

INSTITUTO POLITÉCNICO DE LISBOA
INSTITUTO SUPERIOR DE CONTABILIDADE
E ADMINISTRAÇÃO DE LISBOA



ISCAL

MODELOS NÃO RADIAIS DE
EFICIÊNCIA E DE SUPER-
EFICIÊNCIA NA DEA
APLICAÇÃO AO SETOR BANCÁRIO

Daniela Sofia Moreira de Carvalho

Lisboa, março de 2025

INSTITUTO POLITÉCNICO DE LISBOA
INSTITUTO SUPERIOR DE CONTABILIDADE E
ADMINISTRAÇÃO DE LISBOA

MODELOS NÃO RADIAIS DE
EFICIÊNCIA E DE SUPER-
EFICIÊNCIA NA DEA
APLICAÇÃO AO SETOR BANCÁRIO

Daniela Sofia Moreira de Carvalho n° 20220372

Dissertação submetida ao Instituto Superior de Contabilidade e Administração de Lisboa para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Controlo de Gestão e Avaliação do Desempenho, realizado sob a orientação científica do Professor Doutor José Manuel de Oliveira Pires Professor-Coordenador da área científica de Matemática do ISCAL.

Constituição do Júri:

Presidente: Doutora Ana Maria da Silva Barbosa de Sotomayor

Arguente: Doutora Ana Maria Duarte Paias

Vogal: Doutor José Manuel Oliveira Pires

L i s b o a , m a r ç o d e 2 0 2 5

Declaro ser a autora desta dissertação, que constitui um trabalho original e inédito, que nunca foi submetido (no seu todo ou qualquer das suas partes) a outra instituição de ensino superior para a obtenção de um grau académico ou outra habilitação. Atesto ainda que todas as citações estão devidamente identificadas. Mais acrescento que tenho consciência de que o plágio – a utilização de elementos alheios sem referência do autor – constitui uma grave falta de ética, que poderá resultar na anulação da presente dissertação.

Agradecimentos

A conclusão desta dissertação representa o culminar de uma fase importante da minha vida académica, e não teria sido possível sem o apoio e incentivo de muitas pessoas, às quais gostaria de expressar a minha gratidão.

Em especial, gostaria de expressar o meu mais profundo agradecimento ao meu orientador, Prof. Doutor José Pires, cuja dedicação, paciência e apoio constante foram essenciais para a concretização desta dissertação.

Sem o seu apoio incondicional, a sua presença constante e a sua confiança nas minhas capacidades, não teria conseguido chegar até aqui. A sua orientação foi muito mais do que um simples acompanhamento académico, foi um exemplo de verdadeiro compromisso com a educação e com o sucesso dos seus alunos.

Por tudo isto, o meu profundo e sincero agradecimento, pois sem o professor este trabalho não teria sido possível. O seu impacto na minha formação e no meu crescimento pessoal será para sempre recordado com enorme gratidão.

Um especial agradecimento também à minha família, por todo o amor, apoio incondicional e por sempre acreditarem em mim. A vossa confiança e encorajamento deram-me a força necessária para superar os desafios que encontrei pelo caminho.

Por último, deixo também o meu sincero agradecimento aos meus amigos, por estarem sempre ao meu lado, pelos momentos de convívio e pelas palavras de apoio, mesmo nos períodos mais exigentes.

A todos, o meu muito obrigada!

Resumo

A DEA (*Data Envelopment Analysis*) é uma metodologia destinada à avaliação do desempenho organizacional. É uma técnica não paramétrica baseada na programação linear destinada a avaliar a eficiência relativa de um conjunto de entidades similares, designadas de DMUs (*Decision Making Units*), que usam múltiplos *inputs* para produzir múltiplos *outputs*.

Os modelos da DEA podem basicamente ser classificados em modelos radiais, caracterizados por tratarem com alterações nos *inputs* ou nos *outputs*, e não radiais, caracterizados por tratarem diretamente com folgas associadas a excessos nos valores dos *inputs* e/ou défices nos valores dos *outputs*. A maioria destes modelos foram concebidos para dados não negativos (em alguns casos positivos) e, em geral, permitem identificar várias DMUs como eficientes. Para ultrapassar estas duas limitações, alguns modelos para tratar valores negativos e alguns métodos de *ranking* têm sido propostos.

Este trabalho tem por objetivo apresentar um estudo sobre modelos de eficiência e de super-eficiência não radiais, com enfoque nos modelos não radiais SBM (*Slack Based Measure*), que permitem tratar todo o tipo de dados (positivos, nulos e negativos). Este estudo inclui a aplicação destes modelos à avaliação da eficiência relativa e ao estabelecimento de *rankings* de vinte e uma instituições bancárias que operavam em Portugal durante o período de 2019 a 2022.

Palavras-chave: Avaliação do desempenho organizacional, DEA, Eficiência; *Ranking*, Instituições bancárias.

Abstract

DEA (Data Envelopment Analysis) is a methodology aimed at evaluating organizational performance. It is a non-parametric technique based on linear programming, designed to assess the relative efficiency of a set of similar entities, referred to as DMUs (Decision Making Units), which use multiple inputs to produce multiple outputs.

DEA models can essentially be classified into radial models, characterized by dealing with changes in inputs or outputs, and non-radial models, characterized by directly addressing slacks associated with excesses in input values and/or deficits in output values. Most of these models have been designed for non-negative data (in some cases positive), and generally allow for the identification of several DMUs as efficient. To overcome these two limitations, some models for handling negative values and some ranking methods have been proposed.

This work aims to present a study on non-radial efficiency and super-efficiency models, with a focus on non-radial SBM (Slack Based Measure) models, which allow for the handling of all types of data (positive, zero, and negative). This study includes the application of these models to the evaluation of the relative efficiency and the establishment of rankings of twenty-one banking institutions operating in Portugal during the period from 2019 to 2022.

Keywords: *Performance evaluation, DEA, Efficiency, Ranking, Banking institutions.*

Índice

1. Introdução	1
2. Eficiência no setor bancário.....	3
2.1. Introdução	3
2.2. Eficiência no setor bancário	3
2.3. Metodologia DEA	4
2.4. Aplicação da DEA ao setor bancário.....	6
3. Modelos não radiais de eficiência e de super-eficiência na DEA	9
3.1. Introdução	9
3.2. Preliminares	10
3.3. Modelos aditivos	14
3.4. Modelos não radiais SBM de eficiência na DEA.....	17
3.4.1. Modelo SBM (Tone, 2001).....	17
3.4.2. Modelo MSBM (Sharp, Meng e Liu (2007).....	21
3.4.3. Modelo BP-SBM (Tone, Chang & Wu, 2020).....	23
3.5. Modelos não radiais SBM de super-eficiência	26
3.5.1. Modelos de super-eficiência SBM	27
3.5.2. Modelos de super-eficiência BP-SBM.....	31
4. Estudo de um caso prático.....	33
4.1. Introdução	33
4.2. Seleção de dados e modelos	33
4.3. Análise dos resultados	38
5. Conclusões.....	51
6. Referências bibliográficas	53
Apêndices	56

Índice de Tabelas

Tabela 4.1 – Dados relativos aos <i>inputs</i> e <i>outputs</i> do ano 2019.....	35
Tabela 4.2 – Dados relativos aos <i>inputs</i> e <i>outputs</i> do ano 2020.....	36
Tabela 4.3 – Dados relativos aos <i>inputs</i> e <i>outputs</i> do ano 2021.....	37
Tabela 4.4 – Dados relativos aos <i>inputs</i> e <i>outputs</i> do ano 2021.....	38
Tabela 4.5 – Resultados obtidos pelo modelo BP-SBM para retornos variáveis de escala.	40
Tabela 4.6 – Resultados obtidos pelo modelo BP-SBM para retornos constantes de escala	41
Tabela 4.7 – Resultados obtidos pelo modelo SE-BP-SBM para retornos variáveis de escala	43
Tabela 4.8 – Resultados obtidos pelo modelo SE_BP-SBM para retornos constantes de escala.....	44
Tabela 4.9 – <i>Rankings</i> obtidos para retornos variáveis de escala.....	45
Tabela 4.10 – <i>Rankings</i> obtidos para retornos constantes de escala	48

Índice de figuras

Figura 4.1 – Gráfico dos <i>rankings</i> obtidos para retornos variáveis de escala.....	46
Figura 4.2 – Gráfico dos <i>rankings</i> obtidos para retornos constantes de escala	49
Figura 4.3 – Gráfico dos <i>rankings</i> globais	50

Lista de abreviaturas

APB – Associação Portuguesa de Bancos

BAM – *Bounded Adjusted Measure*

BCC – Banker, Charnes e Cooper

BP-SBM – *Base Point Slack Based Measure*

CCR – Charnes, Cooper e Rhodes

CRS – *Constant Returns to Scale*

DEA – *Data Envelopment Analysis*

DMUs – *Decision Making Units*

NDRS – *Non-Decreasing Returns to Scale*

NIRS – *Non-Increasing Returns to Scale*

OPL – *Optimization Programming Language*

RAM – *Range Adjusted Measure*

ROA – *Return on equity*

ROI – *Return on investment*

SBM – *Slack Based Measure*

SFA – *Stochastic Frontier Approach*

SNC – Sistema de Normalização Contabilística

VRS – *Variable Returns to Scale*

1. Introdução

A avaliação da eficiência, enquanto poderosa ferramenta de apoio à tomada de decisão, revela-se crucial em qualquer setor de atividade, em particular no setor bancário devido ao papel central que este setor desempenha no crescimento económico de um país. Como se refere em Fethi e Pasiouras (2010), a avaliação da eficiência no setor bancário tem sido um aspeto de grande interesse para os reguladores, clientes, investidores e público em geral. Essa avaliação tem sido feita por recurso a várias metodologias que vão desde a tradicional avaliação com base em rácios financeiros às mais recentes metodologias de fronteira de eficiência, com destaque para a metodologia DEA (*Data Envelopment Analysis*).

A metodologia DEA é uma técnica de programação matemática, mais especificamente de programação linear, destinada a avaliar a eficiência relativa de um conjunto de entidades homogéneas que usam múltiplos recursos (*inputs*) para produzir múltiplos produtos (*outputs*), usualmente designadas por DMUs (*Decision Making Units*). Esta metodologia tem sido largamente usada em diversos setores de atividade, nomeadamente no setor bancário.

No âmbito da DEA, existem vários modelos que permitem avaliar a eficiência relativa de um conjunto de entidades. Esses modelos podem basicamente ser classificados em modelos radiais e modelos não radiais. No primeiro caso, a eficiência é obtida através de alterações proporcionais e comuns nos *inputs* ou nos *outputs*. No segundo, a eficiência é obtida diretamente das folgas relativas aos excessos nos *inputs* e aos défices nos *outputs*, sem assumir alterações proporcionais e comuns nos *inputs* ou nos *outputs*.

A maior parte desses modelos trata com dados não negativos. Contudo, existem situações em que os dados assumem valores negativos, como é o caso do lucro, para as quais alguns modelos têm sido desenvolvidos, embora em número muito menor.

A presente dissertação destina-se a apresentar um estudo sobre a avaliação da eficiência no setor bancário. Mais especificamente, destina-se a avaliar a eficiência relativa de 21 instituições bancárias que operavam em Portugal durante o período de 2019 a 2022, usando a metodologia DEA.

Considerando que alguns dos dados que vão ser usados na componente prática deste trabalho assumem valores negativos, importa apresentar um estudo de modelos que permitem tratar todo o tipo de dados (positivos, negativos e nulos), alguns dos quais serão usados no estudo prático.

Em geral, os modelos DEA identificam várias DMUs como eficientes, não permitindo estabelecer um *ranking* sobre todas as DMUs. Para discriminar essas DMUs, vários métodos de *rankings* têm sido propostos na literatura da DEA, entre os quais o método da super-eficiência que será usado neste trabalho, considerando modelos não radiais.

Para além do presente capítulo de introdução, esta dissertação contempla mais quatro capítulos. No capítulo 2, é apresentada uma revisão sobre a avaliação da eficiência com enfoque no setor bancário, assim como as metodologias que têm sido usadas para a avaliação desse setor com destaque para a metodologia DEA.

No capítulo 3, são apresentados alguns modelos da DEA, nomeadamente modelos de eficiência e de super-eficiência não radiais que permitem tratar todo o tipo de dados (positivos, negativos e nulos) e que são usados no estudo prático a apresentar no capítulo 4, assim como outros, concebidos para dados não negativos ou apenas positivos, que os suportam e que permitem um melhor enquadramento e compreensão dos mesmos.

No capítulo 4, é apresentado um estudo prático com vista à avaliação e ao estabelecimento de *rankings* de 21 instituições bancárias que operavam em Portugal no período de 2019 a 2022. Desse estudo prático consta a seleção dos dados e modelos, assim como a apresentação dos resultados obtidos com esses dados e modelos e a respetiva análise.

Por fim, no capítulo 5, apresentam-se algumas conclusões sobre o trabalho desenvolvido ao longo da presente dissertação.

2. Eficiência no setor bancário

2.1. Introdução

Este capítulo tem por objetivo apresentar uma breve revisão da literatura sobre a avaliação da eficiência no setor bancário, abordando as principais noções, metodologias e problemáticas associadas à avaliação da eficiência, em termos gerais, e da eficiência bancária, em termos específicos, dando relevo aos principais aspectos da metodologia aplicada, com destaque para a DEA.

Assim, na secção 2.2, é feita uma referência à importância da avaliação da eficiência nas organizações, aos modelos e métodos utilizados para a sua mensuração, com particular incidência no setor bancário. Na secção 2.3, é feita uma pequena introdução à metodologia DEA, que constitui objeto de estudo deste trabalho. Por fim, na secção 2.4, são mencionados alguns aspectos sobre a aplicação da DEA no setor bancário.

2.2. Eficiência no setor bancário

A eficiência no setor bancário é um tema de grande relevância, principalmente por se tratar de um setor marcado por rápidas inovações tecnológicas e um ambiente cada vez mais competitivo. O estudo da eficiência não só permite uma visão aprofundada da saúde financeira das instituições bancárias, como também fornece informações valiosas para a formulação de políticas que visam promover a estabilidade e o crescimento sustentável dessas instituições.

Segundo Farrell (1957), a eficiência de uma instituição representa a capacidade de uma empresa obter o nível máximo de *outputs*, dado um conjunto de *inputs*, ou usar o nível mínimo de *inputs* para obter um dado nível de *outputs*. Este tipo de eficiência, diretamente relacionada com a produtividade, é designada por eficiência técnica ou produtiva. Este autor considera um outro tipo de eficiência, designada por eficiência de preços. A eficiência de preços está relacionada com a otimização dos *inputs* de uma empresa ou organização dado o preço destes, ou seja, este tipo de eficiência reflete a capacidade de uma empresa usar a proporção ótima de *inputs*, considerando os respetivos preços e tecnologias de produção (Afriat, 1972).

A eficiência das instituições bancárias tem sido tradicionalmente mensurada através do cálculo e análises de rácios financeiros, como por exemplo, a rentabilidade dos capitais próprios ou ROE (*Return on Equity*), a rentabilidade operacional dos ativos ou ROA (*Return on Assets*), o rácio de transformação e rácios de eficiência, entre outros. Os rácios são muito utilizados

principalmente devido à sua facilidade de compreensão e à sua simplicidade. No entanto, apresentam algumas limitações no sentido em que são uma medida parcial, mostrando-se inadequados para avaliar entidades que utilizam múltiplos *inputs* para produzir múltiplos *outputs*, como é o caso das instituições bancárias.

Devido a estas limitações, novas metodologias de avaliação têm sido desenvolvidas, das quais se destacam se destacam a SFA (*Stochastic Frontier Approach*) e a DEA (*Data Envelopment Analysis*). A primeira é uma técnica paramétrica, em que a fronteira de eficiência é definida *a priori*, enquanto a segunda é uma técnica não paramétrica, em que a referida fronteira de eficiência é estimada a partir dos dados relativos aos *inputs* e aos *outputs*. A metodologia DEA tem sido reconhecida como excelente e robusta ferramenta de análise da eficiência com grande e variada aplicação nomeadamente no setor bancário, e será objeto de estudo e aplicação neste trabalho.

2.3. Metodologia DEA

De acordo com Liu, Lu, Lu & Lin (2013), o valor da DEA reside na sua capacidade de avaliar relativamente a eficiência ou desempenho individual de uma DMU dentro de um grupo-alvo de interesse que opera num determinado domínio de aplicação, como a indústria bancária, a indústria da saúde, a indústria agrícola, a indústria dos transportes, entre outros.

A DEA é uma metodologia destinada à avaliação do desempenho organizacional de entidades similares. Mais especificamente, é uma técnica não paramétrica baseada na programação linear, destinada a avaliar a eficiência (técnica) relativa de um conjunto de entidades homogêneas que usam múltiplos recursos (*inputs*) para produzir múltiplos produtos (*outputs*). Essas entidades podem ser de diversa natureza (empresarial, governamental ou social).

Trata-se de uma metodologia baseada nos dados, isto é, que usa apenas os dados relativos aos *inputs* e aos *outputs* para o desenvolvimento de uma fronteira de produção (eficiência), determinada pelas DMUs que exibem a melhor prática, consideradas eficientes, e em que a avaliação das restantes, consideradas ineficientes, é feita em relação a essa fronteira. Para cada DMU, obtém-se um índice de eficiência medido usualmente na escala de zero a um, em que o valor um é obtido pelas DMUs eficientes e os valores inferiores a um são obtidos pelas DMUs ineficientes. Note-se que um menor valor do índice de eficiência de uma DMU indica uma maior ineficiência dessa DMU.

Esses índices de eficiência são obtidos por recurso à aplicação de um modelo de programação linear. O primeiro modelo, que deu origem formal à DEA, foi desenvolvido por Charnes,

Cooper & Rhodes (1978) e daí designado de modelo CCR, o qual considera retornos constantes de escala. Desde então, muitos outros modelos têm sido propostos para colmatar limitações de modelos anteriores e para dar resposta a novas situações. Desde logo, o modelo BCC, proposto por Banker, Charnes & Cooper (1984), que é uma extensão do modelo CCR para retornos variáveis de escala.

Estes dois modelos são normalmente designados por modelos clássicos da DEA e pertencem à classe dos modelos radiais, uma das duas classes em que os modelos DEA podem ser classificados. Nesta classe de modelos, a eficiência é obtida através da redução (expansão) proporcional e comum dos valores dos *inputs* (*outputs*) mantendo os valores dos *outputs* (*inputs*) e os modelos dizem-se orientados para *inputs* (*outputs*). Na outra, designada de modelos não radiais, a eficiência é obtida diretamente das folgas relativas aos excessos nos valores dos *inputs* e aos défices nos valores dos *outputs*. Nesta última classe, destaca-se o modelo SBM (*Slack Based Measure*) introduzido por Tone (2001). Ainda, nesta classe, a eficiência é obtida através da redução (expansão) dos valores dos *inputs* (*outputs*) mantendo os valores dos *outputs* (*inputs*) ou através da redução dos valores dos *inputs* e expansão dos valores dos *outputs* em simultâneo e, neste caso, os modelos dizem-se não orientados.

Os modelos referidos anteriormente foram concebidos para dados com valores não negativos e, em alguns casos, para dados com valores positivos. Porém, existem situações em que os dados apresentam valores negativos que têm levado ao desenvolvimento de alguns modelos que possam tratar esse tipo de dados. Tone, Chang e Wu (2020) propuseram modelos não radiais SBM em que os dados originais negativos ou iguais a zero são transformados em dados positivos baseados num novo ponto base, referidos por modelos BP-SBM (*Base Point – Slack Based Measure*).

O trabalho desenvolvido por Charnes, Cooper e Rhodes (1978) foi inspirado no trabalho desenvolvido por Farrell (1957) no qual foram apresentadas as ideias básicas da metodologia DEA. Farrell substituiu o conceito de produtividade pelo conceito de eficiência produtiva e foi o primeiro a abordar o conceito de fronteira não paramétrica, definida a partir dos dados.

Na sua formulação inicial, o modelo CCR permite obter a eficiência de Farrell ou eficiência fraca. No entanto, este modelo, assim como o modelo BCC, permite também obter a eficiência de Pareto-Koopmans ou eficiência forte, como se verá mais à frente no capítulo 3. Uma DMU diz-se que é eficiente segundo Pareto-Koopmans ou fortemente eficiente se, e só se, não for possível melhorar qualquer dos seus *inputs* ou *outputs* sem piorar algum dos seus outros *inputs* ou

outputs. No caso dos modelos não radiais não orientados a eficiência obtida é de Pareto-Koopmans.

Para além de permitir obter um índice de eficiência para cada DMU e identificar as DMUs eficientes e não eficientes, a DEA permite também determinar o contributo de cada *input* e de cada *output* para a formação do índice de eficiência e, para as DMUs ineficientes, permite determinar as alterações a realizar nas quantidades dos *inputs* e/ou *outputs*, assim como identificar as DMUs de referência, para que as mesmas se tornem eficientes. Estas informações revelam-se importantes no processo de tomada de decisões para o futuro. Outra característica importante da DEA é o facto de considerar dados (*inputs* e *outputs*) de diversa natureza, não tendo que ser de natureza financeira.

Em geral os modelos DEA, quer sejam radiais quer sejam não radiais, identificam várias DMUs como eficientes, o que acarreta um problema ao decisor quando este pretende saber qual a DMU com maior desempenho. Para ultrapassar esta limitação, vários métodos e modelos de *ranking* têm sido propostos na literatura da DEA. Um método muito usual e que pode ser aplicado a ambos os tipos de modelos (radiais e não radiais) é o método da super-eficiência, proposto por Andersen e Petersen (1993) e será apresentado mais à frente no capítulo 3.

2.4. Aplicação da DEA ao setor bancário

De acordo com Cooper, Seiford e Zhu (2011), a metodologia DEA tem sido usada para a avaliação do desempenho de muitos diferentes tipos de entidades envolvidas em muitos diferentes tipos de atividades, em muitos diferentes contextos e em muitos diferentes países. Uma área de grande aplicação da DEA tem sido a área da banca, como é mencionado nos trabalhos desenvolvidos por Emrouznejad, Parker & Tavares (2008), Liu, Lu, Lu & Lin (2013) e Emrouznejad & Yang (2018).

Emrouznejad, Parker & Tavares (2008), num trabalho bibliográfico sobre os 30 anos da DEA, referem que a banca, a educação, a saúde e a eficiência hospitalar foram as áreas de maior aplicação da DEA. Liu, Lu, Lu & Lin (2013), num trabalho de pesquisa bibliográfica sobre aplicações da DEA no período de 1978 a 2010, referem que o top 5 das áreas de maior aplicação de DEA é constituído pelas áreas da banca, assistência médica, agricultura, transporte e educação, que representam cerca de 40% do total de aplicações. Emrouznejad & Yang (2018), referem que as áreas da agricultura, banca, cadeias de abastecimento, transportes e políticas públicas constituíram o top 5 das áreas de maior aplicação nos anos de 2015 e 2016.

A aplicação da DEA na avaliação da banca foi iniciada por Sherman & Gold (1985) que usaram esta metodologia para avaliar 14 agências bancárias de um banco dos Estados Unidos da América. A avaliação do desempenho no setor bancário é normalmente realizada ao nível das instituições bancárias, em que estas são consideradas como um todo, e ao nível das agências bancárias. Contudo, a maior parte dos estudos sobre a aplicação da DEA no setor bancário tem incidido ao nível das instituições, como se refere nos trabalhos publicados por Berger & Humphery (1997), por Fethi & Pasiouras (2010), por Paradi, Rouart & Zhu (2011) e por Paradi e Zhu (2013). Os primeiros autores referem que dos 57 artigos de aplicação da DEA encontrados, 42 foram realizados ao nível das instituições e 15 ao nível das agências. Os segundos referem que esses números foram de 151 ao nível institucional e de 30 ao nível das agências. Os terceiros referem que desde 1997 foram encontrados 163 ao nível institucional e 65 ao nível das agências. Por fim, os quartos referem que no período de 1985 a 2011, foram encontrados 195 artigos de aplicação da DEA ao nível das instituições e 80 ao nível das agências. De acordo com Paradi, Rouart & Zhu (2011), a existência de mais estudos de aplicação da DEA à avaliação das instituições relativamente à das agências poderá estar relacionada com um mais fácil acesso aos dados ao nível das instituições.

Um aspeto importante na aplicação da DEA é o da seleção dos *inputs* e dos *outputs*. No setor bancário, essa seleção é normalmente feita tendo em conta os objetivos que se pretendem atingir, dando origem a várias perspetivas ou abordagens. Berger e Humphery (1997) identificaram duas principais abordagens para a seleção de *inputs* e *outputs* na avaliação das instituições bancárias: a abordagem da produção e a abordagem da intermediação. Na primeira, assume-se que os bancos produzem serviços de depósitos e empréstimos usando capital e mão de obra como *inputs* e em que outros, como sejam o número de transações ou de documentos processados são usados como *outputs*. Na segunda, os bancos são vistos como intermediários financeiros entre aforradores e investidores. De acordo com aqueles autores, nenhuma destas abordagens é perfeita porque nenhuma delas consegue captar plenamente a dupla função das instituições bancárias como prestadoras de serviços de processamento de transações/documentos e também como intermediárias financeiras.

Outro aspeto a considerar na aplicação da DEA à avaliação do desempenho no setor bancário é o da seleção de modelos, nomeadamente o tipo de escala e a orientação. Quanto ao tipo de escala, Fethi e Pasiouras (2010) referem que há estudos que defendem o uso de retornos variáveis de escala, outros que defendem o uso de retornos constantes de escala e, conseqüentemente, outros que apresentam resultados considerando aqueles dois tipos de

retornos de escala. Quanto à orientação dos modelos, os mesmos autores referem que os modelos orientados para *inputs* têm sido os mais utilizados, provavelmente devido ao maior controlo por parte dos gestores bancários sobre os *inputs* do que sobre os *outputs*. Todavia, existem alguns estudos que usam modelos orientados para *inputs* e outros que apresentam resultados para os dois tipos de orientação. Finalmente, os autores apontam que outros estudos utilizam modelos não orientados baseados no modelo SBM, que, como se referiu na secção anterior, podem assumir as duas orientações em simultâneo.

3. Modelos não radiais de eficiência e de super-eficiência na DEA

3.1. Introdução

Basicamente, os modelos DEA podem ser classificados em modelos radiais e não radiais. Os primeiros caracterizam-se por tratarem com alterações proporcionais e comuns nos *inputs* ou nos *outputs*, enquanto os segundos tratam diretamente com folgas associadas aos excessos de *input* ou aos défices de *output*, sem assumir alterações proporcionais e comuns nos *inputs* ou nos *outputs* (Tone, Chng e Wu, 2020).

Desde que surgiu a DEA, muitos modelos têm sido desenvolvidos por forma a colmatar insuficiências de modelos anteriores e a dar resposta a novas aplicações. A maioria desses modelos assume que os valores dos *inputs* e dos *outputs* são positivos ou, quando muito, não negativos. Contudo, existem aplicações onde alguns *inputs* e/ou *outputs* podem assumir valores negativos como acontece, por exemplo, com o lucro. Nestas circunstâncias revela-se importante a existência de modelos DEA que possam tratar qualquer tipo de dados.

Em geral, os modelos que tratam estes dois tipos de dados identificam várias DMUs como eficientes. Para discriminar essas DMUs e, por conseguinte, estabelecer um *ranking* sobre todas as DMUs, vários métodos de *rankings* têm sido propostos na literatura da DEA. Um desses métodos é o método de super-eficiência proposto por Andersen e Petersen (1993) para modelos radiais e que pode também ser aplicado a modelos não radiais, quer com dados positivos quer com dados não positivos.

Este capítulo tem por objetivo apresentar um estudo sobre alguns modelos não radiais de eficiência e de super-eficiência que permitam tratar qualquer tipo de valores nos dados relativos aos *inputs* e aos *outputs*, mais especificamente, valores positivos, negativos ou nulos, com destaque para os modelos SBM (*Slack Based Measure*). Para uma melhor compreensão das diferenças entre os modelos não radiais e radiais, começa-se por fazer uma breve apresentação destes últimos. Assim, na secção 3.2, são apresentados os modelos radiais ou clássicos da DEA, designadamente os modelos CCR e BCC. Na secção 3.3, apresenta-se o modelo aditivo base e são referidas algumas variantes, as quais permitem tratar com todo o tipo de dados por serem invariantes à translação. Na secção 3.4, apresentam-se os modelos SBM que, não sendo invariantes à translação, alguns deles podem ser usados para tratar todo o tipo de dados. Por fim na secção 3.5, apresentam-se os modelos de super-eficiência SBM:

3.2. Preliminares

Esta secção destina-se a apresentar os modelos radiais CCR e BCC, também conhecidos por modelos clássicos da DEA, por forma a um melhor enquadramento dos modelos não radiais, a apresentar neste capítulo, nomeadamente os que permitem tratar qualquer tipo de valores relativos aos dados.

Como foi referido anteriormente, o modelo CCR, proposto por Charnes, Cooper e Rhodes (1978), foi o que deu origem formal à metodologia DEA. Este modelo considera retornos constantes de escala, isto é, assume que uma variação nos valores dos *inputs* produz uma variação proporcional nos valores dos *outputs*, sendo, por isso, também conhecido por modelo CRS (*Constant Returns to Scale*). O modelo BCC, proposto por Banker, Cooper e Charnes (1984), constitui uma generalização do modelo CCR para retornos variáveis de escala, isto é, assume que, além da variação proporcional, uma variação nos valores dos *inputs* produz uma variação maior ou menor do que o proporcional nos valores dos *outputs*, pelo que é também conhecido por modelo VRS (*Variable Returns to Scale*).

Estes modelos podem ser orientados para *inputs* ou para *outputs*. No primeiro caso, a eficiência é atingida através da redução dos valores dos *inputs* mantendo um determinado nível nos valores dos *outputs*. No segundo caso, a eficiência é atingida através da expansão dos valores dos *outputs* sem aumentar o nível dos valores dos *inputs*. A seleção da orientação destes modelos depende, em geral, do controlo do decisor sobre os *inputs* e os *outputs*.

Para apresentar estes modelos, assume-se que existem n DMUs homogéneas e independentes, que se pretendem avaliar, e que cada DMU utiliza m *inputs* para produzir s *outputs*. Mais especificamente, cada DMU_j ($j=1,\dots,n$) utiliza a quantidade x_{ij} do *input* i ($i=1,\dots,m$) para produzir a quantidade y_{rj} do *output* r ($r=1,\dots,s$). Assume-se, ainda, que $x_{ij} \geq 0$, $y_{rj} \geq 0$, ($i=1,\dots,m; r=1,\dots,s; j=1,\dots,n$), e que para cada DMU existe, pelo menos, um *input* e um *output* com valores positivos.

Na versão orientada para *inputs*, pretende-se minimizar os valores dos *inputs* mantendo um determinado nível nos valores dos *outputs*. A versão orientada para *inputs* do modelo CCR que permite avaliar a eficiência da DMU_k ($k \in \{1,\dots,n\}$) é dada pelo seguinte modelo de programação linear:

$$\theta_k^* = \min \theta_k \tag{3.1a}$$

$$s. a. \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j \leq x_{ik} \theta_k \quad i = 1, \dots, m \quad (3.1b)$$

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j \geq y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (3.1c)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.1d)$$

$$\theta_k \in \mathbb{R} \quad (3.1e)$$

O valor ótimo deste modelo, θ_k^* , fornece o índice de eficiência da DMU_k que, como se mostra em Cooper, Seiford e Tone (2007), é um valor tal que $0 < \theta_k^* \leq 1$. Se $\theta_k^* = 1$, diz-se que a DMU_k está sobre a fronteira de eficiência e, neste caso, pode ser fortemente eficiente ou fracamente eficiente. Assim, se $\theta_k^* = 1$ e todas variáveis de desvio nas restrições (3.1b) e (3.1c) são iguais a zero, em qualquer solução ótima, a DMU_k é considerada fortemente eficiente ou eficiente segundo Pareto- Koopmans. Por outro lado, se $\theta_k^* < 1$ e, nessas restrições, existem variáveis de desvios diferentes de zero na solução ótima, então a DMU_k diz-se fracamente eficiente ou eficiente segundo Farrell, sendo obviamente ineficiente segundo Pareto-Koopmans. Quando $\theta_k^* < 1$, a DMU_k diz-se ineficiente e será tanto mais ineficiente quanto menor for o valor de θ_k^* . Neste caso, o índice de eficiência indica o valor pelo qual os seus *inputs* devem ser multiplicados de modo a que a DMU_k se torne eficiente, originando assim uma redução proporcional e comum nos valores dos seus *inputs*. As restrições (3.1b) garantem que essa redução não ultrapassa a fronteira definida pelas DMUs eficientes, enquanto as restrições (3.1c) garantem que tal redução não implica uma redução do nível dos *outputs* da DMU_k, isto é, da DMU em avaliação. As restrições (3.1d) e (3.1e) indicam a natureza das variáveis.

Na solução ótima do modelo (3.1), os valores de λ_j^* permitem identificar o conjunto de DMUs que são referência (*benchmark*) para que uma determinada DMU_k que seja ineficiente se torne eficiente. Esse conjunto, usualmente designado por conjunto de referência da DMU_k, é constituído pelas DMUs correspondentes aos valores positivos de λ_j^* ($j \in \{1, \dots, n\}$). Este conjunto pode ser constituído por um ou mais elementos. No caso de ser constituído por mais de um elemento, os valores de λ_j^* permitem ainda determinar a importância relativa das correspondentes DMUs para que uma DMU_k ineficiente se torne em eficiente. Assim, quanto

maior for o valor de λ_j^* , maior será a importância da correspondente DMU_j para que uma DMU_k se torne eficiente. É óbvio que se uma DMU_k é eficiente, então é referência de si própria.

O conjunto das soluções admissíveis do modelo (3.1) define o conjunto de possibilidades de produção, isto é, o conjunto $P = \{(x, y) : x \text{ pode produzir } y\}$. Designando esse conjunto por P_{CCR} , tem-se

$$P_{CCR} = \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbf{x} \geq \sum_{j=1}^n \mathbf{x}_j \lambda_j, \mathbf{y} \leq \sum_{j=1}^n \mathbf{y}_j \lambda_j, \lambda_j \geq 0 \ (j = 1, \dots, n) \right\} \quad (3.2)$$

em que (\mathbf{x}, \mathbf{y}) representa uma atividade, isto é, um par de vetores de *inputs* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ e *outputs* $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^s$ admissíveis, e em que $\mathbf{x}_j = [x_{1j} \ x_{2j} \ \dots \ x_{mj}]^T$ e $\mathbf{y}_j = [y_{1j} \ x_{2j} \ \dots \ x_{sj}]^T$ representam os vetores de *inputs* e *outputs*, respetivamente, da DMU_j (ver, por exemplo, Tone, 2016).

O modelo (3.1) é conhecido por forma do envelope do modelo CCR orientado para *inputs*, e é uma das três formas do modelo. As outras duas são a forma dos multiplicadores e a forma fracionária, em que a primeira é obtida através do dual da forma do envelope ou através da linearização da forma fracionária usando a transformação de Charnes e Cooper (1962). Na solução ótima da forma dos multiplicadores, as variáveis de decisão, que representam os pesos associados aos *inputs* e aos *outputs*, possibilitam obter informação relativa ao contributo de cada *input* e de cada *output* para a obtenção do índice de eficiência.

Os modelos radiais orientados para *outputs* têm por objetivo maximizar os valores dos *outputs* sem que seja incrementado qualquer valor dos *inputs*. A versão orientada para *outputs* da forma do envelope do modelo CCR, que permite avaliar a eficiência da DMU_k, é dada pelo seguinte modelo de programação linear:

$$\rho_k^* = \max \rho_k \quad (3.3a)$$

$$s. \ a. \quad \sum_{j=1}^n X_{ij} \lambda_j \leq X_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.3b)$$

$$\sum_{j=1}^n Y_{rj} \lambda_j \geq Y_{rk} \rho_k \quad r = 1, \dots, s \quad (3.3c)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.3d)$$

$$\rho_k \in \mathbb{R} \quad (3.3e)$$

O valor ótimo deste modelo, ρ_k^* , indica o valor pelo qual os valores dos *outputs* de uma DMU_k, ineficiente, devem ser multiplicados de modo a atingir a fronteira de eficiência, originando assim um aumento (expansão) proporcional e comum nos valores dos *outputs*. As restrições (3.3b) garantem que tal aumento não produz qualquer incremento nos valores dos *inputs*. Por sua vez, as restrições (3.3c) garantem que esse aumento não ultrapassa a fronteira de eficiência definida pelas DMUs eficientes. As restrições (3.3d) e (3.3e) indicam a natureza das variáveis. Neste caso, tem-se $\rho_k^* \geq 1$ pelo que o índice de eficiência é dado por $1/\rho_k^*$ de modo a garantir uma medida na escala de 0 a 1. Se $\rho_k^* = 1$, a DMU_k pertence à fronteira de eficiência e, similarmente ao que acontece na versão orientada para *inputs*, pode ser fortemente eficiente ou fracamente eficiente. Se $\rho_k^* > 1$, a DMU_k diz-se ineficiente e será tanto mais ineficiente quanto maior for o valor de ρ_k^* .

Claramente que os valores das variáveis λ_j na solução ótima do modelo anterior, λ_j^* , possibilitam obter o mesmo tipo de informação que na versão orientada para *inputs*, isto é, possibilitam identificar as DMUs de referência para a DMU_k.

À semelhança do que acontece na versão orientada para *inputs*, também nesta versão existem a forma dos multiplicadores e a forma fracionária.

O modelo BCC que, como já se referiu, considera retornos variáveis de escala, substitui o axioma da proporcionalidade pelo axioma da convexidade. A forma do envelope, quer da versão orientada para *inputs* quer da versão orientada para *outputs*, deste modelo obtém-se da correspondente forma e versão do modelo CCR, por introdução da restrição

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \quad (3.4)$$

Esta restrição conjuntamente com as desigualdades $\lambda_j \geq 0$ ($j = 1, \dots, n$), impõem a condição de convexidade. A introdução da restrição (3.4) corresponde à inclusão de uma variável (livre) na forma dos multiplicadores e na forma fracionária do modelo CCR, quer na versão orientada para *inputs* quer na orientada para *outputs*, obtendo-se assim as correspondentes formas e versões do modelo BCC. Essa variável identifica o tipo de retorno de escala em que a DMU_k opera (crescente, ou decrescente, ou constante).

O conjunto de possibilidades de produção associado ao modelo BCC, designado por P_{BCC} , é obtido de P_{CCR} , por inclusão, nesse conjunto, da restrição (3.4).

A forma do envelope do modelo BCC pode ser estendida através da relaxação da condição de convexidade (Cooper, Seiford e Tone (2007)). Assim, substituindo (3.4) por

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \geq 0 \quad (3.4a)$$

obtém-se o modelo CCR. Note-se que, neste caso, a restrição anterior é redundante e, devido à presença das restrições (3.1d), pode ser removida do modelo.

Para retornos não crescentes de escala, referidos na literatura por NIRS (*Non-Increasing Returns to Scale*), (3.4) é substituída pela restrição

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \leq 1 \quad (3.4b)$$

Finalmente, para retornos não decrescentes de escala, referidos na literatura por NDRS (*Non-Decreasing Returns to Scale*), a restrição (3.4) é substituída pela restrição

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \geq 1 \quad (3.4c)$$

3.3. Modelos aditivos

Como se referiu anteriormente, os modelos radiais, CCR e BCC, requerem orientação para *inputs* ou para *outputs*. Charnes, Cooper, Golany, Seiford e Stutz (1985) introduziram um modelo que dispensa a distinção entre estas duas orientações, isto é, considera-as em simultâneo. Este modelo trata as folgas, devidas a excessos de *input* e a défices de *output*, diretamente na função objetivo. Tal modelo é designado por modelo aditivo e, para avaliação da DMU_k , é dado por:

$$\max \left(\sum_{i=1}^m s_{ik}^- + \sum_{r=1}^s s_{rk}^+ \right) \quad (3.5a)$$

$$s. a. \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j + s_{ik}^- = x_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.5b)$$

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j - s_{rk}^+ = y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (3.5c)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \quad (3.5d)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.5e)$$

$$s_i^- \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.5f)$$

$$s_r^+ \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.5g)$$

Através do modelo (3.5), a DMU_k diz-se eficiente se, e só se, as variáveis de folga são todas iguais a zero na solução ótima, isto é, se, e só se, $s_{ik}^- = 0$ ($i = 1, \dots, m$) e $s_{rk}^+ = 0$ ($r = 1, \dots, s$); caso contrário, a DMU_k diz-se ineficiente. Uma DMU identificada como eficiente pelo modelo aditivo é fortemente eficiente ou eficiente segundo Pareto-Koopmans.

Devido à inclusão da restrição (3.5d), o modelo aditivo apresentado anteriormente considera retornos variáveis de escala. Para obter os correspondentes modelos para retornos não variáveis de escala, há que modificar a restrição (3.5d) como foi feito em (3.4a), (3.4b) e (3.4c).

O modelo aditivo (3.5) é um modelo não orientado por considerar simultaneamente a redução dos valores dos *inputs* e a expansão dos valores dos *outputs*. No entanto, este modelo pode ser orientado para *inputs*, removendo as variáveis de folga associadas aos *outputs*, ou orientado para *outputs*, removendo as variáveis de folga associadas aos *inputs*. Em cada um dos casos apenas são contabilizadas as ineficiências relativas aos *inputs* ou relativas aos *outputs*, respetivamente, pelo que estas versões se revelam pouco atrativas.

Como se refere em Cooper, Seiford, Tone e Zhu (2007), a medida de eficiência fornecida pelo modelo aditivo (3.5) é completa, isto é, reflete todas as ineficiências que o modelo pode identificar. Outra propriedade do modelo aditivo é a de, sob retornos variáveis de escala, ser invariante à translação, como se mostra em Ali e Seiford (1990). Um modelo DEA diz-se invariante à translação se a solução ótima não se altera mediante uma translação dos valores dos dados relativos aos *inputs* e/ou aos *outputs*, isto é, quando se altera a origem das coordenadas (Cooper, Seiford e Tone, 2007). Esta propriedade revela-se importante quando existem valores negativos em alguns *inputs* e/ou *outputs*, pois estes podem ser transformados em valores positivos através da adição de constantes adequadas, com a garantia que a solução ótima não é afetada por essa translação (Cooper, Park e Pastor, 1999). De referir que o modelo CCR não é invariante à translação e que o modelo BCC orientado para *inputs* (*outputs*) é invariante à translação apenas em relação aos *outputs* (*inputs*).

Apesar das propriedades atrativas acabadas de referir, o modelo aditivo apresenta algumas limitações, nomeadamente a de não fornecer uma medida de eficiência numa escala de 0 a 1 como acontece com os modelos radiais CCR e BCC, e a de não ser invariante às unidades. Um modelo diz-se invariante às unidades quando o índice de eficiência que fornece não depende das unidades de medida dos *inputs* e dos *outputs*. No sentido de ultrapassar aquelas limitações, vários modelos não radiais têm sido propostos na literatura da especialidade. Esses modelos são baseados no modelo aditivo, mais especificamente, usam as mesmas restrições, diferindo apenas na função objetivo.

Em alguns desses modelos, a função objetivo é alterada através da afetação de ponderadores não negativos às variáveis de folga, obtendo-se assim versões ponderadas do modelo aditivo, como é o caso do modelo aditivo ponderado apresentado em Lovell e Pastor (1995), inicialmente proposto por Pastor (1994) para tratar dados com valores negativos, e que foi mais tarde utilizado para o desenvolvimento das medidas RAM (*Range Adjusted Measure*) e BAM (*Bounded Adjusted Measure*), propostas para igualmente tratar dados que incluam valores negativos, uma vez que são invariantes à translação. Estes modelos são também invariantes às unidades.

A medida RAM, introduzida por Cooper, Parker e Pastor (1999), é uma versão ponderada do modelo aditivo onde os ponderadores relativos a cada folga no *input* e a cada folga no *output* são determinados a partir dos dados relativos aos *inputs* e aos *outputs*. Apesar de ser uma medida invariante à translação e às unidades, a medida RAM apresenta duas desvantagens que limitam a sua aplicação: a de apenas poder ser utilizada sob a hipótese de retornos variáveis, uma vez que nas outras hipóteses de retornos de escala não garante que o valor da eficiência varia entre zero e um; e a de evidenciar um fraco poder de discriminação (Cooper, Pastor, Borrás, Aparício e Pastor, 2011).

A medida BAM, proposta por Cooper, Pastor, Borrás, Aparício e Pastor (2011) tem características semelhantes à medida RAM, mas possui mais poder de discriminação, conseguido através dos ponderadores usados. Em ligação com os modelos aditivos limitados, os autores estendem a medida BAM para retornos não variáveis de escala (constantes, não crescentes, não decrescentes).

3.4. Modelos não radiais SBM de eficiência na DEA

Na secção anterior foi apresentado o modelo aditivo básico (3.5) e foram referidos alguns modelos aditivos, resultantes desse modelo, por ponderação das variáveis de folga na função objetivo. Nesta secção, apresentam-se outros modelos não radiais, também baseados no modelo aditivo (3.5), mas onde a alteração da função objetivo é feita de maneira diferente, designados por modelos SBM (*Slack Based Measure*).

3.4.1. Modelo SBM (Tone, 2001)

Tone (2001) introduziu um modelo que permite obter uma medida de eficiência baseada nas folgas associadas aos *inputs* e aos *outputs*, designado de modelo SBM (*Slack Based Measure*). Assumindo que os valores dos *inputs* e dos *outputs* são positivos e considerando retornos variáveis de escala, o modelo SBM, para avaliação da DMU_k, é dado por:

$$\rho_k^* = \min \frac{1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{s_{ik}^-}{x_{ik}}}{1 + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{s_{rk}^+}{y_{rk}}} \quad (3.7a)$$

$$s. a. \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j + s_{ik}^- = x_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.7b)$$

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j - s_{rk}^+ = y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (3.7c)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \quad (3.7d)$$

$$s_{ik}^- \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.7e)$$

$$s_{rk}^+ \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.7f)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.7g)$$

As restrições do modelo SBM (3.7) são as mesmas restrições do modelo aditivo (3.5). Contudo, a função objetivo usa as variáveis de folga, relativas aos *inputs* e aos *outputs*, de uma maneira diferente do modelo aditivo. No modelo SBM, essas variáveis são usadas para contabilizar todas as ineficiências, de modo a obter uma medida eficiência na escala de zero a um, isto é, uma

medida que satisfaz a condição $0 \leq \rho_k^* \leq 1$. Esta medida é invariante às unidades e é monótona decrescente em cada folga relativa aos *inputs* e aos *outputs*.

O modelo SBM (3.7) é um modelo de programação linear fracionária que, através da transformação de Charnes e Cooper (1962), pode ser transformado num modelo de programação linear equivalente. Para tal sejam:

$$t = \left(1 + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{\hat{s}_{rk}^+}{y_{rk}} \right)^{-1} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.8a)$$

$$\hat{s}_{ik}^- = t s_{ik}^- \quad i = 1, \dots, m \quad (3.8b)$$

$$\hat{s}_{rk}^+ = t s_{rk}^+ \quad r = 1, \dots, s \quad (3.8c)$$

$$\hat{\lambda}_j = t \lambda_j \quad j = 1, \dots, n \quad (3.8d)$$

Usando as igualdades anteriores, o modelo SBM (3.7) pode ser convertido no seguinte modelo de programação linear:

$$\hat{\rho}_k^* = \min t - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{\hat{s}_{ik}^-}{x_{ik}} \quad (3.9a)$$

$$s. a. \quad t + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{\hat{s}_{rk}^+}{y_{rk}} = 1 \quad (3.9b)$$

$$-t x_{ik} + \sum_{j=1}^n x_{ij} \hat{\lambda}_j + \hat{s}_{ik}^- = 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.9c)$$

$$-t y_{rk} + \sum_{j=1}^n y_{rj} \hat{\lambda}_j - \hat{s}_{rk}^+ = 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.9d)$$

$$-t + \sum_{j=1; j \neq k}^n \hat{\lambda}_j = 0 \quad (3.9e)$$

$$\hat{s}_{ik}^- \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.9f)$$

$$\hat{s}_{rk}^+ \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.9g)$$

$$\hat{\lambda}_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.9h)$$

$$t > 0 \quad (3.9i)$$

Seja $(\hat{\rho}_k^*, t^*, \hat{s}_{ik}^-, \hat{s}_{rk}^+, \hat{\lambda}_j^*)$ uma solução ótica do modelo (3.9). Usando as relações (3.8) e atendendo a que o valor ótico dos modelos (3.7) e (3.9) é o mesmo, uma solução ótica do modelo (3.7) é dada por (Tone, 2001):

$$\rho_k^* = \hat{\rho}_k^*, \lambda_j^* = \frac{\hat{\lambda}_j^*}{t^*}, s_{ik}^- = \frac{\hat{s}_{ik}^-}{t^*}, s_{rk}^+ = \frac{\hat{s}_{rk}^+}{t^*}.$$

Com base nesta solução ótica, uma DMU_k diz-se eficiente, e só se, $\rho_k^* = 1$ ou, equivalentemente, se $s_{ik}^- = 0$ e $s_{rk}^+ = 0$, para todo i e para todo o r , isto é, se as folgas relativas aos excessos de *input* e aos défices de *output* são iguais a zero, em qualquer solução ótica. Uma DMU_k eficiente através do modelo SBM diz-se fortemente eficiente ou eficiente segundo Pareto-Koopmans.

Como acontece nos modelos radiais apresentados na secção anterior, o conjunto das DMUs correspondentes aos valores positivos de λ_j^* ($j \in \{1, \dots, n\}$), na avaliação de uma DMU_k, é designado conjunto de referência da DMU_k.

Como se mostra em Tone (2001), a função objetivo do modelo SBM pode ser interpretada como um produto de ineficiências *input* e *output*. De facto, a função objetivo em (3.18) pode ser reescrita como se segue:

$$\rho_k = \left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{x_{ik} - s_{ik}^-}{x_{ik}} \right) \left(\frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{y_{rk} + s_{rk}^+}{y_{rk}} \right)^{-1}.$$

No primeiro termo do segundo membro da igualdade anterior, o quociente $(x_{ik} - s_{ik}^-)/x_{ik}$ calcula a taxa de redução relativa do *input* i e, deste modo, esse primeiro termo corresponde à taxa média de redução dos *inputs* ou à ineficiência *input*. Similarmente, o quociente $(y_{rk} + s_{rk}^+)/y_{rk}$ no segundo termo desse segundo membro calcula a taxa de expansão relativa do *output* r e, deste modo, esse segundo termo corresponde ao inverso da taxa média de expansão dos *outputs* ou à ineficiência *output*.

De acordo com Cooper, Seiford, Tone e Zhu (2007), facilmente se mostra que uma DMU será identificada como eficiente pelo modelo SBM se, e só se, também o for pelo modelo aditivo (3.5).

O modelo SBM apresentado anteriormente é não orientado. No entanto, este modelo pode também ser orientado para *inputs* ou para *outputs*. A versão orientada para *inputs* obtém-se do

modelo SBM não orientado contabilizando apenas as folgas (ineficiências) relativas aos *inputs* e é dada por:

$$\rho_k^{I*} = \min 1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{s_{ik}^-}{x_{ik}} \quad (3.10a)$$

$$s. a. \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j + s_{ik}^- = x_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.10b)$$

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j \geq y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (3.10c)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \quad (3.10d)$$

$$s_{ik}^- \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.10e)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.10f)$$

Identicamente, a versão orientada para *outputs* obtém-se do modelo SBM não orientado contabilizando apenas as folgas (ineficiências) relativas aos *outputs*, e é dada pelo seguinte modelo:

$$\rho_k^{O*} = \min \frac{1}{1 + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{s_{rk}^+}{y_{rk}}} \quad (3.11a)$$

$$s. a. \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j \leq x_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.11b)$$

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j - s_{rk}^+ = y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (3.11c)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \quad (3.11d)$$

$$s_{rk}^+ \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.11e)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.11f)$$

Comparando cada uma das versões orientadas (para *inputs* ou para *outputs*) com a versão não orientada do modelo SBM, tem-se $\rho_k^{I*} \geq \rho_k^*$ e $\rho_k^{O*} \geq \rho_k^*$ (Cooper, Seiford e Tone, 2007). Note-

se que, similarmente ao modelo aditivo, a versão orientada para *inputs* do modelo SBM apenas contabiliza os desvios relativos aos *inputs*, enquanto a versão orientada para *outputs* apenas contabiliza as folgas relativas aos *outputs*

O modelo SBM e as suas versões orientadas para *inputs* e para *outputs*, apresentados anteriormente, foram definidos considerando retornos variáveis de escala. Estes modelos podem também ser definidos considerando retornos constantes de escala bastando para tal remover daqueles modelos a restrição de convexidade.

3.4.2. Modelo MSBM (Sharp, Meng e Liu, 2007)

No modelo SBM apresentado anteriormente, assume-se que os valores dos *inputs* e dos *outputs* são positivos, podendo com alguns ajustamentos assumir-se valores iguais a zero (Tone, 2001). Contudo, como se refere em Sharp, Meng e Liu (2007), o modelo SBM não é invariante à translação pelo que o valor da eficiência obtido por este modelo pode ser negativo quando os dados, relativos aos *inputs* e/ou *outputs*, assumem valores negativos.

Para tratar dados que incluam valores negativos, Sharp, Meng e Liu (2007) propuseram uma modificação do modelo SBM usando os parâmetros de escala propostos por Portela, Thanassoulis e Simpson (2004) para construir um modelo de escala direcional, denotado de RDM (*Range Directional Model*), que permite tratar dados com valores negativos. Esses parâmetros, P_{ik}^- e P_{rk}^+ , referidos como a escala de possível melhoria da DMU_k, são definidos como se segue:

$$P_{ik}^- = x_{ik} - \min_j \{x_{ij}\} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.12a)$$

$$P_{rk}^+ = \max_j \{y_{rj}\} - y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (3.12b)$$

De referir que os parâmetros (vetores) de escala definidos anteriormente são não negativos, satisfazendo assim as condições de não negatividade sobre os vetores direcionais usados no modelo de distância direcional proposto por Chambers, Chung e Färe (1996, 1998) e que serviu de base à construção do modelo RDM.

Usando aqueles parâmetros de escala, Sharp, Meng e Liu (2007) propuseram um modelo SBM modificado por forma a poder tratar dados que incluam valores positivos e/ou negativos. Os autores assumem que existe pelo menos um input positivo e um, ou mais, *inputs* negativos, assim como a existência de pelo menos um output positivo e um, ou mais, *outputs* negativos. Esse

modelo, que incorpora também pesos associados a folgas nos *inputs* e nos *outputs*, é denotado por MSBM (*Modified Slacks Based Measure*) e, para avaliar a eficiência da DMU_k, é dado por:

$$\rho_k^* = \min \frac{1 - \sum_{i=1}^m \frac{w_i s_{ik}^-}{P_{ik}^-}}{1 + \sum_{r=1}^s \frac{v_r s_{rk}^+}{P_{rk}^+}} \quad (3.13a)$$

$$s. a. \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j + s_{ik}^- = x_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.13b)$$

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j - s_{rk}^+ = y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (3.13c)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \quad (3.13d)$$

$$\sum_{i=1}^m w_i = 1 \quad (3.13e)$$

$$\sum_{r=1}^s v_r = 1 \quad (3.13f)$$

$$s_{ik}^- \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.13g)$$

$$s_{rk}^+ \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.13h)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.13i)$$

$$w_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.13j)$$

$$v_r \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.13l)$$

Neste modelo, w_i e v_r , são pesos não negativos associados às folgas nos *inputs* e *outputs*, respetivamente, usados pelo decisor para estabelecer o seu grau de importância sobre a melhoria dos *inputs* e *outputs*. Ainda, relativamente a este modelo, quando $P_{ik}^- = 0$ ou $P_{rk}^+ = 0$, os autores assumem que o correspondente termo é removido do numerador ou do denominador da função objetivo. Como os autores mostram, o modelo MSBM fornece um valor de eficiência na escala de zero a um e é invariante à translação. De referir que para retornos não variáveis de escala, o modelo não é invariante à translação e também não é garantido que o valor da eficiência esteja entre zero e um. Similarmente ao modelo SBM, este modelo é invariante às unidades.

Obviamente que, conforme foi feito no modelo SBM, o modelo MSBM (3.13) pode também, através da transformação de Charnes e Cooper (1962), ser transformado num modelo de programação linear, cuja solução ótima permite obter a solução ótima do modelo MSBM.

De referir que os parâmetros de escala (3.12), usados no modelo MSBM e propostos por Portela, Thanassoulis e Simpson (2004), são exatamente os usados pela medida BAM no contexto dos modelos aditivos ponderados e que os autores designam de escala inferior para os *inputs* e de escala superior para os *outputs*.

3.4.3. Modelo BP-SBM (Tone, Chang & Wu, 2020)

Como se referiu anteriormente, o modelo SBM, proposto por Tone (2001), foi concebido considerando dados positivos, podendo ainda, mediante pequenos ajustamentos, ser utilizado para tratar dados com valores iguais a zero. Por outro lado, o modelo MSBM, proposto por Sharp, Meng e Liu (2007) para tratar dados negativos, apenas pode ser usado sob retornos variáveis de escala. De modo a poder tratar todo o tipo de dados (positivos, nulos e negativos) e a considerar vários tipos de retorno de escala, Tone, Chang e Wu (2020) propuseram modelos SBM que transformam os originais valores negativos e iguais a zero dos *inputs* e dos *outputs* em valores positivos baseados num novo ponto base, sendo por isso referidos de modelos BP-SBM (*Base Point - Slack Based Measure*). Para definir esse ponto base, os autores começam por definir os valores mínimos para cada *input* e para cada *output*.

Assim, sendo $\delta_i = \min\{x_{i1}, \dots, x_{in}\}$ ($i = 1, \dots, m$), o valor mínimo de cada *input* i , x_i^{min} ($i = 1, \dots, m$), é definido como se segue:

$$\text{se } \delta_i > 0, \text{ então } x_i^{min} = 0; \quad (3.14a)$$

$$\text{se } \delta_i = 0, \text{ então } x_i^{min} = -\sigma_i, \text{ com } \sigma_i > 0; \quad (3.14b)$$

$$\text{se } \delta_i < 0, \text{ então } x_i^{min} = \delta_i(1 + \tau_i), \text{ com } \tau_i > 0. \quad (3.14c)$$

Se $\delta_i > 0$, então não há necessidade de efetuar qualquer transformação neste *input* porque ele já é positivo para todas as DMUs. No entanto, se $\delta_i = 0$, isto é, se uma ou várias DMUs não usam o *input* i , então esse *input* deve ser perturbado por uma quantidade positiva de modo a evitar a divisão por zero no cálculo da medida SBM. Por outro lado, se $\delta_i < 0$, isto é, se para uma ou várias DMUs o valor do *input* i é negativo, então o mesmo deve ser translacionado por uma quantidade suficientemente grande de modo que o seu valor se torne positivo para todas as

DMUs; uma tal quantidade que pode ser escolhida é δ_i , que torna o *input* i não negativo, mais um termo de perturbação $\delta_i \tau_i$ que garante valor positivo para esse *input* i em todas as DMUs (Tone, Chang e Wu, 2020).

Identicamente, sendo $\omega_r = \min\{y_{r1}, \dots, y_{rn}\}$ ($r=1, \dots, s$), o valor mínimo de cada *output* r , y_r^{\min} ($r=1, \dots, s$), é definido como se segue:

$$\text{se } \omega_r > 0, \text{ então } y_r^{\min} = 0; \quad (3.15a)$$

$$\text{se } \omega_r = 0, \text{ então } y_r^{\min} = -\rho_r, \text{ com } \rho_r > 0; \quad (3.15b)$$

$$\text{se } \omega_r < 0, \text{ então } y_r^{\min} = \omega_r(1 + \gamma_r), \text{ com } \gamma_r > 0. \quad (3.15c)$$

A lógica da transformação anterior relativa aos *outputs* é semelhante à dos *inputs* feita anteriormente.

Na sequência do exposto anteriormente, o vetor $(0, \dots, 0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{m+s}$ é referido como ponto base original, enquanto o vetor $(x_1^{\min}, \dots, x_m^{\min}, y_1^{\min}, \dots, y_s^{\min}) \in \mathbb{R}^{m+s}$ é referido como ponto base modificado. Sendo (X, Y) o conjunto de dados originais, onde $X = (x_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é matriz dos *inputs* e $Y = (y_{rj}) \in \mathbb{R}^{s \times n}$ é a matriz dos *outputs*, o uso do ponto base modificado permite obter um novo conjunto de dados (\bar{X}, \bar{Y}) , com $\bar{X} = (\bar{x}_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $\bar{Y} = (\bar{y}_{rj}) \in \mathbb{R}^{s \times n}$, em que

$$\bar{x}_{ij} = x_{ij} - x_i^{\min} > 0 \quad \forall (i, j) \quad (3.16a)$$

$$\bar{y}_{rj} = y_{rj} - y_r^{\min} > 0 \quad \forall (r, j) \quad (3.16b).$$

Então, $\bar{X} = (\bar{x}_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $\bar{Y} = (\bar{y}_{rj}) \in \mathbb{R}^{s \times n}$ são matrizes de elementos positivos, pelo que o modelo SBM, proposto por Tone (2001) para dados positivos, pode ser aplicado a este novo conjunto de dados (\bar{X}, \bar{Y}) . Devido ao uso de um ponto base para a translação dos dados, este modelo é denotado pelos autores por BP-SBM, como mencionado anteriormente. Considerando retornos variáveis de escala, tal modelo, para avaliação da DMU_k, é dado por:

$$\rho_k^* = \min \frac{1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{s_{ik}^-}{\bar{x}_{ik}}}{1 + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{s_{rk}^+}{\bar{y}_{rk}}} \quad (3.17a)$$

$$s. a. \sum_{j=1}^n \bar{x}_{ij} \lambda_j + s_{ik}^- = \bar{x}_{ik} \quad i=1, \dots, m \quad (3.17b)$$

$$\sum_{j=1}^n \bar{y}_{rj} \lambda_j - s_{rk}^+ = \bar{y}_{rk} \quad r=1, \dots, s \quad (3.17c)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \quad (3.17d)$$

$$s_{ik}^- \geq 0 \quad i=1, \dots, m \quad (3.17e)$$

$$s_{rk}^+ \geq 0 \quad r=1, \dots, s \quad (3.17f)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j=1, \dots, n \quad (3.17g)$$

Neste modelo, uma DMU_k é considerada eficiente nos mesmos termos em que o é no caso do modelo SBM, isto é, se, e só se, $\rho_k^* = 1$ ou, equivalentemente, $s_{ik}^- = 0$ ($i=1, \dots, m$) e $s_{rk}^+ = 0$ ($r=1, \dots, s$).

O modelo anterior pode, através de uma adequada alteração da restrição (3.17d), considerar retornos constantes de escala, retornos não crescentes de escala ou retornos não decrescentes de escala. Também, como no caso do modelo SBM, o modelo BP-SBM pode ser orientado para *inputs* ou para *outputs*.

Claramente que o modelo BP-SBM (3.17) pode também, através da transformação de Charnes e Cooper (1962), ser convertido num modelo de programação linear, cuja solução ótima permite obter a solução ótima do modelo BP-SBM, à semelhança do que foi feito no modelo SBM.

Tone, Chang e Wu (2020) mostram que o modelo BP-SBM possui três importantes propriedades: é invariante às unidades, isto é, o índice de eficiência não se altera mediante a alteração das unidades de medida dos dados; o índice de eficiência é monótono decrescente (crescente) relativamente ao crescimento (decréscimo) dos valores dos *inputs*, enquanto é monótono crescente (decréscimo) relativamente ao crescimento (decréscimo) dos valores

dos *outputs*; é consistente com o modelo SBM na medida em que se todos os dados são positivos, os índices de eficiência obtidos pelos dois modelos são os mesmos.

Para além de poder tratar com todo o tipo de valores (positivos, nulos e negativos) incluídos nos dados, o modelo BP-SBM previne a irracionalidade da divisão por zero que outros modelos como, por exemplo, o modelo MSBM não pode evitar. A designação de irracionalidade da divisão por zero é atribuída pelos autores aos resultados irracionais que são obtidos (por exemplo, DMUs ineficientes poderem ser consideradas eficientes) quando os termos iguais a zero são removidos do modelo.

É claro que também neste modelo podem ser consideradas as versões orientadas para *inputs* ou para *outputs* como acontece no modelo SBM.

Note-se que o modelo BP-SBM não é mais do que o modelo SBM aplicado a dados modificados (positivos) obtidos a partir dos dados iniciais, que podem ser de qualquer tipo (positivo, negativo ou nulo), através de uma mudança da origem das coordenadas.

3.5. Modelos não radiais SBM de super-eficiência

Na secção (3.4) foram apresentados modelos não radiais SBM, alguns dos quais permitem tratar dados com valores negativos, obtidos do modelo aditivo proposto por Charnes, Cooper, Golany, Seiford e Stutz (1985) por alteração da função objetivo. Estes modelos, assim como outros para dados não negativos, permitem que, em geral, várias DMUs sejam classificadas como eficientes. Consequentemente, uma questão que se coloca é a de saber qual das DMUs eficientes tem melhor desempenho. Para dar resposta a esta questão, mais especificamente, para discriminar estas DMUs e, deste modo, estabelecer um *ranking* completo entre elas, vários métodos e modelos de *rankings* têm sido propostos no âmbito da DEA, como se pode constatar nos trabalhos desenvolvidos por Alder, Friedman e Sinuany-Stern (2002) e por Aldamak e Zolfaghari (2017), onde se apresenta uma revisão sobre vários métodos de *ranking* propostos na literatura da DEA.

Um desses métodos, que tem adquirido grande popularidade, é o designado método de super-eficiência proposto por Andersen e Petersen (1993). Este método consiste em excluir do conjunto de referência a DMU_k em avaliação, o que significa excluí-la da fronteira de eficiência, no caso de ser eficiente, pelo que a sua eficiência é obtida em relação à fronteira de eficiência definida pelas restantes DMUs eficientes. Deste modo, a exclusão de uma DMU_k que esteja situada num ponto extremo da fronteira produz uma redução do conjunto de possibilidades de

produção, permitindo que tal tipo de DMUs se tornem super-eficientes e obtenham um índice de super-eficiência superior a um. O desempenho de uma DMU será tanto melhor quanto maior for o valor da sua super-eficiência.

Para os modelos CCR e BCC, os correspondentes modelos de super-eficiência são obtidos por imposição da condição $j \neq k$ nas restrições daqueles modelos. Quando a DMU_k representa um ponto extremo da fronteira, a sua exclusão pode levar a problemas de impossibilidade, nomeadamente no modelo BCC, já que no modelo CCR apenas ocorrem na versão orientada para *inputs* com certo tipo de dados com zeros. Para resolver estes problemas, vários modelos têm sido propostos (ver, por exemplo, Lovell e Rouse, 2003). Nos modelos não radiais, nomeadamente no modelo SBM, a obtenção dos correspondentes modelos de super-eficiência não é tão direta como no caso dos modelos radiais.

3.5.1. Modelos de super-eficiência SBM

Tone (2002) foi o primeiro a propor um modelo de super-eficiência baseado em folgas, mais especificamente baseado no modelo SBM proposto por Tone (2001). A aplicação desse modelo de super-eficiência para discriminar as DMUs classificadas como eficientes requer que antes se utilize o modelo SBM para classificar as DMUS em eficientes e não eficientes. Assim, para avaliar a super-eficiência de uma DMU_k, classificada como eficiente pelo modelo SBM, Tone (2002) propôs o seguinte modelo:

$$\delta_k^* = \min \frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \tilde{x}_{ik}}{\frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \tilde{y}_{rk}} \quad (3.18a)$$

$$s. a. \quad \tilde{x}_{ik} \geq \sum_{j=1; j \neq k}^n x_{ij} \lambda_j \quad i = 1, \dots, m \quad (3.18b)$$

$$\tilde{y}_{rk} \leq \sum_{j=1; j \neq k}^n y_{rj} \lambda_j \quad r = 1, \dots, s \quad (3.18c)$$

$$\tilde{x}_{ik} \geq x_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.18d)$$

$$\tilde{y}_{rk} \leq y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (3.18e)$$

$$\sum_{j=1; j \neq k}^n \lambda_j = 1 \quad (3.18f)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.18g)$$

$$\tilde{y}_{rk} \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.18h)$$

O modelo (3.18) será no que se segue denotado por SE_SBM. Tendo em conta as restrições (3.18d) e (3.18e), o valor δ_k^* é maior ou igual a um, e é igual a um apenas quando a exclusão da DMU_k não produz qualquer alteração no conjunto de possibilidades de produção. Então, se for usado para avaliar as DMUs classificadas como ineficientes, o índice de eficiência obtido será igual a um para todas essas DMUs, significando que o modelo não consegue diferenciar as DMUs ineficientes.

Devido à função objetivo, o modelo requer que os valores dos *inputs* e dos *outputs* sejam positivos para as DMUs eficientes. Tone (2002) relaxa esta condição para valores não negativos e descreve como proceder para o caso de existirem *inputs* e *outputs* com valores iguais a zero.

O modelo SE_SBM (3.18) não incorpora explicitamente as variáveis de folgas relativas aos *inputs* e *outputs*, como acontece com o modelo SBM. Contudo, usando as relações $\tilde{x}_{ik} = x_{ik} + s_{ik}^-$ e $\tilde{y}_{rk} = y_{rk} - s_{rk}^+$, obtém-se um modelo equivalente baseado em folgas e que é mais consistente com o modelo SBM (Fang, Lee, Hwang e Chung, 2013). Para a avaliação da super-eficiência de uma DMU_k que seja eficiente pelo modelo SBM, tal modelo é dado por:

$$\delta_k^* = \min \frac{1 + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{s_{ik}^-}{x_{ik}}}{1 - \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{s_{rk}^+}{y_{rk}}} \quad (3.19a)$$

$$s. a. \quad \sum_{j=1; j \neq k}^n x_{ij} \lambda_j - s_{ik}^- \leq x_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.19b)$$

$$\sum_{j=1; j \neq k}^n y_{rj} \lambda_j + s_{rk}^+ \geq y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (3.19c)$$

$$s_{rk}^+ \leq y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (3.19d)$$

$$s_{ik}^- \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.19e)$$

$$s_{rk}^+ \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.19f)$$

$$\sum_{j=1; j \neq k}^n \lambda_j = 1 \quad (3.19g)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n ; j \neq k \quad (3.19h)$$

Os modelos SE_SBM (3.18) e (3.19) consideram retornos variáveis de escala. Os correspondentes modelos para retornos constantes de escala obtêm-se removendo daqueles modelos, a restrição de convexidade (3.18f) e (3.19g), respetivamente. Em Tone (2002), mostra-se que, sob retornos variáveis de escala, o modelo SE_SBM é sempre possível com valor ótimo finito, não sofrendo assim do problema de impossibilidade do modelo radial de super-eficiência BCC.

Os modelos de super-eficiência SBM, (3.18) e (3.19), são modelos de programação linear fracionária, que podem ser convertidos em modelos de programação linear equivalentes através da transformação de Charnes e Cooper (1962). Para o caso do modelo (3.19), tem-se que, usando as relações

$$t = \left(1 - \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{s_{rk}^+}{y_{rk}} \right)^{-1} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.20a)$$

$$\hat{s}_{ik}^- = t s_{ik}^- \quad i = 1, \dots, m \quad (3.20b)$$

$$\hat{s}_{rk}^+ = t s_{rk}^+ \quad r = 1, \dots, s \quad (3.20c)$$

$$\hat{\lambda}_j = t \lambda_j \quad j = 1, \dots, n \quad (3.20d)$$

O correspondente modelo linearizado é dado por:

$$\tau_k^* = \min t + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{\hat{s}_{ik}^-}{x_{ik}} \quad (3.21a)$$

$$s. a. \quad t - \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{\hat{s}_{rk}^+}{y_{rk}} = 1 \quad (3.21b)$$

$$-t x_{ik} + \sum_{j=1; j \neq k}^n x_{ij} \hat{\lambda}_j - \hat{s}_{ik}^- \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.21c)$$

$$-t y_{rk} + \sum_{j=1; j \neq k}^n y_{rj} \hat{\lambda}_j + \hat{s}_{rk}^+ \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.21d)$$

$$\hat{s}_{ik}^- \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.21e)$$

$$\hat{s}_{rk}^+ \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.21f)$$

$$-t + \sum_{j=1; j \neq k}^n \hat{\lambda}_j = 0 \quad (3.21g)$$

$$\hat{\lambda}_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.21h)$$

$$t \geq 0 \quad (3.21i)$$

Se $(\tau_k^*, \hat{\lambda}_j^*, \hat{s}_{ik}^-, \hat{s}_{rk}^{++}, t^*)$ é uma solução ótima do modelo (3.21), então uma solução ótima do modelo SE_SBM, descrito por (3.19), é obtida através das relações:

$$\rho_k^* = \tau_k^*, \lambda_j^* = \frac{\hat{\lambda}_j^*}{t^*}, s_{ik}^- = \frac{\hat{s}_{ik}^-}{t^*}, s_{rk}^{++} = \frac{\hat{s}_{rk}^{++}}{t^*} \quad (3.22)$$

O modelo de super-eficiência SBM apresentado anteriormente é um modelo não orientado, isto é, considera que a projeção na fronteira de eficiência, definida pelas restantes DMUs eficientes, da DMU eficiente excluída é feita através do aumento de *inputs* e da redução de *outputs*. Tone (2002) propôs também versões deste modelo orientadas para *inputs* e para *outputs*, obtidas a partir do modelo (3.18). Neste trabalho apresentam-se tais versões obtidas a partir do modelo (3.19). Assim, a versão orientada para *inputs*, para avaliação da super-eficiência da DMU_k, é dada pelo seguinte modelo:

$$\delta_k^{I*} = \min 1 + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{s_{ik}^-}{x_{ik}} \quad (3.23a)$$

$$s. a. \quad \sum_{j=1; j \neq k}^n x_{ij} \lambda_j - s_{ik}^- \leq x_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.23b)$$

$$\sum_{j=1; j \neq k}^n y_{rj} \lambda_j \geq y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (3.23c)$$

$$s_{ik}^- \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.23d)$$

$$\sum_{j=1; j \neq k}^n \lambda_j = 1 \quad (3.23e)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n ; j \neq k \quad (3.23f)$$

Para a versão orientada para *outputs*, tem-se o seguinte modelo para avaliação da super-eficiência da DMU_k:

$$\delta_k^{O*} = \min \frac{1}{1 - \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{s_{rk}^+}{y_{rk}}} \quad (3.24a)$$

$$s. a. \quad \sum_{j=1; j \neq k}^n x_{ij} \lambda_j \leq x_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.24b)$$

$$\sum_{j=1; j \neq k}^n y_{rj} \lambda_j + s_{rk}^+ \geq y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (3.24c)$$

$$s_{rk}^+ \leq y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (3.24d)$$

$$s_{rk}^+ \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.24f)$$

$$\sum_{j=1; j \neq k}^n \lambda_j = 1 \quad (3.24g)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n ; j \neq k \quad (3.24h)$$

Comparando as versões orientadas para *inputs* e para *outputs* com a versão não orientada do modelo SE_SBM, verifica-se que o valor fornecido por esta última é não superior ao fornecido por cada uma das primeiras, isto é, $\delta_k^{I*} \geq \delta_k^*$ e $\delta_k^{O*} \geq \delta_k^*$ (Tone, 2002).

Os modelos anteriores consideram retornos variáveis de escala. Para obter os correspondentes modelos considerando retornos constantes de escala, basta remover a restrição de convexidade em cada um dos modelos. De referir que neste caso, contrariamente à versão não orientada (3.19), existe o problema da impossibilidade referido no início da seção 3.5 para os modelos radiais sob retornos variáveis de escala, como se refere em Cooper, Seiford e Tone (2007).

3.5.2. Modelos de super-eficiência BP-SBM

Com base no modelo SE_SBM proposto por Tone (2001), Tone, Chang e Wu (2020) apresentaram também o modelo de super-eficiência BP-SBM para discriminar as DMUs consideradas eficientes pelo modelo BP-SBM. Deste modo, aqueles autores apresentam um modelo de super-eficiência, baseado no modelo SBM, que permite tratar todo o tipo de dados (positivos, negativos ou nulos). No que se segue, esse modelo será designado por SE_BP-SBM e, para avaliar a super-eficiência de uma DMU_k eficiente pelo modelo BP-SBM, é dado por:

$$\rho_k^* = \min \frac{1 + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{s_{ik}^-}{\bar{x}_{ik}}}{1 - \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{s_{rk}^+}{\bar{y}_{rk}}} \quad (3.25a)$$

$$s. a. \quad \sum_{j=1, j \neq k}^n \bar{x}_{ij} \lambda_j + s_{ik}^- \leq \bar{x}_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.25b)$$

$$\sum_{j=1, j \neq k}^n \bar{y}_{rj} \lambda_j - s_{rk}^+ \geq \bar{y}_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (3.25c)$$

$$\sum_{j=1, j \neq k}^n \lambda_j = 1 \quad (3.25d)$$

$$s_{ik}^- \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.25e)$$

$$s_{rk}^+ \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.25f)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.25g)$$

Como já se referiu, e à semelhança do que acontece com o modelo SE_SBM, o modelo anterior é apenas aplicado às DMUs consideradas eficientes pelo modelo BP-SBM. Se for aplicado às DMUs consideradas ineficientes, obtém-se um índice de super-eficiência igual a um, o que não permite diferenciar as DMUs ineficientes, as quais são diferenciadas pelo modelo BP-SBM.

A solução ótima deste modelo é obtida através da solução ótima de um modelo linear equivalente, por aplicação da transformação de Charnes e Cooper (1962), como foi feito, por exemplo, no modelo SE_SBM. Note-se que também o modelo SE_BP-SBM não é mais do que o modelo SE_SBM aplicado a dados modificados (positivos) obtidos a partir dos dados iniciais (positivos, negativos ou nulos), através de uma mudança da origem das coordenadas.

O modelo anterior SE_BP-SBM é um modelo não orientado e considera retornos variáveis de escala. À semelhança do modelo BP-SBM, pode também ser orientado, para *inputs* ou para *outputs*, e considerar retornos não variáveis de escala (constantes, não decrescentes e não crescentes).

4. Estudo de um caso prático

4.1. Introdução

No capítulo 3 foram apresentados modelos destinados à avaliação da eficiência e da super-eficiência baseados em folgas que permitem tratar todo o tipo de dados relativos aos *inputs* e aos *outputs*. Este capítulo destina-se a aplicar alguns desses modelos, mais especificamente, os modelos de eficiência e de super-eficiência BP-SBM, para avaliar o desempenho de um conjunto de 21 instituições bancárias que operavam em Portugal nos anos de 2019 a 2022, onde existem instituições com valores negativos num *output*.

Assim, na secção 4.2, são apresentados os dados relativos aos *inputs* e aos *outputs* das 21 instituições bancárias que operavam em Portugal no período de 2019 a 2022, descrevendo-se a forma como esses dados foram recolhidos, assim como a seleção dos modelos a aplicar neste estudo prático. De seguida, na secção 4.3, são apresentados os resultados obtidos e é feita uma análise aos mesmos.

4.2. Seleção de dados e modelos

Para o estudo do presente caso prático foram utilizadas informações financeiras de vinte e uma instituições bancárias que operavam em Portugal nos anos de 2019, 2020, 2021 e 2022. Estas informações foram extraídas dos respetivos boletins estatísticos anuais da Associação Portuguesa de Bancos (APB), mais especificamente dos boletins nº 55, 57, 59 e 61. Nos boletins estatísticos anuais encontra-se a informação financeira individual e consolidada das instituições bancárias, com referência a 31 de dezembro dos respetivos anos contemplados neste estudo prático, através de uma ficha técnica com as respetivas Demonstrações Financeiras (Balanço, Demonstração de Resultados, Demonstração do Rendimento Integral, Demonstração das Alterações nos Capitais Próprios e Demonstração dos Fluxos de Caixa).

A escolha de *inputs* e de *outputs* desempenha um papel fundamental na metodologia DEA, pois os *inputs* representam os recursos consumidos pelas DMUs, enquanto os *outputs* representam os resultados ou produtos gerados por essas DMUs. Desta forma, tendo por base a informação disponível nos referidos boletins da APB, foram selecionados três *inputs* e três *outputs*.

Os *inputs* selecionados foram os seguintes:

- *Input 1* – Número de funcionários;
- *Input 2* – Depósitos (em milhares de euros);

- *Input 3* – Capital Próprio (em milhares de euros).

O número de funcionários representa a quantidade de pessoas ao serviço de uma instituição para realizar diversas funções e operações relacionadas com os serviços financeiros que a mesma oferece. É importante considerar este parâmetro como um *input* pois permite incluir os recursos humanos na avaliação da eficiência das instituições. Os depósitos referem-se aos fundos monetários que os clientes depositam nas contas bancárias e são uma das principais fontes de financiamento para uma instituição bancária pois fornecem fundos necessários para realizar empréstimos a outros clientes, investir em ativos financeiros e cumprir com as suas obrigações operacionais. Por último, o capital próprio, expressa o valor contabilístico da instituição, e é dado pela diferença entre o ativo e o passivo.

Para os *outputs* foram selecionados os seguintes:

- *Output 1* – Resultado Líquido (em milhares de euros);
- *Output 2* – Margem Financeira (em milhares de euros);
- *Output 3* – Empréstimos (em milhares de euros).

O resultado líquido de uma instituição bancária consiste na diferença entre a receita total e os custos totais relativamente a um determinado período, que, neste caso, é de um ano. É importante considerar este *output*, pois é uma medida crítica da saúde financeira da instituição uma vez que reflete a sua capacidade de gerar lucro. A margem financeira é uma medida fundamental da rentabilidade das atividades de crédito e investimento de uma instituição bancária pois reflete a diferença entre as receitas de juros geradas pelos ativos e os custos de juros associados aos passivos. Por último, os empréstimos fazem parte das operações bancárias mais importantes e representam o crédito concedido aos clientes.

A informação relativa aos valores dos *inputs* e dos *outputs* para cada instituição bancária nos anos de 2019, 2020, 2021 e 2022 é apresentada nas tabelas 4.1, 4.2, 4.3 e 4.4, respetivamente. Nessas tabelas, da esquerda para a direita, nas duas primeiras colunas são identificadas as instituições bancárias (DMUs) em avaliação, nas três colunas seguintes constam os valores dos *inputs* e nas três últimas colunas indicam-se os valores dos *outputs*.

Atendendo a que alguns dos valores incluídos nas tabelas anteriores são negativos, importa usar modelos que permitam tratar esses dois tipos de valores. Nesse sentido, e na sequência dos modelos apresentados no capítulo 3, selecionaram-se para este estudo prático o modelo BP-SBM para, numa primeira fase, obter os índices de eficiência e o modelo de super-eficiência

SE_BP-SBM para, numa segunda fase, discriminar as instituições bancárias classificadas como eficientes pelo modelo BP-SBM e, conseqüentemente, permitir um *ranking* completo sobre todas as instituições. Foram considerados os casos de retornos variáveis de escala e de retornos constantes de escala.

Tabela 4.1 – Dados relativos aos *inputs* e *outputs* do ano 2019

Instituições Bancárias	<i>Input</i> 1	<i>Input</i> 2	<i>Input</i> 3	<i>Output</i> 1	<i>Output</i> 2	<i>Output</i> 3
01 Banco BIC Português	1.452	6.827.708	570.477	61.071	131.877	4.959.446
02 Millennium BCP	6.953	46.394.065	5.892.440	139.296	791.998	32.900.659
03 Banco Activo Bank.	183	1.627.124	105.429	8.191	16.080	1.228.165
04 Banco CTT	218	1.283.851	211.355	-8.011	13.348	463.279
05 Banco de Investimento Global	241	1.751.621	387.824	40.318	20.431	23.065
06 Banco Finantia	160	483.989	316.994	17.091	15.627	282.542
07 Banco Invest	270	689.983	122.880	11.691	25.285	393.325
08 Banco L. J. Carregosa	105	289.472	38.863	1.990	4.751	112.031
09 Caixa Económica Montepio Geral	3.551	14.520.253	1.513.294	12.971	201.910	11.024.569
10 Montepio Investimento	15	25.018	183.879	-602	2.127	36.232
11 Caixa Geral de Depósitos	6.706	60.913.281	7.623.830	762.013	761.101	42.186.522
12 Novo Banco	4.214	38.523.126	3.646.002	-1.087.584	546.150	23.649.400
13 Banco Eletrónico de Serviço Total	133	571.507	80.227	2.669	5.639	569.340
14 Novo Banco dos Açores	78	508.862	44.106	4.005	7.517	479.394
15 Banco BPI.	4.982	26.008.521	3.283.375	342.113	439.812	23.409.015
16 Banco Credibom	402	1.902.106	194.047	38.582	89.405	2.005.369
17 Banco Santander Totta	6.180	42.495.705	3.497.526	499.715	842.883	35.920.096
18 Haitong Bank	186	1.002.905	602.510	10.342	12.452	242.654
19 Abanca - Sucursal em Portugal	386	3.263.977	171.824	60.394	21.718	3.126.937
20 Banco Bilbao Vizcaya Argentina	374	3.529.612	308.864	27.050	42.984	2.912.123
21 Bankinter	769	6.749.492	31.243	35.231	61.945	6.020.433

Os dados apresentados na Tabela 4.1, relativos ao ano de 2019, incluem três valores negativos no *output* 1 (Resultado Líquido). O valor mínimo desse *output* é -1.087.584. Aplicando a

igualdade (3.15c) com $\gamma_1 = 10^{-2}$ obtém-se para valor mínimo $-1098459,84$ ($y_1^{\min} = -1098459,84$). Para os restantes *outputs* e para os *inputs* o valor mínimo é zero, uma vez que os valores são todos positivos. Aplicando a igualdade em (3.16b) ao *output* 1, obtém-se a tabela 4.1 modificada para aplicação dos modelos BP-SBM e SE_BP-SBM, que está apresentada no apêndice A.

Tabela 4.2 – Dados relativos aos *inputs* e *outputs* do ano 2020

Instituições Bancárias	<i>Input</i> 1	<i>Input</i> 2	<i>Input</i> 3	<i>Output</i> 1	<i>Output</i> 2	<i>Output</i> 3
01 Banco BIC Português	1.461	6.400.552	557.507	-5.045	117.386	4.847.734
02 Millennium BCP	6.756	52.599.163	5.981.786	50.633	794.419	35.379.967
03 Banco Activo Bank.	187	2.062.694	153.541	11.961	22.878	1.272.279
04 Banco CTT	231	1.689.144	211.724	285	16.739	578.671
05 Banco de Investimento Global	264	1.652.777	415.986	24.173	14.651	34.188
06 Banco Finantia	155	456.910	344.400	26.565	7.983	293.484
07 Banco Invest	275	759.758	136.821	12.974	29.256	402.345
08 Banco L. J. Carregosa	110	289.036	38.299	-2.507	4.041	84.772
09 Caixa Económica Montepio Geral	3.313	14.928.798	1.373.398	-116.621	194.604	11.188.472
10 Montepio Investimento	21	271.591	178.459	-3.181	4.060	120.067
11 Caixa Geral de Depósitos	6.244	68.509.727	7.806.696	406.539	704.259	42.104.453
12 Novo Banco	4.239	36.556.975	2.753.089	-1.374.246	567.999	21.930.730
13 Banco Eletrónico de Serviço Total	132	729.411	82.031	1.790	4.305	686.465
14 Novo Banco dos Açores	73	536.633	43.400	2.790	7.651	501.457
15 Banco BPI.	4.776	31.512.869	3.110.629	87.822	449.897	24.224.617
16 Banco Credibom	416	2.107.138	245.709	30.866	98.894	2.271.449
17 Banco Santander Totta	5.969	45.013.542	3.990.609	275.210	768.076	38.614.687
18 Haitong Bank	184	1.121.992	588.942	-12.034	2.744	319.822
19 Abanca - Sucursal em Portugal	376	2.973.676	187.183	15.050	28.536	2.836.276
20 Banco Bilbao Vizcaya Argentina	367	3.395.380	332.858	10.580	41.012	2.704.270
21 Bankinter	772	7.093.633	18.386	19.306	66.343	6.460.882
21 Bankinter	1.461	6.400.552	557.507	-5.045	117.386	4.847.734

Utilizando o mesmo procedimento para o *output* 1 das tabelas 4.2 e 4.3, que também apresenta valores negativos, obtêm-se os valores mínimos $-1378988,46$ ($y_1^{\min} = -1378988,46$) e $-7982,03$ ($y_1^{\min} = -7982,03$), respetivamente. As correspondentes tabelas, 4.2 e 4.3 modificadas, estão apresentadas nos apêndices B e C.

Tabela 4.3 – Dados relativos aos *inputs* e *outputs* do ano 2021

Instituições Bancárias	<i>Input</i> 1	<i>Input</i> 2	<i>Input</i> 3	<i>Output</i> 1	<i>Output</i> 2	<i>Output</i> 3
01 Banco BIC Português	1.449	7.170.479	566.408	7.484	104.172	5.198.890
02 Millennium BCP	6.027	56.622.469	5.870.290	90.060	807.793	36.967.321
03 Banco Activo Bank.	192	2.577.170	194.491	13.536	23.456	1.342.743
04 Banco CTT	239	2.122.860	237.157	15.424	22.210	701.571
05 Banco de Investimento Global	271	2.042.824	397.352	18.007	16.372	228.037
06 Banco Finantia	162	888.609	423.635	10.394	8.062	357.208
07 Banco Invest	283	921.134	156.196	20.059	31.600	414.075
08 Banco L. J. Carregosa	111	349.413	40.421	1.967	4.284	77.562
09 Caixa Económica Montepio Geral	3.107	16.272.159	1.385.130	-7.903	193.785	11.069.029
10 Montepio Investimento	21	251.609	180.801	2.635	5.915	167.855
11 Caixa Geral de Depósitos	6.117	79.307.685	8.144.527	441.534	660.479	44.016.321
12 Novo Banco	3.890	38.495.687	2.799.402	225.908	581.084	22.083.471
13 Banco Eletrónico de Serviço Total	90	761.303	82.565	3.269	3.578	732.143
14 Novo Banco dos Açores	73	567.632	48.042	4.780	6.811	532.024
15 Banco BPI.	4.638	34.698.405	3.493.468	293.368	460.619	25.292.693
16 Banco Credibom	463	2.346.034	310.266	42.705	118.497	2.472.711
17 Banco Santander Totta	4.771	47.140.713	4.160.679	303.343	715.824	39.528.233
18 Haitong Bank	175	1.522.539	604.627	9.150	7.950	567.394
19 Abanca - Sucursal em Portugal	381	2.917.342	194.256	6.904	27.583	2.781.437
20 Banco Bilbao Vizcaya Argentina	360	3.025.928	356.587	24.889	38.325	2.472.219
21 Bankinter	772	8.085.281	20.269	17.267	66.306	7.281.117

A tabela 4.4 não necessita de qualquer modificação para aplicação dos modelos BP-SBM e SE_BP-SBM uma vez que os valores dos *inputs* e dos *outputs* são todos positivos.

Tabela 4.4 – Dados relativos aos *inputs* e *outputs* do ano 2021

Instituições Bancárias	<i>Input</i> 1	<i>Input</i> 2	<i>Input</i> 3	<i>Output</i> 1	<i>Output</i> 2	<i>Output</i> 3
01 Banco BIC Português	1.413	7.252.279	609.499	40.260	119.955	5.303.299
02 Millennium BCP	5.984	52.347.263	5.266.068	478.408	916.331	37.718.993
03 Banco Activo Bank.	200	3.041.853	213.017	19.142	32.689	190.582
04 Banco CTT	281	2.298.310	252.260	14.656	36.456	843.561
05 Banco de Investimento Global	284	1.895.980	331.202	8.704	22.911	58.986
06 Banco Finantia	166	853.901	397.498	6.951	23.985	332.293
07 Banco Invest	280	823.275	148.195	17.159	36.900	421.122
08 Banco L. J. Carregosa	112	522.945	36.668	1.594	5.417	67.627
09 Caixa Económica Montepio Geral	3.029	16.460.639	1.534.238	35.670	216.243	11.191.204
10 Montepio Investimento	25	332.675	183.182	2.592	7.200	196.247
11 Caixa Geral de Depósitos	5.837	76.746.436	8.138.517	672.289	970.088	45.453.280
12 Novo Banco	3.798	38.931.732	3.066.948	453.830	624.996	23.100.729
13 Banco Eletrónico de Serviço Total	87	778.466	78.911	1.666	6.892	746.367
14 Novo Banco dos Açores	74	566.559	51.710	4.637	7.702	554.424
15 Banco BPI.	4.524	31.747.427	3.694.269	334.084	559.416	26.285.968
16 Banco Credibom	497	2.650.743	351.344	49.383	73.612	2.918.754
17 Banco Santander Totta	4.635	46.278.054	3.532.973	603.685	764.770	38.285.774
18 Haitong Bank	170	1.337.783	622.471	19.215	20.784	692.283
19 Abanca - Sucursal em Portugal	388	2.990.246	194.619	541	30.459	2.885.418
20 Banco Bilbao Vizcaya Argentina	349	3.152.597	392.557	42.150	42.825	2.442.225
21 Bankinter	780	10.010.001	39.557	33.705	93.061	9.473.205

4.3. Análise dos resultados

Nesta seção apresentam-se os resultados relativos aos índices de eficiência e de super-eficiência obtidos pelos modelos BP-SBM e SE_BP-SBM, respetivamente, assim como uma análise aos mesmos e aos *rankings* estabelecidos por aqueles modelos. Para a obtenção dos índices de eficiência fornecidos pelos modelos BP-SBM, foi utilizada a versão gratuita do *software* MaxDEA, que pode ser obtida em <http://maxdea.com/>. Para a obtenção dos índices fornecidos

pelo modelo SE_BP-SBM, utilizou-se o módulo de programação linear, bem como o módulo OPL (*Optimization Programming Language*), do pacote CPLEX *Optimization Studio Academic Research 20.1*.

Na Tabela 4.5, da esquerda para a direita, nas duas primeiras colunas identificam-se as instituições bancárias (DMUs) e nas quatro colunas seguintes apresentam-se os índices de eficiência obtidos pelo modelo BP-SBM, considerando retornos variáveis de escala, para os anos de 2019, 2020, 2021 e 2022, respetivamente. Nas últimas duas linhas dessa tabela apresentam-se, para cada um dos anos, a eficiência média e o número de instituições bancárias consideradas eficientes.

Da observação da Tabela 4.5, verifica-se que a eficiência média mais elevada foi obtida no ano de 2019 com valor de 0,8082, seguindo-se os anos de 2020 com 0,7916, de 2022 com 0,7896, e de 2021 com 0,7263. Note-se que, à exceção da média mais baixa ocorrida em 2021, as diferenças entre as médias obtidas nos outros três anos são muito pequenas. Quanto ao número de instituições eficientes, esse também foi menor no ano de 2021, com doze instituições eficientes, enquanto nos restantes anos do período de avaliação esse número foi de treze. Dessas, existem sete que foram eficientes em todos os anos, que são as instituições 08 (Banco Carregosa), 10 (Montepio Investimento), 11 (Caixa Geral de Depósitos), 14 (Novo Banco dos Açores), 16 (Banco Credibom), 17 (Banco Santander Totta) e 21 (Bankinter). Existem quatro instituições que foram eficientes em três anos, que são as instituições 02 (Millenium BCP), 07 (Banco Invest), 13 (Banco Eletrónico de Serviço Total) e 15 (Banco BPI). Eficientes em dois anos, existem três instituições, a 03 (Banco Activo Bank), a 06 (Banco Finantia) e a 19 (Abanca). Finalmente, eficiente em apenas um ano tem-se a instituição 20 (Banco Bilbao Vizcaya Argentina). Existem três instituições que não foram eficientes em qualquer dos anos, a 01 (Banco BIC Português), a 04 (Banco CTT) e 09 (Caixa Económica Montepio Geral). Note-se que a instituição 04 (Banco CTT) foi a única em que o índice de eficiência melhorou ao longo dos quatro anos.

Relativamente ao ano em que as instituições bancárias obtiveram o valor mínimo de eficiência verifica-se que no ano de 2019 existem quatro instituições que atingem o mínimo que são a 02 (Millennium BCP), a 04 (Banco CTT), a 07 Banco Invest) e a 12 (Novo Banco). Esse mesmo número ocorre em 2020 com as instituições 05 (Banco de Investimento Global), 13 (Banco Eletrónico de Serviço Total), 15 (Banco BPI) e 18 (Haitong Bank). Quanto ao ano de 2021, em que a média das eficiências atingiu o valor mais baixo, existem cinco instituições que atingiram o valor mínimo de eficiência, que são a 01 (Banco BIC Português), a 03 (Banco Activo Bank),

a 06 (Banco Finantia), a 09 (Caixa Económica Montepio Geral) e a 20 (Banco Bilbao Vizcaya Argentina). Em 2022 apenas uma instituição atingiu o valor mínimo que foi a 19 (Abanca).

Tabela 4.5 – Resultados obtidos pelo modelo BP-SBM para retornos variáveis de escala

Instituições Bancárias	2019	2020	2021	2022
01 Banco BIC Português	0,6753	0,6315	0,3360	0,5409
02 Millennium BCP	0,6828	1	1	1
03 Banco Activo Bank.	0,7122	1	0,6522	1
04 Banco CTT	0,3555	0,3699	0,4089	0,4905
05 Banco de Investimento Global	1	0,0560	0,1849	0,0564
06 Banco Finantia	1	1	0,2865	0,4618
07 Banco Invest	0,6818	1	1	1
08 Banco L. J. Carregosa	1	1	1	1
09 Caixa Económica Montepio Geral	0,5780	0,5979	0,0015	0,2783
10 Montepio Investimento	1	1	1	1
11 Caixa Geral de Depósitos	1	1	1	1
12 Novo Banco	0,0172	1	1	0,846
13 Banco Eletrónico de Serviço Total	1	0,4206	1	1
14 Novo Banco dos Açores	1	1	1	1
15 Banco BPI.	1	0,7729	1	1
16 Banco Credibom	1	1	1	1
17 Banco Santander Totta	1	1	1	1
18 Haitong Bank	0,2701	0,1139	0,2287	1
19 Abanca - Sucursal em Portugal	1	1	0,5173	0,0490
20 Banco Bilbao Vizcaya Argentina	1	0,6613	0,6368	0,8594
21 Bankinter	1	1	1	1
Média	0,8082	0,7916	0,7263	0,7896
Número de eficientes	13	13	12	13

Na Tabela 4.6, que segue a mesma estrutura da Tabela 4.5, apresentam-se os resultados obtidos pelo mesmo modelo considerando retornos constantes de escala.

Tabela 4.6 – Resultados obtidos pelo modelo BP-SBM para retornos constantes de escala

Instituições Bancárias	2019	2020	2021	2022
01 Banco BIC Português	0,2112	0,1981	0,2199	0,5407
02 Millennium BCP	0,0356	0,0305	0,2054	0,7511
03 Banco Activo Bank.	0,6796	0,5736	0,6172	0,2115
04 Banco CTT	0,3553	0,3607	0,3946	0,4696
05 Banco de Investimento Global	0,0287	0,0392	0,1816	0,0528
06 Banco Finantia	0,5255	0,5066	0,2590	0,3717
07 Banco Invest	0,6498	1	1	1
08 Banco L. J. Carregosa	1	1	1	0,1590
09 Caixa Económica Montepio Geral	0,0772	0,0745	0,0006	0,2782
10 Montepio Investimento	1	1	1	1
11 Caixa Geral de Depósitos	0,0546	0,0328	0,4895	0,7383
12 Novo Banco	0,0005	0,0006	0,5487	0,8448
13 Banco Eletrónico de Serviço Total	1	0,4199	1	0,3484
14 Novo Banco dos Açores	1	1	1	0,7262
15 Banco BPI.	0,0630	0,0472	0,4946	0,7388
16 Banco Credibom	1	1	1	1
17 Banco Santander Totta	0,0674	0,0466	1	1
18 Haitong Bank	0,2701	0,1136	0,2115	0,5382
19 Abanca - Sucursal em Portugal	1	1	0,5140	0,0464
20 Banco Bilbao Vizcaya Argentina	1	0,4920	0,6192	0,7724
21 Bankinter	1	1	1	1
Média	0,5247	0,4731	0,6074	0,5994
Número de eficientes	8	7	8	5

Da observação da Tabela 4.6, verifica-se que a eficiência média mais elevada foi obtida no ano de 2021 com o valor de 0,6074, seguindo-se o ano de 2022 com 0,5994, o de 2019 com 0,5247, e o de 2020 com 0,4731. Verifica-se assim que à exceção da diferença entre 2021 e 2022, as outras diferenças são maiores do que caso anterior de retornos variáveis de escala. Note-se que o ano de 2021 foi o ano em que a eficiência média atingiu o valor mais baixo no caso de retornos

variáveis de escala. Relativamente ao número de instituições eficientes, esse número foi de oito nos anos de 2019 e de 2021, de sete no ano de 2020 e de cinco no ano de 2022. Verifica-se assim que, como seria de esperar, tanto os valores da eficiência média como o número de instituições eficientes é menor do que no caso de retornos variáveis de escala. Das instituições eficientes referidas anteriormente, apenas três foram eficientes ao longo dos quatro anos, as instituições 10 (Montepio Investimento), 16 (Banco Credibom) e 21 (Bankinter). Existem igualmente três instituições que foram eficientes em três anos, que são as instituições 07 (Banco Invest), 08 (Banco Carregosa) e 14 (Novo Banco dos Açores). Existem também três instituições que foram eficientes em dois anos, a 13 (Banco Eletrónico de Serviço Total), a 17 (Banco Santander Totta) e a 19 (Abanca). Finalmente existe apenas uma eficiente num ano que é a instituição 20 (Banco Bilbao Vizcaya Argentina), como acontece no caso de retornos variáveis de escala. As restantes onze instituições não foram eficientes em qualquer dos anos. Note-se que, também neste caso, a instituição 04 (Banco CTT) foi a única em que o índice de eficiência melhorou ao longo dos quatro anos.

Relativamente ao valor mínimo de eficiência obtido pelas instituições ao longo do período em análise, verifica-se que no ano de 2019 existem quatro instituições que atingem esse valor mínimo que são a 04 (Banco CTT), a 05 (Banco de Investimento Global), a 07 (Banco Invest) e a 12 (Novo Banco). Note-se que, à exceção da instituição 05 (Banco de Investimento Global), as restantes quatro são mesmas que foram identificadas para retornos variáveis de escala. Em 2020, ano em que a eficiência média atingiu o valor mais baixo, esse número foi de sete e inclui as instituições 01 (Banco BIC Português), 02 (Millennium BCP), 11 (Caixa Geral de Depósitos), 15 (Banco BPI), 17 (Banco Santander Totta), 18 (Haitong Bank) e 20 (Banco Bilbao Vizcaya Argentina). Quanto ao ano de 2021, em que a média das eficiências atingiu o valor mais elevado, existem apenas duas instituições que atingiram o seu valor mínimo de eficiência, que foram a 06 (Banco Finantia) e a 09 (Caixa Económica Montepio Geral). Por fim, em 2022 existem cinco instituições que atingiram o seu valor mínimo de eficiência que foram a 03 (Activo Bank), a 08 (Banco Carregosa), a 13 (Banco Eletrónico de Serviço Total), a 14 (Novo Banco dos Açores, e a 19 (Abanca).

Nas Tabelas 4.7 e 4.8 apresentam-se os valores de super-eficiência obtidos pelo modelo SE_BP-SBM considerando retornos variáveis de escala e retornos constantes de escala, respetivamente.

Tabela 4.7 – Resultados obtidos pelo modelo SE-BP-SBM para retornos variáveis de escala

Instituições Bancárias	2019	2020	2021	2022
01 Banco BIC Português	-	-	-	-
02 Millennium BCP	-	1,0112	1,0394	1,0419
03 Banco Activo Bank.	-	1,0005	-	1,0116
04 Banco CTT	-	-	-	-
05 Banco de Investimento Global	1,0020	-	-	-
06 Banco Finantia	1,0022	1,0058	-	-
07 Banco Invest	-	1,0047	1,0735	1,2459
08 Banco L. J. Carregosa	1,2976	1,3299	1,2710	1,1645
09 Caixa Económica Montepio Geral	-	-	-	-
10 Montepio Investimento	6,5235	2,1507	2,2441	1,8877
11 Caixa Geral de Depósitos	1,1068	1,0549	1,1580	1,1864
12 Novo Banco	-	1,0118	1,0516	-
13 Banco Eletrónico de Serviço Total	1,0045	0,4206	1,0138	1,0019
14 Novo Banco dos Açores	1,3559	1,4497	1,4117	1,5047
15 Banco BPI.	1,0218	-	1,0742	1,0099
16 Banco Credibom	1,2994	1,3183	1,5048	1,1281
17 Banco Santander Totta	1,3490	1,2693	1,2184	1,2526
18 Haitong Bank	-	-	-	1,0076
19 Abanca - Sucursal em Portugal	1,0341	1,0042	-	-
20 Banco Bilbao Vizcaya Argentina	1,0257	-	-	-
21 Bankinter	2,9075	3,6916	4,7465	4,3819

Os valores de super-eficiência apresentados na Tabela 4.7 são todos diferentes em cada ano, permitindo discriminar todas as instituições bancárias consideradas eficientes em cada ano. Estes valores conjuntamente com os apresentados na Tabela 4.5 para as instituições ineficientes, que também são todos diferentes permitem obter um *ranking* completo, em cada ano, para todas as instituições, considerando retornos variáveis de escala. Esses *rankings* constam da tabela 4.9, onde o valor 1 indica a instituição bancária com melhor desempenho enquanto o valor 21 indica a instituição com pior desempenho.

Tabela 4.8 – Resultados obtidos pelo modelo SE_BP-SBM para retornos constantes de escala

Instituições Bancárias	2019	2020	2021	2022
01 Banco BIC Português	-	-	-	-
02 Millennium BCP	-	-	-	-
03 Banco Activo Bank.	-	-	-	-
04 Banco CTT	-	-	-	-
05 Banco de Investimento Global	-	-	-	-
06 Banco Finantia	-	-	-	-
07 Banco Invest	-	1,0036	1,0550	1,1580
08 Banco L. J. Carregosa	1,1425	1,1594	1,0374	0,1590
09 Caixa Económica Montepio Geral				
10 Montepio Investimento	1,8812	1,4078	1,4301	1,1644
11 Caixa Geral de Depósitos	-	-	-	-
12 Novo Banco	-	-	-	-
13 Banco Eletrónico de Serviço Total	1,0043	-	1,0120	-
14 Novo Banco dos Açores	1,2626	1,2830	1,1611	-
15 Banco BPI.	-	-	-	-
16 Banco Credibom	1,2935	1,3134	1,3495	1,1265
17 Banco Santander Totta	-	-	1,0042	1,0987
18 Haitong Bank	-	-	-	-
19 Abanca - Sucursal em Portugal	1,0213	1,0042	-	-
20 Banco Bilbao Vizcaya Argentina	1,0252	-	-	-
21 Bankinter	2,8605	3,6717	4,6738	4,1476

Similarmente, os valores de super-eficiência apresentados na Tabela 4.8 são todos diferentes em cada ano. Estes resultados conjuntamente com os apresentados na Tabela 4.6 para as instituições ineficientes, que também são todos diferentes em cada ano, permitem estabelecer um *ranking* completo sobre todas as instituições para o caso de retornos constantes de escala. Tal *ranking* é apresentado na Tabela 4.10.

Tabela 4.9 – *Rankings* obtidos para retornos variáveis de escala

Instituições Bancárias	2019	2020	2021	2022
01 Banco BIC Português	17	16	17	16
02 Millennium BCP	15	9	11	9
03 Banco Activo Bank.	14	12	13	10
04 Banco CTT	19	19	16	17
05 Banco de Investimento Global	13	21	20	20
06 Banco Finantia	12	10	18	18
07 Banco Invest	16	11	9	5
08 Banco L. J. Carregosa	6	4	5	7
09 Caixa Económica Montepio Geral	18	17	21	19
10 Montepio Investimento	1	2	2	2
11 Caixa Geral de Depósitos	7	7	7	6
12 Novo Banco	21	8	10	15
13 Banco Eletrónico de Serviço Total	11	18	12	11
14 Novo Banco dos Açores	3	3	4	3
15 Banco BPI	10	14	8	13
16 Banco Credibom	5	5	3	8
17 Banco Santander Totta	4	6	6	4
18 Haitong Bank	20	20	19	12
19 Abanca - Sucursal em Portugal	8	12	15	21
20 Banco Bilbao Vizcaya Argentina	9	15	14	14
21 Bankinter	2	1	1	1

Da observação da Tabela 4.9, facilmente se elabora o *top 3* das instituições com melhor *ranking* assim como o *top 3* das instituições com pior *ranking* em cada ano. Quanto ao *top 3* das instituições com melhor desempenho global, isto é, durante o período em avaliação, não é difícil verificar que o mesmo é constituído pela instituição 21 (Bankinter) que ocupa a posição 2 no ano de 2019 e a posição 1 nos restantes três anos, pela 10 (Montepio Investimento) que ocupa a posição 1 em 2019 e a posição 2 nos restantes três anos e pela 14 (Novo Banco dos Açores) que ocupa a posição 3 nos anos de 2019, 2020 e 2022 e a posição 4 no ano de 2021. No *top 3*

das instituições com pior *ranking* não é fácil identificar as três instituições que globalmente ocupam as três últimas posições do *ranking* devido à variação de posição que ocupam em cada ano do período em avaliação. Por exemplo, a instituição 05 (Banco de Investimento Global) ocupa a posição 21 em 2020, 20 em 2021 e 2022 e 13 em 2019. No entanto, considerando o *ranking* obtido a partir da média dos índices de eficiência e de super-eficiência de cada instituição, verifica-se que as três instituições com pior desempenho são a 05 (Banco de Investimento Global), a 09 (Caixa Económica Montepio Geral) e a 18 (Haitong Bank), conforme resultados apresentados no apêndice D.

A diferença de *ranking* entre as instituições do *top 3* ao longo do período de avaliação é de uma posição e existem mais duas instituições com essa diferença, que são a 11 (Caixa Geral de Depósitos e a 01 (Banco BIC Português). Nas restantes essa diferença é maior, variando entre duas e treze posições, pelo que existem instituições com uma considerável variação de *ranking* ao longo do período de avaliação. Note-se que não existe qualquer instituição que tenha obtido o mesmo *ranking* ao longo dos quatro anos. As variações relativas aos *rankings* apresentados na Tabela 4.9 podem ser mais facilmente observadas através do gráfico apresentado na figura 4.1.

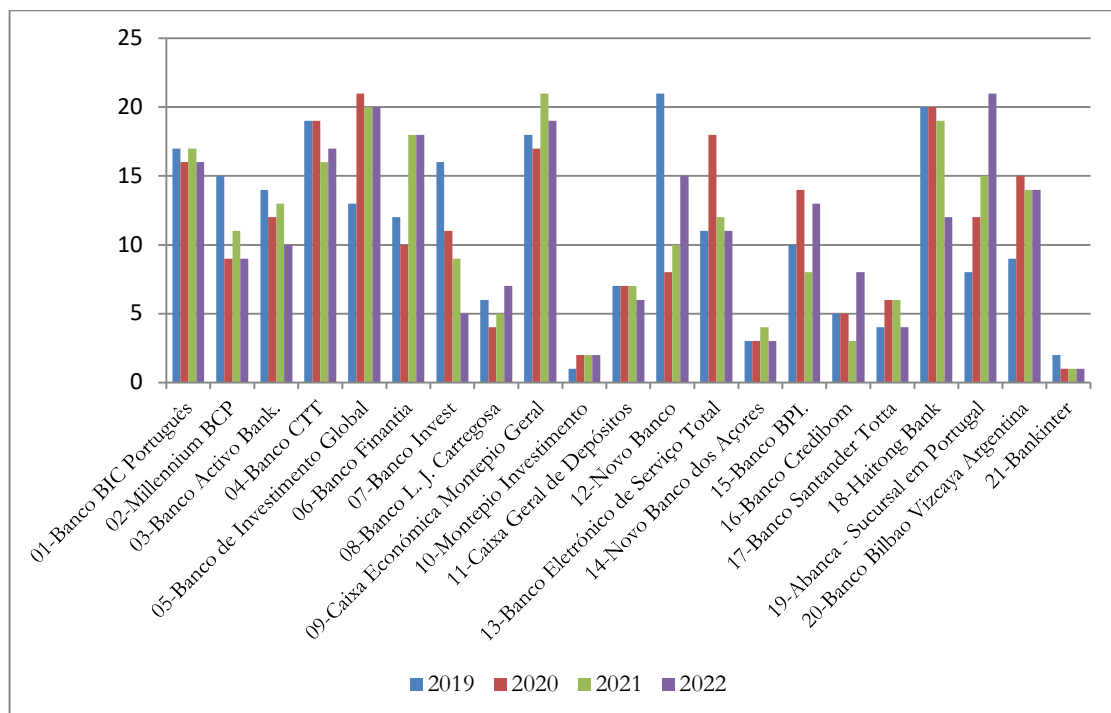


Figura 4.1 – Gráfico dos *rankings* obtidos para retornos variáveis de escala.

Da observação desse gráfico, verifica-se que existem duas instituições que apresentam maior variação de *ranking* (13 posições) ao longo do período em avaliação, que são as instituições 12

(Novo Banco) e 19 (Abanca), com esta última a piorar consecutivamente a sua posição ao longo do período de avaliação. Uma outra instituição com grande variação (11 posições) mas com melhoria consecutiva da sua posição no *ranking* ao longo do período em avaliação é a instituição 07 (Banco Invest).

Verifica-se ainda que existem três instituições que mantêm a posição ao longo de três anos consecutivos, que são a 10 (Montepio Investimento), a 11 (Caixa Geral de Depósitos) e a 21 (Bankinter). Com a mesma posição em dois anos consecutivos, existem oito instituições, a 04 (Banco CTT), a 05 (Banco de Investimento Global), a 06 (Banco Finantia), a 14 (Novo Banco dos Açores), a 16 (Banco Credibom), a 17 (Banco Santander Totta), a 18 (Haitong Bank) e a 20 (Banco Bilbao Vizcaya Argentina). Com posições diferentes nos quatro anos em avaliação, existem sete instituições, que são a 03 (Banco Activo Bank), a 07 (Banco Invest), a 08 (Banco Carregosa), a 09 (Caixa Económica Montepio Geral), a 12 (Novo Banco), a 15 (Banco BPI) e a 19 (Abanca).

Como já foi referido, na Tabela 4.10 apresentam-se os *rankings* para o caso de retornos constantes de escala. Da observação dessa tabela, verifica-se que ao longo do período de avaliação existem duas instituições com a mesma posição no *ranking* que são a 21 (Bankinter) que ocupa a posição 1 e a 10 (Montepio Investimento) que ocupa a posição 2. A instituição 16 (Banco Credibom) ocupa a posição 3 nos três primeiros anos e a posição 4 no último ano. Então estas três instituições constituem o *top* 3 das instituições com melhor desempenho global ao longo do período em avaliação. Note-se que as duas primeiras coincidem com as duas primeiras que foram identificadas para o caso de retornos variáveis de escala. Relativamente ao *top* 3 das instituições com pior desempenho ao longo do período de avaliação, também, neste caso, não é fácil encontrar essas três instituições devido à variação de posição que ocupam ao longo desse período. Por exemplo, a instituição 12 (Novo Banco) ocupa a posição 21 em 2019 e 2020, mas ocupa a posição 11 em 2021 e a 6 em 2022. No entanto, considerando o *ranking* obtido a partir da média dos índices de eficiência e de super-eficiência de cada instituição, verifica-se que as três instituições com pior desempenho são a 05 (Banco de Investimento Global), a 09 (Caixa Económica Montepio Geral) e a 02 (Millennium BCP), conforme resultados apresentados no apêndice D. Também neste caso, as duas instituições com pior desempenho coincidem com as duas piores identificadas para o caso de retornos variáveis de escala.

Tabela 4.10 – *Rankings* obtidos para retornos constantes de escala

Instituições Bancárias	2019	2020	2021	2022
01 Banco BIC Português	14	13	17	12
02 Millennium BCP	19	20	19	8
03 Banco Activo Bank.	9	8	10	18
04 Banco CTT	12	12	15	14
05 Banco de Investimento Global	20	18	20	20
06 Banco Finantia	11	9	16	15
07 Banco Invest	10	7	5	3
08 Banco L. J. Carregosa	5	5	6	19
09 Caixa Económica Montepio Geral	15	15	21	17
10 Montepio Investimento	2	2	2	2
11 Caixa Geral de Depósitos	18	19	14	10
12 Novo Banco	21	21	11	6
13 Banco Eletrónico de Serviço Total	8	11	7	16
14 Novo Banco dos Açores	4	4	4	11
15 Banco BPI.	17	16	13	9
16 Banco Credibom	3	3	3	4
17 Banco Santander Totta	16	17	8	5
18 Haitong Bank	13	14	18	13
19 Abanca - Sucursal em Portugal	7	6	12	21
20 Banco Bilbao Vizcaya Argentina	6	10	9	7
21 Bankinter	1	1	1	1

Como se viu anteriormente, a diferença de *ranking* entre as instituições do *top 3* ao longo do período de avaliação é de zero para as duas primeiras e de um para a terceira. Para as restantes, essa diferença é maior, variando entre duas e quinze posições, levando à existência de instituições com uma significativa variação de *ranking* ao longo do período de avaliação. Tal como no caso anterior, as variações relativas aos *rankings* apresentados na Tabela 4.10 podem ser mais facilmente observadas através do gráfico apresentado na figura 4.2.

Da observação desse gráfico, verifica-se que existem duas instituições que apresentam maior variação de *ranking* (15 posições) ao longo do período de avaliação, que são a instituições 12 (Novo Banco) e a 19 (Abanca), exatamente as mesmas que no caso anterior de retornos variáveis de escala mas com uma variação maior. Neste caso, não existe qualquer instituição que piore consecutivamente a sua posição ao longo de todo o período de avaliação. No entanto, existem duas instituições, a 07 (Banco Invest) e a 15 (Banco BPI), com uma variação de sete e de oito posições, respetivamente, que melhoram consecutivamente a posição no *ranking* ao longo de todo o período de avaliação.

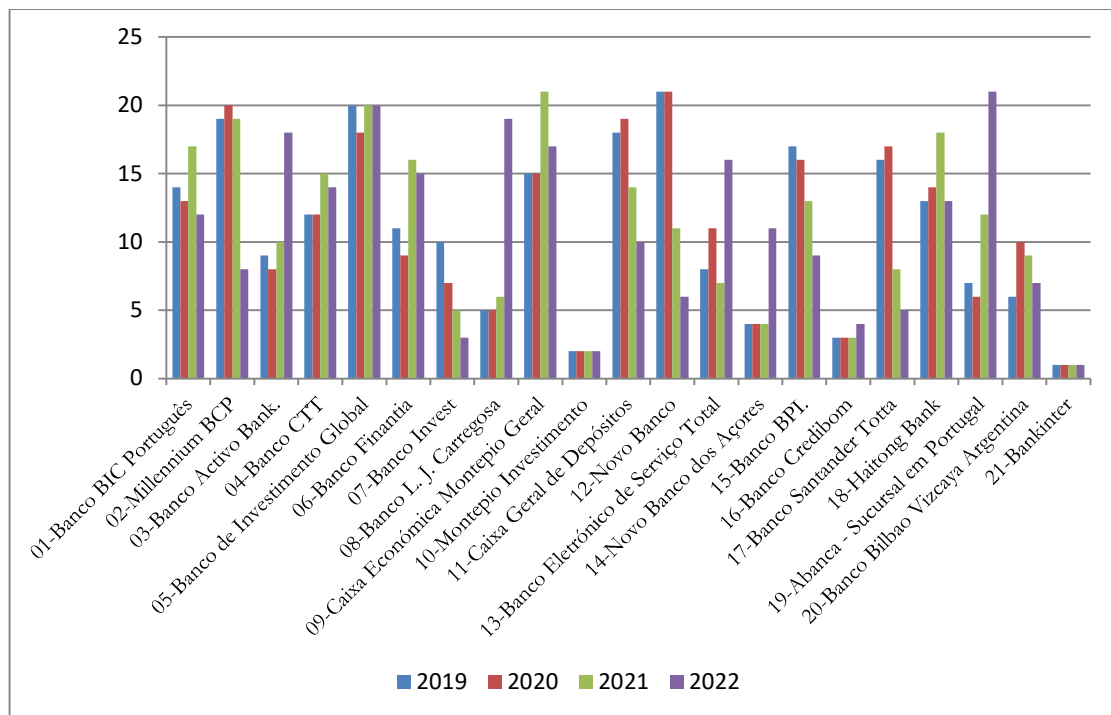


Figura 4.2 – Gráfico dos *rankings* obtidos para retornos constantes de escala.

Ainda, da observação do gráfico apresentado na figura 4.2, verifica-se que existem duas instituições que mantêm a posição ao longo de três anos consecutivos, que são a 14 (Novo Banco dos Açores) e a 16 (Banco Credibom). Com a mesma posição em dois anos consecutivos, existem cinco instituições, a 04 (Banco CTT), a 05 (Banco de Investimento Global), a 08 (Banco Carregosa), a 09 (Caixa Económica Montepio Geral) e a 12 (Novo Banco). Com posições diferentes nos quatro anos em avaliação, existem nove instituições (mais duas do que no caso de retornos variáveis de escala), que são a 01 (Banco BIC Português), a 03 (Banco Activo Bank), a 06 (Banco Finantia), a 07 (Banco Invest), a 11 (Caixa Geral de Depósitos), a 13 (Banco Eletrónico de Serviço Total), a 15 (Banco BPI), a 17 (Banco Santander Totta) e a 19 (Abanca).

Para complementar a análise feita anteriormente em termos globais e visualizar melhor a diferença entre os *rankings* globais obtidos para retornos variáveis de escala e para retornos constantes de escala, apresenta-se, na figura 4.3, o gráfico relativo a esses *rankings*. Recorde-se que os *rankings* globais foram obtidos através das médias das eficiências e/ou das super-eficiências obtidas em cada ano do período de avaliação e em cada tipo de retornos de escala, apresentados no apêndice D.

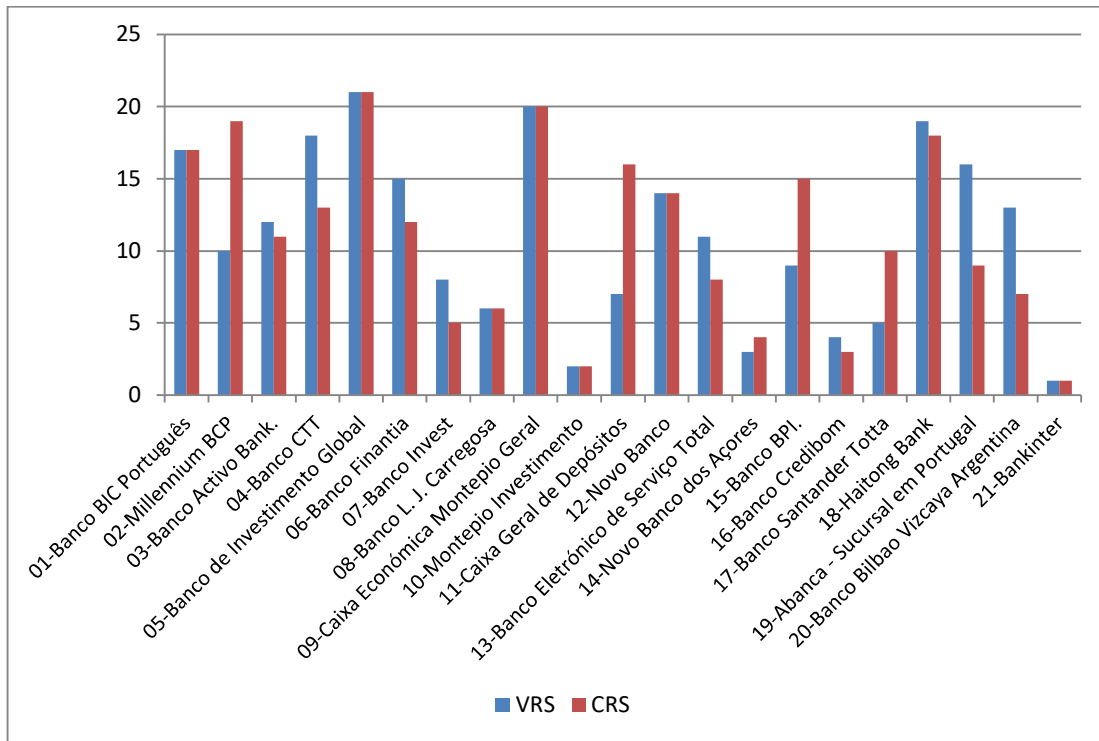


Figura 4.3 – Gráfico dos *rankings* globais para retornos variáveis de escala (VRS) e retornos constantes de escala (CRS).

Da observação do gráfico, verifica-se que, em termos globais, existem sete instituições com o mesmo *ranking* e quatro em que a diferença de *ranking* é de um. Existem assim 52,38% das instituições em que a diferença de *ranking* é, no máximo, um. Para as restantes, essa diferença varia entre três e nove. Note-se que, como foi referido antes, as duas instituições com melhor desempenho, assim como as duas com pior desempenho são as mesmas, quer para retornos variáveis de escala, quer para retornos constantes de escala.

5. Conclusões

A DEA é uma importante metodologia para a avaliação do desempenho organizacional de entidades similares, normalmente designadas por DMUs, que usam múltiplos *inputs* para produzir múltiplos *outputs*. É uma técnica não paramétrica que usa modelos de programação linear para obter um índice de eficiência (relativa) cujo valor permite distinguir as DMUs eficientes das ineficientes e, para estas últimas, permite também obter informação relevante sobre as melhorias a realizar de modo a tornarem-se eficientes.

Os modelos DEA podem, basicamente, ser classificados em modelos radiais ou não radiais. Nos primeiros, a eficiência é atingida através de alterações (melhorias) proporcionais nos *inputs* ou nos *outputs*, enquanto, nos segundos, é obtida diretamente a partir das folgas associadas aos excessos de *input* ou aos défices de *output*, sem assumir alterações radiais nos *inputs* ou nos *outputs*. A maioria dos modelos DEA têm sido propostos para tratar dados não negativos e, alguns deles para dados positivos. Contudo, existem situações em que os dados relativos aos *inputs* e/ou aos *outputs* assumem valores negativos, pelo que alguns modelos para tratar estas situações têm sido propostos.

Neste trabalho foi apresentado um estudo, no âmbito da DEA, sobre modelos não radiais de eficiência e de super-eficiência para tratar dados com valores negativos, com enfoque nos modelos baseados no modelo SBM, nomeadamente os modelos BP-SBM, que foram aplicados para avaliar a eficiência relativa de vinte e uma instituições bancárias que operavam em Portugal no período 2019 a 2022 e em que existem dados com valores negativos.

Os resultados obtidos mostram que, para retornos variáveis de escala, o valor médio dos índices de eficiência foi mais elevado no ano de 2019 (0,8082), seguido dos anos de 2020 (0,7916), 2022 (0,7896) e 2021 (0,7263) e em que o número de instituições eficientes foi treze com exceção de 2021 que foi de doze. Destas, existem sete que foram eficientes em todos os anos do período em avaliação. Para retornos constantes de escala, o valor médio dos índices de eficiência foi mais elevado no ano 2021 (0,6074), seguidos dos anos de 2022 (0,5994), 2019 (0,5247) e 2020 (0,4731) e em que o número de instituições eficientes foi de oito em 2019 e 2021, de sete em 2020 e de cinco em 2022. Destas, existem três que foram eficientes em todos os anos do período de avaliação.

Como foi referido no parágrafo anterior, existem várias instituições que são identificadas como eficientes através dos modelos BP-SBM, em cada ano do período de avaliação, não sendo

possível discriminá-las através desses modelos e, conseqüentemente, estabelecer um *ranking* sobre o desempenho de todas as instituições. Utilizando o método da super-eficiência baseado naqueles modelos foi possível discriminar todas as instituições eficientes e, conseqüentemente, estabelecer um *ranking* sobre todas as instituições em cada ano do período de avaliação.

Para ter uma ideia do desempenho global de cada instituição, foi calculada a média das eficiências e/ou super-eficiências para cada instituição. Os valores obtidos são todos diferentes, permitindo assim obter um *ranking* global para todas as instituições bancárias em avaliação no período de 2019 a 2022.

6. Referências bibliográficas

- Adler, N., Friedman, L., & Sinuany-Stern, Z. (2002). Review of *ranking* methods in the data envelopment analysis context. *European journal of operational research*, 140(2), 249-265.
- Adler, N., Friedman, L., & Sinuany-Stern, Z. (2002). Review of *ranking* methods in the *Data Envelopment Analysis* context. *European journal of operational research*, 140(2), 249-265.
- Afriat, S. N. (1972) Efficiency Estimation of Production Functions. *International Economic Review*, 13 (3), 568-569
- Aldamak, A. & Zolfaghari, S. (2017). Review of efficiency *ranking* methods in *Data Envelopment Analysis. Measurement*, 106, 161-172.
- Ali, A, & Seiford, L. (1993). Computational Accuracy and Infinitesimals in *Data Envelopment Analysis*. *INFOR: Information Systems and Operational Research*, 31, 290-297.
- Andersen, P., & Petersen, N. (1993). A procedure for *ranking* efficient units in data envelopment analysis. *Management science*, 73, 1261-1264.
- Berger AN, Humphrey DB (1997). Efficiency of financial institutions: international survey and directions for future research. *European Journal of Operational Research*, 98, 175–212.
- Cooper, W. W., Seiford, L. M., & Zhu, J. (Eds.). (2011). Handbook on *Data Envelopment Analysis* (Vol. 164). *Springer Science & Business Média*.
- Cooper, W. W., Seiford, L. M., Tone, K., & Zhu, J. (2007). Some models and measures for evaluating performances with DEA: past accomplishments and future prospects. *Journal of Productivity Analysis*, 28(3).
- Cooper, W., Pastor, J., Borras, F., Aparicio, J., & Pastor, D., (2011), BAM: A bounded adjusted measure of efficiency with bounded additive models, *Journal of Productivity Analysis*, 35(2), 85-94.
- Cooper, W., Seiford, L., & Tone, K. (2007). *Data envelopment analysis: A comprehensive text with models, applications, references and DEA – Solver software*. New York: Springer Science + Business Média.

- Cooper, W., Seiford, L., & Tone, K. (2007). *Data envelopment analysis: A comprehensive text with models, applications, references and DEA – Solver software*. New York: Springer Science + Business Média.
- Cooper, W.W., Park, K., & Pastor, J. (1999). RAM: A Range Adjusted Measure of Inefficiency for Use with Additive Models, and Relations to Other Models and Measures in DEA. *Journal of Productivity Analysis*, 11, 5–42.
- Emrouznejad, A., & Yang, G. (2018). A survey and analysis of the first 40 years of scholarly literature in DEA: 1978-2016. *Socio-Economic Planning Sciences*, 61, 4-8.
- Emrouznejad, A., Parker, B.; Tavares, G. (2008). Evaluation of research in efficiency and productivity: A survey and analysis of the first 30 years of scholarly literature in DEA. *Socio Economic Planning Sciences* 42, 151-157.
- Fang, H., Lee, H., Hwang, S., & Chung, C. (2013). A slacks-based measure of super efficiency in data envelopment analysis: An alternative approach. *Omega*, 41, 731–734.
- Farrel, M. J. (1957) The Measurement of Productive Efficiency. *Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General)*, 120 (3), 11-12
- Fethi,MD., Pasiouras., F. (2010). Assessing bank efficiency and performance with operational research and artificial intelligence techniques: a survey. *European Journal of Operational Research* 2010, 204, 189–98.
- Liu, J. S., Lu, L. Y. Y., Lu, W. & Lin, B. J. Y. (2013) A survey of DEA applications. *Omega*, 41 (5), 893-902
- Liu, J. S., Lu, L. Y. Y., Lu, W. & Lin, B. J. Y. (2013) Data envelopment analysis 1978-2010: A citation-based literature survey. *Omega*, 41 (1), 3-15
- Lovell, C. & Pastor, J. (1995). Units Invariant and Translation Invariant DEA Models. *Operations Research Letters*, 18(3), 147-151.
- MaxDEA for Data Envelopment Analysis, MaxDEA Basic 8.15*. <http://maxdea.com/>.
- Paradi JC, Rouatt S, Zhu H (2011). Two-stage evaluation of bank branch efficiency using *Data Envelopment Analysis*. *Omega*, 39, 99–109.

- Paradi, J. C. e H. Zhu (2013), A Survey on Bank Branch Efficiency and Performance Research with *Data Envelopment Analysis*, *Omega*, 41, 61-79.
- Sharp, J., Meng, W., & Liu, W., (2007). A modified slacks-based measure model for data envelopment analysis with ‘natural’ negative *outputs* and *inputs*. *Journal of the Operational Research Society*, 58(12), 1672-1677.
- Tone, K. (2001). A slacks-based measure of efficiency in data envelopment analysis. *European journal of operational research*, 130(3), 498-509.
- Tone, K. (2002). A slacks-based measure of super-efficiency in data envelopment analysis. *European Journal of Operational Research*, 143, 32-41.
- Tone, K., Chang, T.-S., & Wu, C.-H., (2020). Handling negative data in slacks-based measure *Data Envelopment Analysis* models. *European Journal of Operational Research*, 282(3), 926-935.

Apêndices

Apêndice A - Tabela 4.1 modificada para aplicação dos modelos BP-SBM e SE_BP-SBM

Instituições Bancárias	<i>Input 1</i>	<i>Input 2</i>	<i>Input 3</i>	<i>Output 1</i>	<i>Output 2</i>	<i>Output 3</i>
01 Banco BIC Português	1452	6827708	570477	1159530,84	131877	4959446
02 Banco Comercial Português (Millenium)	6953	46394065	5892440	1237755,84	791998	32900659
03 Banco Activo Bank.	183	1627124	105429	1106650,84	16080	1228165
04 Banco CTT	218	1283851	211355	1090448,84	13348	463279
05 Banco de Investimento Global	241	1751621	387824	1138777,84	20431	23065
06 Banco Finantia	160	483989	316994	1115550,84	15627	282542
07 Banco Invest	270	689983	122880	1110150,84	25285	393325
08 Banco L. J. Carregosa	105	289472	38863	1100449,84	4751	112031
09 Caixa Económica Montepio Geral	3551	14520253	1513294	1111430,84	201910	11024569
10 Montepio Investimento	15	25018	183879	1097857,84	2127	36232
11 Caixa Geral de Depósitos	6706	60913281	7623830	1860472,84	761101	42186522
12 Novo Banco	4214	38523126	3646002	10875,84	546150	23649400
13 BEST - Banco Eletrónico de Serviço Total	133	571507	80227	1101128,84	5639	569340
14 Novo Banco dos Açores	78	508862	44106	1102464,84	7517	479394
15 Banco BPI.	4982	26008521	3283375	1440572,84	439812	23409015
16 Banco Credibom	402	1902106	194047	1137041,84	89405	2005369
17 Banco Santander Totta	6180	42495705	3497526	1598174,84	842883	35920096
18 Haitong Bank	186	1002905	602510	1108801,84	12452	242654
19 Abanca - Sucursal em Portugal	386	3263977	171824	1158853,84	21718	3126937
20 Banco Bilbao Vizcaya Argentina (Portugal)	374	3529612	308864	1125509,84	42984	2912123
21 Bankinter - Sucursal em Portugal	769	6749492	31243	1133690,84	61945	6020433

Apêndice B - Tabela 4.2 modificada para aplicação dos modelos BP-SBM e SE_BP-SBM

Instituições Bancárias	<i>Input 1</i>	<i>Input 2</i>	<i>Input 3</i>	<i>Output 1</i>	<i>Output 2</i>	<i>Output 3</i>
01 Banco BIC Português	1461	6400552	557507	1382943,46	117386	4847734
02 Banco Comercial Português (Millenium)	6756	52599163	5981786	1438621,46	794419	35379967
03 Banco Activo Bank.	187	2062694	153541	1399949,46	22878	1272279
04 Banco CTT	231	1689144	211724	1388273,46	16739	578671
05 Banco de Investimento Global	264	1652777	415986	1412161,46	14651	34188
06 Banco Finantia	155	456910	344400	1414553,46	7983	293484
07 Banco Invest	275	759758	136821	1400962,46	29256	402345
08 Banco L. J. Carregosa	110	289036	38299	1385481,46	4041	84772
09 Caixa Económica Montepio Geral	3313	14928798	1373398	1271367,46	194604	11188472
10 Montepio Investimento	21	271591	178459	1384807,46	4060	120067
11 Caixa Geral de Depósitos	6244	68509727	7806696	1794527,46	704259	42104453
12 Novo Banco	4239	36556975	2753089	13742,46	567999	21930730
13 BEST - Banco Eletrónico de Serviço Total	132	729411	82031	1389778,46	4305	686465
14 Novo Banco dos Açores	73	536633	43400	1390778,46	7651	501457
15 Banco BPL	4776	31512869	3110629	1475810,46	449897	24224617
16 Banco Credibom	416	2107138	245709	1418854,46	98894	2271449
17 Banco Santander Totta	5969	45013542	3990609	1663198,46	768076	38614687
18 Haitong Bank	184	1121992	588942	1375954,46	2744	319822
19 Abanca - Sucursal em Portugal	376	2973676	187183	1403038,46	28536	2836276
20 Banco Bilbao Vizcaya Argentina (Portugal)	367	3395380	332858	1398568,46	41012	2704270
21 Bankinter - Sucursal em Portugal	772	7093633	18386	1407294,46	66343	6460882

Apêndice C - Tabela 4.3 modificada para aplicação dos modelos BP-SBM e SE_BP-SBM

Instituições Bancárias	<i>Input 1</i>	<i>Input 2</i>	<i>Input 3</i>	<i>Output 1</i>	<i>Output 2</i>	<i>Output 3</i>
01 Banco BIC Português	1449	7170479	566408	15466,03	104172	5198890
02 Banco Comercial Português (Millenium)	6027	56622469	5870290	98042,03	807793	36967321
03 Banco Activo Bank.	192	2577170	194491	21518,03	23456	1342743
04 Banco CTT	239	2122860	237157	23406,03	22210	701571
05 Banco de Investimento Global	271	2042824	397352	25989,03	16372	228037
06 Banco Finantia	162	888609	423635	18376,03	8062	357208
07 Banco Invest	283	921134	156196	28041,03	31600	414075
08 Banco L. J. Carregosa	111	349413	40421	9949,03	4284	77562
09 Caixa Económica Montepio Geral	3107	16272159	1385130	79,03	193785	11069029
10 Montepio Investimento	21	251609	180801	10617,03	5915	167855
11 Caixa Geral de Depósitos	6117	79307685	8144527	449516,03	660479	44016321
12 Novo Banco	3890	38495687	2799402	233890,03	581084	22083471
13 BEST - Banco Eletrónico de Serviço Total	90	761303	82565	11251,03	3578	732143
14 Novo Banco dos Açores	73	567632	48042	12762,03	6811	532024
15 Banco BPI.	4638	34698405	3493468	301350,03	460619	25292693
16 Banco Credibom	463	2346034	310266	50687,03	118497	2472711
17 Banco Santander Totta	4771	47140713	4160679	311325,03	715824	39528233
18 Haitong Bank	175	1522539	604627	17132,03	7950	567394
19 Abanca - Sucursal em Portugal	381	2917342	194256	14886,03	27583	2781437
20 Banco Bilbao Vizcaya Argentina (Portugal)	360	3025928	356587	32871,03	38325	2472219
21 Bankinter - Sucursal em Portugal	772	8085281	20269	25249,03	66306	7281117

Apêndice D – Valores médios obtidos dos índices de eficiência e de super-eficiência para retornos variáveis de escala e para retornos constantes de escala e correspondentes *rankings*.

Instituições Bancárias	Retornos Variáveis		Retornos constantes	
01 Banco BIC Português	0,5459	17	0,2925	17
02 Millennium BCP	0,9438	10	0,2557	19
03 Banco Activo Bank.	0,8441	12	0,5205	11
04 Banco CTT	0,4062	18	0,3950	13
05 Banco de Investimento Global	0,3249	21	0,0756	21
06 Banco Finantia	0,6891	15	0,4157	12
07 Banco Invest	1,0015	8	0,9666	5
08 Banco L. J. Carregosa	1,2658	6	0,8746	6
09 Caixa Económica Montepio Geral	0,3639	20	0,1076	20
10 Montepio Investimento	3,2015	2	1,4709	2
11 Caixa Geral de Depósitos	1,1265	7	0,3288	16
12 Novo Banco	0,7316	14	0,3486	14
13 Banco Eletrónico de Serviço Total	0,8602	11	0,6961	8
14 Novo Banco dos Açores	1,4305	3	1,1082	4
15 Banco BPI.	0,9697	9	0,3359	15
16 Banco Credibom	1,3127	4	1,2707	3
17 Banco Santander Totta	1,2723	5	0,5542	10
18 Haitong Bank	0,4051	19	0,2834	18
19 Abanca - Sucursal em Portugal	0,6512	16	0,6465	9
20 Banco Bilbao Vizcaya Argentina	0,7958	13	0,7272	7
21 Bankinter	3,9319	1	3,8384	1