizes de rigidez elementares. Este processo de sobreposição (ou montagem) exige o estabelecimento da correlação entre os graus de liberdade locais de cada elemento (G.L.E.) e os graus de liberdade globais (G.L.G.) de toda a estrutura.

Na **Figura 3.3** apresenta-se esquematicamente um processo de montagem.

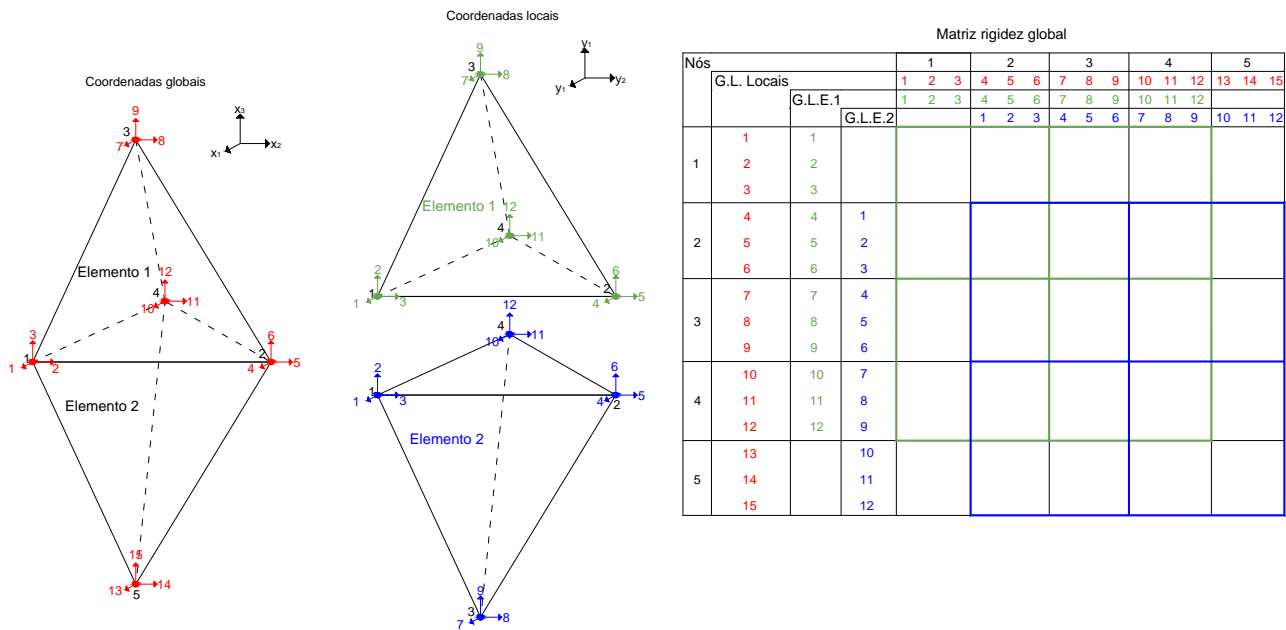


Figura 3.3: Esquema de montagem da matriz rigidez global.

A matriz de rigidez global é uma matriz quadrada (simétrica) com um número de linhas e colunas igual ao número total de graus de liberdade em toda a estrutura.

A existência de um apoio de rigidez K_a segundo um dado grau de liberdade, pode ser considerado numericamente adicionando o valor da rigidez desse apoio K_a , à diagonal da matriz \underline{k} na posição (linha e coluna) correspondente ao grau de liberdade apoiado.

L. Cálculo do vetor das forças

a) Cálculo do vetor elementar das forças nodais equivalentes ao peso próprio

A equação (3.6) que traduz o equilíbrio de um elemento finito (formulação em deslocamentos) em que o vetor elementar das forças nodais equivalentes ao peso próprio é dado por:

$$\tilde{F}^e = \int_V \underline{N}^T \underline{f}_g \, dx_1 dx_2 dx_3 \quad (3.15)$$

Onde \underline{f}_g é o vetor das forças mássicas atuantes (que neste caso equivale ao peso específico do material que constituí a estrutura).

$$\underline{f}_g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

-Peso volúmico do material (kN/m³)

De forma semelhante ao que foi apresentado para a matriz de rigidez elementar, o integral apresentado na equação (3.15) pode ser transformado no seguinte somatório a partir do método de integração de Gauss:

$$\tilde{\mathbf{F}}^e = \sum_{i=1}^{N_{PG}} \mathbf{N}_i^T \mathbf{f}_{\tilde{g}} \left| \mathbf{J}_i \right| V_i \quad (3.17)$$

Desta forma, o vetor elementar das forças nodais equivalentes ao peso próprio da estrutura apresenta um número de linhas igual ao número total de graus de liberdade do elemento.

$$\underset{(GL \cdot NP^e \times 1)}{\tilde{\mathbf{F}}^e} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1^{e1} \\ \vdots \\ \mathbf{F}_{\tilde{NP}^e}^{eNP^e} \end{bmatrix}, \underset{(GL \times 1)}{\mathbf{F}^{en}} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1^{en} \\ \vdots \\ \mathbf{F}_{GL}^{en} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

b) Montagem do vetor global das forças nodais equivalentes ao peso próprio

O sistema de montagem do vetor das forças elementares é igual ao considerado na construção da matriz rigidez. Como tal, o vetor das forças nodais equivalentes ao peso próprio da estrutura apresenta um número de linhas igual ao número total de graus de liberdade da estrutura.

Caso a estrutura se encontre sujeita, para além do peso próprio, a outro tipo de forças (cargas concentradas ou distribuídas) aplicadas em determinados graus de liberdade da estrutura, seria necessário a introdução dos valores correspondentes a essas forças no vetor global das forças, nos graus de liberdade onde as mesmas são aplicadas

M. Cálculo dos deslocamentos nos pontos nodais da estrutura

Os deslocamentos nos pontos nodais da estrutura obtêm-se a partir da equação que traduz o equilíbrio global de toda a estrutura (3.19) tendo o vetor de deslocamentos, um número de linhas igual ao número total de graus de liberdade de toda a estrutura,

$$\underline{\mathbf{k}} \cdot \underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{F}} \Leftrightarrow \underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{k}}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{F}} \quad (3.19)$$

3.3 Tipos de Elementos Considerados

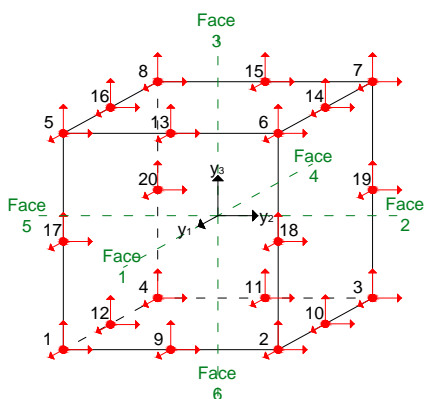
No desenvolvimento do programa DySSA 1.0 foram considerados 5 tipos de elementos diferentes. Dois desses elementos são utilizados para o estudo de estruturas em 2D. Para este caso foram considerados os elementos quadráticos de 4 nós e de 8 nós com funções de interpolação do 1º e 2º grau respetivamente. A utilização destes elementos serviu como ponto de

partida para a construção e teste do programa DySSA 1.0. Devido ao facto dos mesmos serem muito utilizados e o seu funcionamento se encontrar muito bem descrito (ver (Espada, 2009)) optou-se por não se fazer uma abordagem ao comportamento dos mesmos ao longo da presente dissertação.

Os restantes elementos foram considerados para o cálculo de estruturas em 3D. Para este caso foram considerados 2 tipos de elementos de discretização estrutural, elementos isoparamétricos tipo cubo de 20 nós, tetraédricos de 4 nós com funções de interpolação do 2º e 1º grau respetivamente, e um tipo de elementos de discretização comportamental, elementos de interface ou junta de 16 nós. Estes últimos são descritos através da interligação de 2 do tipo cubo.

3.3.1 Elementos Tipo Cubo de 20 Nós

Estes elementos (descritos nas **Figuras: 3.4, 3.5 e 3.6**) são ideais para o estudo do comportamento de estruturas, devendo-se ao facto de não necessitarem de malhas muito apertadas para o valor de cálculo se aproximar do valor real.



Funções de interpolação

$$N_i = \frac{1}{8}(1+y_1^{(i)}y_1)(1+y_2^{(i)}y_2)(1+y_3^{(i)}y_3)(y_1^{(i)}y_1+y_2^{(i)}y_2+y_3^{(i)}y_3-2) \quad (i=1,2,\dots,8);$$

$$N_i = \frac{1}{4}(1-y_1^2)(1+y_2^{(i)}y_2)(1+y_3^{(i)}y_3) \quad (i=10,12,14,16)$$

$$N_i = \frac{1}{4}(1-y_2^2)(1+y_3^{(i)}y_3)(1+y_1^{(i)}y_1) \quad (i=9,11,13,15);$$

$$N_i = \frac{1}{4}(1-y_3^2)(1+y_1^{(i)}y_1)(1+y_2^{(i)}y_2) \quad (i=17,18,19,20)$$

$y_1^{(i)}, y_2^{(i)}$ e $y_3^{(i)}$ representam as coordenadas locais do nó i .

Coordenadas locais dos nós

Nó(i)	$y_1^{(i)}$	$y_2^{(i)}$	$y_3^{(i)}$	Nó(i)	$y_1^{(i)}$	$y_2^{(i)}$	$y_3^{(i)}$
1	1	-1	-1	11	-1	0	-1
2	1	1	-1	12	0	-1	-1
3	-1	1	-1	13	1	0	1
4	-1	-1	-1	14	0	1	1
5	1	-1	1	15	-1	0	1
6	1	1	1	16	0	-1	1
7	-1	1	1	17	1	-1	0
8	-1	-1	1	18	1	1	0
9	1	0	-1	19	-1	1	0
10	0	1	-1	20	-1	-1	0

$$\underline{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \dots & N_{20} & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_{20} & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots & 0 & 0 & N_{20} \end{bmatrix}$$

Faces

Face	y_i	Nós							
1	$y_1=1$	1	2	6	5	9	18	13	17
2	$y_2=1$	2	3	7	6	10	19	14	18
3	$y_3=1$	6	7	8	5	14	15	16	13
4	$y_1=-1$	3	4	8	7	11	20	15	19
5	$y_2=-1$	4	1	5	8	12	17	16	20
6	$y_3=-1$	4	3	2	1	11	10	9	12

Figura 3.4: Elemento finito tridimensional isoparamétrico tipo cubo com 20 pontos nodais. Representação dos eixos e coordenadas locais dos nós. Convenção adotada para a numeração de pontos nodais e faces. Funções de interpolação.

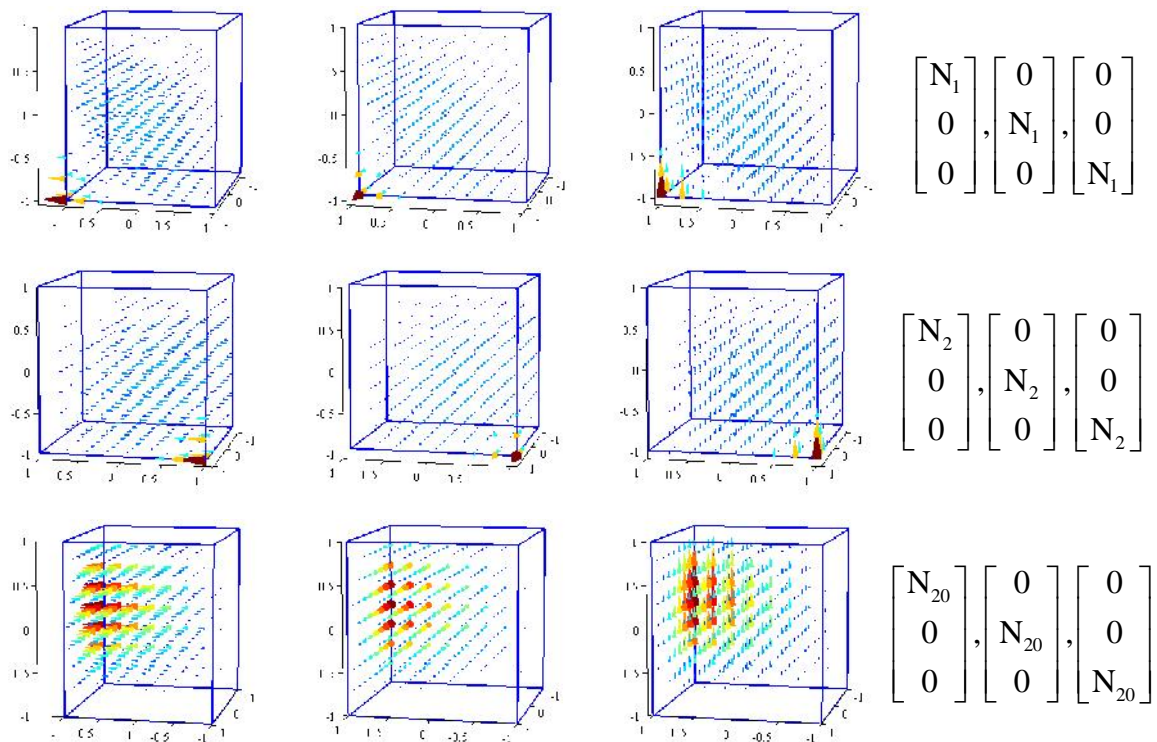
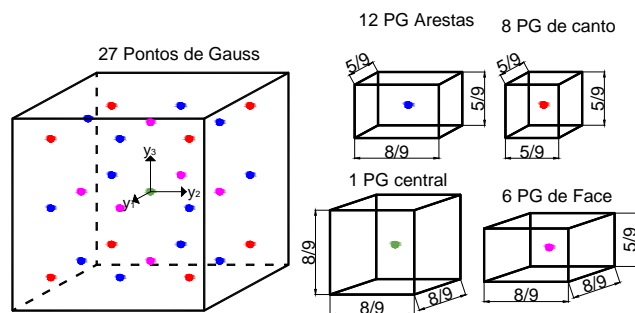


Figura 3.5: Representação das funções de interpolação segundo cada G.L para os pontos nodais 1, 2 e 20 do elemento finito tridimensional tipo cubo de 20 nós (Espada, 2009).



Coordenadas dos pontos de Gauss e Pesos de Gauss ($W_1=5/9$; $W_2=8/9$; $a=\sqrt{3/5}$)

PG	Tipo	y_1	y_2	y_3	V_{PG}	PG	Tipo	y_1	y_2	y_3	V_{PG}
1	Canto	a	a	a	W_1^3	15	Aresta	0	a	a	$W_1^2 \cdot W_2$
2		a	a	-a		16		0	a	-a	
3		a	-a	a		17		0	-a	a	
4		a	-a	-a		18		0	-a	-a	
5		-a	a	a		19		a	0	a	
6		-a	a	-a		20		a	0	-a	
7		-a	-a	a		21		-a	0	a	
8		-a	-a	-a		22		-a	0	-a	
9	Face	0	a	a	$W_2^2 \cdot W_1$	23	a	a	0	W_2^3	
10		0	-a	-a		24	a	-a	0		
11		a	0	a		25	-a	a	0		
12		-a	0	-a		26	-a	-a	0		
13		a	a	0		27	Central	0	0		0
14		-a	-a	0							

Figura 3.6: Distribuição dos Pontos de Gauss no elemento. Coordenadas locais e pesos.

3.3.2 Elementos de Junta de 16 Nós

As propriedades elásticas das interfaces (ver **Figura 3.7**) são a rigidez normal K_N e a rigidez tangencial K_T , as quais são definidas por unidade de área da junta ((Goodman, 1976), (Sousa & Teles, 1980), (Genésio, 1993)). As juntas são definidas por duas faces: uma face inferior (face 1) e uma face superior (face 2). As faces são inicialmente coincidentes e, devido às solicitações, podem ocorrer deslocamentos relativos entre as faces: deslocamentos tangenciais u_T e normais u_N .

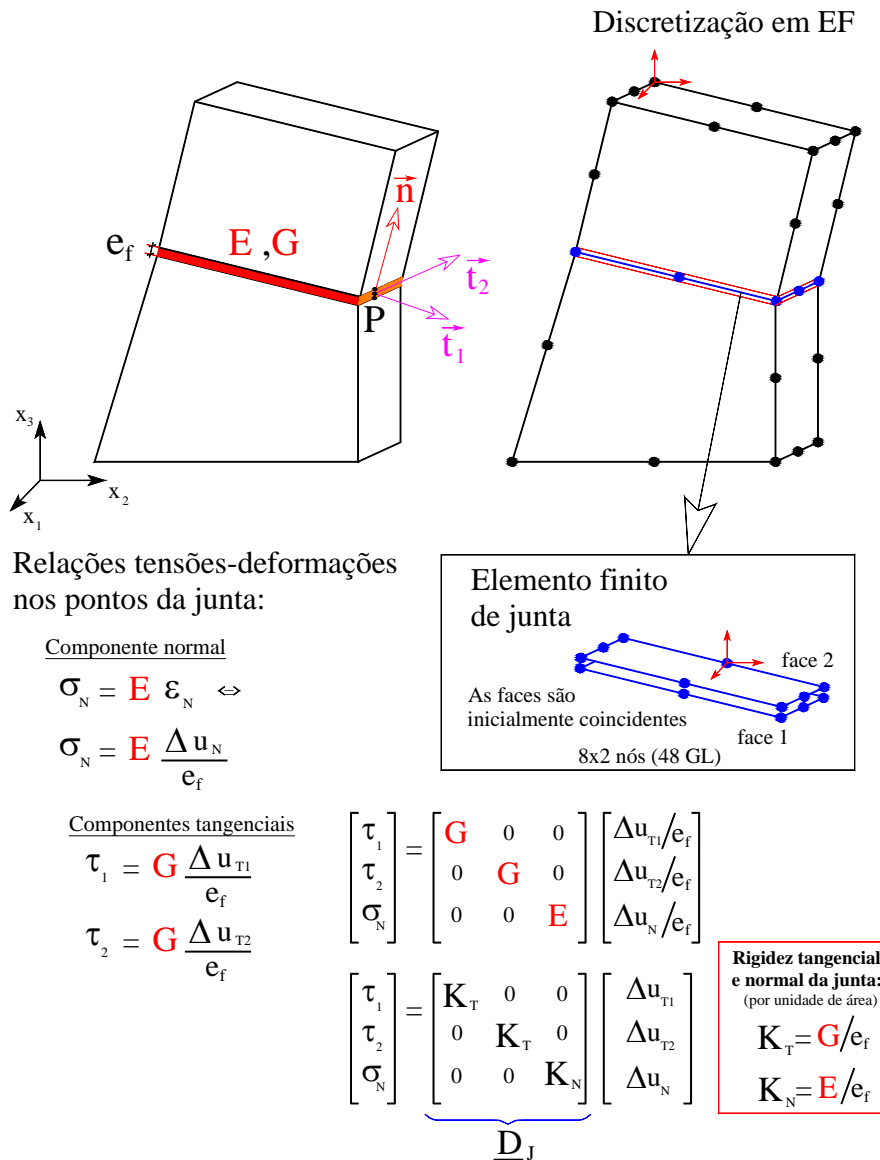


Figura 3.7: Elemento de junta. Relação entre tensões e deformações e entre tensões e diferenças de deslocamento entre faces. Definição de rigidez tangencial K_T e normal K_N de uma junta (Oliveira & Espada, 2012).

Para estimar os valores de K_N e K_T pode-se admitir que existe um material de preenchimento da junta com um dado módulo de elasticidade E e um módulo de distorção G e que a junta tem uma dada espessura e_f (designa-se por espessura fictícia porque nos modelos numéricos não é representada – as faces da junta são coincidentes). Com esta hipótese pode-se estimar a rigidez normal da junta com base na fórmula de cálculo da rigidez axial de uma barra de comprimento L , que como se sabe é $K_{N \text{ pilar}} = EA/L$. Neste caso da junta substitui-se L pela espessura fictícia da junta (e_f) e considera-se a área unitária ($A=1$, rigidez por unidade de área) e assim a rigidez normal da junta (por unidade de área) fica:

$$K_N = E \times \frac{1}{e_f} = \frac{E}{e_f} \quad (3.20)$$

Para a rigidez tangencial o raciocínio é semelhante mas usando o módulo de distorção:

$$K_T = G \times \frac{1}{e_f} = \frac{G}{e_f} \quad (3.21)$$

Os elementos de junta têm como função representar o comportamento de superfície de descontinuidades as quais podem corresponder a interfaces de contacto entre materiais diferentes, a diáclases, fendas, juntas de construção, juntas de betonagem, etc.

Os elementos finitos de junta de 16 nós (8 nós por face) são usados para simular a interação entre faces de dois elementos finitos tipo cubo de 20 nós que se encontram lado a lado: o elemento de junta permite estabelecer a “ligação” entre faces (8 nós por face).

Este tipo de elementos de junta designa-se como “elementos de junta de 2x8 nós” (Genésio, 1993).

Na **Figura 3.8** mostra-se um elemento de junta 3D (com 2x8 nós e 3GL por nó: 48 GL). As funções de interpolação são idênticas às dos elementos finitos bidimensionais do 2º grau, de 8 nós.

Funções de interpolação de elementos quadráticos de 8 nós

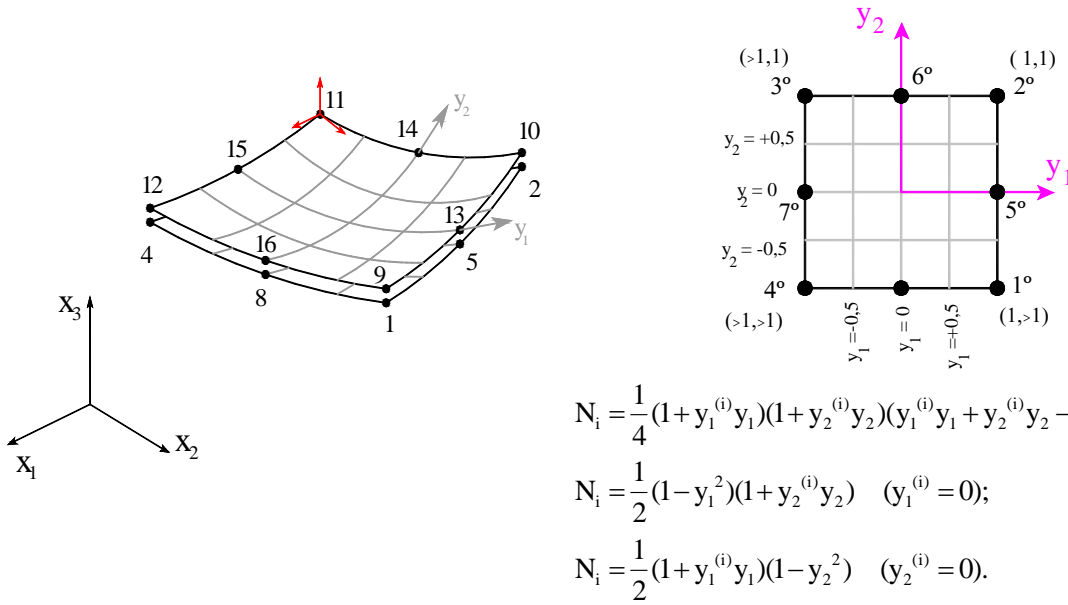


Figura 3.8: Elemento de junta 3D de 2x8 nós (48 GL). Funções de interpolação utilizadas (idênticas às dos elementos finitos bidimensionais do 2º grau, de 8 nós).

Em cada ponto P do elemento de junta a relação constitutiva entre tensões (duas componentes tangenciais à junta e uma componente normal) e deformações (duas distorções e uma componente de extensão normal) pode ser escrita da seguinte forma (num referencial local, triortogonal, em que um dos eixos é normal à junta em P e os outros dois estão contidos no plano tangente à junta em P – plano coincidente com a junta se esta for plana):

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \sigma_N \end{bmatrix}_{\sigma'} = \begin{bmatrix} G & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & E \end{bmatrix}_{D'} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \varepsilon_N \end{bmatrix}_{\varepsilon'} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \sigma_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_{T1}/e_f \\ \Delta u_{T2}/e_f \\ \Delta u_N/e_f \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

ou seja

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \sigma_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_T & 0 & 0 \\ 0 & K_T & 0 \\ 0 & 0 & K_G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_{T1} \\ \Delta u_{T2} \\ \Delta u_N \end{bmatrix}, \quad K_T = G/e_f, \quad K_N = E/e_f \quad (3.23)$$

em que

K_{T1} - Rigidez tangencial numa direção y_1 contida no plano tangente à junta em P (rigidez por unidade de área, da junta).

K_{T2} - Rigidez tangencial numa direção $y_2 \perp a y_1$ e também contida no plano tangente à junta em P (rigidez por unidade de área, da junta).

K_N - Rigidez normal, na direção y_3 normal à junta em P (rigidez por unidade de área, da junta).

Em geral considera-se, $K_{T1} = K_{T2} = K_T$

Assim, para cada ponto P da junta é adequado utilizar a anterior relação entre tensões e diferenças de deslocamento (entre faces), a qual se pode escrever na forma:

$$\underline{\sigma}'_P = \underline{D}'_J \Delta \underline{u}'_P \quad (3.24)$$

No referencial local triortogonal t_1, t_2, t_3 (o símbolo ' é usado precisamente como referência aos eixos locais t_1, t_2, t_3).

O vetor $\Delta \underline{u}'_P$ com as diferenças de deslocamento entre faces num dado ponto P da junta (no referencial local triortogonal t_1, t_2, t_3 , representado na **Figura 3.9**, em que t_3 corresponde à direção normal à junta em P) pode ser escrito em termos das diferenças dos deslocamentos dos nós da junta, recorrendo à usual fórmula de interpolação do método dos elementos finitos (com as anteriores funções de interpolação de elementos finitos bidimensionais do 2º grau, de 8 nós):

$$\Delta \underline{u}'_P = \begin{bmatrix} \Delta u_{T1} \\ \Delta u_{T2} \\ \Delta u_N \end{bmatrix}_P = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix}_P \begin{bmatrix} u_{T1}^{e9} - u_{T1}^{e1} \\ u_{T2}^{e9} - u_{T2}^{e1} \\ u_N^{e9} - u_N^{e1} \\ \vdots \\ u_{T1}^{e16} - u_{T1}^{e8} \\ u_{T2}^{e16} - u_{T2}^{e8} \\ u_N^{e16} - u_N^{e8} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

ou, de forma equivalente

$$\underbrace{\Delta \underline{u}'_P}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} \Delta u_{T1} \\ \Delta u_{T2} \\ \Delta u_N \end{bmatrix}_P = \underbrace{\begin{bmatrix} -N_1 & 0 & 0 & \dots & -N_8 & 0 & 0 & | & N_1 & 0 & 0 & \dots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & -N_1 & 0 & \dots & 0 & -N_8 & 0 & | & 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & -N_1 & \dots & 0 & 0 & -N_8 & | & 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix}_P}_{\substack{N_P \\ 3 \times 48}} \begin{bmatrix} u_{T1}^{e1} \\ u_{T2}^{e1} \\ u_N^{e1} \\ \vdots \\ u_N^{e8} \\ - \\ u_{T1}^{e9} \\ u_{T2}^{e9} \\ u_N^{e9} \\ \vdots \\ u_N^{e16} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

ou

$$\Delta \underline{u}'_P = \underline{N}_P \underline{u}'_e \quad (3.27)$$

Para se obter a matriz de rigidez dos elementos de junta, a qual é sempre referida aos eixos gerais, é necessário determinar em cada ponto de Gauss (PG) da junta (pontos usados para efetuar a integração numérica que permite obter a matriz de rigidez de acordo com o MEF) uma matriz de transformação \underline{T} com os cossenos diretores dos eixos locais (relativamente aos eixos gerais x_1, x_2, x_3): eixos t_1, t_2 no plano tangente à junta em PG e t_3 , normal à junta em PG (**Figura 3.9**).

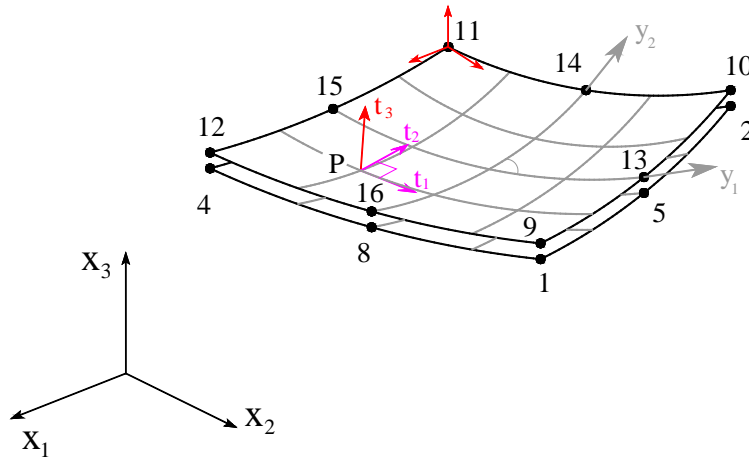


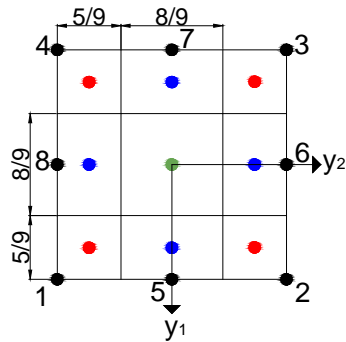
Figura 3.9: Elemento de junta de 8×2 nós. Representação dos três sistemas de eixos utilizados: i) sistema de eixos gerais (triortogonal); ii) sistema de eixos locais y_1 e y_2 (eixos curvos e não ortogonais) segundo a superfície do elemento junta; e iii) sistema de eixos triortogonal definido em cada ponto P da junta, no qual é estabelecida a relação constitutiva da junta através da matriz diagonal \underline{D}_J (definida na figura 1).

Para determinar a matriz \underline{T} em cada ponto PG de um elemento de junta, convém começar por calcular a matriz jacobiana (em cada PG, ver **Figura 3.10**), a qual contém as direções dos eixos locais y_1 e y_2 do plano tangente à junta em PG. Trata-se de uma matriz de 3×2 que se determina da seguinte forma:

$$\underbrace{\underline{J}_{PG}}_{(3 \times 2)} = \underbrace{\begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \\ J_{31} & J_{32} \end{bmatrix}}_{3 \times 2 PG} = \underbrace{\begin{matrix} \text{coordenadas gerais dos} \\ \text{pontos nodais da junta} \\ \begin{bmatrix} x_1^{e1} & \dots & x_1^{e8} \\ x_2^{e1} & \dots & x_2^{e8} \\ x_3^{e1} & \dots & x_3^{e8} \end{bmatrix} \end{matrix}}_{(3 \times 8)} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial y_1} & \frac{\partial N_1}{\partial y_2} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial N_8}{\partial y_1} & \frac{\partial N_8}{\partial y_2} \end{bmatrix}}_{(8 \times 2) PG} \quad (3.28)$$

No cálculo dos elementos de junta 8×2 , as funções de interpolação N_i e correspondentes derivadas $\partial N_i / \partial y_j$, são iguais às utilizadas no cálculo de elementos planos quadráticos de 8 nós (um elemento de junta é formado por duas faces de elementos 3D, as quais têm 8 nós cada uma).

9 Pontos de Gauss



Coordenadas locais dos nós

Nó(i)	$y_1^{(i)}$	$y_2^{(i)}$
1	1	-1
2	1	1
3	-1	1
4	-1	-1
5	1	0
6	0	1
7	-1	0
8	0	-1

Coordenadas dos pontos de Gauss e Pesos de Gauss ($W_1=5/9$; $W_2=8/9$; $a=\sqrt{3/5}$)

PG	Tipo	y_1	y_2	A_{PG}	PG	Tipo	y_1	y_2	A_{PG}	PG	Tipo	y_1	y_2	A_{PG}
1	Canto	a	-a	W_1^2	5	Lateral	a	0	$W_1 \cdot W_2$	9	Central	0	0	W_2^2
2		a	a		6		0	a						
3		-a	a		7		-a	0						
4		-a	-a		8		0	-a						

Figura 3.10: Numeração de pontos nodais e coordenadas locais. Posição dos pontos de Gauss no e correspondentes áreas de influência a utilizar na integração numérica da matriz de rigidez.

Desta forma, tendo a matriz jacobiana num dado PG da junta (Nota: como as faces são coincidentes pode-se pensar indiferentemente na face 1 ou 2 da junta)

$$\underline{J}_{PG} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \\ J_{31} & J_{32} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

pode ser determinado em PG um sistema de eixos triortogonal, de versores $\vec{T}_1, \vec{T}_2, \vec{T}_3$ (vetores unitários), que se obtêm da seguinte forma

$$\begin{aligned} \vec{T}_1 &= \frac{(J_{11}, J_{21}, J_{31})}{\sqrt{J_{11}^2 + J_{21}^2 + J_{31}^2}} \\ \vec{T}_3 &= \frac{\vec{t}_3}{\|\vec{t}_3\|}, \quad \vec{t}_3 = (J_{11}, J_{21}, J_{31}) \times (J_{12}, J_{22}, J_{32}) \\ \vec{T}_2 &= \vec{T}_3 \times \vec{T}_1 \end{aligned} \quad (3.30)$$

Assim pode ser montada a pretendida matriz de transformação \underline{T} para cada ponto de Gauss PG, vindo então

$$\underline{\mathbf{T}}_{PG} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{T}}_1 \\ \underline{\mathbf{T}}_2 \\ \underline{\mathbf{T}}_3 \end{bmatrix}_{PG} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{11} & \mathbf{T}_{12} & \mathbf{T}_{13} \\ \mathbf{T}_{21} & \mathbf{T}_{22} & \mathbf{T}_{23} \\ \mathbf{T}_{31} & \mathbf{T}_{32} & \mathbf{T}_{33} \end{bmatrix}_{PG}$$

Portanto, em cada ponto da junta (face k=1 ou face k=2), a relação entre as componentes de deslocamento nos eixos (t_1, t_2, t_3) e nos eixos gerais (x_1, x_2, x_3) é dada por:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_{T1} \\ \mathbf{u}_{T2} \\ \mathbf{u}_N \end{bmatrix}_{\text{facek}}^P \begin{matrix} (t_1 t_2 t_3) \end{matrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{11} & \mathbf{T}_{12} & \mathbf{T}_{13} \\ \mathbf{T}_{21} & \mathbf{T}_{22} & \mathbf{T}_{23} \\ \mathbf{T}_{31} & \mathbf{T}_{32} & \mathbf{T}_{33} \end{bmatrix}_P \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \end{bmatrix}_{\text{facek}}^P \begin{matrix} (x_1 x_2 x_3) \end{matrix} \quad (3.31)$$

ou, em notação mais compacta

$$\underline{\mathbf{u}}'_P \begin{matrix} (t_1 t_2 t_3) \end{matrix} = \underline{\mathbf{T}}_P \underline{\mathbf{u}}_P \begin{matrix} (x_1 x_2 x_3) \end{matrix} \quad (3.32)$$

Assim as diferenças de deslocamento em cada ponto P nos eixos locais t_1, t_2, t_3 podem ser relacionadas com os deslocamentos nodais referidos aos eixos gerais pela fórmula de interpolação seguinte:

$$\Delta \underline{\mathbf{u}}'_P \begin{matrix} (3 \times 1) \end{matrix} = \underline{\mathbf{T}} \underline{\mathbf{N}}_P \begin{matrix} (3 \times 48) \end{matrix} \underline{\mathbf{u}}^e \begin{matrix} (48 \times 1) \end{matrix} \quad (3.33)$$

Como no referencial da junta a relação constitutiva pode ser dada por:

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}}' \begin{matrix} (3 \times 1) \end{matrix} = \underline{\mathbf{D}}_J \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}' \begin{matrix} (3 \times 3) \end{matrix} \begin{matrix} (3 \times 1) \end{matrix} \quad (3.34)$$

pode-se escrever:

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}}' \begin{matrix} (3 \times 1) \end{matrix} = \underline{\mathbf{D}}_J \underline{\mathbf{T}} \underline{\mathbf{N}} \underline{\mathbf{u}}^e \begin{matrix} (3 \times 3) \end{matrix} \begin{matrix} (3 \times 3) \end{matrix} \begin{matrix} (3 \times 48) \end{matrix} \begin{matrix} (48 \times 1) \end{matrix} \quad (3.35)$$

Finalmente, aplicando o PTV ao elemento de junta, e tendo em conta que o trabalho das forças interiores é dado por:

$$\mathbf{W}_{int} = \int_{V_J} \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}'^T \underline{\boldsymbol{\sigma}}' dV = \mathbf{e}_f \int_{A_J} \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}'^T \underline{\boldsymbol{\sigma}}' dA \quad (3.36)$$

e que $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}'_\mu = \Delta \underline{\mathbf{u}}'_\mu / \mathbf{e}_f$, então, a utilização das anteriores fórmulas de interpolação do MEF permite obter a seguinte expressão para a matriz de rigidez elementar da junta

$$\underline{\mathbf{k}}_J^e \begin{matrix} (48 \times 48) \end{matrix} = \int_{A_J} \underline{\mathbf{N}}^T \begin{matrix} (48 \times 3) \end{matrix} \underline{\mathbf{T}}^T \underline{\mathbf{D}}_J \underline{\mathbf{T}} \begin{matrix} (3 \times 3) \end{matrix} \underline{\mathbf{N}} \begin{matrix} (3 \times 48) \end{matrix} dA \quad (3.37)$$

Efetuada a integração nos eixos locais y_1, y_2 fica:

$$\underline{k}_J^e = \int_{A_J} \underbrace{\underline{N}^T}_{(48 \times 48)} \underbrace{\underline{T}^T \underline{D}_J \underline{T}}_{(3 \times 3)} \underbrace{\underline{N}}_{(3 \times 48)} \phi_J dy_1 dy_2 \quad (3.38)$$

em que $\phi_J = \|\underline{J}_{i1} \times \underline{J}_{i2}\|$ (área do paralelogramo definido pelos vetores correspondentes às duas colunas da matriz jacobiana).

Recorrendo ao método de Gauss para efetuar a integração numericamente, obtém-se finalmente o usual somatório, estendido aos 9 pontos de Gauss da junta, que é correntemente utilizado nos programas de cálculo de estruturas pelo MEF.

$$\underline{k}_J^e = \sum_{i=1}^{N_{PG}=9} \underline{N}_i^T \underline{T}_i^T \underline{D} \underline{N}_i \underline{T}_i \phi_{Ji} A_i \quad (3.39)$$

Na **Figura 3.11** encontra-se demonstrado o funcionamento dos elementos de junta

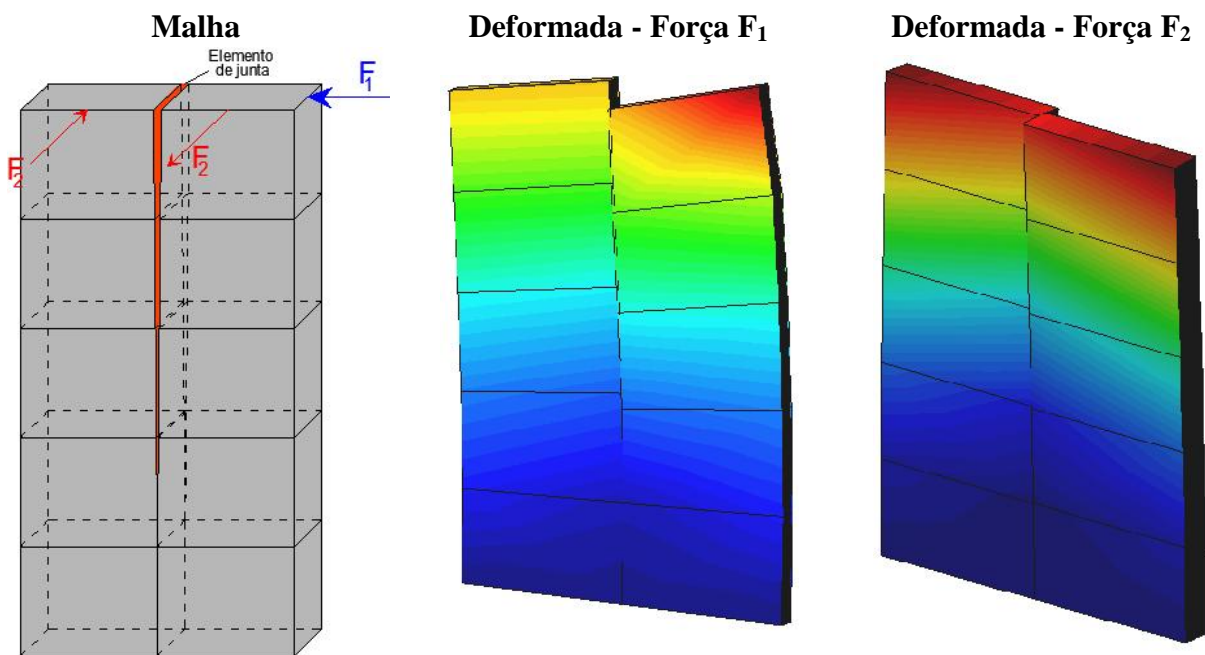


Figura 3.11: Cálculo da deformada de uma consola fissurada pelo programa DySSA 1.0.

3.3.3 Elementos Tetraédricos de 4 Nós

A construção dos elementos tetraédricos de 4 nós foi feita através dos elementos cúbicos.

Este sistema permitiu uma facilidade na construção da malha visto que a mesma é dada em elementos cúbicos. Estes elementos têm a vantagem de se poderem ligar a outros tipos de elementos e serem mais estáveis quando o material que representam é um líquido (simulam

melhor o comportamento de materiais com $G=0$). No entanto devido á sua elevada rigidez aumentam a diferença entre o valor real e o valor calculado numericamente. Uma possibilidade de evitar a utilização deste tipo de elementos do 1º grau, é a consideração de uma resistência ao corte maior que zero quando o material a representar se encontra no estado líquido.

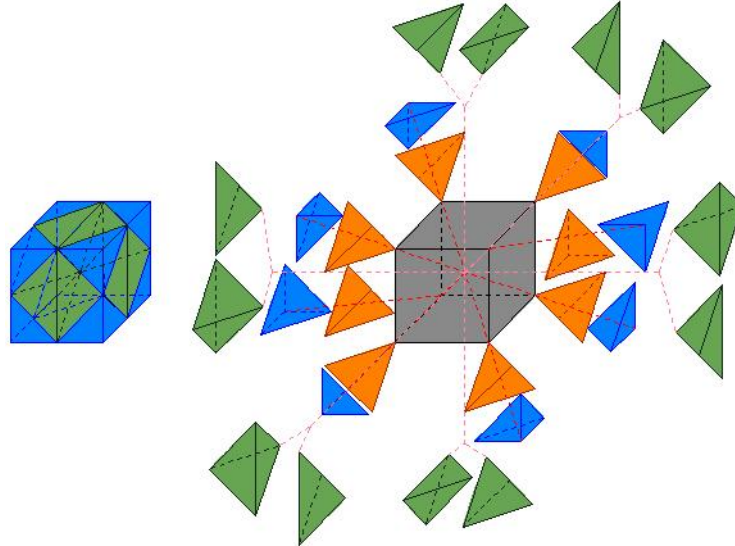
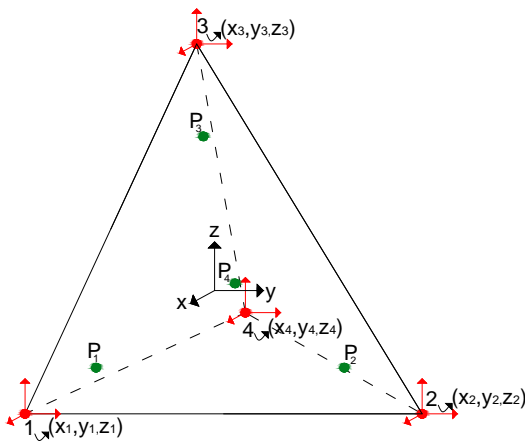


Figura 3.12: Esquema de divisão de um elemento tipo cubo de 21 em 28 elementos tetraédricos de 4 nós.

O elemento tipo cubo de 21 nós (20 nós do elemento mais um ponto localizado no centro do mesmo) divide-se em 8 elementos tetraédricos (**Figura 3.13**) centrais (elementos representados a cor de laranja na **Figura 3.12**), 8 elementos de canto (cor azul) e 12 elementos de preenchimento de face (cor verde).



Funções de interpolação

$$N_1 = \frac{\text{Volume P234}}{\text{Volume 1234}}$$

$$N_2 = \frac{\text{Volume P134}}{\text{Volume 1234}}$$

$$N_3 = \frac{\text{Volume P234}}{\text{Volume 1234}}$$

$$N_4 = \frac{\text{Volume P123}}{\text{Volume 1234}}$$

Volume 1234 = $J=1/6$

1	x_1	y_1	z_1
1	x_2	y_2	z_2
1	x_3	y_3	z_3
1	x_4	y_4	z_4

NOTA: O cálculo dos restantes volumes é feito da mesma forma, sendo necessária apenas a substituição das coordenadas do ponto que não consta no cálculo do volume pelas coordenadas do ponto de gauss em questão

Figura 3.13: Elemento finito tridimensional isoparamétrico tetraédricos com 4 pontos nodais. Representação dos eixos locais e das coordenadas locais dos nós. Funções de interpolação e matriz Jacobiana.

Outro método de calcular as funções de interpolação é através da resolução do sistema (3.40).

$$\begin{cases} x = N_1x_1 + N_2x_2 + N_3x_3 + N_4x_4 \\ y = N_1y_1 + N_2y_2 + N_3y_3 + N_4y_4 \\ z = N_1z_1 + N_2z_2 + N_3z_3 + N_4z_4 \\ 1 = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 \end{cases} \quad (3.40)$$

Resolvendo o sistema obtém-se

$$N_i = \frac{a_i + b_i x + c_i y + d_i z}{6V} \times (-1)^{i+1} \quad (i=1,2,3,4). \quad (3.41)$$

N_i - Função de interpolação

(x, y, z) - coordenadas do ponto de Gauss

V - Volume do tetraedro definido pelos pontos 1, 2, 3 e 4

$$a_1 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}; b_1 = - \begin{vmatrix} 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}; c_1 = - \begin{vmatrix} x_2 & 1 & z_2 \\ x_3 & 1 & z_3 \\ x_4 & 1 & z_4 \end{vmatrix}; d_1 = - \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} \quad (3.42)$$

As restantes constantes são definidas através do intercâmbio cíclico dos índices pela ordem 1,2,3,4.

Para o caso em estudo considerou-se que as funções de interpolação para os quatro pontos de Gauss tinham os respetivos valores (ver **Tabela 3.1**) (Zienkiewicz & Taylor, 2000).

Tabela 3.1: Valores das funções de interpolação de um elemento tetraédrico de 4 nós

Pontos de Gauss	N_1	N_2	N_3	N_4	V_{PG}
P_2	0,5854102	0,1381966	0,1381966	0,1381966	0,25
P_3	0,1381966	0,5854102	0,1381966	0,1381966	0,25
P_4	0,1381966	0,1381966	0,5854102	0,1381966	0,25
P_5	0,1381966	0,1381966	0,1381966	0,5854102	0,25

Para o caso dos tetraedros

$$\underline{B} = 1/6V \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & -b_2 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 & -b_4 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & 0 & -c_2 & 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 & -c_4 & 0 \\ 0 & 0 & d_1 & 0 & 0 & -d_2 & 0 & 0 & d_3 & 0 & 0 & -d_4 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

Na **Figura 3.14** apresenta-se um esquema em que se mostra sinteticamente como o M.E.F é utilizado para resolver a equação de Navier.

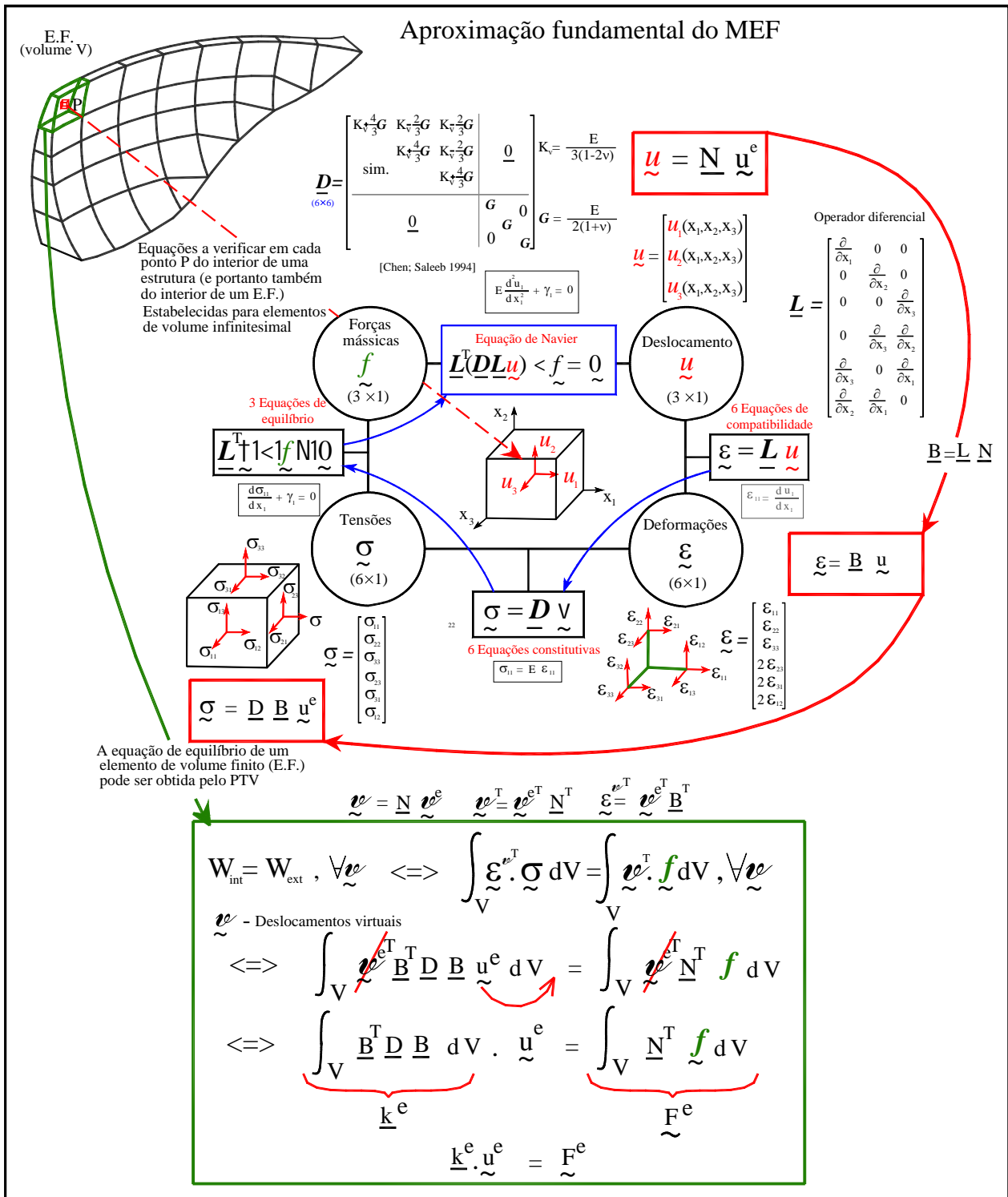


Figura 3.14: Utilização do método dos elementos finitos na resolução da equação de Navier (adaptado de (Oliveira, 2012)).

3.4 Desenvolvimento de um Programa de MEF de Elemento Finitos 3D para Análise Estática e Dinâmica (Componente Estática).

No âmbito da presente dissertação foi desenvolvido o programa (DySSA 1.0) em MATLAB que permite a utilização de elementos finitos de placa de 4 e de 8 nós e elementos finitos tridimensionais, tipo cubo de 20 nós, tetraédricos de 4 nós e de junta de 16 nós para efetuar a análise estática e dinâmica (recorrendo ao método do espaço de estados) de estruturas. O programa foi inicialmente desenvolvido para elementos finitos planos de 4 nós e 8 nós, com base nos pressupostos referidos no capítulo 3.3 e, seguidamente foi generalizado para elementos tridimensionais, recorrendo à introdução das novas funções de interpolação e algumas modificações ao nível do cálculo.

O programa permite efetuar a análise estática de estruturas 2D e 3D sob a ação de forças concentradas e de forças mássicas e, a análise dinâmica (sob ações sísmicas ou ações dinâmicas de qualquer outro tipo), no domínio do tempo (ações definidas por histórias de forças aplicadas nos vários graus de liberdade da estrutura ou histórias de acelerações impostas na base e ruído branco). Nesta secção será feita uma abordagem ao algoritmo do programa responsável pela leitura de dados e cálculo estático.

3.4.1 Algoritmo do Programa

O componente do algoritmo do programa DySSA 1.0 para a análise estática de estruturas apresenta-se em seguida.

PROGRAMA DYSSA 1.0. ANÁLISE ESTÁTICA E DINÂMICA DE SISTEMAS E ESTRUTURAS PELO MEF.

(1) ANÁLISE ESTÁTICA

(1.1)– Identificação da localização do ficheiro de dados

(1.2)– Chamada de uma função com o para de reorganizar o ficheiro de dados, caso o utilizador assim o deseje

Função organização

- a) Leitura do ficheiro de dados
- b) Reorganização da matriz de descrição dos elementos colocando em último lugar os que correspondem à água. Reorganização dos elementos de água por ordem crescente relativa á altura da mesma.
- c) Identificação do material ao qual corresponde cada nó
- d) Reorganização da matriz de descrição dos pontos, colocando em primeiro lugar os que correspondem a elementos do estado sólido e em último os que correspondem a elementos do estado liquida. Reorganização dos nós de elementos de água por ordem crescente de altura de água
- e) Reescrita da matriz descrição dos elementos para tendo em conta a nova numeração dos nós.
- f) Reescrita da matriz referente às juntas por ordem crescente e tendo em conta a nova numeração da matriz referente aos elementos
- g) Escrita na folha de dados da nova organização dos dados.

(1.3)– Leitura de dados:

- Características geométricas e topológicas da discretização estrutural em E.F.;

- Propriedades mecânicas dos vários materiais;
- Escalas para desenhos e animações;
- Valores máximos e mínimos para configuração das janelas de desenho;
- Leitura das coordenadas dos nós apoios;
- Leitura das incidências dos elementos e do grupo do material.

(1.4)– Cálculo da matriz de elasticidade \underline{D} para os casos 2D ou 3D.

(1.5)– Introdução da cota de água através de uma janela de comandos própria.

- Eliminação dos nós, elementos e juntas de cotas de água superior á selecionada.

(1.6)– Chamada de uma função para montagem da matriz \underline{K} e \underline{C} relativa ás juntas, caso existam.

Função juntas

- Leitura de dados:
 - Características geométricas e topológicas da discretização estrutural em E.F de junta;
 - Propriedades mecânicas dos vários materiais da junta;
 - Leitura dos elementos e faces para a construção dos elementos de junta;
- Identificação dos nós da junta
- Cálculo da matriz de elasticidade \underline{D} das juntas
- Identificação das Coordenadas dos pontos de Gauss e respetivos pesos
- Matriz com os valores das funções de interpolação nos NPG pontos de Gauss. Esta matriz será utilizada para o cálculo das coordenadas gerais dos pontos de Gauss
- Cálculo das derivadas das funções de interpolação em ordem às coordenadas locais
- Cálculo da matriz Jacobiana \underline{J} e matriz transformação \underline{T} e do Jacobiano
- Cálculo das matrizes elementares \underline{K}_e , \underline{C}_e
- Assemblagem das matrizes de rigidez \underline{K} e de amortecimento \underline{C} (processo de espalhamento das matrizes \underline{K}_e , \underline{C}_e)

(1.7)– Chamada de uma função para divisão dos elementos tipo cubo em elementos tetraédricos, caso o utilizador assim o deseje.

Função tetraedros

- Acrescento das coordenadas dos pontos centrais de cada elemento à matriz das coordenadas
- Rescrição da matriz elementos tipo cubo numa matriz elementos tipo tetraedros

(1.8)- Chamada da função para identificação das Coordenadas dos pontos de Gauss e respetivos pesos

(1.9)- Matriz com os valores das funções de interpolação nos NPG pontos de Gauss. Esta matriz será utilizada para o cálculo das coordenadas gerais dos pontos de Gauss (desenho das tensões principais nos pontos de Gauss)

(1.10)- Cálculo das derivadas das funções de interpolação em ordem às coordenadas locais

(1.11)- Cálculo do Jacobiano

(1.12)- Cálculo da matriz B, com as derivadas das funções de interpolação em ordem às coordenadas gerais

(1.13)- Cálculo das matrizes elementares \underline{K}_e , \underline{M}_e , \underline{C}_e e do vetor elementar das forças nodais equivalentes ao peso próprio \underline{F}_e^p

(1.14)- Assemblagem das matrizes de rigidez \underline{K} , de massas \underline{M} , amortecimento \underline{C} e do vetor das forças nodais equivalentes ao peso próprio $\underline{F}_{\text{peso}}$ (processo de espalhamento das matrizes \underline{K}_e , \underline{M}_e e dos vetores \underline{F}_e^p).

(1.15)- Introdução das condições de apoio (apoios rígidos, elásticos e amortecedores).

(1.16)– Obtenção das forças concentradas nos nós através da leitura do ficheiro de dados.

(1.17)- Cálculo do vetor das forças globais: somatório do vetor com as forças nodais equivalentes ao peso próprio, com o vetor com as forças concentradas nos nós FCN

(1.18)- Cálculo dos deslocamentos nodais

(1.19)- Cálculo das tensões principais nos pontos de Gauss

(2) ANÁLISE DINÂMICA (ver capítulo 4.4.1)

(3) DESENHOS DE ANALISE ESTÁTICA

(3.1)- Desenho da malha indeformada com numeração dos nós correspondentes á estrutura.

(3.2)- Desenho da malha indeformada e deformada com deslocamentos representados através de uma escala de cores.

- (3.3)- Desenho da malha indeformada, deformada e do campo de tensões principais nos pontos de Gauss para os casos 2D ou 3D
- (4) **DESENHOS DE ANÁLISE DINÂMICA** (ver capítulo 4.4.1)
- (5) **CONSTRUÇÃO DE FICHEIROS DE LEITURA PARA O GID**
- (5.1)- Criação de um ficheiro de leitura no Gid, referente á construção e propriedades da malha
- (5.2)- Criação de um ficheiro de leitura no Gid, aos deslocamentos e tensões previamente elaboradas no cálculo estático.

Como se pode observar através da **Figura 3.15** o programa é muito interativo. O fornecimento de dados é feito através de botões de comando e caixas de texto que vão aparecendo á medida que o mesmo vai necessitando das variáveis. É um programa que apenas necessita de uma malha para executar cálculos para várias cotas de água o que facilita muito na construção e elaboração das mesmas. Este está preparado para a gravação de todos os resultados calculados.

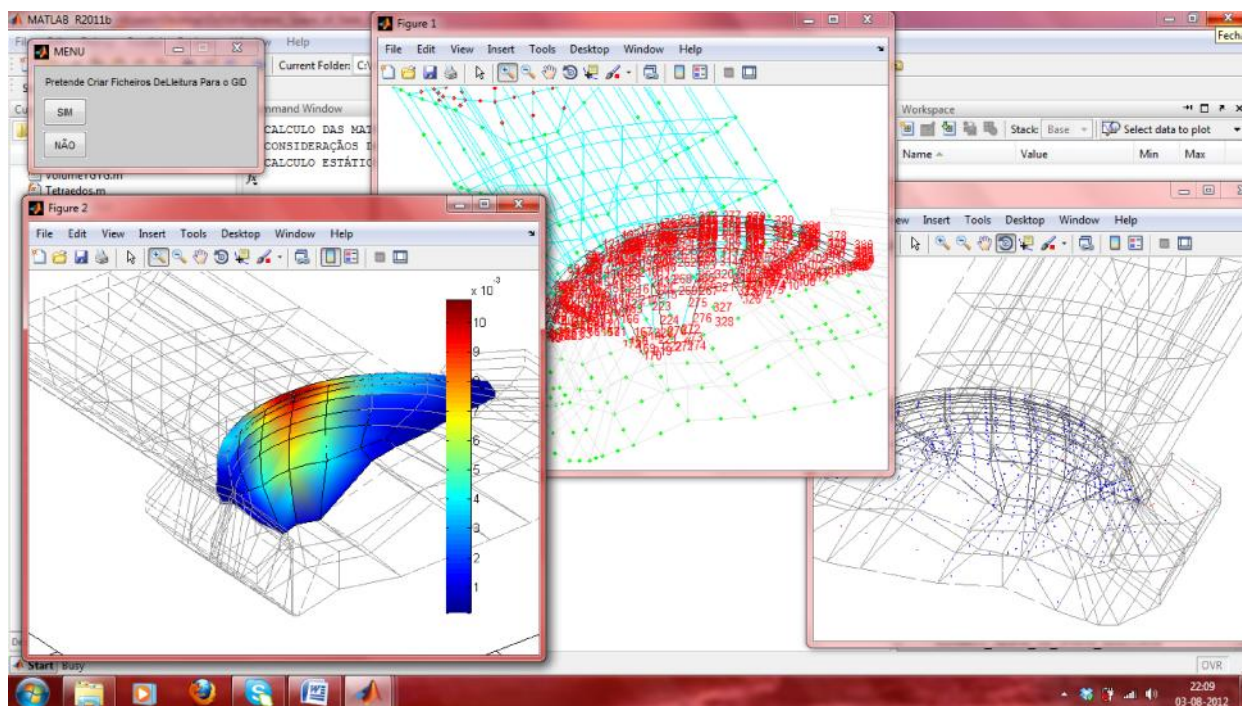


Figura 3.15: Programa DySSA 1.0 em Matlab. Cálculo estático da barragem do Cabril para uma cota de água de 265 m. Desenho dos deslocamentos e tensões na barragem.

Na **Figura 3.16** está representada a folha de dados referente à malha da barragem do Cabril. Devido ao facto de os dados serem colocados numa folha de Excel, permite a melhor compreensão e facilidade de alteração da mesma visto que a elaboração da mesma se encontra toda discretizada na folha. Outra vantagem é a divisão da folha em várias parcelas, cada uma referente a um determinado aspeto da malha.

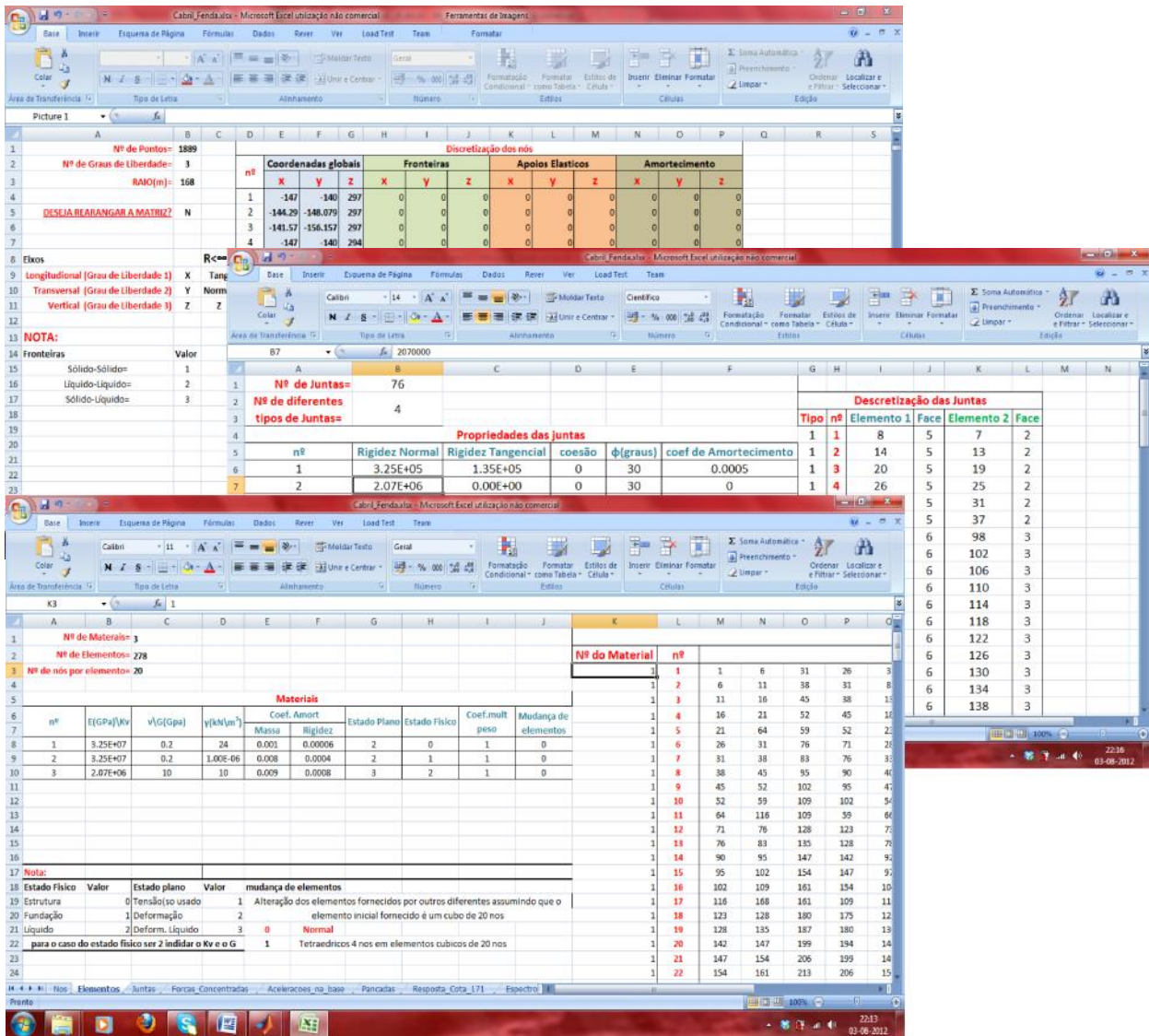


Figura 3.16: Esquema de uma folha de dados. Folha de dados referente aos nós, elementos de junta e elementos da malha.

3.4.2 Exemplo de teste

O exemplo teste de cálculo que será exemplificado refere-se a uma parede em consola com 1m de altura e uma secção de 1x0,085m, estando sujeita ao peso da água a uma cota de um 1m, como se pode observar na **Figura 3.17**.

No cálculo numérico foram consideradas duas malhas, uma formada apenas por elementos tipo cubo na descrição dos materiais e elementos de junta na interface entre os materiais, a segunda malha difere da primeira no aspeto em que os elementos que descrevem a água são tetraédricos.

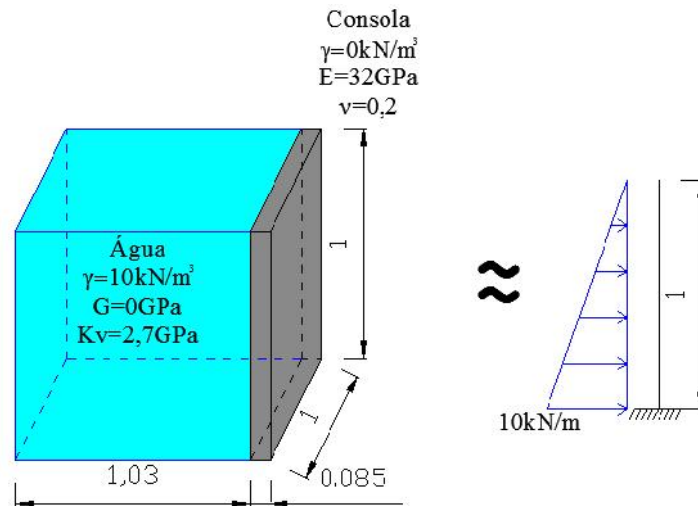


Figura 3.17: Parede em consola sujeita pressão hidrostática.

Este cálculo permite demonstrar que para além de o programa DySSA 1.0 se encontrar a realizar corretamente os cálculos estáticos, que a resposta aplicando elementos finitos de água na descrição da malha é igual á aplicação de pressões hidrostáticas.

Cálculo analítico da dos deslocamentos devido às pressões hidrostáticas

A inércia da consola é dada por

$$I = \frac{1 \times 0,085^3}{12} = 5,12 \times 10^{-5} \text{ m}^4$$

O momento fletor e o esfoço transverso na zona de encastramento são dados por:

$$M_{\text{base}} = 10 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = 1,67 \text{ kNm}^2 \quad ; \quad V_{\text{base}} = 10 \times \frac{1}{2} = 5 \text{ kNm}^2$$

Aplicando o método do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) o deslocamento horizontal no topo da consola é dado por:

$$u_{\text{topo}} = \frac{\frac{1}{4} \times 1,67 \times 1}{32 \times 10^6 \times 5,12 \times 10^{-5}} + \frac{\frac{1}{2} \times 5 \times 1}{0,085 \times 1 \times \frac{32 \times 10^6}{2(1+0,2)}} = 2,57 \times 10^{-4} \text{ m}$$

O deslocamento horizontal no ponto central do topo das consolas (ponto 3) calculado numericamente através do programa para a malha de elementos cúbicos e tetraédricos (ver **Figura 3.18**) tem o valor de $1,94 \times 10^{-4}$ m e $1,97 \times 10^{-4}$ m respetivamente.

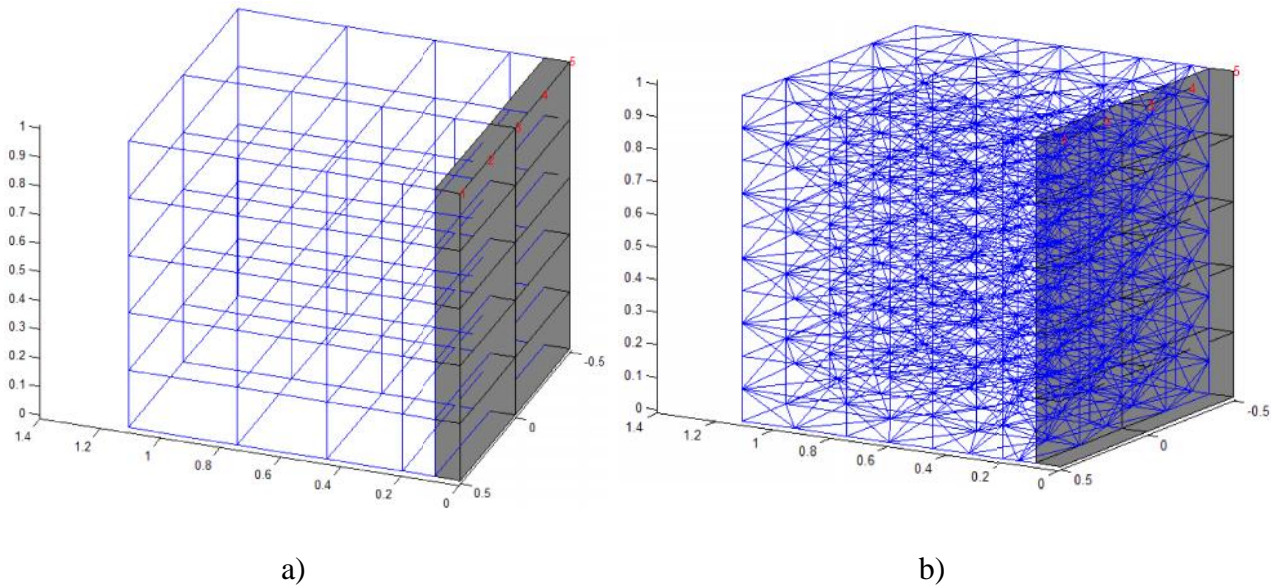


Figura 3.18: a) Malha de elementos tipo cubo; b) Malha de elementos tipo cubo na discretização da consola e tetraédricos na discretização da água.

Como já era esperado ambos os valores são inferiores ao calculado analiticamente, apesar de se encontrarem dentro da mesma ordem de grandeza, resultante do facto de a malha da consola se encontrar muito pouco “refinada”. Comparativamente os valores entre as malhas são muito próximos, no entanto o da malha com maior discretização na água é ligeiramente mais próximo do valor analítico, como seria esperado.

3.5 Considerações Finais

Neste capítulo apresentaram-se sumariamente os fundamentos da Mecânica dos Sólidos e os fundamentos do método dos elementos finitos. Apresentou-se a formulação em deslocamentos para dois tipos de elementos finitos sólidos, um elemento isoparamétrico do 2º grau tipo cubo de 20 nós, e um elemento tetraédrico do 1º grau, com 4 nós (nos vértices). Mostrou-se de que forma a formulação em deslocamentos pode ser facilmente adaptada para simular o comportamento da água – elementos finitos “de água”. Apresentou-se também a formulação para um elemento finito de junta do 2º grau, com 2×8 nós, para simular o comportamento de interfaces (sólido-sólido ou sólido-líquido).

Por fim, apresentou-se o exemplo de uma parede em consola submetida à ação da água a qual foi simulada recorrendo a elementos finitos “de água”. Foi efetuado um cálculo estático

considerando apenas a pressão hidrostática para testar o programa na obtenção de resultados estáticos.

4

Análise Dinâmica. Formulação no Espaço de Estados

4.1 Considerações Iniciais

Uma estrutura quando solicitada por uma força externa variável no tempo $f(t)$, movimentada a partir da sua posição de equilíbrio estático. Para um sistema oscilatório simples com 1 grau de liberdade do tipo massa-mola (massa m , mola de rigidez k e amortecimento c) o equilíbrio do movimento ou equilíbrio dinâmico traduz-se em cada instante de tempo pelo equilíbrio entre todas as forças participantes no movimento

$$f_I(t) + f_A(t) + f_E(t) = f(t) \quad (4.1)$$

em que

$$f_I(t) = m \cdot \ddot{u}(t) \quad - \text{Força de inércia (2ª Lei de Newton)}$$

$$f_A(t) = c \cdot \dot{u}(t) \quad - \text{Força de amortecimento}$$

$$f_E(t) = k \cdot u(t) \quad - \text{Força de restituição elástica.}$$

Deste modo, a equação do equilíbrio dinâmico é uma equação diferencial de 2ª ordem definida por:

$$m \cdot \ddot{u}(t) + c \cdot \dot{u}(t) + k \cdot u(t) = f(t) \quad (4.2)$$

Para sistemas de vários graus de liberdade o movimento pode ser descrito por uma equação diferencial matricial idêntica à anterior, mas na qual irão surgir as matrizes de massas \underline{m} , de amortecimento \underline{c} e de rigidez \underline{k} .

Partindo da forma fraca da equação de Navier formulada para a hipótese de existência de forças mássicas de inércia e de amortecimento (a forma fraca da equação de Navier obtém-se por aplicação do Lema Fundamental do Cálculo Variacional à correspondente forma forte ou, mais diretamente, recorrendo ao PTV) a aplicação da fórmula de interpolação do MEF

ao campo de deslocamentos ($\underline{u} = \underline{N} \underline{u}^e$), permite escrever o equilíbrio dinâmico para um elemento finito de volume V_e , considerando que a estrutura sofre acelerações na base $\underline{a}_s(t)$ do tipo acelerações sísmicas com distribuição uniforme ao longo da base de apoio ($\underline{f}_1(t) = m \cdot (\ddot{\underline{u}}(t) + \underline{a}_s(t))$):

$$\int_{V_e} m \underline{N}^T \underline{N} dV \ddot{\underline{u}}^e + \int_{V_e} c \underline{N}^T \underline{N} dV \dot{\underline{u}}^e + \int_{V_e} \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} dV \underline{u}^e = - \int_{V_e} m \underline{N}^T \underline{N} dV \underline{a}_s^e \quad (4.3)$$

que é equivalente a

$$\underline{m}^e \ddot{\underline{u}}(t) + \underline{c}^e \dot{\underline{u}}(t) + \underline{k}^e \underline{u}(t) = \underline{f}^e(t) \quad (4.4)$$

$\underline{m}^e = \int_{V_e} m \underline{N}^T \underline{N} dV$ - Matriz de massa elementar $m = \gamma/g$; onde g é a aceleração da gravidade que tem de valor $9,80665 \text{ m/s}^2$

$\underline{c}^e = \int_{V_e} c \underline{N}^T \underline{N} dV$ - Matriz de amortecimento elementar;

$\underline{f}^e = - \underline{m}^e \underline{a}_s^e$ - Vetor das forças elementares: forças nodais equivalentes às forças de inércia associadas às acelerações sísmicas aplicadas ou simplesmente.

Considerando toda a estrutura, a equação de equilíbrio global é semelhante e obtém-se por sobreposição ou assemblagem das matrizes elementares anteriores.

$$\underset{(N_{GL} \times N_{GL})}{\underline{m}} \cdot \underset{(N_{GL} \times 1)}{\ddot{\underline{u}}(t)} + \underset{(N_{GL} \times N_{GL})}{\underline{c}} \cdot \underset{(N_{GL} \times 1)}{\dot{\underline{u}}(t)} + \underset{(N_{GL} \times N_{GL})}{\underline{k}} \cdot \underset{(N_{GL} \times 1)}{\underline{u}(t)} = \underset{(N_{GL} \times n_I)}{\underline{s}} \cdot \underset{(n_I \times 1)}{\underline{f}(t)} \quad (4.5)$$

\underline{c} - Matriz de amortecimento global

\underline{m} - Matriz de massa global

\underline{k} - Matriz de rigidez global

$\ddot{\underline{u}}(t)$ - Vetor das acelerações

$\dot{\underline{u}}(t)$ - Vetor das velocidades

$\underline{u}(t)$ - Vetor dos deslocamentos

$\underline{f}(t)$ - Vetor com as n_I histórias de forças aplicadas (em n_I graus de liberdade)

\underline{s} - Matriz que regula a distribuição das histórias de forças pelos vários graus de liberdade, de dimensão $(N_{GL} \times n_I)$, em que n_I representa o número de “inputs” (nº de acelerogramas fornecidos ou nº de histórias de forças impostas em graus de liberdade diferentes). Esta matriz envolve geralmente valores nulos e unitários, no entanto, quando se pretende reduzir ou amplificar a intensidade dos “inputs” fornecidos podem ser utilizados coeficientes de redução ou amplificação.

4.2 Análise Dinâmica. Formulação clássica e formulação de estado

A análise do comportamento dinâmico de estruturas, efetua-se normalmente através da utilização de modelos estruturais discretos, devido à necessidade de introduzir aproximações numéricas para obter modelos computacionais, e envolve o estabelecimento de equações diferenciais do movimento na forma matricial tal como se apresenta na anterior equação (4.5).

A equação (4.5) corresponde a um sistema de equações diferenciais ordinárias de 2ª ordem, acopladas (com derivadas em ordem ao tempo). A resolução deste sistema pode ser efetuada no domínio do tempo (escolhendo uma adequada discretização temporal e um método numérico adequado), ou através de uma transposição para o domínio da frequência recorrendo à transformada de Laplace, ou, à transformada de Fourier, para o caso de se considerarem condições iniciais nulas. Em ambos os casos pode-se optar pela diagonalização do sistema através da utilização de coordenadas modais (o que, matematicamente, exige a resolução de um problema de valores e vetores próprios).

Quando se considera, simplificada, a hipótese de amortecimento proporcional a \underline{m} e \underline{k} (hipótese de amortecimento de Rayleigh) utiliza-se a denominada formulação clássica da análise dinâmica na qual o sistema de equações diferenciais é diagonalizado através dos vetores próprios do correspondente sistema sem amortecimento. Admitindo a hipótese de amortecimento generalizado (não proporcional a \underline{m} e \underline{k}), verifica-se que é necessário recorrer a uma formulação no espaço de estados (deslocamentos e velocidades), na qual a diagonalização do sistema é conseguida com base nos vetores próprios da denominada matriz de estado, os quais assumem valores complexos (tal como os correspondentes valores próprios) cujo significado físico é seguidamente explicado de forma detalhada. (Chopra, 1995)

4.2.1 Formulação modal Clássica

Apesar do programa DySSA 1.0 não seguir a formulação modal clássica da dinâmica, apresenta-se em seguida um breve resumo desta formulação com vista a facilitar a comparação com a formulação mais geral em que se admite amortecimento generalizado.

Admitindo que o amortecimento é nulo ($\underline{c} = \underline{0}$), ou que a matriz de amortecimento é proporcional às matrizes \underline{m} e \underline{k} , o cálculo das frequências próprias e dos modos de vibração de uma dada estrutura discretizada num sistema de N_{GL} graus de liberdade, descrita pela eq. (4.5), é efetuado através da resolução do seguinte problema de vetores e valores próprios

$$\underline{k} \underline{\Phi} = \lambda \underline{m} \underline{\Phi} \Leftrightarrow [\underline{k} - \lambda \underline{m}] \underline{\Phi} = \underline{0} \quad (4.6)$$

em que

$$\underline{\lambda}_{(N_{GL} \times 1)} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \omega_i^2 \\ \vdots \end{bmatrix} ; \underline{\Phi}_{(N_{GL} \times N_{GL})} = \begin{bmatrix} \dots & \phi_i & \dots \end{bmatrix} \quad (i=1,2,3,\dots,N_{GL}) \quad (4.7)$$

Determinada desta forma, a denominada matriz modal clássica $\underline{\Phi} = [\phi_1 \dots \phi_n \dots \phi_{N_{GL}}]$ diagonaliza a matriz de massas e a matriz de rigidez de acordo com as seguintes relações

$$\underline{m}^* = \underline{\Phi}^T \underline{m} \underline{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} = \underline{I} \quad (4.8)$$

e

$$\underline{k}^* = \underline{\Phi}^T \underline{k} \underline{\Phi} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \omega_{N_{GL}}^2 \end{bmatrix} = \underline{\lambda} \underline{I} \quad (4.9)$$

e também diagonaliza a matriz de amortecimento se for considerada a hipótese de amortecimento proporcional de Rayleigh (Alves, 2005) definida por:

$$\underline{c} = \alpha \underline{m} + \beta \underline{k} \quad (4.10)$$

\underline{I} - Matriz identidade

- Coeficiente multiplicativo de \underline{m}

- Coeficiente multiplicativo de \underline{k}

vindo então,

$$\underline{c}^* = \underline{\Phi}^T \underline{c} \underline{\Phi} = \begin{bmatrix} c_1^* & 0 & 0 \\ 0 & c_2^* & 0 \\ 0 & 0 & c_{N_{GL}}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r + s\tilde{S}_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & r + s\tilde{S}_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & r + s\tilde{S}_{N_{GL}}^2 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

\underline{c}^* - Matriz de amortecimento modal

\underline{m}^* - Matriz de massa modal

\underline{k}^* - Matriz de rigidez modal

n - Frequências naturais

O interesse destas relações de ortogonalidade é que podem ser usadas para transformar a equação fundamental da dinâmica, correspondente ao sistema de equações diferenciais (4.5), num sistema diagonal (sistema de equações diferenciais desacopladas). De facto verifica-se que os deslocamentos estruturais em cada instante $\underline{u}(t)$ podem ser escritos como uma combinação linear dos modos (vetores próprios do sistema) ou seja

$$\underline{u}(t) = u_1^*(t)\underline{\phi}_1 + u_2^*(t)\underline{\phi}_2 + \dots + u_{N_{GL}}^*(t)\underline{\phi}_{N_{GL}}$$

$$\underline{u}(t) = \begin{bmatrix} \underline{\phi}_1 & \underline{\phi}_2 & \dots & \underline{\phi}_{N_{GL}} \end{bmatrix} \underline{u}^*(t) \quad (4.12)$$

$$\underline{u}(t) = \underline{\Phi} \underline{u}^*(t)$$

Este conceito de sobreposição de modos (ilustrado na **Figura 4.1**), é um conceito chave na análise dinâmica de estruturas: a representação da deformada de uma estrutura num dado instante t pode ser obtida pela soma de todos os modos, multiplicando cada um deles por um determinado coeficiente u_n^* (em muitos casos os 10 primeiros modos de vibração de uma estrutura representam mais de 90% do comportamento dinâmico da mesma).

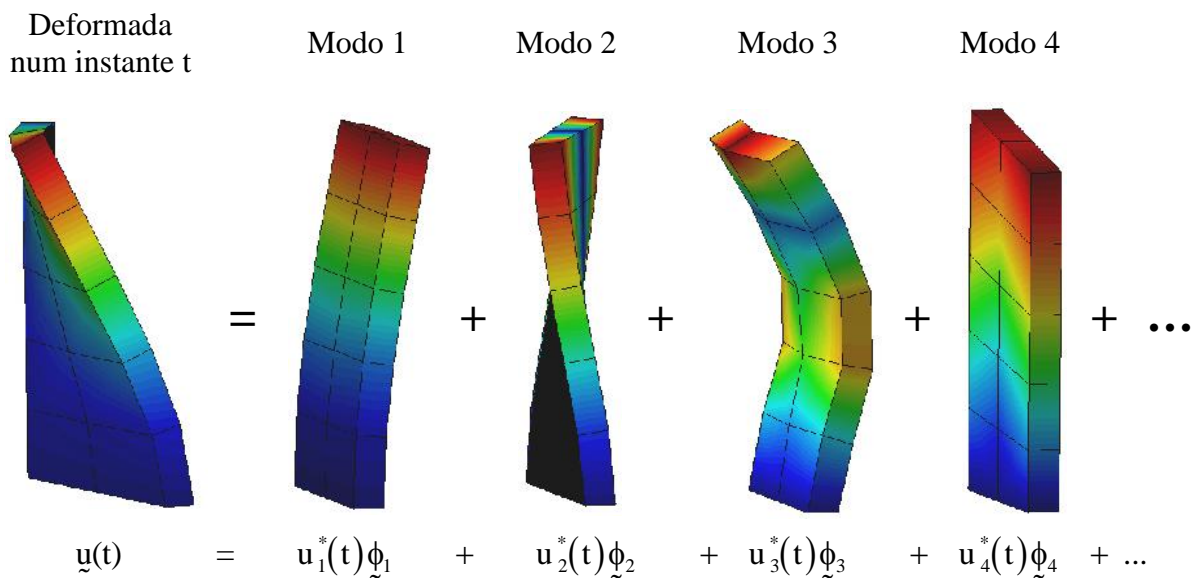


Figura 4.1: Ilustração do conceito de sobreposição de modos (baseado em (Alves, 2005)).

Introduzindo a anterior relação $\underline{u}(t) = \underline{\Phi} \underline{u}^*(t)$ na equação da dinâmica (4.5) e multiplicando ambos os membros por $\underline{\Phi}^T$ é possível diagonalizar a equação da dinâmica, obtendo-se:

$$\underline{m}^* \ddot{\underline{u}}^*(t) + \underline{c}^* \dot{\underline{u}}^*(t) + \underline{k}^* \underline{u}^*(t) = \underline{f}^*(t) \quad (4.13)$$

- $\ddot{\underline{u}}^*(t)$ - Vetor modal das acelerações ($\ddot{\underline{u}}^*(t) = \underline{\Phi}^T \ddot{\underline{u}}(t)$);
- $\dot{\underline{u}}^*(t)$ - Vetor modal das velocidades ($\dot{\underline{u}}^*(t) = \underline{\Phi}^T \dot{\underline{u}}(t)$);
- $\underline{u}^*(t)$ - Vetor modal dos deslocamentos ($\underline{u}^*(t) = \underline{\Phi}^T \underline{u}(t)$);
- $\underline{f}^*(t)$ - Vetor modal das forças ($\underline{f}^*(t) = \underline{L}^T \underline{f}(t)$);
- \underline{L} - Matriz dos fatores de participação $\underline{L} = \underline{\Phi}^T \underline{s}$;

Para a hipótese de amortecimento de Rayleigh verifica-se que, para cada modo j , o amortecimento relativo ($\xi_j = c_j^* / c_j^{*crítico}$) pode ser escrito na seguinte forma (Oliveira e Espada 2012)

$$\xi_j = \frac{c_j^*}{c_j^{*crítico}} = \frac{c_j^*}{2\sqrt{k_j^* m_j^*}} = \frac{c_j^*}{2\sqrt{k_j^* m_j^*}} = \frac{\alpha m_j^* + \beta \omega_j^2}{2\omega_j m_j^*} = \frac{\alpha + \beta \omega_j^2}{2\omega_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\omega_j} + \beta \omega_j \right) \quad (4.14)$$

O que permite visualizar graficamente os amortecimentos modais relativos ξ_j que correspondem a uma dada escolha dos parâmetros de Rayleigh α e β (Alves, 2005). Na **Figura 4.2** encontra-se representada uma curva de Rayleigh definida pelos coeficientes α e β , onde pode ser observada a variação dos amortecimentos modais em função das frequências modais.

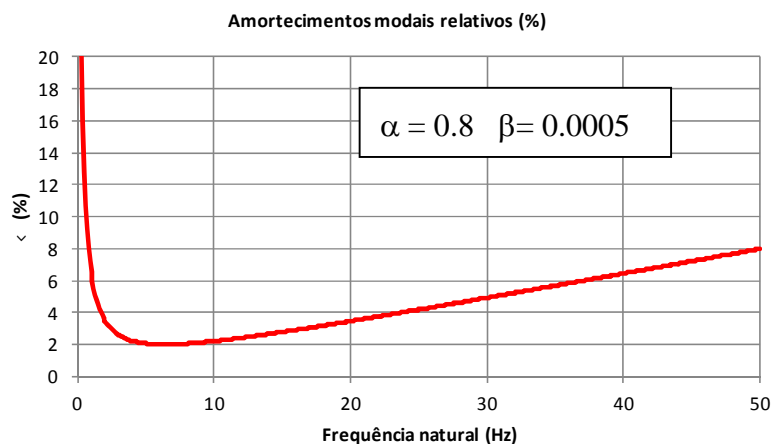


Figura 4.2: Representação da curva de Rayleigh.

4.2.2 Formulação no Espaço de Estados

Na generalidade dos problemas de engenharia civil em que é necessário analisar numericamente o comportamento de sistemas estruturais sob ações dinâmicas é usual admitir a hipótese de amortecimento de Rayleigh atrás referida, segundo a qual a matriz de amortecimento global da estrutura (discretizada em elementos finitos, p.ex.) é proporcional às matrizes de massas e de rigidez globais do sistema. Esta hipótese simplificativa para simular numericamente o efeito do amortecimento tem sido tradicionalmente adotada devido: i) à simplificação que permite introduzir ao nível das formulações e consequente à redução dos tempos de cálculo; ii) ao facto de ser uma hipótese que conduz a resultados aceitáveis na simulação do comportamento dinâmico de estruturas correntes (estruturas constituídas apenas por materiais sólidos, não deteriorados, que respondem às ações atuantes em regime elástico, e com ligações internas e externas não dissipativas); iii) à reconhecida

dificuldade experimental em identificar fisicamente (e em calibrar) os parâmetros mais adequados a utilizar nos modelos numéricos para simular o amortecimento (a simulação dos efeitos de massa e de rigidez é reconhecidamente mais fácil).

De acordo com resultados recentes obtidos através de ensaios laboratoriais em mesa sísmica, através da medição direta do comportamento de protótipos em ensaios de vibração forçada ou vibração ambiente e ainda através da instalação de sofisticados sistemas para monitorização em contínuo da resposta dinâmica de grandes estruturas como pontes, barragens e edifícios de grande porte (sob ações ambientais/operacionais e sob ações sísmicas) têm vindo a ser recolhidos indícios de que nalguns casos poderá ser conveniente considerar a hipótese de amortecimento generalizado, não proporcional à massa e à rigidez global ((Peeters, 2000); (Oliveira, et al., 2012)). É o caso de estruturas com zonas deterioradas, de sistemas com apoios exteriores dissipativos, ou sistemas em que há interação dinâmica com líquidos, como é o caso, por exemplo, de sistemas barragem-fundação-albufera ((Felber, 1998); Oliveira et al 2011,2012).

Nestes casos é conveniente, como se mostra em seguida, adotar uma formulação de estado, ou seja uma formulação em velocidades e deslocamentos.

Formulação em velocidades e deslocamentos (espaço de estados). Modelo de 1GL

O exemplo de um sistema de 1 GL (**Figura 4.3**) é ideal para ilustrar a aplicação da denominada formulação no espaço de estados (em velocidades e deslocamentos) à resolução de problemas de dinâmica de estruturas.

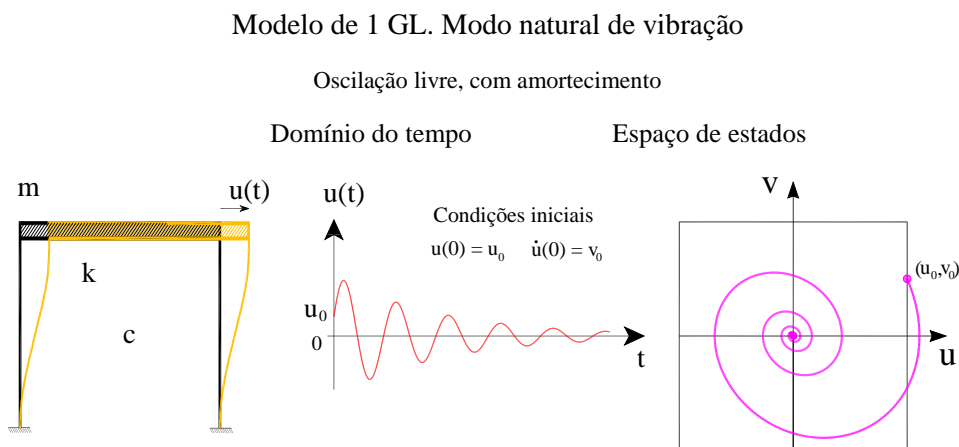


Figura 4.3: Modo natural de vibração de um modelo de 1 GL, com consideração do efeito de amortecimento. Representação no domínio do tempo e no espaço de estados (em velocidades e deslocamentos: espaço $u - v$).

Para obter a denominada representação do espaço de estados da equação da dinâmica de estruturas (equação diferencial de 2ª ordem) há que efetuar uma mudança de variável de forma a obter um sistema de duas equações diferenciais de 1ª ordem equivalente à equação original de 2ª ordem.

Considerando a mudança de variável $\dot{u} = v(t)$ é possível converter a equação da dinâmica de um sistema de 1GL no seguinte sistema de duas equações diferenciais de 1ª ordem em que as funções incógnita são, como se referiu, o deslocamento $u = u(t)$ e a velocidade $v = v(t)$

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = f \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dot{u} = v \\ m\dot{v} + cv + ku = f \end{cases} \quad (4.15)$$

A partir do anterior sistema obtém-se facilmente a conhecida representação no espaço de estados da equação do movimento do modelo estrutural de 1 GL (nas variáveis de estado: deslocamento e velocidade)

$$\begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = -\frac{k}{m}u - \frac{c}{m}v + \frac{f}{m} \end{cases} \quad (4.16)$$

pelo que a equação de estado assume a seguinte forma matricial

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix}}_{\dot{\underline{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -c/m \end{bmatrix}}_{\underline{A}_{(mck)}} \underbrace{\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}}_{\underline{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix}}_{\underline{B}_m} f \quad \text{ou} \quad \dot{\underline{x}} = \underline{A}_{(mck)} \underline{x} + \underline{B}_m f \quad (4.17)$$

em que o vetor \underline{x} , designado vetor de estado, contém o deslocamento e a velocidade, e a matriz $\underline{A}_{(mck)}$ é a matriz de estado.

Para resolver esta equação de estado é conveniente proceder à sua diagonalização através da decomposição da matriz de estado nos correspondentes valores próprios $-\underline{\lambda}_E$ (matriz diagonal 2×2) e vetores próprios $\underline{\Phi}$ (matriz 2×2).

Formulação em velocidades e deslocamentos (espaço de estados). Modelos de vários graus de liberdade N_{GL}

No caso geral de estruturas em que não se considere aceitável adotar a hipótese de amortecimento proporcional (ou hipótese de Rayleigh: $\underline{c} = \alpha \underline{m} + \beta \underline{k}$) verifica-se que não é possível proceder à diagonalização do sistema de equações diferenciais da dinâmica

($\underline{m}\ddot{\underline{u}} + \underline{c}\dot{\underline{u}} + \underline{k}\underline{u} = \underline{f}$) na forma em que ele se apresenta, ou seja, na forma de um sistema de N_{GL} equações diferenciais de 2ª ordem, com N_{GL} funções incógnitas (correspondentes às histórias de deslocamentos nos N_{GL} graus de liberdade da discretização adotada: $u_n = u_n(t)$, com $n = 1, 2, \dots, N_{GL}$).

Contudo, no caso geral de amortecimento não proporcional, em que a matriz de amortecimento global é obtida por assemblagem de matrizes de amortecimento elementares dadas por

$$\underline{c}^e = c_\alpha \cdot \frac{\underline{m}^e}{m} + c_\beta \cdot \underline{k}^e \quad (4.18)$$

em que

- c - Coeficiente multiplicativo da matriz massa elementar
- c - Coeficiente multiplicativo da matriz rigidez elementar
- $m = \gamma/g$ - g é a aceleração da gravidade que tem de valor $9,80665 \text{ m/s}^2$

é também possível obter a pretendida diagonalização se for adotada a representação no espaço de estados, que, como se referiu, consiste em adotar como funções incógnitas não apenas as N_{GL} histórias de deslocamentos $\underline{u} = \underline{u}(t)$, mas também as correspondentes N_{GL} histórias de velocidades $\underline{v} = \underline{v}(t)$ o que implica trabalhar com um sistema de $2 N_{GL}$ equações diferenciais de 1ª ordem, equivalente ao sistema original de N_{GL} equações diferenciais de 2ª ordem.

Para obter o pretendido sistema de equações diferenciais de 1ª ordem a partir do sistema original basta considerar, como no caso de 1 GL, a mudança de variável $\dot{\underline{u}} = \underline{v}(t)$ obtendo-se então o seguinte sistema de duas equações diferenciais (matriciais) de 1ª ordem em que as funções incógnitas são, como se referiu, os deslocamentos $\underline{u} = \underline{u}(t)$ e as velocidades $\underline{v} = \underline{v}(t)$

$$\begin{cases} \dot{\underline{u}} = \underline{v} \\ \underline{m} \dot{\underline{v}}(t) + \underline{c} \underline{v}(t) + \underline{k} \underline{u}(t) = \underline{s} \underline{f}(t) \end{cases} \quad (4.19)$$

A partir desta forma obtém-se facilmente a seguinte representação no espaço de estados da equação do movimento de um modelo estrutural discretizado espacialmente (nas variáveis de estado: deslocamentos e velocidades)

$$\begin{cases} \dot{\underline{u}}(t) = \underline{v}(t) \\ \dot{\underline{v}}(t) = -\underline{m}^{-1}\underline{k} \underline{u}(t) - \underline{m}^{-1}\underline{c} \underline{v}(t) + \underline{m}^{-1}\underline{s} \underline{f}(t) \end{cases} \quad (4.20)$$

ou, matricialmente

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\underline{u}}(t) \\ \dot{\underline{y}}(t) \end{bmatrix}}_{\substack{\underline{\dot{x}} \\ (2N_{GL} \times 1)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{I} \\ -\underline{m}^{-1}\underline{k} & -\underline{m}^{-1}\underline{c} \end{bmatrix}}_{\substack{\underline{A} \\ (mck) \\ (2N_{GL} \times 2N_{GL})}} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{u}(t) \\ \underline{y}(t) \end{bmatrix}}_{\substack{\underline{x} \\ (2N_{GL} \times 1)}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{m}^{-1}\underline{s} \end{bmatrix}}_{\substack{\underline{B} \\ (ms) \\ (2N_{GL} \times n_I)}} \underbrace{\underline{f}(t)}_{(n_I \times 1)} \quad (4.21)$$

É usual escrever a equação anterior de forma mais compacta em termos do denominado vetor de estado

$$\underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} \underline{u}(t) \\ \underline{y}(t) \end{bmatrix} \quad (2N_{GL} \times 1) \quad (4.22)$$

e das matrizes $\underline{A}_{(mck)}$ e $\underline{B}_{(ms)}$, obtendo-se então a conhecida representação de estado da equação do movimento de um modelo estrutural discretizado espacialmente

$$\underline{\dot{x}} = \underline{A}_{(mck)} \underline{x} + \underline{B}_{(ms)} \underline{f} \quad (4.23)$$

em que

$\underline{A}_{(mck)} = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{I} \\ -\underline{m}^{-1}\underline{k} & -\underline{m}^{-1}\underline{c} \end{bmatrix}$ – Matriz de estado ($2N_{GL} \times 2N_{GL}$) envolvendo as propriedades do sistema estrutural discretizado, referentes à distribuição de massa, amortecimento e rigidez;

$\underline{B}_{(ms)} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{m}^{-1}\underline{s} \end{bmatrix}$ – Matriz ($2N_{GL} \times n_I$) envolvendo valores nulos e a inversa da matriz de massa e a distribuição das histórias de forças aplicadas pelos graus de liberdade do modelo discretizado;

$\underline{f} = \underline{f}(t)$ – Vetor ($n_I \times 1$) com as m histórias de forças aplicadas (em apenas p graus de liberdade sendo geralmente $n_I \ll N_{GL}$).

Diagonalização da equação de estado

Para se obter a diagonalização da anterior equação diferencial matricial correspondente à representação de estado do movimento de um modelo estrutural discretizado espacialmente, pode ser usada uma transformação de coordenadas, semelhante à clássica sobreposição de modos dada por $\underline{u} = \underline{\Phi} \underline{u}^*$, mas agora envolvendo a matriz modal $\underline{\Phi}_E$ (denominada matriz modal para a representação de estado ou, simplesmente matriz modal de estado) de dimensão $2N_{GL} \times 2N_{GL}$.

$$\underline{x} = \underline{\Phi}_E \underline{x}^* \quad (4.24)$$

A matriz modal de estado $\underline{\Phi}_E$ é uma matriz cujas colunas correspondem aos vetores próprios da matriz de estado $\underline{A}_{(mck)}$. A determinação de $\underline{\Phi}_E$ envolve, portanto, a resolução do seguinte problema de valores e vetores próprios (dimensão $2N_{GL} \times 2N_{GL}$):

$$\underline{\underline{A}}_{(mck)} \underline{\underline{\phi}} = \underline{\underline{E}} \underline{\underline{\phi}} \Leftrightarrow \left[\underline{\underline{A}}_{(mck)} - \lambda \underline{\underline{I}} \right] \underline{\underline{\phi}} = 0 \quad (4.25)$$

que fornece, para além dos $2N_{GL}$ vetores próprios que constituem as colunas da matriz $\underline{\underline{\Phi}}_E$, os correspondentes $2N_{GL}$ valores próprios (de estado) λ . Dado que a matriz de estado $\underline{\underline{A}}_{(mck)}$ é não simétrica verifica-se que os seus valores próprios são complexos, assim como as componentes dos correspondentes vetores próprios, obtendo-se

$$\underline{\underline{\lambda}}_E = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \bar{\lambda}_1 \\ \vdots \\ \lambda_{N_{GL}} \\ \bar{\lambda}_{N_{GL}} \end{bmatrix}, \lambda_n = \underbrace{-\xi_n \omega_n}_{\text{Componente Real}} + \underbrace{i\omega_n \sqrt{1-\xi_n^2}}_{\text{Componente Imaginária}} \quad (4.26)$$

onde $\|\lambda_n\| < \|\lambda_{n+1}\|$ e $\bar{\lambda}$ representa o conjugado de λ , e

$$\underline{\underline{\Phi}}_E = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\Phi}}_{uE} \\ \underline{\underline{\Phi}}_{uE\lambda} \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{\Phi}}_{uE} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \bar{\phi}_1 & \cdots & \phi_{N_{GL}} & \bar{\phi}_{N_{GL}} \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

$$\underline{\underline{\Phi}}_{uE\lambda} = \begin{bmatrix} \phi_1 \lambda_1 & \bar{\phi}_1 \bar{\lambda}_1 & \cdots & \phi_{N_{GL}} \lambda_{N_{GL}} & \bar{\phi}_{N_{GL}} \bar{\lambda}_{N_{GL}} \end{bmatrix}$$

onde $\bar{\phi}_n$ representa o conjugado de ϕ_n .

Fisicamente, os valores complexos que se calculam correspondem à existência de modos não estacionários. Assim, para um determinado modo n , a vibração em cada G.L. j pode ser descrita como uma onda harmónica cuja amplitude decresce, a qual fica completamente definida com o conhecimento dos seguintes quatro parâmetros, extraídos a partir dos valores complexos:

- i. Frequência natural do modo n :

$$\omega_n = |\lambda_n| \quad (4.28)$$

- ii. Amortecimento do modo n :

$$\xi_n = \frac{-\text{Re}(\lambda_n)}{|\lambda_n|} \quad (4.29)$$

- iii. Amplitude da vibração do modo n , no grau de liberdade m :

$$\rho_{(nm)} = |\phi_{(nm)}| \quad (4.30)$$

iv. Ângulo de fase da vibração do modo n, no grau de liberdade m:

$$\theta_{(nm)} = \arctan\left(\frac{\text{Im}(\phi_{(nm)})}{\text{Re}(\phi_{(nm)})}\right) \quad (4.31)$$

em que “Im” indica a componente imaginária e “Re” a componente real do número complexo.

Conhecendo estes quatro parâmetros, a equação que define a variação das amplitudes ao longo do tempo de uma configuração modal n segundo um grau de liberdade m é definida por:

$$u(t)_{(nm)} = \rho_{(nm)} \cdot \cos(\omega_n \cdot t - \theta_{(nm)}) \quad (4.32)$$

que pode também ser escrita na forma

$$u(t)_{(nm)} = \left[\text{Re}(\phi_{(nm)}) \cdot \cos(\omega_n \cdot t) + \text{Im}(\phi_{(nm)}) \cdot \text{sen}(\omega_n \cdot t) \right] \quad (4.33)$$

Tendo conhecimento que, por definição de vetores e valores próprios de uma matriz, pode-se obter a factorização da matriz de estado com base nos seus vetores e valores próprios

$$\underline{A}_{(mck)} = \underline{\Phi}_E \underline{\Lambda}_E \underline{\Phi}_E^{-1} \quad (4.34)$$

Desta forma a diagonalização da equação de estado obtém-se efetuando a mudança para coordenadas modais $\underline{x}(t) = \underline{\Phi}_E \underline{x}^*(t)$ através da introdução de (4.34) em (4.23):

$$\underline{\Phi}_E \dot{\underline{x}}^*(t) = \left(\underline{\Phi}_E \underline{\Lambda}_E \underline{\Phi}_E^{-1} \right) \left(\underline{\Phi}_E \underline{x}^*(t) \right) + \underline{B}_{ms} \underline{f}(t) \quad (4.35)$$

pré-multiplicando ambos os membros por $\underline{\Phi}_E^{-1}$,

$$\dot{\underline{x}}^*(t) = \underline{I}_{\omega_E}^T \underline{x}^*(t) + \underline{L}_E \underline{f}(t) \quad (4.36)$$

$(2N_{GL} \times 1) \quad (1 \times 2N_{GL}) \quad (2N_{GL} \times 1) \quad (2N_{GL} \times n_I) \quad (n_I \times 1)$

$\underline{x}^* = \underline{x}^*(t)$ - Vetor ($2N_{GL} \times 1$) das coordenadas modais de estado (vetor $\dot{\underline{x}}^*$ com as correspondentes derivadas em ordem ao tempo);

$\underline{L}_E = \underline{\Phi}_E^{-1} \underline{B}_{ms}$ - Vetor ($2N_{GL} \times n_I$) dos fatores de participação modal na representação de estado.

Assim o sistema (4.23) pode ser reduzido a um conjunto de $2N_{GL}$ equações diferenciais de 1ª ordem do tipo

$$\dot{x}_n^*(t) - \lambda_{E_n} x_n^*(t) = f_n^*(t) \quad (n = 1, 2, \dots, 2N_{GL}) \quad (4.37)$$

cuja solução é dada pela seguinte fórmula recursiva

$$x_n^*(t_{i+1}) = e^{E \Delta t} x_n^*(t_i) + \frac{(\Delta t - 1)(e^{E \Delta t} - 1) - E}{E / \Delta t} f_n^*(t_i) + \frac{e^{E \Delta t} + (\Delta t - 1)}{E / \Delta t} f_n^*(t_{i+1}) \quad (4.38)$$

em que Δt corresponde aos incrementos tempo para descrição da variação temporal das forças aplicadas (**Figura 4.4**).

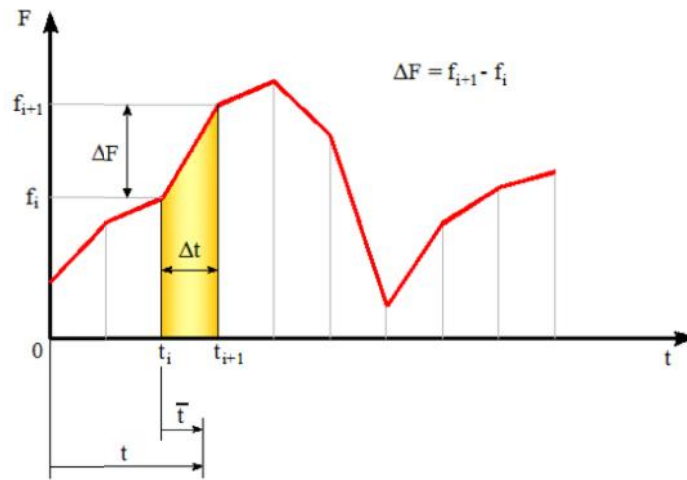


Figura 4.4: Discretização temporal das forças aplicadas.

Na figura seguinte **Figura 4.5** apresenta-se um resumo da formulação de estado destacando-se, em particular, um gráfico que ilustra como podem ser fisicamente interpretados os modos complexos através da representação de movimentos oscilatórios em diferentes graus de liberdade com fases distintas (daí o nome de modos não estacionários).

COMPORTAMENTO DINÂMICO DE SISTEMAS BARRAGEM-FUNDAÇÃO-ALBUFEIRA

Definição do Problema. Aproximação elástica-linear

$\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1(x_1, x_2, x_3, t) \\ u_2(x_1, x_2, x_3, t) \\ u_3(x_1, x_2, x_3, t) \end{bmatrix}$ (3x1)

Água: $K_v = 2,07 \text{ GPa}$, $G = 0$, $m = 1 \text{ ton/m}^3$, c_v^e, c_v^f

Betão: $E_c = 32,5 \text{ GPa}$, $\nu_c = 0,2$, $m_c = 2,5 \text{ ton/m}^3$, c_c^e, c_c^f

Fundação: $E_f \cong E_b$, $\nu_f \cong \nu_b$, $m_f = 0$, c_f^e, c_f^f

Excitação ambiental e operacional

Interface Betão-água: x_1, x_2, x_3

Acelerograma sísmico: a_s (3x1), T

Matriz Elasticidade (material isotrópico):

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} K_v \frac{4}{3} G & K_v \frac{2}{3} G & K_v \frac{2}{3} G & 0 \\ K_v \frac{4}{3} G & K_v \frac{2}{3} G & 0 & 0 \\ K_v \frac{2}{3} G & K_v \frac{2}{3} G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix}$$

$K_v = \frac{E}{3(1-2\nu)}$, $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ [Chen; Saleeb 1994]

Operador Diferencial:

$$\underline{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \end{bmatrix}$$
 (6x3)

FORMULAÇÃO NO ESPAÇO DE ESTADOS. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Compatibilidade: $\underline{\xi} = \underline{L} \underline{u}$

Equação constitutiva: $\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{\xi} + c_{\beta} \underline{D} \dot{\underline{\xi}}$ (Kelvin body)

Equilíbrio: $\underline{L}^T \underline{\sigma} < \underline{f} = 0$

Equilíbrio de forças num ponto: Forma diferencial ou forma forte ($c_{\beta} = 0$)

$\underline{L}^T (\underline{D} \underline{L} \underline{u}) < \underline{f} = 0$, em V

Condições iniciais ou de fronteira: $\underline{f} = m \underline{g} - m (\ddot{\underline{u}} + \underline{a}_s) - c_{\alpha} \dot{\underline{u}}$

Equilíbrio de energia a ser verificada no volume V (VWP): Forma integral ou forma fraca ($c_{\beta} = 0$)

$\int_V (\underline{L} \underline{u})^T \underline{D} (\underline{L} \underline{u}) dV = \int_V \underline{f} \underline{u} dV, \forall \underline{u} \in \mathcal{D}$

Condições iniciais ou de fronteira: Forma usada no MEF

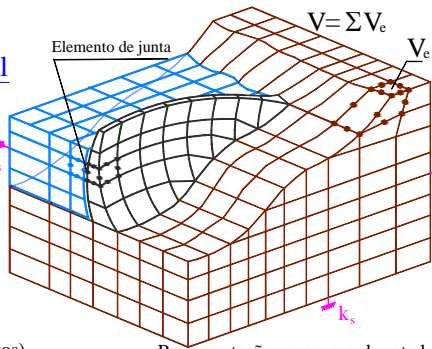
Teorema de Green-Gauss

Solução Numérica (MEF)

1º Passo. Integração Espacial

$$\underline{m} = \sum \underline{m}^e \quad \underline{c} = \sum \underline{c}^e \\
 \underline{k} = \sum \underline{k}^e \quad \underline{f}_G = \sum \underline{f}^e$$

Se $\underline{c} \neq \alpha \underline{m} + \beta \underline{k}$ o sistema diz-se com amortecimento generalizado e os modos de vibração são não estacionários (com componentes complexas) [Veletsos; Ventura 1986]



O campo dos deslocamentos e as funções teste $\underline{\varphi}$ (ou deslc. virtuais) são aproximadas por interpolação: $\underline{u} = \underline{N} \underline{u}^e$ e $\underline{\varphi} = \underline{N} \underline{\varphi}^e$. Por cada EF obtêm-se:

$$\underline{m}^e = \int_{V_e} \underline{m} \underline{N}^T \underline{N} dV \quad \underline{c}^e = c_{\alpha} \underline{m}^e / m + c_{\beta} \underline{k}^e$$

$$\underline{k}^e = \int_{V_e} \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} dV \quad \underline{f}^e = -\underline{m}^e \underline{a}_s^e \text{ (carga sísmica)}$$

$$\underline{B} = \underline{L} \underline{N} \quad \text{[Zienkiewicz 1967]}$$

Representação clássica (em deslocamentos)

$$\begin{cases} \underline{m} \ddot{\underline{u}}(t) + \underline{c} \dot{\underline{u}}(t) + \underline{k} \underline{u}(t) = \underline{f}_G(t) \\ \text{Condições Iniciais} \end{cases}$$

Sistema com N_{GL} de Eq diferenciais de 2ª ordem

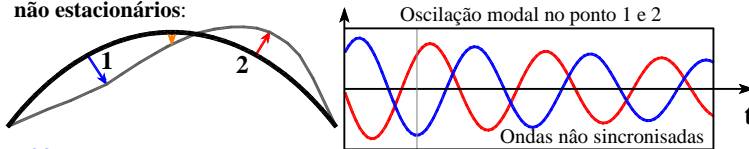
Representação no espaço de estados (em deslocamentos \underline{u} e velocidade \underline{v})

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\underline{u}}(t) \\ \dot{\underline{v}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{I} \\ -\underline{m}^{-1} \underline{k} & -\underline{m}^{-1} \underline{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}(t) \\ \underline{v}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{m}^{-1} \end{bmatrix} \underline{f}_G(t) \\ \text{Condições iniciais} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} \underline{x}(t) + \underline{B} \underline{f}_G(t) \\ \text{Condições iniciais} \end{cases}$$

\underline{x} vetor de estado (2N_{GL} x 1)
 \underline{A} Matriz de estado (2N_{GL} x 2N_{GL})

Sistema com 2N_{GL} de 2 Eq. diferenciais de 1ª ordem

Dos valores próprios (complexos) $\lambda_n = -\xi_n \omega_n \pm i \omega_n \sqrt{1 - \xi_n^2}$ da matriz de estado \underline{A} pode-se retirar os valores das frequências naturais $\omega_n = |\lambda_n|$ e os amortecimentos modais $\xi_n = -\text{Re}(\lambda_n) / \omega_n$ (estes tendem para $\xi_n = 0,5(\alpha \omega_n + \beta / \omega_n)$) Os modos de vibração são fornecidos através dos correspondentes vetores próprios com componentes complexas, que podem ser descritas em **modos de vibração não estacionários**:



Nota: É de notar que o aparecimento de ondas não sincronizadas se deve ao facto de existir uma variação de amortecimento entre os 2 pontos segundo a direção em estudo.

2º Passo. Integração no Tempo

A integração no tempo pode ser feita usando coordenadas modais ou estruturais. Geralmente o tempo é discretização em intervalos de tempo iguais $t = k \Delta t$ e foram deduzidas soluções recursivas. Para forças lineares ao longo do tempo, e usando as coordenadas modais \underline{x}^* (sendo $\underline{x} = \underline{\Phi}_e \underline{x}^*$, onde $\underline{\Phi}_e$ é a matriz dos vetores próprios de \underline{A} , e $\underline{\Lambda}_e$ matriz diagonal correspondente aos valores próprios, $\underline{\Lambda}_e = \underline{\Phi}_e^{-1} \underline{A} \underline{\Phi}_e$) obtêm-se 2NGL equações independentes $\underline{x}^* = \underline{\Lambda}_e \underline{x}^* + \underline{f}^*$; em que as soluções são descritas por:

$$\underline{x}^*(t_{i+1}) = e^{\lambda_e \Delta t} \underline{x}^*(t_i) + \frac{(\Delta t - 1)(e^{\lambda_e \Delta t} - 1) - \lambda_e \Delta t}{\lambda_e / \Delta t} \underline{f}^*(t_i) + \frac{e^{\lambda_e \Delta t} + (\Delta t - 1) - \lambda_e \Delta t}{\lambda_e / \Delta t} \underline{f}^*(t_{i+1}), \quad \underline{f}^* = \underline{\Phi}_e^{-1} \underline{B} \underline{f}_G(t)$$

Figura 4.5: Análise dinâmica de estruturas pelo MEF. Formulação no espaço de estados com amortecimento generalizado (quadro de resumo) (Oliveira, et al., 2012).

4.3 Análise no Domínio da Frequência. Análise de Fourier

Na análise dinâmica de estruturas é importante ter a possibilidade de efetuar estudos não apenas no domínio do tempo mas também no domínio da frequência. Nomeadamente, quando se analisa a resposta dinâmica de uma estrutura (calculada com modelos numéricos ou medida nos protótipos ou em modelos físicos) é de todo o interesse ter a possibilidade de recorrer a representações temporais (gráficos de histórias no tempo de deslocamentos, acelerações, tensões, etc., para diversos pontos da estrutura) e às correspondentes representações espectrais (gráficos em frequência, com as amplitudes e fases das ondas sinusoidais constituintes da resposta temporal). O estudo espectral da resposta de uma estrutura (ou estudo no domínio da frequência) permite, por exemplo, a identificação dos valores das frequências naturais da estrutura e dos correspondentes modos naturais de vibração (Rodrigues, 2004). Estes estudos no domínio da frequência baseiam-se no conceito de decomposição de funções em ondas sinusoidais de diferentes frequências, o qual foi originalmente introduzido por Fourier.

Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) foi um matemático e engenheiro, que no âmbito dos seus estudos sobre a propagação de ondas de calor em sólidos, descobriu que, qualquer função representável graficamente pode ser decomposta numa soma de infinitas ondas sinusoidais, como se encontra ilustra na **Figura 4.6**.

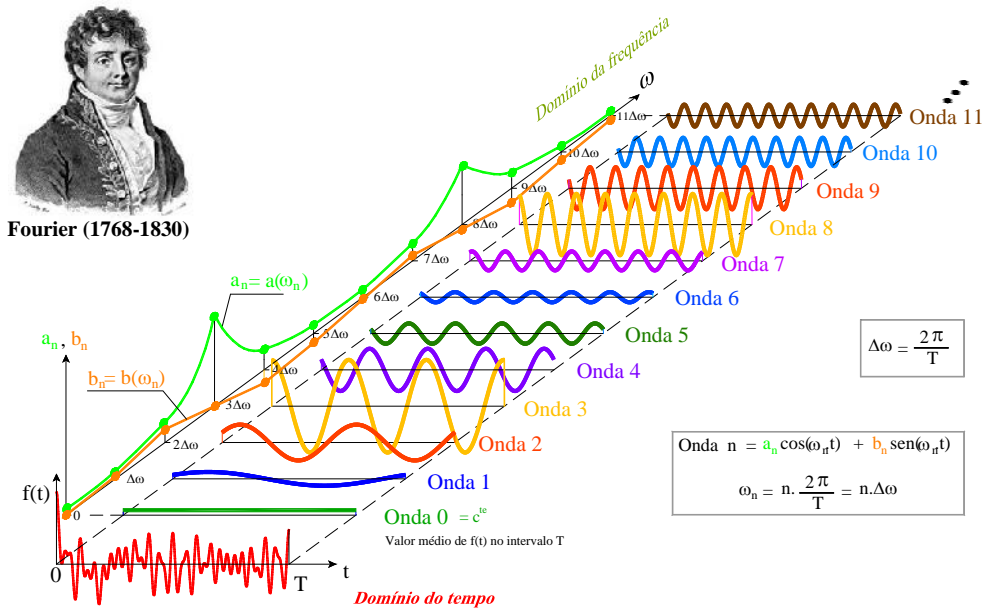
A aproximação em série de Fourier de uma função $f(t)$ definida num intervalo de comprimento finito T é então dada pela seguinte expressão:

$$f_T(t) = c^{te} + \sum_{n=1}^{\infty} \text{onda } n = c^{te} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(\omega_n t) + b_n \text{sen}(\omega_n t)), \text{ com } \omega_n = n\Delta\omega \quad (4.39)$$

A constante que aparece na expressão da série de Fourier é dada pelo valor médio da função $f(t)$ definida no intervalo T

$$c^{te} = v_m = \langle f(t) \rangle_T = \frac{\text{Área}}{T} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (4.40)$$

Este valor médio corresponde à altura de um retângulo de área igual à área sob a função, a qual é dada pelo seu integral definido no intervalo T como se mostra na **Figura 4.7**.



Aproximação em série de Fourier da função: $f(t)$, $t \in [0, T]$

$$f_T(t) = \underbrace{c^{te}}_{v_m} + \text{Onda 1} + \text{Onda 2} + \text{Onda 3} + \text{Onda 4} + \dots$$

$a_1 \cos(\omega_1 t) + b_1 \text{sen}(\omega_1 t)$
 $\omega_1 = 1 \cdot \Delta\omega$

$a_2 \cos(\omega_2 t) + b_2 \text{sen}(\omega_2 t)$
 $\omega_2 = 2 \cdot \Delta\omega$

$a_3 \cos(\omega_3 t) + b_3 \text{sen}(\omega_3 t)$
 $\omega_3 = 3 \cdot \Delta\omega$

A transformada de Fourier de $f(t)$ é definida como a função complexaz:

$$F(\omega_n) = \frac{a_n + i b_n}{T}, \quad -\infty < \omega_n < +\infty$$

onde $a = a(\omega_n)$ e $b = b(\omega_n)$ são funções reais que representam os coeficientes das ondas

Figura 4.6: Decomposição da função $f(t)$, definida entre o intervalo de tempo $[0, T]$, em ondas sinusoidais (adaptado de (Oliveira, et al., 2012)).

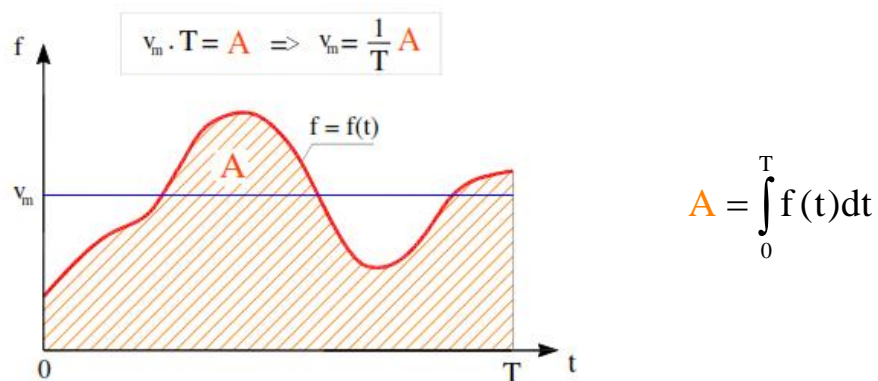


Figura 4.7: Uso do conceito de integral no cálculo do valor médio de uma função $f(t)$ num intervalo de tempo $[0, T]$ (Oliveira, et al., 2012).

No entanto, a expressão (4.39) também pode ser escrita de uma forma mais compacta, através da representação complexa das funções trigonométricas, recorrendo à fórmula de Euler dos números complexos $e^{ix} = \cos x + i \cdot \text{sen } x$, que permite escrever:

$$\cos(\omega_n t) = \frac{e^{i\omega_n t} + e^{-i\omega_n t}}{2} \quad \text{e} \quad \text{sen}(\omega_n t) = \frac{-ie^{i\omega_n t} + ie^{-i\omega_n t}}{2} \quad (4.41)$$

Substituindo estas igualdades nas séries de Fourier e desenvolvendo a expressão, tem-se que:

$$f_T(t) = v_m + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{e^{i\omega_n t} + e^{-i\omega_n t}}{2} + b_n \frac{-ie^{i\omega_n t} + ie^{-i\omega_n t}}{2} \right) \quad (4.42)$$

que pode ser simplificada para:

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n - i b_n}{2} e^{i\omega_n t}, \quad -\infty < \omega_n = n \cdot \Delta\omega < +\infty \quad (4.43)$$

Pode-se ainda escrever a expressão $\frac{a_n - i \cdot b_n}{2}$ na forma de integral, isto é:

$$\frac{a_n - i \cdot b_n}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos(\omega_n t) dt - i \cdot \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot \text{sen}(\omega_n t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot \underbrace{(\cos(\omega_n t) - i \cdot \text{sen}(\omega_n t))}_{e^{-i\omega_n t}} dt \quad (4.44)$$

ou seja,

$$\frac{a_n - i b_n}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega_n t} dt \quad (4.45)$$

Normalmente designa-se por Transformada Discreta de Fourier (TDF) da função $f(t)$ no intervalo finito $[0, T,]$, a função complexa $F_T(\omega_n)$ dada por:

$$F_T(\omega_n) = \int_0^T f_T(t) e^{-i\omega_n t} dt = \frac{a_n - i b_n}{2} \cdot T, \quad -\infty < \omega_n = n \cdot \Delta\omega < +\infty \quad (4.46)$$

Na análise dinâmica de estruturas com base em modelos numéricos é possível aplicar a TDF às histórias de deslocamentos calculados numericamente com vista a determinar picos espectrais correspondentes às frequências próprias da estrutura.

4.3.1 Utilização de programas para o cálculo de TDF

Na prática, para decompor funções nas respectivas ondas constituintes recorre-se a programas computacionais, baseados num algoritmo de grande eficiência computacional, designado por *Fast Fourier Transform* (FFT) (Cooley & Tukey, 1965).

Com o **MATLAB**, utilizado neste trabalho, o cálculo dos coeficientes a_n e b_n das ondas constituintes de uma dada função do tempo $f(t)$ pode ser efetuado recorrendo ao comando **fft()** (“*Fast Fourier Transform*”) que corresponde a uma “*built-in function*” do **MATLAB**.

Conhecendo uma dada função $f(t)$ (por exemplo, a resposta no tempo, correspondente a um deslocamento pontual de uma estrutura sujeita a uma determinada história de forças aplicadas) definida discretamente num dado número NP de pontos do domínio, igualmente espaçados de Δt , com o comando **fft()**, obtêm-se os valores da correspondente Transformada discreta de Fourier (TDF), $F_T(\omega_n)$ que corresponde a um conjunto de NP valores complexos, a partir dos quais se determinam os coeficientes a_n e b_n das várias ondas n , usando as seguintes expressões:

$$a_n = \frac{2 \operatorname{Re}(F_T(\omega_n)) \cdot \Delta t}{T} \quad \text{e} \quad b_n = -\frac{2 \operatorname{Im}(F_T(\omega_n)) \cdot \Delta t}{T} \quad (4.47)$$

Destes NP valores fornecidos para $F_T(\omega_n)$, a primeira metade é constituída pelos valores de $F_T(\omega_n)$ correspondentes a ω_n positivos e a segunda metade engloba os valores correspondentes às frequências com os valores simétricos de ω_n . Desta forma são identificadas apenas NP/2 ondas (valores complexos), sendo os restantes valores informação repetida.

A representação das séries de Fourier pode ser feita com base em gráficos espectrais de amplitudes $A(\omega_n)$ (**Figura 4.8**) e ângulos fase $\theta(\omega_n)$:

$$A(\omega_n) = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \text{e} \quad \theta(\omega_n) = \operatorname{arctg}\left(\frac{b_n}{a_n}\right) \quad (4.48)$$

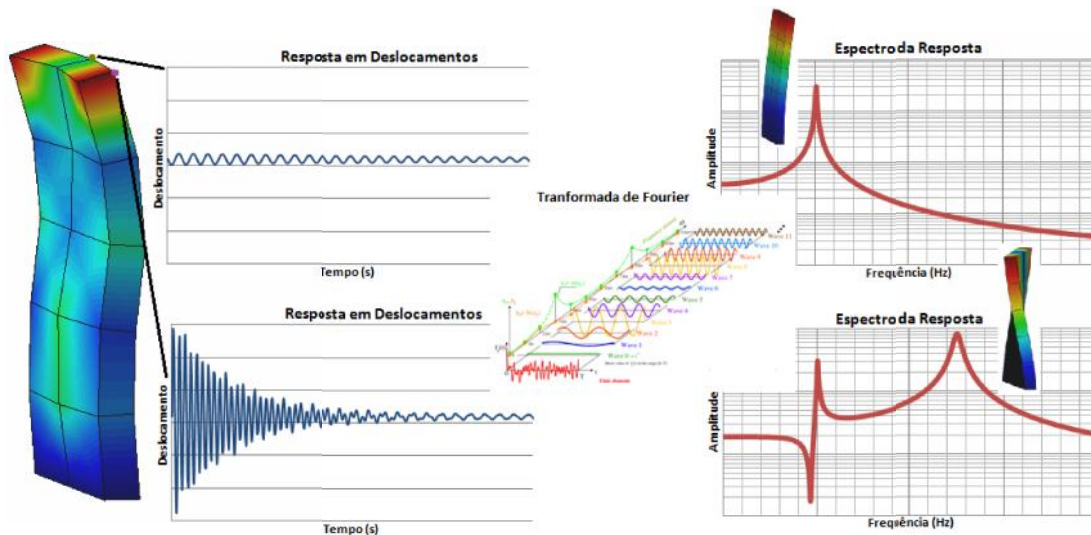


Figura 4.8: Representação da resposta estrutural com base em gráficos no domínio do tempo e no domínio da frequência. Utilização da TDF.

4.4 Desenvolvimento do programa DySSA1.0. Análise Dinâmica de Estruturas (EF3D) com base numa formulação de estado

4.4.1 Algoritmo do Programa

Neste ponto apresenta-se na tabela seguinte um resumo do algoritmo do programa DySSA 1.0 (“Dynamic State Space Analysis”) desenvolvido no âmbito deste trabalho, para a análise dinâmica de estruturas maciças discretizadas em elementos finitos tridimensionais. Trata-se de um programa desenvolvido em MATLAB que permite a análise dinâmica de sistemas barragem-fundação-albufeira com base numa formulação de estado com a qual é possível considerar a albufeira discretizada em elementos finitos de água. Na interface água estrutura consideram-se elementos de junta; no corpo da barragem e na fundação rochosa também se podem utilizar elementos finitos de junta para representar superfícies de descontinuidade (fendas, juntas de contração, falhas ou diaclases). Neste programa utilizam-se coordenadas modais e é possível considerar a hipótese de amortecimento generalizado (matriz de amortecimento global do sistema não proporcional às matrizes de massas e de rigidez). As frequências naturais, modos de vibração e amortecimentos modais relativos são calculados através da determinação dos valores e vetores próprios da matriz de estado (recorrendo à “built-in function” $\text{eig}()$), os quais são representados por números complexos devido ao fato da matriz de estado ser não simétrica.

Na **Figura 4.9** mostra-se o ambiente MATLAB após a realização da análise dinâmica de um sistema barragem-fundação-albufeira com o programa DySSA 1.0. Nesta figura

apresentam-se algumas das saídas gráficas do DySSA 1.0, nomeadamente histórias no tempo, espetros e representações 3D de modos de vibração.

PROGRAMA DYSSA 1.0. ANÁLISE ESTÁTICA E DINÂMICA DE ESTRUTURAS 3D PELO MEF

FORMULAÇÃO DE ESTADO. ANÁLISE MODAL (CÁLCULO DE MODOS COMPLEXOS)

(1) ANÁLISE ESTÁTICA (ver capítulo 3.4.1)

(2) ANÁLISE DINÂMICA

(2.1)- Assemblagem da matriz de estado \underline{A} (montada a partir das matrizes de rigidez, de massas e de amortecimento)

(2.2)- Cálculo dos valores e vetores próprios da matriz \underline{A} através da utilização do comando “eig”.

(2.3)- Escolha da ação aplicar:

- Aceleração na base- leitura do ficheiro de dados.
- Forças aplicadas num espaço de tempo- leitura do ficheiro de dados.
- Ruído branco- introdução das variáveis necessárias para o cálculo, utilização do comando “rand”.

(2.4)- Criação do vetor s

(2.5)- Montagem da matriz \underline{B}_{ms} .

(2.6)- Cálculo dos deslocamentos e velocidades modais ao longo do tempo a partir da fórmula recursiva.

(2.7)- Cálculo dos deslocamentos e velocidades ao longo do tempo.

(2.8)- Introdução dos graus de liberdade para o cálculo dos espetros da resposta

(2.9)- Cálculo dos espetros da resposta e dos ângulos fase através da aplicação do comando “fft()”

(2.10)- Escrita na folha de dados: as histórias de deslocamentos, espetros de resposta e ângulos de fase dos graus de liberdade selecionados.

(3) DESENHOS DE ANÁLISE ESTÁTICA (ver capítulo 3.4.1)

(4) DESENHOS DE ANÁLISE DINÂMICA

(4.1)- Criação de um gráfico com o andamento das acelerações/forças ao longo do tempo.

(4.2)- Criação de um gráfico com o andamento dos deslocamentos ao longo do tempo, segundo os todos os graus de liberdade, de um ponto previamente fornecido.

(4.3)- Criação de um gráfico que relaciona o andamento dos amortecimentos modais em relação á frequência. Marcação das frequências próprias e do seu número.

(4.4)- Desenho dos espetros da resposta (amplitudes e correspondentes ângulos de fase), para os graus de liberdade introduzidos em 2.8.

(4.5)- Introdução do número dos modos que se pretende desenhar, através de uma janela de comandos própria.

(5.3)- Desenho dos modos, recorrendo a uma escala de cores, e criação de um gráfico com as histórias de deslocamentos ao longo do tempo de 3 pontos previamente escolhidos.

(4.6)- Visualização de um filme relativo à deformada da malha ao longo do tempo, com representação dos deslocamentos através de uma escala de cores. Gravação para um ficheiro de extensão “.avi”.

(4.7)- Introdução dos números dos modos que se pretendem ver desenhados através de uma janela de comandos própria.

(4.8)- Visualização de filmes relativos à variação das formas modais ao longo do tempo, representação dos deslocamentos através de uma escala de cores. Gravação para um ficheiro de extensão “.avi”.

(4.9)- Visualização de um filme relativo á deformada e tensões nos pontos de Gauss, ao longo do tempo, da malha relativa à estrutura principal do sistema. Gravação para um ficheiro de extensão “.avi”.

(5) CONSTRUÇÃO DE FICHEIROS DE LEITURA PARA O GID

(5.1)- Criação de dois ficheiros de leitura no Gid, referente á construção e propriedades da malha.

(5.2)- Criação de um ficheiro de leitura no Gid, aos deslocamentos relativos aos modos.

(5.3)- Criação de um ficheiro de leitura no Gid, aos deslocamentos dinâmicos mais estáticos com as respetivas tensões.

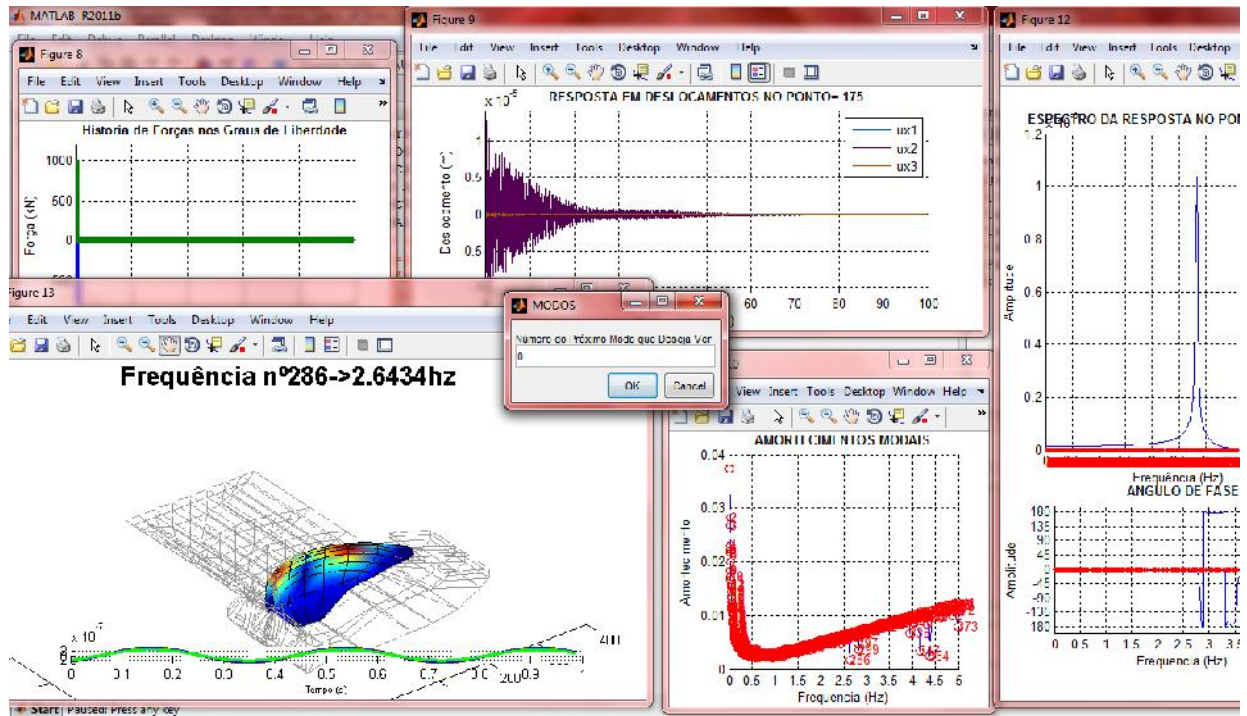


Figura 4.9: Programa DySSA1.0 em MATLAB. Cálculo dinâmico da barragem do Cabril para uma cota de água de 265 m (cota do coroamento: 297 m).

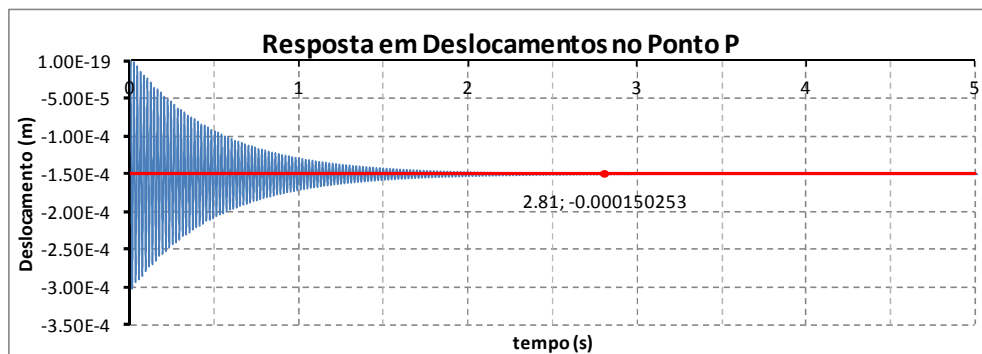
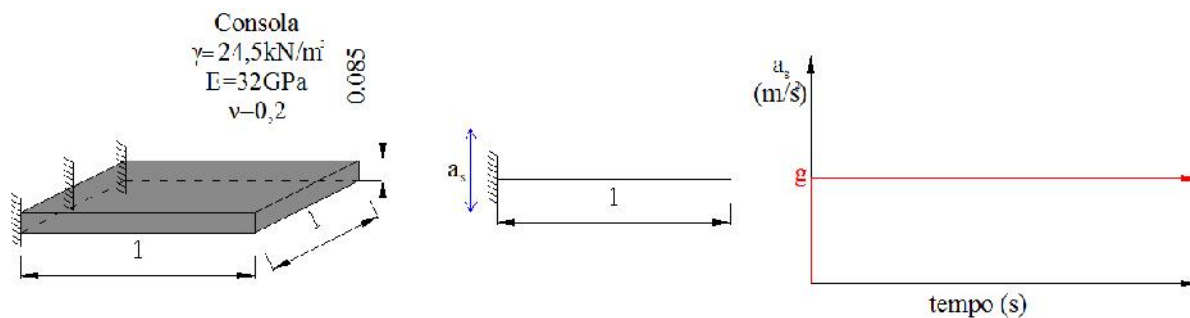
4.4.2 Exemplos de teste

Para validar o programa DySSA1.0 foram efetuados vários testes dos quais se apresentam os dois seguintes.

1) Primeiro teste

Para testar o programa DySSA1.0 considerou-se como primeiro exemplo de teste uma laje de betão em consola, com 1 m × 1 m, e com uma espessura de 0,085m (**Figura 4.10**). A ação considerada foi uma aceleração vertical nos apoios, constante no tempo, de amplitude igual à aceleração da gravidade ($g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$). É de esperar que a consola oscile até estabilizar na posição correspondente à deformada estática sob a ação do peso (força da gravidade) para a qual o deslocamento na extremidade é

$$u_{\text{pontoP}}^{\text{estático}} = -1,5273 \times 10^{-4} \text{ m}$$



$$c_{\alpha} = 4 \times 10^{-3}; c_{\beta} = 4 \times 10^{-5}$$

$$u_{\text{estático}} = -0,00015273\text{m} \quad u_{\text{dinâmico}}(s) = -0,000150253\text{m}$$

Figura 4.10: Análise dinâmica de uma consola de betão sujeita a uma aceleração na base, constante no tempo, igual à aceleração da gravidade.

Como se pode ver na **Figura 4.10** o deslocamento calculado no final do movimento oscilatório devido à ação da aceleração constante no tempo aplicada na base de apoio é:

$$u(t \rightarrow \infty)_{V_{\text{ponto P}}}^{\text{dinâmico}} = -1,50253 \times 10^{-4} \text{ m}$$

como este valor é praticamente igual ao valor do deslocamento estático devido ao peso próprio da consola, pode-se concluir que o cálculo dinâmico com o DySSA1.0 conduziu ao resultado esperado.

2) Segundo teste

No segundo teste considerou-se uma parede vertical de betão ($\gamma = 24.5 \text{ kN/m}^3$; $E = 32.5 \text{ GPa}$ e $\nu = 0.2$) em consola com 1m de altura e 0,5m de largura e com uma espessura de 0,085m. Com estas dimensões trata-se de uma estrutura que pode ser aproximadamente analisada com base nas hipóteses simplificativas da teoria das peças lineares (**Figura 4.11**) (os modos de flexão e correspondentes frequências naturais podem ser aproximadamente

calculados pela teoria das peças lineares). Desta forma, a comparação apresentada na tabela seguinte entre os resultados analíticos, determinados com base nas conhecidas expressões das frequências naturais de peças lineares (Clough & Penzien, 2003), e os resultados numéricos obtidos através do DySSA 1.0, mostra o bom funcionamento do programa.

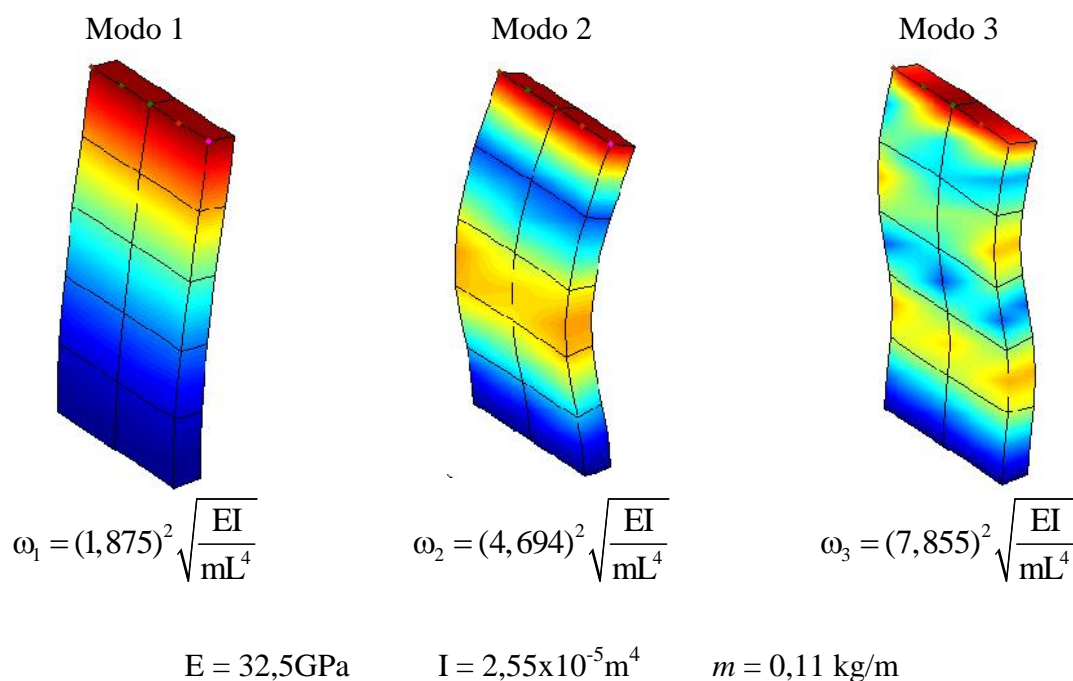


Figura 4.11: Primeiros três modos de flexão da consola. Expressões de cálculo dos valores teóricos das frequências naturais de uma consola (teoria das peças lineares).

Tabela 4.1: Comparação dos valores das frequências naturais obtidos analiticamente e numericamente (DySSA 1.0)

Modo	Valor teórico (Hz)	Valor Numérico (Hz)	Erro (%)
1	49,52	50,28	1,15
2	310,40	310,20	-0,06
3	869,23	856,01	-0,11

4.5 Considerações Finais

Neste capítulo apresentaram-se os fundamentos da análise dinâmica de estruturas na perspectiva das análises no domínio do tempo e no domínio da frequência.

Após ser sido apresentada a formulação clássica da dinâmica, para a hipótese de amortecimento proporcional a \underline{m} e \underline{k} , foi apresentada a formulação no espaço de estados que

permite considerar a hipótese de amortecimento generalizado (não proporcional à massa e à rigidez).

Para introduzir os diversos conceitos e para testar o programa DySSA 1.0 recorreu-se ao exemplo de uma parede em consola.

5

Aplicações

5.1 Considerações Iniciais

Neste capítulo descrevem-se dois exemplos de aplicação nos quais se utilizou o programa DySSA1.0 para interpretar resultados experimentais referentes à medição do comportamento dinâmico de estruturas envolvendo o efeito de interação dinâmica água-estrutura.

A primeira aplicação corresponde ao estudo do comportamento dinâmico do modelo físico de uma parede de betão em consola quando a mesma se encontra em contacto com água (comparação de resultados numéricos com resultados experimentais obtidos em ensaios dinâmicos realizados no Laboratório de Estruturas do ISEL [Mendes 2010]).

A segunda aplicação corresponde ao estudo do comportamento dinâmico da barragem do Cabril (a barragem abóbada portuguesa de maior altura: 132 m) na qual foi instalado em 2008 um sistema para monitorização em contínuo do seu comportamento dinâmico [Oliveira 2002]. Os resultados experimentais obtidos com este sistema (nomeadamente frequências naturais e modos de vibração para diferentes cotas de água) são comparados com os resultados numéricos obtidos com o DySSA1.0.

5.2 Análise do Comportamento Dinâmico de uma parede em Consola. Estudo experimental e numérico com interação água-estrutura.

Para testar o funcionamento de um programa de análise estrutural é conveniente começar por analisar casos de estruturas simples. Desta forma foi realizado um estudo do comportamento dinâmico de uma parede em consola em interação com a água. Para tal recorreu-se ao modelo físico de uma parede vertical de betão, em consola, inserida num tanque prismático de betão para contenção de água (ver **Figura 5.1**): a parede em consola está separada das restantes paredes do tanque por duas juntas verticais (devidamente impermeabilizadas com uma tela fina) e, por isso, pode vibrar livremente em relação às restantes (ver **Figura 5.1.a**), o que permitiu a realização de vários ensaios dinâmicos para diferentes alturas de água.

A parede em consola tem 1m de altura, uma largura de 0,5 m e 8,5 cm de espessura. A base do tanque é também em betão armado, com uma espessura de 25 cm.

Os resultados experimentais foram obtidos através da medição de acelerações em vários pontos da consola durante a aplicação de diversas sequências de impactos. O tratamento dos resultados experimentais foi efetuado através da utilização de programas de identificação modal baseados na técnica de decomposição no domínio da frequência que permitem identificar picos espectrais nas frequências correspondentes aos principais modos de vibração natural.

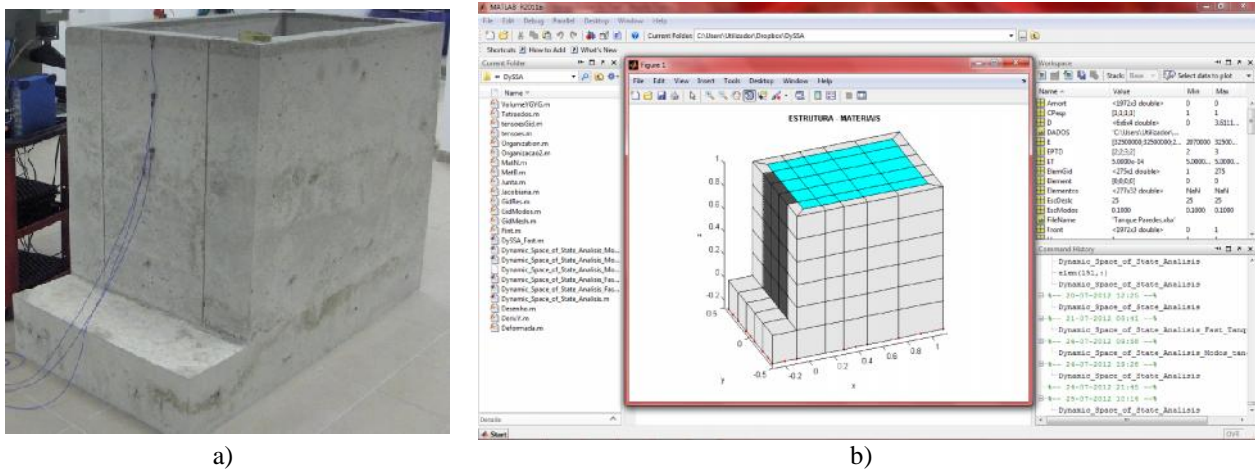


Figura 5.1: a) Modelo físico do tanque usado para a obtenção de valores experimentais.
b) Cálculo do tanque com o programa DySSA 1.0.

O comportamento dinâmico do modelo físico da parede em consola foi seguidamente analisado com o programa DySSA 1.0 como se mostra na **Figura 5.1.b**.

A malha de elementos finitos utilizada (ver **Figura 5.2**) é constituída por 275 elementos finitos tipo cubo isoparamétricos de 20 nós (150 nas paredes e na base do tanque e 125 na água para a situação de tanque cheio – altura 1 m) e por 135 elementos de junta para simular o comportamento na interface água-estrutura com rigidez tangencial nula (I), 6 elementos de junta betão-betão (II) com elevada rigidez normal e tangencial (permitem a ligação da junta na água à base de betão) e 10 elementos de junta água-água que permitem a ligação à água das juntas verticais que delimitam a consola.

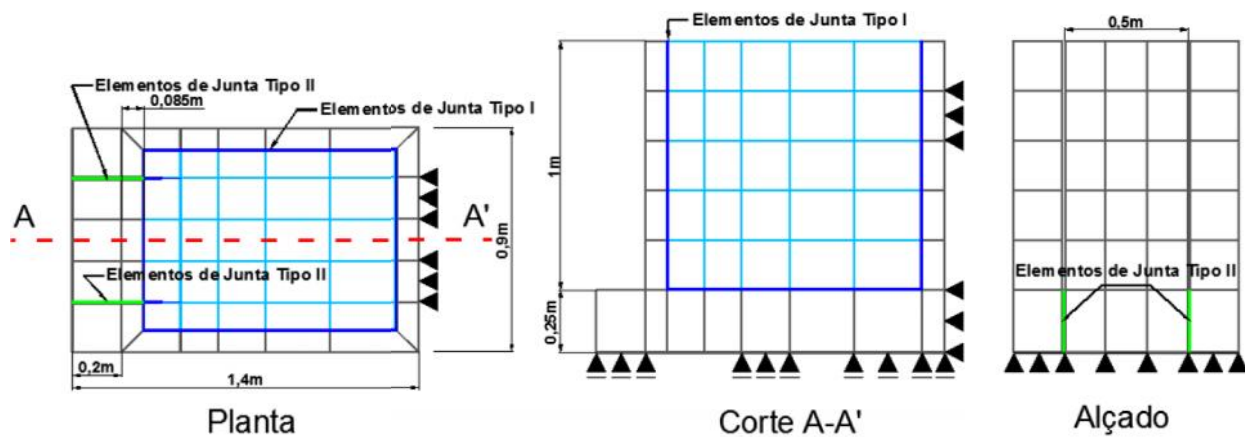


Figura 5.2: Planta, corte e alçado da malha do tanque utilizada no programa de cálculo DySSA 1.0.

Na interface água-betão (I) admitiu-se uma rigidez normal igual a 2,5E5 GPa e uma rigidez ao corte nula. Na base, para efeitos de transição, considerou-se uma interface rígida betão-betão (II) na qual se admitiu uma rigidez normal e tangencial elevada ($K_N = K_T = 2,5E9$ GPa). Para a medição do módulo de elasticidade do betão foi realizado um ensaio de ultrassons, o qual se baseia na determinação da velocidade de propagação dum impulso ultrassónico entre dois pontos de medida a qual pode ser correlacionada com o valor do módulo de elasticidade utilizando a seguinte expressão (5.1)

$$E = v^2 \dots \frac{(1 + \dots)(1 - 2 \dots)}{1 - \dots} \quad (5.1)$$

Tendo em consideração que :

ν - coeficiente de Poisson do betão (0,2)

ρ - massa específica do betão (24,5 ton/m³)

v - velocidade de propagação dos ultrassons, medida no betão (3800 m/s)

obtem-se, para o betão, o valor $E = 32,5$ GPa (ver **Figura 5.3**).

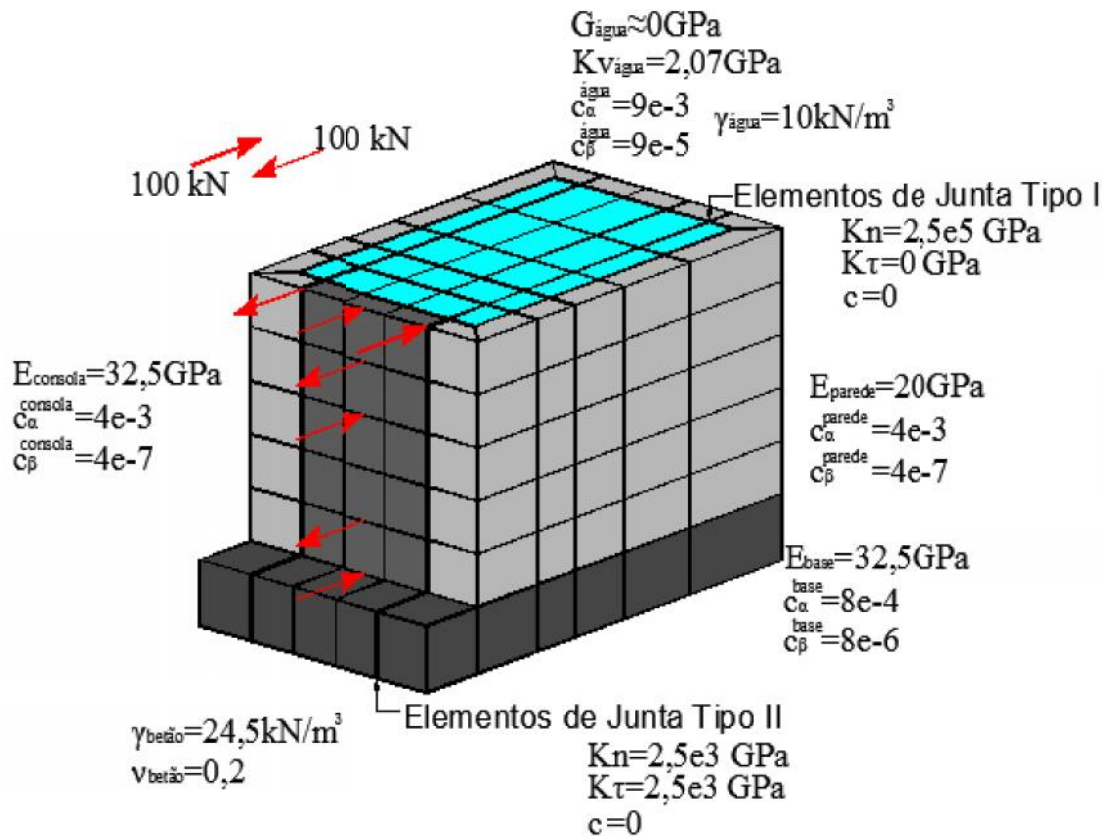


Figura 5.3: Discretização em elementos finitos 3D, tipo cubo de 20 nós. Parâmetros de deformabilidade e de amortecimento utilizados no cálculo numérico (DySSA 1.0): betão, água e interfaces.

Na **Figura 5.4** apresentam-se os espectros (num ponto lateral) da resposta medida e da resposta calculada numericamente para as diferentes cotas de água. Pode-se observar que, para as diferentes cotas de água, ambos os espectros apresentam valores de pico aproximadamente nas mesmas frequências o que significa que o modelo numérico utilizado é adequado para simular com boa aproximação a resposta dinâmica da parede/tanque para as diferentes cotas de água.

Em particular é de salientar o bom acerto entre os resultados experimentais e numéricos para o caso da frequência do 1º modo a qual varia entre um valor de ~48 Hz na situação de tanque vazio até um valor de cerca de 33 Hz na situação de tanque cheio. É interessante notar que na situação de tanque cheio surge um modo relativamente importante na frequência de 70 Hz (modelo numérico) ou 60 Hz (modelo físico) o qual está relacionado com a vibração das paredes laterais do tanque, a qual se reflete nos movimentos da parede frontal em estudo (parede em consola) devido precisamente à “ligação” que a água confere a todo o conjunto o que apenas se consegue simular utilizando elementos finitos de água (este modo não poderá ser captado com um modelo simples de massas de água associadas).

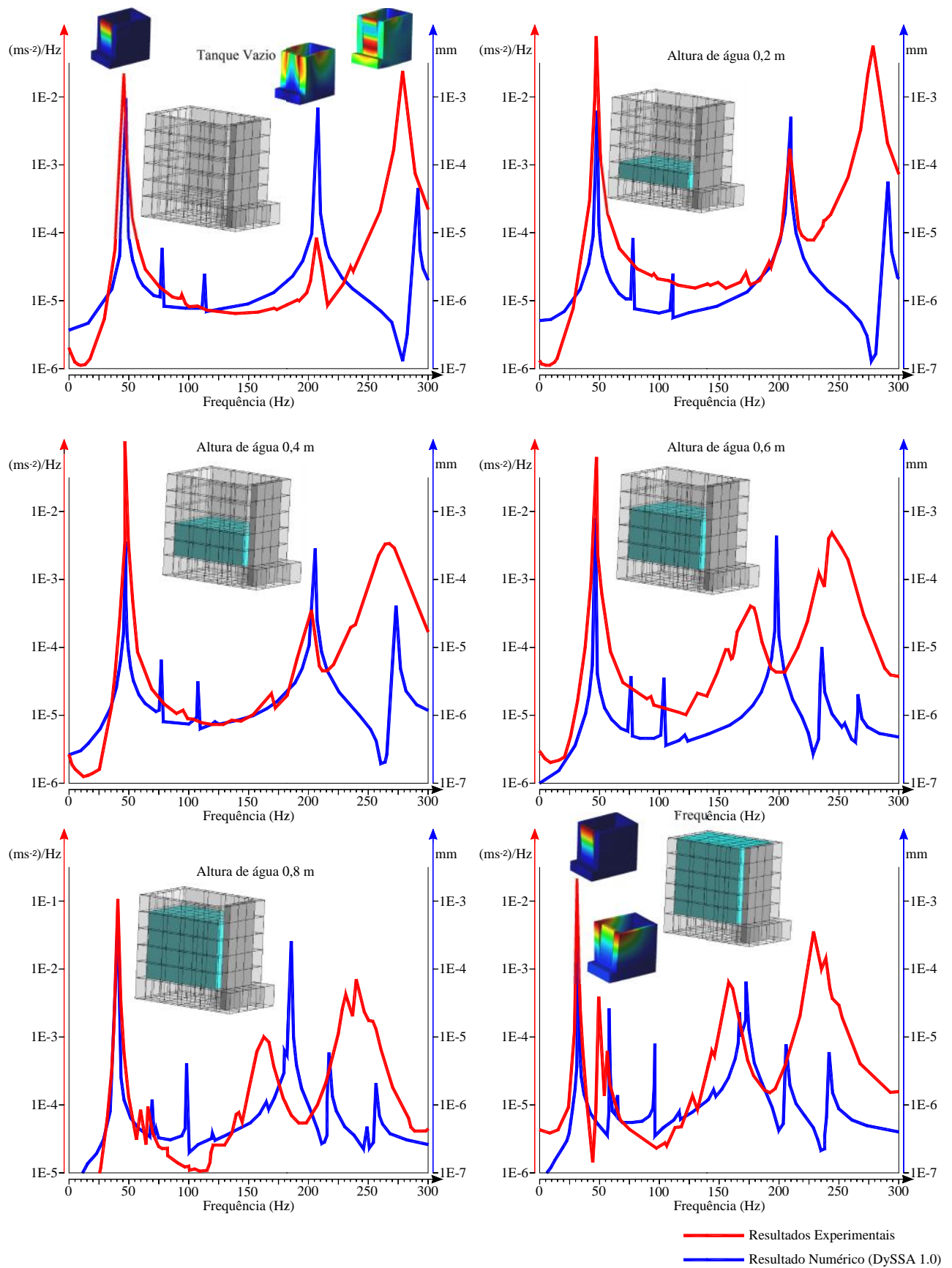


Figura 5.4: Espectros da resposta medida na consola, para as diferentes alturas de água. Comparação entre os resultados obtidos experimentalmente e os obtidos através do DySSA 1.0 .

Na **Figura 5.5** apresentam-se as linhas de influência das frequências dos principais picos espectrais em função da cota de água no tanque, comparando os valores obtidos experimentalmente, a traço contínuo, com os obtidos numericamente, a traço interrompido (ver **Figura 5.6**), sendo de notar um razoável acerto entre os resultados experimentais e numéricos.

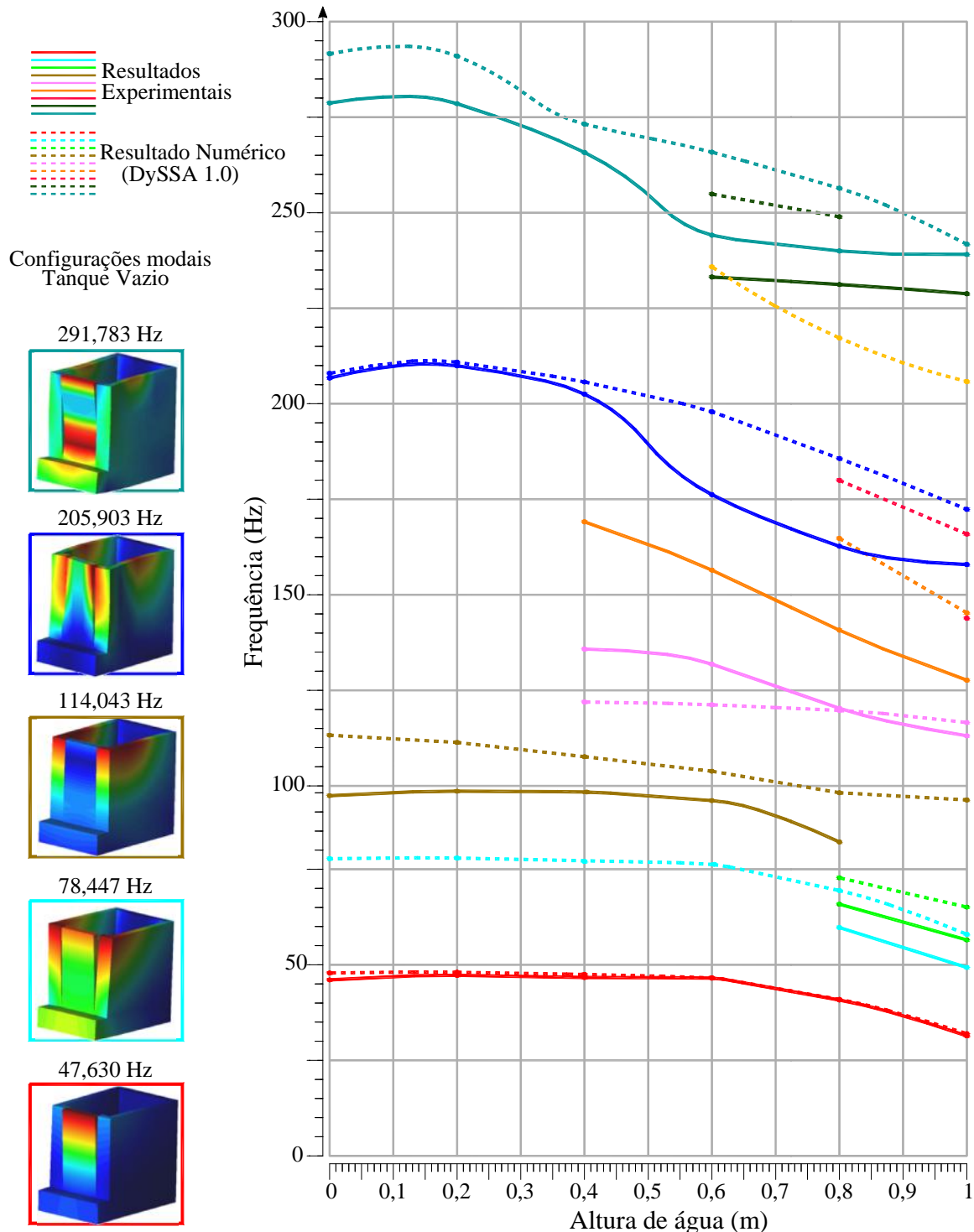


Figura 5.5: Linhas de influência das frequências naturais considerando em função da altura de água. Comparação entre os resultados obtidos experimentalmente e do DySSA1.0.

Configurações modais para o tanque vazio.

Tal como ocorre com os espectros da resposta medida e calculada numericamente, as linhas de influência das frequências de pico (frequências naturais) do cálculo numérico são razoavelmente consistentes com as obtidas experimentalmente. É importante notar que a forma dos espectros poderá ser condicionada pelas pancadas impostas na consola, o que pode justificar algumas das discrepâncias entre os picos espectrais calculados numericamente e os identificados experimentalmente.

É ainda de notar que à medida que a altura da água vai aumentando, vão aparecendo novos picos espectrais. Desta observação pode-se concluir que a água para além do efeito de diminuição do valor das frequências dos picos espectrais, origina o aparecimento de novos modos de vibração na estrutura em estudo (tanque vazio: 5 modos de vibração com frequência inferior a 300 Hz; tanque cheio: 10 modos de vibração com frequência inferior a 300 Hz).

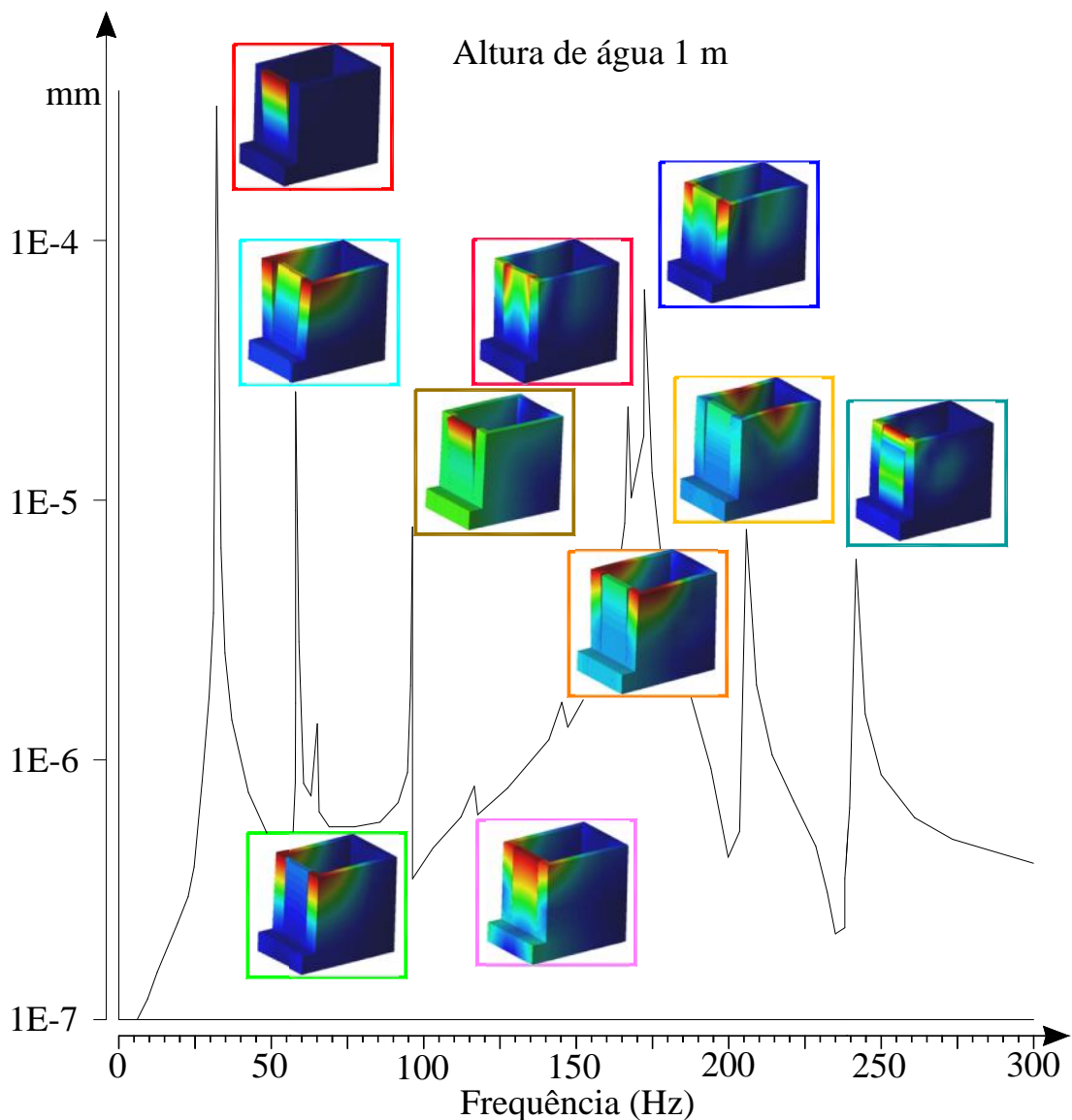


Figura 5.6: Espectro da resposta (DySSA 1.0). Configurações modais (modos aproximadamente estacionários) considerando a situação de tanque cheio (sem representação dos modos na água).

Na **Figura 5.7** apresentam-se os gráficos para as diferentes cotas de água com os amortecimentos modais calculados com o programa DySSA 1.0 os quais são comparados com os

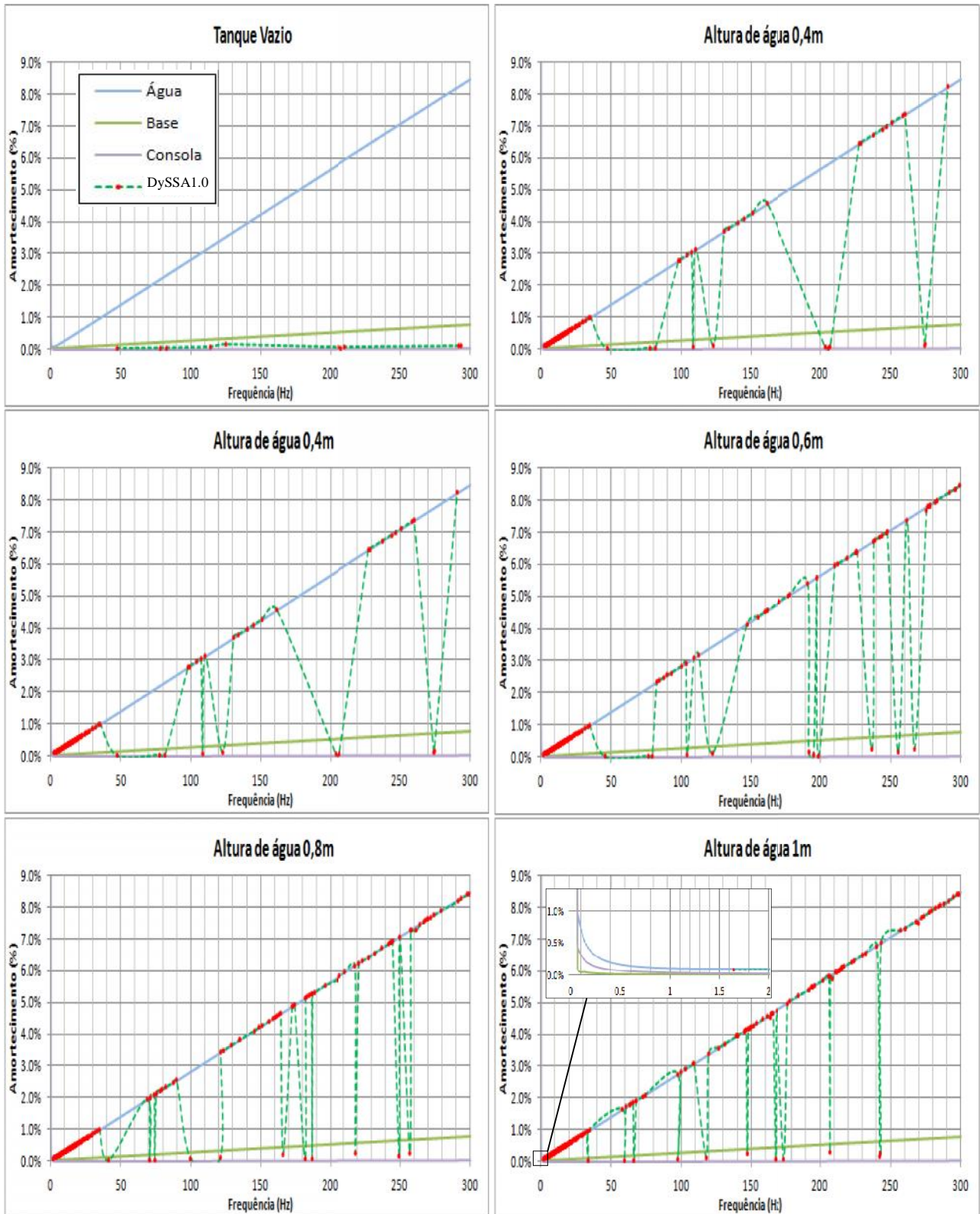


Figura 5.7: Gráficos dos amortecimentos modais no tanque para diferentes alturas de água. Comparação entre os valores globais calculados com o DySSA 1.0 para os diferentes modos e os valores das leis de Rayleigh dadas para a água, para a base e para as paredes do tanque.

previstos pela lei de Rayleigh descrita em (4.14) utilizando separadamente os coeficientes de amortecimento de Rayleigh c_α e c_β (ver **Figura 5.3**) considerados na água, na base e nas paredes do tanque. Como se pode ver na figura os amortecimentos modais correspondentes aos modos de vibração da água seguem bem a curva de Rayleigh dada para a água. Os amortecimentos modais correspondentes aos modos da consola podem ser facilmente distinguidos visto que tendem a aproximar-se da curva de Rayleigh atribuída à consola e às restantes paredes do tanque.

Na **Figura 5.8** pode-se observar que o modo calculado numericamente na situação de tanque cheio para frequência de 59,372 Hz envolve o movimento das paredes laterais tal como o modo que ocorre na frequência 61,211 Hz, a diferença é que neste último é menos mobilizado o movimento da parede em consola e mais mobilizado o movimento da água (modo anti-simétrico na água). A configuração modal de frequência 59,372Hz aparenta ser um modo do sistema consola-água-paredes laterais, onde a água funciona como elemento de ligação.

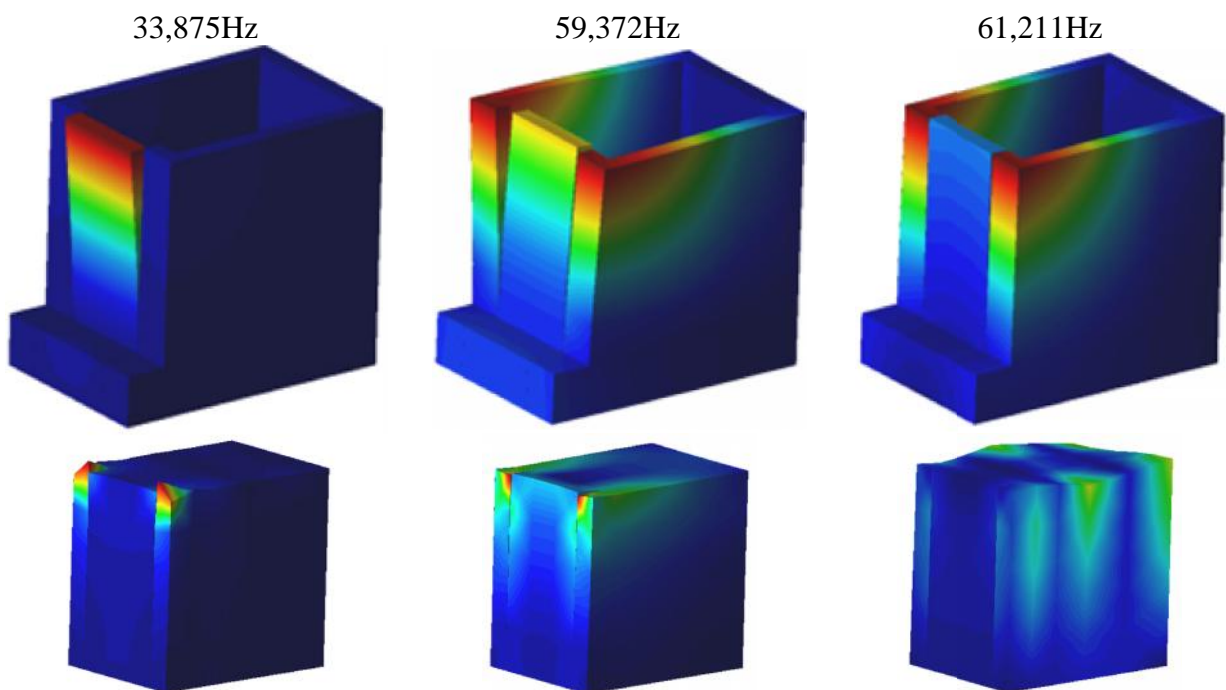


Figura 5.8: Representação de três configurações modais para a situação de tanque cheio, mostrando, separadamente a estrutura de betão (paredes e base do tanque) e a água.

5.3 Análise do Comportamento Dinâmico de um Sistema Barragem-Fundação-Albufeira. Comparação de resultados numéricos e experimentais para o caso da Barragem do Cabril

5.3.1 Barragem do Cabril

A malha de elementos finitos referente à barragem do Cabril que se encontra representada na **Figura 5.9.b**, é formada por 278 elementos finitos tipo cubo isoparamétricos de 20 nós (94 na barragem e na fundação e 184 na albufeira – cota 297 m) e por 76 elementos de junta de 16 nós (46 na interface água-estrutura, 6 na zona fissurada e 24 na albufeira para ligação à fenda no corpo da barragem). Na interface água-betão admitiu-se uma rigidez normal igual à compressibilidade volumétrica da água (K_v) e uma rigidez tangencial nula.

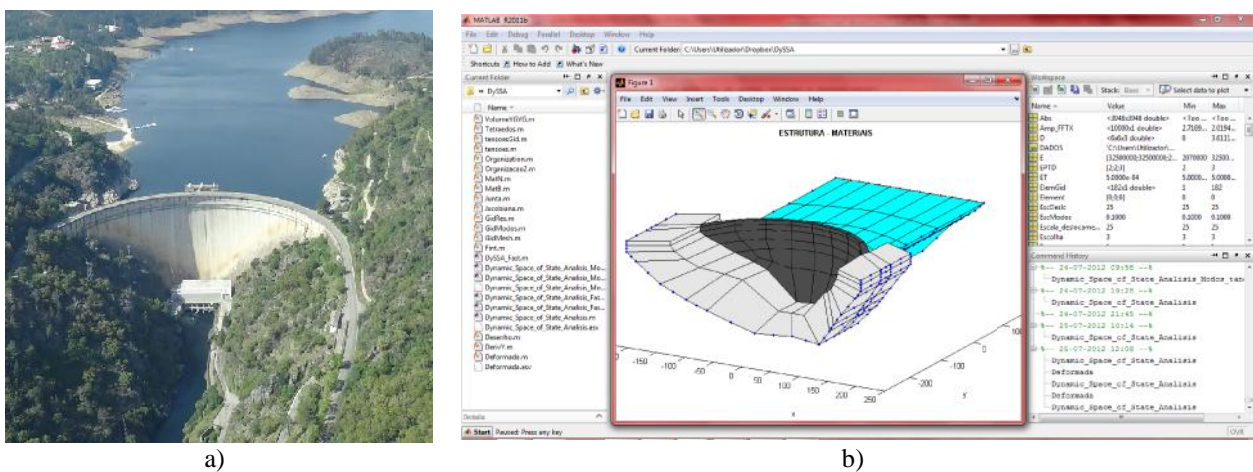


Figura 5.9: a) Barragem do Cabril. b) Cálculo dinâmico da barragem do Cabril com o programa DySSA 1.0.

Neste modelo de elementos finitos da barragem do Cabril, elaborado para simular o comportamento dinâmico do sistema barragem-fundação-albufeira, considerou-se um módulo de elasticidade para o betão de 32,5 GPa, um coeficiente de Poisson de 0,2 e um peso específico para o betão de 24 kN/m³ (ver **Figura 5.10**).

Para o estudo dinâmico do sistema considerou-se que as ações corresponderiam à aplicação de “impactos” no instante inicial $t = 0$, em vários pontos da zona superior da obra (forças concentradas), como se mostra na **Figura 5.11**.

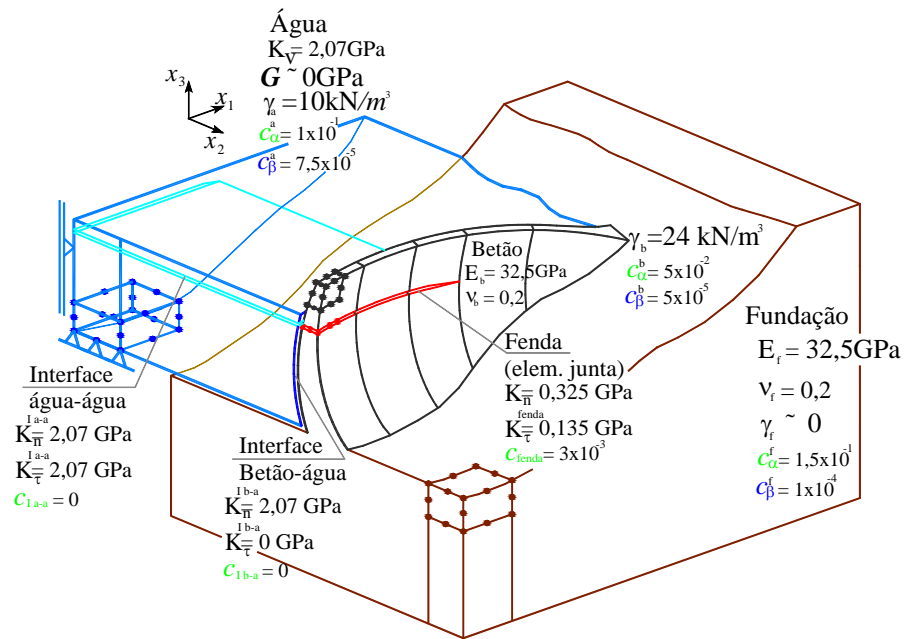


Figura 5.10: Modelação do comportamento dinâmico da barragem do Cabril. Parâmetros de deformabilidade e de amortecimento considerados nos vários componentes do sistema barragem-fundação-albufeira (DySSA 1.0).

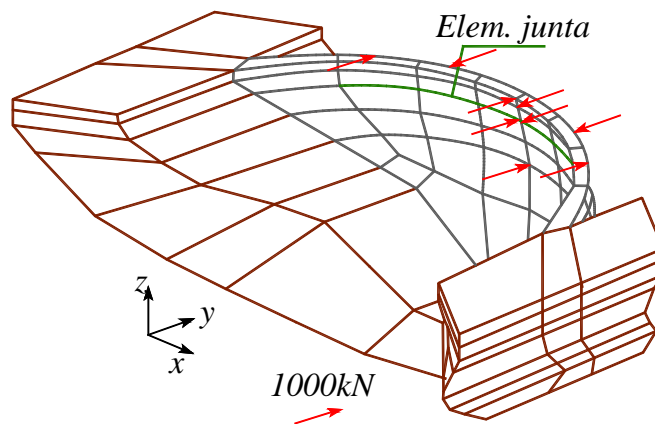


Figura 5.11: Distribuição das forças aplicadas no instante inicial.

Na **Figura 5.12** apresenta-se o cálculo do espectro da resposta da barragem para a situação de albufeira vazia, considerando a fendilhação (simulada com elementos de junta betão-betão). Apresentam-se igualmente as respetivas configurações modais que, para os parâmetros de amortecimento considerados correspondem a modos basicamente estacionários.

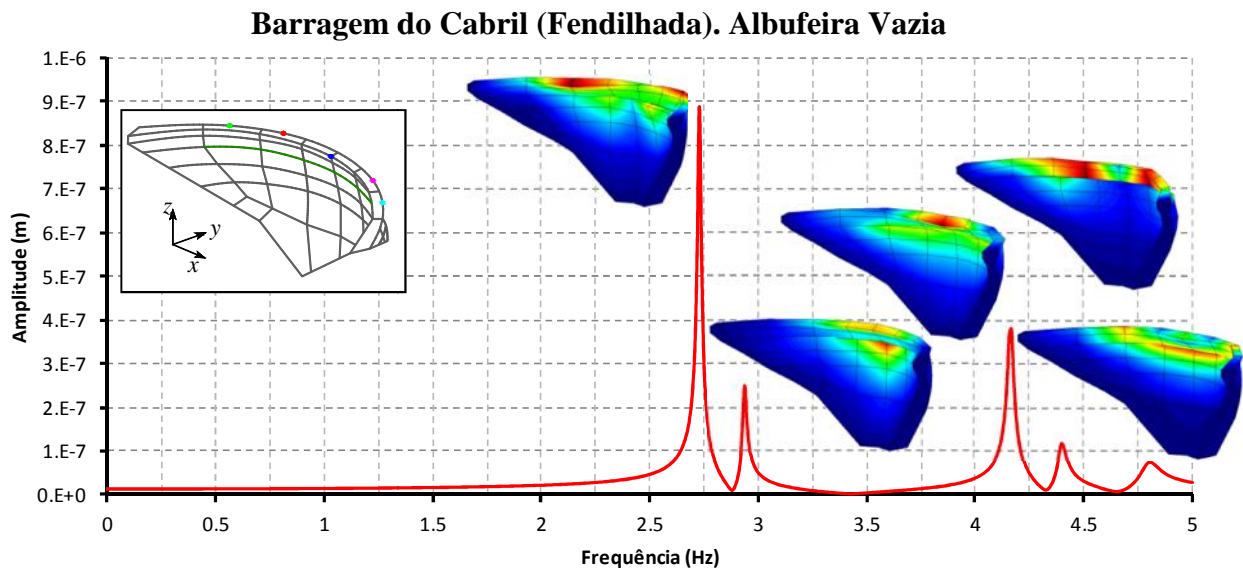


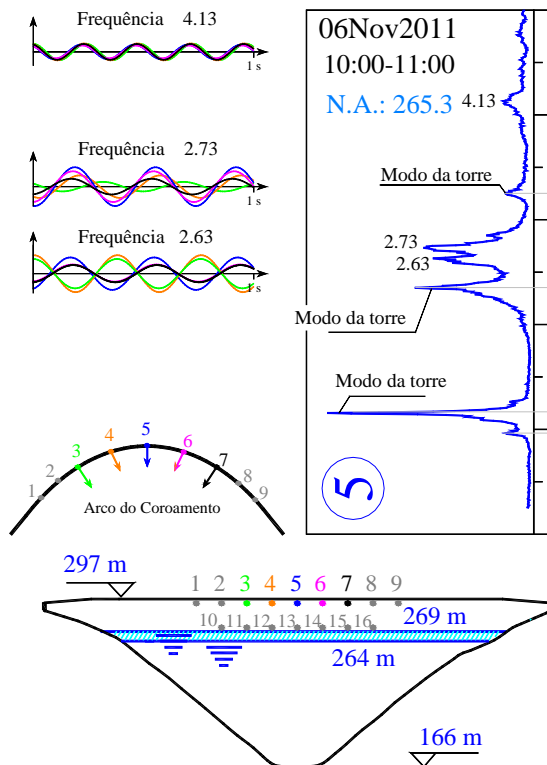
Figura 5.12: Espectro da resposta calculada no ponto central do coroamento (DySSA1.0) para a situação de albufeira vazia. Configurações modais (modos estacionários).

Na **Figura 5.13** apresentam-se as frequências naturais da barragem do Cabril identificadas a partir dos dados do sistema de monitorização dinâmica instalado na obra (acelerações registadas entre 3 e 17 de novembro de 2011), e comparam-se com as frequências obtidas numericamente com o modelo de elementos finitos atrás referido (com elementos finitos de água e considerando amortecimento não proporcional). Neste período de 14 dias regista-se uma ligeira redução dos valores das primeiras frequências naturais identificadas automaticamente, devido ao aumento do nível da albufeira de 264 para 269 m. Este decréscimo de cerca de 0,05 Hz para as primeiras frequências naturais da barragem é igualmente observado no pico espectral correspondente ao 2º modo de vibração da torre das tomadas de água (1,15 para 1,10 Hz). A deteção destas pequenas variações nos valores das frequências naturais, mostra a boa eficiência do sistema de monitorização instalado na obra.

IDENTIFICAÇÃO MODAL AUTOMÁTICA

(Novembro 2011, dia 3-17)

IDENTIFICAÇÃO DA FORMA DOS MODOS
(não estacionários)



Frequência (Hz)

Identificação dos picos de
frequência entre 3 e 17Nov2011
(subida do nível da água de 264 e 269 m)

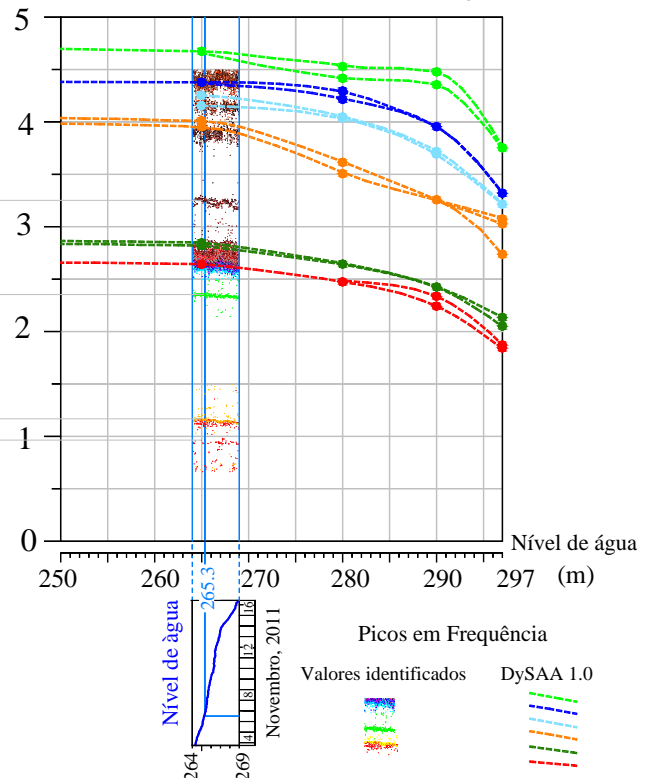


Figura 5.13: Comportamento dinâmico da barragem do Cabril. Comparação entre resultados experimentais (obtidos com uma técnica de identificação modal por decomposição no domínio da frequência) e resultados numéricos obtidos com o programa DySSA 1.0 (adaptado de (Oliveira, et al., 2012)).

É ainda de notar que, para as cotas de água registadas no período de teste, as linhas de influência das frequências naturais calculadas numericamente com o DySSA1.0 coincidem com as principais bandas de valores das frequências identificadas o que indica que o modelo numérico desenvolvido é adequado para simular o comportamento dinâmico da barragem.

É importante referir que a consideração da fenda é essencial para o estudo do comportamento estrutural da barragem visto que influencia de forma significativa as principais configurações modais.

Na **Figura 5.14** apresentam-se as configurações modais e frequências naturais da barragem obtidas com o modelo numérico 3D do conjunto barragem-fundação-albufeira (considerando a fendilhação com base na introdução de elementos de junta horizontais), com a albufeira à cota 265 m (resultados obtidos com o DySSA1.0). O tipo de representação das configurações modais adotado nesta figura é adequado para sistemas em que possam ocorrer modos não estacionários – neste caso a não estacionariedade é notória apenas no modo de frequência 4,00 Hz.

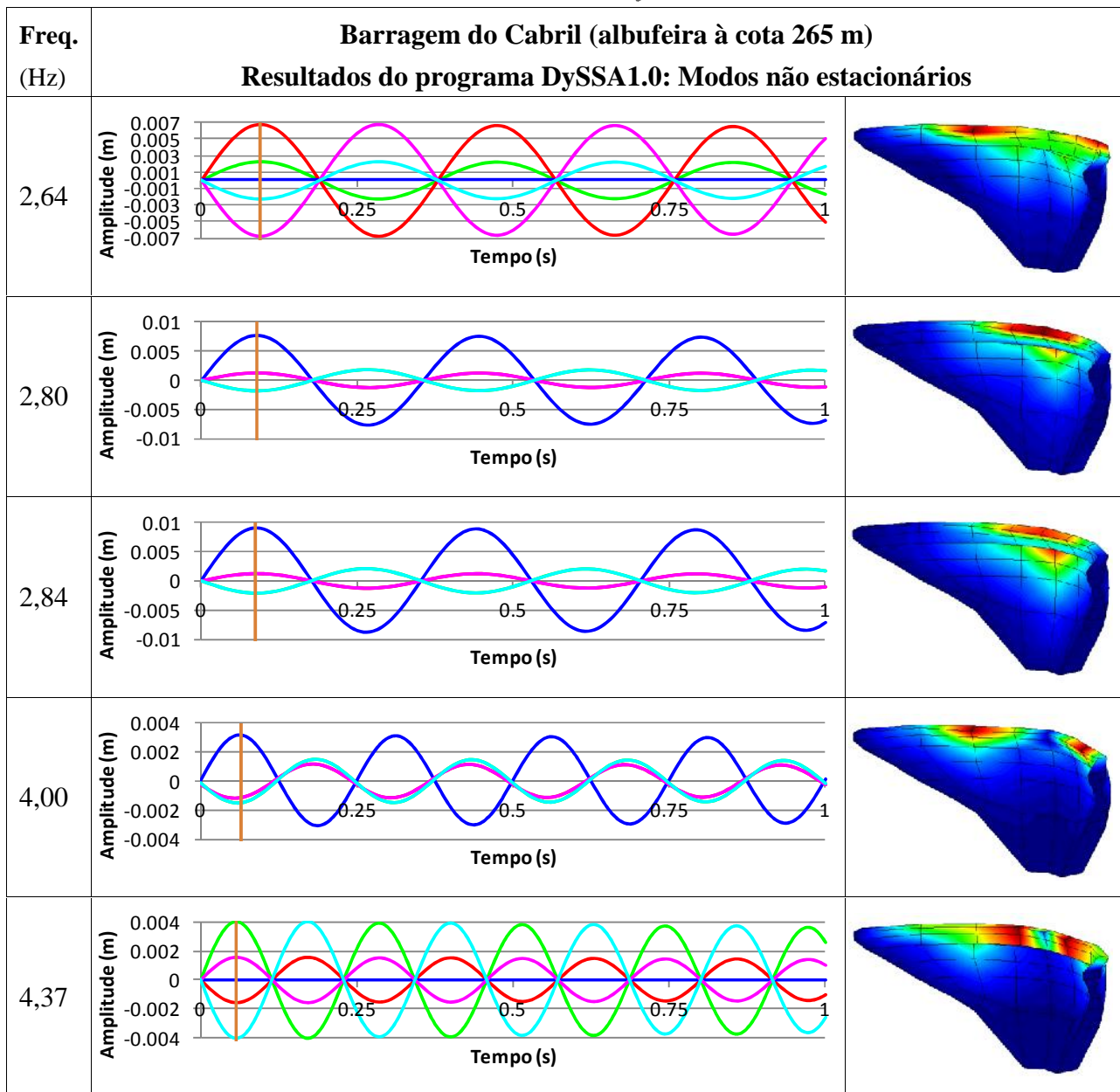
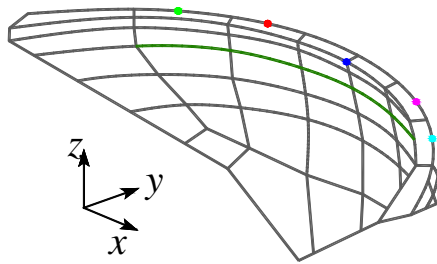


Figura 5.14: Primeiros modos de vibração da barragem do Cabril (com fenda) e respectivas frequências naturais obtidas com o modelo 3D do conjunto barragem-fundação-albufeira. Albufeira à cota 265m.

Distinção dos modos de vibração associados à barragem e associados à albufeira

Como já foi referido anteriormente, nos sistemas em que há interação dinâmica estrutura-líquido, uma boa forma de identificação dos modos de vibração da estrutura (corpo da barragem), separando-os dos modos de vibração essencialmente associados ao líquido, poderá ser baseada na análise dos gráficos dos amortecimentos modais (no caso do exemplo do tanque apresentado anteriormente esta metodologia revelou-se bastante adequada).

No entanto, para o presente exemplo da barragem do Cabril foi desenvolvido um método mais eficaz para separar os modos de vibração associados essencialmente à estrutura sólida dos modos de vibração associados essencialmente à estrutura líquida. Este método baseia-se no cálculo da energia cinética de cada modo envolvendo os graus de liberdade associados à estrutura sólida (neste caso associados ao corpo da barragem). No caso dos modos que estão associados essencialmente à vibração da estrutura sólida, teremos valores elevados da energia cinética calculada tendo apenas em conta os graus de liberdade da estrutura sólida. Pelo contrário, no caso dos modos que estão associados essencialmente ao movimento do líquido a energia cinética associada à vibração da estrutura sólida será muito reduzida.

De seguida apresenta-se a formulação que foi usada no cálculo das energias cinéticas da estrutura sólida para cada modo de vibração.

Partindo da conhecida fórmula da energia cinética

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \quad (5.2)$$

pode-se definir em termos matriciais o seguinte vetor com o valor da energia cinética de cada modo de vibração, calculada apenas para os graus de liberdade da estrutura sólida (corpo da barragem no caso de sistemas barragem-fundação-albufeira)

$$\underline{E}_{c,barragem} = \frac{1}{2} \underline{\dot{\Phi}} \underline{m}_b \underline{\dot{\Phi}}^T \quad (5.3)$$

em que

$$\underline{\dot{\Phi}} = \begin{bmatrix} \dot{u}_1(t)_{f1} & \cdots & \dot{u}_1(t)_{fn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dot{u}_j(t)_{f1} & \cdots & \dot{u}_j(t)_{fn} \end{bmatrix}, \quad 1 \leq n \leq N_{GL}; \quad 1 \leq j \leq N_{GLbarragem} \quad (5.4)$$

onde

- $\underline{E}_{c,barragem}$ -Vetor com o valor da energia cinética associada a cada modo de vibração, no corpo da barragem
- $\dot{u}(t)$ -Velocidades modais - derivada da expressão 4.32 (para as componentes modais de deslocamento no corpo da barragem)
- \underline{m}_b -Matriz de massa global nos graus de liberdade no corpo da barragem
- $\underline{\dot{\Phi}}$ -Matriz com as derivadas dos modos em ordem ao tempo (velocidades modais)

Na **Figura 5.15a** apresenta-se o gráfico dos amortecimentos modais calculados com o programa DySSA 1.0 o qual é comparado com as leis de amortecimento de Rayleigh dadas para a água, barragem, fundação e zona fendilhada – como se referiu foram dados diferentes coeficientes de amortecimento c_α e c_β para a **água** ($c_r=0,1$; $c_s=7,5 \times 10^{-5}$), para a **fundação** ($c_r=0,15$; $c_s=1 \times 10^{-4}$), para o **corpo da barragem** ($c_r=0,05$; $c_s=5 \times 10^{-5}$) e para a **fenda** ($c_s=3 \times 10^{-2}$).

Como se pode ver na **Figura 5.15a** referente aos amortecimentos modais, verifica-se que, neste caso, os amortecimentos modais tendem globalmente a aproximar-se da curva de Rayleigh da água pelo que não é muito fácil distinguir quais os modos de vibração que estão essencialmente associados à vibração do corpo da barragem dos que estão essencialmente associados à vibração da água. Contudo na ampliação apresentada verifica-se que há pequenas variações que se podem detetar no gráfico dos amortecimentos modais as quais indicam a frequências onde ocorrem os modos associados essencialmente à vibração do corpo da barragem (eventualmente relacionados com a fenda no caso do amortecimento ser superior ao da curva de Rayleigh da água e não relacionados com a fenda no caso contrário).

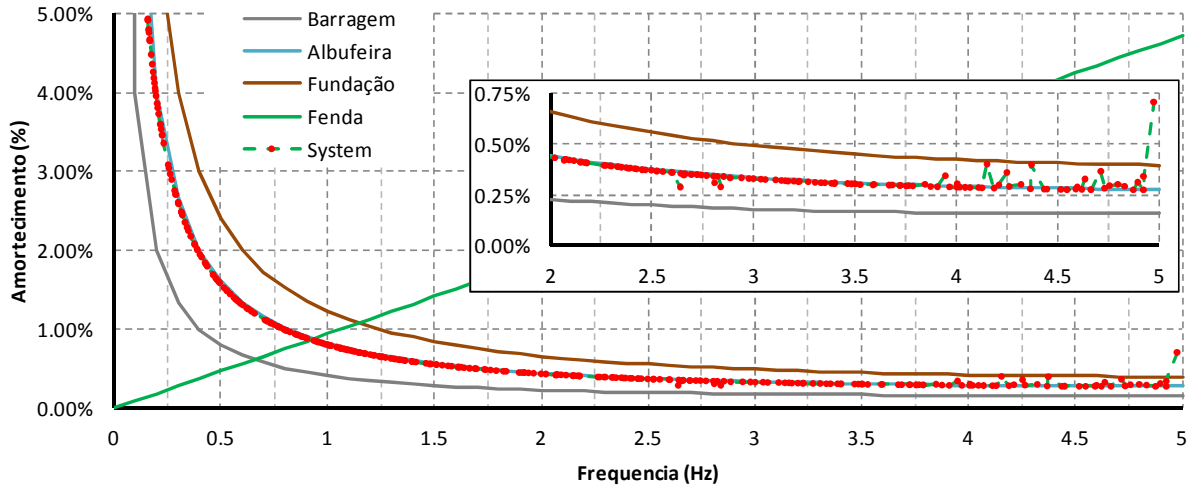
Na **Figura 5.15b** pode também ser observado, como previsto, que os modos associados essencialmente à vibração da barragem possuem valores de energia cinética $E_{c_{barragem}}$ (calculada para os graus de liberdade do corpo da barragem) significativamente mais elevados: quanto maior for a energia cinética $E_{c_{barragem}}$ de um dado modo mais esse modo poderá ser considerado essencialmente associado à vibração do corpo da barragem.

Na **Figura 5.15c** apresentam-se os espetros da resposta calculada numericamente com o DySSA1.0 em três pontos situados ao nível do coroamento da obra, na direção radial (um ponto central, a azul, e dois pontos laterais a verde e a vermelho). Como se pode ver os principais picos espectrais ocorrem precisamente para as frequências onde foram calculados os maiores valores da energia cinética $E_{c_{barragem}}$.

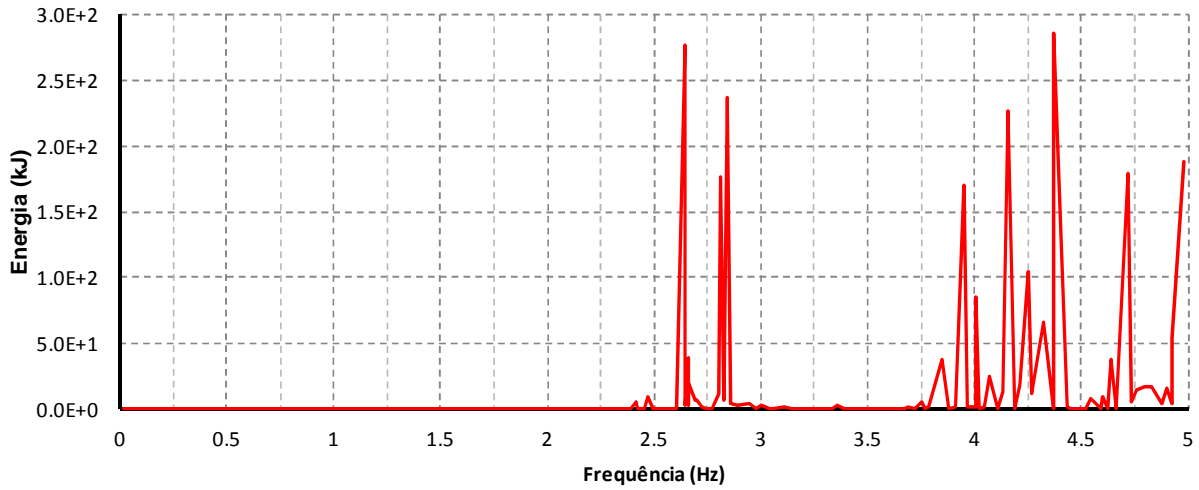
Como já foi referido anteriormente a torre de tomada de água tem influência na resposta dinâmica que é medida no corpo da barragem (Espada, et al., 2011). Desta forma é importante estudar o comportamento dinâmico da torre com vista a identificar picos espectrais correspondentes ao comportamento da torre que possam ocorrer nos espetros obtidos a partir das séries de acelerações medidas com o sistema de monitorização instalado no corpo da barragem.

Em (Espada 2009) apresentam-se resultados de um ensaio de vibração ambiente em que foram medidas séries de acelerações no topo da torre numa situação com a albufeira à cota 281,3m. Nesse trabalho apresentam-se os espetros da resposta medida e os valores das frequências naturais da torre calculados numericamente, assim como os correspondentes modos de vibração.

a. Gráfico dos Amortecimentos Modais



b. Gráfico das Energias Cinéticas Modais (no corpo da barragem)



c. Espectros da Resposta

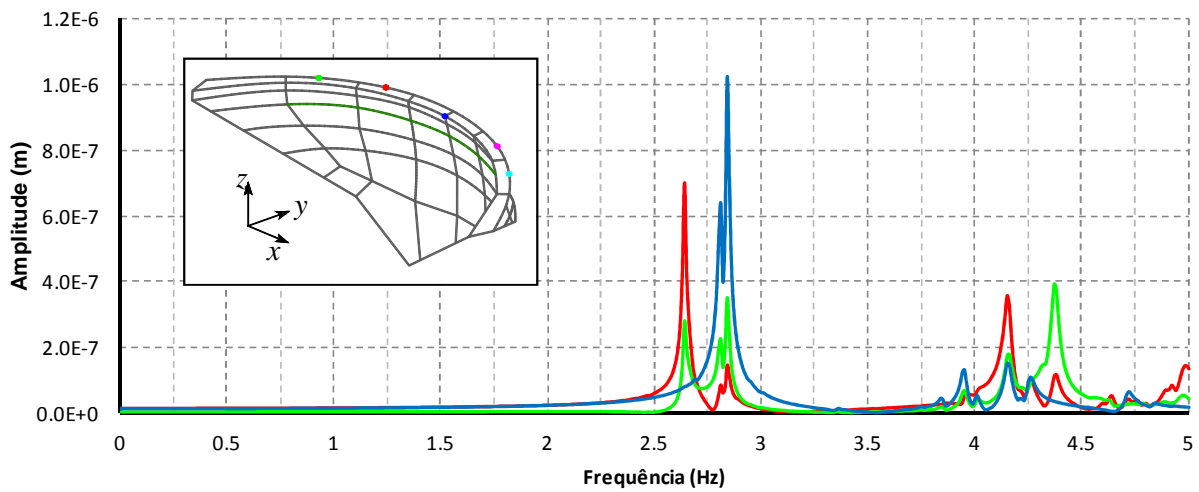


Figura 5.15: Análise dinâmica da barragem do Cabril. Modelo com fenda e albufeira à cota 265 m. Resultados do programa DySSA1.0.

Na **Figura 5.16** mostra-se o resultado da análise espectral das acelerações medidas na torre e os modos de vibração e frequências naturais determinados numericamente com um modelo EF3D da torre, desenvolvido em SAP2000 (Espada 2009). Nos referidos espectros da torre, medidos com a água à cota 281.3 m, pode-se observar que: i) o 1º modo de vibração da torre tem uma componente importante na direção ME-MD e ocorre para a frequência de ~0,5 Hz; ii) o 2º modo da torre apresenta uma importante componente na direção montante-jusante e ocorre para a frequência de ~0,9 Hz.

Para cotas de água mais baixas será de esperar que as frequências de vibração do sistema torre-água sejam um pouco mais elevadas, o que parece confirmar-se de acordo com os resultados medidos na barragem, com a água à cota 265 m, que se apresentam na **Figura 5.17**.

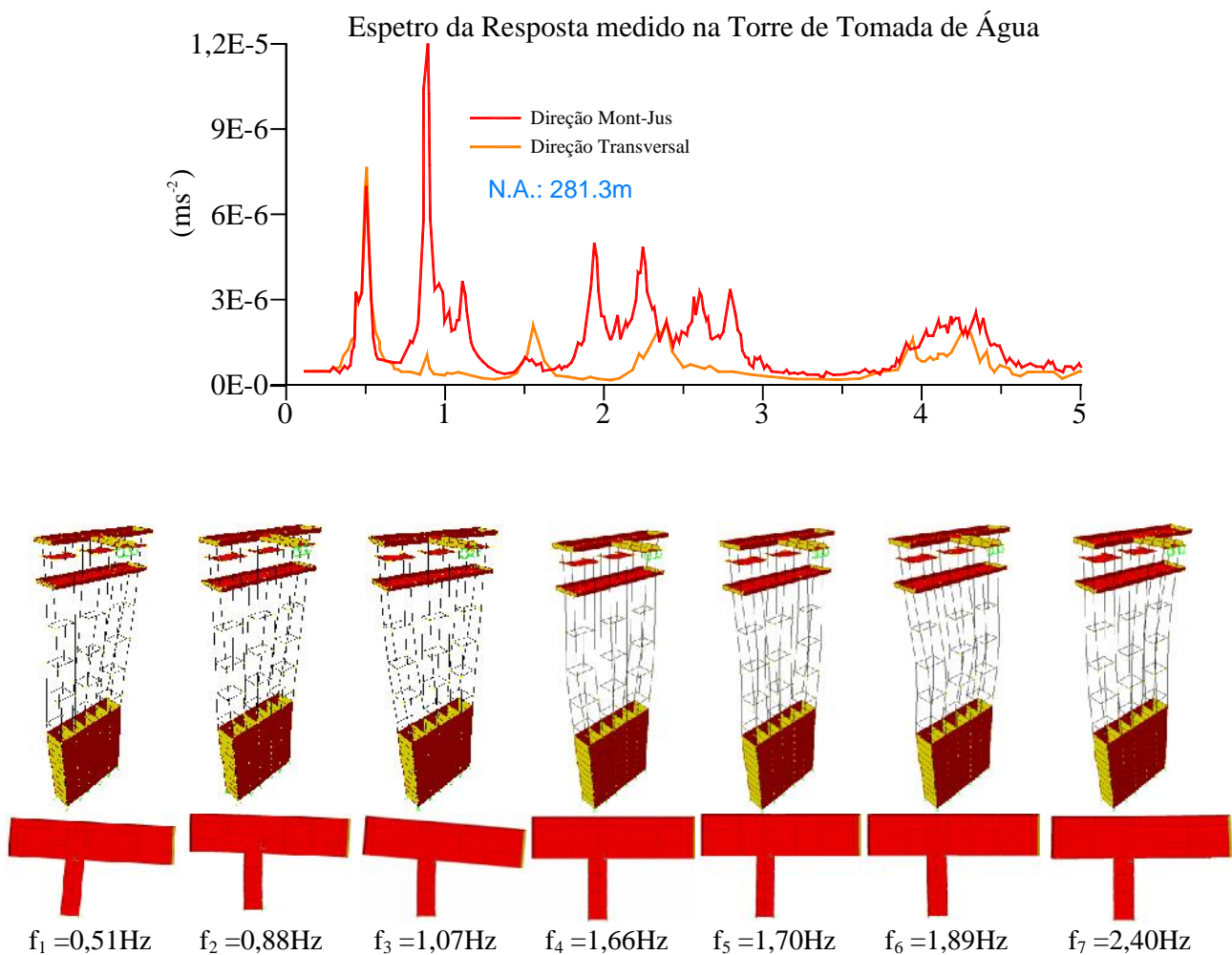
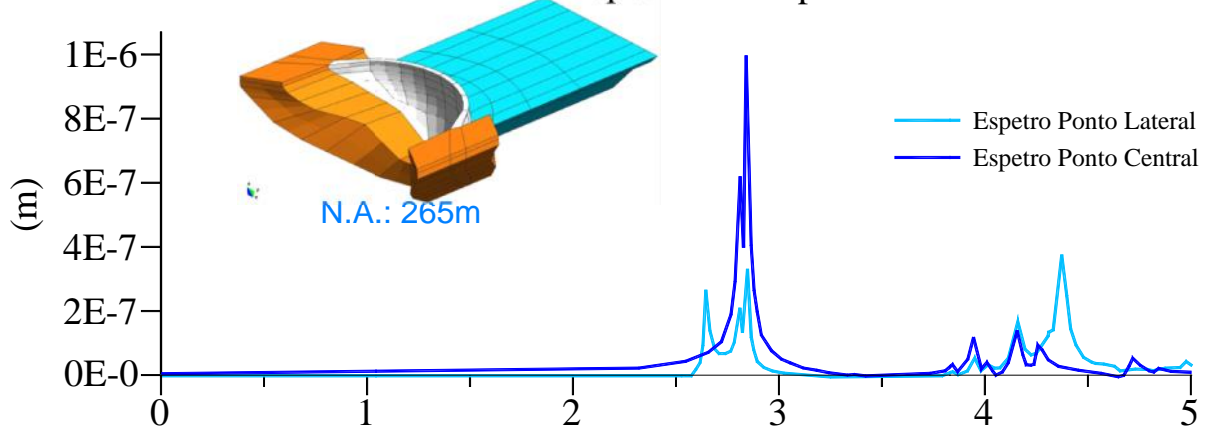
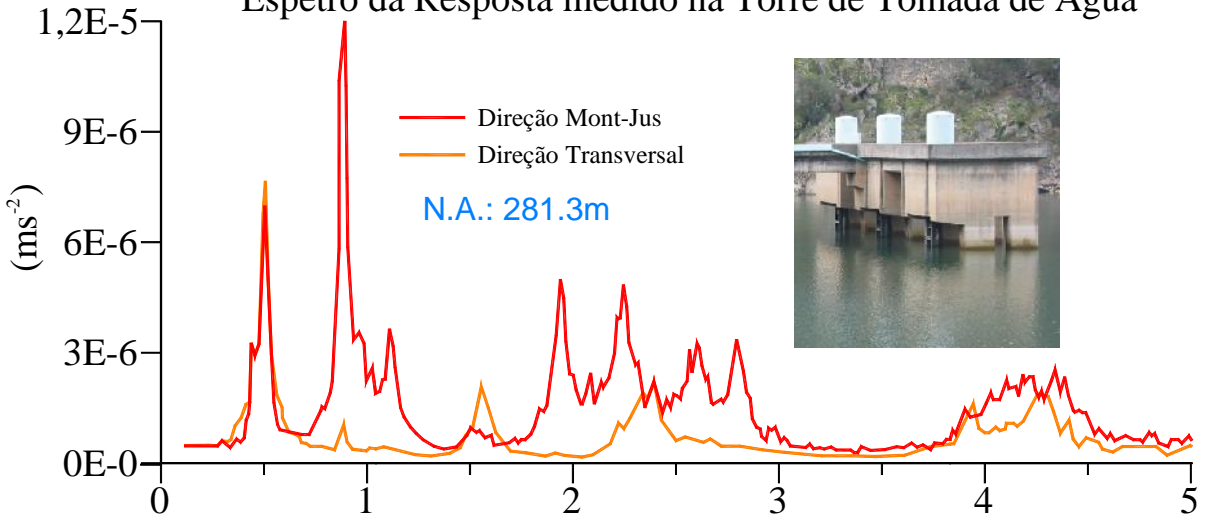


Figura 5.16: Espectro da resposta medida na torre da tomada de água e configurações modais dos sete primeiros modos de vibração e respetivas frequências naturais obtidas numericamente (modelo em SAP 2000). Albufeira à cota 281,3m (Espada 2009) (Oliveira, et al., 2012).

Cálculo Numérico do Sistema Barragem-Fundação-Albufeira.
Espectro da Resposta.



Espectro da Resposta medido na Torre de Tomada de Água



Espectro da Resposta medido na Barragem

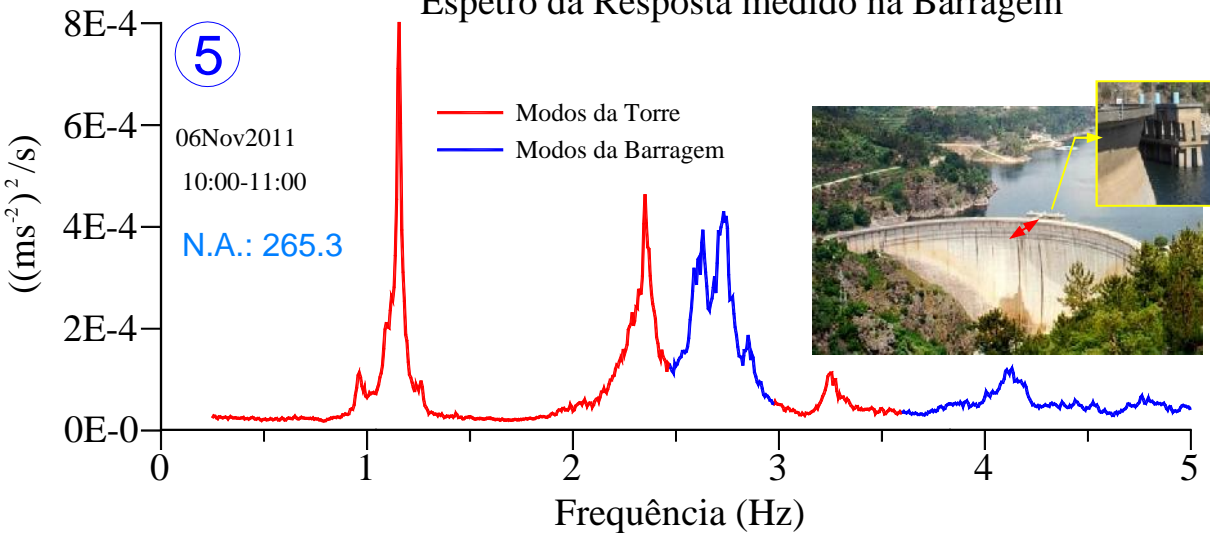


Figura 5.17: Espectro calculado com o programa DySSA1.0, espectro medido na torre das tomadas de água e espectro medido na barragem (6Nov2011) (Oliveira, et al., 2012).

Observando a **Figura 5.17** constata-se que o espectro da resposta calculada com o modelo 3D do conjunto barragem-fundação-albufera (DySSA1.0) apresenta picos espectrais na banda 2,5-3,0 Hz e na banda 3,5-4,5 Hz o que é coerente com os picos espectrais identificados na barragem. Os picos espectrais identificados na banda 0,5-2,5 Hz e na banda 3,0-3,5 Hz correspondem a picos nas frequências de vibração da torre das tomadas de água.

5.3.2 Estudo da influência da fissuração no comportamento dinâmico da barragem

Com o objetivo de estudar a influência da fissuração no comportamento dinâmico da barragem foi efetuado um cálculo dinâmico sem considerar a fissuração, admitindo uma elevada rigidez normal e tangencial (1×10^{15} GPa) nos elementos de junta atrás utilizados no modelo para simular na zona fissurada. A comparação que se apresenta na **Figura 5.18** entre os resultados numéricos obtidos com fenda e sem fenda mostra que a resposta dinâmica da barragem é claramente influenciada pela presença da fissuração.

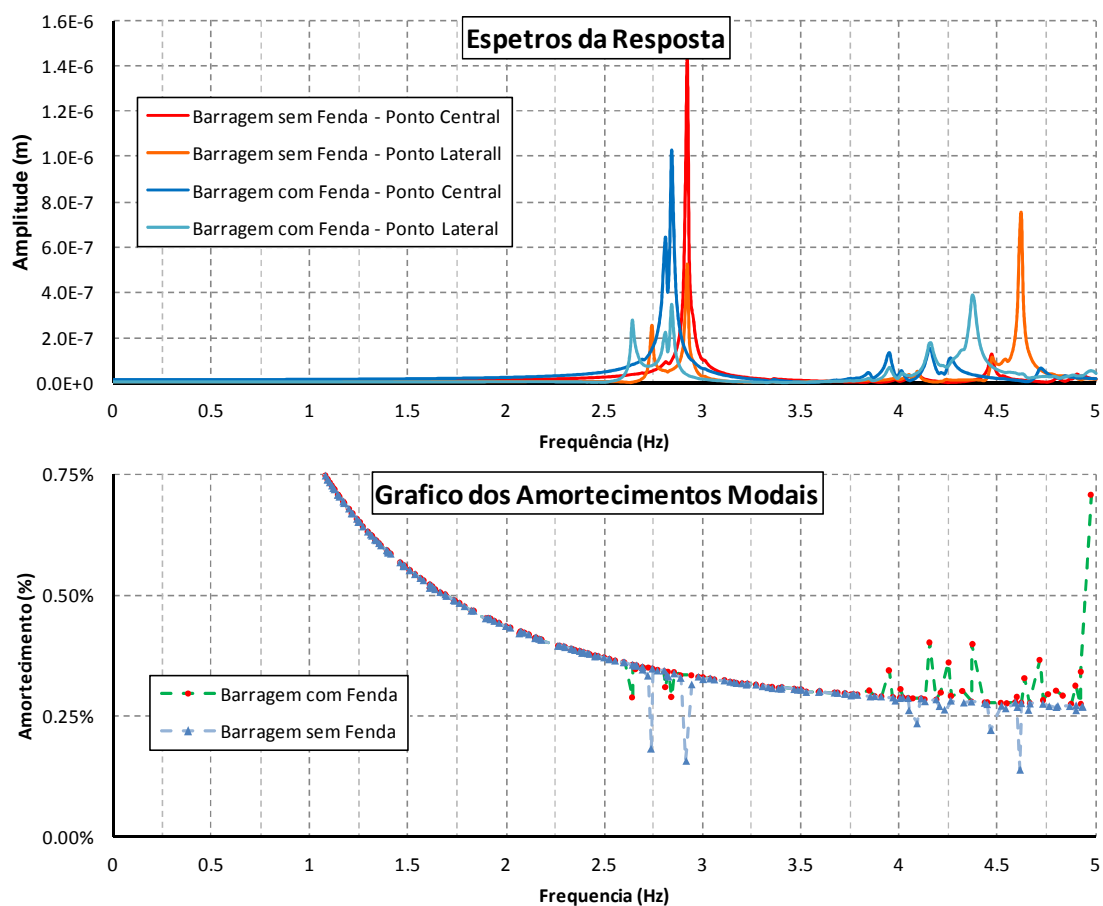


Figura 5.18: Modelo com fenda e sem fenda. Espectros da resposta e amortecimentos modais calculados com o programa DySSA1.0 (albufera à cota 265m).

Na **Figura 5.18** pode-se verificar que no intervalo de frequências de 2 a 5 Hz surgem mais modos associados à vibração do corpo da barragem quando se considera o efeito da fissuração. Nota-se, também, que os valores das frequências naturais da barragem sem fenda são superiores aos da barragem com fenda. Desta forma pode-se concluir que devido à existência da zona fissurada surgem novas configurações modais e ocorre um efeito de diminuição de rigidez (que se traduz numa redução dos valores de frequência dos primeiros picos espectrais).

Comparativamente com os resultados experimentais (ver **Figura 5.17**), o modelo que fornece melhores resultados é o modelo com fenda. O modelo sem fenda, para além de conduzir a valores de frequência mais altos para os primeiros modos, não permite justificar todos os picos identificados experimentalmente.

Finalmente, na **Figura 5.19** estão representadas as configurações modais da barragem do Cabril calculadas com o modelo sem fenda (no intervalo de frequência 0 a 5 Hz). É interessante notar, que no mesmo intervalo de frequências, o modelo com fenda indica que existe mais um modo de vibração (ver **Figura 5.12**).

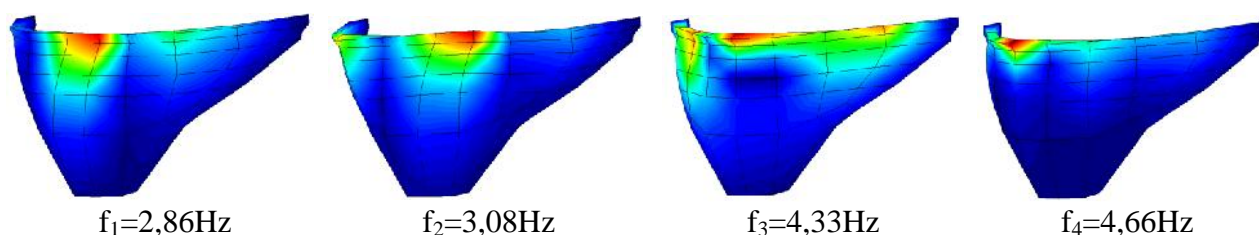


Figura 5.19: Representação dos primeiros modos da barragem calculados com o modelo sem fenda (DySSA1.0) para a situação de albufeira vazia.

5.4 Considerações Finais

Neste capítulo utilizou-se o programa DySSA1.0 para: i) analisar o comportamento dinâmico do modelo físico de uma parede em consola inserida num tanque com água que foi ensaiada no Laboratório de Estruturas do ISEL; ii) analisar o comportamento dinâmico da barragem do Cabril considerando o efeito da fissuração e a interação barragem-fundação-albufeira, tendo em conta os resultados experimentais que têm sido obtidos com o sistema de monitorização dinâmica em contínuo que foi instalado na obra no final de 2008.

Com estes dois exemplos de aplicação foi possível testar a adequabilidade e fiabilidade da formulação de estado adotada no programa DySSA1.0 e o interesse da utilização de elementos

finitos de água e de elementos de junta na interface betão-água para estudar sistemas estruturais envolvendo fenómenos de interação dinâmica água-estrutura.

Em ambos os exemplos de aplicação obteve-se uma boa concordância entre os resultados numéricos e experimentais em termos das frequências naturais e configurações modais dos principais modos de vibração.

No caso do tanque com uma parede em consola analisaram-se os modos da parede para diferentes cotas de água desde a situação de tanque vazio até à situação de tanque cheio tendo-se notado que à medida que aumentava a cota de água surgiam novos modos de vibração claramente devidos à interação entre a massa de água e as paredes do tanque.

No caso da barragem também foi analisada a resposta dinâmica do sistema barragem-fundação-albufera para diversas cotas de água tendo-se concluído que era importante ter em conta o efeito da fissuração para simular adequadamente os resultados experimentais obtidos em obra (a fissuração foi simulada de forma simplificada considerando elementos de junta horizontais). Experimentalmente foram identificados na barragem modos não estacionários e numericamente também (como previsto pelas formulações de estado com amortecimento não proporcional como foi implementado no programa DySSA1.0). Confirmou-se ainda a existência de interação dinâmica entre a torre e a barragem, pois os picos que surgem nos espetros obtidos com a medição de acelerações na barragem e que não são identificados como frequências da barragem, correspondem efetivamente às frequências naturais da torre.

Conclusões e Perspetivas Futuras

6.1 Síntese do trabalho

O controlo de segurança de barragens de betão (segurança estrutural, ambiental, hidráulica e operacional), assume atualmente uma enorme importância face às crescentes exigências de segurança e economia. Neste sentido, é fundamental instalar sistemas de observação adequados para que se possa avaliar periodicamente as condições de segurança perante eventuais processos de deterioração e desenvolver modelos que permitam a interpretação e a previsão do comportamento das infraestruturas em serviço. A observação e análise do comportamento dinâmico de barragens e estruturas auxiliares, com base na utilização integrada de resultados experimentais e de resultados numéricos, é uma metodologia de grande interesse no âmbito do controlo de segurança estrutural de barragens.

Apresentaram-se os conceitos fundamentais do método numérico mais utilizado hoje em dia para efetuar a análise estática e dinâmica de grandes barragens de betão - o Método dos Elementos Finitos, e posteriormente foi desenvolvido o programa DySSA 1.0, em MATLAB, o qual permite efetuar a análise estática e dinâmica de estruturas planas em equilíbrio de placa (elementos finitos planos de 4 e de 8 nós), e de estruturas maciças tridimensionais (elementos finitos tetraédricos de 4 nós, elementos isoparamétricos do 2º grau, tipo cubo de 20 nós, e elementos finitos de junta de 2x8 nós). O programa DySSA 1.0 está preparado para considerar elementos finitos “de água” programados com base na usual formulação em deslocamentos e considerando a matriz de elasticidade expressa em termos do módulo de compressibilidade e do módulo de distorção: na água basta considerar módulo de distorção nulo.

Com o objetivo de analisar o comportamento dinâmico de estruturas, apresentaram-se neste trabalho os fundamentos da dinâmica na perspetiva da análise de estruturas no domínio do tempo e no domínio da frequência. Salientou-se também a importância da utilização de metodologias de identificação modal no domínio da frequência para obtenção dos principais parâmetros modais (frequências naturais, amortecimentos modais e configurações modais) que caracterizam uma estrutura.

Apresentou-se a formulação modal clássica utilizada na análise dinâmica de estruturas considerando a hipótese de amortecimento global de Rayleigh e, com o objetivo de analisar sistemas do tipo barragem-fundação-albufeira em que pode ser importante considerar a hipótese

de amortecimento generalizado, apresentou-se a formulação de estado (em velocidades e deslocamentos) na perspectiva da sua implementação computacional no programa DySSA1.0.

O programa DySSA1.0 permite efetuar a análise estática de estruturas, sob a ação de forças mássicas, forças distribuídas na fronteira ou forças concentradas e a análise dinâmica sob a ação de acelerogramas impostos na base (acelerogramas sísmicos p.ex.) e sob a ação de histórias de forças aplicadas no corpo da estrutura em qualquer grau de liberdade.

O DySSA1.0 permite visualizar animações 3D em que se mostra a evolução no tempo da deformada e do campo de tensões (nos pontos de Gauss), durante a atuação da ação considerada.

Para testar o programa foi efetuada a análise dinâmica de uma parede de betão em consola, inserida num tanque com água, o que permitiu estudar o efeito da interação dinâmica água-estrutura (parede em consola). Os resultados numéricos obtidos com o DySSA1.0 para a referida parede em consola foram comparados com resultados analíticos e com resultados experimentais obtidos com um modelo físico da referida parede em consola inserida num tanque com água (parede vertical com 1 m de altura, 0,5 m de largura e 8,5 cm de espessura).

Relativamente à observação e análise do comportamento dinâmico do barragem do Cabril (na perspectiva do sistema barragem-fundação-albufeira), salientou-se a importância da utilização conjunta dos resultados da observação (séries temporais de acelerações medidas no corpo da barragem e respetivos espetros) e dos resultados de modelos numéricos de elementos finitos. Os resultados experimentais obtidos com o sistema de monitorização dinâmica em contínuo instalado na barragem desde 2008 (monitorização da resposta sob ações ambientais/operacionais e sob ações sísmicas), serviram de base para desenvolver e calibrar os modelos numéricos da barragem analisados com base no DySSA1.0. Desta forma é possível a garantir a fiabilidade dos modelos numéricos a utilizar para verificação da segurança da obra sob ações sísmicas.

6.2 Contribuições inovadoras

No âmbito desta dissertação foi desenvolvido em MATLAB o programa DySSA1.0 (programa de EF3D) o qual permite a análise dinâmica de sistemas barragem-fundação-albufeira para diferentes cotas de água. De entre as principais contribuições inovadoras introduzidas no programa DySSA1.0 podem-se destacar:

- Consideração de uma formulação de estado que permite a realização de cálculos dinâmicos considerando a hipótese de amortecimento generalizado (não proporcional à massa e rigidez global).
- Consideração de elementos finitos de junta do 2º grau (8×2 nós) para simular a interface betão-água e descontinuidades no corpo da barragem (p.ex. fendas);
- Consideração de elementos finitos sólidos na barragem e fundação e elementos finitos “de água” na discretização da albufeira;
- Desenvolvimento de módulos para representação gráfica 3D dos resultados (modos de vibração, deslocamentos e tensões).

- Desenvolvimento de módulos para escrita de resultados em ficheiros de EXCEL, nomeadamente, modos de vibração, histórias de deslocamentos em graus de liberdade pré-definidos pelo utilizador e resultados de análise espectral.

6.3 Apreciação dos resultados obtidos

Com os dois exemplos de aplicação estudados (1- modelo físico de uma parede em consola inserida num tanque com água; e 2 - barragem do Cabril considerando o efeito da fissuração e a interação barragem-fundação-albufeira) foi possível testar a adequabilidade e fiabilidade da formulação de estado introduzida no programa DySSA1.0 e o interesse da utilização de elementos finitos de água e de elementos de junta na interface betão-água para estudar sistemas estruturais envolvendo fenómenos de interação dinâmica água-estrutura.

Em ambos os exemplos foi conseguido um bom acordo entre os resultados numéricos e experimentais em termos das frequências naturais e configurações modais dos principais modos de vibração.

No caso do tanque com a referida parede em consola analisaram-se os modos da parede para diferentes cotas de água desde a situação de tanque vazio até à situação de tanque cheio tendo-se notado que à medida que aumentava a cota de água surgiam novos modos de vibração claramente devidos à interação entre a massa de água e as paredes do tanque.

No caso da barragem também foi analisada a resposta dinâmica do sistema barragem-fundação-albufeira para várias cotas de água. Concluiu-se que era fundamental ter em conta o efeito da fissuração (simulada através da consideração de elementos finitos de junta horizontais) para interpretar os resultados da monitorização dinâmica. Tal como previsto na apresentação da formulação de estado com amortecimento generalizado, foram identificados na barragem modos não estacionários, quer experimentalmente quer numericamente.

6.4 Desenvolvimentos Futuros

Em termos de desenvolvimentos ao nível da modelação numérica seria interessante:

- Estudar o comportamento dinâmico da barragem do Cabril (sistema barragem-fundação-albufeira) utilizando discretizações em EF mais apertadas e considerando a albufeira com maior comprimento e ainda diferentes condições de radiação nas fronteiras água-água e água-rocha;
- Desenvolver um modelo de EF3D que permita estudar o sistema barragem-torre-albufeira-fundação com vista a confirmar a origem dos vários picos espectrais detetados na análise das séries de acelerações medidas no corpo da barragem;

- Consideração das juntas de contração na barragem, utilizando os elementos de junta já implementados no DySSA1.0;
- Realização de um estudo paramétrico para analisar a influência dos parâmetros de amortecimento a usar no corpo da barragem, na albufeira, na fundação e na zona fissurada;
- Comparação do programa DySSA 1.0 com outros programas utilizados na análise dinâmica de sistemas barragem-fundação-albufeira;
- Utilização do DySSA1.0 para estudo da resposta sísmica de grandes barragens;

Ao nível experimental seria interessante promover a implementação e manutenção de sistemas de monitorização que permitam obter dados relativos à resposta dinâmica de grandes barragens para diferentes cotas da albufeira, não apenas para ações ambientais/operacionais mas também para ações sísmicas de diferentes amplitudes.

Bibliografia

- Alves, A., 2005. *Elementos Finitos. A Base da Tecnologia CAE / Análise Dinâmica*. Brasil: ÉRICA.
- Chen, H., 2004. *Seismic safety for hydropower engineering in China*, : UNHYDRO, Pequim.
- Chen, W. & Saleeb, A., 1994. *Constitutive Equations for Engineering Materials*. Elsevier: s.n.
- Chopra, A., 1995. *Dynamic of Structures: theory and Applications to Earthquake Engineering*. New Jersey: Prentice Hall.
- Clough, R. & Penzien, J., 2003. *Dynamic of Structures 3^o Edition*. New-York: McGraw-Hill.
- Cooley, J. & Tukey, J., 1965. An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series. s.l.. *Matematics of Computation*, Volume 19, pp. 297-301.
- Costa, A. & Rodrigues, J., 2001. *Structural health assessment of bridges by monitoring their dynamic characteristics..* Porto, Seminário de Segurança e Reabilitação das Pontes em Portugal.
- Espada, M., 2009. *desenvolvimento de modelos para análise dinâmica de estruturas. Aplicação a barragens de betão e estruturas auxiliares*. Lisboa, Portugal: Tese de Mestrado, Instituto Superior de Engenharia de Lisboa.
- Espada, M., Mendes, P. & Oliveira, S., 2011. Observação e Análise do Comportamento Dinâmico da Torre das Tomadas de Água da Barragem do Cabril. 19(Mecânica Experimental).
- Felber, 1998. *Ambient Vibration testing of Mauvoisin Dam, Final Report, Phase 1 through 7*, EMPA Report No. 158'992/1-7: Duebendorf, Switzerland.
- Genésio, M. L., 1993. *Simulação do comportamento de juntas de barragens*. Porto, Portugal: Faculdade de Engenharia da Universiadde do Porto.
- Goodman, R. E., 1976. *Methods of geological engineering in discontinuous rocks*. St. Paul: West Pub. Co..
- Lotti, R. S., Machado, A., Mazzeiro, Ê. & Landre, J., 2006. *Aplicabilidade científica do método dos elementos finitos*. Brasil: R Dental Press Ortopon Ortop Facial.
- Mendes, P., 2010. *Observação e análise do comportamento dinâmico de barragens de betão*. Porto, Portugal: Tese de Doutoramento, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.
- Oliveira, M., Nápoles, S. & Oliveira, S., 2012. *Fourier Analysis: Graphical Animation and Analysis of Experimental Data with Excel*. Lisboa, Portugal: Epublications.
- Oliveira, S., 2000. *Modelos para análise do comportamento de barragens de betão considerando a fissuração e os efeitos do tempo. Formulações de dano*, Porto: Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.
- Oliveira, S., 2002. "Continuous monitoring system for the dynamic performance assessment of arch dams. Sub-programme D", in "Study of evolutive deterioration processes in concrete dams.Safety control over time".. s.l.:Nat. Sci. Re-equipment Programme of FCT (REEQ/815/ECM/2005)..

Oliveira, S., 2012. *Folhas de apoio a Mecânica dos Sólidos III*. Lisboa, Portugal: Instituto Superior de Engenharia de Lisboa.

Oliveira, S., 2012. *Monitorização e Modelação no Controlo da Segurança*. Évora: Universidade de Évora.

Oliveira, S. & Espada, M., 2012. *1º Curso de Freemat/MATLAB, 10 a 22 setembro 2012, Folhas de apoio, Parte V – Elementos Finitos de Junta*. Lisboa: ISEL.

Oliveira, S. M. P. A. C. O. e. R. J., 2011. *Long-term dynamic monitoring systems for the safety control of large concrete dams. The case of Cabril dam*, Portugal: 6th International conference on dam engineering.

Oliveira, S. et al., 2012. *Monitorização e Modelação do Comportamento Dinâmico de Barragens de Betão. Interação Barragem-fundação-albufeira*. Porto: Conferência de Betão Estrutural 2012.

Peeters, B., 2000. *“System identification and damage detection in civil engineering”*.. Belgium: PhD Thesis, Univ. Loivana.

Rodrigues, J., 2004. *Identificação Modal Estocástica. Métodos de análise e aplicações em civil*. Porto: PhD Thesis FEUP.

Sousa, L. R. & Teles, M., 1980. *Modelo de cálculo para o estudo de túneis pelo método dos elementos finitos*. Lisboa: LNEC.

Uchita, Y., Nogushi, H. & Saouma, V. E., 2005. *Safety research*, s.l.: International Water Power & Dam Construction: 16-22.

Webgrafia

Catalunha, U. P., 2012. *Gid*. [Online]

Available at: <http://gid.cimne.upc.es>

[Acedido em 12 6 2012].

CIGD, s.d. *icold-cigb*. [Online]

Available at: <http://www.icold-cigb.org/>

[Acedido em 21 Agosto 2012].

INAG, s.d. *cnpgb.inag*. [Online]

Available at: http://cnpgb.inag.pt/gr_barragens/gbportugal/AA.HTM#C

[Acedido em 21 Agosto 2012].

MathWorks, s.d. *Matlab*. [Online]

Available at: <http://www.mathworks.com/products/matlab/>

[Acedido em 2012].

Wiki, s.d. *wikipedia*. [Online]

Available at: www.wikipedia.pt

[Acedido em 21 Agosto 2012].