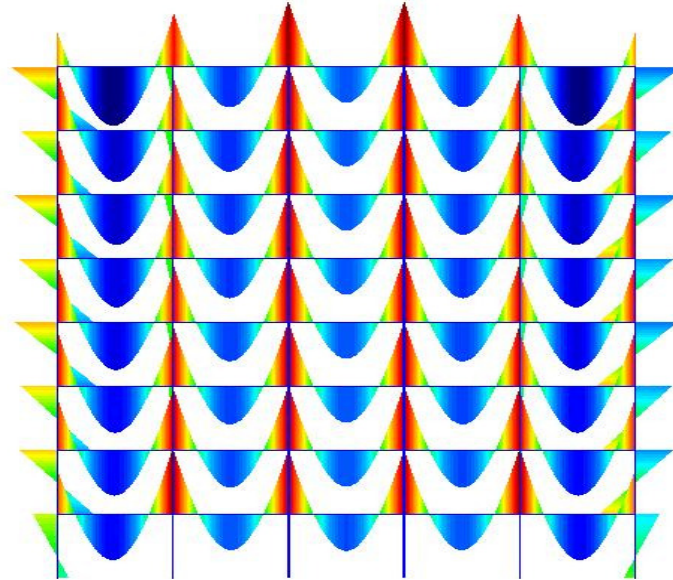




ISEL

**INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DE LISBOA**  
**Departamento de Engenharia Civil**



**Cálculo automático de estruturas.**  
**Análise estrutural de pórticos planos utilizando o**  
**método dos elementos finitos.**

**NUNO MIGUEL VAZ DE CARVALHO**  
(Bacharel em Engenharia Civil)

Trabalho Final de Mestrado para obtenção do grau de Mestre  
em Engenharia Civil - Estruturas

Orientadores:

Doutor Jorge Manuel Neto Pereira Gomes  
Doutor Sérgio Bruno Martins Oliveira

Júri:

Presidente: Mestre Cristina Ferreira Brito Machado

Vogal:

Doutor Nuno Miguel Monteiro Azevedo  
Doutor Jorge Manuel Neto Pereira Gomes  
Doutor Sérgio Bruno Martins Oliveira

**Abril de 2010**



## ***DEDICATÓRIA***

*Dedico esta dissertação a uma pessoa muito especial.  
Alguém que partiu muito cedo, mas que mesmo assim não deixou de  
estar sempre presente na minha vida, no meu pensamento, no meu coração...*

*Ao meu Pai.*



## AGRADECIMENTOS

A realização desta dissertação não teria sido possível sem o apoio e a contribuição de várias pessoas, às quais não posso de deixar de prestar os meus sinceros agradecimentos.

Começo por agradecer aos Professores e Engenheiros Jorge Gomes e Sérgio Oliveira por aceitarem orientar este meu projecto.

Ao meu orientador, Engenheiro Jorge Gomes, quero ainda agradecer a disponibilidade que sempre demonstrou ter para, em qualquer altura e a qualquer hora, esclarecer todas as minhas dúvidas, as ideias que me forneceu para a realização desta dissertação e os conhecimentos de programação que me transmitiu e que se revelaram fundamentais para o desenvolvimento do tema que me propôs apresentar.

Não posso deixar de agradecer ao orientador, Engenheiro Sérgio Oliveira, as sugestões dadas para a apresentação final da dissertação e que contribuíram, sem dúvida, para o seu aperfeiçoamento.

Agradeço a todos os meus amigos e aos amigos que fiz no ISEL, em especial ao Gonçalo Lélé que me acompanhou não só ao longo do curso, mas em quase todo o meu percurso de estudante.

À minha namorada Andreia pelo carinho e compreensão em todos os momentos que comigo vem partilhando.

À minha família, em especial à minha mãe e à minha irmã, a quem agradeço tudo o que sou hoje. Elas foram, sem dúvida, as grandes responsáveis pela minha formação e a elas agradeço o constante apoio, confiança, incentivo, amizade, paciência e tudo o mais que sempre me proporcionaram em todas situações e perante todos os obstáculos com que me deparei.



# **CÁLCULO AUTOMÁTICO DE ESTRUTURAS. ANÁLISE ESTRUTURAL DE PÓRTICOS PLANOS UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.**

## **RESUMO**

O principal objectivo da presente dissertação foi o desenvolvimento de um programa de cálculo automático de estruturas reticulares planas.

A execução deste trabalho insere-se num programa mais vasto e ambicioso, em que se pretende desenvolver um pacote de cálculo automático de estruturas para utilização académica. Este pacote incluirá o tipo de elementos mais utilizado na Engenharia Civil, podendo efectuar análises lineares e não-lineares, considerando acções estáticas e dinâmicas. Pretende-se também dotar este pacote com o dimensionamento e verificação da segurança dos elementos estruturais.

O programa foi desenvolvido recorrendo ao Método dos Elementos Finitos. Em face da aplicação deste método é efectuada uma breve resenha histórica, incluindo o seu desenvolvimento, campos de aplicação e importância na Engenharia Civil para o cálculo de estruturas.

Foram implementados elementos finitos do tipo barra 2D de secção constante, em que se admitiu um material isotrópico com comportamento elástico linear. O programa permite a aplicação de cargas estáticas nos nós e elementos de barra, assentamentos de apoio, e fornece os resultados de forma gráfica e numérica.

A validação do programa de cálculo foi efectuada através da comparação dos resultados obtidos pelo programa com um outro Programa de cálculo estrutural comercial (SAP2000) e com valores apresentados na bibliografia [LNEC, 1984].

Com o objectivo de incluir este trabalho num pacote de programas mais abrangentes, foi elaborado um fluxograma onde são descritos os blocos principais que compõem o programa desenvolvido e um manual de utilização devidamente pormenorizado.

## **PALAVRAS-CHAVE**

Cálculo Automático de Estruturas

Cálculo Matricial de Estruturas

Método dos Elementos Finitos

Elemento Finito Barra 2D



# **AUTOMATIC COMPUTATION OF STRUCTURES. STRUCTURAL ANALYSIS OF PLANE FRAMES USING THE FINITE ELEMENT METHOD.**

## **ABSTRACT**

The main purpose of this dissertation was the development of a computational program for the analysis of plane frames.

This work should be intended as part of a larger and ambitious program which aims the development of a software package for automatic computation of structures for academic use. This package includes the most used elements on civil engineering and allows linear and non-linear analyses, considering static and dynamic actions. In future developments some features for support the design and safety assessment of the structural elements will be added.

The program was developed using the Finite Element Method (FEM). A historical summary which includes the main steps of the FEM development, application fields and its importance for the analysis of Civil Engineering structures is presented.

Finite elements of 2D frame with constant section were used assuming an isotropic material with linear elastic behaviour. The program allows the application of static charges on nodal points and in the elements, the consideration of support displacements and provides numerical and graphical results.

For the validation of the computational program it was made a comparison with SAP2000 results and with some results presented in a LNEC report [LNEC; 1984]. In order to include the developed program on a larger computational package for structural analysis it is presented a flowchart describing the main blocks of the developed program and a detailed user's manual.

## **KEYWORDS**

Automatic Computation of Structures  
Structural Computation Using Matrix Methods  
Finite Element Method  
2D Frame Finite Element



# Índice Geral

## Capítulo I

1.	Introdução .....	1
1.1.	Âmbito da Dissertação .....	1
1.2.	Objectivos da Dissertação.....	2
1.3.	Organização da Dissertação .....	4

## Capítulo II

2.	Enquadramento .....	6
2.1.	Introdução .....	6
2.2.	Desenvolvimento e Evolução do Cálculo Estrutural .....	6
2.3.	Evolução da Construção em Estruturas de Betão .....	9
2.4.	Conclusão .....	13

## Capítulo III

3.	Análise Matricial de Estruturas .....	14
3.1.	Introdução .....	14
3.2.	Tipo de Análise .....	15
3.3.	Princípios Básicos da Teoria da Elasticidade .....	16
3.3.1.	Noção de Campo de Tensões, Extensões e Deslocamentos .....	16
3.3.2.	Equações Fundamentais da Mecânica dos Sólidos .....	19
3.4.	Método dos Elementos Finitos .....	23
3.4.1.	Breve Resenha Histórica do Método dos Elementos Finitos .....	23
3.4.2.	Definição do Método .....	25
3.4.3.	Campos de Aplicação .....	26
3.4.4.	Diferentes tipos de elementos finitos e suas aplicações.....	26
3.4.5.	Processo de Aplicação do Método na Análise Estrutural .....	28
3.4.6.	Aproximação Fundamental do Método Elementos Finitos. Funções de Interpolação .....	29

3.4.7. Introdução da aproximação fundamental do Método dos Elementos Finitos nas relações compatibilidade .....	31
3.4.8. Introdução da aproximação fundamental do Método dos Elementos Finitos nas relações constitutivas .....	31
3.4.9. Equação de Equilíbrio dum Elemento Finito pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais .....	32
3.4.10. Equação de Equilíbrio Global (Matriz de rigidez global e vector das forças globais para análise de uma estrutura) .....	33
3.4.11. Assemblagem da matriz de rigidez global e vector das forças globais .	34
3.5. Conclusão .....	41

## Capítulo IV

4. Programa de Cálculo Automático .....	42
4.1. Introdução .....	42
4.2. Breve Descrição .....	42
4.3. Referenciais .....	44
4.4. Matriz de Rigidez Global da Estrutura .....	45
4.5. Introdução das Condições de Apoio .....	49
4.6. Vector Global das Forças Nodais Equivalentes .....	49
4.7. Deslocamentos nos Pontos Nodais .....	52
4.8. Esforços nas Barras .....	53
4.9. Reacções de Apoio .....	55
4.10. Combinação de Acções .....	56
4.11. Conclusão .....	56

## Capítulo V

5. Validação do Programa de Cálculo Automático .....	57
5.1. Introdução .....	57
5.2. Descrição do Edifício .....	58
5.3. Acções Actuantes sobre o Edifício e combinação de Acções .....	59
5.4. Modelação do Edifício em Estudo .....	64
5.5. Validação e Comparação do Programa Quanto ao Efeito da Acção Sísmica	65

5.5.1. Comparação dos Deslocamentos .....	66
5.5.2. Comparação das Forças de Corte Basal.....	68
5.5.3. Comparação dos Momentos Derrubantes.....	70
5.6. Validação e Comparação do Programa com o SAP2000 quanto ao Efeito da Combinção de Acções.....	72
5.7. Conclusão .....	75

## Capítulo VI

6. Conclusões e Perspectivas Futuras.....	76
6.1. Síntese do Trabalho e.....	76
6.2. Principais Conclusões.....	76
6.3. Perspectivas Futuras .....	77

## Referências

Bibliográficas.....	78
Sites de consulta na Internet .....	79

## ANEXO - Manual do Utilizador

1. Introdução ao Programa .....	80
2. Introdução dos Dados.....	81
2.1. Definição dos Bloco de Dados .....	82
2.1.1. Estrutura Exemplo.....	82
2.1.1.1. Cabeçalho.....	84
2.1.1.2. Identificação e Coordenadas dos Nós (Nos) .....	85
2.1.1.3. Identificação e Incidências dos Elementos (Elementos).....	85
2.1.1.4. Identificação e Características dos Materiais (Materiais).....	86
2.1.1.5. Identificação e Características das Secções (Seccao) .....	86
2.1.1.6. Definição dos Apoios (Apoios) .....	88
2.1.1.7. Definição das Rótulas (Rotulas) .....	88
2.1.1.8. Definição das Acções (Accoes).....	89
2.1.1.9. Combinção de Acções .....	96
3. Cálculo da Estrutura .....	97

4.	Ficheiro de Resultados .....	97
4.1.	Ficheiro “.OUT” .....	97
4.2.	Ficheiro “.DES” .....	101
4.3.	Ficheiro “.ESF” .....	102
4.4.	Ficheiro “.REA” .....	103
4.5.	Ficheiro “.MSH” .....	103
4.6.	Ficheiro “.RES” .....	105

# Índice de Figuras

## Capítulo I

<b>Figura 1.1</b> – Estruturas de Engenharia Civil. Diferentes tipos de elementos finitos que podem ser utilizados para a análise estrutural [s1, s2, s3, s4 e s5].	1
<b>Figura 1.2</b> – Programa de cálculo automático existente no mercado (SAP2000).	2
<b>Figura 1.3</b> – Interface Visual do Programa Fortran.	3
<b>Figura 1.4</b> – Interface gráfica do Programa GID.	3
<b>Figura 1.5</b> – Primeira estrutura em betão armado. Barco de Lambot, 1848 [Appleton, J., 2005].	4
<b>Figura 1.6</b> – Modelo Numérico de Elementos Finitos para análise de um edifício [s6].	5

## Capítulo II

<b>Figura 2.1</b> – Primeiro computador electrónico criado por John W. Mauchly e J. Prester Eckert Jr [s7].	8
<b>Figura 2.2</b> - Desabamento do Edifício Palace II, no Bairro da Tijuca, no Brasil [s8].	9
<b>Figura 2.3</b> - Ponte Romana de Chaves – Construída entre fins do Século I e o início do Século II [Appleton, J., 2005].	10
<b>Figura 2.4</b> - Vestígios da Barragem Romana de Belas – Construída no Século III [Appleton, J., 2005].	10
<b>Figura 2.5</b> – Primeira Ponte conhecida em Betão Armado [Appleton, J., 2005].	11
<b>Figura 2.6</b> – Exemplo de Vigas do Sistema Hennebique [Appleton, J., 2005].	12
<b>Figura 2.7</b> – Ponte Luiz da Bandeira de Seijães [Appleton, J., 2005].	12

## Capítulo III

<b>Figura 3.1</b> - Variáveis e equações fundamentais da Mecânica Estrutural (equações a verificar em cada ponto de uma estrutura e em cada instante) [Oliveira, S.; Castro, B. T.; Gomes, J.P., ].	20
<b>Figura 3.2</b> – Diferentes Tipos de Elementos Finitos.	24
<b>Figura 3.3</b> – Exemplo de discretização em elementos finitos de um pórtico plano, com elementos barra 2D.	25
<b>Figura 3.4</b> - Elemento Finito de barra de dois nós com três graus de liberdade por nó.	30
<b>Figura 3.5</b> - Funções de interpolação para elementos finitos de barra com 2 nós e 3 graus de liberdade por nó. [s9].	30
<b>Figura 3.6</b> - Estrutura constituída por 3 elementos finitos de barra de dois nós (1, 2 e 3).	34

<b>Figura 3.7</b> - Numeração elementar do elemento finito genérico e respectivos graus de liberdade elementares.....	35
---	----

## Capítulo IV

<b>Figura 4.1</b> - Fluxograma do programa de cálculo de pórticos planos.....	43
<b>Figura 4.2</b> – Elemento Barra 1, referencial global ( $x_1, x_2$ ) e o referencial local ( $x'_1, x'_2$ ).....	44
<b>Figura 4.3</b> - Relação entre o referencial local (barra, $x'_1$ e $x'_2$ ) e o referencial global (estrutura, $x_1$ e $x_2$ ).....	48
<b>Figura 4.4</b> - Transformação das forças $F_1$ e $F_2$ do referencial $x_1$ e $x_2$ para o referencial $x'_1$ e $x'_2$ . .....	51

## Capítulo V

<b>Figura 5.1</b> - Estrutura em planta do edifício em estudo.....	58
<b>Figura 5.2</b> – Alçado Longitudinal. ....	58
<b>Figura 5.3</b> - Representação do modelo numérico em elementos finitos para a direcção longitudinal.....	64
<b>Figura 5.4</b> - Representação do modelo numérico em elementos finitos para a direcção transversal.....	65
<b>Figura 5.5</b> – Deformada do ponto médio dos pórticos longitudinais devido à acção estática equivalente devida ao sismo. ....	67
<b>Figura 5.6</b> - Deformada do ponto médio dos pórticos transversais devido à acção estática equivalente devida ao sismo. ....	67
<b>Figura 5.7</b> - Distribuição em altura da força de corte basal obtida em cada pórtico na direcção longitudinal.....	69
<b>Figura 5.8</b> - Distribuição em altura da força de corte basal obtida em cada pórtico na direcção transversal.....	69
<b>Figura 5.9</b> - Distribuição em altura dos momentos derrubantes obtido em cada pórtico na direcção longitudinal.....	71
<b>Figura 5.10</b> - Distribuição em altura dos momentos derrubantes obtido em cada pórtico na direcção transversal. ....	71
<b>Figura 5.11</b> – Comparação dos diagramas de esforços obtidos pelo GID e pelo SAP2000, sem multiplicação pelo coeficiente $\xi$ , para a Combinação 1 segundo a direcção longitudinal no pórtico extremo. ....	73
<b>Figura 5.12</b> - Comparação dos diagramas de esforços obtidos pelo GID e pelo SAP2000, sem multiplicação pelo coeficiente $\xi$ , para a Combinação 2 segundo a direcção transversal no pórtico interior. ....	74

## **Anexo - Manual do Utilizador**

<b>Figura 2.1</b> – Descrição da estrutura que serve de exemplo ao manual.....	82
<b>Figura 2.2</b> – Secção transversal dos elementos barra horizontal.....	83
<b>Figura 2.3</b> - Secção transversal dos elementos barra verticais e inclinada. ....	83
<b>Figura 2.4</b> – Definição esquemática dos blocos de dados do ficheiro dados do exemplo .....	84
<b>Figura 2.5</b> – Cabeçalho do bloco de dados.....	84
<b>Figura 2.6</b> – Bloco de dados das coordenadas dos nós.....	85
<b>Figura 2.7</b> - Bloco de dados com as incidências dos elementos barra.....	86
<b>Figura 2.8</b> – Bloco de dados dos materiais. ....	86
<b>Figura 2.9</b> - Bloco de dados das secções sem a deformação por esforço transverso.....	87
<b>Figura 2.10</b> – Bloco de dados das secções com a deformação por esforço transverso. ....	87
<b>Figura 2.11</b> – Secção transversal genérica com as dimensões $b \times h$ .....	87
<b>Figura 2.12</b> - Bloco de dados dos apoios.....	88
<b>Figura 2.13</b> - Bloco de dados das rótulas .....	88
<b>Figura 2.14</b> – Representação esquemática de como deve ser iniciado cada subbloco da acção. .....	89
<b>Figura 2.15</b> - Bloco de dados das acções.....	89
<b>Figura 2.16</b> – Bloco dos parâmetros das cargas concentradas.....	90
<b>Figura 2.17</b> – Representação dos sentidos positivos das cargas concentradas.....	90
<b>Figura 2.18</b> – Bloco dos parâmetros das cargas de vão. ....	91
<b>Figura 2.19</b> – Representação do código numérico para os graus de liberdade globais.....	91
<b>Figura 2.20</b> – Representação do código numérico para os graus de liberdade locais e sentidos positivos em duas barras orientadas de forma diferente.....	91
<b>Figura 2.21</b> – Bloco dos parâmetros do assentamentos de apoio.....	96
<b>Figura 2.22</b> - Bloco de dados das combinações de acções. ....	96
<b>Figura 4.1</b> – Cabeçalho e resumo dos dados da estrutura em exemplo apresentados no ficheiro “.OUT”.....	98
<b>Figura 4.2</b> – Bloco das coordenadas dos nós apresentado no ficheiro “.OUT”. ....	98
<b>Figura 4.3</b> - Bloco das incidências apresentado no ficheiro “.OUT”.....	99
<b>Figura 4.4</b> - Bloco dos materiais apresentado no ficheiro “.OUT”.....	99
<b>Figura 4.5</b> - Bloco dos materiais apresentado no ficheiro “.OUT”.....	99
<b>Figura 4.6</b> – Bloco dos apoios apresentado no ficheiro “.OUT”.....	100
<b>Figura 4.7</b> - Bloco das rótulas apresentado no ficheiro “.OUT”. ....	100
<b>Figura 4.8</b> - Bloco das acções apresentado no ficheiro “.OUT”.....	100
<b>Figura 4.9</b> - Bloco das combinações de acções apresentado no ficheiro “.OUT”. ....	101
<b>Figura 4.10</b> – Excerto do ficheiro “.DES” onde são apresentados os deslocamentos. ....	101
<b>Figura 4.11</b> – Representação dos sentidos positivos dos deslocamentos.....	102

<b>Figura 4.12</b> - Excerto do ficheiro “.ESF” onde são apresentados os esforços ao longo dos elementos barra em secções equidistantes.....	102
<b>Figura 4.13</b> – Representação da convenção de resistência dos materiais.....	103
<b>Figura 4.14</b> - Excerto do ficheiro “.Rea” onde são apresentadas as reacções de apoio.....	103
<b>Figura 4.15</b> – Forma de abrir o ficheiro “.MSH” no GID.....	104
<b>Figura 4.16</b> – Visualização da estrutura no GID após a colocação do ficheiro “.MSH”.....	104
<b>Figura 4.17</b> – Localização do botão de pré/pós-processamento no GID.....	105
<b>Figura 4.18</b> – Forma de abrir o ficheiro “.RES” no GID. ....	105
<b>Figura 4.19</b> – Forma de seleccionar o esforço que se pretende visualizar.....	106
<b>Figura 4.20</b> – Visualização dos diagramas de esforços no “GID”.....	106
<b>Figura 4.21</b> – Visualização da deformada no “GID”. ....	107
<b>Figura 4.22</b> - Visualização do diagrama de deformação no “GID”.....	108
<b>Figura 4.23</b> - Visualização dos valores dos deslocamentos nos pontos nodais no “GID”.....	108

# Índice de Tabelas

## Capítulo III

<b>Tabela 3.1</b> - Tipos de elementos finitos mais utilizados e sua aplicação prática.....	27
<b>Tabela 3.2</b> - Tabela de Incidências da estrutura representada na figura 3.6. ....	35
<b>Tabela 3.3</b> - Assemblagem da matriz de rigidez elementar (equação 3.33) do elemento 1 na matriz de rigidez global da estrutura.....	36
<b>Tabela 3.4</b> - Assemblagem da matriz de rigidez elementar (equação 3.34) do elemento 2 na matriz de rigidez global da estrutura.....	37
<b>Tabela 3.5</b> - Assemblagem da matriz de rigidez elementar (equação 3.35) do elemento 3 na matriz de rigidez global da estrutura.....	38
<b>Tabela 3.6</b> - Matriz de rigidez global da estrutura após a sobreposição das tabelas 3.3 a 3.5.	39
<b>Tabela 3.7</b> - Assemblagem dos vectores elementares das forças nodais equivalentes para obtenção do vector global. ....	40

## Capítulo IV

<b>Tabela 4.1</b> - Diferentes tipos de cargas de vão. ....	50
---	----

## Capítulo V

<b>Tabela 5.1</b> – Dimensões dos elementos estruturais.....	59
<b>Tabela 5.2</b> - Valor das forças estáticas equivalentes ao sismo a aplicar nos pisos em cada direcção. ....	62
<b>Tabela 5.3</b> - Valores dos coeficientes $\xi$ para os pórticos de cada uma das direcções. ....	66
<b>Tabela 5.4</b> – Deslocamentos em cada piso do pórtico na direcção longitudinal que passa pelo centro de rotação, obtidas pelo programa e retiradas do livro [LNEC, 1984]. ....	66
<b>Tabela 5.5</b> - Deslocamentos em cada piso do pórtico na direcção transversal que passa pelo centro de rotação, obtidas pelo programa e retiradas do livro [LNEC, 1984].]. ....	66
<b>Tabela 5.6</b> – Forças de corte basal em cada piso do pórtico na direcção longitudinal que passa pelo centro de rotação, obtidas pelo programa e retiradas do livro [LNEC, 1984].....	68
<b>Tabela 5.7</b> - Forças de corte basal em cada piso do pórtico na direcção transversal que passa pelo centro de rotação, obtidas pelo programa e retiradas do livro [LNEC, 1984].....	68
<b>Tabela 5.8</b> – Momentos derrubantes em cada piso do pórtico na direcção longitudinal que passa pelo centro de rotação, obtidas pelo programa e retiradas do livro [LNEC, 1984]..	70
<b>Tabela 5.9</b> – Momentos derrubantes em cada piso do pórtico na direcção transversal que passa pelo centro de rotação, obtidas pelo programa e retiradas do livro [LNEC, 1984]..	70

## **Anexo - Manual do Utilizador**

<b>Tabela 2.1</b> – Tipos de cargas de vão e os respectivos parâmetros que as definem.....	92
<b>Tabela 2.2</b> – Cargas de vão do tipo 1 e respectivo conjunto de dados a introduzir segundo a direcção dos graus de liberdade locais e globais.....	93
<b>Tabela 2.3</b> – Cargas de vão do tipo 2 e respectivo conjunto de dados a introduzir segundo a direcção dos graus de liberdade locais e globais.....	94
<b>Tabela 2.4</b> – Forças de vão do tipo 3 e respectivo conjunto de dados a introduzir segundo a direcção dos graus de liberdade locais e globais.....	94
<b>Tabela 2.5</b> – Cargas de vão do tipo 4 e respectivo conjunto de dados a introduzir segundo a direcção dos graus de liberdade locais e globais.....	95

# Capítulo I

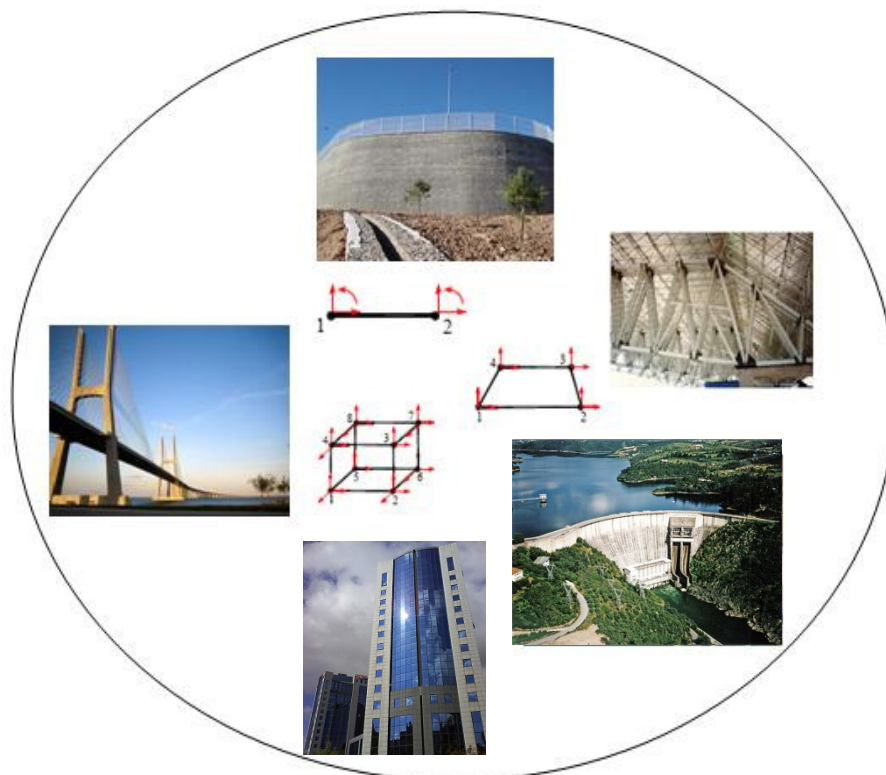
## INTRODUÇÃO

### 1.1. ÂMBITO DA DISSERTAÇÃO

No âmbito do curso de Engenharia Civil, ramo de Estruturas, como tema de dissertação final de mestrado, foi desenvolvido um programa de cálculo automático que permitisse dar resposta a um dos problemas mais comuns em Engenharia de Estruturas, que consiste na determinação do campo de deslocamentos, de extensões e tensões que se desenvolvem numa determinada estrutura, sob a acção das mais diversas solicitações.

Para a sua implementação era necessário recorrer à utilização de modelos matemáticos e optou-se pelo recurso ao Método dos Elementos Finitos, na formulação em deslocamentos.

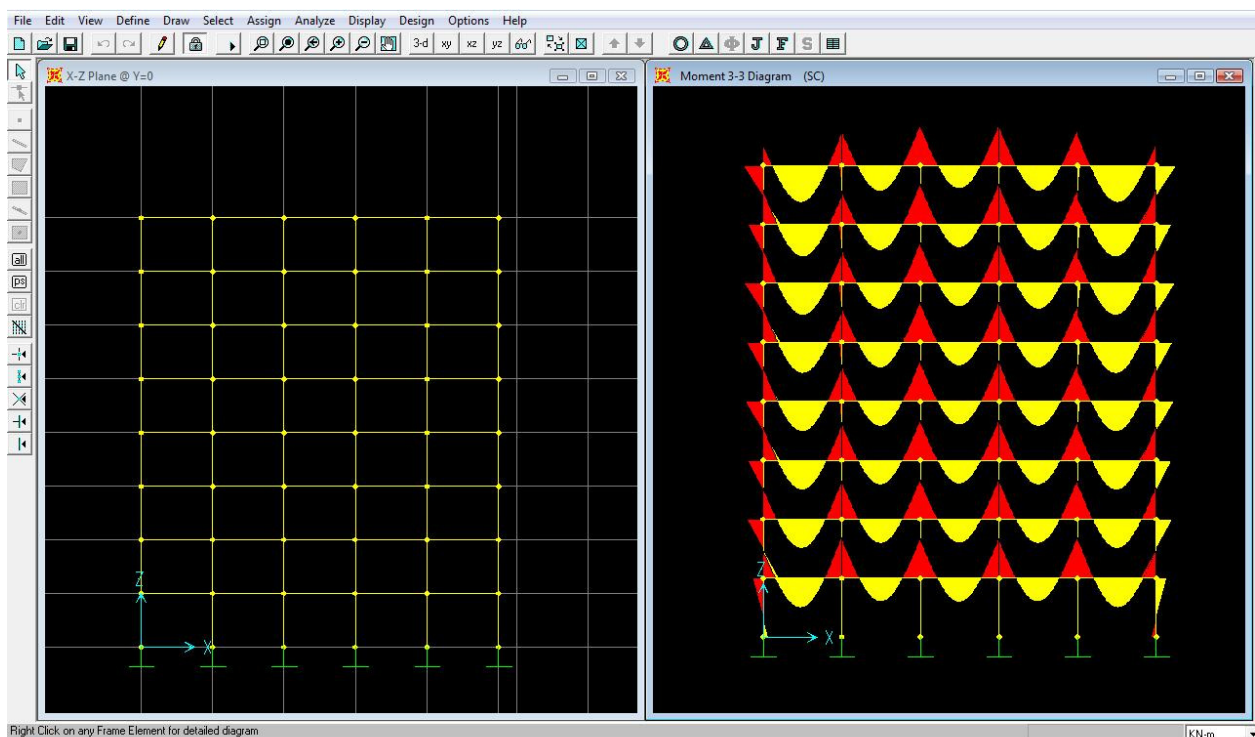
O Método dos Elementos Finitos permite a análise estrutural de meios contínuos e possibilita o estudo da maioria das estruturas projectadas em Engenharia (pontes, muros de suporte, treliças, edifícios, barragens, etc).



**Figura 1.1** – Estruturas de Engenharia Civil. Diferentes tipos de elementos finitos que podem ser utilizados para a análise estrutural [s1, s2, s3, s4 e s5].

Englobando uma estratégia de dotar o “Departamento” de um pacote de programas de cálculo automático, foi desenvolvido um módulo de cálculo estrutural de pórticos planos, utilizando elementos finitos de barra. Este desenvolvimento permite adquirir novos conhecimentos de programação e de cálculo estrutural e possibilitam entender a metodologia subjacente aos programas de cálculo automático já existentes no mercado (figura 1.2).

Na dissertação serão abordados alguns conceitos inerentes à formulação implementada tais como: a discretização da estrutura, o grau de liberdade, os pontos nodais, o vector das forças nodais equivalentes, as matrizes de rigidez, a assemblagem e as condições de apoio que são essenciais para a utilização e compreensão do programa desenvolvido.



**Figura 1.2** – Programa de cálculo automático existente no mercado (SAP2000).

## 1.2. OBJECTIVOS DA DISSERTAÇÃO

O objectivo principal da dissertação foi elaborar um programa de cálculo automático, de estruturas reticulares planas, com a utilização de elementos finitos de barra.

As rotinas de cálculo do programa foram desenvolvidas numa linguagem de programação FORTRAN (figura 1.3) e permitem a aplicação de cargas estáticas, admitindo um material isotrópico, com comportamento elástico linear e a necessária apresentação e representação de resultados.

```

Arquivo  Editar  Procurar  Exibir  Executar  Opções  Ferramentas  Janela  Ajuda
1  program Barra_2D
2
3  include 'param.f'
4  common /titulo/ cabecalho(2)
5  common /nos/ cd(knos,3), nnos, inos(knos)
6  common /elembarra/ nelelem, ielem(kelem), icd(kelem, knoselem)
7  common /materiais/ imat(kmat), mat(kmat, kprop), nmat, cod(kmat)
8  common /apoio/ napoio, iapoio(kapoio), apoio(kapoio, kgl)
9  common /seccoes/ isec(ksec), psec(ksec, kpsec), nsec
10 common /ac1/ nac, ipp(kac), nfconcc(kac), ifconcc(kfconcc, kac)
11 common /ac2/ vfconcc(kfconcc, kgl, kac), nfvaoc(kac)
12 common /ac3/ ifvaoc(kfvaoc, kac), itfvaoc(kfvaoc, 2, kac)
13 common /ac4/ vfvaoc(kfvaoc, 4, kac), nomeac(kac)
14 common /rotulas/ nrotula, irotula(krotula), rotula(krotula, kgl*2)
15 common /matrizregidezelementar/ ke(kgl*2, kgl*2), iel
16 common /glogal/ kg(knos*kgl, knos*kgl)
17 common /vectorfelem/ fe(kgl*2), iac
18 common /fglogal/ fg(kgl*knos, kac)
19 common /numeroglnoselem/ ngl, nnoselem, nsecpg
20 common /deslocamentos/ u(knos*kgl, kac)
21 common /combinacoes/ icomb(kcomb), ncomb, vcomb(kcomb, kac)
22 common /assentamentos/ nass(kac), iass(kass, kac), vass(kass, 2, kac)
23
24 real*8 cd, mat, psec, vfconcc, vfvaoc, ke, kg, fe, fg, u, vcomb, vass
25
26 integer nnos, inos, nelelem, ielem, icd, imat, nmat, napoio, iapoio, apoio,
27         isec, nsec, nac, ipp, nfconcc, ifconcc, nfvaoc, ifvaoc, itfvaoc, nrotula,
28         irotula, rotula, iel, iac, ngl, nnoselem, nsecpg, ncomb, icomb, nsecb
29         , nass, iass
30 character*1 cod
31 character*45 cabecalho, nomeac
32 character*20 fich
33 character*24 fl
34
35 ngl=3
36 nnoselem=2
37 nsecpg=40
38 nsecb=5

```

Figura 1.3 – Interface Visual do Programa Fortran.

Os resultados obtidos pelo programa serão apresentados por meio de ficheiros (texto), que podem ser de leitura e interpretação directa pelo utilizador. O programa gera, automaticamente, ficheiros com informação da estrutura e dos resultados para um pacote gráfico, o GID (figura 1.4), que permite a sua visualização gráfica.

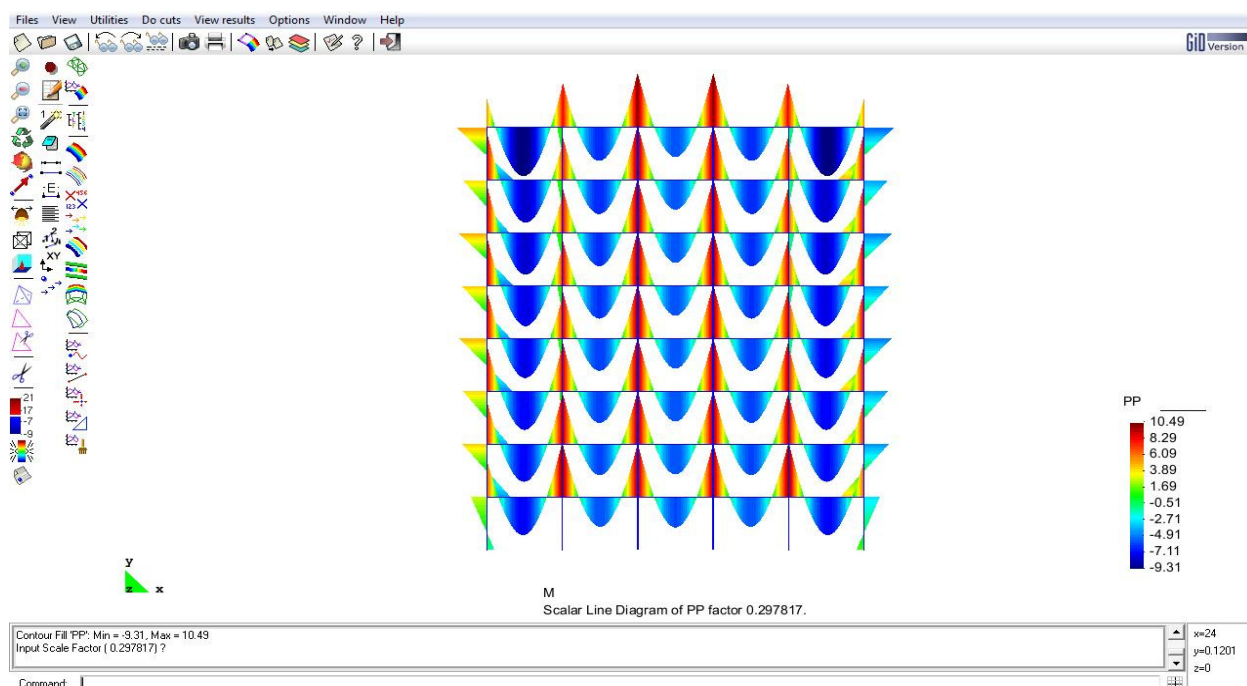


Figura 1.4 – Interface gráfica do Programa GID.

Para validação dos resultados obtidos com o programa desenvolvido recorreu-se à comparação desses resultados com os obtidos por um programa comercial devidamente certificado. Foi utilizado o programa SAP2000 para a validação dos resultados.

### 1.3. ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

A presente dissertação foi organizada em **seis capítulos**, com o seguinte conteúdo:

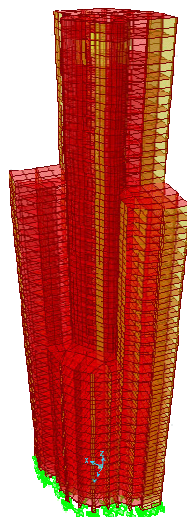
**Capítulo I – Introdução**, onde para além de expor o tema (Cálculo Automático de Estruturas e Análise Estrutural de Pórticos Planos utilizando o Método dos Elementos Finitos) são apresentados o âmbito e objectivos da dissertação e a sua organização esquemática por capítulos.

**Capítulo II – Enquadramento**, neste capítulo pretendeu-se enquadrar o tema ressaltando a importância que o desenvolvimento da Mecânica Estrutural e do Cálculo Numérico de Estruturas teve para a Análise Estrutural. Optou-se, ainda, neste capítulo, e porque as estruturas em betão armado são um exemplo corrente onde é utilizado o programa de cálculo desenvolvido, fazer referência à sua evolução histórica (figura 1.5) e à importância que tem na construção civil.



**Figura 1.5** – Primeira estrutura em betão armado. Barco de Lambot, 1848 [Appleton, J., 2005].

**Capítulo III – Análise Matricial de Estruturas**, este capítulo tem como principal objectivo expor a Análise Matricial de Estruturas, como a técnica de modelação numérica (figura 1.6) que permite analisar qualquer tipo de estruturas, dando especial relevância ao Método dos Elementos Finitos.



**Figura 1.6** – Modelo Numérico de Elementos Finitos para análise de um edifício [s6].

Atendendo a que o Método dos Elementos Finitos é o método mais utilizado na Análise Estrutural, optou-se por fazer uma breve resenha histórica, na qual se relata o seu aparecimento, o seu desenvolvimento até aos dias de hoje e as principais equações utilizadas na Teoria da Elasticidade.

**Capítulo IV – Programa de Cálculo Automático**, aqui o objectivo é explicar como se processam e quais as rotinas desenvolvidas no programa de cálculo automático que foi elaborado.

**Capítulo V – Validação do Programa de Cálculo Automático**, neste capítulo é apresentado o estudo de uma estrutura (estrutura porticada em betão armado composta por pilares e vigas) para validação dos resultados obtidos, através da comparação com os obtidos pela utilização do SAP2000 e de uma referência bibliográfica.

**Capítulo VI – Conclusões Finais e Perspectivas Futuras**, a dissertação termina com a exposição das considerações finais que se podem retirar do trabalho realizado e das perspectivas de desenvolvimento futuro.

**Anexo** – Manual do Utilizador

# Capítulo II

## ENQUADRAMENTO

### 2.1. INTRODUÇÃO

Desde sempre, a maior preocupação do Engenheiro Civil de Estruturas é conseguir dar resposta satisfatória a questões fundamentais tais como: prever o comportamento de uma estrutura quando sujeita ao conjunto de todas as acções (que passa pela correcta modelação das acções, da geometria, do comportamento do material, etc) e definir os critérios para dimensionar os vários componentes da estrutura, de forma a garantir a sua segurança.

Para conseguir dar resposta a estas e outras questões, a Mecânica Estrutural tem recorrido a modelos de cálculo que permitem impor condições e estabelecer relações entre os dados (a geometria da estrutura, a solicitação, as propriedades dos materiais) e os resultados (esforços, tensões e deslocamentos).

Por esse motivo, o estudo de qualquer estrutura consiste em, de acordo com critérios definidos pelo autor do estudo, determinar a sua geometria e quais os materiais a utilizar de forma a garantir que se cumpram todos os requisitos de economia, funcionalidade, impacto ambiental e, principalmente, de segurança que se pretende que toda e qualquer estrutura apresente.

Inicialmente, todos os problemas da Mecânica Estrutural eram resolvidos de modo empírico para as diversas formas estruturais que se poderiam verificar, mas, com o decorrer dos tempos e com a evolução do conhecimento, tem-se vindo a desenvolver modelos de cálculo estrutural que permitem obter soluções para todos os tipos de problemas que podem surgir no estudo de uma estrutura, garantindo uma maior segurança nos resultados obtidos.

No entanto, esta generalização do cálculo estrutural pode ser perigosa porque permite obter resultados para qualquer situação sem validação prévia, nem obriga a que o utilizador tenha conhecimentos de análise estrutural, aceitando, por isso, os resultados como correctos não existindo espírito crítico.

### 2.2. DESENVOLVIMENTO E EVOLUÇÃO DO CÁLCULO ESTRUTURAL

O comportamento de qualquer estrutura é influenciado por diversos factores tais como a geometria, o número e tipo de ligações que apresenta, os materiais constituintes, as forças, as acções impostas e as ligações ao exterior.

Perante esta problemática pode-se dizer que na Análise Estrutural, a geometria, as propriedades dos materiais e as condições de fronteira são os dados do problema, pretendendo-se calcular a resposta da estrutura às acções consideradas.

Inicialmente os problemas eram solucionados de forma empírica e com resultados pouco exactos. Eram admitidas hipóteses simplificativas que estão do lado da segurança e que podem onerar o custo das estruturas. Com o decorrer dos tempos, após o aparecimento das primeiras formulações matemáticas para resolução dos diferentes problemas da Mecânica Estrutural, foram desenvolvidos modelos de cálculo automático estrutural que vieram permitir a obtenção de soluções mais exactas.

Foi com Galileu, num estudo datado de 1638, de avaliação da carga limite de uma viga em consola, que surgiram as primeiras formulações matemáticas para os problemas da Mecânica Estrutural e que começaram a desenvolver-se esforços para criação de modelos de cálculo estrutural que permitissem soluções mais exactas para cada tipo de problema.

Galileu idealizou alguns modelos estruturais e submeteu-os a vários carregamentos com a finalidade de estudar as tensões que, devido a esses carregamentos, actuariam sobre a estrutura. Com as suas experiências Galileu concluiu que a resistência de uma barra é proporcional à sua área de secção transversal e que, se fizesse estruturas geometricamente similares, mas com comprimentos cada vez maiores, estas ficariam cada vez menos resistentes [Oliveira, C. R., 2008].

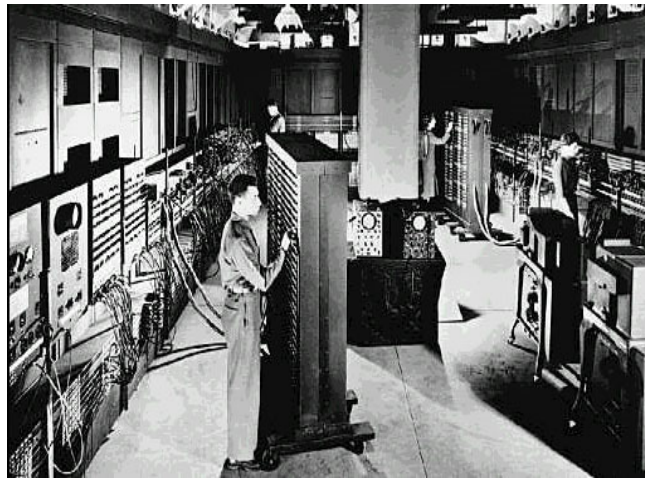
Posteriormente, com os trabalhos de Hooke e Mariotte, no século XVII, surgiram os fundamentos que estão na base da Teoria da Elasticidade. Esta teoria viria a sofrer um grande desenvolvimento durante o século XIX e foi fortemente implementada no século XX, sendo ainda hoje a mais utilizada no cálculo estrutural.

Antes da sua implementação o cálculo estrutural baseava-se tradicionalmente na hipótese de comportamento linear dos materiais, no entanto, a necessidade de conseguir estruturas mais económicas e mais seguras levou a que se considerasse também o comportamento não linear dos materiais (mais realista).

Tudo isto justifica o esforço feito nos últimos anos para o desenvolvimento e implementação de técnicas informáticas cada vez mais desenvolvidas, não só para o cálculo de estruturas cujos materiais tenham um comportamento elástico linear, mas, também, para o caso de estruturas com um comportamento não linear.

Esse desenvolvimento deve-se, sobretudo, à possibilidade de utilização de computadores como instrumentos de apoio. Antes do desenvolvimento dos computadores pessoais de grande potência, os recursos que os Engenheiros dispunham para o cálculo estrutural eram bastante limitados e só após a evolução dos computadores portáteis e, conseqüentemente, o desenvolvimento dos softwares de cálculo estrutural disponíveis, foi

possível o estudo de estruturas com um grau crescente de complexidade e com maior precisão.



**Figura 2.1** – Primeiro computador electrónico criado por John W. Mauchly e J. Prester Eckert Jr [s7].

Hoje em dia, o cálculo estrutural usufrui em pleno do desenvolvimento informático ao dispor de quase toda a sociedade e a sua capacidade de resolução de sistemas de equações é cada vez maior, permitindo o uso de métodos de cálculo impraticáveis até há poucos anos.

No entanto, e porque cada vez mais existem empresas especializadas na criação massiva de programas de cálculo estrutural, nem tudo é benéfico. Com a existência destes programas o utilizador tende a não realizar qualquer tipo de validação e a confiar plenamente nos resultados que lhe são apresentados.

O maior risco, da mera utilização dos programas de cálculo estrutural, é o utilizador não se aperceber da incorrecta inserção dos dados que caracterizam a estrutura ou não ter em atenção todos os condicionalismos que sobre ela actuam e com isso por em causa a validade dos resultados para a obra em estudo.

Devido à competitividade de mercado e à criação dos mais diversos programas de cálculo, as empresas podem relegar para um plano secundário aquilo que para a Engenharia Civil será o mais importante, as metodologias de cálculo estrutural, e preocupar-se apenas com a criação de programas de fácil utilização, que nada mais são do que programas onde o utilizador apenas se limita a colocar valores e ler os resultados.

Para evitar reparações ou, mais grave ainda, acidentes em estruturas acabadas de construir um Engenheiro deve conseguir fazer muito mais do que inserir valores e ler resultados, deve saber calculá-los e compará-los com os programas que utiliza.

A título de exemplo, em 22 de Fevereiro de 1998, parte do Edifício Palace II, no Bairro da Tijuca, no Brasil, desabou e fez 8 mortes. Após peritagem, concluiu-se que o desabamento teve como causa principal um erro no cálculo no dimensionamento dos pilares e graves falhas no seu revestimento (figura 2.2).



**Figura 2.2** - Desabamento do Edifício Palace II, no Bairro da Tijuca, no Brasil [s8].

### **2.3. EVOLUÇÃO DA CONSTRUÇÃO EM ESTRUTURAS DE BETÃO**

O betão, conjuntamente com as argamassas, é utilizado há milhares de anos como principal material de construção. Se inicialmente os sistemas construtivos usuais eram as estruturas em madeira, pois esta era muito abundante, a verdade é que, como esta apresentava grandes problemas de durabilidade e combustão, desde cedo começou-se a tentar produzir um material que permitisse afastar esses problemas.

O betão e as argamassas, produzidos pela mistura de cimento, areia, cascalho e água, vieram substituir a utilização de madeira e passaram a ser o material utilizado na construção de pavimentos, paredes e fundações.

Nas antigas civilizações, principalmente com os Romanos, iniciou-se a exploração do potencial destes materiais e começaram a ser utilizados na construção de casas, templos, aquedutos, barragens e pontes que resistiram até aos dias de hoje (figura 2.3 e 2.4).



**Figura 2.3** - Ponte Romana de Chaves – Construída entre fins do Século I e o início do Século II [Appleton, J., 2005].



**Figura 2.4** - Vestígios da Barragem Romana de Belas – Construída no Século III [Appleton, J., 2005].

Alguns autores defendem que os Romanos, com vontade de aperfeiçoar a utilização do betão, fizeram tentativas de utilizar o bronze como armaduras, mas devido aos diferentes coeficientes de dilatação térmica do bronze e do betão, logo verificaram que não seria possível esta combinação.

A ideia que os Romanos tentaram desenvolver de forma intuitiva, de associar um material com boa resistência à compressão, mas com uma pequena resistência à tracção, com um outro material que resista bem à tracção era, como actualmente se sabe, correcta.

O betão armado é hoje em dia o material utilizado para a construção das mais diversas estruturas, sendo composto por elementos de aço que ficam envolvidos por betão. Com esta associação (betão e aço) consegue-se, desenvolver um material que resista bem a tensões de compressão (betão) e de tracção (aço).

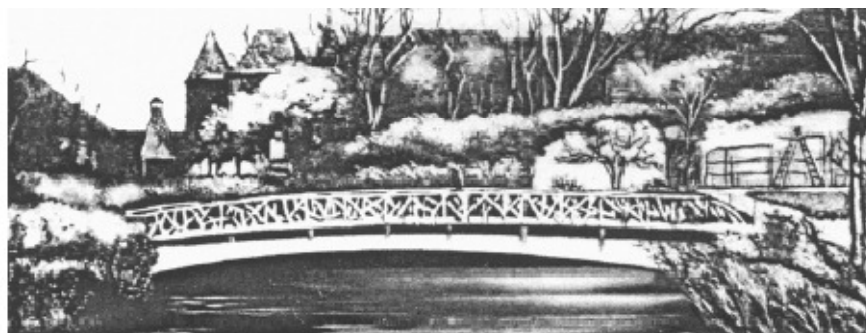
Até ao século XVIII, o betão tem uma utilização limitada às fundações e ao interior de paredes de alvenaria e só apenas com o desenvolvimento do estudo das propriedades do

cimento, com o aumento da sua produção e com a aprovação da patente do cimento Portland, apresentada por Joseph Asplin, em 1824, se começou a utilizar o betão em pavimentos térreos, tectos e paredes.

O sucesso do cimento Portland deveu-se sobretudo à sua utilização, após um grave acidente, que aconteceu na construção de um túnel sob o Rio Tamisa, em Londres. Durante a construção do referido túnel o tecto desabou e, para além das mortes que se verificaram, provocou uma enorme inundação que levou à necessidade de drenagem do túnel e à reconstrução da parte danificada recorrendo ao cimento Portland, que substituiu o Cimento Romano (patenteado em 1796 por James Parker), que estava a ser utilizado.

Após o desenvolvimento verificado na indústria do cimento, as primeiras referências que são conhecidas de construções em betão armado datam de 1848, quando o agricultor francês, Jean-Louis-Lambot, que construía tanques de cimento reforçado com ferros, construiu pequenos barcos, do tipo canoas, em ferrocimento. Um desses barcos foi apresentado na Exposição Universal de Paris de 1855 e encontra-se preservado no Museu de Brignoles, em França [Appleton, J., 2005].

Posteriormente, em 1849, o também francês Joseph Monier, jardineiro do Palácio de Versalhes e comerciante de plantas ornamentais, vislumbrou a possibilidade de substituir os vasos de madeira e cerâmica, que apodreciam e quebravam facilmente, por vasos feitos com betão armado. Motivado pelo sucesso que obteve, Joseph Monier, iniciou a produção de vários artefactos e estruturas em betão armado das quais se destaca a construção, da primeira ponte conhecida em betão armado, em 1875, no Castelo de Chazelet em França (figura 2.5).

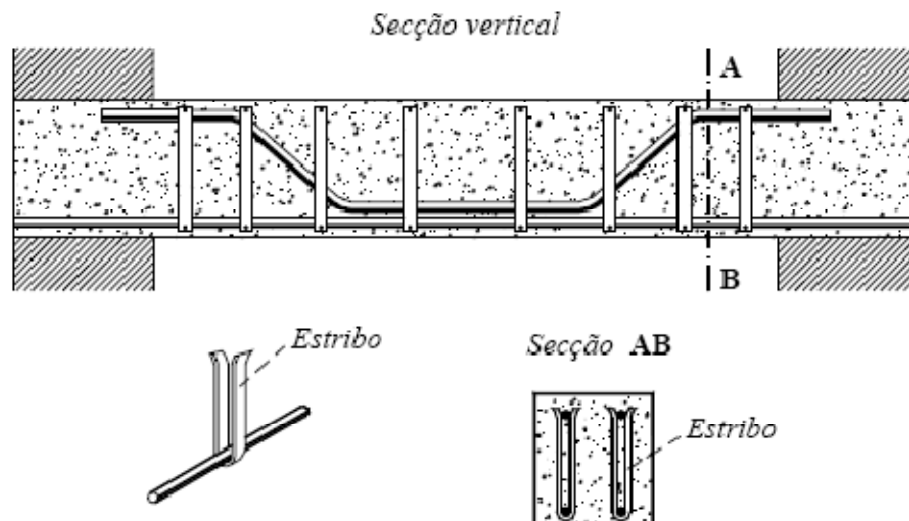


**Figura 2.5** – Primeira Ponte conhecida em Betão Armado [Appleton, J., 2005].

Apesar da grande contribuição de Monier para o aparecimento do betão armado, reconhece-se que o seu desenvolvimento foi impulsionado na Alemanha e na Áustria, a partir de 1880, graças aos estudos e às obras realizadas pela firma Wayss.

Em 1892, o construtor francês Hennebique, obteve uma das primeiras patentes para as estruturas de betão armado, da qual se destaca o Sistema Hennebique, que veio a ser aplicado na construção em diversos países.

Em traços gerais o Sistema Hennebique é caracterizado pela introdução de estribos (constituídos por chapas de aço de secção rectangular dobrada em forma de U) nas vigas e pela ligação dos varões traccionados à zona de betão comprimido (figura 2.6).



**Figura 2.6** – Exemplo de Vigas do Sistema Hennebique [Appleton, J., 2005].

Em Portugal, como exemplo de construção mediante a utilização do Sistema Hennebique, pode-se referir a ponte sobre o Rio Vouga, Ponte Luiz Bandeira de Sejães, na EN333-3, construída em 1907 (figura 2.7).



**Figura 2.7** – Ponte Luiz da Bandeira de Sejães [Appleton, J., 2005].

Depois da 2ª Guerra Mundial (1939-1945), a grande necessidade surgida na reconstituição dos edifícios danificados contribuiu para o aumento e para a adopção sistemática do tipo de estrutura actualmente utilizada na construção de edifícios, com fundações, pilares, vigas e lages de betão armado, que compõem o esqueleto da estrutura e que são complementadas por panos de enchimentos, as paredes.

A partir do período pós guerra, as construções em betão armado foram evoluindo, mas devido ao aumento da construção e à especulação imobiliária começou a construir-se cada vez mais rápido e barato com o objectivo exclusivo de lucro, originando por vezes algumas construções de má qualidade.

Em Portugal, as primeiras obras em betão armado apareceram por volta do ano de 1896 e delas se destaca a reconstrução a cargo do francês Hennebique de uma antiga fábrica de moagem, localizada na margem esquerda do Rio Tejo, a Fábrica de Moagem de Trigo, do Caramujo [Appleton, J., 2005].

## 2.4. CONCLUSÃO

Perante a dificuldade de obtenção de soluções exactas na modelação do comportamento de uma estrutura, justifica-se o caminho percorrido e os estudos realizados para a criação e desenvolvimento de métodos de cálculo mais eficientes que permitissem, ao seu utilizador, a obtenção de soluções aproximadas, mas cada vez mais exactas e mais fiáveis.

Foi neste conceito que surgiram os métodos numéricos para cálculo estrutural onde, através da simulação numérica do comportamento de uma estrutura, da determinação dos campos de deslocamentos, das extensões e das tensões, consegue-se atingir soluções mais aproximadas da realidade.

A utilização de métodos numéricos para o cálculo estrutural, apenas foi possível devido ao desenvolvimento da capacidade computacional e isso, apesar do reconhecimento de utilidade que traz para a análise do comportamento de uma determinada estrutura, pode nem sempre pode ser benéfico. O importante é que, a par da utilização dos métodos de análise estrutural disponíveis, que apresentam, sem dúvida, grande utilidade, um Engenheiro adquira conhecimentos suficientes para validar esses resultados.

Neste capítulo foram abordadas as estruturas em betão armado, por serem um dos principais tipos de estruturas onde o programa desenvolvido pode ser aplicado.

Como qualquer método, o betão sofreu uma evolução gradual ao longo dos séculos, começando no período romano a sua utilização em construções que se mantiveram até aos dias de hoje.

Verificou-se que o desenvolvimento do cimento e o aparecimento, em França, das primeiras construções em betão armado, permitiram a sua evolução para o conceito que hoje se conhece e para a sua utilização no mais variado tipo de construções.

## Capítulo III

### ANÁLISE MATRICIAL DE ESTRUTURAS

#### 3.1. INTRODUÇÃO

No seguimento do exposto no capítulo anterior pode-se concluir que a análise matricial de estruturas é uma técnica de modelação numérica que permite analisar qualquer tipo de estruturas (reticuladas e não reticuladas), através de uma formulação matricial do problema, com o objectivo de determinar os efeitos das acções sobre uma estrutura e, consequentemente, a verificação da sua segurança.

O comportamento de uma estrutura contínua, seja ela uma estrutura reticulada, onde se enquadram as vigas, as treliças, as grelhas e os pórticos, ou uma estrutura não reticulada, as lajes, cascas ou sólidos, pode sempre ser estudado através da decomposição do seu modelo estrutural.

A decomposição dos vários elementos que constituem o modelo estrutural permite o estudo isolado de cada um desses elementos, sendo as suas propriedades modeladas em matrizes que, após um conjunto de operações numéricas, permitem reconstituir o comportamento global da estrutura.

Os métodos de análise estrutural podem ser divididos em dois grupos: métodos analíticos e métodos numéricos.

Os métodos analíticos são métodos mais limitados, utilizados para situações relativamente simples, como por exemplo domínios com formas geométricas elementares. Já os métodos numéricos, onde se insere a Análise Matricial de Estruturas, são utilizados para a resolução de problemas mais complexos da Engenharia e podem dividir-se em dois tipos: as soluções numéricas de equações diferenciais para deslocamentos ou tensões e os métodos matriciais baseados na idealização discreta em elementos estruturais.

Hoje em dia, apesar de existirem problemas em que se utilizam outros métodos numéricos tais como o Método das Diferenças Finitas, o Método dos Elementos de Fronteira e o Método dos Elementos Discretos, o Método dos Elementos Finitos, na formulação em deslocamentos, escolhido para o presente trabalho, é o mais utilizado na resolução dos problemas de Mecânica Estrutural.

### 3.2. TIPO DE ANÁLISE

A aplicação e formulação do Método dos Elementos Finitos depende das simplificações inerentes a cada tipo de estrutura. Por isso, quando se pretende resolver um problema de análise estrutural, é necessário conhecer o tipo estrutural relativamente à geometria, ao modelo do material constituinte e às acções aplicadas.

Em relação às acções aplicadas sobre a estrutura pode efectuar-se uma análise estática ou dinâmica. As acções são dinâmicas, devendo ser consideradas as forças de inércia associadas às acelerações. Perante tal afirmação seria de esperar que a análise de uma estrutura seria sempre feita considerando os efeitos dinâmicos, porém, em muitos casos, é razoável considerar que as acções são estáticas, ou seja, que são aplicadas de um modo suficientemente lento, tornando desprezáveis as forças de inércia, ao que se dá a designação de análise estática [Azevedo, A. F. M., 2003].

Na dissertação serão apenas considerados problemas em que se supõem válidas as simplificações inerentes a uma análise estática.

No que diz respeito à geometria da estrutura e ao material constituinte pode-se considerar uma análise linear ou não linear de ambos.

Numa estrutura sólida é usual considerar a hipótese de que os deslocamentos, provocados pelas acções exteriores, são muito pequenos quando comparados com as dimensões dos componentes da estrutura. Para além disso, admite-se que a distribuição dos esforços e tensões não é influenciada por modificações da geometria inicial da estrutura que se mantém indeformada.

Assim, se no estudo de uma estrutura for considerada a hipótese de uma geometria inicial indeformada estamos perante uma análise linear geométrica, caso contrário perante uma análise não linear geométrica.

Ao nível do material que constitui a estrutura podem adoptar-se algumas hipóteses, que variam consoante o material constituinte tenha um comportamento isotrópico, ortotrópico ou anisotrópico e a relação entre tensões e extensões seja elástica linear ou não linear.

Para este trabalho foi considerada uma análise linear geométrica e admitido um material isotrópico com um comportamento elástico linear.

A dissertação irá incidir sobre estruturas reticuladas planas, que são constituídas por barras, cujas dimensões transversais são muito menores que o comprimento do respectivo eixo.

### 3.3. PRINCÍPIOS BÁSICOS DA TEORIA DA ELASTICIDADE

A Teoria da Elasticidade estabelece as equações diferenciais que devem satisfazer os três campos referenciados (deslocamentos, tensões e extensões, sujeitas a determinadas acções) sendo apresentadas de seguida as equações fundamentais desta teoria.

De referir que as formulações e as notações apresentadas são referentes a um estado de equilíbrio tridimensional dos sólidos.

#### 3.3.1. Noção de Campo de Tensões, Deformações e Deslocamentos

Considera-se um corpo deformável e associa-se a esse corpo um referencial cartesiano. Qualquer ponto genérico P pertencente a esse corpo será definido em notação indicial, pelas coordenadas  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$ , que tem a seguinte expressão:

$$P = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

ou, de forma resumida,

$$P = \{x_i\}; (i = 1, 2, 3) \quad (3.2)$$

Por acção de uma solicitação o corpo deforma-se, instalando-se no domínio do corpo um campo de deslocamentos. Em cada ponto da estrutura, o deslocamento será caracterizado pelo vector dos deslocamentos ( $\underline{u}$ ) que poderá também expressar as suas componentes em notação indicial, pela seguinte expressão:

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

ou, de uma forma mais resumida pela expressão,

$$\underline{u} = \{u_i\}; (i = 1, 2, 3) \quad (3.4)$$

Simultaneamente fica instalado um campo de deformações, representado pelo tensor das extensões, que é um tensor de 2ª ordem simétrico, onde o estado de deformação, em qualquer ponto, fica perfeitamente definido se forem conhecidos os três vectores de extensão em fibras mutuamente ortogonais. Mais uma vez as suas componentes poderão ser apresentadas em notação matricial da seguinte forma:

$$\underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

ou, em notação inicial,

$$\underline{\varepsilon} = \varepsilon_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (3.6)$$

Uma vez que a matriz é simétrica, pode-se verificar que:

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}, \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} \text{ e } \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} \quad (3.7)$$

O significado de cada uma das componentes do tensor das deformações é o seguinte:

- $\varepsilon_{11}$  – extensão normal numa fibra com a direcção  $x_1$ ;
- $\varepsilon_{22}$  – extensão normal numa fibra com a direcção  $x_2$ ;
- $\varepsilon_{33}$  – extensão normal numa fibra com a direcção  $x_3$ ;
- $\varepsilon_{12}$  – deformação distorcional na direcção  $x_2$  de uma fibra com a direcção  $x_1$ ;
- $\varepsilon_{13}$  – deformação distorcional na direcção  $x_3$  de uma fibra com a direcção  $x_1$ ;
- $\varepsilon_{23}$  – deformação distorcional na direcção  $x_3$  de uma fibra com a direcção  $x_2$ ;

Muitas vezes é conveniente utilizar a notação vectorial para indicar o tensor das extensões. A simplificação (equação 3.8) é possível dada a simetria do tensor, por isso, basta incluir apenas 6 escalares (independentes) para definir completamente o estado de deformação num ponto (equação 3.8).

$$\underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

De referir que os termos  $\gamma_{23}$ ,  $\gamma_{31}$  e  $\gamma_{12}$  representam as distorções, podendo ser determinadas pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \gamma_{23} &= 2 \times \varepsilon_{23} \\ \gamma_{31} &= 2 \times \varepsilon_{31} \\ \gamma_{12} &= 2 \times \varepsilon_{12} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Também fica instalado no corpo um campo de tensões. O estado de tensão em qualquer ponto fica perfeitamente definido se forem conhecidos três vectores de tensão em planos mutuamente perpendiculares. Assim sendo, o estado de tensão é representado pelo tensor das tensões, que é um tensor de 2ª ordem simétrico, e as suas componentes poderão ser apresentadas em notação matricial:

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

ou, em notação inicial,

$$\underline{\sigma} = \sigma_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (3.11)$$

Atendendo que a matriz é simétrica, por equilíbrio de momentos do corpo livre, verifica-se que:

$$\sigma_{12} = \sigma_{21}, \sigma_{13} = \sigma_{31} \text{ e } \sigma_{23} = \sigma_{32} \quad (3.12)$$

O significado de cada uma das componentes do tensor das tensões é o seguinte:

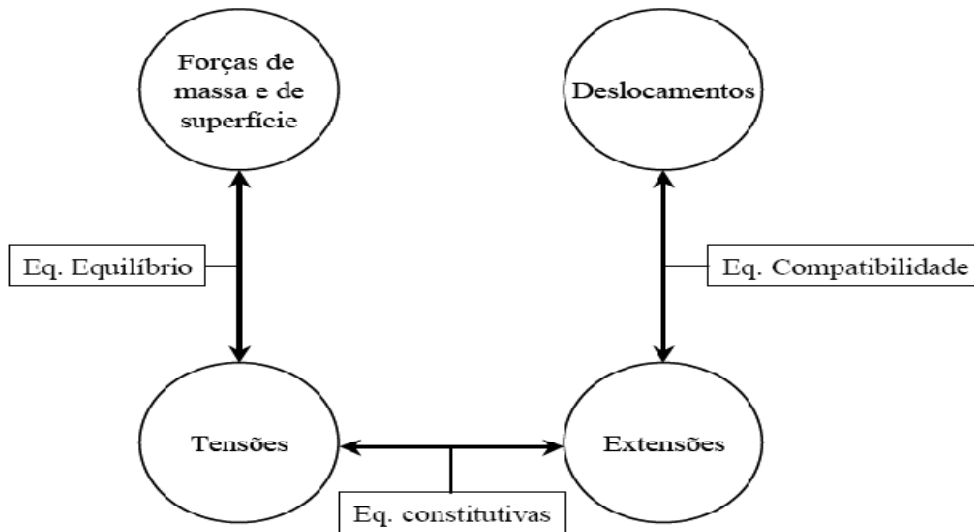
- $\sigma_{11}$  – tensão normal numa faceta perpendicular ao eixo  $x_1$ ;
- $\sigma_{22}$  – tensão normal numa faceta perpendicular ao eixo  $x_2$ ;
- $\sigma_{33}$  – tensão normal numa faceta perpendicular ao eixo  $x_3$ ;
- $\sigma_{12}$  – tensão tangencial (segundo  $x_2$ ) numa faceta perpendicular ao eixo  $x_1$ ;
- $\sigma_{13}$  – tensão tangencial (segundo  $x_3$ ) numa faceta perpendicular ao eixo  $x_1$ ;
- $\sigma_{21}$  – tensão tangencial (segundo  $x_1$ ) numa faceta perpendicular ao eixo  $x_2$ ;
- $\sigma_{23}$  – tensão tangencial (segundo  $x_3$ ) numa faceta perpendicular ao eixo  $x_2$ ;
- $\sigma_{31}$  – tensão tangencial (segundo  $x_1$ ) numa faceta perpendicular ao eixo  $x_3$ ;
- $\sigma_{32}$  – tensão tangencial (segundo  $x_2$ ) numa faceta perpendicular ao eixo  $x_3$ ;

É também usual utilizar a notação vectorial para indicar o tensor das tensões. A simplificação (equação 3.13) é possível dada a simetria do tensor das tenções, ou seja, basta incluir apenas 6 escalares (independentes) para definir completamente o estado de tensão num ponto:

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

### 3.3.2. Equações Fundamentais da Mecânica dos Sólidos

Na análise de uma estrutura as diversas variáveis envolvidas (forças, tensões, extensões e deslocamentos) podem ser correlacionadas, em cada ponto e a cada instante, através das equações fundamentais da mecânica dos sólidos: as equações de equilíbrio, equações de compatibilidade e equações constitutivas (figura 3.1).



**Figura 3.1** - Variáveis e equações fundamentais da Mecânica Estrutural (equações a verificar em cada ponto de uma estrutura e em cada instante) [Oliveira, S.; Castro, B. T.; Gomes, J.P., ].

As equações de equilíbrio permitem em cada ponto do interior do domínio, correlacionar o tensor das tensões com as forças mássicas. No caso geral tridimensional estas equações assumem a seguinte forma, em notação indicial:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_j = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (3.14)$$

$\sigma_{ij}$  – tensão na faceta  $i$ , segundo a direcção  $j$

$X_j$  – força mássica que actua segundo a direcção  $j$

ou, resumidamente,

$$\underline{L}^T \underline{\sigma} + \underline{X} = \underline{0} \quad (3.15)$$

$\underline{L}$  – operador diferencial transposto

$\underline{\sigma}^T$  – vector do estado de tensão

$\underline{X}$  – vector das forças mássicas

A equação 3.15 pode apresentar-se também na fórmula desenvolvida (matricial):

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.16)$$

As equações de compatibilidade relacionam as extensões com os deslocamentos. No caso geral tridimensional, e na hipótese dos pequenos deslocamentos, estas equações assumem a forma:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (3.17)$$

$\varepsilon_{ij}$  – extensão segundo a direcção j de uma fibra com a direcção i

$u_i$  – deslocamento segundo a direcção i

$u_j$  – deslocamento segundo a direcção j

podendo, rescrever-se a equação 3.17 de forma mais sintetizada:

$$\underline{\varepsilon} = \underline{L} \underline{u} \quad (3.18)$$

$\underline{\varepsilon}$  – vector das extensões

$\underline{L}$  – operador diferencial

$\underline{u}$  – vector dos deslocamentos

A equação 3.18 pode ser também apresentada na fórmula desenvolvida (matricial):

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

As equações constitutivas ou equação de Hooke generalizada permitem o relacionamento das tensões com as extensões e no caso geral tridimensional, estas equações podem assumir a forma:

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \times \underline{\varepsilon} \quad (3.20)$$

$\underline{\sigma}$  – vector do estado de tensão

$\underline{D}$  – matriz de elasticidade

$\underline{\varepsilon}$  – vector do estado de deformação

As equações apresentadas, para um elemento tridimensional, constituem um sistema de 15 equações diferenciais a 15 incógnitas (6 valores de tensão, 6 de extensão e 3 de deslocamento).

A obtenção de soluções analíticas para estas equações só é possível para problemas elementares. Para os outros tipos de problemas é necessário recorrer aos métodos numéricos já anteriormente referidos.

### 3.4. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

#### 3.4.1. Breve Resenha Histórica do Método dos Elementos Finitos

Antes do aparecimento do Método dos Elementos Finitos a análise dos meios contínuos era realizada pela resolução directa dos sistemas de equações das derivadas parciais, tendo em conta as condições de fronteira, através das séries de Fourier.

Como as séries de Fourier eram apenas aplicadas a meios contínuos de geometria simples, surgiu o Método das Diferenças Finitas que, embora necessitasse da resolução de complexos sistemas de equações, permitia a substituição das derivadas exactas por aproximadas. Posteriormente, na sequência do aperfeiçoamento do Método das Diferenças Finitas surgiu, nos anos de 40 e 50, para facilitar a análise matricial de modelos reticulados, o Método dos Elementos Finitos [Azevedo, A. F. M., 2003].

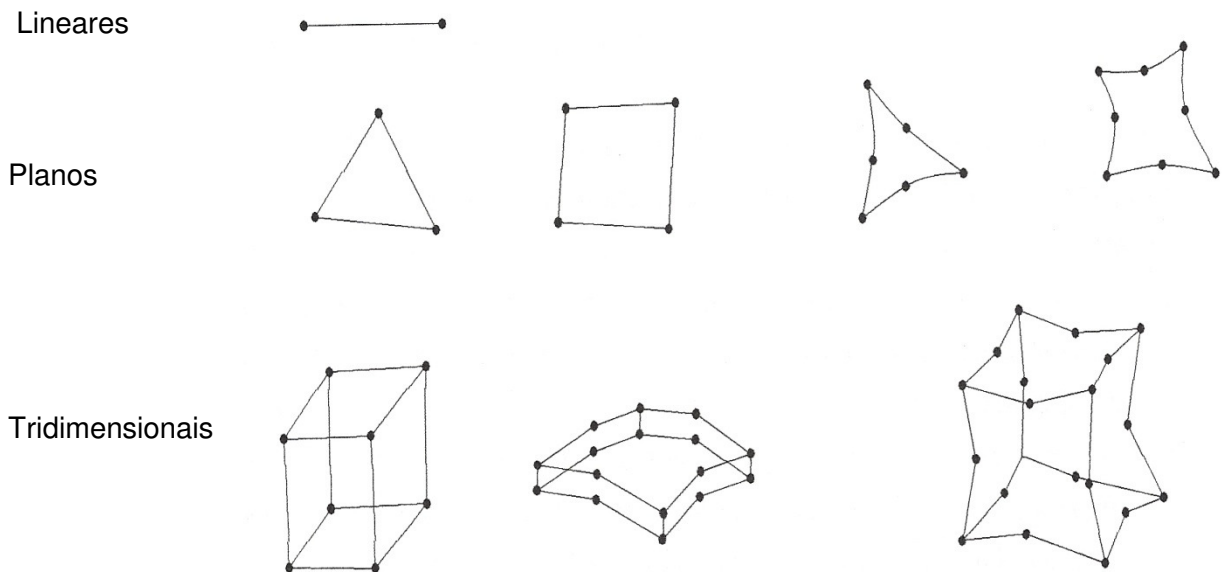
As primeiras aplicações que se conhecem foram concebidas por engenheiros aeronáuticos para análise da distribuição de tensões em chapas de asa de avião. A sua formulação pioneira foi tratada, por Argyris e Kelsey em 1955 (republicada em 1960) e por Turner, Clough Martin e Topp (1956) [Soriano, H. L., 2003].

De acordo com vários autores, que tem pesquisado este tema, o termo “elementos finitos” foi originalmente empregue pelo Engenheiro de Estruturas, da Universidade da Califórnia, Ray William Clough Jr., por volta de 1960, no artigo que publicou “The Finite Element Method in plane stress analysis” [Azevedo, A. F. M., 2003].

Apesar da dificuldade encontrada em definir a data exacta em que o Método dos Elementos Finitos passou a ser utilizado, é unânime aceitar que o seu desenvolvimento e principais características que actualmente lhe são conhecidas aconteceram no final da década de 60, início da década de 70 e que chegou à generalidade dos projectistas de estruturas, no final da década de 80, início da década de 90, devido ao desenvolvimento dos computadores pessoais que se verificou nessa altura.

O desenvolvimento dos computadores foi um acontecimento fundamental para a generalização na aplicação do Método dos Elementos Finitos pois, ao contrário do que acontecia com outros métodos utilizados antes do seu aparecimento, este tem maior utilidade prática se o seu utilizador tiver ao seu dispor um computador. A necessidade de se utilizar um computador prende-se com a quantidade de cálculos que são necessários efectuar para compor e resolver os sistemas de equações lineares.

A utilização do Método dos Elementos Finitos incidiu inicialmente sobre elementos simples (lineares), que exigiam menos capacidades computacionais e à medida que os computadores foram aumentando as suas potencialidades foram sendo utilizados elementos mais complexos (planos e tridimensionais) (figura 3.2).



**Figura 3.2** – Diferentes Tipos de Elementos Finitos.

O desenvolvimento e versatilidade demonstrada pelo Método dos Elementos Finitos originou a sua utilização generalizada, em detrimento dos restantes métodos existentes, sendo possível aplicar a qualquer tipo de estrutura, constituída pelos mais diversos tipos de materiais e sujeita a qualquer tipo de carregamento.

A ideia base do Método dos Elementos Finitos consiste em estudar o comportamento de cada elemento isolado que comporta um sistema, para posteriormente acoplar no estudo do sistema global. São, principalmente, os Engenheiros e os Matemáticos quem aplica este processo na resolução dos inúmeros problemas que se deparam na sua actividade.

Os Engenheiros de Estruturas aperfeiçoaram a metodologia desenvolvida e aplicaram-na aos problemas da Engenharia Civil, inicialmente, em estruturas de barras, e, posteriormente, em estruturas planas e tridimensionais.

Nas últimas décadas o Método dos Elementos Finitos tornou-se uma técnica eficiente, aplicável à análise de praticamente de qualquer tipo de problema (nomeadamente placas, cascas, barragens, estabilidade de taludes, fundações, escoamento de fluidos, dinâmica, etc).

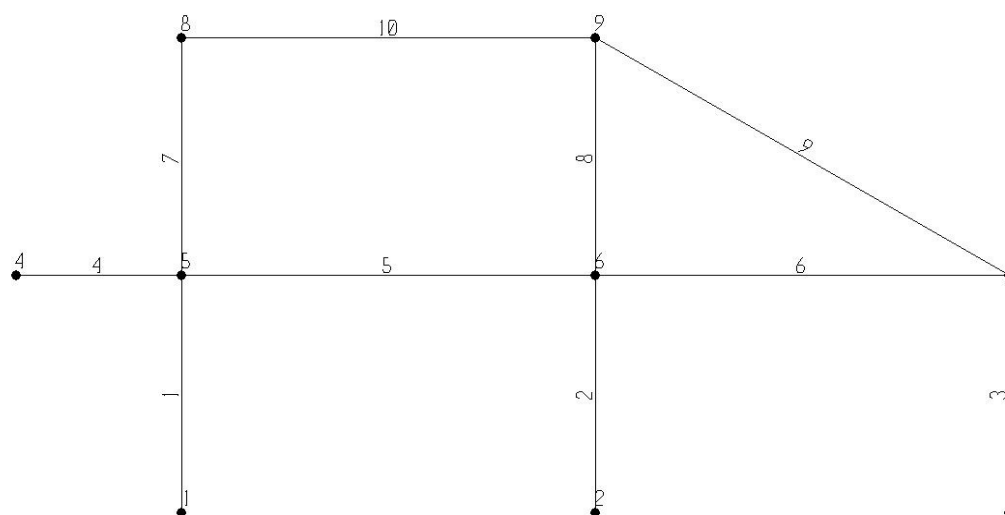
O Método dos Elementos Finitos foi introduzido em Portugal pelo Eng<sup>o</sup> José Oliveira Pedro (LNEC) e pelo Prof. Eduardo Arantes de Oliveira (LNEC/IST).

### 3.4.2. Definição do Método

Na generalidade dos problemas com que um Engenheiro Civil se depara, devido à sua maior complexidade geométrica, comportamento dos materiais e acções, não é possível determinar a solução analítica.

Normalmente, só é possível obter soluções analíticas para problemas considerados relativamente simples. Para situações mais complexas é sempre preciso recorrer a métodos numéricos que conduzam a soluções discretas (figura 3.3).

Em Engenharia Civil, mais concretamente na Engenharia de Estruturas, o Método dos Elementos Finitos, é cada vez mais utilizado para analisar praticamente qualquer tipo de problema estrutural.



**Figura 3.3** – Exemplo de discretização em elementos finitos de um pórtico plano, com elementos barra 2D.

Quanto maior for o número de elementos finitos em que se divide a estrutura, maior será a precisão da solução numérica obtida, tornando-se mais próxima de uma solução analítica.

Isso significa que, para obter uma solução mais rigorosa é necessário decompor o domínio da estrutura a analisar (discretização) no maior número de elementos finitos, composto de linhas ou superfícies imaginárias, que se encontram ligados por pontos (pontos nodais ou nós), de onde se obtêm os valores das incógnitas, formando este conjunto global uma malha de elementos finitos.

No Método de Elementos Finitos, formulado em deslocamentos, a principal incógnita são os deslocamentos, nos denominados pontos nodais. No interior de cada elemento, os valores dos campos de deslocamentos são calculados por interpolação dos seus valores nodais, através de funções de interpolação.

Para além de serem escolhidas funções de interpolação contínuas, para a discretização do campo de deslocamentos, a compatibilização de deslocamentos entre elementos é realizada ao nível dos seus nós, ou seja, um deslocamento dado num determinado nó é acompanhado continuamente por todos os elementos que são adjacentes a esse nó.

A metodologia exposta, conhecida como a formulação em deslocamentos do Método dos Elementos Finitos, apesar de existir também a formulação em tensões (elementos de equilíbrio) e a formulação mista (elementos híbridos/mistos), foi a utilizada na dissertação.

### **3.4.3. Campos de Aplicação**

O Método dos Elementos Finitos é um método numérico aplicado não só à resolução das equações diferenciais da Teoria da Elasticidade, mas também à resolução dos mais diversos problemas existentes em todas as áreas da Engenharia.

Nos problemas da Teoria da Elasticidade as variáveis físicas são os deslocamentos, as extensões e tensões, relacionadas pelas equações de equilíbrio, compatibilidade e constitutivas.

Nos problemas da condução de calor, onde a variável utilizada é a temperatura, o Método dos Elementos Finitos permite estudar a distribuição da temperatura no interior de uma estrutura para, por exemplo, definir a acção térmica a considerar no estudo de um estado de tensão.

Nos problemas de escoamentos em meios porosos a variável utilizada é o potencial hidráulico de um determinado solo e as condições de fronteira correspondem à imposição de pressões hidráulicas ou caudais. [Lemos, J. V., 2005]

### **3.4.4. Diferentes tipos de elementos finitos e suas aplicações**

Para analisar uma estrutura, utilizando um programa de cálculo automático, baseado no Método dos Elementos Finitos, é fundamental a escolha efectuada relativamente ao tipo de elemento finito a utilizar.

Existe um conjunto de diferentes elementos finitos (lineares, planos e tridimensionais) que podem ser utilizados consoante o tipo e a forma da estrutura a analisar.

Para melhor identificar os tipos de elementos finitos que são utilizados na análise estrutural, é apresentada, na tabela 3.1, uma descrição dos elementos finitos mais correntes e a sua respectiva aplicação prática.

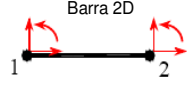

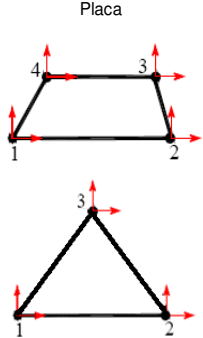
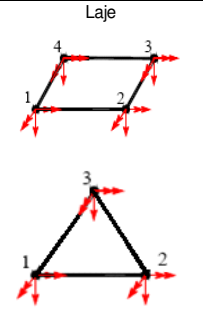
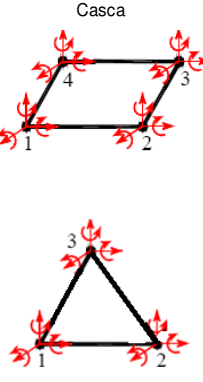
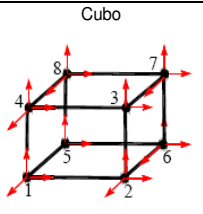
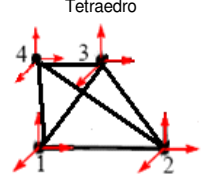
Elementos finitos mais utilizados					
	Tipo Elemento Finito	Graus de Liberdade por nó	Numero de nós por elemento	Tipo de Aplicação	
Elementos Finitos	Lineares	<p>Barra 2D</p> 	<p>3 GL/Nó (2 Translações + 1 Rotação)</p>	<p>Barra com 2 nós - 6 GL por elemento Barra com 3 nós - 9 GL por elemento</p>	<p>Estruturas reticulares planas, treliças, grelhas, muros de suporte</p>
		<p>Barra 3D</p> 	<p>6 GL/Nó (3 Translações + 3 Rotações)</p>	<p>Barra com 2 nós - 12 GL por elemento Barra com 3 nós - 18 GL por elemento</p>	<p>Estruturas reticulares tridimensionais, treliças, grelhas e muros de suporte</p>
	Laminares Planos	<p>Placa</p> 	<p>2 GL/Nó (2 Translações)</p>	<p>Quadrangulares</p> <p>Placa com 4 nós - 8 GL por elemento Placa com 8 nós - 16 GL por elemento</p> <p>Triangulares</p> <p>Placa com 3 nós - 6 GL por elemento Placa com 6 nós - 12 GL por elemento</p>	<p>Estruturas planas sujeitas a acções segundo o seu plano médio</p>
		<p>Laje</p> 	<p>3 GL/Nó (1 Translação + 2 Rotações)</p>	<p>Quadrangulares</p> <p>Laje com 4 nós - 12 GL por elemento Laje com 8 nós - 24 GL por elemento</p> <p>Triangulares</p> <p>Laje com 3 nós - 9 GL por elemento Laje com 6 nós - 18 GL por elemento</p>	<p>Estruturas planas sujeitas a acções perpendiculares ao seu plano médio</p>
	Laminares Tridimensionais	<p>Casca</p> 	<p>6 GL/Nó (3 Translações + 3 Rotações)</p>	<p>Quadrangulares</p> <p>Casca com 4 nós - 24 GL por elemento Casca com 8 nós - 48 GL por elemento</p> <p>Triangulares</p> <p>Casca com 3 nós - 18 GL por elemento Casca com 6 nós - 36 GL por elemento</p>	<p>Casca</p>
	Tridimensionais	<p>Cubo</p> 	<p>3 GL/Nó (3 Translações)</p>	<p>Cubo com 8 nós - 24 GL por elemento Cubo com 20 nós - 60 GL por elemento</p>	<p>Estruturas maciças Tridimensionais, como barragens e túneis</p>
		<p>Tetraedro</p> 		<p>Tetraedro com 4 nós - 12 GL por elemento Tetraedro com 10 nós - 30 GL por elemento</p>	

Tabela 3.1- Tipos de elementos finitos mais utilizados e sua aplicação prática.

Na tabela 3.1 é possível verificar que alguns elementos finitos, como a barra 2D, a barra 3D, a laje e a casca apresentam o grau de liberdade de rotação. Isso acontece porque, nesses elementos são adoptadas simplificações geométricas (cada ponto representa uma secção do elemento estrutural) e estão sujeitos à flexão. Quando isso acontece, é necessário introduzir um grau de liberdade de rotação para caracterizar o comportamento da secção representada pelo ponto médio.

### 3.4.5. Processo de Aplicação do Método na Análise Estrutural

O desenvolvimento de um modelo matemático de uma estrutura inicia-se com a escolha do tipo de elementos estruturais que vão simular o comportamento do protótipo.

Seleccionado o tipo de elemento estrutural inicia-se a discretização, ou seja, procede-se à divisão da estrutura em sub-domínios (os elementos finitos), ligados por um número discreto de pontos (os pontos nodais).

Para a formulação do elemento admite-se uma aproximação das variáveis fundamentais do problema, com base nas funções de interpolação ou nas funções de forma, que no caso da formulação em deslocamentos, são os deslocamentos.

As funções de interpolação e as funções de forma tentam definir, de uma forma aproximada, a partir do valor dos deslocamentos dos pontos nodais, o campo dos deslocamentos em cada elemento.

Por sua vez, partindo das relações extensões-deslocamentos consegue-se determinar, mais uma vez de forma aproximada, o estado de deformação em qualquer ponto do elemento finito a partir do valor dos deslocamentos dos pontos nodais.

Conhecidas as relações constitutivas do material e o tensor da extensão fica também determinado o estado de tensão de todos os pontos do elemento.

Depois, pela aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais, determina-se a equação de equilíbrio dum elemento relacionando a matriz de rigidez desse elemento finito com os deslocamentos nodais e com as forças nodais equivalentes (solicitações aplicadas no elemento).

Extrapolando este conceito a toda a estrutura, é possível determinar a equação de equilíbrio global, que relaciona a matriz de rigidez global com o vector de deslocamentos nodais e com o vector global das forças nodais equivalentes.

De referir que a matriz de rigidez global obtém-se por sobreposição (assemblagem) das matrizes de rigidez elementares, tendo em conta as condições de apoio, que correspondem à imposição de deslocamentos nulos em certos pontos nodais. Os vectores globais das forças nodais equivalentes obtém-se por sobreposição dos vectores das forças nodais elementares.

### 3.4.6. Aproximação Fundamental do Método Elementos Finitos. Funções de Interpolação

A aproximação fundamental do Método dos Elementos Finitos consiste em admitir que o vector de deslocamento, num ponto qualquer do interior de um elemento finito, pode ser determinado a partir dos deslocamentos dos pontos nodais, recorrendo a um método de interpolação, através da seguinte equação:

$$u_m = N_i \times u_m^{e_i} \quad (3.21)$$

ou, em notação matricial,

$$\underline{u} = \underline{N} \times \underline{u}^e \quad (3.22)$$

$\underline{u}$  – vector de deslocamentos de um ponto do interior do Elemento Finito

$\underline{N}$  – matriz com os valores das funções de interpolação desse ponto

$\underline{u}^e$  – vector com os deslocamentos nos pontos nodais do Elemento Finito

A matriz  $\underline{N}$  é composta pelas funções de interpolação relativas a todos os graus de liberdade do elemento finito. Estas funções, designadas por funções de forma ou funções de interpolação, são geralmente polinómios, escolhidos de maneira a que seja possível obter, aproximadamente, os deslocamentos em cada ponto do elemento a partir do valor dos deslocamentos nodais.

Qualquer função associada a um determinado grau de liberdade assume o valor de 1 no grau de liberdade à qual está associado e o valor 0 nos restantes.

É usual utilizar um sistema em eixos globais para elementos finitos lineares porque, uma vez que as funções de interpolação só são em função de uma incógnita (o comprimento do elemento), torna-se possível ter funções de interpolação exactas, ou seja, que conseguem reproduzir a deformada real do elemento.

Consideremos um elemento finito linear barra 2D com dois nós e três graus de liberdade por nó (uma translação horizontal e vertical e uma rotação), em coordenadas globais (figura 3.4).

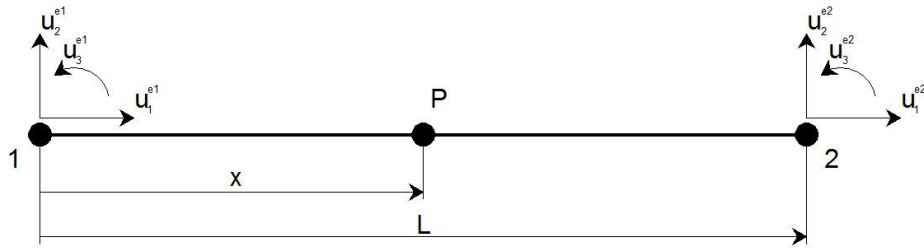


Figura 3.4 - Elemento Finito de barra de dois nós com três graus de liberdade por nó.

Note-se que, para este elemento finito a aproximação fundamental do Método dos Elementos Finitos é dada por:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 & 0 & 0 & N_5 & 0 \\ 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^{e1} \\ U_2^{e1} \\ U_3^{e1} \\ - \\ U_1^{e2} \\ U_2^{e2} \\ U_3^{e2} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

onde, as respectivas funções de interpolação são:

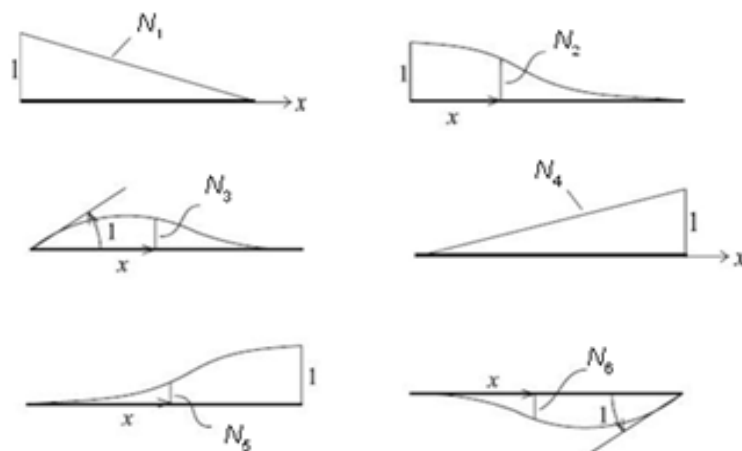


Figura 3.5 - Funções de interpolação para elementos finitos de barra com 2 nós e 3 graus de liberdade por nó. [s9]

Verifica-se que, em cada ponto de um elemento finito, a soma do valor das funções de interpolação, relativamente ao mesmo tipo de grau de liberdade, tem que ser unitária, visto tratarem-se de valores que ponderam os deslocamentos num determinado ponto.

Para o elemento finito linear barra 2D (figura 3.4) também é possível que as coordenadas dos pontos sejam dadas em coordenadas locais  $y_n$  que variam entre -1 e 1. O recurso às coordenadas locais é o mais utilizado em elementos finitos onde as suas dimensões são em função de mais do que um valor (casos planos e tridimensionais).

### 3.4.7. Introdução da aproximação fundamental do Método dos Elementos Finitos nas relações compatibilidade

Como referido anteriormente, as relações entre extensões/deslocamentos, a verificar em cada ponto interior dum sólido, é dada pela equação 3.18 e substituindo  $\underline{u}$  pela equação 3.21, que traduz a aproximação fundamental do Método dos Elementos Finitos, obtêm-se:

$$\begin{cases} \underline{\xi} = \underline{L} \times \underline{u} \\ \underline{u} = \underline{N} \times \underline{u}^e \end{cases} \Rightarrow \underline{\xi} = \underline{L} \times \underline{N} \times \underline{u}^e = \underline{B} \times \underline{u}^e \quad (3.24)$$

onde  $\underline{B}$  é uma matriz cujos termos correspondem às derivadas das funções de interpolação  $N_i$  em ordem às coordenadas gerais  $x_m$ .

Esta equação demonstra que as extensões, em qualquer ponto de um elemento finito, podem ser obtidas a partir dos deslocamentos nodais  $u^e$  e das derivadas das funções de interpolação em ordem às coordenadas gerais.

### 3.4.8. Introdução da aproximação fundamental do Método dos Elementos Finitos nas relações constitutivas

As relações tenções/extensões a verificar em cada ponto do interior de um sólido são definidas de acordo com a equação 3.20, substituindo nesta equação o  $\underline{\xi}$ , pela igualdade expressa na equação 3.24, que resulta da introdução da aproximação fundamental nas relações de compatibilidade, fica-se com:

$$\begin{cases} \underline{\sigma} = \underline{D} \times \underline{\xi} \\ \underline{\xi} = \underline{B} \times \underline{u}^e \end{cases} \Rightarrow \underline{\sigma} = \underline{D} \times \underline{B} \times \underline{u}^e \quad (3.25)$$

Esta nova expressão permite-nos obter o estado de tensão num ponto qualquer dum elemento finito, a partir da matriz de elasticidade  $\underline{D}$  e dos deslocamentos nodais  $\underline{u}^e$ , quando conhecida a matriz  $\underline{B}$ , no ponto em análise.

Se existirem tensões iniciais e extensões impostas, tal como por exemplo uma variação de temperatura, o tensor das tensões é calculado pela seguinte relação:

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \times \underline{B} \times \underline{u}^e - \underline{D} \times \underline{\varepsilon}^0 - \underline{\sigma}^0 \quad (3.26)$$

### 3.4.9. Equação de Equilíbrio dum Elemento Finito pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais

A equação de equilíbrio de um elemento finito pode ser obtida por intermédio do Princípio dos Trabalhos Virtuais.

O Princípio dos Trabalhos Virtuais estabelece que, para que um determinado corpo esteja em equilíbrio, tem que haver igualdade entre o trabalho das forças exteriores e o trabalho das forças interiores realizado para qualquer campo de deslocamentos virtuais.

$$W_{ext} = W_{int} \quad (3.27)$$

Se considerarmos um elemento finito em equilíbrio, sob a acção de forças mássicas que actuam no volume  $V$  do corpo, sujeito a um campo de deformações  $\underline{\delta\varepsilon}$ , (compatível com o campo de deslocamentos virtuais  $\underline{\delta u}^e$ ) e um campo de tensões, o trabalho das forças exteriores será, neste caso, dado pelo integral do produto das forças mássicas pelos deslocamentos virtuais e, por sua vez, o trabalho das forças interiores será dado pelo integral do produto das tensões pelas extensões.

Ficando com a seguinte igualdade:

$$\underbrace{\int_V \underline{\delta\varepsilon}^T \underline{\sigma} dV}_{W_{ext}} = \underbrace{\int_V \underline{\delta u}^{eT} \underline{X} dV}_{W_{int}} \quad (3.28)$$

Sabendo que em cada um dos pontos do interior do elemento finito tem que se verificar a já referida equação de compatibilidade e constitutiva e, tendo em conta a aproximação

fundamental do Método dos Elementos Finitos, podemos introduzir essas expressões no Princípio dos Trabalhos Virtuais e obter a equação de equilíbrio de um elemento finito:

$$\int_V \delta \underline{u}^{eT} \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} \underline{u}^e dV = \int_V \delta \underline{u}^{eT} \underline{N}^T \underline{X} dV \quad (3.29)$$

Os vectores  $\underline{u}^e$  e  $\delta \underline{u}^e$  podem passar para fora dos respectivos integrais porque são constantes no domínio da integração.

$$\delta \underline{u}^{eT} \underline{u}^e \int_V \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} dV = \delta \underline{u}^{eT} \int_V \underline{N}^T \underline{X} dV \quad (3.30)$$

Dividindo ambos os termos da equação pelo vector  $\delta \underline{u}^e$ , obtém-se a expressão que traduz o equilíbrio de um elemento finito:

$$\underbrace{\int_V \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} dV}_{\underline{K}^e} \underline{u}^e = \underbrace{\int_V \underline{N}^T \underline{X} dV}_{\underline{F}^e} \quad (3.31)$$

$\underline{K}^e$  – matriz de rigidez elementar

$\underline{u}^e$  – deslocamentos nodais do elemento

$\underline{F}^e$  – vector elementar das forças nodais equivalentes

A matriz de rigidez de cada elemento  $\underline{K}^e$  é uma matriz quadrada, simétrica, com um número de linhas e colunas igual ao número total de graus de liberdade do elemento. Tanto o vector dos deslocamentos nodais, como o vector elementar das forças nodais equivalentes são vectores com um número de linhas igual ao número total de graus de liberdade do elemento.

### 3.4.10. Equação de Equilíbrio Global (Matriz de rigidez global e vector das forças globais para análise de uma estrutura)

A equação de equilíbrio de uma estrutura pode ser formalizada, a partir das equações de equilíbrio estabelecidas para cada um dos elementos finitos em que a mesma estrutura foi dividida.

A equação de equilíbrio global de uma estrutura é dada pela seguinte expressão:

$$\underline{K} \underline{u} = \underline{F} \quad (3.32)$$

A matriz de rigidez global  $\underline{K}$  da estrutura resulta de um processo de espalhamento (assemblagem), ou soma ordenada, dos coeficientes das matrizes de rigidez elementares  $\underline{K}^e$ , dos elementos em que a estrutura foi descritizada. No espalhamento das matrizes elementares, para se obter a matriz global, é necessário fazer a correspondência entre os graus de liberdade gerais e os graus de liberdade locais de cada um dos elementos finitos.

Esta matriz é quadrada, com um número de linhas e colunas igual ao número de graus de liberdade total da estrutura. O número de graus de liberdade total pode ser obtido através da multiplicação do número total de pontos nodais pelo número de graus de liberdade por nó.

O mesmo acontece com o vector global das forças nodais  $\underline{F}$  que também se obtém por sobreposição dos vectores elementares de forças nodais elementares  $\underline{F}^e$ .

### 3.4.11. Assemblagem da matriz de rigidez global e vector das forças globais

Determinadas as matrizes de rigidez elementares de todos os elementos finitos ( $\underline{K}^e$ ), é necessário proceder à assemblagem da matriz de rigidez global da estrutura ( $\underline{K}$ ). Uma operação semelhante terá de ser também efectuada com os vectores elementares das forças nodais equivalentes dos diversos elementos finitos.

A assemblagem da matriz de rigidez global é um processo simples, cuja metodologia vai ser descrita para a estrutura representada na figura 3.6.

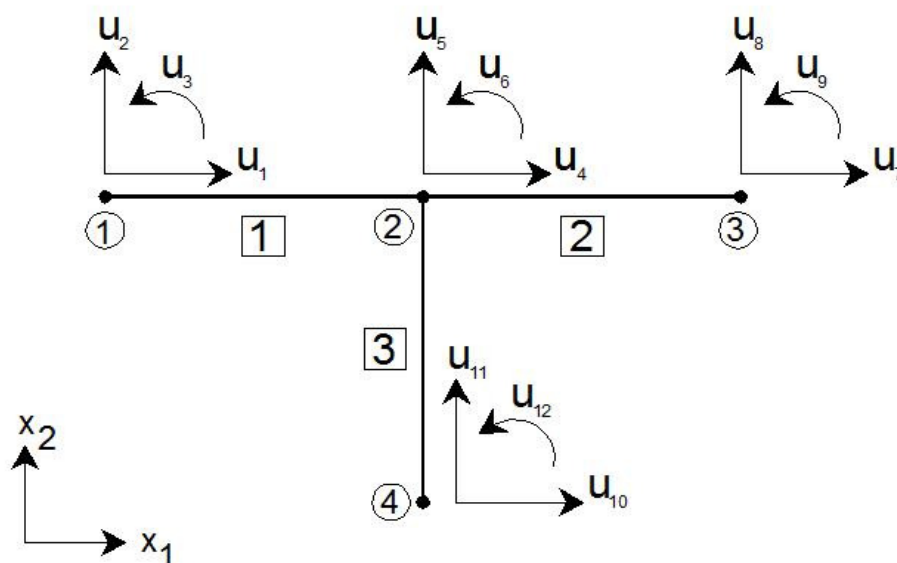


Figura 3.6 - Estrutura constituída por 3 elementos finitos de barra de dois nós (1, 2 e 3).

A estrutura apresentada é composta por 3 elementos finitos, constituídos por 2 nós, (barras 1 a 3) e 4 pontos nodais globais (nós de 1 a 4). Em cada nó, existem 3 graus de liberdade perfazendo um total 12 graus de liberdade.

Na figura 3.7 apresenta-se um elemento finito genérico com a respectiva numeração local (nós e graus de liberdade).

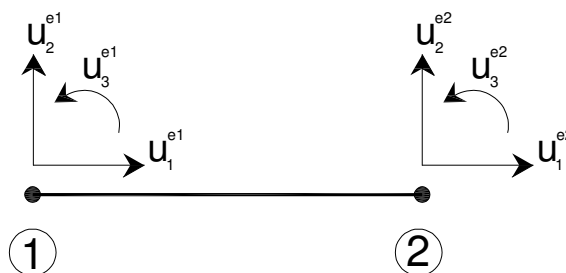


Figura 3.7 - Numeração elementar do elemento finito genérico e respectivos graus de liberdade elementares.

A relação entre a numeração local e a numeração global dos nós de cada elemento pode ser expressa por uma tabela, denominada Tabela de Incidências (tabela 3.2).

Elemento	Pontos Nodais Locais	
	1	2
1	1	2
2	2	3
3	4	2

Tabela 3.2 - Tabela de Incidências da estrutura representada na figura 3.6.

As matrizes de rigidez elementares, determinadas no referencial global, têm o aspecto genérico apresentado nas equações 3.33, 3.34 e 3.35.

$$\text{Barra 1: } \underline{K}^e = \begin{bmatrix} K_{11}^{e1} & K_{12}^{e1} & K_{13}^{e1} & K_{14}^{e1} & K_{15}^{e1} & K_{16}^{e1} \\ K_{21}^{e1} & K_{22}^{e1} & K_{23}^{e1} & K_{24}^{e1} & K_{25}^{e1} & K_{26}^{e1} \\ K_{31}^{e1} & K_{12}^{e1} & K_{33}^{e1} & K_{34}^{e1} & K_{35}^{e1} & K_{36}^{e1} \\ K_{41}^{e1} & K_{42}^{e1} & K_{43}^{e1} & K_{44}^{e1} & K_{45}^{e1} & K_{46}^{e1} \\ K_{51}^{e1} & K_{52}^{e1} & K_{53}^{e1} & K_{54}^{e1} & K_{55}^{e1} & K_{56}^{e1} \\ K_{61}^{e1} & K_{62}^{e1} & K_{63}^{e1} & K_{64}^{e1} & K_{65}^{e1} & K_{66}^{e1} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

$$\text{Barra 2: } \underline{K}^e = \begin{bmatrix} K_{11}^{e2} & K_{12}^{e2} & K_{13}^{e2} & K_{14}^{e2} & K_{15}^{e2} & K_{16}^{e2} \\ K_{21}^{e2} & K_{22}^{e2} & K_{23}^{e2} & K_{24}^{e2} & K_{25}^{e2} & K_{26}^{e2} \\ K_{31}^{e2} & K_{32}^{e2} & K_{33}^{e2} & K_{34}^{e2} & K_{35}^{e2} & K_{36}^{e2} \\ K_{41}^{e2} & K_{42}^{e2} & K_{43}^{e2} & K_{44}^{e2} & K_{45}^{e2} & K_{46}^{e2} \\ K_{51}^{e2} & K_{52}^{e2} & K_{53}^{e2} & K_{54}^{e2} & K_{55}^{e2} & K_{56}^{e2} \\ K_{61}^{e2} & K_{62}^{e2} & K_{63}^{e2} & K_{64}^{e2} & K_{65}^{e2} & K_{66}^{e2} \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

$$\text{Barra 3: } \underline{K}^e = \begin{bmatrix} K_{11}^{e3} & K_{12}^{e3} & K_{13}^{e3} & K_{14}^{e3} & K_{15}^{e3} & K_{16}^{e3} \\ K_{21}^{e3} & K_{22}^{e3} & K_{23}^{e3} & K_{24}^{e3} & K_{25}^{e3} & K_{26}^{e3} \\ K_{31}^{e3} & K_{32}^{e3} & K_{33}^{e3} & K_{34}^{e3} & K_{35}^{e3} & K_{36}^{e3} \\ K_{41}^{e3} & K_{42}^{e3} & K_{43}^{e3} & K_{44}^{e3} & K_{45}^{e3} & K_{46}^{e3} \\ K_{51}^{e3} & K_{52}^{e3} & K_{53}^{e3} & K_{54}^{e3} & K_{55}^{e3} & K_{56}^{e3} \\ K_{61}^{e3} & K_{62}^{e3} & K_{63}^{e3} & K_{64}^{e3} & K_{65}^{e3} & K_{66}^{e3} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Atendendo à relação entre os graus de liberdade globais da estrutura e os graus locais de cada elemento, procede-se ao espalhamento (assemblagem) de cada uma das matrizes de rigidez elementar na matriz de rigidez global.

O espalhamento da matriz de rigidez do elemento 1, é apresentada na tabela 3.3 e sintetizada na equação 3.36.

Nos	G.L. Globais													
			1			2			3			4		
	G.L. elementares no ref. global e. 1		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	1	$k_{11}^{e1}$	$k_{12}^{e1}$	$k_{13}^{e1}$	$k_{14}^{e1}$	$k_{15}^{e1}$	$k_{16}^{e1}$						
	2	2	$k_{21}^{e1}$	$k_{22}^{e1}$	$k_{23}^{e1}$	$k_{24}^{e1}$	$k_{25}^{e1}$	$k_{26}^{e1}$						
	3	3	$k_{31}^{e1}$	$k_{32}^{e1}$	$k_{33}^{e1}$	$k_{34}^{e1}$	$k_{35}^{e1}$	$k_{36}^{e1}$						
2	4	4	$k_{41}^{e1}$	$k_{42}^{e1}$	$k_{43}^{e1}$	$k_{44}^{e1}$	$k_{45}^{e1}$	$k_{46}^{e1}$						
	5	5	$k_{51}^{e1}$	$k_{52}^{e1}$	$k_{53}^{e1}$	$k_{54}^{e1}$	$k_{55}^{e1}$	$k_{56}^{e1}$						
	6	6	$k_{61}^{e1}$	$k_{62}^{e1}$	$k_{63}^{e1}$	$k_{64}^{e1}$	$k_{65}^{e1}$	$k_{66}^{e1}$						
3	7													
	8													
	9													
4	10													
	11													
	12													

**Tabela 3.3** - Assemblagem da matriz de rigidez elementar (equação 3.33) do elemento 1 na matriz de rigidez global da estrutura.

$$\begin{bmatrix}
 k_{11}^{e1} & k_{12}^{e1} & k_{13}^{e1} & k_{14}^{e1} & k_{15}^{e1} & k_{16}^{e1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 k_{21}^{e1} & k_{22}^{e1} & k_{23}^{e1} & k_{24}^{e1} & k_{25}^{e1} & k_{26}^{e1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 k_{31}^{e1} & k_{32}^{e1} & k_{33}^{e1} & k_{34}^{e1} & k_{35}^{e1} & k_{36}^{e1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 k_{41}^{e1} & k_{42}^{e1} & k_{43}^{e1} & k_{44}^{e1} & k_{45}^{e1} & k_{46}^{e1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 k_{51}^{e1} & k_{52}^{e1} & k_{53}^{e1} & k_{54}^{e1} & k_{55}^{e1} & k_{56}^{e1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 k_{61}^{e1} & k_{62}^{e1} & k_{63}^{e1} & k_{64}^{e1} & k_{65}^{e1} & k_{66}^{e1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix} \tag{3.36}$$

Seguindo a mesma metodologia é apresentado nas tabelas 3.4 e 3.5 e equações 3.37 e 3.38 a assemblagem das matrizes de rigidez elementares dos elementos 2 e 3, respectivamente.

Nos	G.L. Globais		1			2			3			4		
		G.L. elementares no ref. global e. 2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1													
	2													
	3													
2	4	1				$k_{11}^{e2}$	$k_{12}^{e2}$	$k_{13}^{e2}$	$k_{14}^{e2}$	$k_{15}^{e2}$	$k_{16}^{e2}$			
	5	2				$k_{21}^{e2}$	$k_{22}^{e2}$	$k_{23}^{e2}$	$k_{24}^{e2}$	$k_{25}^{e2}$	$k_{26}^{e2}$			
	6	3				$k_{31}^{e2}$	$k_{32}^{e2}$	$k_{33}^{e2}$	$k_{34}^{e2}$	$k_{35}^{e2}$	$k_{36}^{e2}$			
3	7	4				$k_{41}^{e2}$	$k_{42}^{e2}$	$k_{43}^{e2}$	$k_{44}^{e2}$	$k_{45}^{e2}$	$k_{46}^{e2}$			
	8	5				$k_{51}^{e2}$	$k_{52}^{e2}$	$k_{53}^{e2}$	$k_{54}^{e2}$	$k_{55}^{e2}$	$k_{56}^{e2}$			
	9	6				$k_{61}^{e2}$	$k_{62}^{e2}$	$k_{63}^{e2}$	$k_{64}^{e2}$	$k_{65}^{e2}$	$k_{66}^{e2}$			
4	10													
	11													
	12													

**Tabela 3.4** - Assemblagem da matriz de rigidez elementar (equação 3.34) do elemento 2 na matriz de rigidez global da estrutura.

$$\begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & k_{11}^{e2} & k_{12}^{e2} & k_{13}^{e2} & k_{14}^{e2} & k_{15}^{e2} & k_{16}^{e2} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & k_{21}^{e2} & k_{22}^{e2} & k_{23}^{e2} & k_{24}^{e2} & k_{25}^{e2} & k_{26}^{e2} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & k_{31}^{e2} & k_{32}^{e2} & k_{33}^{e2} & k_{34}^{e2} & k_{35}^{e2} & k_{36}^{e2} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & k_{41}^{e2} & k_{42}^{e2} & k_{43}^{e2} & k_{44}^{e2} & k_{45}^{e2} & k_{46}^{e2} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & k_{51}^{e2} & k_{52}^{e2} & k_{53}^{e2} & k_{54}^{e2} & k_{55}^{e2} & k_{56}^{e2} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & k_{61}^{e2} & k_{62}^{e2} & k_{63}^{e2} & k_{64}^{e2} & k_{65}^{e2} & k_{66}^{e2} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Nos														
	1			2			3			4				
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		
	G.L. Globais					4	5	6				1	2	3
	G.L. elementares no ref. global e. 3													
1	1													
	2													
	3													
2	4	4				$k_{44}^{e3}$	$k_{45}^{e3}$	$k_{46}^{e3}$				$k_{41}^{e3}$	$k_{42}^{e3}$	$k_{43}^{e3}$
	5	5				$k_{54}^{e3}$	$k_{55}^{e3}$	$k_{56}^{e3}$				$k_{51}^{e3}$	$k_{52}^{e3}$	$k_{53}^{e3}$
	6	6				$k_{64}^{e3}$	$k_{65}^{e3}$	$k_{66}^{e3}$				$k_{61}^{e3}$	$k_{62}^{e3}$	$k_{63}^{e3}$
3	7													
	8													
	9													
4	10	1				$k_{14}^{e3}$	$k_{15}^{e3}$	$k_{16}^{e3}$				$k_{11}^{e3}$	$k_{12}^{e3}$	$k_{13}^{e3}$
	11	2				$k_{24}^{e3}$	$k_{25}^{e3}$	$k_{26}^{e3}$				$k_{21}^{e3}$	$k_{22}^{e3}$	$k_{23}^{e3}$
	12	3				$k_{34}^{e3}$	$k_{35}^{e3}$	$k_{36}^{e3}$				$k_{31}^{e3}$	$k_{32}^{e3}$	$k_{33}^{e3}$

Tabela 3.5 - Assemblagem da matriz de rigidez elementar (equação 3.35) do elemento 3 na matriz de rigidez global da estrutura.

$$\begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & k_{44}^{e3} & k_{45}^{e3} & k_{46}^{e3} & 0 & 0 & 0 & k_{41}^{e3} & k_{42}^{e3} & k_{43}^{e3} \\
 0 & 0 & 0 & k_{54}^{e3} & k_{55}^{e3} & k_{56}^{e3} & 0 & 0 & 0 & k_{51}^{e3} & k_{52}^{e3} & k_{53}^{e3} \\
 0 & 0 & 0 & k_{64}^{e3} & k_{65}^{e3} & k_{66}^{e3} & 0 & 0 & 0 & k_{61}^{e3} & k_{62}^{e3} & k_{63}^{e3} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & k_{14}^{e3} & k_{15}^{e3} & k_{16}^{e3} & 0 & 0 & 0 & k_{11}^{e3} & k_{12}^{e3} & k_{13}^{e3} \\
 0 & 0 & 0 & k_{24}^{e3} & k_{25}^{e3} & k_{26}^{e3} & 0 & 0 & 0 & k_{21}^{e3} & k_{22}^{e3} & k_{23}^{e3} \\
 0 & 0 & 0 & k_{34}^{e3} & k_{35}^{e3} & k_{36}^{e3} & 0 & 0 & 0 & k_{31}^{e3} & k_{32}^{e3} & k_{33}^{e3}
 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

A matriz de rigidez global da estrutura é obtida pela soma das matrizes de rigidez elementares já assembladas (tabela 3.3 a 3.5). Na tabela 3.6 apresenta-se a matriz de rigidez global da estrutura.

Nos	1			2			3			4						
	G.L. Globais			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
	G.L. elementares no ref. global e. 1	G.L. elementares no ref. global e. 2	G.L. elementares no ref. global e. 3	1	2	3	4	5	6							
							1	2	3							
1	1	1		$k_{11}^{e1}$	$k_{12}^{e1}$	$k_{13}^{e1}$	$k_{14}^{e1}$	$k_{15}^{e1}$	$k_{16}^{e1}$							
	2	2		$k_{21}^{e1}$	$k_{22}^{e1}$	$k_{23}^{e1}$	$k_{24}^{e1}$	$k_{25}^{e1}$	$k_{26}^{e1}$							
	3	3		$k_{31}^{e1}$	$k_{32}^{e1}$	$k_{33}^{e1}$	$k_{34}^{e1}$	$k_{35}^{e1}$	$k_{36}^{e1}$							
2	4	4	1	4	$k_{41}^{e1}$	$k_{42}^{e1}$	$k_{43}^{e1}$	$k_{44}^{e1} + k_{11}^{e2} + k_{44}^{e3}$	$k_{45}^{e1} + k_{12}^{e2} + k_{45}^{e3}$	$k_{46}^{e1} + k_{13}^{e2} + k_{46}^{e3}$	$k_{14}^{e2}$	$k_{15}^{e2}$	$k_{16}^{e2}$	$k_{41}^{e3}$	$k_{42}^{e3}$	$k_{43}^{e3}$
	5	5	2	5	$k_{51}^{e1}$	$k_{52}^{e1}$	$k_{53}^{e1}$	$k_{54}^{e1} + k_{21}^{e2} + k_{54}^{e3}$	$k_{55}^{e1} + k_{22}^{e2} + k_{55}^{e3}$	$k_{56}^{e1} + k_{23}^{e2} + k_{56}^{e3}$	$k_{24}^{e2}$	$k_{25}^{e2}$	$k_{26}^{e2}$	$k_{51}^{e3}$	$k_{52}^{e3}$	$k_{53}^{e3}$
	6	6	3	6	$k_{61}^{e1}$	$k_{62}^{e1}$	$k_{63}^{e1}$	$k_{64}^{e1} + k_{31}^{e2} + k_{64}^{e3}$	$k_{65}^{e1} + k_{32}^{e2} + k_{65}^{e3}$	$k_{66}^{e1} + k_{33}^{e2} + k_{66}^{e3}$	$k_{34}^{e2}$	$k_{35}^{e2}$	$k_{36}^{e2}$	$k_{61}^{e3}$	$k_{62}^{e3}$	$k_{63}^{e3}$
3	7		4				$k_{41}^{e2}$	$k_{42}^{e2}$	$k_{43}^{e2}$	$k_{44}^{e2}$	$k_{45}^{e2}$	$k_{46}^{e2}$				
	8		5				$k_{51}^{e2}$	$k_{52}^{e2}$	$k_{53}^{e2}$	$k_{54}^{e2}$	$k_{55}^{e2}$	$k_{56}^{e2}$				
	9		6				$k_{61}^{e2}$	$k_{62}^{e2}$	$k_{63}^{e2}$	$k_{64}^{e2}$	$k_{65}^{e2}$	$k_{66}^{e2}$				
4	10			1			$k_{14}^{e3}$	$k_{15}^{e3}$	$k_{16}^{e3}$					$k_{11}^{e3}$	$k_{12}^{e3}$	$k_{13}^{e3}$
	11			2			$k_{24}^{e3}$	$k_{25}^{e3}$	$k_{26}^{e3}$					$k_{21}^{e3}$	$k_{22}^{e3}$	$k_{23}^{e3}$
	12			3			$k_{34}^{e3}$	$k_{35}^{e3}$	$k_{36}^{e3}$					$k_{31}^{e3}$	$k_{32}^{e3}$	$k_{33}^{e3}$

Tabela 3.6 - Matriz de rigidez global da estrutura após a sobreposição das tabelas 3.3 a 3.5.

Na equação 3.39 apresenta-se a soma das equações 3.36 a 3.38.

$$\begin{bmatrix}
 k_{11}^{e1} & k_{12}^{e1} & k_{13}^{e1} & k_{14}^{e1} & k_{15}^{e1} & k_{16}^{e1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 k_{21}^{e1} & k_{22}^{e1} & k_{23}^{e1} & k_{24}^{e1} & k_{25}^{e1} & k_{26}^{e1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 k_{31}^{e1} & k_{32}^{e1} & k_{33}^{e1} & k_{34}^{e1} & k_{35}^{e1} & k_{36}^{e1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 k_{41}^{e1} & k_{42}^{e1} & k_{43}^{e1} & k_{44}^{e1} + k_{11}^{e2} + k_{44}^{e3} & k_{45}^{e1} + k_{12}^{e2} + k_{45}^{e3} & k_{46}^{e1} + k_{13}^{e2} + k_{46}^{e3} & k_{14}^{e2} & k_{15}^{e2} & k_{16}^{e2} & k_{41}^{e3} & k_{42}^{e3} & k_{43}^{e3} & k_{44}^{e3} & k_{45}^{e3} & k_{46}^{e3} & k_{41}^{e3} & k_{42}^{e3} & k_{43}^{e3} \\
 k_{51}^{e1} & k_{52}^{e1} & k_{53}^{e1} & k_{54}^{e1} + k_{21}^{e2} + k_{54}^{e3} & k_{55}^{e1} + k_{22}^{e2} + k_{55}^{e3} & k_{56}^{e1} + k_{23}^{e2} + k_{56}^{e3} & k_{24}^{e2} & k_{25}^{e2} & k_{26}^{e2} & k_{51}^{e3} & k_{52}^{e3} & k_{53}^{e3} & k_{54}^{e3} & k_{55}^{e3} & k_{56}^{e3} & k_{51}^{e3} & k_{52}^{e3} & k_{53}^{e3} \\
 k_{61}^{e1} & k_{62}^{e1} & k_{63}^{e1} & k_{64}^{e1} + k_{31}^{e2} + k_{64}^{e3} & k_{65}^{e1} + k_{32}^{e2} + k_{65}^{e3} & k_{66}^{e1} + k_{33}^{e2} + k_{66}^{e3} & k_{34}^{e2} & k_{35}^{e2} & k_{36}^{e2} & k_{61}^{e3} & k_{62}^{e3} & k_{63}^{e3} & k_{64}^{e3} & k_{65}^{e3} & k_{66}^{e3} & k_{61}^{e3} & k_{62}^{e3} & k_{63}^{e3} \\
 0 & 0 & 0 & k_{41}^{e2} & k_{42}^{e2} & k_{43}^{e2} & k_{44}^{e2} & k_{45}^{e2} & k_{46}^{e2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & k_{51}^{e2} & k_{52}^{e2} & k_{53}^{e2} & k_{54}^{e2} & k_{55}^{e2} & k_{56}^{e2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & k_{61}^{e2} & k_{62}^{e2} & k_{63}^{e2} & k_{64}^{e2} & k_{65}^{e2} & k_{66}^{e2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & k_{14}^{e3} & k_{15}^{e3} & k_{16}^{e3} & 0 & 0 & 0 & k_{11}^{e3} & k_{12}^{e3} & k_{13}^{e3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & k_{24}^{e3} & k_{25}^{e3} & k_{26}^{e3} & 0 & 0 & 0 & k_{21}^{e3} & k_{22}^{e3} & k_{23}^{e3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & k_{34}^{e3} & k_{35}^{e3} & k_{36}^{e3} & 0 & 0 & 0 & k_{31}^{e3} & k_{32}^{e3} & k_{33}^{e3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Com base na relação entre a numeração global dos graus de liberdade da estrutura e a numeração elementar dos graus de liberdade de cada elemento, procede-se à assemblagem dos vectores elementares das forças nodais equivalentes com as acções nas barras obtendo-

-se, o vector global das forças nodais equivalentes (F) representado na tabela 3.7 e equação 3.40:

Nos	G.L. Globais	G.L. elementares no ref. global e. 1	G.L. elementares no ref. global e. 2	G.L. elementares no ref. global e. 3	F
1	1	1			$  \begin{matrix}  f^{e1}_1 \\  f^{e1}_2 \\  f^{e1}_3 \\  f^{e1}_4 \\  f^{e1}_5 \\  f^{e1}_6  \end{matrix}  +  \begin{matrix}  f^{e2}_1 \\  f^{e2}_2 \\  f^{e2}_3 \\  f^{e2}_4 \\  f^{e2}_5 \\  f^{e2}_6  \end{matrix}  +  \begin{matrix}  f^{e3}_4 \\  f^{e3}_5 \\  f^{e3}_6 \\  \\  f^{e3}_1 \\  f^{e3}_2 \\  f^{e3}_3  \end{matrix}  $
	2	2			
	3	3			
2	4	4	1	4	
	5	5	2	5	
	6	6	3	6	
3	7		4		
	8		5		
	9		6		
4	10			1	
	11			2	
	12			3	

**Tabela 3.7** - Assemblagem dos vectores elementares das forças nodais equivalentes para obtenção do vector global.

que fica com a seguinte representação vectorial:

$$\begin{bmatrix}
 f_1^{e1} \\
 f_2^{e1} \\
 f_3^{e1} \\
 f_4^{e1} + f_1^{e2} + f_4^{e3} \\
 f_5^{e1} + f_2^{e2} + f_5^{e3} \\
 f_6^{e1} + f_3^{e2} + f_6^{e3} \\
 f_4^{e2} \\
 f_5^{e2} \\
 f_6^{e2} \\
 f_1^{e3} \\
 f_2^{e3} \\
 f_3^{e3}
 \end{bmatrix} \tag{3.40}$$

### 3.5. CONCLUSÃO

Um dos principais problemas na Engenharia Civil de Estruturas é a determinação dos campos de deslocamentos, de extensões e de tensões que se desenvolvem numa determinada estrutura, sob a acção dos diversos tipos de solicitações.

Esse problema pode ser resolvido através de um conjunto de equações diferenciais que devem ser verificadas em cada ponto da estrutura e que são, as equações de equilíbrio entre as forças e as tensões, de compatibilidade entre as extensões e os deslocamentos e constitutivas quando correlacionam as tensões com as extensões.

Constatou-se também, que o Método dos Elementos Finitos é actualmente uma das ferramentas mais importantes na Análise Estrutural. Desde que foi introduzido, na década de 60, tem sido aplicado em vários campos da Engenharia, nomeadamente, para a resolução das equações fundamentais da Mecânica dos Sólidos.

A vantagem do Método dos Elementos Finitos, relativamente a outros métodos existentes, assenta na possibilidade de permitir o estudo de qualquer estrutura, independentemente da sua forma geométrica, das propriedades dos seus materiais e das acções aplicadas.

A aplicação deste método consiste em dividir o domínio da estrutura em subdomínios de elementos finitos, ligados entre si por pontos nodais permitindo dessa forma a sua discretização.

Na sua formulação em deslocamentos a principal incógnita são os deslocamentos, nos denominados pontos nodais, onde, dentro de cada elemento, os valores dos campos de deslocamento são calculados por interpolação dos seus valores nodais, através de funções de interpolação.

Neste capítulo demonstrou-se como se obtém a equação de equilíbrio de um elemento finito, através da aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais, com a introdução das equações de compatibilidade e constitutivas na aproximação fundamental do Método dos Elementos Finitos.

## Capítulo IV

### PROGRAMA DE CÁLCULO AUTOMÁTICO

#### 4.1. INTRODUÇÃO

O presente capítulo é dedicado à apresentação do programa de cálculo automático, desenvolvido com base no Método dos Elementos Finitos e que permite a análise de pórticos planos, em regime elástico linear.

A metodologia implementada permite a utilização de múltiplas barras com propriedades físicas e mecânicas distintas, no entanto, estas características tem de ser constantes em todo o comprimento do elemento estrutural.

O programa desenvolvido permite analisar estruturas sujeitas a diversos tipos de acções, sendo possível simular cargas aplicadas nos pontos nodais da estrutura e distribuídas ao longo das barras. Estas podem ser para simular o peso próprio das barras, uniformemente ou linearmente distribuídas em todo comprimento ou parcial e pontuais aplicadas no interior das barras. Podem ainda ser simulados assentamentos de apoio. Foi também implementado um módulo que permite efectuar a combinação de acções.

#### 4.2. BREVE DESCRIÇÃO

Este programa é composto por uma fase de leitura de dados (input), uma fase de processamento de dados e uma última fase de apresentação dos resultados que foram obtidos (output).

Na fase de leitura de dados são fornecidos ao programa os parâmetros do modelo estrutural necessários para a sua análise, através do ficheiro “.DAT” criado pelo utilizador. Nesta fase estão implementados no programa diversos avisos de erro, que podem ocorrer na leitura dos dados devido a incorrecções cometidas na geração do ficheiro.

A fase de processamento compõe-se por um conjunto de cálculos que vão permitir obter os deslocamentos nos pontos nodais, as reacções de apoio e os esforços ao longo das barras.

Na fase de apresentação de resultados o programa escreve em seis ficheiros, os resultados obtidos na fase de processamento. Dois desses ficheiros são para utilização no Pacote Gráfico GID para permitir a visualização gráfica das deformadas e dos esforços. Por sua vez, os restantes quatro ficheiros de resultados são para leitura directa, em que o ficheiro

“.DES” permite a leitura dos deslocamentos nos pontos nodais, o ficheiro “.ESF” a leitura dos esforços nos elementos barra, o ficheiro “.REA” a leitura das reacções de apoio e o ficheiro “.OUT” apresenta um resumo dos dados introduzidos.

Na figura 4.1 apresenta-se um fluxograma do programa com a indicação dos módulos mais importantes.

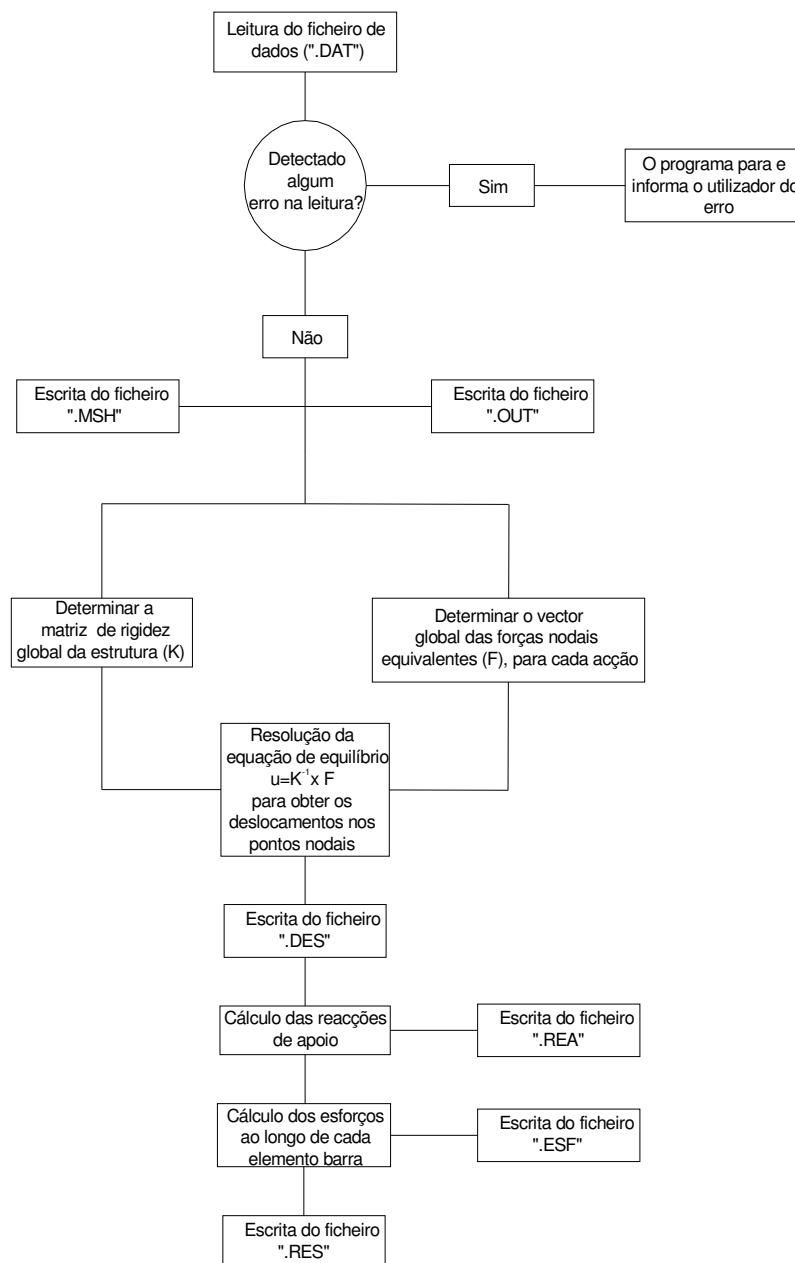


Figura 4.1- Fluxograma do programa de cálculo de pórticos planos.

Das três fases apresentadas aquela que revela maior importância é a fase de processamento. Isto porque, é nesta fase que são utilizados os conhecimentos adquiridos pela

aplicação do Método dos Elementos Finitos e aplicadas as diferentes metodologias que permitem a análise da estrutura.

Pretende-se neste capítulo, apresentar os diversos módulos que constituem o programa desenvolvido, como seja, a determinação da matriz de rigidez global da estrutura, do vector global das forças nodais equivalentes, dos deslocamentos nos pontos nodais, das reacções de apoio, dos esforços ao longo da barra e das combinações de acções.

No entanto, antes de proceder a esta apresentação, é importante, previamente, definir os referenciais existentes e que estão subjacentes aos diversos cálculos efectuados pelo programa.

### 4.3. REFERENCIAIS

No desenvolvimento do programa foram admitidos dois referenciais distintos: o referencial global  $(x_1, x_2)$  e o referencial local  $(x'_1, x'_2)$ .

O referencial global é aquele segundo o qual se encontram expressas as coordenadas de todos os nós e que posteriormente é utilizado para definir a posição das barras.

O referencial local é utilizado para definir o posicionamento do elemento e dos seus graus de liberdade. A orientação do referencial é definida pelo eixo da barra, que coincide com eixo  $x'_1$ , orientado do nó 1 para o nó 2, e o eixo  $x'_2$  perpendicular de modo a fazer um sistema directo (figura 4.2).

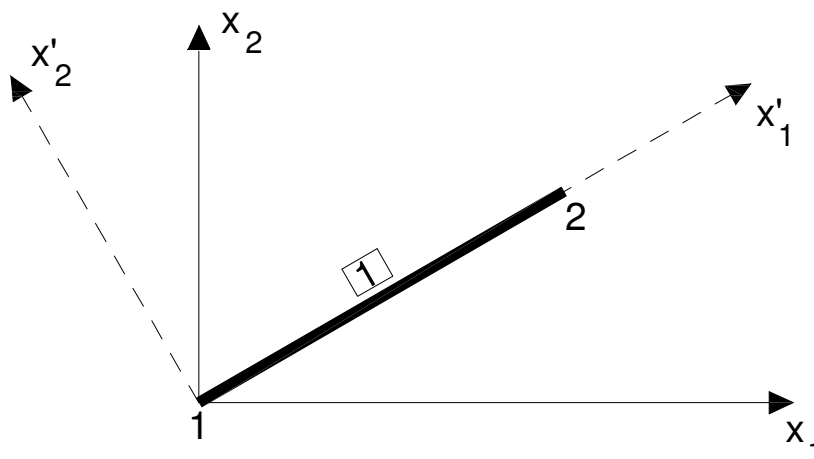


Figura 4.2 – Elemento Barra 1, referencial global  $(x_1, x_2)$  e o referencial local  $(x'_1, x'_2)$ .

Através de uma matriz de transformação  $(\underline{T})$  é possível relacionar os dois referenciais como será demonstrado.

#### 4.4. MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL DA ESTRUTURA

Para a montagem da matriz de rigidez global da estrutura é necessário proceder ao cálculo das matrizes de rigidez elementares. Devido à simplicidade deste elemento e à optimização computacional do programa, optou-se por retirar de bibliografia as matrizes de rigidez elementares para as diversas situações.

O cálculo da matriz de rigidez global passa por efectuar um ciclo ao número total de elementos, cujos passos genéricos são descritos brevemente a seguir.

1º - Para o elemento barra em estudo, e tendo em conta as condições de extremidade, é calculada a sua matriz de rigidez elementar segundo os eixos locais do elemento.

Estão implementadas no programa quatro matrizes de rigidez elementares, consoante as condições de extremidade da barra [Tavares, S., 1973] e [s10]:

- Barra com ligação de continuidade;
- Barra com rótula de flexão à direita;
- Barra com rótula de flexão à esquerda;
- Barra com rótulas de flexão em ambas as extremidades.

Para cada uma das situações consideradas são apresentadas as matrizes de rigidez respectivas:

- **Barra contínua**

$$K^{e'} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3}\phi & \frac{6EI}{L^2}\phi & 0 & -\frac{12EI}{L^3}\phi & \frac{6EI}{L^2}\phi \\ 0 & \frac{6EI}{L^2}\phi & \frac{4EI}{L}\phi\beta_1 & 0 & -\frac{6EI}{L^2}\phi & \frac{2EI}{L}\phi\beta_2 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3}\phi & -\frac{6EI}{L^2}\phi & 0 & \frac{12EI}{L^3}\phi & -\frac{6EI}{L^2}\phi \\ 0 & \frac{6EI}{L^2}\phi & \frac{2EI}{L}\phi\beta_2 & 0 & -\frac{6EI}{L^2}\phi & \frac{4EI}{L}\phi\beta_1 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

• Barra com rótula a direita

$$K^{e'} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3}\phi & \frac{3EI}{L^2}\phi & 0 & -\frac{3EI}{L^3}\phi & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^2}\phi & \frac{3EI}{L}\phi\beta_1 & 0 & -\frac{3EI}{L^2}\phi & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{L^3}\phi & -\frac{3EI}{L^2}\phi & 0 & \frac{3EI}{L^3}\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

• Barra com rótula a esquerda

$$K^{e'} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3}\phi & 0 & 0 & -\frac{3EI}{L^3}\phi & \frac{3EI}{L^2}\phi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{L^3}\phi & 0 & 0 & \frac{3EI}{L^3}\phi & -\frac{3EI}{L^2}\phi \\ 0 & \frac{3EI}{L^2}\phi & 0 & 0 & -\frac{3EI}{L^2}\phi & \frac{3EI}{L}\phi\beta_1 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

• Barra bi-rotulada

$$K^{e'} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

em que:

E – módulo de elasticidade ou de Young;

A – área da secção transversal do elemento barra;

I – momento de inércia da secção transversal do elemento barra, relativo ao plano de flexão;

L – comprimento do elemento barra.

e onde os valores de  $\phi$ ,  $\beta_1$  e  $\beta_2$  dependem da consideração, ou não, dos efeitos da deformação por esforço transversal. No caso de não se pretender considerar a deformação por esforço transversal os parâmetros  $\phi$ ,  $\beta_1$  e  $\beta_2$  assumem valor unitário.

No caso em que se pretende considerar a deformação por esforço transversal os parâmetros  $\phi$ ,  $\beta_1$  e  $\beta_2$  são determinados a partir das seguintes expressões [Tavares, S., 1973]:

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{1}{1+2\alpha} \\ \beta_1 &= 1 + \frac{\alpha}{2} \\ \beta_2 &= 1 - \alpha\end{aligned}\tag{4.5}$$

onde  $\alpha$  é dado por:

$$\alpha = \frac{6EI}{L^2} \times \frac{1}{GA}\tag{4.6}$$

e:

E – módulo de elasticidade ou de Young;

A' – área de corte da secção transversal do elemento barra;

I – momento de inércia da secção transversal do elemento barra, relativo ao plano de flexão;

L – comprimento do elemento barra;

G – módulo de distorção.

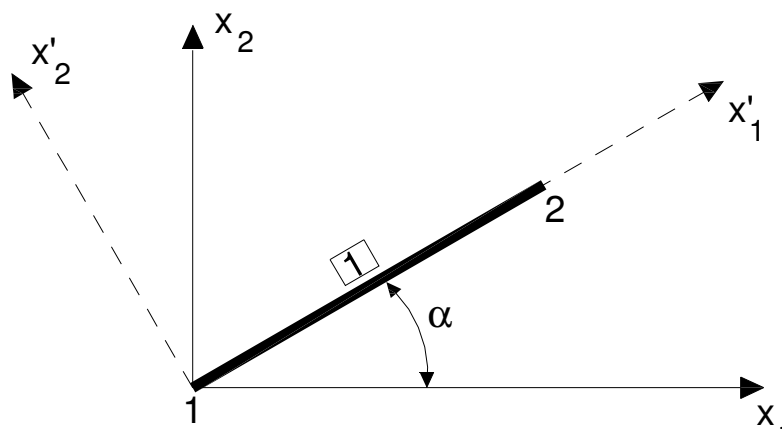
2º - Determinada a matriz de rigidez elementar segundo os eixos locais ( $K^e$ ) é necessário proceder à sua transformação para o referencial global da estrutura ( $K^e$ ). Para isso é necessário calcular a matriz transformação (T) (equação 4.8) e aplicar a lei de transformação (equação 4.7):

$$K^e = T K^{e'} T^T \quad (4.7)$$

em que:

$$T = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\text{sen}(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\alpha) & -\text{sen}(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

e onde  $\alpha$  é o ângulo medido, segundo a direcção anti-horária, entre o eixo horizontal  $x_1$  do sistema global da estrutura e o eixo local  $x_1'$  do elemento (figura 4.3)



**Figura 4.3** - Relação entre o referencial local (barra,  $x_1'$  e  $x_2'$ ) e o referencial global (estrutura,  $x_1$  e  $x_2$ ).

3º - Após a determinação da matriz de rigidez elementar segundo os eixos globais procede-se à assemblagem dessa matriz na matriz de rigidez global da estrutura.

#### 4.5. INTRODUÇÃO DAS CONDIÇÕES DE APOIO

A matriz de rigidez global (K), obtida pela assemblagem das matrizes de rigidez elementares, é singular, ou seja, quando aplicada uma determinada solicitação à estrutura seriam obtidos unicamente deslocamentos de corpo rígido, que não provocavam esforços na estrutura, mas tal não corresponde à realidade. Para que seja possível resolver o sistema de equações de equilíbrio é necessário introduzir na matriz de rigidez global, as ligações ao exterior (condições de apoio), transformando assim esta numa matriz não singular que permite a sua inversa.

A metodologia adoptada no programa para materializar as condições de apoio existentes na estrutura passa por, simular as ligações ao exterior por molas elásticas. O que, no caso de apoios rígidos, estas molas terão rigidez infinita (para se obter deslocamento nulos) em que a adoptada foi de  $10^{20}$  e no caso de apoios elásticos terão o valor correspondente à sua constante de elasticidade.

#### 4.6. VECTOR GLOBAL DAS FORÇAS NODAIS EQUIVALENTES

A aplicação das solicitações à estrutura tem de ser simulada por forças aplicadas segundo os graus de liberdade globais.

É necessário determinar para cada acção, o vector global das forças nodais equivalentes a aplicar nos graus de liberdade devido aos diferentes tipos de carregamentos (forças nos nós, de vão, do peso próprio e dos assentamento de apoio).

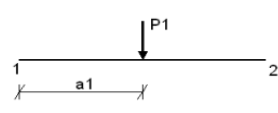
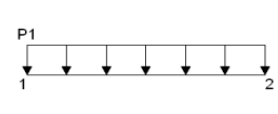
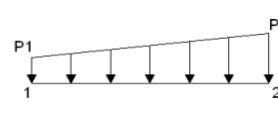
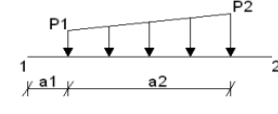
Consoante o tipo de carregamento, cargas concentradas, de vão, peso próprio ou assentamento de apoio, é necessário implementar formulações diferentes para a sua materialização no vector global das forças nodais equivalentes.

- **Cargas Concentradas nos Nós**

Neste caso as forças são aplicadas directamente nos graus de liberdade respectivos ao ponto nodal indicado, não necessitando por isso de nenhum tratamento especial.

- **Cargas de Vão**

No caso das cargas de vão, é possível a aplicação de quatro tipos de cargas, que de acordo com a tabela 4.1, podem ser linearmente concentradas (tipo 1), uniformemente distribuídas (tipo 2), linearmente distribuídas (tipo 3) e distribuídas parcialmente (tipo 4).

Tipo 1	
Tipo 2	
Tipo 3	
Tipo 4	

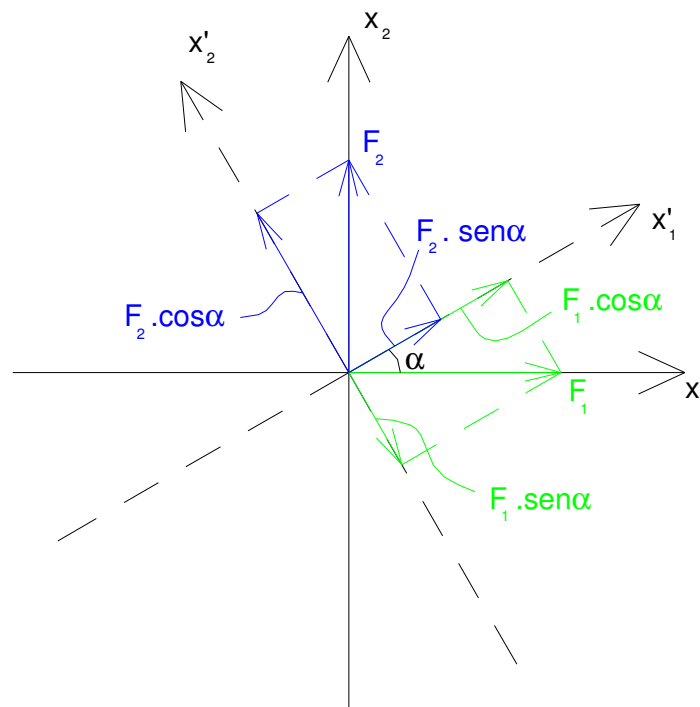
**Tabela 4.1-** Diferentes tipos de cargas de vão.

Para cada acção, onde seja aplicada uma carga de vão, o processo implementado de determinação dos esforços nodais equivalentes é o seguinte:

1º – A determinação das forças nodais equivalentes às cargas de vão é efectuada segundo o referencial local do elemento. Como foi implementada a possibilidade das cargas de vão serem introduzidas segundo o referencial global, nestas situações o primeiro passo consiste na transformação dos valores inseridos para o referencial local através da equação 4.9. [Lamas, A. R. G.; Azevedo, J. J. R. T.; Bento, J. A. R. S. P.; Matos, J. P. A. C., 1985].

$$\begin{bmatrix} F_1^{e'} \\ F_2^{e'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \text{sen}(\alpha) \\ -\text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_1^e \\ F_2^e \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Na figura 4.4, apresenta-se a demonstração gráfica da equação 4.9 permitindo verificar a transformação das forças que demonstra a transformação das forças  $F_1^e$  e  $F_2^e$  do referencial global  $(x_1, x_2)$  para o referencial local  $(x_1', x_2')$ .



**Figura 4.4** - Transformação das forças  $F_1$  e  $F_2$  do referencial  $x_1$  e  $x_2$  para o referencial  $x'_1$  e  $x'_2$ .

2º – Com as cargas aplicadas segundo os eixos locais do elemento, calculam-se as forças de fixação nas suas extremidades, segundo cada grau de liberdade, recorrendo às tabelas técnicas e desta forma obtêm-se o vector elementar das forças nodais equivalentes ( $\tilde{F}^e$ ).

3º – Como o vector das forças elementares da barra foi determinado segundo o referencial local, é necessário efectuar a transformação para o referencial global, para ser possível a sua aplicação segundo os graus de liberdade globais (equação 4.10 e 4.11).

$$\tilde{F}^e = T \times \tilde{F}^{e'} \quad (4.10)$$

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\text{sen}(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\alpha) & -\text{sen}(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f'_1 \\ f'_2 \\ f'_3 \\ f'_4 \\ f'_5 \\ f'_6 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

4º – O último passo, é assemblar o vector das forças elementares segundo os graus de liberdade globais ( $\underline{F}^e$ ), no vector global das forças nodais equivalentes da estrutura ( $\underline{F}$ ).

Os 4 passos anteriormente descritos são aplicados a cada carga de vão que exista.

- **Peso Próprio**

O processo que se encontra implementado para determinar as forças de fixação devidas à acção do peso próprio é o mesmo que foi implementado para as cargas de vão. O peso próprio é simulado por uma carga uniformemente distribuída (carregamento de vão do tipo 2), no sentido da gravidade, com o valor que resulta da multiplicação do peso volúmico do material pela área da secção transversal do elemento.

- **Assentamentos de Apoio**

Quando ocorre um assentamento de apoio, o valor da força a colocar no vector global das forças nodais equivalentes é determinado pela equação 4.12.

$$F = K \times u \quad (4.12)$$

Onde o “u” representa o valor do assentamento de apoio segundo o grau de liberdade pretendido e o “K” a rigidez admitida para a mola ( $10^{20}$ ) que simula a ligação ao exterior (apoio).

A partir da equação 4.12 é possível determinar o valor da força a aplicar, segundo a direcção do assentamento, para simular o assentamento de apoio pretendido. Este valor de força é aplicado directamente no vector global das forças nodais equivalentes segundo o grau de liberdade do apoio.

#### **4.7. DESLOCAMENTOS NOS PONTOS NODAIS**

Para a obtenção dos deslocamentos nos pontos nodais é necessário proceder à inversão da matriz de rigidez global da estrutura ( $K^{-1}$ ) e, posteriormente, a partir da equação de equilíbrio global, determinar o vector dos deslocamentos nos pontos nodais para cada uma das acções:

$$\underline{u} = \underline{K}^{-1} \times \underline{F} \quad (4.13)$$

Os resultados dos deslocamentos nos pontos nodais, obtidos para cada acção pela resolução da equação 4.13, são guardados para posterior consulta pelo utilizador, num ficheiro de resultados (.DES).

#### 4.8. ESFORÇOS NAS BARRAS

O programa calcula os três esforços generalizados em qualquer ponto da estrutura (esforço normal, esforço transverso e momento flector). A metodologia implementada consiste em calcular os esforços na extremidade de cada barra para depois determinar os esforços ao longo da barra.

Para determinar os esforços nas extremidades de cada uma das barras implementou-se a seguinte metodologia:

1º– A partir do vector dos deslocamentos globais, determinado pela resolução da equação de equilíbrio, monta-se o vector dos deslocamentos nos pontos nodais da barra,  $\underline{u}^e$  ;

2º – Determina-se a matriz de rigidez elementar da barra,  $\underline{K}^e$  no referencial global;

3º – Calculam-se as forças nas extremidades da barra segundo os graus de liberdade globais, através da seguinte fórmula:

$$\underline{F}_{\sim n\acute{o}_{barra}} = \underline{K}^e \times \underline{u}^e \quad (4.14)$$

onde cada um dos valores do vector  $\underline{F}_{\sim n\acute{o}_{barra}}$  representam o seguinte esforço:

$$\underline{F}_{\sim n\acute{o}_{barra}} = \begin{bmatrix} F_{x1 \text{ extremidade esquerda}} \\ F_{x2 \text{ extremidade esquerda}} \\ F_{x3 \text{ extremidade esquerda}} \\ F_{x1 \text{ extremidade direita}} \\ F_{x2 \text{ extremidade direita}} \\ F_{x3 \text{ extremidade direita}} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

4º – A partir das forças nos nós, segundo os graus de liberdade globais, é possível determinar os esforços nas extremidades da barra ( $\underline{Esf}_{barra}$ '), através da multiplicação pela matriz de transformação (T) (equação 4.16).

$$\underline{Esf}_{barra}' = \underline{F}_{nó_{barra}} \times T^T \quad (4.16)$$

em que:

$$T^T = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \text{sen}(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\alpha) & \text{sen}(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

5º – Os valores dos esforços devidos à deformação da estrutura devem ser corrigidos com as forças de fixação das cargas de vão que possam existir ao longo da barra.

Por esse motivo a barra é analisada isoladamente da estrutura e, atendendo às condições de continuidade, calculam-se as forças de fixação segundo os graus de liberdade locais ( $\underline{Q}_{forças\ vão}$ ') que se geraram devido às cargas de vão aplicadas.

Aplicando-se a equação 4.18 obtém-se os esforços finais nas extremidades da barra.

$$\underline{Esf}_{barra}' = \underline{Esf}_{barra}' + \underline{Q}_{forças\ vão}' \quad (4.18)$$

6º – Com base nos esforços das extremidades são determinados os esforços em cada secção intermédia da barra através das equações de equilíbrio de um sólido. Estas equações têm em conta os valores das extremidades e o carregamento aplicado ao longo da barra.

Os resultados dos esforços determinados nas diferentes secções, em todas as barras que constituem a estrutura, para cada acção, são guardados, para posterior consulta pelo utilizador, num ficheiro de resultados (.ESF).

#### 4.9. REACÇÕES DE APOIO

A determinação das reacções de apoio, nos pontos nodais que se encontram apoiados passa pela realização do ciclo de tarefas que a seguir se apresenta para todas as barras que convergem nesse ponto.

1º – Montar o vector dos deslocamentos nos pontos nodais da barra,  $\underline{u}^e$  ;

2º – Montar a matriz de rigidez elementar da barra,  $\underline{K}^e$  relativa aos graus de liberdade globais;

3º – Calcular as forças nas extremidades da barra, segundo os graus de liberdade globais, através da equação (4.19).

$$\underline{F}_{\sim \text{nó}_{\text{barra}}} = \underline{K}^e \times \underline{u}^e \quad (4.19)$$

4º – Os valores dos esforços devidos à deformação da estrutura devem ser corrigidos com as forças de fixação das cargas de vão que possam existir ao longo da barra.

Por esse motivo a barra é analisada isoladamente da estrutura e, atendendo às condições de continuidade, calculam-se as forças de fixação segundo os graus de liberdade locais ( $\underline{Q}_{\sim \text{forças vão}}$ ) que se geraram devido às cargas de vão aplicadas.

5º – As forças de fixação determinadas no ponto anterior estão segundo os graus de liberdade locais pelo que é necessário efectuar a sua transformação de referencial através da equação 4.20.

$$\underline{Q}_{\sim \text{forças vão}} = \underline{Q}_{\sim \text{forças vão}}' \times T \quad (4.20)$$

6º – Com as forças de fixação determinadas segundo os graus de liberdade globais, é possível obter as forças finais nos nós das extremidades das barras.

$$\underline{F}_{\sim \text{nó}_{\text{barra}}} = \underline{F}_{\sim \text{nó}_{\text{barra}}} + \underline{Q}_{\sim \text{forças vão}} \quad (4.21)$$

7º – Com base no vector anterior é escolhida a extremidade da barra que converge no ponto nodal apoiado e são somadas as forças determinadas para esse nó.

$$\tilde{R}(m) = \tilde{R}(m) + F_{\tilde{n}^{\text{o}} \text{ extremidade da barra}}(i) \quad (4.22)$$

Todas as reacções de apoio determinadas, nos pontos nodais apoiados, para cada acção, são guardados, para posterior consulta pelo utilizador, num ficheiro de resultados (.REA).

#### 4.10. COMBINAÇÃO DE ACÇÕES

No programa desenvolvido, também foi implementada a determinação de todas as grandezas para a combinação de acções definidas pelo utilizador.

Para se obter os deslocamentos, os esforços e as reacções de apoio devido a uma combinação de acções são afectados os valores correspondentes para cada acção pelos coeficientes na combinação definidos.

Os deslocamentos nos pontos nodais, obtidos para as combinações de acções, podem ser consultados no ficheiro de resultados (.DES), os esforços no ficheiro (.ESF) e as reacções de apoio no ficheiro (.REA).

#### 4.11. CONCLUSÃO

Neste capítulo, apresentou-se um fluxograma, onde foram indicadas as principais tarefas que compõem o programa desenvolvido. É possível destacar três fases distintas: a fase da leitura dos dados, a fase de processamento de dados e a fase da apresentação de resultados.

As fases de leitura dos dados e de apresentação de resultados são compostas unicamente por leitura e escrita de ficheiros, pelo que se optou por apresentar de uma forma mais pormenorizada a fase de processamento de dados.

A fase de processamento de dados foi descrita com algum pormenor, tendo sido referidas as técnicas e rotinas desenvolvidas para resolver a equação de equilíbrio da estrutura definida a partir do Método dos Elementos Finitos.

Ficaram expostos os passos a seguir para, através do Método dos Elementos Finitos, obter-se a matriz de rigidez global da estrutura, o vector global das forças nodais equivalentes e o vector dos deslocamentos dos pontos nodais.

Foi apresentada a metodologia implementada na determinação dos esforços nos elementos barra, das reacções de apoio da estrutura e da combinação de acções de todas as grandezas.

## Capítulo V

### VALIDAÇÃO DO PROGRAMA DE CÁLCULO AUTOMÁTICO

#### 5.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo proceder-se-á à comparação de resultados de cálculos estruturais obtidos pelo programa e por outros métodos, por forma a validar o trabalho desenvolvido.

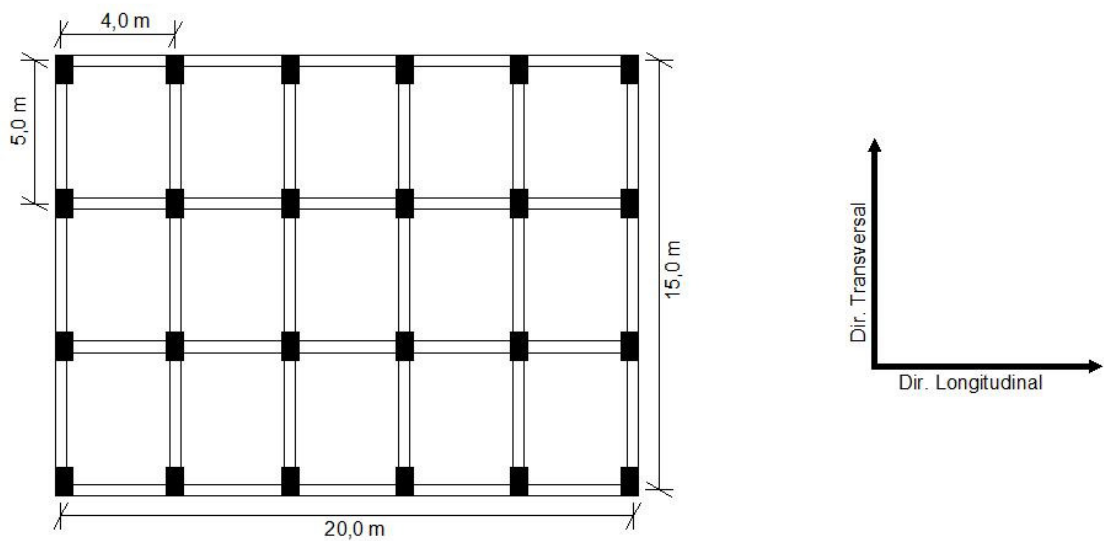
Para proceder à validação do programa desenvolvido escolheu-se um exemplo que consiste na análise estrutural de um edifício de oito pisos [LNEC, 1984]. Este edifício é composto por uma estrutura resistente reticulada de betão armado, sujeita às acções verticais permanentes e variáveis e às devidas ao sismo.

O edifício será modelado em cada direcção por uma associação de pórticos em comboio. Uma primeira comparação consiste na validação dos resultados em termos de deslocamentos, corte basal e momentos derubantes devido à acção sísmica, com os valores apresentados em LNEC, 1984.

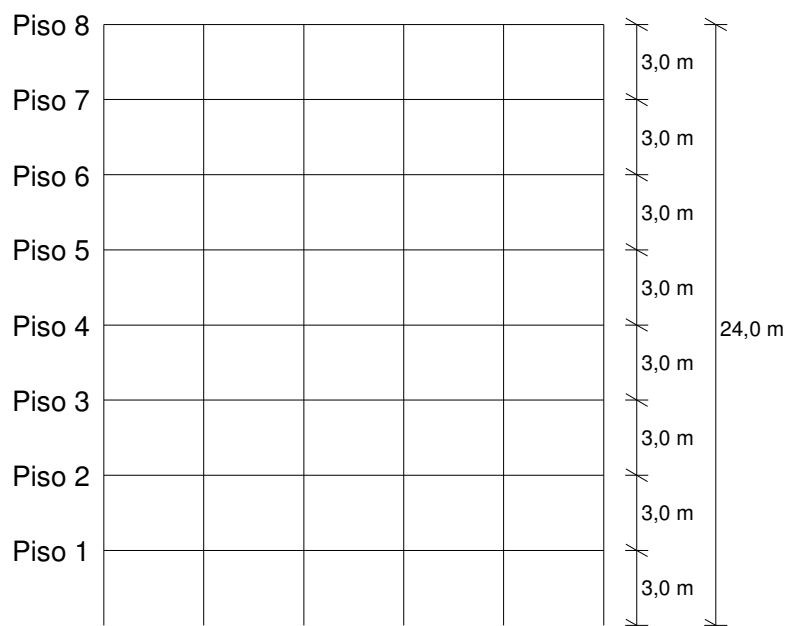
Para uma validação mais pormenorizada, foram desenvolvidos os mesmos modelos planos no SAP2000 e aplicadas as acções verticais e horizontais. Os resultados do programa são comparados com os obtidos através do SAP2000 em termos de esforços. Esta comparação é efectuada em termos de valores e graficamente através do módulo GID de representação gráfica dos resultados do programa.

## 5.2. DESCRIÇÃO DO EDIFÍCIO

O edifício é composto por uma estrutura porticada, em betão armado, com uma área de implantação de 20 x 15 m, constituído por módulos de 4 x 5 m (figura 5.1). O edifício tem oito pisos e um pé direito de 3 metros (figura 5.2).



**Figura 5.1** - Estrutura em planta do edifício em estudo.



**Figura 5.2** – Alçado Longitudinal.

As dimensões dos elementos resistentes (pilares, vigas e laje) apresentam-se na tabela 5.1.

	Pisos	Dimensões (m)
Pilares (b x h)	0 - 2	0,30 x 0,60
	2 - 4	0,30 x 0,50
	4 - 6	0,30 x 0,40
	6 - 8	0,30 x 0,30
Vigas (b x h)	1 - 8	0,20 x 0,60
Laje (e)	1 - 8	0,15

**Tabela 5.1** – Dimensões dos elementos estruturais.

A ligação da estrutura ao terreno de fundação considerou-se encastrada ao nível do rés-do-chão. Para efeitos da definição da acção sísmica, considera-se que o edifício está localizado na zona de sismicidade A e fundado em terreno médio (Tipo II do RSA).

O material constituinte da estrutura tem um comportamento elástico linear em que o módulo de elasticidade é  $E = 30 \text{ GPa}$  e o coeficiente de Poisson é  $\nu = 0,2$ . Na análise da estrutura foi considerada a deformação por esforço transversal.

### 5.3. ACÇÕES ACTUANTES SOBRE O EDIFÍCIO E COMBINAÇÃO DE ACÇÕES

Para definir e quantificar as acções e as combinações de acções, que actuam em cada uma das direcções, seguiram-se as normas do Regulamento de Segurança e Acções para Estruturas de Edifícios e Pontes [RSA, 2006] e os valores constantes em LNEC, 1984.

#### Acções:

- **Acções Permanentes**

Consideram-se acções permanentes aquelas que assumem valores constantes, ou com pequenas variações em torno do seu valor médio, durante toda ou praticamente quase toda a vida de uma estrutura.

São acções permanentes o peso próprio dos elementos estruturais e dos não estruturais.

Peso Próprio da Estrutura (PP):

- Elementos de Betão Armado -  $\gamma=25 \text{ kN/m}^3$

Restante Carga Permanente (RCP):

- Peso do revestimento e das paredes interiores -  $\gamma=2,5 \text{ kN/m}^2$
- Paredes Exteriores -  $\gamma=7,5 \text{ kN/m}$

- **Acções Variáveis**

Consideram-se acções variáveis as que assumem valores com uma variação significativa em torno do seu valor médio durante toda a vida de uma estrutura.

Sobrecargas (SC):

- Caso geral de utilização de carácter privado –  $SC = 2,0 \text{ kN/m}^2$

- Valores reduzidos:

$$\psi_0 = 0,4$$

$$\psi_1 = 0,3$$

$$\psi_2 = 0,2$$

- **Acção Sísmica**

Os efeitos devido à acção sísmica foram determinados recorrendo a uma análise estática equivalente conforme está considerado em LNEC, 1984.

As forças estáticas equivalentes sísmicas a aplicar ao nível de cada um dos pisos e para cada uma das direcções (transversal e longitudinal) foram determinadas de acordo com a expressão do art.º 32.2 do RSA:

$$F_{ki} = \beta \times h_i \times G_i \times \frac{\sum_{i=1}^n G_i}{\sum_{i=1}^n h_i G_i} \quad (5.1)$$

segundo o art.º 31.2 do RSA o valor do coeficiente sísmico,  $\beta$  é :

$$\beta = \beta_0 \times \frac{\alpha}{\eta} \quad (5.2)$$

para o terreno do tipo II e uma frequência própria da estrutura ( $f$ ) o coeficiente sísmico de referência,  $\beta_0$  é:

$$\beta_0 = 0,20 \times \sqrt{f} \quad (5.3)$$

em que:

$\beta$  – coeficiente sísmico correspondente à direcção considerada;

$h_i$  – altura a que se situa o piso  $i$  acima do nível do terreno;

$G_i$  – força correspondente à combinação de acções quase permanentes do piso  $i$ ;

$n$  – número de pisos acima do nível do terreno;

$\beta_0$  – coeficiente sísmico de referência, que depende das características do terreno e da frequência própria fundamental da estrutura;

$\alpha$  – coeficiente de sismicidade, que depende da zona sísmica em que se localiza a construção;

$\eta$  – coeficiente de comportamento;

$f$  - frequência própria da estrutura.

Os valores considerados para os parâmetros da equação 5.1, 5.2 e 5.3 foram os seguintes:

$f$  – para a direcção longitudinal foi utilizado  $f = 0,9$  e para transversal  $f = 1,1$ ;

$\alpha$  – para a zona sísmica A,  $\alpha = 1$ ;

$\eta$  – estrutura de ductilidade normal,  $\eta = 2,5$ ;

$G_i$  – para cada piso foi determinado o valor de  $G = 2450$  kN.

Aplicando à equação 5.1 os valores indicados anteriormente obteve-se:

	Forças (kN)	
	Direcção Longitudinal	Direcção Transversal
Piso 1	103,4	114,3
Piso 2	206,9	228,7
Piso 3	310,3	343,0
Piso 4	413,8	457,3
Piso 5	517,2	571,7
Piso 6	620,7	686,0
Piso 7	724,1	800,3
Piso 8	827,6	914,7

**Tabela 5.2** - Valor das forças estáticas equivalentes ao sismo a aplicar nos pisos em cada direcção.

- Valores reduzidos:

$$\psi_0 = \psi_1 = \psi_2 = 0$$

- **Combinação de Accões:**

Na verificação da segurança para os estados limites últimos, admite-se que todas as combinações de acções têm efeito desfavorável. Tendo por base o art.º 9º do RSA, a determinação dos esforços são obtidos através das seguintes combinações de acções:

- Combinações fundamentais:

No caso geral:

$$S_d = \sum_{i=1}^m \gamma_{gi} S_{Gik} + \gamma_q \left[ S_{Q1k} + \sum_{j=2}^n \psi_{0j} S_{Qjk} \right] \quad (5.3)$$

Onde:

$S_d$  – valor de cálculo do esforço actuante;

$S_{Gik}$  – valor do esforço resultante das acções permanentes;

$S_{Ek}$  – valor do esforço resultante da acção sísmica considerada como acção base;

$S_{Qjk}$  – valor do esforço resultante de uma acção variável distinta da acção de base;

$\gamma_{gi}$  – coeficiente de segurança relativo às acções permanentes;

$\gamma_q$  – coeficiente de segurança relativo às acções variáveis;

$\Psi_{0j}$  – coeficientes  $\psi$  correspondentes à acção variável de ordem  $j$ .

**Combinação 1** - combinação de acções tendo como acção variável base a sobrecarga e tendo a carga permanente um valor desfavorável onde o peso próprio da estrutura é bem determinado:

$$S_d = (1,35 \times PP + 1,5 \times RCP) + 1,5 \times SC \quad (5.4)$$

Para a situação em que a variável de base é a acção sísmica:

$$S_d = \sum_{i=1}^m S_{Gik} + \gamma_q S_{Ek} + \sum_{j=2}^n \psi_{2j} S_{Qjk} \quad (5.5)$$

em que:

$S_d$  – valor de cálculo do esforço actuante;

$S_{Gik}$  – valor do esforço resultante das acções permanentes;

$S_{Q1k}$  – valor do esforço resultante da acção variável considerada como acção base;

$S_{Qjk}$  – valor do esforço resultante de uma acção variável distinta da acção de base;

$\gamma_q$  – coeficiente de segurança relativo às acções variáveis;

$\psi_{2j}$  – coeficientes  $\psi$  correspondentes à acção variável de ordem  $j$ .

**Combinação 2** - combinação de acções tendo como acção base o sismo e considerando a acção da sobrecarga:

$$S_d = (PP + RCP) + 1,5 \times SISMO + 0,2 \times SC \quad (5.6)$$

#### 5.4. MODELAÇÃO DO EDIFÍCIO EM ESTUDO

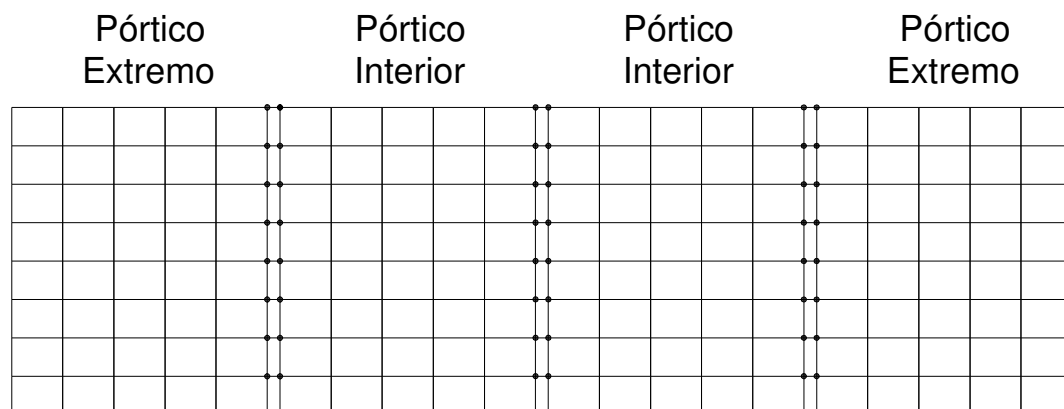
Uma vez que o edifício em análise é uma estrutura tridimensional e o programa desenvolvido só procede à análise de modelos planos, foi necessário efectuar a associação em comboio dos pórticos planos existentes, em cada direcção. Essa associação passa a ser designada por estruturas ticoidais.

A ligação entre os vários pórticos foi materializada por bielas axialmente rígidas, cuja função é a transmissão das forças axiais existentes ao nível de cada piso para o pórtico adjacente.

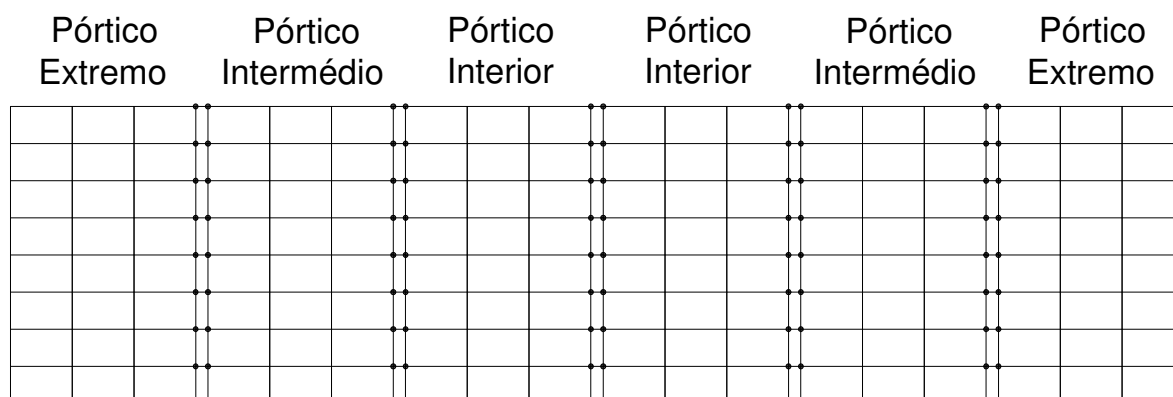
Foram adoptadas as dimensões apresentadas na tabela 5.1 para os diferentes elementos estruturais.

As lajes constituem diafragmas rígidos, que distribuem as forças horizontais pelos diversos elementos estruturais verticais. Para simular este comportamento de indeformabilidade axial da laje, foi considerada uma área fictícia nos elementos finitos horizontais que modelam as vigas de modo a que o deslocamento em todos os nós de cada piso seja igual.

Nas figuras 5.3 e 5.4 são apresentados os modelos matemáticos desenvolvidos para a direcção longitudinal e transversal, respectivamente.



**Figura 5.3** - Representação do modelo numérico em elementos finitos para a direcção longitudinal.



**Figura 5.4** - Representação do modelo numérico em elementos finitos para a direcção transversal.

### 5.5. VALIDAÇÃO E COMPARAÇÃO DO PROGRAMA QUANTO AO EFEITO DA ACÇÃO SÍSMICA

Neste ponto vai proceder-se à comparação dos resultados obtidos pelo programa desenvolvido, com os valores apresentados em LNEC, 1984.

Esta comparação tem como objectivo validar os resultados do programa, por comparação dos valores dos deslocamentos, das forças de corte basal e dos momentos derrubantes obtidos em cada piso dos pórticos, de cada uma das direcções, devidos à acção sísmica.

Os valores retirados do livro são obtidos a partir de representações gráficas de pequenas dimensões, pelo que poderão ser pouco precisos e originar algumas diferenças na comparação com os resultados obtidos pelo programa, não inviabilizando a eficácia do trabalho desenvolvido.

Como se trata de uma estrutura tridimensional e a análise efectuada é plana, os resultados obtidos pela associação de pórticos em comboio dizem respeito ao centro de rotação de cada piso. Por esse motivo, para ter em conta o efeito tridimensional da estrutura, modelando o comportamento à torção e obter o deslocamento, a força de corte basal e o momento derrubante, referentes a cada pórtico constituinte da estrutura, é necessário multiplicar o resultado obtido na associação de pórticos em comboio pelo coeficiente  $\xi$  (art.º 32.2 RSA):

$$\xi = 1 + \frac{0,6x}{a} \quad (5.6)$$

x – distância entre o centro de rotação e o plano que contém o pórtico;

a – dimensão do edifício segundo a direcção perpendicular à de actuação da acção sísmica;

Apresenta-se na tabela 5.3 os coeficientes  $\xi$  obtidos pela resolução da expressão 5.6 para os pórticos de cada uma das direcções.

	Direcção Longitudinal		Direcção Transversal		
	Pórtico Extremo	Pórtico Interior	Pórtico Extremo	Pórtico Intermédio	Pórtico Interior
Coeficiente $\xi$	1,3	1,1	1,3	1,18	1,06

**Tabela 5.3** - Valores dos coeficientes  $\xi$  para os pórticos de cada uma das direcções.

### 5.5.1. Comparação dos Deslocamentos

Para cada direcção compararam-se os deslocamentos obtidos pelo programa, ao nível de cada piso, na associação de pórticos em comboio, com os valores determinados a partir do livro LNEC, 1984 (tabelas 5.4 e 5.5).

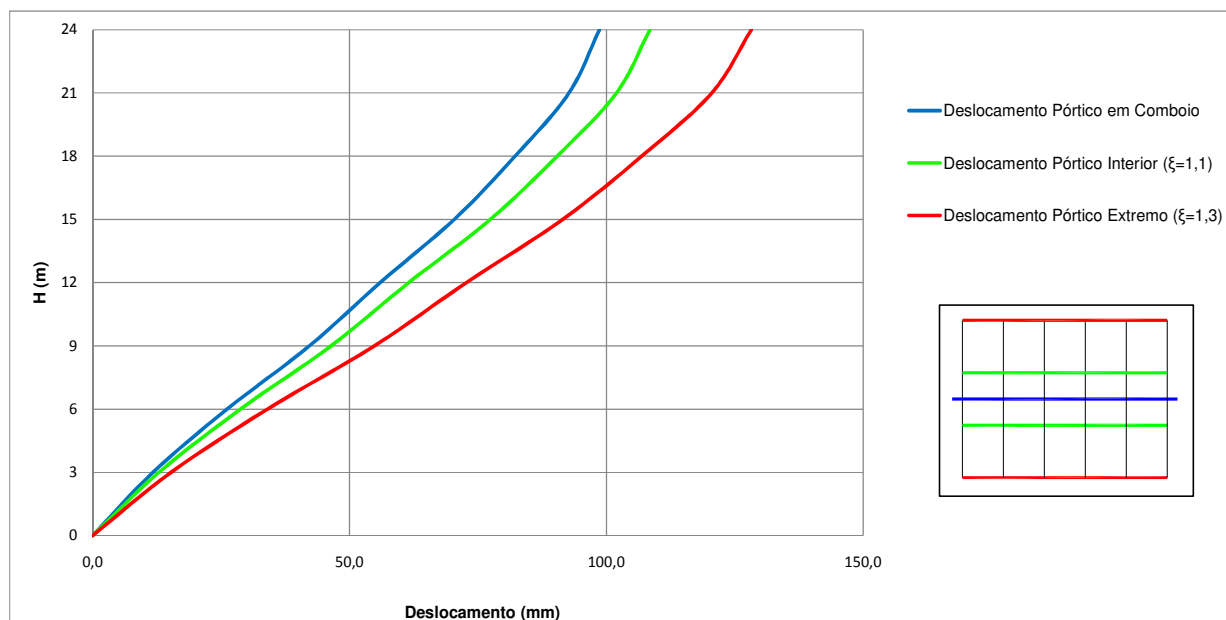
	Programa	[LNEC, 1984]	Diferença
Piso 8	98,6 mm	98,9 mm	-0,3%
Piso 7	92,7 mm	93,0 mm	-0,4%
Piso 6	82,2 mm	82,4 mm	-0,3%
Piso 5	70,4 mm	70,7 mm	-0,5%
Piso 4	55,9 mm	56,0 mm	-0,2%
Piso 3	42,2 mm	42,1 mm	0,1%
Piso 2	26,2 mm	26,0 mm	0,6%
Piso 1	11,7 mm	11,6 mm	0,7%
Piso 0	0,0 mm	0,0 mm	0,0%

**Tabela 5.4** – Deslocamentos em cada piso do pórtico na direcção longitudinal que passa pelo centro de rotação, obtidas pelo programa e retiradas do livro [LNEC, 1984].

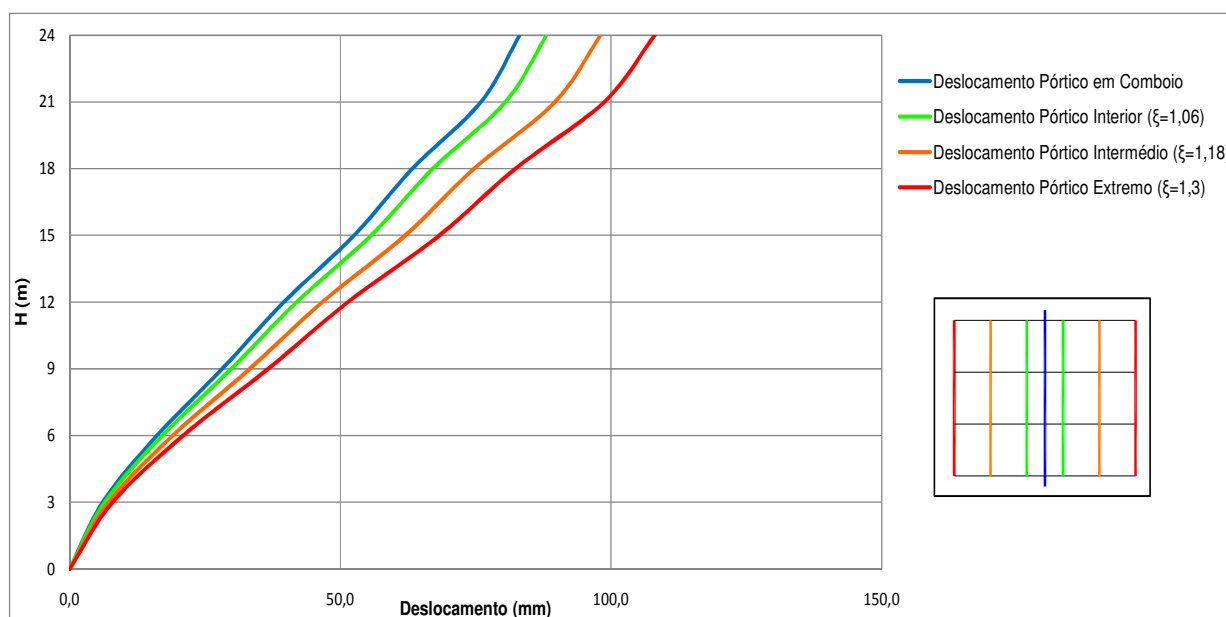
	Programa	[LNEC, 1984]	Diferença
Piso 8	83,1 mm	82,4 mm	0,9%
Piso 7	76,0 mm	75,8 mm	0,2%
Piso 6	63,3 mm	63,7 mm	-0,7%
Piso 5	52,5 mm	52,4 mm	0,3%
Piso 4	39,6 mm	39,6 mm	0,0%
Piso 3	28,2 mm	28,2 mm	0,0%
Piso 2	16,1 mm	16,1 mm	0,1%
Piso 1	6,1 mm	6,0 mm	0,8%
Piso 0	0,0 mm	0,0 mm	0,0%

**Tabela 5.5** - Deslocamentos em cada piso do pórtico na direcção transversal que passa pelo centro de rotação, obtidas pelo programa e retiradas do livro [LNEC, 1984].

Nas figuras 5.5 e 5.6 apresentam-se as deformadas em altura do ponto de cada pórtico. Os valores do deslocamento de cada pórtico foram obtidos a partir dos valores médios determinados pelo pórtico em comboio afectados pelo coeficiente  $\xi$  (tabela 5.3).



**Figura 5.5** – Deformada do ponto médio dos pórticos longitudinais devido à acção estática equivalente devida ao sismo.



**Figura 5.6** - Deformada do ponto médio dos pórticos transversais devido à acção estática equivalente devida ao sismo.

### 5.5.2. Comparação das Forças de Corte Basal

A força de corte basal de cada piso obtida através do programa, pela associação dos pórticos em comboio, corresponde ao somatório dos esforços transversos ( $V$ ) no topo dos pilares desse piso.

Na determinação dos valores de corte basal em cada piso foi necessário dividir pelo coeficiente de comportamento ( $\eta$ ), tendo sido admitido o valor de 2,5 [LNEC, 1984].

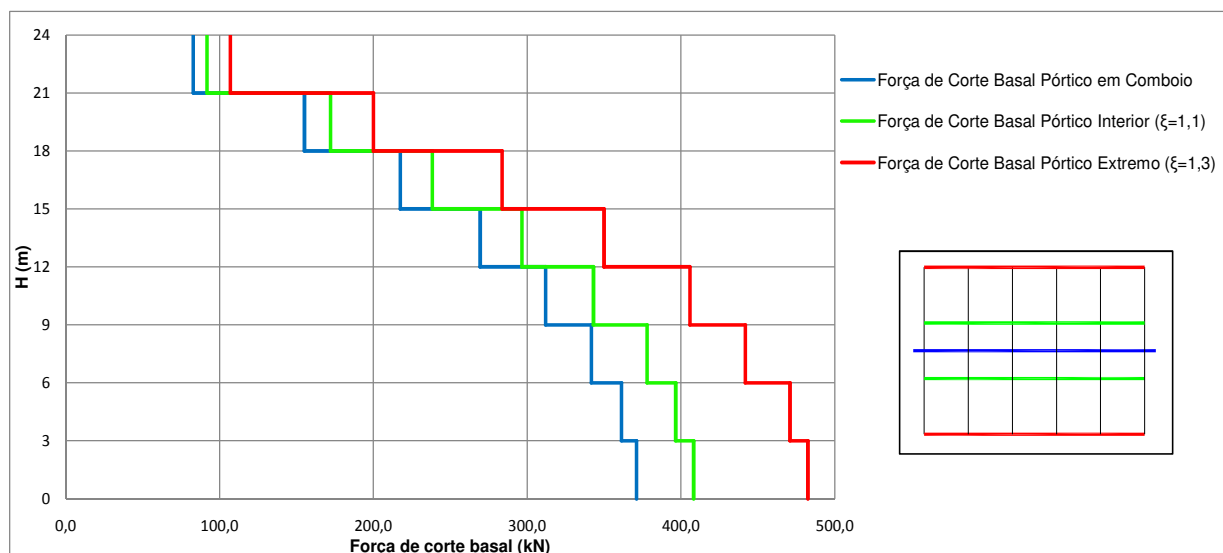
	Programa	[LNEC, 1984]	Diferença
Piso 8	82,8 kN	82,9 kN	-0,2%
Piso 7	155,2 kN	155,1 kN	0,0%
Piso 6	217,3 kN	217,5 kN	-0,1%
Piso 5	269,0 kN	269,4 kN	-0,2%
Piso 4	310,4 kN	312,0 kN	-0,5%
Piso 3	341,4 kN	341,7 kN	-0,1%
Piso 2	362,1 kN	361,4 kN	0,2%
Piso 1	372,4 kN	371,1 kN	0,4%
Piso 0	372,4 kN	371,1 kN	0,4%

**Tabela 5.6** - Forças de corte basal em cada piso do pórtico na direcção longitudinal que passa pelo centro de rotação, obtidas pelo programa e retiradas do livro [LNEC, 1984].

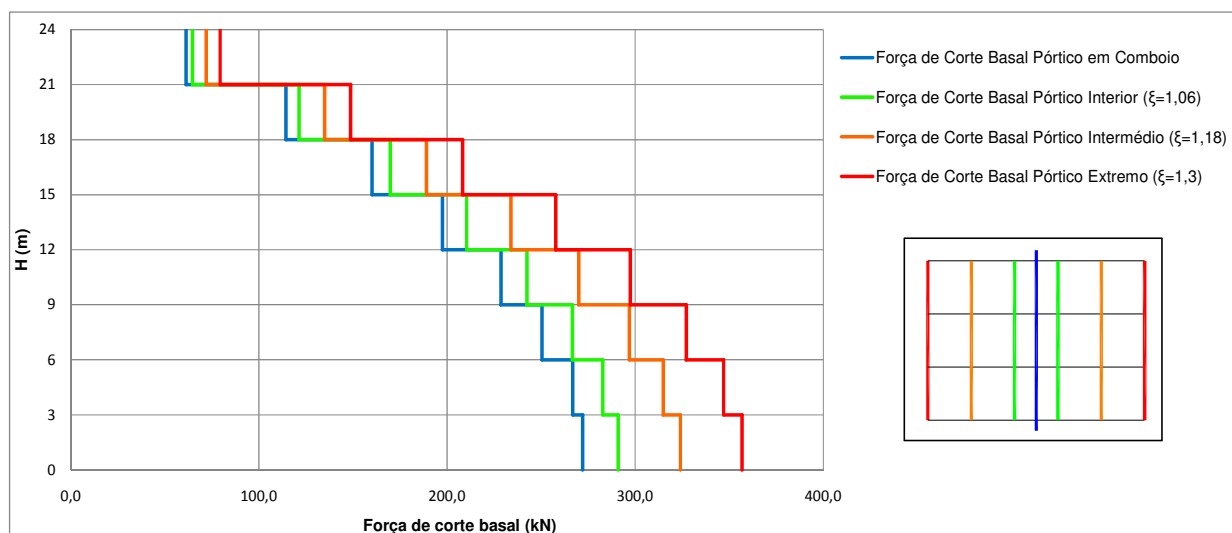
	Programa	[LNEC, 1984]	Diferença
Piso 8	61,0 kN	61,2 kN	-0,4%
Piso 7	114,4 kN	114,3 kN	0,1%
Piso 6	160,1 kN	160,1 kN	0,0%
Piso 5	198,3 kN	197,5 kN	0,4%
Piso 4	228,7 kN	228,6 kN	0,1%
Piso 3	251,6 kN	250,4 kN	0,5%
Piso 2	266,8 kN	266,8 kN	0,0%
Piso 1	274,5 kN	272,0 kN	0,9%
Piso 0	274,5 kN	272,0 kN	0,9%

**Tabela 5.7** - Forças de corte basal em cada piso do pórtico na direcção transversal que passa pelo centro de rotação, obtidas pelo programa e retiradas do livro [LNEC, 1984].

Nas figuras 5.7 e 5.8 apresentam-se os valores das forças de corte basal dos pisos de cada pórtico, afectada pelo coeficiente ( $\xi$ ) de acordo com a sua distância ao centro de rotação.



**Figura 5.7** - Distribuição em altura da força de corte basal obtida em cada pórtico na direcção longitudinal.



**Figura 5.8** - Distribuição em altura da força de corte basal obtida em cada pórtico na direcção transversal.

### 5.5.3. Comparação dos Momentos Derrubantes

O momento derrubante médio de cada piso foi obtido pela multiplicação da força de corte basal média existente acima do piso em estudo, pelo seu braço.

$$M_{\text{piso } i} = \sum_{k=1}^{8-i} \left[ (V_{b_{\text{piso}(i-k)}}) \times (h_{\text{edifício}} - h_{\text{piso}(i-k)}) \right] \quad (5.7)$$

Para cada direcção foi calculado o momento derrubante de cada piso, através das forças de corte basal obtidas pelo programa (tabelas 5.6 e 5.7) e apresenta-se a comparação com os momentos derrubantes obtidos através do livro LNEC, 1984, nas tabelas 5.8 e 5.9.

	Programa	[LNEC, 1984]	Diferença
Piso 8	0,0 kN.m	0,0 kN.m	0,0%
Piso 7	248,3 kN.m	249,9 kN.m	-0,6%
Piso 6	713,9 kN.m	718,4 kN.m	-0,6%
Piso 5	1365,6 kN.m	1367,7 kN.m	-0,1%
Piso 4	2172,6 kN.m	2174,5 kN.m	-0,1%
Piso 3	3103,6 kN.m	3085,7 kN.m	0,6%
Piso 2	4127,8 kN.m	4122,3 kN.m	0,1%
Piso 1	5214,1 kN.m	5210,3 kN.m	0,1%
Piso 0	6331,4 kN.m	6316,0 kN.m	0,2%

**Tabela 5.8** – Momentos derrubantes em cada piso do pórtico na direcção longitudinal que passa pelo centro de rotação, obtidas pelo programa e retiradas do livro [LNEC, 1984].

	Programa	[LNEC, 1984]	Diferença
Piso 8	0,0 kN.m	0,0 kN.m	0,0%
Piso 7	183,0 kN.m	184,1 kN.m	-0,6%
Piso 6	526,1 kN.m	527,9 kN.m	-0,3%
Piso 5	1006,5 kN.m	1007,9 kN.m	-0,1%
Piso 4	1601,4 kN.m	1605,5 kN.m	-0,3%
Piso 3	2287,6 kN.m	2299,8 kN.m	-0,5%
Piso 2	3042,4 kN.m	3055,6 kN.m	-0,4%
Piso 1	3842,9 kN.m	3863,1 kN.m	-0,5%
Piso 0	4666,4 kN.m	4690,0 kN.m	-0,5%

**Tabela 5.9** - – Momentos derrubantes em cada piso do pórtico na direcção transversal que passa pelo centro de rotação, obtidas pelo programa e retiradas do livro [LNEC, 1984].

Com base nos valores apresentados nas tabelas anteriores, foram determinados os momentos derrubantes em cada piso de todos os pórticos, afectadas pelo coeficiente ( $\xi$ ) (figuras 5.9 e 5.10)

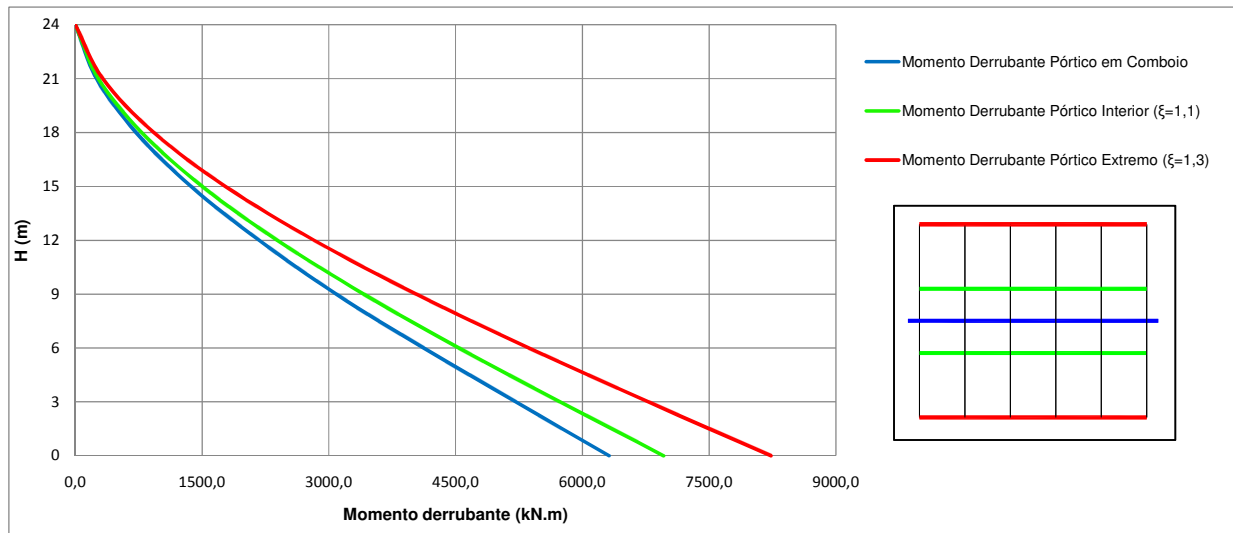


Figura 5.9 - Distribuição em altura dos momentos derrubantes obtido em cada pórtico na direcção longitudinal.

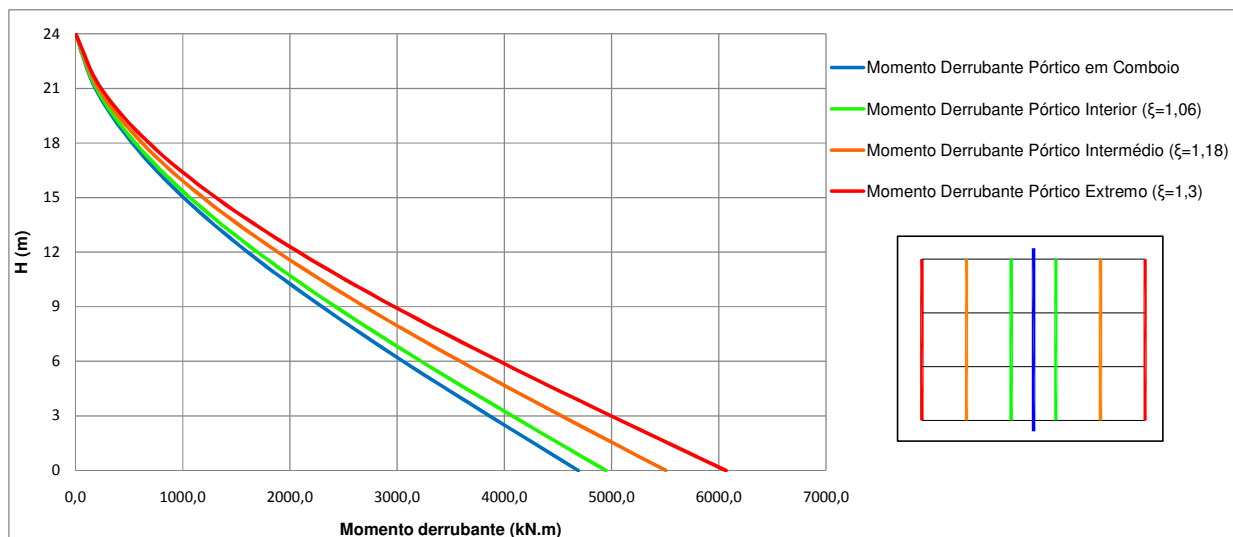


Figura 5.10 - Distribuição em altura dos momentos derrubantes obtido em cada pórtico na direcção transversal.

## **5.6. VALIDAÇÃO E COMPARAÇÃO DO PROGRAMA COM O SAP2000 QUANTO AO EFEITO DA COMBINAÇÃO DE ACÇÕES**

A comparação dos resultados no ponto anterior permite analisar os resultados em termos globais (deslocamentos, corte basal e momentos) devido à aplicação de forças horizontais ao nível de cada piso.

Para que a comparação e a validação fosse mais vasta e alargada a outro tipo de acções e de resultados do programa, foi desenvolvido no SAP2000 um modelo semelhante, tendo sido aplicadas as acções verticais (peso próprio, restante carga permanente e sobrecarga) e horizontais (forças estáticas equivalentes e a acção sísmica) e efectuadas as combinações já referidas (ponto 5.3). Com base neste modelo, foi possível proceder à comparação de esforços nas barras para as diferentes combinações. Dispensou-se a comparação de deslocamentos, uma vez que já foi apresentada no ponto anterior.

Devido à grande quantidade de informação a comparação é efectuada pela representação gráfica dos resultados.

Para os diagramas de momento flector, que se encontram muito sobrecarregados, optou-se por representar o pormenor de um piso, para que fosse possível visualizar, de forma mais clara, os valores dos diagramas e dessa forma conseguir compará-los com os do GID.

Em relação aos diagramas é importante referir que na representação do esforço transversal o GID apresenta um diagrama contrário ao do SAP2000. Isto deve-se ao facto do sentido positivo do SAP2000 ser contrário ao implementado no programa que se encontra segundo a convenção de resistência de materiais.

Na apresentação gráfica do momento flector, foi necessário multiplicar os valores por -1, para que o diagrama seja representado do lado onde se desenvolvem as tensões de tracção, como é prática corrente. Esta necessidade deve-se ao facto dos momentos flectores serem representados inversamente ao sentido positivo do seu eixo.

Em fase de todos estes condicionalismos o diagrama de momentos flectores, representado no GID está no lado correcto, só que o sinal está trocado.

Como seria bastante exaustivo, para cada acção e combinação de acções e segundo cada direcção, apresentar os três diagramas N, V e M, apenas foram comparados os diagramas referentes à Combinação 1 para direcção longitudinal, no pórtico extremo e à Combinação 2 para direcção transversal, no pórtico interior.

Nas figuras 5.11 e 5.12 podem observar-se os diagramas obtidos pelo programa e pelo SAP2000.

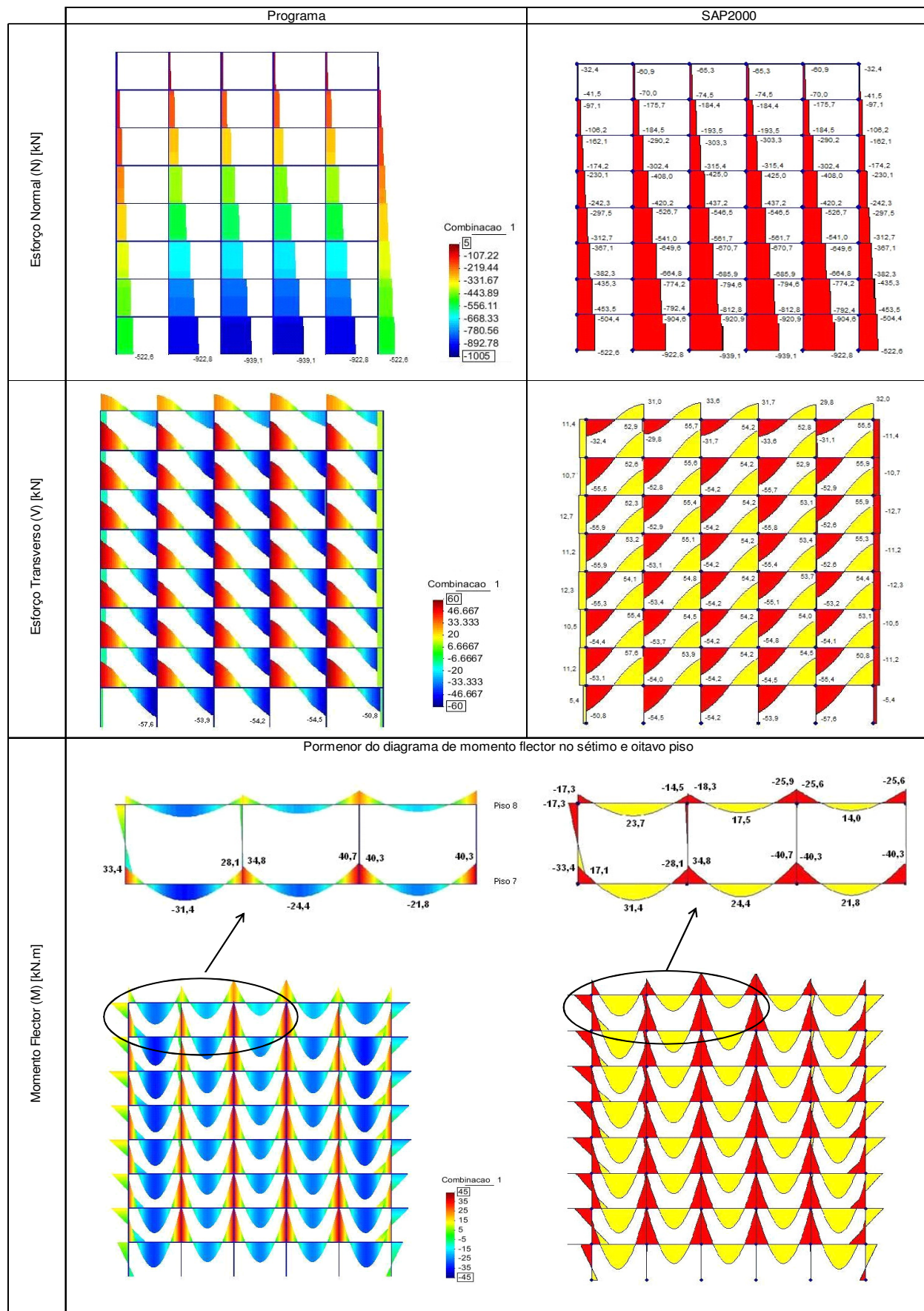


Figura 5.11 – Comparação dos diagramas de esforços obtidos pelo GID e pelo SAP2000, sem multiplicação pelo coeficiente  $\xi$ , para a Combinação 1 segundo a direcção longitudinal no pórtico extremo.

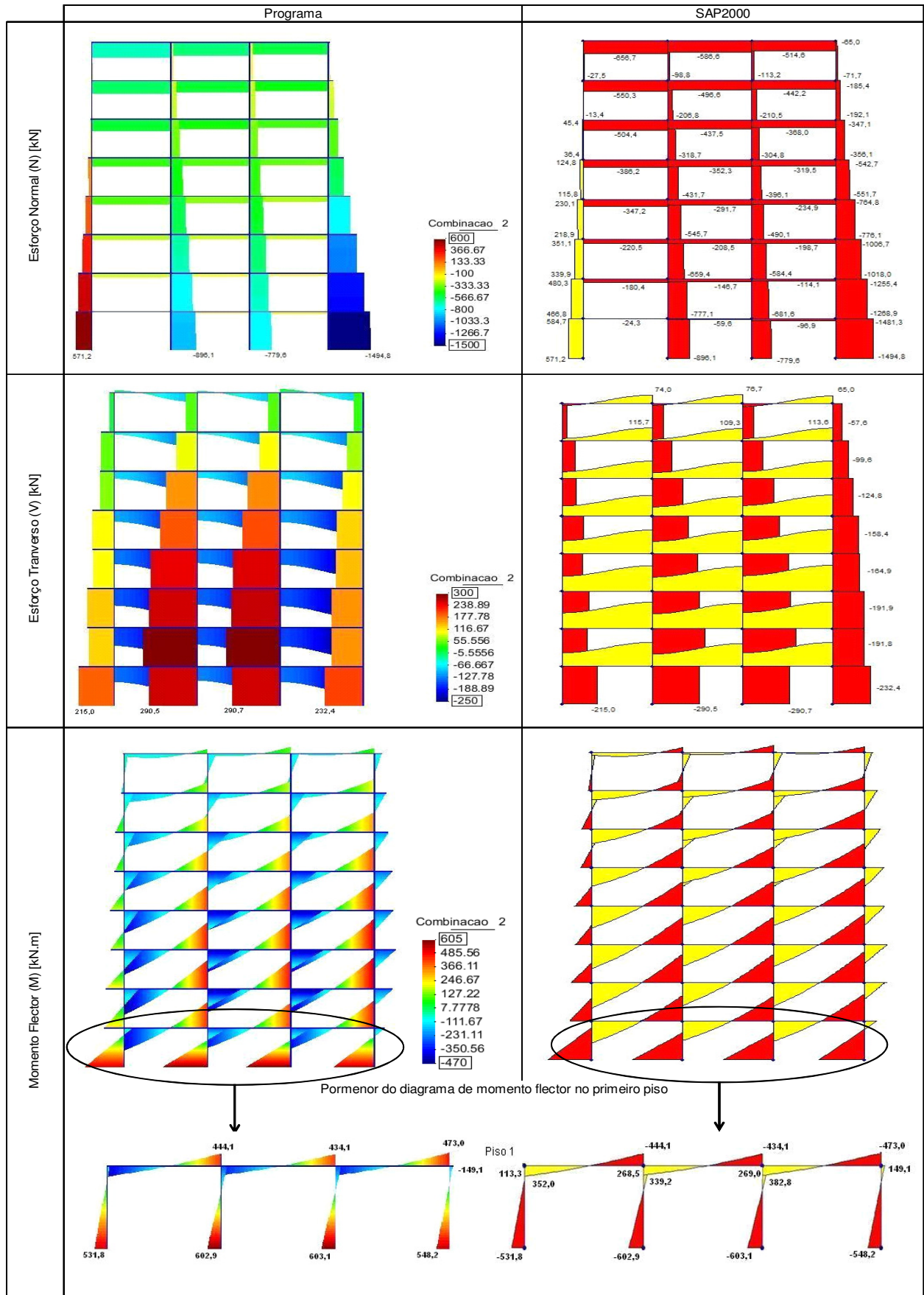


Figura 5.12 - Comparação dos diagramas de esforços obtidos pelo GID e pelo SAP2000, sem multiplicação pelo coeficiente  $\xi$ , para a Combinação 2 segundo a direcção transversal no pórtico interior.

## 5.7. CONCLUSÃO

Neste capítulo, demonstrou-se que se atingiram os objectivos iniciais e o trabalho desenvolvido está validado através do sucesso na comparação efectuada com os resultados finais obtidos na bibliografia e através do modelo desenvolvido no SAP2000.

Apresentou-se neste capítulo um exemplo de aplicação do programa desenvolvido, tendo sido escolhido um edifício constituído por uma estrutura reticulada de betão armado retirado da bibliografia [LNEC, 1984].

A modelação do edifício foi efectuada para cada direcção através da associação de todos os seus pórticos, originando dois pórticos em comboio (um por direcção). Este modelo foi também desenvolvido recorrendo ao programa comercial (SAP2000).

Com a execução deste exemplo pretendeu-se demonstrar algumas capacidades do programa desenvolvido e validar os seus resultados através da comparação com os resultados obtidos por outros modelos ([ LNEC, 1984] e SAP2000).

Em ambas as situações demonstrou-se que os resultados obtidos pelo programa de cálculo automático foram bastante satisfatórios. Na comparação com o livro as diferenças percentuais entre os valores obtidos, foram todas inferiores a 1% e na comparação com o SAP2000, verificou-se que os diagramas de esforços eram iguais.

As diferenças apresentadas na comparação com o livro podem ser justificadas devido ao facto de os valores da bibliografia terem sido retirados de uma representação gráfica.

## Capítulo VI

### CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

#### 6.1. SÍNTESE DO TRABALHO

O principal objectivo desta dissertação foi desenvolver um módulo de cálculo automático de estruturas reticuladas planas com base no Método dos Elementos Finitos.

Em face da importância actual do Método dos Elementos Finitos foi efectuada uma breve descrição da sua evolução ao longo dos tempos e procedeu-se à descrição dos principais conceitos inerentes à sua utilização na análise estrutural.

Na elaboração da dissertação foram expostos os conceitos essenciais para a utilização e compreensão do programa desenvolvido, nomeadamente, a discretização da estrutura, o grau de liberdade, os pontos nodais, o vector das forças nodais equivalentes, as matrizes de rigidez, a assemblagem e as condições de apoio.

Depois de apresentado genericamente o Método dos Elementos Finitos foram referidas as rotinas implementadas que deram forma ao programa de pórticos planos desenvolvido.

Para validação do programa, foi escolhido um exemplo da bibliografia de um edifício com uma estrutura reticulada [LNEC, 1984]. Esta validação foi efectuada através da comparação dos resultados obtidos pelo programa, com os existentes na bibliografia [LNEC, 1984] e com os obtidos pela modelação da mesma estrutura no SAP2000.

#### 6.2. PRINCIPAIS CONCLUSÕES

Na realização desta dissertação desenvolveu-se um módulo de cálculo automático de estruturas reticuladas planas, com base no Método dos Elementos Finitos, que permitiu aprofundar os conhecimentos sobre este método e também apreender e desenvolver uma linguagem de programação adequada ao cálculo científico.

O programa desenvolvido permite calcular deslocamentos, reacções de apoio e esforços em estruturas planas, por aplicação de cargas estáticas e considerando um material isotrópico, com comportamento elástico linear, conseguindo-se utilizar com sucesso o pacote gráfico GID para visualização gráfica dos resultados.

Com as comparações efectuadas verificou-se que o programa de cálculo desenvolvido permite a obtenção de resultados fiáveis, o que significa que foram atingidos os objectivos inicialmente propostos.

Todo o processo de desenvolvimento do programa foi bastante enriquecedor, porque permitiu adquirir uma maior sensibilidade para a validação dos resultados obtidos pelos programas de cálculo estrutural existentes no mercado e uma maior capacidade de compreensão da metodologia subjacente a este tipo de programas.

### **6.3. PERSPECTIVAS FUTURAS**

Com o trabalho realizado demonstrou-se que é possível, com base no Método dos Elementos Finitos e através da aprendizagem e do desenvolvimento de novos conhecimentos de programação, desenvolver programas de cálculo automático fiáveis.

Nesta perspectiva, considera-se que o programa desenvolvido poderá ser utilizado por todos aqueles que se interessem pelo cálculo estrutural, nomeadamente, pelos alunos de Engenharia Civil do Instituto Superior de Engenharia de Lisboa ou de outras instituições académicas.

Futuramente, seria interessante incluir no programa novos complementos, através da realização de novas dissertações de mestrado, onde se considerasse o desenvolvimento de novos módulos para a análise de pórticos planos, como por exemplo, a inclusão de troços rígidos, comportamento não linear do material, análise dinâmica e módulos de dimensionamento e/ou verificação estrutural.

Seria também interessante poder acoplar o módulo de cálculo automático elaborado, com módulos de cálculo desenvolvidos para outro tipo de elementos estruturais.

## Referências

### BIBLIOGRÁFICAS

Tavares, S., 1973 – “*Análise Matricial de Estruturas*”, Curso 129, LNEC

Lemos, J. V., 2005 – “*Elementos de apoio à cadeira de estruturas III*”, ISEL

Azevedo, A. F. M., 2003 - “*Método dos Elementos Finitos*”, FEUP

Oliveira, C. R., 2008 – “*Considerações sobre Modelos Estruturais*”

Oliveira, S.; Castro, B. T.; Gomes, J.P., - “*A Análise Estrutural em Engenharia Civil*”, Folhas da cadeira de Mecânica dos Sólidos III, ISEL

Oliveira, S.; Castro, B. T.; Gomes, J.P., - “*O Método dos Elementos Finitos na Análise Estrutural. Formulação em Deslocamentos*”, Folhas da cadeira de Mecânica dos Sólidos III, ISEL

Lamas, A. R. G.; Azevedo, J. J. R. T.; Bento, J. A. R. S. P.; Matos, J. P. A. C., 1985 – “*Análise de estruturas em microcomputador*”, Curso de Especialização, CMEST

Soriano, H. L., 2003 – “*Método dos Elementos Finitos em análise de estruturas*”, EDUSP

Appleton, J., 2005 – “*Construções em Betão – Nota histórica sobre a sua evolução*”

Mendes P.; Martins P.; Gomes, J., 2002 – “*Manual de Introdução ao SAP2000*”, Texto de apoio ao módulo de iniciação dos cursos de cálculo automático de estruturas do CEEC-ISEL

LNEC, 1984 – “*Análise Sísmica de estruturas de edifícios segundo a nova regulamentação*”, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, VOL.II

**SITES DE CONSULTA NA INTERNET**

[s1] - <http://inovavox.com/2008/03/07/as-20-pontes-mais-lindas-do-mundo/>

[s2] – [http://www.technica.com.br/site/query\\_result.php?var=artigos\\_vantagens\\_aluminio](http://www.technica.com.br/site/query_result.php?var=artigos_vantagens_aluminio)

[s3] - [http://cnpgb.inag.pt/gr\\_barragens/gbportugal/CastelodoBode.htm](http://cnpgb.inag.pt/gr_barragens/gbportugal/CastelodoBode.htm)

[s4] - [http://www.soplacas.pt/pag\\_int\\_costum\\_cases.asp?id\\_nivel2=29&link=29](http://www.soplacas.pt/pag_int_costum_cases.asp?id_nivel2=29&link=29)

[s5] - <http://www.panoramio.com/photo/2383005>

[s6] - <http://www.techiesoft.com/sap2000.html>

[s7] - [http://jocas5.no.sapo.pt/evolucao\\_historica.html](http://jocas5.no.sapo.pt/evolucao_historica.html)

[s8] - <http://thewolks.com/mega-desastres-1/>

[s9] - [http://www.lmc.ep.usp.br/disciplinas/pef2302/barra\\_prismatica.pdf](http://www.lmc.ep.usp.br/disciplinas/pef2302/barra_prismatica.pdf)

[s10] - [http://www.lmc.ep.usp.br/disciplinas/pef2302/outras\\_condicoes\\_extremid.pdf](http://www.lmc.ep.usp.br/disciplinas/pef2302/outras_condicoes_extremid.pdf)

## **Anexo - Manual do Utilizador**

### **INTRODUÇÃO AO PROGRAMA**

O programa, desenvolvido em linguagem de programação FORTRAN, permite a análise e o cálculo de estruturas reticulares planas (pórticos planos).

Para se proceder à análise de estruturas reticulares planas através do programa é preciso fornecer um conjunto de parâmetros que permitem caracterizar a estrutura, nomeadamente: a propriedade dos materiais, os elementos barra (que modelam os elementos estruturais reais), os nós (que representam as ligações entre os elementos), as propriedades físicas das barras, as restrições exteriores que garantem o equilíbrio estrutural e as acções (peso próprio, diferentes tipos de acções verticais e horizontais e assentamentos de apoio). Estes dados são fornecidos através de ficheiros ASCII.

O programa gera um conjunto de resultados sobre a forma de ficheiro que consiste nos dados introduzidos e todas as grandezas provenientes do cálculo estrutural, deslocamentos, reacções de apoio, esforços para cada acção introduzida e combinação considerada. Para além destes ficheiros o programa gera um conjunto de informação, também sob a forma de ficheiro, para posteriormente ser possível realizar a representação gráfica dos resultados com o recurso ao Pacote Gráfico GID.

No presente manual estão descritos todos os procedimentos necessários para que seja possível uma correcta utilização do programa desenvolvido.

## INTRODUÇÃO DOS DADOS

A introdução dos dados para posterior leitura e processamento pelo programa é efectuada através de um ficheiro ASCII “.DAT”, composto por blocos consoante o tipo de dados a fornecer ao programa.

Para cada bloco, dos diferentes tipos de dados, tem que se começar com uma palavra-chave específica para o respectivo bloco de dados (nos, materiais, apoios, etc...) e finalizar sempre com a palavra-chave “pausa” ou “Pausa”. As palavras-chave tanto podem ser escritas em letras minúsculas como maiúsculas.

A sequência dos blocos de dados no ficheiro é aleatória não sendo necessário, para a correcta leitura do programa, que seja pela ordem do exemplo que serve de base à explicação do presente manual.

As unidades físicas admitidas para os diversos dados que compõem os blocos de dados devem ser coerentes. Isto significa que se, por exemplo, escolher o sistema de unidades kN-m todos os dados referidos anteriormente devem ser dados de acordo com esse sistema escolhido. No entanto, nada impede que o utilizador opte por outro sistema de unidades desde que seja coerente.

Importante será salientar que a parte decimal dos números, contrariamente ao que é usual, não será separada da parte inteira do número por vírgula (,), mas sim por ponto (.).

O ficheiro tem que finalizar, obrigatoriamente, com a palavra-chave “fim” ou “Fim”.

## 2.1. DEFINIÇÃO DOS BLOCO DE DADOS

### 2.1.1. Estrutura Exemplo

Para demonstrar como deverá ser introduzido no programa cada bloco de dados, será utilizada como exemplo a estrutura (figura 2.1).

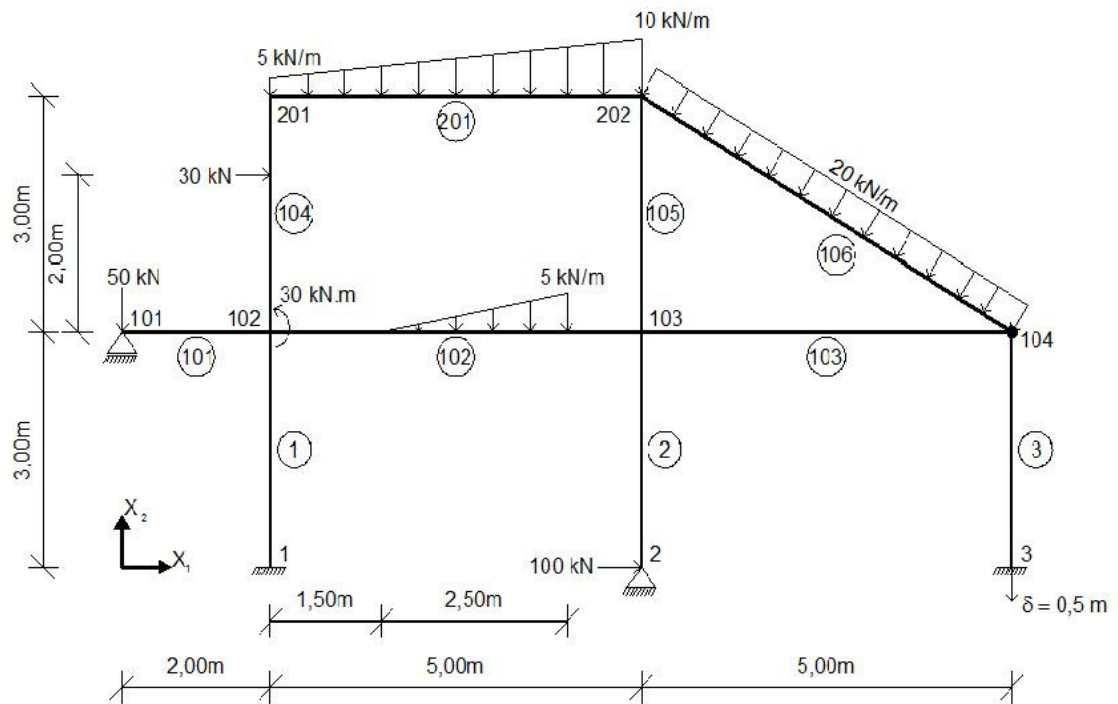


Figura 2.1 – Descrição da estrutura que serve de exemplo ao manual.

#### Características dos Materiais:

- **Barras Horizontais:**

$$E = 25,0 \text{ Gpa}$$

$$\nu = 0,2$$

$$\gamma = 25 \text{ kN} / \text{m}^3$$

$$\rho = 2,55 \text{ kN}$$

- **Barras Verticais e Barra Inclinada:**

$$E = 30,0 \text{ Gpa}$$

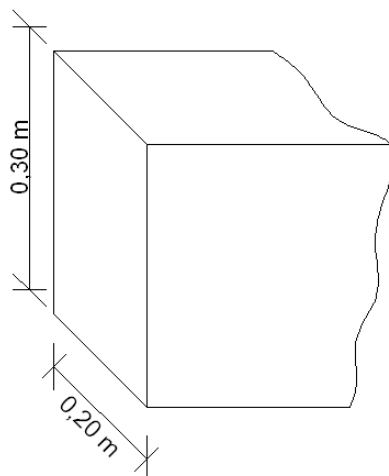
$$\nu = 0,3$$

$$\gamma = 24 \text{ kN} / \text{m}^3$$

$$\rho = 2,55 \text{ kN}$$

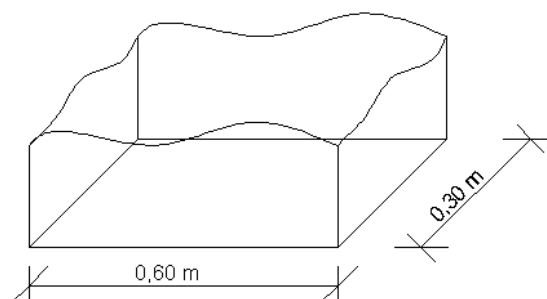
Secção dos Elementos Barra:

- **Barras Horizontais:**



**Figura 2.2** – Secção transversal dos elementos barra horizontal.

- **Barras Verticais e Barra Inclinada:**

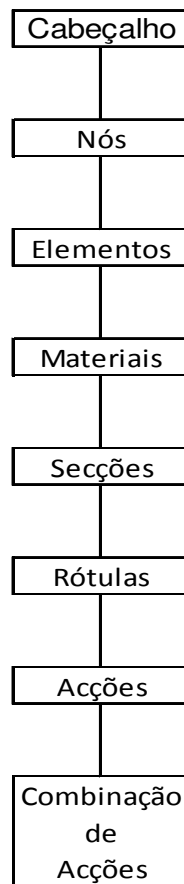


**Figura 2.3** - Secção transversal dos elementos barra verticais e inclinada.

Acções Actuantes:

- 1 – Acção Permanente, onde só é considerada a acção do peso próprio na estrutura.
- 2 – Restantes Acções, onde são consideradas as cargas aplicadas na estrutura representadas na figura 2.1.
- 3 – Assentamento Vertical do Apoio “3”.

Na figura 2.4 apresenta-se esquematicamente a organização do ficheiro de dados por blocos.



**Figura 2.4** – Definição esquemática dos blocos de dados do ficheiro dados do exemplo

#### 2.1.1.1. Cabeçalho

O cabeçalho não se insere na filosofia apresentada anteriormente para os blocos de dados que se introduzem no ficheiro, porque não tem que iniciar com nenhuma palavra-chave, nem terminar com a palavra “pausa”.

As duas primeiras linhas do ficheiro são sempre reservadas para um cabeçalho, que identifica e descreve a estrutura em estudo, podendo ficar em branco.

Para o exemplo apresentado o cabeçalho é o seguinte:

```
Edifício A  
Portico 5.1]
```

**Figura 2.5** – Cabeçalho do bloco de dados.

### 2.1.1.2. Identificação e Coordenadas dos Nós (Nos)

Este bloco de dados é iniciado com a palavra-chave “nos” ou “Nos”.

Deve ser introduzido um nó por linha e em cada linha são fornecidos três dados, com seguinte sequência: em primeiro lugar a identificação do nó (essa designação tem que ser feita com números, não letras), de seguida a sua coordenada relativa ao eixo  $x_1$  e por último a coordenada relativa ao eixo  $x_2$ . A identificação e a ordem dos nós não têm que ser sequencial (figura 2.6).

```
Nos
1  2.00  0.00
2  7.00  0.00
3  12.00 0.00
101 0.00  3.00
102 2.00  3.00
103 7.00  3.00
104 12.00 3.00
201 2.00  6.00
202 7.00  6.00
Pausa
```

Figura 2.6 – Bloco de dados das coordenadas dos nós.

### 2.1.1.3. Identificação e Incidências dos Elementos (Elementos)

Neste bloco de dados indica-se ao programa quais os nós que formam cada um dos Elementos Barra 2D e a constituição do elemento em termos de secção e material.

Para iniciar este bloco a palavra-chave é “elementos barra 2D” ou “Elementos Barra 2D”, nas linhas seguintes coloca-se a informação de cada um dos elementos existentes, iniciando-se sempre cada linha com o número que identifica o elemento, depois coloca-se o número dos nós que formam esse elemento e por fim o número que identifica o material pelo qual o elemento é constituído e o número da sua secção (figura 2.7).

Quando se indica o número dos nós é preciso ter atenção a ordem em que se colocam o primeiro e o segundo nó porque essa ordem irá indicar a orientação do elemento. É usual orientar os elementos horizontais da esquerda para a direita e os elementos verticais de baixo para cima, para ficar de acordo com as convenções já conhecidas da resistência dos materiais.

```

Elemento Barra2D:
1 1 102 1 2
2 2 103 1 2
3 3 104 1 2
101 101 102 1 1
102 102 103 1 1
103 103 104 1 1
104 102 201 1 2
105 103 202 1 2
106 202 104 1 2
201 201 202 1 1
Pausa
    
```

**Figura 2.7** - Bloco de dados com as incidências dos elementos barra.

#### 2.1.1.4. Identificação e Características dos Materiais (Materiais)

No bloco de dados “materiais” serão inseridas as características físicas do material constituinte da estrutura.

Este bloco de dados inicia-se com a palavra-chave “materiais” e na primeira linha indica-se o tipo de comportamento isotrópico, anisotrópico ou ortotrópico do material. Como, actualmente, só se encontra implementado um comportamento isotrópico deve colocar-se o “I”.

Na linha seguinte são inseridos cinco dados por linha, iniciando-se cada linha com o número identificativo do material, seguido das suas características físicas, que são dadas pela seguinte sequência: módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson, peso volúmico e massa volúmica.

Sempre que se pretende introduzir outro material no bloco de dados é necessário indicar o código desse material e na linha seguinte a sua identificação e as suas características físicas (figura 2.8).

```

Materiais:
I
1 2.5E7 0.2 25 2.55
I
2 3.0E7 0.3 24 2.55
Pausa
    
```

**Figura 2.8** – Bloco de dados dos materiais.

#### 2.1.1.5. Identificação e Características das Secções (Seccao)

As secções dos elementos barra são definidas por três parâmetros que são: a área, a área de corte e a inércia segundo o plano de flexão.

O bloco é iniciado com a palavra-chave “seccao”. Na linha seguinte é indicada a identificação da secção (essa identificação tem que ser feita com números, não letras), a área da secção, a área reduzida de corte e a inércia segundo o plano de flexão (figuras 2.9 e 2.10).

Se o valor da área da secção e o valor da área reduzida de corte da secção tiverem um valor diferente o programa considera a deformação por esforço transversal, mas se o valor da área reduzida de corte da secção for igual ao valor da área da secção o programa não considera essa deformação.

```

Seccoes :
1 0.06 0.06 0.00045
2 0.18 0.18 0.0054
Pausa
    
```

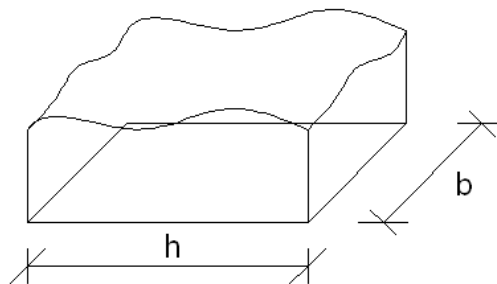
**Figura 2.9** - Bloco de dados das secções sem a deformação por esforço transversal.

```

Secções :
1 0.06 0.05 0.00045
2 0.18 0.15 0.0054
Pausa
    
```

**Figura 2.10** – Bloco de dados das secções com a deformação por esforço transversal.

A título de exemplo apresenta-se uma secção rectangular (figura 2.11).



**Figura 2.11** – Secção transversal genérica com as dimensões b x h.

Para a figura a fórmula da área, a área de corte e a inércia são as seguintes:

$$A = b \times h$$

$$A_{\text{corte}} = A \times \left(\frac{5}{6}\right)$$

$$I = \frac{b \times h^3}{12}$$

### 2.1.1.6. Definição dos Apoios (Apoios)

Este bloco de dados permite materializar as ligações ao exterior (condições de apoio). A palavra-chave para iniciar este bloco será “apoios”. Para cada apoio é indicada a identificação do nó que está apoiado e os graus de liberdade que estão restringidos. Se o grau de liberdade estiver restringido será colocado o “1”, se não estiver o “0”.

O primeiro código colocado é referente ao grau de liberdade da translação horizontal, o segundo da translação vertical e o último da rotação (figura 2.12).

```
Apoios
1 1 1 1
2 1 1 0
3 1 1 1
101 0 1 0
Pausa
```

Figura 2.12 - Bloco de dados dos apoios.

### 2.1.1.7. Definição das Rótulas (Rotulas)

Para iniciar este bloco deve usar-se a palavra-chave “rotulas.” Em cada linha é indicada a identificação do elemento barra que está rotulado e os respectivos esforços que se encontram libertados. O código “1” é utilizado quando não se liberta qualquer esforço e o código “0” quando se pretende libertar um esforço.

A colocação dos códigos deve respeitar, quer para o nó “1”, quer para o nó “2”, a seguinte ordem: esforço normal, esforço transversal e momento flector (figura 2.13). No total são inseridos 6 códigos.

No programa só estão implementadas rótulas de momento flector.

Para que o sistema seja resolúvel, o número de rótulas que convergem num nó tem de ser sempre inferior ao número de barras que convergem no mesmo nó, existindo sempre uma barra sem rótula.

```
Rotulas
3 1 1 1 1 1 0
103 1 1 1 1 1 0
Pausa
```

Figura 2.13 - Bloco de dados das rótulas

### 2.1.1.8. Definição das Acções (Accoes)

Este bloco de dados permite definir o número de acções que vão actuar sobre a estrutura e introduzir, para cada uma das acções, o tipo de carregamentos que esta pode conter, tais como o peso próprio, as forças concentradas, as forças de vão e os assentamentos de apoio.

Este bloco começa com a palavra-chave “accoes”, na linha seguinte é indicado o número total de acções distintas a que a estrutura irá estar submetida e depois são iniciados os subblocos onde se introduzem as forças que cada acção contém. Esses novos subblocos iniciam com o nome de cada acção e finalizam com a palavra “pausa” (figura 2.14).

```
Accoes
3
Peso Proprio
...
Pausa
Restantes Accoes
...
Pausa
Assentamento Apoio
...
Pausa
```

**Figura 2.14** – Representação esquemática de como deve ser iniciado cada subbloco da acção.

Definido o nome de cada acção é preciso indicar sempre se vai ser contabilizada a acção do peso próprio. O código numérico “1” é colocado quando se pretende contabilizar acção do peso próprio e o código numérico “0” quando não se pretende contabilizar.

Os restantes tipos de força serão indicados apenas quando estiverem presentes e sem qualquer ordem específica (figura 2.15).

```
Accoes
3
Peso Proprio
1
Pausa
Restantes Accoes
0
conc
2 100 0 0
101 0 -50 0
102 0 0 30
vao
102 4 12 0 -5 1.5 2.5
104 1 12 -30 2
106 2 12 -20
201 3 12 -5 -10
Pausa
Assentamento Apoio
0
assen
3 0 -0.5
Pausa
```

**Figura 2.15** - Bloco de dados das acções

### Cargas Concentradas

Este tipo de carregamento é indicado com a palavra-chave “conc”.

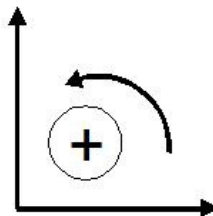
As cargas concentradas são aplicadas directamente nos nós da estrutura segundo os graus de liberdade globais.

Na linha seguinte é identificado o nó onde se encontra aplicada a carga concentrada e são indicados três valores correspondentes aos graus de liberdade onde se podem aplicar este tipo de cargas. O primeiro valor é o referente às cargas horizontais, o segundo às cargas verticais e o terceiro ao momento flector. Se não existir nenhuma carga, segundo um determinado grau de liberdade, coloca-se sempre o valor de 0 (figura 2.16).

```
conc
2    100  0  0
101  0   -50 0
102  0    0  30
```

**Figura 2.16** – Bloco dos parâmetros das cargas concentradas.

Para saber se o valor da carga concentrada é positivo ou negativo é tida em atenção a convenção de sinais implementada no programa (figura 2.17).



**Figura 2.17** – Representação dos sentidos positivos das cargas concentradas.

### Cargas de Vão

Este carregamento inicia-se com a palavra-chave “vao”. Estas cargas são aplicadas ao longo do elemento finito barra e podem ser linearmente concentradas, uniformemente distribuídas, linearmente distribuídas e distribuídas parcialmente.

As cargas de vão são definidas pela identificação do elemento onde se encontra aplicada a carga, pelo tipo de carga aplicada, pela direcção segundo a qual se encontra aplicada a carga e pelos parâmetros que caracterizam cada tipo de carga (distâncias aos nós e valores das cargas) (figura 2.18).

```

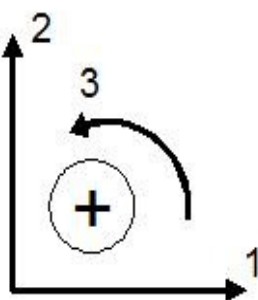
vao
102 4 12 0 -5 1.5 2.5
104 1 12 -30 2
106 2 12 -20
201 3 12 -5 -10
Pausa

```

**Figura 2.18** – Bloco dos parâmetros das cargas de vão.

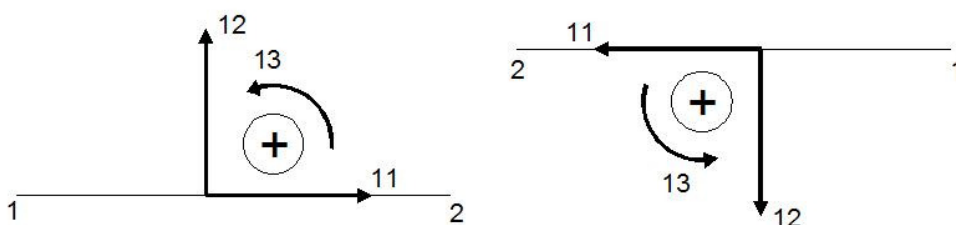
Quanto à direcção está implementada no programa a possibilidade destas cargas serem aplicadas segundo a direcção dos graus de liberdade globais ou segundo a direcção dos graus de liberdade locais do elemento.

Se a carga de vão estiver aplicada segundo os graus de liberdade globais do elemento é introduzido o código numérico 1 ,2 ou 3 (figura 2.19).



**Figura 2.19** – Representação do código numérico para os graus de liberdade globais.

Se a carga de vão estiver aplicada segundo os graus de liberdade locais do elemento é introduzido o código numérico 11, 12 ou 13 (figura 2.20).



**Figura 2.20** – Representação do código numérico para os graus de liberdade locais e sentidos positivos em duas barras orientadas de forma diferente.

Podem introduzir-se na estrutura quatro tipos de cargas de vão (tabela 2.1).

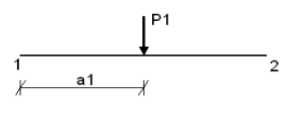
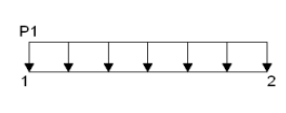
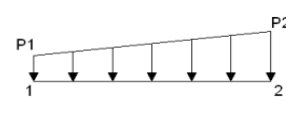
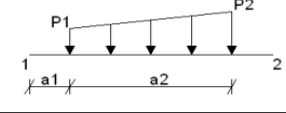
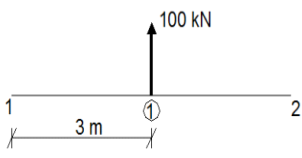
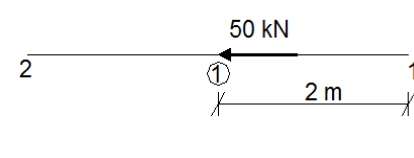
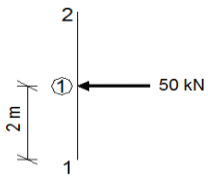
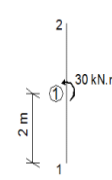
		Parâmetros			
		P1	P2	a1	a2
Tipo 1		X	-	X	-
Tipo 2		X	-	-	-
Tipo 3		X	X	-	-
Tipo 4		X	X	X	X

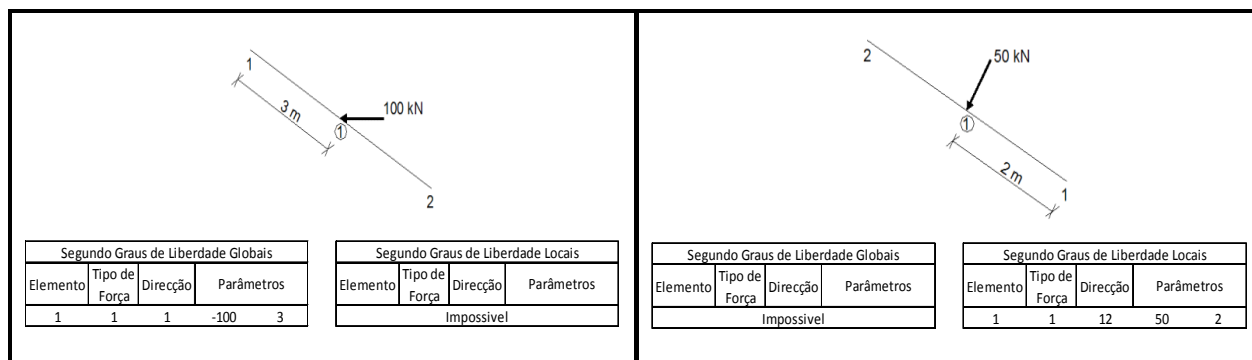
Tabela 2.1 – Tipos de cargas de vão e os respectivos parâmetros que as definem.

• **Tipo 1 (Cargas Linearmente Concentrada)**

Estas cargas caracterizam-se por dois parâmetros: o valor da carga/momento aplicada e a distância entre o nó “1” do elemento e o local onde a carga é aplicada.

As cargas concentradas tanto podem ser aplicadas segundo a direcção dos graus de liberdade globais como dos graus de liberdade locais (tabela 2.2).

																									
<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="4">Segundo Grau de Liberdade Globais</th> </tr> <tr> <th>Elemento</th> <th>Tipo de Força</th> <th>Direcção</th> <th>Parâmetros</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>100 3</td> </tr> </tbody> </table>	Segundo Grau de Liberdade Globais				Elemento	Tipo de Força	Direcção	Parâmetros	1	1	2	100 3	<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="4">Segundo Grau de Liberdade Locais</th> </tr> <tr> <th>Elemento</th> <th>Tipo de Força</th> <th>Direcção</th> <th>Parâmetros</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>12</td> <td>100 3</td> </tr> </tbody> </table>	Segundo Grau de Liberdade Locais				Elemento	Tipo de Força	Direcção	Parâmetros	1	1	12	100 3
Segundo Grau de Liberdade Globais																									
Elemento	Tipo de Força	Direcção	Parâmetros																						
1	1	2	100 3																						
Segundo Grau de Liberdade Locais																									
Elemento	Tipo de Força	Direcção	Parâmetros																						
1	1	12	100 3																						
																									
<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="4">Segundo Grau de Liberdade Globais</th> </tr> <tr> <th>Elemento</th> <th>Tipo de Força</th> <th>Direcção</th> <th>Parâmetros</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>1</td> <td>-50 2</td> </tr> </tbody> </table>	Segundo Grau de Liberdade Globais				Elemento	Tipo de Força	Direcção	Parâmetros	1	1	1	-50 2	<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="4">Segundo Grau de Liberdade Locais</th> </tr> <tr> <th>Elemento</th> <th>Tipo de Força</th> <th>Direcção</th> <th>Parâmetros</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>12</td> <td>50 2</td> </tr> </tbody> </table>	Segundo Grau de Liberdade Locais				Elemento	Tipo de Força	Direcção	Parâmetros	1	1	12	50 2
Segundo Grau de Liberdade Globais																									
Elemento	Tipo de Força	Direcção	Parâmetros																						
1	1	1	-50 2																						
Segundo Grau de Liberdade Locais																									
Elemento	Tipo de Força	Direcção	Parâmetros																						
1	1	12	50 2																						
<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="4">Segundo Grau de Liberdade Globais</th> </tr> <tr> <th>Elemento</th> <th>Tipo de Força</th> <th>Direcção</th> <th>Parâmetros</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>1</td> <td>-50 2</td> </tr> </tbody> </table>	Segundo Grau de Liberdade Globais				Elemento	Tipo de Força	Direcção	Parâmetros	1	1	1	-50 2	<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="4">Segundo Grau de Liberdade Locais</th> </tr> <tr> <th>Elemento</th> <th>Tipo de Força</th> <th>Direcção</th> <th>Parâmetros</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>12</td> <td>50 2</td> </tr> </tbody> </table>	Segundo Grau de Liberdade Locais				Elemento	Tipo de Força	Direcção	Parâmetros	1	1	12	50 2
Segundo Grau de Liberdade Globais																									
Elemento	Tipo de Força	Direcção	Parâmetros																						
1	1	1	-50 2																						
Segundo Grau de Liberdade Locais																									
Elemento	Tipo de Força	Direcção	Parâmetros																						
1	1	12	50 2																						
<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="4">Segundo Grau de Liberdade Globais</th> </tr> <tr> <th>Elemento</th> <th>Tipo de Força</th> <th>Direcção</th> <th>Parâmetros</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>1</td> <td>-50 2</td> </tr> </tbody> </table>	Segundo Grau de Liberdade Globais				Elemento	Tipo de Força	Direcção	Parâmetros	1	1	1	-50 2	<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="4">Segundo Grau de Liberdade Locais</th> </tr> <tr> <th>Elemento</th> <th>Tipo de Força</th> <th>Direcção</th> <th>Parâmetros</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>13</td> <td>30 2</td> </tr> </tbody> </table>	Segundo Grau de Liberdade Locais				Elemento	Tipo de Força	Direcção	Parâmetros	1	1	13	30 2
Segundo Grau de Liberdade Globais																									
Elemento	Tipo de Força	Direcção	Parâmetros																						
1	1	1	-50 2																						
Segundo Grau de Liberdade Locais																									
Elemento	Tipo de Força	Direcção	Parâmetros																						
1	1	13	30 2																						

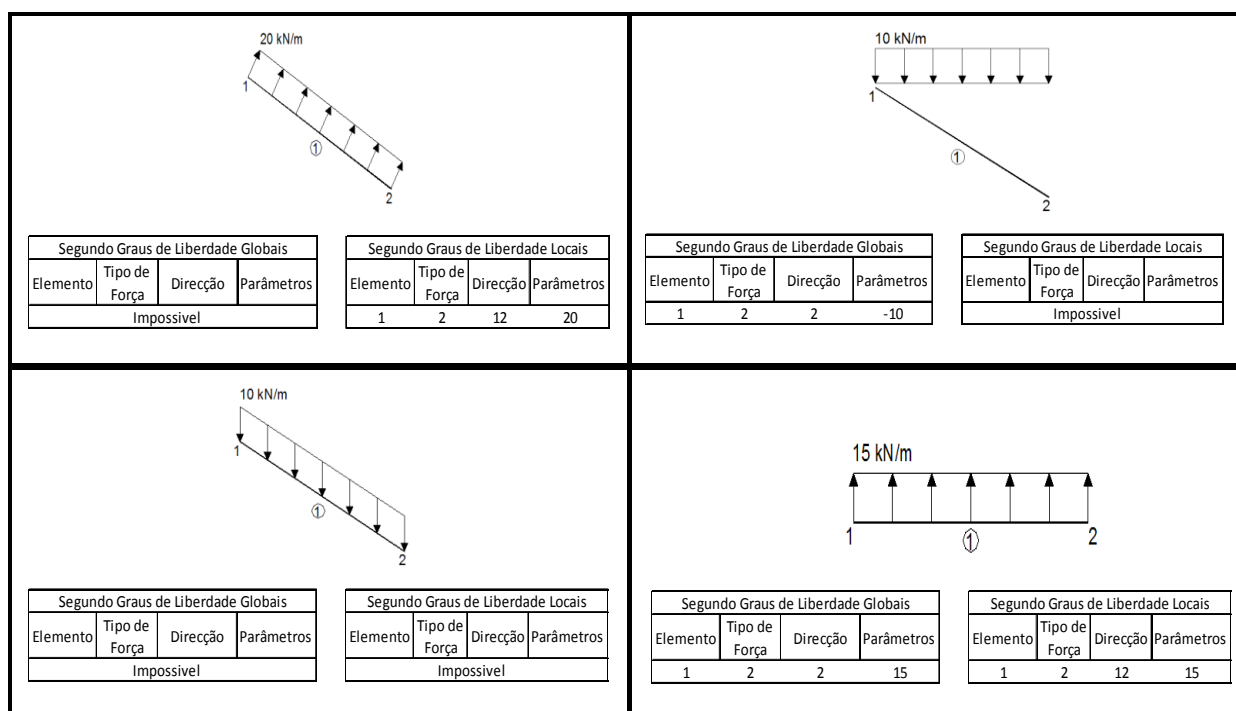


**Tabela 2.2** – Cargas de vão do tipo 1 e respectivo conjunto de dados a introduzir segundo a direcção dos graus de liberdade locais e globais.

• **Tipo 2 (Cargas Uniformemente Distribuídas)**

Neste tipo de cargas estão incluídas as cargas uniformemente distribuídas ao longo de toda a barra, sendo só necessário indicar o valor da carga.

As cargas do tipo 2 tanto podem ser aplicadas segundo a direcção dos graus de liberdade globais 1 e 2 ou segundo a direcção dos graus de liberdade locais 11 e 12. Não está implementado qualquer tipo de carregamento segundo a direcção 3 e 13, porque em pórticos planos não se aplicam momentos distribuídos (tabela 2.3).



<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="4">Segundo Grau de Liberdade Globais</th> </tr> <tr> <th>Elemento</th> <th>Tipo de Força</th> <th>Direcção</th> <th>Parâmetros</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>2</td> <td>1</td> <td>10</td> </tr> </tbody> </table>	Segundo Grau de Liberdade Globais				Elemento	Tipo de Força	Direcção	Parâmetros	1	2	1	10	<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="4">Segundo Grau de Liberdade Locais</th> </tr> <tr> <th>Elemento</th> <th>Tipo de Força</th> <th>Direcção</th> <th>Parâmetros</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>2</td> <td>12</td> <td>-10</td> </tr> </tbody> </table>	Segundo Grau de Liberdade Locais				Elemento	Tipo de Força	Direcção	Parâmetros	1	2	12	-10
Segundo Grau de Liberdade Globais																									
Elemento	Tipo de Força	Direcção	Parâmetros																						
1	2	1	10																						
Segundo Grau de Liberdade Locais																									
Elemento	Tipo de Força	Direcção	Parâmetros																						
1	2	12	-10																						
<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="4">Segundo Grau de Liberdade Globais</th> </tr> <tr> <th>Elemento</th> <th>Tipo de Força</th> <th>Direcção</th> <th>Parâmetros</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>2</td> <td>1</td> <td>-20</td> </tr> </tbody> </table>	Segundo Grau de Liberdade Globais				Elemento	Tipo de Força	Direcção	Parâmetros	1	2	1	-20	<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="4">Segundo Grau de Liberdade Locais</th> </tr> <tr> <th>Elemento</th> <th>Tipo de Força</th> <th>Direcção</th> <th>Parâmetros</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>2</td> <td>11</td> <td>-10</td> </tr> </tbody> </table>	Segundo Grau de Liberdade Locais				Elemento	Tipo de Força	Direcção	Parâmetros	1	2	11	-10
Segundo Grau de Liberdade Globais																									
Elemento	Tipo de Força	Direcção	Parâmetros																						
1	2	1	-20																						
Segundo Grau de Liberdade Locais																									
Elemento	Tipo de Força	Direcção	Parâmetros																						
1	2	11	-10																						

**Tabela 2.3** – Cargas de vão do tipo 2 e respectivo conjunto de dados a introduzir segundo a direcção dos graus de liberdade locais e globais.

• **Forças do Tipo 3 (Cargas Linearmente Distribuídas)**

Nestas cargas estão inseridas as cargas distribuídas trapezoidais e triangulares ao longo de toda a barra. Os parâmetros que as caracterizam são o valor do carregamento no início e no fim da barra. Para um carregamento triangular um desses valores será forçosamente 0.

Este tipo de carga apenas pode ser aplicado segundo o grau de liberdade local 12 (tabela 2.4).

<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="4">Segundo Grau de Liberdade Globais</th> </tr> <tr> <th>Elemento</th> <th>Tipo de Força</th> <th>Direcção</th> <th>Parâmetros</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td colspan="4">Não está implementado</td> </tr> </tbody> </table>	Segundo Grau de Liberdade Globais				Elemento	Tipo de Força	Direcção	Parâmetros	Não está implementado				<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="4">Segundo Grau de Liberdade Locais</th> </tr> <tr> <th>Elemento</th> <th>Tipo de Força</th> <th>Direcção</th> <th>Parâmetros</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>3</td> <td>12</td> <td>-7 -12,5</td> </tr> </tbody> </table>	Segundo Grau de Liberdade Locais				Elemento	Tipo de Força	Direcção	Parâmetros	1	3	12	-7 -12,5
Segundo Grau de Liberdade Globais																									
Elemento	Tipo de Força	Direcção	Parâmetros																						
Não está implementado																									
Segundo Grau de Liberdade Locais																									
Elemento	Tipo de Força	Direcção	Parâmetros																						
1	3	12	-7 -12,5																						
<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="4">Segundo Grau de Liberdade Globais</th> </tr> <tr> <th>Elemento</th> <th>Tipo de Força</th> <th>Direcção</th> <th>Parâmetros</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td colspan="4">Não está implementado</td> </tr> </tbody> </table>	Segundo Grau de Liberdade Globais				Elemento	Tipo de Força	Direcção	Parâmetros	Não está implementado				<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="4">Segundo Grau de Liberdade Locais</th> </tr> <tr> <th>Elemento</th> <th>Tipo de Força</th> <th>Direcção</th> <th>Parâmetros</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>3</td> <td>12</td> <td>0 7,5</td> </tr> </tbody> </table>	Segundo Grau de Liberdade Locais				Elemento	Tipo de Força	Direcção	Parâmetros	1	3	12	0 7,5
Segundo Grau de Liberdade Globais																									
Elemento	Tipo de Força	Direcção	Parâmetros																						
Não está implementado																									
Segundo Grau de Liberdade Locais																									
Elemento	Tipo de Força	Direcção	Parâmetros																						
1	3	12	0 7,5																						
<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="4">Segundo Grau de Liberdade Globais</th> </tr> <tr> <th>Elemento</th> <th>Tipo de Força</th> <th>Direcção</th> <th>Parâmetros</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td colspan="4">Não está implementado</td> </tr> </tbody> </table>	Segundo Grau de Liberdade Globais				Elemento	Tipo de Força	Direcção	Parâmetros	Não está implementado				<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="4">Segundo Grau de Liberdade Locais</th> </tr> <tr> <th>Elemento</th> <th>Tipo de Força</th> <th>Direcção</th> <th>Parâmetros</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>3</td> <td>12</td> <td>15 5</td> </tr> </tbody> </table>	Segundo Grau de Liberdade Locais				Elemento	Tipo de Força	Direcção	Parâmetros	1	3	12	15 5
Segundo Grau de Liberdade Globais																									
Elemento	Tipo de Força	Direcção	Parâmetros																						
Não está implementado																									
Segundo Grau de Liberdade Locais																									
Elemento	Tipo de Força	Direcção	Parâmetros																						
1	3	12	15 5																						

**Tabela 2.4** – Forças de vão do tipo 3 e respectivo conjunto de dados a introduzir segundo a direcção dos graus de liberdade locais e globais.

• **Tipo 4 (Cargas Distribuídas Parcialmente)**

As cargas do tipo 4 são os carregamentos uniformemente distribuídos e os carregamentos distribuídos trapezoidais e triangulares que não estão aplicados ao longo de toda a barra.

Para caracterizar este tipo de carga são necessários quatro parâmetros, o valor no início e no fim do carregamento, a distância entre o nó "1" do elemento e o início do carregamento e o comprimento do carregamento.

A carga do tipo 4 também só pode ser aplicada segundo o grau de liberdade local 12 (tabela 2.5).

<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="4">Segundo Grau de Liberdade Globais</th> </tr> <tr> <th>Elemento</th> <th>Tipo de Força</th> <th>Direcção</th> <th>Parâmetros</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td colspan="4">Não está Implementado</td> </tr> </tbody> </table>	Segundo Grau de Liberdade Globais				Elemento	Tipo de Força	Direcção	Parâmetros	Não está Implementado				<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="4">Segundo Grau de Liberdade Locais</th> </tr> <tr> <th>Elemento</th> <th>Tipo de Força</th> <th>Direcção</th> <th>Parâmetros</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>4</td> <td>12</td> <td>-7,5 -7,5 1 3</td> </tr> </tbody> </table>	Segundo Grau de Liberdade Locais				Elemento	Tipo de Força	Direcção	Parâmetros	1	4	12	-7,5 -7,5 1 3
Segundo Grau de Liberdade Globais																									
Elemento	Tipo de Força	Direcção	Parâmetros																						
Não está Implementado																									
Segundo Grau de Liberdade Locais																									
Elemento	Tipo de Força	Direcção	Parâmetros																						
1	4	12	-7,5 -7,5 1 3																						
<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="4">Segundo Grau de Liberdade Globais</th> </tr> <tr> <th>Elemento</th> <th>Tipo de Força</th> <th>Direcção</th> <th>Parâmetros</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td colspan="4">Não está Implementado</td> </tr> </tbody> </table>	Segundo Grau de Liberdade Globais				Elemento	Tipo de Força	Direcção	Parâmetros	Não está Implementado				<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="4">Segundo Grau de Liberdade Locais</th> </tr> <tr> <th>Elemento</th> <th>Tipo de Força</th> <th>Direcção</th> <th>Parâmetros</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>4</td> <td>12</td> <td>0 3,25 0 6</td> </tr> </tbody> </table>	Segundo Grau de Liberdade Locais				Elemento	Tipo de Força	Direcção	Parâmetros	1	4	12	0 3,25 0 6
Segundo Grau de Liberdade Globais																									
Elemento	Tipo de Força	Direcção	Parâmetros																						
Não está Implementado																									
Segundo Grau de Liberdade Locais																									
Elemento	Tipo de Força	Direcção	Parâmetros																						
1	4	12	0 3,25 0 6																						
<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="4">Segundo Grau de Liberdade Globais</th> </tr> <tr> <th>Elemento</th> <th>Tipo de Força</th> <th>Direcção</th> <th>Parâmetros</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td colspan="4">Não está Implementado</td> </tr> </tbody> </table>	Segundo Grau de Liberdade Globais				Elemento	Tipo de Força	Direcção	Parâmetros	Não está Implementado				<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="4">Segundo Grau de Liberdade Locais</th> </tr> <tr> <th>Elemento</th> <th>Tipo de Força</th> <th>Direcção</th> <th>Parâmetros</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>4</td> <td>12</td> <td>5 15 1 4</td> </tr> </tbody> </table>	Segundo Grau de Liberdade Locais				Elemento	Tipo de Força	Direcção	Parâmetros	1	4	12	5 15 1 4
Segundo Grau de Liberdade Globais																									
Elemento	Tipo de Força	Direcção	Parâmetros																						
Não está Implementado																									
Segundo Grau de Liberdade Locais																									
Elemento	Tipo de Força	Direcção	Parâmetros																						
1	4	12	5 15 1 4																						
<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="4">Segundo Grau de Liberdade Globais</th> </tr> <tr> <th>Elemento</th> <th>Tipo de Força</th> <th>Direcção</th> <th>Parâmetros</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td colspan="4">Não está Implementado</td> </tr> </tbody> </table>	Segundo Grau de Liberdade Globais				Elemento	Tipo de Força	Direcção	Parâmetros	Não está Implementado				<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="4">Segundo Grau de Liberdade Locais</th> </tr> <tr> <th>Elemento</th> <th>Tipo de Força</th> <th>Direcção</th> <th>Parâmetros</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>4</td> <td>12</td> <td>-2,5 -7 1 4</td> </tr> </tbody> </table>	Segundo Grau de Liberdade Locais				Elemento	Tipo de Força	Direcção	Parâmetros	1	4	12	-2,5 -7 1 4
Segundo Grau de Liberdade Globais																									
Elemento	Tipo de Força	Direcção	Parâmetros																						
Não está Implementado																									
Segundo Grau de Liberdade Locais																									
Elemento	Tipo de Força	Direcção	Parâmetros																						
1	4	12	-2,5 -7 1 4																						

**Tabela 2.5** – Cargas de vão do tipo 4 e respectivo conjunto de dados a introduzir segundo a direcção dos graus de liberdade locais e globais.

### Assentamentos de Apoio

O bloco de dados inicia-se com a palavra-chave “assen”, na linha seguinte coloca-se a identificação do nó apoiado, depois um primeiro valor relativo ao assentamento na direcção horizontal e um segundo valor relativo ao assentamento na direcção vertical.

Se numa das direcções não houver assentamento nesse apoio é colocado o valor de 0.

O programa só permite a ocorrência de assentamentos de apoio segundo os graus de liberdade globais (figura 2.21).

```
assen  
3 0 -0.5  
Pausa
```

**Figura 2.21** – Bloco dos parâmetros do assentamentos de apoio.

### **2.1.1.9. Combinação de Acções**

Este bloco inicia com a palavra-chave “combinacoes”, nas linhas seguintes é indicado o nome da combinação (só podendo ser feita por números) e os respectivos coeficientes majorativos ou de redução para cada acção (figura 2.22).

```
Combinacoes  
1 1.5 1.3 0.5  
2 0 1.5 1  
Pausa
```

**Figura 2.22** - Bloco de dados das combinações de acções.

## CÁLCULO DA ESTRUTURA

Concluída a elaboração do ficheiro de dados este é colocado na mesma pasta onde se encontra o programa de cálculo.

No correr do programa irá aparecer um ecrã preto onde será questionado o nome do ficheiro de dados, por exemplo, para este ficheiro, "Portico\_Manual.dat", o utilizador deveria escrever "Portico\_Manual".

Colocado o nome do ficheiro o programa efectua o cálculo da estrutura e cria uma série de ficheiros de resultados.

## FICHEIRO DE RESULTADOS

Após efectuar o cálculo da estrutura, o programa origina um conjunto de ficheiros de resultados com o mesmo nome do ficheiro .DAT, mas com extensões diferentes.

As diferentes extensões existentes são as seguintes:

- “ “.OUT – Ficheiro descritivo dos dados inseridos.
- “ “.DES – Ficheiro dos deslocamentos nos nós.
- “ “.REA – Ficheiro das reacções de apoio.
- “ “.ESF – Ficheiro dos esforços ao longo da barra.
- “ “.MSH – Ficheiro para ser utilizado no “GID” para visualização gráfica da malha da estrutura.
- “ “.RES – Ficheiro para ser utilizado no “GID” para visualização das deformadas e diagramas de esforços.

### 4.1. FICHEIRO “.OUT”

Neste ficheiro são descritos todos os dados inseridos no programa pelo ficheiro de dados (.DAT), o que permite uma visualização mais organizada e explícita desses mesmos dados.

Este ficheiro contém sempre no início o cabeçalho atribuído pelo utilizador, seguido de um resumo referente aos dados inseridos, ao número total de nós, elementos, secções, materiais, apoios, rótulas, acções e combinação de acções. Para cada acção é indicado o número de cargas concentradas, cargas de vão e assentamentos de apoio que a acção contém (figura 4.1).

```

Edificio A
Portico 5.1

Resumo:
 9 pontos nodais
10 elementos
 2 tipos de materiais
 2 tipos de seccoes
 4 apoios
 2 rotulas
 3 accoes
 2 combinacoes de accoes

Accao 1 - Peso Proprio
Cargas concentras 0
Cargas de vao 0
Assentamentos de apoio 0

Accao 2 - Restantes Accoes
Cargas concentras 3
Cargas de vao 4
Assentamentos de apoio 0

Accao 3 - Assentamento Apoio
Cargas concentras 0
Cargas de vao 0
Assentamentos de apoio 1
    
```

**Figura 4.1** – Cabeçalho e resumo dos dados da estrutura em exemplo apresentados no ficheiro “.OUT”.

Após o resumo são apresentados os dados que foram fornecidos pelo ficheiro de dados de uma forma mais organizada. Esses dados são apresentados pela seguinte ordem: nós, elementos, materiais, secções, apoios, rótulas, acções e combinações.

O bloco dos nós menciona os pontos nodais que constituem a estrutura e as respectivas coordenadas X1 e X2 de cada ponto (figura 4.2).

```

Nos :
      x1      x2
 1    2.00    0.00
 2    7.00    0.00
 3   12.00    0.00
101    0.00    3.00
102    2.00    3.00
103    7.00    3.00
104   12.00    3.00
201    2.00    6.00
202    7.00    6.00
    
```

**Figura 4.2** – Bloco das coordenadas dos nós apresentado no ficheiro “.OUT”.

Segue-se o bloco das incidências onde são mencionados os elementos barra que constituem a estrutura e indicado o nó inicial (No1) e o nó final (No2) que formam o elemento, bem como o tipo de material e o tipo de secção (figura 4.3).

Elementos Barra2D:				
Elemento	No1	No2	Tipo Material	Tipo Seccao
1	1	102	1	2
2	2	103	1	2
3	3	104	1	2
101	101	102	1	1
102	102	103	1	1
103	103	104	1	1
104	102	201	1	2
105	103	202	1	2
106	202	104	1	2
201	201	202	1	1

**Figura 4.3** - Bloco das incidências apresentado no ficheiro “.OUT”.

No bloco dos materiais é referido o seu tipo de comportamento (I=isotrópico), o modo de elasticidade (E), o coeficiente de Poisson, o peso volúmico e a massa volúmica (figura 4.4).

Materiais:					
	Tipo	E	C. Poisson	P. Vol.	M. Vol.
1	I	0.25E+08	0.20	25.00	2.55
2	I	0.30E+08	0.30	24.00	2.55

**Figura 4.4** - Bloco dos materiais apresentado no ficheiro “.OUT”.

No bloco das secções são mencionadas as diferentes secções existentes e, para cada uma, é indicada a sua área, área de corte e a inércia segundo o plano de flexão (figura 4.5).

Seccoes:			
	Area	Area Corte	Inercia
1	0.06	0.06	0.00045
2	0.18	0.18	0.00540

**Figura 4.5** - Bloco dos materiais apresentado no ficheiro “.OUT”.

Segue-se o bloco dos apoios onde são indicados os nós que se encontram apoiados. Para cada apoio são referidas as restrições de movimento segundo os graus de liberdade globais (X1, X2 e Rot). No bloco dos apoios o código “1” indica que o grau de liberdade está a ser restringido e o código “0” indica que esse grau não tem nenhuma restrição (figura 4.6).

Apoios:			
Nos	X1	X2	Rot
1	1	1	1
2	1	1	0
3	1	1	1
101	0	1	0

Figura 4.6 – Bloco dos apoios apresentado no ficheiro “.OUT”.

No bloco das rótulas é indicado primeiro o elemento barra que contém a rótula e depois, para cada uma das extremidades do elemento, indica-se segundo os graus de liberdade locais (X1, X2 e Rot), os esforços que se encontram libertos pela rótula.

O código “1” é colocado no caso de não se libertar o esforço e o código “0” quando se liberta um esforço (figura 4.7).

Rotulas:						
Barra	Extremidade Esq.			Extremidade Dir.		
	X1	X2	Rot	X1	X2	Rot
3	1	1	1	1	1	0
103	1	1	1	1	1	0

Figura 4.7 - Bloco das rótulas apresentado no ficheiro “.OUT”.

O bloco das acções contém todas as acções que foram consideradas e, para cada uma delas, serão indicados todos os carregamentos a que a estrutura em exemplo foi sujeita (figura 4.8).

```

Accoes:
-----
Peso proprio
Peso proprio - Considerado
-----
Restantes Accoes
Peso proprio - Nao considerado
Cargas concentras:
Nos      X1      X2      Rot
2        100.00  0.00   0.00
101      0.00   -50.00  0.00
102      0.00   0.00   30.00
Cargas de vao:
Elemento Tipo  Direccao  P1    P2    a1    a2
102      4      12        0.00  -5.00  1.50  2.50
104      1      12       -30.00  0.00  2.00  0.00
106      2      12       -20.00  0.00  0.00  0.00
201      3      12        -5.00 -10.00  0.00  0.00
-----
Assentamento Apoio
Peso proprio - Nao considerado
Assentamentos de apoio:
Nos      X1      X2
3        0.00  -0.50
-----

```

Figura 4.8 - Bloco das acções apresentado no ficheiro “.OUT”.

O último bloco de dados é o da combinação de acções. Para o exemplo em estudo, como temos três acções, o número 1 corresponde ao coeficiente da primeira acção definida no bloco das acções que foi o “Peso Próprio”, o número 2 ao coeficiente da acção “Restante Carga” e o número 3 ao coeficiente da acção “Assentamento de Apoio” (figura 4.9).

```

Combinacoes:
Combinacao      Accoes
                  1      2      3
1                1.50  1.30  0.50
2                0.00  1.50  1.00

```

Figura 4.9 - Bloco das combinações de acções apresentado no ficheiro “.OUT”.

## 4.2. FICHEIRO “.DES”

Neste ficheiro são apresentados os deslocamentos em cada nó para os vários tipos de carga. O ficheiro irá ter sempre uma primeira linha, onde se indica qual é a acção em causa para os valores apresentados e depois, para cada nó da estrutura, é indicado o deslocamento horizontal (u1), o deslocamento vertical (u2) e a rotação (r) (figura 4.10).

```

Deslocamentos nos nos devidos a accao: Peso Proprio
No      U1      U2      R
1       -0.61117E-20  -0.36172E-18  0.72084E-20
2       0.38034E-20  -0.51810E-18  -0.38603E-05
3       0.23083E-20  -0.30087E-18  -0.69250E-20
101     -0.36556E-05  -0.11710E-19  -0.34756E-04
102     -0.36556E-05  -0.19615E-04  -0.43537E-05
103     -0.10971E-05  -0.30040E-04  0.88177E-05
104     0.15389E-04  -0.15558E-04  0.15350E-03
201     0.92628E-05  -0.26494E-04  -0.19578E-04
202     0.46671E-05  -0.45465E-04  -0.54860E-04

Deslocamentos nos nos devidos a Combinacao 1
No      U1      U2      R
1       0.11294E-17  0.86846E-18  -0.15282E-16
2       -0.56393E-17  -0.17886E-16  -0.71068E-02
3       0.54200E-17  -0.25000E+00  -0.16260E-16
101     0.47175E-01  0.18836E-17  0.15113E-01
102     0.47175E-01  0.64647E-04  -0.30195E-01
103     0.44451E-01  -0.11856E-02  -0.30238E-01
104     0.36133E-01  -0.24927E+00  -0.47774E-01
201     0.17801E+00  0.21227E-03  -0.46803E-01
202     0.18098E+00  -0.22203E-02  -0.49841E-01

```

Figura 4.10 – Excerto do ficheiro “.DES” onde são apresentados os deslocamentos.

Os sentidos positivos dos deslocamentos e da rotação são os da figura 4.11.

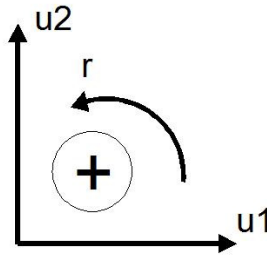


Figura 4.11 – Representação dos sentidos positivos dos deslocamentos.

### 4.3. FICHEIRO “.ESF”

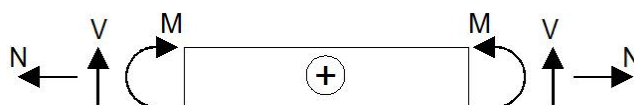
O ficheiro “.ESF” apresenta a variação dos valores dos esforços ao longo de cada elemento. Na primeira linha é indicada qual a acção em causa para os valores apresentados e para cada elemento barra é indicada a posição da secção relativamente ao início da barra ( $x=$ ). Para cada uma das secções é possível saber o valor do esforço normal (N), o valor do esforço transversal (V) e o valor do momento flector (M).

Para todos os elementos barra o programa divide o elemento em 7 secções, relativamente ao início da barra, o que corresponde à divisão da barra em 6 segmentos (figura 4.12).

Esforços nas barras devidos a accao: Sobrecarga				
Elemento	x=	N	V	M
1	0	-16.60	-16.33	36.09
	0.50	-16.60	-16.33	27.92
	1.00	-16.60	-16.33	19.75
	1.50	-16.60	-16.33	11.59
	2.00	-16.60	-16.33	3.42
	2.50	-16.60	-16.33	-4.75
	3.00	-16.60	-16.33	-12.92
2	0	-89.45	-1.15	0.00
	0.50	-89.45	-1.15	-0.57
	1.00	-89.45	-1.15	-1.15
	1.50	-89.45	-1.15	-1.72
	2.00	-89.45	-1.15	-2.30
	2.50	-89.45	-1.15	-2.87
	3.00	-89.45	-1.15	-3.45
3	0	-35.48	-12.52	37.55
	0.50	-35.48	-12.52	31.29
	1.00	-35.48	-12.52	25.03
	1.50	-35.48	-12.52	18.77
	2.00	-35.48	-12.52	12.52
	2.50	-35.48	-12.52	6.26
	3.00	-35.48	-12.52	0.00
101	0	0.00	2.22	0.00
	0.33	0.00	2.22	0.74
	0.67	0.00	2.22	1.48
	1.00	0.00	2.22	2.22
	1.33	0.00	2.22	2.96
	1.67	0.00	2.22	3.70
	2.00	0.00	2.22	4.44
102	0	-32.71	3.33	-6.07
	0.83	-32.71	3.33	-3.30
	1.67	-32.71	3.30	-0.52
	2.50	-32.71	2.33	1.92
	3.33	-32.71	-0.03	2.98
	4.17	-32.71	-2.92	1.56
	5.00	-32.71	-2.92	-0.87

Figura 4.12 - Excerto do ficheiro “.ESF” onde são apresentados os esforços ao longo dos elementos barra em secções equidistantes.

A convenção de sinais que se encontra implementada no programa é a convenção de resistência dos materiais (figura 4.13).



**Figura 4.13** – Representação da convenção de resistência dos materiais.

#### 4.4. FICHEIRO “.REA”

O ficheiro “.REA” apresenta o valor das reacções de apoio. No ficheiro é indicada a acção em causa para os valores apresentados e para os nós apoiados é indicado o valor da reacção horizontal (F1), o valor da reacção vertical (F2) e o valor do momento (M) (figura 4.14).

Reaccoes nos apoios devidos a accao: Assentamento Apoio

No	F1	F2	M
1	-270.18	-325.37	3152.38
2	1386.02	3189.13	0.00
3	-1115.84	-2347.75	3347.52
101	0.00	-516.00	0.00

Reaccoes nos apoios devidos a Combinacao 2

No	F1	F2	M
1	-245.68	-300.47	3098.25
2	1387.74	3323.30	0.00
3	-1097.06	-2294.54	3291.19
101	0.00	-512.67	0.00

**Figura 4.14** - Excerto do ficheiro “.Rea” onde são apresentadas as reacções de apoio.

#### 4.5. FICHEIRO “.MSH”

O ficheiro “.MSH”, ao contrário dos anteriores ficheiros, não serve para leitura e interpretação de resultados, mas sim para ser utilizado num outro programa, o “GID” que permite a importação do modelo estrutural.

Após abrir o programa “GID” deve-se seleccionar na barra de menus a opção “files” e depois, nas janelas que vão aparecer, a opção “import” e a opção “GID mesh” (figura 4.15).

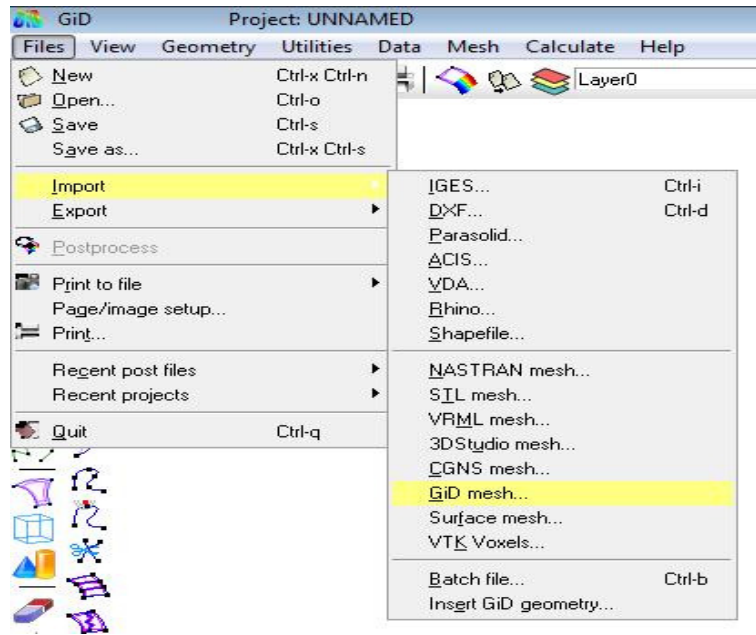


Figura 4.15 – Forma de abrir o ficheiro “.MSH” no GiD.

Através da visualização do modelo estrutural é possível verificar se a estrutura apresentada é igual à idealizada. Se isso não suceder significa que algum dado foi incorrectamente introduzido (figura 4.16).

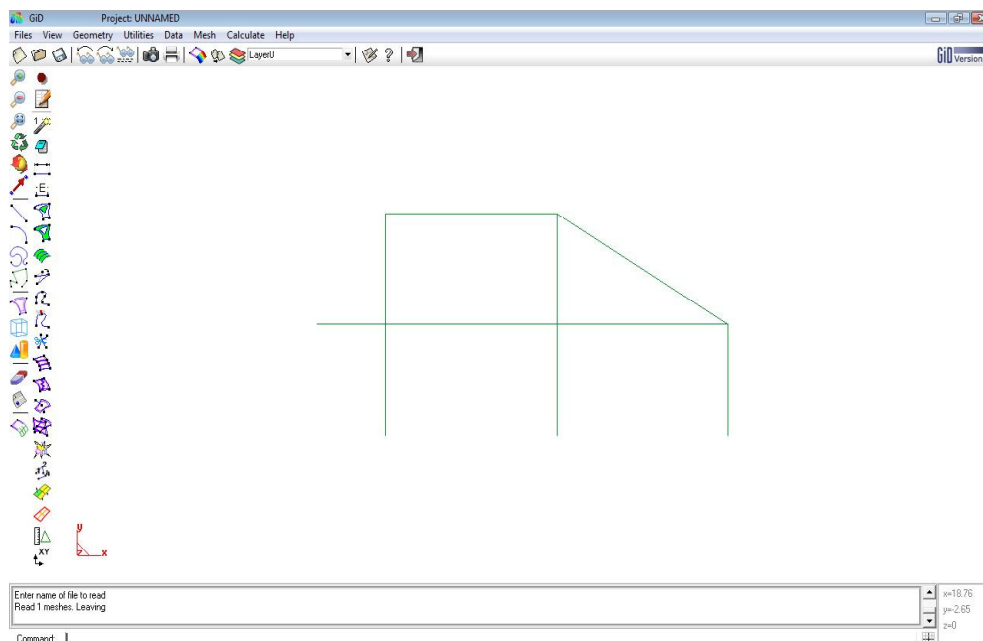


Figura 4.16 – Visualização da estrutura no GiD após a colocação do ficheiro “.MSH”.

#### 4.6. FICHEIRO “.RES”

O ficheiro “.RES” é também para ser utilizado no “GID” e é introduzido após o anterior. Este ficheiro permite a visualização gráfica da deformada da estrutura e dos diagramas de esforços para as várias acções.

Antes de se proceder à introdução do ficheiro “.RES” é seleccionada na barra de ferramentas a opção de pré/pós-processamento (figura 4.17).

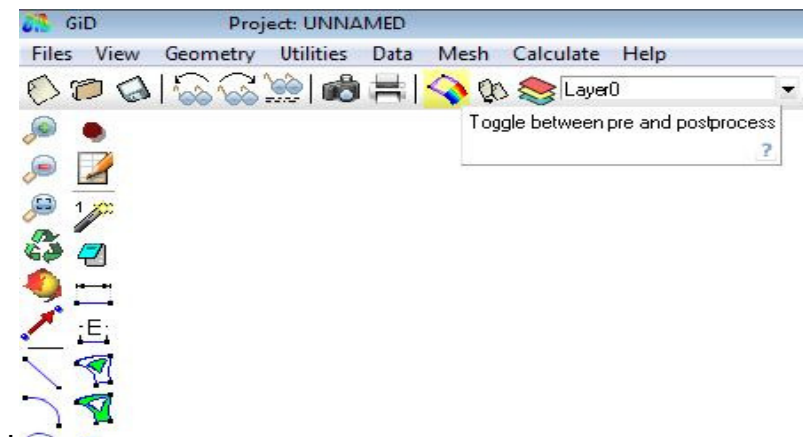


Figura 4.17 – Localização do botão de pré/pós-processamento no GiD.

Para introduzir o ficheiro “.RES” no “GID” selecciona-se na barra de menus a opção “files”, depois a opção “merge” e selecciona-se o ficheiro “.RES” (figura 4.18).

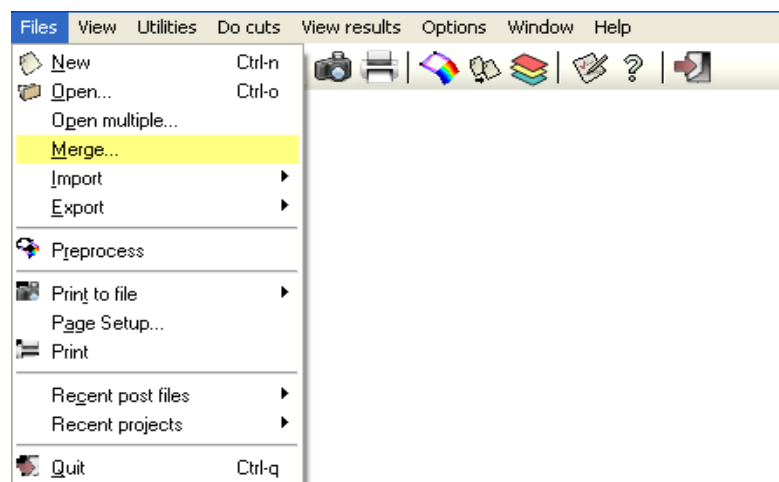



Figura 4.18 – Forma de abrir o ficheiro “.RES” no GiD.

Para visualizar os diagramas de esforços selecciona-se na barra de ferramentas lateral qual o esforço que pretende visualizar (N, V, M), através da opção “” ou, na barra de menus pela opção, “View result-Default Analysis/Setp” (figura 4.19).

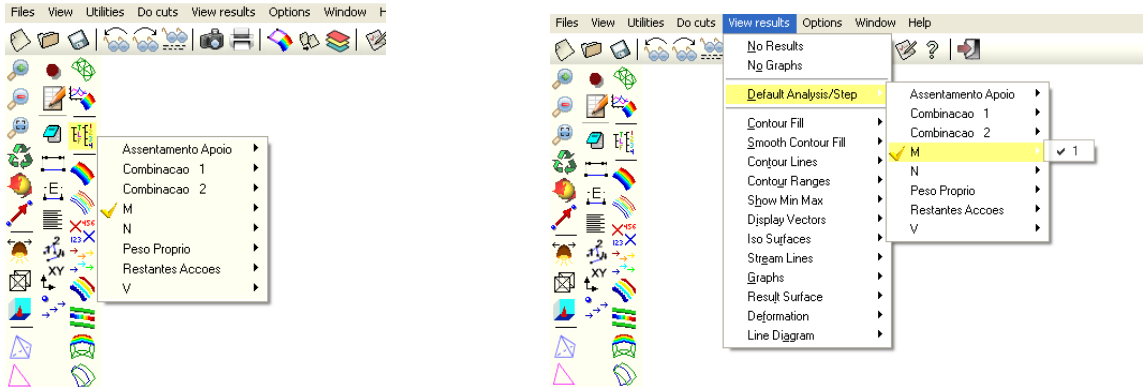


Figura 4.19 – Forma de seleccionar o esforço que se pretende visualizar.

Na barra de menus escolhe-se para qual acção ou combinação de acções se pretende ver o esforço (figura 4.20).

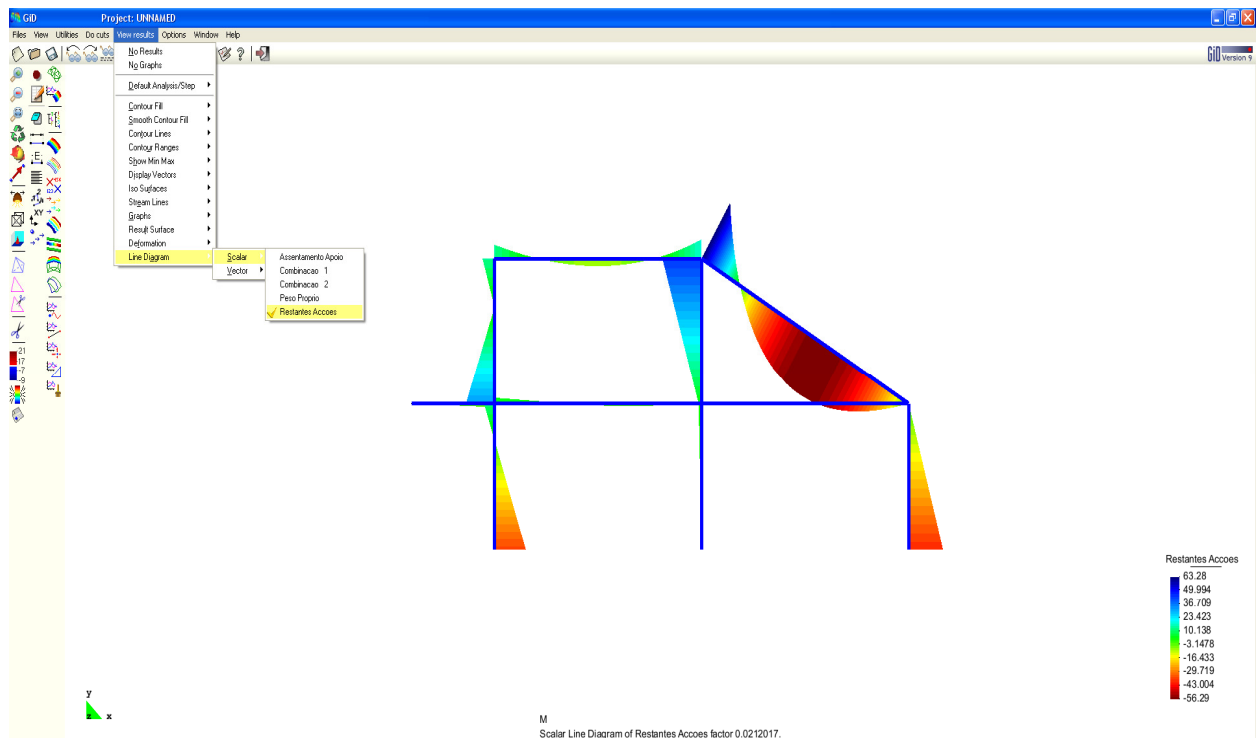
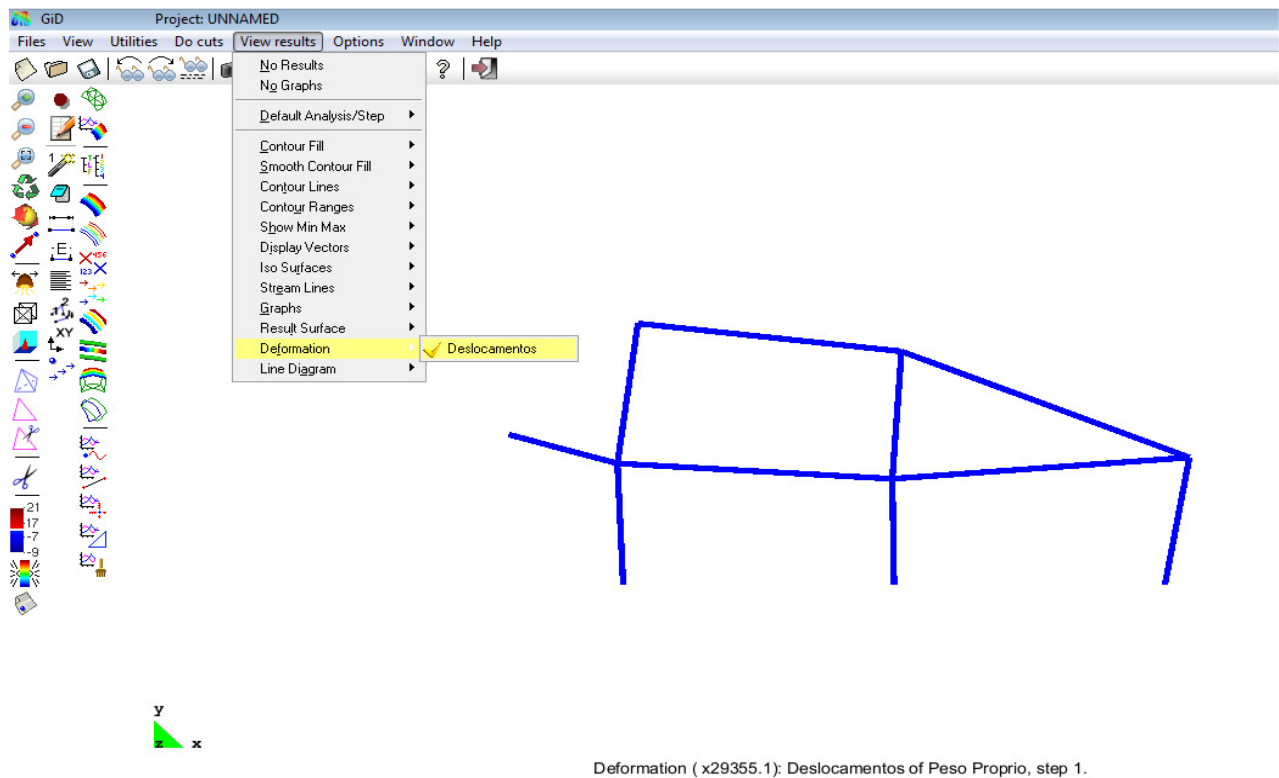


Figura 4.20 – Visualização dos diagramas de esforços no “GID”.

No diagrama de momento flector o utilizador terá que ter em atenção que o diagrama apresentado pelo “GiD” está correcto, mas com o sinal trocado.

Para analisar a deformada da estrutura escolhe-se na barra de menus a opção, “View result → Default Analysis/Setp” (figura 4.19) e selecciona-se o nome da acção ou combinação de acções para a qual se pretende visualizar a deformada. Seleccionada a acção ou combinação de acções, na barra de menus escolhe-se a opção “View result → Deformation → Deslocamentos” para visualizar a deformada (figura 4.21).



**Figura 4.21** – Visualização da deformada no “GiD”.

Para visualizar o deslocamento da estrutura, segundo um dos eixos (X ou Y), selecciona-se na barra de menus a opção “View result → Line Diagram → Scalar → Deslocamentos → X-Deslocamentos ou Y-Deslocamentos” (figura 4.22).

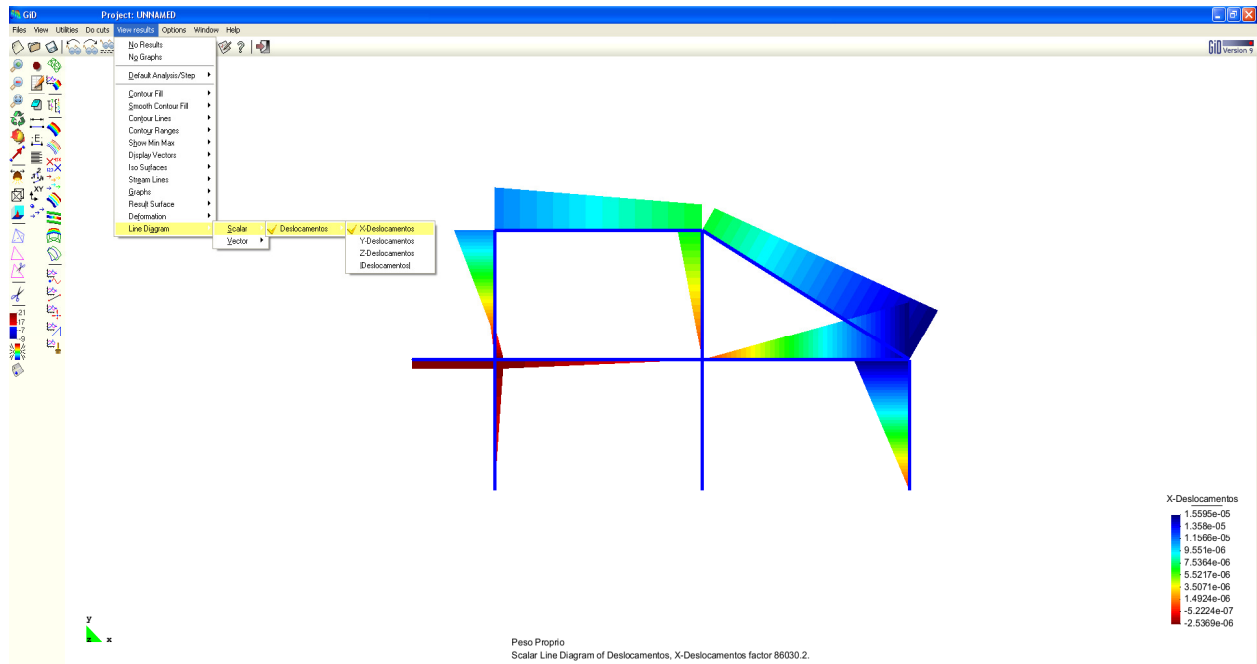


Figura 4.22 - Visualização do diagrama de deformação no “GID”.

O “GID” permite também a apresentação do valor numérico do deslocamento nos pontos nodais na direcção escolhida. Para isso, basta carregar com o botão direito do rato na área de apresentação do resultado e no menu que surgir seleccionar “Label → All in → Res.” (figura 4.23).

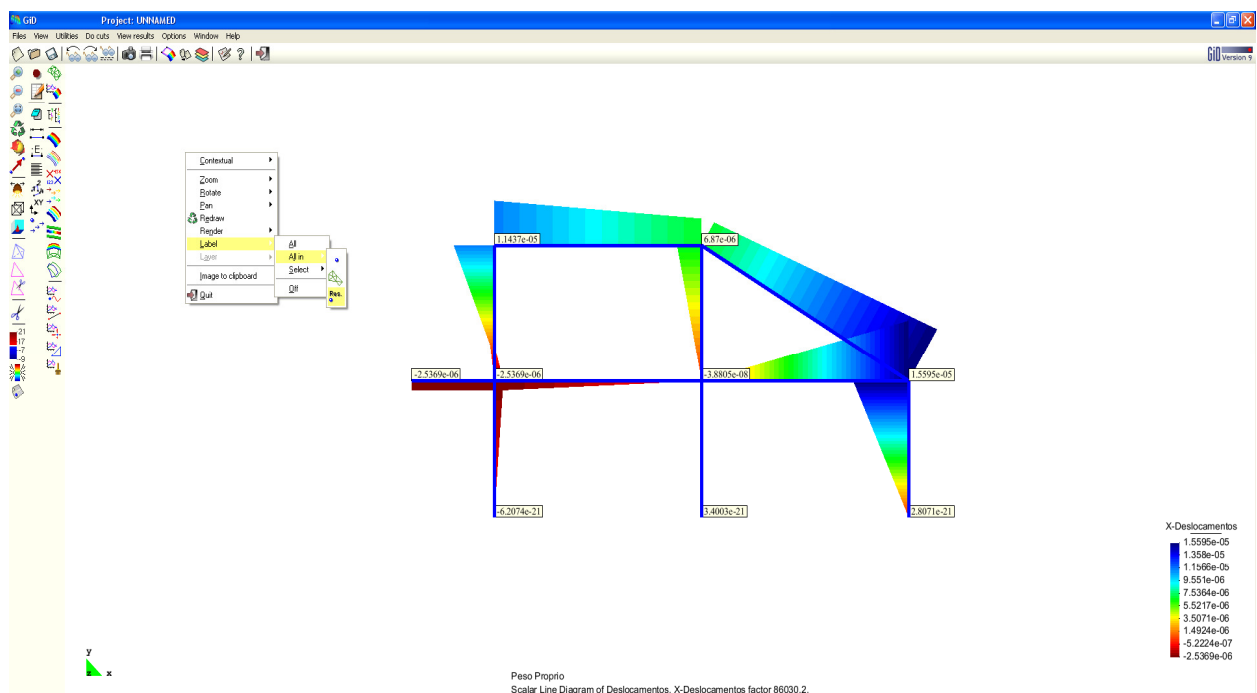


Figura 4.23 - Visualização dos valores dos deslocamentos nos pontos nodais no “GID”.