

Este livro foi escrito durante mais de duas décadas, no âmbito da Unidade Curricular de Telecomunicações I do curso de Licenciatura em Engenharia Eletrónica e Telecomunicações e de Computadores e do curso de Licenciatura em Engenharia Informática, Redes e Telecomunicações do ISEL.

Dada a crescente importância dos sistemas de comunicação digital, uma introdução a este tema deve corresponder ao primeiro contacto dos estudantes com a área das telecomunicações. Este livro foi escrito com esse propósito, abordando os sistemas de comunicação digital entre dois pontos, através de um canal de comunicação passa-baixo. Apresenta os conceitos e discute os compromissos entre a qualidade e os recursos disponíveis num sistema de comunicação digital e tem como principais temas:

- Teorema da amostragem de Nyquist-Shannon;
- Codificação de sinais por modulação de impulsos;
- Códigos de linha binários;
- Modelo do canal AWGN e recetor ótimo;
- Codificação M -ária;
- Codificação para controlo de erros.

Este livro é essencialmente pedagógico, pelo que no final são apresentadas atividades distintas para que os estudantes possam consolidar conhecimentos: perguntas teóricas; exercícios resolvidos; exercícios propostos com soluções; e exercícios a resolver recorrendo a ambiente de programação.

O público-alvo deste livro são os estudantes das licenciaturas em Engenharia Eletrónica e Telecomunicações, Eletrotécnica ou Redes de Computadores, no âmbito de uma primeira unidade curricular de sistemas de comunicação digital. Este texto é propedêutico de temas mais avançados, dado que os conceitos básicos são os mesmos, pelo que é um bom auxiliar para estudantes mais adiantados.

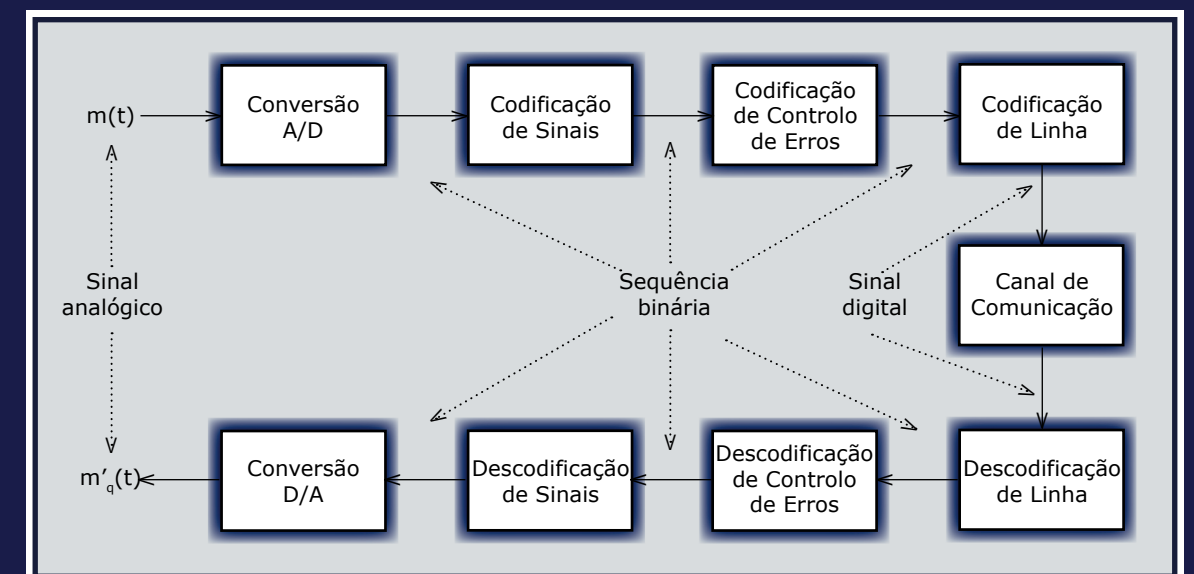
Carlos Eduardo de Meneses Ribeiro

Nascido em Moçambique a 12 de julho de 1960, licenciou-se em Engenharia Eletrónica e Telecomunicações pela Universidade de Aveiro no ano de 1985, concluiu o mestrado em 1991 e doutorou-se em 2002 em Engenharia Eletrotécnica e Computadores pelo Instituto Superior Técnico, IST-UL com a tese intitulada "Codificação fonética de sinais de fala".

É professor-coordenador na Área Departamental de Engenharia Eletrónica e Telecomunicações e de Computadores do Instituto Superior de Engenharia de Lisboa, ISEL-IPL, onde é professor desde 1985. Desde 1995 foi coordenador de diversos cursos, sendo atualmente coordenador do curso de Licenciatura em Engenharia Eletrónica e Telecomunicações e de Computadores. É regente das unidades curriculares de Telecomunicações I, Projeto Final de Curso e Processamento de Fala.

É membro do laboratório de investigação NOVA LINC'S – ISEL, *Laboratory for Computer Science and Informatics* e os seus interesses científicos são, atualmente, o processamento de sinais com ênfase nas aplicações em bioengenharia.

SISTEMAS DE COMUNICAÇÃO DIGITAL



CARLOS EDUARDO DE MENESES RIBEIRO

SISTEMAS DE COMUNICAÇÃO DIGITAL



TÍTULO

Sistemas de Comunicação Digital

AUTOR

Carlos Eduardo de Meneses Ribeiro

EDITOR

Instituto Politécnico de Lisboa

DESIGN DA CAPA

Pedro Antunes

EXECUÇÃO GRÁFICA

Gráfica 99

© Instituto Politécnico de Lisboa, 2023



Todos os direitos reservados

Setembro de 2023

ISBN 978-989-53678-8-7

DEP. LEGAL N.º 518 974/23

À minha mulher, Ilda Ribeiro.
Às minhas filhas, Joana, Ana e Sara.

Prefácio

Por telecomunicações entende-se a transmissão à distância de informação utilizando sinais eletromagnéticos, através de fios elétricos, sistemas óticos ou ligações rádio. Atualmente, recorrendo a satélites, há ligação de telecomunicações de qualquer ponto do mundo para qualquer outro ponto do mundo, naquilo que nos habituamos a designar por *aldeia global*.

As telecomunicações fazem parte do nosso dia-a-dia, aproximando pessoas e empresas e contribuindo decisivamente para o bem-estar das populações e para o desenvolvimento da economia. Cada vez mais temos o telefone móvel à mão e o acesso à Internet em múltiplos dispositivos. Com estes conseguimos falar e trocar mensagens com pessoas em qualquer parte do mundo, temos acesso às redes sociais, ao correio eletrónico e a toda a informação disponibilizada na *world wide web*. A Internet modificou os serviços tradicionais de telecomunicações, disponibilizando rádio e televisão. Nos estúdios de rádio podem existir câmaras, confundindo-se com a televisão. A televisão é visualizada em alta-definição em direto, pré-gravada ou através de disponibilização de vídeos. Acresce que as telecomunicações não envolvem apenas a comunicação humana, mas também a comunicação entre computadores e dispositivos eletrónicos, para atualização e sincronização de informação, navegação por satélite ou interligação de componentes de controlo de um avião ou um automóvel.

Notas históricas globais

Em 1822, Jean-Baptiste Fourier, francês, publicou o livro *Théorie analytique de la chaleur* que abriu caminho para a teoria de análise de Fourier, teoria matemática que tem um papel central na noção de espectro e no desenvolvimento posterior das telecomunicações.

Em 1837, Samuel Morse, inventor, físico e pintor americano, inventou o telégrafo de um só fio, com registro das mensagens numa fita de papel. As mensagens

eram transmitidas através do código Morse. Este é um sistema digital, com dois símbolos correspondentes à presença do sinal (também designado por *mark*, uma vez que, para decodificar a mensagem no recetor, se traçava uma marca num papel) ou à interrupção (também designada por *space*, uma vez que se deixava um espaço em branco entre marcas). Por semelhança com este código, o nível lógico “1” é por vezes designado por *mark*, e o nível lógico “0” por *space*. A presença do sinal pode ser de curta duração (*ponto*) ou de longa duração (*traço*).

O telégrafo deu início às telecomunicações e, até aos nossos dias, muitos outros acontecimentos marcaram a evolução das telecomunicações, sendo a seguir apresentados, por ordem cronológica, alguns dos mais relevantes:

1850 – Pela primeira vez foi instalado um cabo submarino no canal da Mancha, entre o sul de Inglaterra e o norte de França, para transmissão de sinais telegráficos. O primeiro lançamento de um cabo submarino intercontinental com sucesso deu-se em 1858, entre o Canadá e a Irlanda, com um débito de apenas duas palavras por minuto;

1860 – Antonio Meucci, italiano, inventou o telefone por volta de 1860. No entanto, durante muitos anos o inventor do telefone foi considerado Alexander Graham Bell, escocês, que o patenteou em 1876. Por coincidência, Elisha Gray, americano, tentou patentear um sistema idêntico poucas horas depois de Bell;

1864 – James Clerk Maxwell, britânico, formulou a teoria eletromagnética e previu a existência de ondas de rádio. A existência destas ondas ficou experimentalmente provada em 1888, pelo alemão Heinrich Rudolf Hertz;

1893 – Roberto Landell de Moura, padre, cientista e inventor brasileiro, efetuou, supostamente, a primeira transmissão de fala via rádio, em Portalegre, Brasil. Só em 1920, na Argentina e EUA, começaram as transmissões para entretenimento;

1896 – Guglielmo Marconi, italiano, patenteou a telegrafia sem fios (TSF), que transmitia sinais telegráficos via rádio;

1904 – John Ambrose Fleming, britânico, inventou o díodo a vácuo e deu origem ao desenvolvimento da eletrónica moderna;

1927 – Philo Taylor Farnsworth, americano, demonstrou o funcionamento de um sistema completo de televisão;

1928 – John B. Johnson, americano, demonstrou pela primeira vez a existência de ruído térmico, uma das principais causas da degradação de qualidade nas telecomunicações;

1928 – Harry Nyquist, sueco-americano, publicou o artigo “*Certain Topics in Telegraph Transmission Theory*”, apresentando nomeadamente critérios de transmissão digital sem distorção e lançando as bases do teorema da amostragem de Nyquist-Shannon;

1928 – Ralph Hartley, americano, publicou o artigo “*Transmission of Information*”, apresentando a regra de Hartley e lançando as bases do teorema da capacidade de canal de Shannon-Hartley;

1943 – Dwight North, americano, apresentou o artigo “An analysis of the factors which determine signal/noise discrimination in pulsed carrier systems”. Report PPR-6C, RCA Laboratories, Princeton, NJ, em que introduziu o conceito de filtro adaptado ou filtro de correlação, para deteção de sinais com ruído;

1945 – Arthur Clarke, britânico, apresentou o conceito de satélite geostacionário no seu artigo “*Can Rocket Stations Give Worldwide Radio Coverage?*”, publicado na revista *Wireless World*;

1946 – John P. Eckert Jr. e John W. Mauchly, americanos, da Universidade de Pensilvânia, EUA, criaram o ENIAC (*Electronic Numerical Integrator and Computer*), primeiro computador eletrónico digital;

1947 – William Shockley, John Bardeen e Walter Brattain, americanos, da Bell Laboratories, EUA, inventaram o transístor, um trabalho que lhes valeu o Prémio Nobel da Física em 1956;

1948 – Claude Shannon, americano, apresentou o seu artigo intitulado “*A Mathematical Theory of Communication*”, formulando a teoria da informação, que incluía o efeito do ruído no canal de comunicação sobre a comunicação digital;

1949 – Claude Shannon apresentou o seu artigo intitulado “*Communication in the presence of noise*” que, baseado no trabalho de Nyquist, introduziu o teorema da amostragem de Nyquist-Shannon;

1950 – Richard W. Hamming, americano, publicou o artigo “*Error detecting and error correcting codes*”, base da codificação de controlo de erros;

1952 – David Huffman, americano, publicou o artigo “*A Method for the Construction of Minimum-Redundancy Codes*”, propondo os códigos de Huffman para codificação de fonte sem perdas;

1956 – A empresa Ericsson desenvolveu o primeiro telefone móvel para automóvel, que pesava 40 kg. Utilizava um conjunto de antenas interligadas (células) e escolhia automaticamente a frequência da portadora;

1957 – A URSS lançou o *Sputnik I*, o primeiro satélite artificial da Terra. Tinha uma forma esférica de 58 cm de diâmetro e pesava 83,6 kg. Transmitia um sinal rádio do tipo “*bip*”, capaz de ser recebido na terra por qualquer recetor. Funcionou 22 dias, até que as baterias se esgotaram. Orbitou a terra durante três meses;

1962 – Lançamento do satélite *Telstar 1*, pela NASA, desenvolvido com a participação da AT&T, que permitiu a primeira transmissão em direto entre os EUA e a Europa. Esteve ativo durante 7 meses;

1969 – Foi criada a primeira rede de computadores, designada por ARPANET (*Advanced Research Project Agency Network*), com transmissão de pacotes entre computadores. Ligava a Universidade da Califórnia – Los Angeles, SRI – Stanford Research Institute, Universidade da Califórnia – Santa Bárbara e a Universidade de Utah. É considerada o primeiro troço da *internet*;

1973 – A empresa Motorola apresentou o primeiro telefone móvel pessoal, o *Motorola DynaTAC 8000X*. Com 33 cm de comprimento e 9 cm de largura, pesava 794 gramas. A primeira ligação foi realizada por Martin Cooper, diretor de sistemas de operações da empresa. Contudo, apenas em 1979 o telefone móvel entrou em funcionamento generalizado na Suécia e no Japão;

1977 – Primeira utilização comercial da fibra ótica pela AT&T, para ligar duas centrais telefônicas distanciadas de 6 km, na Califórnia, EUA;

1983 – Foi normalizado pela ISO (*International Organization for Standardization*) o modelo OSI (*Open Systems Interconnection*), uma referência na interligação de redes de computadores;

1989 – Tim Berners-Lee, britânico, inventa a *World Wide Web* (WWW). Foi disponibilizada ao público em 1991 e é utilizada na Internet, tendo sido a partir daí que esta se popularizou;

1979 – Introdução da tecnologia 1G, analógica, para transmissão de sinais telefônicos via rádio;

1991 – Introdução da tecnologia digital GSM (*Global System for Mobile Communications*) 2G. Introduzido o conceito de *Short Message Service* (SMS). Foi objeto de atualizações posteriores, permitindo a transição para a geração seguinte, designadamente a transmissão em modo pacotes e suporte de débitos de transmissão mais elevados;

2001 – Introdução da tecnologia 3G, aumentando o débito de transmissão da rede 2G, generalizando o acesso à Internet e possibilitando a introdução dos *smartphones*. Foi objeto de atualizações permitindo o aumento do débito binário;

2010 – Introdução da tecnologia 4G, baseada no Protocolo Internet (IP – *Internet Protocol*) aumentando o débito binário da rede 3G. Possibilitou a transmissão de vídeos e jogos em tempo real. Foi objeto de atualizações, através da introdução do *High Speed Packet Access*, que permitiu o aumento considerável dos débitos de transmissão suportados;

2020 – Introdução da tecnologia 5G, aumentando o débito de transmissão e baixando a latência. Além de interligar telefones móveis interliga outros dispositivos como automóveis e eletrodomésticos, possibilitando maior automação e o paradigma Internet das Coisas (IoT – *Internet of Things*).

Notas históricas de Portugal

Em Portugal, o serviço de telégrafo iniciou-se em 1855, com uma ligação entre o Terreiro do Paço, Palácio de S. Bento, Palácio das Necessidades e o Palácio de Sintra, onde normalmente o Rei se encontrava. Outras datas importantes na evolução das telecomunicações em Portugal são:

1857 – O serviço de telégrafo chegou ao grande público;

1870 – Instalação pela primeira vez de um cabo submarino em Portugal, ligando Carcavelos, Gibraltar e Inglaterra;

1877 – Começaram as primeiras experiências de instalação do telefone entre Lisboa e Carcavelos, que deram origem em 1882 à exploração do serviço telefónico em Lisboa e no Porto;

1902 – Foram inauguradas as primeiras estações de telegrafia sem fios;

1914 – Foi efetuada a primeira transmissão rádio com áudio em Portugal, por Fernando Medeiros, tendo sido ouvida a 100 metros de distância por um operador de telegrafia sem fios. Desde aí foram efetuadas várias emissões esporádicas, mas só em 1925 a estação P1AA – Rádio Portugal (futura CT1AA) iniciou emissões regulares;

1956 – Realizou-se a primeira emissão de televisão, ainda experimental e a preto e branco. A primeira emissão da televisão a cores realizou-se em 1976;

1985 – Foi estabelecida, por docentes da Universidade do Minho, a primeira ligação Internet em Portugal, com a Universidade de Manchester;

1991 – Foi criada a ANACOM - Autoridade Nacional de Comunicações, entidade independente reguladora das telecomunicações;

1994 – O primeiro operador de Internet no país começou a operar, através de *modems* de 28,8 kbit/s, utilizando linhas telefónicas tradicionais.

Porquê comunicação digital?

Um sinal elétrico diz-se analógico quando tem uma variação análoga à variação da grandeza física que se quer representar, tendo geralmente uma variação contínua ao

longo do tempo. São exemplo os sinais de fala ou áudio captados por um microfone ou imagens e vídeo em que o sinal é proporcional à intensidade da luz e da cor. Na comunicação analógica estes sinais são transmitidos diretamente (banda de base) ou é transmitido um sinal sinusoidal, denominado portadora, cuja amplitude, frequência ou fase é alterada pela variação direta do sinal analógico a transmitir.

Um sinal digital é composto por um conjunto de símbolos. Num sistema digital binário, por exemplo, existem dois símbolos, vulgarmente designados por símbolos lógicos “1” e “0”. Para transmitir sinais analógicos em sistemas digitais, os sinais analógicos têm de ser previamente convertidos em símbolos. Estes símbolos são transmitidos representando-os através de um número finito de formas de onda.

Vivemos cada vez mais num mundo digital, estando as transmissões analógicas a ser substituídas por tecnologias digitais com algumas vantagens, tais como:

- Qualidade – Os sistemas de transmissão digital são menos sensíveis ao ruído no canal de comunicação que os analógicos. Para canais de maior dimensão, os sinais digitais podem ser regenerados em pontos intermédios, virtualmente sem erros;
- Eficiência espectral – Utilizando métodos de codificação de sinais eficazes e/ou codificações *M*-árias, que conseguem transmitir maior número de bits (**binary digit**) para a mesma largura de banda ocupada, a utilização de transmissão digital pode ocupar menor largura de banda que a transmissão analógica;
- Segurança – Os sinais digitais são mais fáceis de encriptar e, portanto, permitem realizar transmissões privadas e seguras;
- Acesso – O acesso, armazenamento e cópia no formato digital são mais simples e acessíveis que os mesmos processos em formato analógico;
- Serviços – O desenvolvimento das tecnologias digitais tem vindo a criar serviços, utilizando nomeadamente plataformas como a Internet e o telefone móvel. Tendo a primeira começado por transmitir apenas texto e o segundo apenas sinais de fala, verifica-se uma fusão de ambos e a partilha também de áudio e televisão, naquilo que se designa de convergência das telecomunicações.

Objetivos deste texto

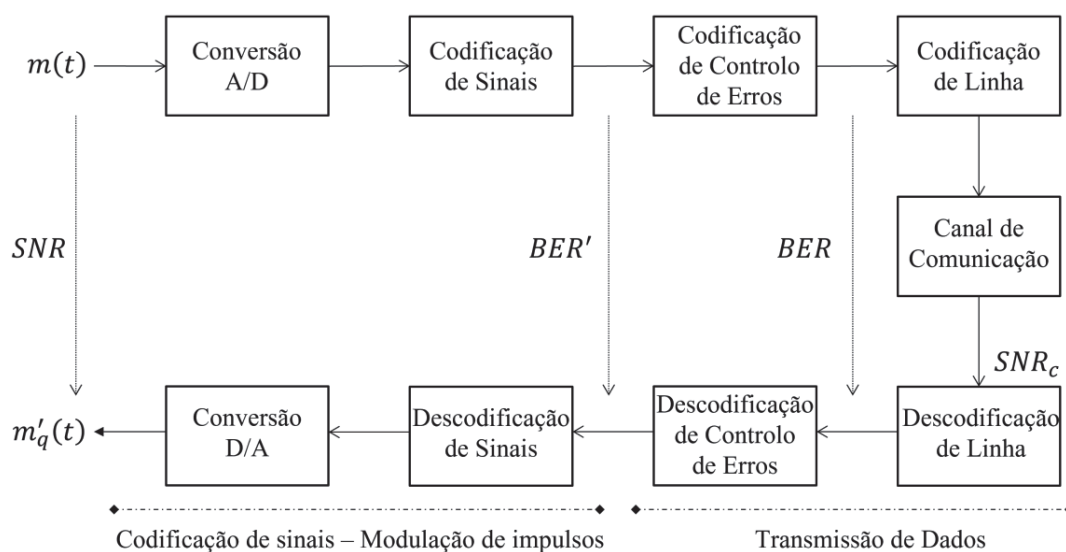
Este texto foi sendo escrito durante mais de duas décadas, no âmbito da unidade curricular de Telecomunicações I da Licenciatura em Engenharia de Eletrónica e Telecomunicações e de Computadores e da Licenciatura em Engenharia Informática, Redes e Telecomunicações do ISEL – Instituto Superior de Engenharia de Lisboa. Pretende ser um instrumento pedagógico de complemento às aulas, em que os estudantes possam aprender de um modo autónomo, e inclui todos os tópicos lecionados. Serve também de bibliografia de apoio à unidade curricular de Comunicação Digital da Licenciatura em Informática e Computadores e à unidade curricular de Comunicações e Processamento de Sinais da Licenciatura em Engenharia Informática e Multimédia.

Dada a crescente importância dos sistemas de comunicação digital, uma introdução a este tema deve corresponder ao primeiro contacto dos estudantes com a área das telecomunicações. Este texto foi escrito com esse propósito, abordando a transmissão digital entre dois pontos, através de um canal de comunicação passa-baixo.

Na figura abaixo são apresentados os blocos constituintes de um sistema de comunicação digital. Nesta figura são também apresentadas as principais medidas de qualidade: a *relação sinal-ruído* (*SNR – signal-to-noise ratio*) que mede a qualidade de um sinal analógico afetado por ruído; e a *probabilidade de erro de bit* (*BER – bit error rate*) que mede a qualidade de uma transmissão digital na presença de erros de bit.

A comunicação digital pode ser considerada como a “arte da codificação”:

- *Codificação de sinais*, que representa em formato digital um sinal analógico, tendo em conta principalmente o compromisso entre o débito binário e a qualidade;
- *Codificação de linha*, que representa em formas de onda a sequência digital, de modo a melhor se adequar às características do canal de comunicação;
- *Codificação de controlo de erros*, que codifica a sequência a transmitir, de modo que no recetor se possa detetar ou corrigir erros de bit devidos às limitações do canal de comunicação.



Sistema de comunicação digital entre dois pontos.

Os blocos em cima correspondem aos blocos constituintes do transmissor e em baixo do recetor, separados pelo canal de comunicação.

Este texto, correspondendo integralmente à matéria de uma unidade curricular introdutória em sistemas de comunicação digital, não esgota de maneira nenhuma o tema. Os métodos de codificação de sinais que tirem partido intrínseco do conhecimento do tipo de sinais, tais como a codificação específica de sinais de fala, áudio ou vídeo, que conseguem boa qualidade a débitos binários mais baixos que a modulação por codificação de impulsos, não são aqui abordados. Também, por exemplo, a modulação digital para transmissão em canais passa-banda, os métodos matriciais de codificação de controlo de erros ou os códigos convolucionais de controlo de erros, não são tratados. Os conceitos básicos e as medidas de qualidade, contudo, são os mesmos, sendo nesse aspeto este texto propedêutico desses temas mais avançados, permitindo, supostamente, a sua mais rápida compreensão.

Organização do texto

Uma das principais dificuldades encontradas em projeto de telecomunicações é a otimização do sistema de modo que este tenha a melhor qualidade tendo em conta os recursos disponíveis, nomeadamente dois dos mais importantes: a energia disponível no transmissor; e a largura de banda disponível no canal de comunicação. Este texto apresenta os conceitos e discute os compromissos entre os recursos disponíveis e está

dividido em duas partes distintas: a primeira apresenta uma introdução à *codificação de sinais* através da modulação por codificação de impulsos; a segunda apresenta uma introdução à *transmissão de dados*. Estas duas partes podem ser encaradas de modo independente, mas complementam-se numa introdução à comunicação digital.

A primeira parte, sobre codificação de sinais por modulação por codificação de impulsos, compreende os capítulos 1 a 5 e é organizada do modo seguinte: o capítulo 1 introduz os métodos e atributos dos codificadores de sinal; o capítulo 2 apresenta a conversão analógico-digital e codificação amostra a amostra (PCM – *Pulse Code Modulation*) com quantificação uniforme, estabelecendo-se um sistema mínimo de codificação de sinais; o capítulo 3 descreve a quantificação PCM não uniforme que tira partido da distribuição de amplitudes do sinal; o capítulo 4 apresenta os conceitos básicos da codificação preditiva, que tira partido da correlação entre amostras consecutivas. De modo que o codificador se ajuste às características do sinal de entrada, descrevem-se ainda métodos de predição e quantificação adaptativa; o capítulo 5 sintetiza as principais conclusões sobre os codificadores de sinais apresentados, comparando-os numa perspetiva de compromisso em relação aos seus atributos.

A segunda parte, sobre transmissão de dados, compreende os capítulos 6 a 12 e é organizada do modo seguinte: o capítulo 6 introduz a transmissão de dados e enquadra os diversos blocos no modelo de referência OSI (*Open Systems Interconnection*); o capítulo 7 começa por descrever os atributos dos códigos de linha, que correspondem aos sinais a serem transmitidos em banda de base, ou seja, em canais do tipo “passa-baixo”, e apresenta os principais códigos de linha binários. Aborda seguidamente a solução do problema da interferência intersimbólica que advém da limitação da largura de banda do canal de comunicação, enquanto define a largura de banda ocupada. Termina com a apresentação de soluções para o sincronismo de símbolo, essencial numa transmissão digital; o capítulo 8 apresenta o modelo do canal de comunicação AWGN (*Additive white Gaussian noise*) e suas limitações: ruído, largura de banda, atenuação e distorção; Partindo do modelo do canal, o capítulo 9 apresenta o recetor ótimo e estima a probabilidade de erro de bit, para todos os códigos de linha mencionados no capítulo 7; o capítulo 10 introduz o conceito de transmissão *M*-ária,

crucial para melhorar a eficiência espectral. É abordada a Lei de Shannon-Hartley sobre capacidade de canal em canais AWGN, correspondendo ao débito binário máximo possível de transmitir, virtualmente sem erros, para determinada relação sinal-ruído e largura de banda; o capítulo 11 sintetiza as principais conclusões e compara os diversos códigos de linha apresentados nos capítulos 7 a 10, discutindo os compromissos envolvidos entre os seus atributos; o capítulo 12 dedica-se à codificação de controlo de erros. Havendo erros de bit na comunicação, entre o transmissor e o recetor, é possível introduzir informação redundante de modo a detetá-los ou mesmo corrigi-los.

Os capítulos 6 a 9 devem ser vistos de modo sequencial e constituem um todo coerente, obrigatório numa introdução mínima sobre comunicação de dados. Relembre-se que o capítulo 10 introduz o conceito de codificação M -ária, base da eficiência espectral e o capítulo 11 apresenta uma discussão sobre todos estes códigos. O capítulo 12 pode não ser considerado ou ser abordado logo a seguir ao capítulo 9. Por exemplo, num contexto de estudo de redes de computadores pode ser abordado independentemente do resto do texto, bastando para tal assumir que numa transmissão existem erros de bit devidos às limitações do canal de comunicação.

Seguidamente apresentam-se anexos que correspondem a temas de dois níveis: (1) temas que devem já ser conhecidos, como conceitos de estatística, probabilidades e de sinais e sistemas, mas que devido à sua importância para a compreensão deste texto aqui se resumem; (2) e temas aprofundando alguns assuntos, não essenciais para a compreensão deste texto, mas que podem ser do interesse dos leitores.

Após uma compilação das principais equações deduzidas ao longo do texto que podem servir de consulta em avaliações teóricas, são propostas atividades com âmbitos distintos para que os estudantes possam consolidar os seus conhecimentos: perguntas teóricas; exercícios resolvidos; exercícios propostos com soluções; e exercícios a resolver recorrendo a ambiente de programação. Para cada atividade está indicado o capítulo até ao qual são necessários conhecimentos para a resolver.

Para compreensão deste texto os leitores devem ter conhecimentos introdutórios sobre estatística e probabilidades, sinais, análise de Fourier e sistemas lineares e

invariantes no tempo. Também devem saber programar, de modo a poderem realizar os exercícios que recorrem a ambiente de programação.

Este texto corresponde a uma unidade curricular de 6 ECTS em que a exposição teórica deve ser lecionada em cerca de 30 horas. Exercícios escolhidos (por exemplo, os exercícios resolvidos) devem ser também objeto de explanação, com um tempo de cerca de 15 horas. Três exercícios temáticos para resolver com recurso a um ambiente de programação devem ser pensados e desenvolvidos previamente pelos estudantes e apoiados através de aulas práticas presenciais de 18 horas. Um quarto exercício integra os exercícios temáticos dando uma visão global do sistema de comunicação digital, sendo lecionado em mais três horas presenciais.

Agradecimentos

Por fim, quero expressar publicamente os meus sinceros agradecimentos:

Ao ISEL, pelo ambiente pedagógico proporcionado, aos meus colegas do Conselho Pedagógico e do Departamento de Engenharia de Eletrónica e Telecomunicações e de Computadores, por todas as discussões sobre pedagogia, objetivos e estruturação de cursos e unidades curriculares, que me ajudaram a ser um melhor professor.

Aos meus colegas Vítor Fialho, Artur Ferreira e Fernando Nunes (IT/IST) pela revisão deste texto, suas correções e sugestões. À Elisabete Lucas, pela revisão final. De qualquer forma, assumo todas as gralhas e omissões que permaneçam no texto.

Ao Aristides Meneses, pela ajuda na realização da capa.

A todos os colegas que me incentivaram a publicar de um modo mais formal aquilo que começou, e continua a ser, um manual de apoio aos estudantes.

A todos os estudantes da unidade curricular de *Telecomunicações I* e sua precedente *Sistemas de Comunicação Digital*, por ao longo de mais de 20 anos me terem colocado dúvidas e desafios, que sem dúvida me ajudaram a melhor estruturar e clarificar os conceitos neste texto e a desenvolver todos os exercícios de apoio.

Carlos Meneses
Março de 2023

Índice

PRIMEIRA PARTE

CODIFICAÇÃO DE SINAIS	1
1 INTRODUÇÃO AOS CODIFICADORES DE SINAL.....	3
1.1 MÉTODOS DE CODIFICAÇÃO DE SINAL	3
1.2 ATRIBUTOS DOS CODIFICADORES DE SINAL	3
2 CONVERSÃO ANALÓGICO-DIGITAL	7
2.1 AMOSTRAGEM.....	7
2.2 QUANTIFICAÇÃO	11
2.3 CODIFICAÇÃO.....	14
2.4 RELAÇÃO SINAL-RUÍDO EM QUANTIFICAÇÃO UNIFORME	15
2.5 COMPROMISSOS ENTRE ATRIBUTOS.....	18
3 QUANTIFICAÇÃO NÃO UNIFORME.....	21
3.1 RELAÇÃO SINAL-RUÍDO EM QUANTIFICAÇÃO NÃO UNIFORME	24
3.2 PCM <i>COMPANDING</i>	26
3.3 QUANTIFICAÇÃO ÓTIMA	30
3.4 COMPARAÇÃO ENTRE QUANTIFICADORES	33
4 CODIFICAÇÃO PREDITIVA	35
4.1 MODULAÇÃO POR CODIFICAÇÃO DE IMPULSOS DIFERENCIAL	36
4.2 ADAPTAÇÃO DO PREDITOR	43
4.3 ADAPTAÇÃO DO QUANTIFICADOR	46
4.4 MODULAÇÃO DELTA.....	49
4.5 PROPAGAÇÃO DOS ERROS DE BIT DEVIDOS ÀS LIMITAÇÕES DO CANAL DE COMUNICAÇÃO	55
5 DISCUSSÃO SOBRE CODIFICADORES DE SINAL	57

SEGUNDA PARTE

COMUNICAÇÃO DE DADOS	59
6 INTRODUÇÃO À COMUNICAÇÃO DE DADOS.....	61
6.1 LIMITAÇÕES DO CANAL DE COMUNICAÇÃO	61
6.2 MODELO DE REFERÊNCIA OSI	62
6.3 MODELO TCP/IP	65
7 CÓDIGOS DE LINHA BINÁRIOS	67
7.1 ATRIBUTOS DOS CÓDIGOS DE LINHA	67
7.2 FORMATOS DOS CÓDIGOS DE LINHA	71
7.3 LARGURA DE BANDA.....	79
7.4 SINCRONISMO DE SÍMBOLO	87
8 CANAL DE COMUNICAÇÃO	91
8.1 CANAL AWGN DE BANDA LIMITADA.....	91
8.2 RELAÇÃO SINAL-RUÍDO E RELAÇÃO <i>EB/NO</i>	92
8.3 CANAL SEM DISTORÇÃO E EQUALIZAÇÃO	93
8.4 ATENUAÇÃO.....	94
8.5 LATÊNCIA.....	95
8.6 MEIOS DE TRANSMISSÃO	96
8.7 PADRÃO DE OLHO.....	99

9	RECETOR ÓTIMO.....	103
9.1	DESCODIFICADOR DE MÁXIMO <i>A POSTERIORI</i>	104
9.2	DESCODIFICADOR DE MÁXIMA VEROSIMILHANÇA.....	106
9.3	PROBABILIDADE DE ERRO DE BIT.....	106
9.4	FILTRO ADAPTADO.....	108
9.5	FILTRO ADAPTADO NORMADO.....	111
9.6	CÓDIGO PNRZ.....	112
9.7	<i>BER</i> EM CÓDIGOS DE LINHA BINÁRIOS.....	115
9.8	REGENERAÇÃO DO SINAL.....	120
10	TRANSMISSÃO M-ÁRIA EM BANDA DE BASE.....	121
10.1	MODULAÇÃO POR AMPLITUDE DE IMPULSOS DIGITAL.....	121
10.2	ENERGIA MÉDIA POR BIT.....	122
10.3	LARGURA DE BANDA.....	122
10.4	PROBABILIDADE DE ERRO DE SÍMBOLO.....	123
10.5	PROBABILIDADE DE ERRO DE BIT.....	124
10.6	CÓDIGO 2B1Q.....	126
10.7	CAPACIDADE DE CANAL.....	127
11	DISCUSSÃO SOBRE CÓDIGOS DE LINHA.....	131
12	CODIFICAÇÃO DE CONTROLO DE ERROS.....	137
12.1	ATRIBUTOS DOS CÓDIGOS DE CONTROLO DE ERROS.....	138
12.2	PROBABILIDADE DE ERRO DE BLOCO.....	141
12.3	CÓDIGO DE BIT DE PARIDADE.....	142
12.4	CÓDIGO DE REPETIÇÃO.....	143
12.5	CARÁTER DE VERIFICAÇÃO DE BLOCO.....	145
12.6	<i>INTERLEAVING</i>	146
12.7	DESCODIFICAÇÃO POR MÁXIMA VEROSIMILHANÇA.....	148
12.8	CÓDIGOS LINEARES.....	152
12.9	CÓDIGO DE HAMMING.....	153
12.10	CÓDIGOS CÍCLICOS.....	157
12.11	IP <i>CHECKSUM</i>	163
12.12	DISCUSSÃO SOBRE CÓDIGOS DE CONTROLO DE ERROS.....	164

ANEXOS

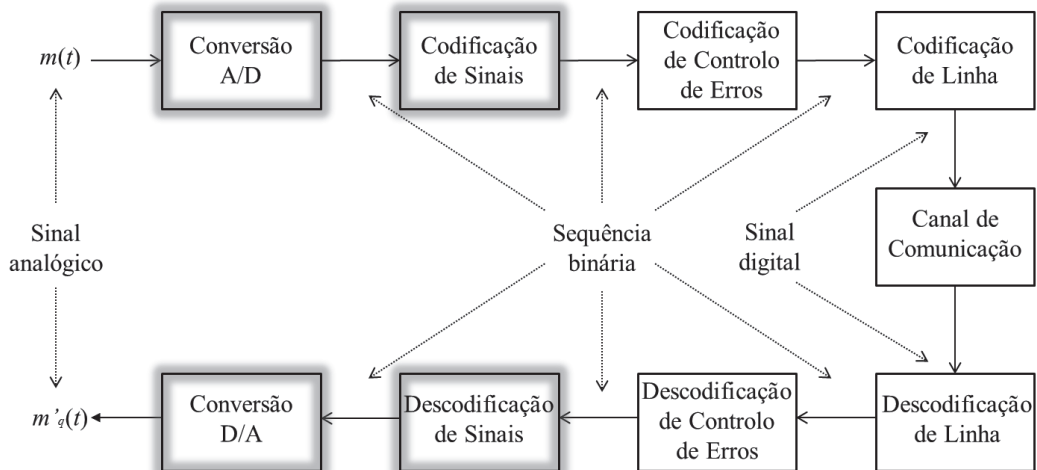
ANEXO 1	– ESTIMAÇÃO ESTATÍSTICA DA POTÊNCIA DE UM SINAL.....	171
ANEXO 2	– DECIBÉIS.....	173
ANEXO 3	– ALGORITMO DE QUANTIFICAÇÃO ÓTIMA.....	175
ANEXO 4	– PARECENÇA ENTRE SINAIS E VETORES.....	176
ANEXO 5	– FUNÇÃO DE AUTOCORRELAÇÃO.....	178
ANEXO 6	– SINUSOIDE COM PREDITOR UNITÁRIO.....	179
ANEXO 7	– FUNÇÕES DENSIDADE ESPECTRAL DE POTÊNCIA EM CÓDIGOS DE LINHA.....	180
ANEXO 8	– FUNÇÃO COMPLEMENTAR DE ERRO.....	181
ANEXO 9	– <i>BER</i> COM CRITÉRIO MAP.....	183
ANEXO 10	– LARGURA DE BANDA EQUIVALENTE DO RUÍDO.....	185
ANEXO 11	– <i>BER</i> EM SISTEMAS DISCRETOS.....	187
ANEXO 12	– FUNÇÃO DE PROBABILIDADE BINOMIAL.....	189

PRINCIPAIS EQUAÇÕES

CODIFICAÇÃO DE SINAL – MODULAÇÃO POR CODIFICAÇÃO DE IMPULSOS	191
CODIFICAÇÃO DE LINHA – TRANSMISSÃO BINÁRIA	195
CODIFICAÇÃO DE LINHA – TRANSMISSÃO PAM DIGITAL <i>M</i> -ÁRIA	198
CODIFICAÇÃO DE CONTROLO DE ERROS	200
PERGUNTAS TEÓRICAS.....	203
EXERCÍCIOS RESOLVIDOS.....	205
EXERCÍCIOS PROPOSTOS.....	249
EXERCÍCIOS PROPOSTOS EM AMBIENTE DE PROGRAMAÇÃO	263
MODULAÇÃO POR CODIFICAÇÃO DE IMPULSOS	263
TRANSMISSÃO NUM CANAL AWGN	269
CODIFICAÇÃO DE CONTROLO DE ERROS	273
PROJETO DE COMUNICAÇÃO DIGITAL DE SINAIS.....	276
LISTA DE ACRÓNIMOS	278
BIBLIOGRAFIA	280

Primeira Parte

CODIFICAÇÃO DE SINAIS



Em muitos sistemas de transmissão de dados, os sinais analógicos são, primeiro, convertidos para a forma digital pelo transmissor, transmitidos na forma digital e, finalmente reconstruídos no recetor como sinais analógicos. O sinal resultante segue, normalmente, o sinal de entrada, mas não é exatamente o mesmo, uma vez que o quantificador no transmissor produz os mesmos dígitos para todos os valores de entrada que caem em cada intervalo, de um número finito de intervalos. O recetor deve fornecer, a cada combinação de dígitos, um único valor que será a amplitude do sinal reconstruído, para todos os valores do sinal de entrada que caem dentro da gama de quantificação. A diferença entre o sinal de entrada e de saída, assumindo a não existência de erros na transmissão dos dígitos, é o ruído de quantificação. Uma vez que o débito de qualquer sistema de transmissão é finito, deve-se utilizar um quantificador que mapeia a entrada num número finito de intervalos.

Joel Max

Quantizing for Minimum Distortion, 1960

1 Introdução aos codificadores de sinal

Num sistema de comunicação digital, quando o sinal a transmitir é analógico variando continuamente com o tempo, é necessário primeiro convertê-lo para formato digital, ou seja, representá-lo (codificá-lo) digitalmente com um número finito de bits (*binary digits*).

1.1 Métodos de codificação de sinal

Existem diversos métodos de codificação de sinais: codificação de forma de onda; codificação paramétrica; e codificação híbrida. Serão apenas discutidos os métodos de codificação de forma de onda utilizando modulação por codificação de impulsos, de débito binário mais elevado. É dada especial ênfase à codificação de sinais de fala, usada em aplicações que se encontram bastante difundidas. Embora com estas limitações, os conceitos apresentados são, no entanto, essenciais para uma compreensão posterior dos outros métodos de codificação e para a codificação de outro tipo de sinais, tais como áudio, imagens ou vídeo.

1.2 Atributos dos codificadores de sinal

Nos critérios de escolha de um codificador para determinada aplicação existem alguns atributos que são decisivos, enquanto outros ou não têm influência ou algum compromisso pode ser levado em consideração. Os atributos mais relevantes dos codificadores de sinal são: o débito binário; a qualidade do sinal decodificado; a complexidade dos algoritmos e a quantidade de memória necessária; a sensibilidade a erros de canal; e a latência introduzida. Seguidamente, descreve-se cada um destes atributos e abordam-se os principais compromissos envolvidos.

1.2.1 Débito binário

Ao transmitir sinais, o débito binário de codificação resultante, medido em número de bits por segundo, é um fator importante na definição da largura de banda requerida para o canal de comunicação. A codificação digital é também utilizada no armazenamento para utilização posterior. Neste contexto, o débito binário determina o espaço requerido na unidade de armazenamento. Para determinada quantidade de

memória disponível, quanto menor for o débito binário maior duração do sinal pode ser armazenada.

A primeira motivação da codificação de sinais é, pois, a redução do débito binário com vista a uma transmissão ou a um armazenamento mais eficientes. Para que este sinal tenha uma alta qualidade e possa ser considerado como uma referência, é tipicamente representado com uma resolução de, pelo menos, 16 bits de codificação por amostra. É este sinal, já na sua forma digital, que é processado de modo a gerar um conjunto de bits com um débito binário mais reduzido, para ser transmitido ou armazenado. No recetor, este conjunto de bits constrói uma aproximação do sinal original ainda na forma digital e converte-o posteriormente num sinal analógico.

1.2.2 Qualidade do sinal descodificado

A conversão de um sinal analógico para digital envolve a conversão de um valor contínuo num valor aproximado entre um número finito de valores. A esta conversão dá-se o nome de quantificação¹. A quantificação introduz sempre ruído, denominado de ruído de quantificação. Uma das medidas de qualidade mais utilizadas para medir este efeito é a relação entre a potência do sinal original e a potência do ruído de quantificação, sendo normalmente expressa em decibéis (Apêndice 2). O problema básico da quantificação/codificação é o de introduzir um mínimo de ruído para determinado débito binário, ou mantê-lo aceitável ao menor débito binário possível.

Além da quantificação, a largura de banda dos sinais de entrada tem implicação na qualidade. Por exemplo os sinais de fala têm uma banda perceptivamente importante até cerca dos 10 kHz, embora na denominada banda telefónica esta seja limitada entre os 300 Hz e os 3,3 kHz. Está também normalizada a denominada banda larga, dos 50 Hz aos 7 kHz. Esta banda é utilizada em aplicações multimédia, em teleconferência e no videotelefone.

A relação sinal-ruído é um método objetivo de avaliação da qualidade, mas nem

¹Termo usado em mecânica quântica para designar o facto de muitos dos parâmetros que descrevem um sistema só poderem ter um conjunto discreto de valores permitidos.

sempre é o melhor. Uma das alternativas é a avaliação subjetiva ou perceptiva, por média da opinião (MOS – *Mean Opinion Score*), recomendação P.800 do ITU-T (*International Telecommunication Union – Telecommunication Standardisation Sector*). Nesta avaliação, ouvintes humanos são confrontados com frases processadas através do codificador em teste, sendo-lhes pedido que classifiquem a sua qualidade através de uma escala de cinco pontos (1 a 5), que corresponde uma qualidade de má a excelente (*má, fraca, razoável, boa, excelente*). Do valor médio das respostas obtém-se a classificação subjetiva final.

1.2.3 Complexidade e memória necessária

Quanto maior complexidade apresentar o algoritmo de codificação e maior quantidade de memória for necessária, mais os sistemas serão dispendiosos, volumosos e com maior consumo de energia. O primeiro codificador para sinais de fala a ser normalizado, a recomendação ITU-T G.711 a 64 kbit/s, que data de 1972, era então implementado diretamente no conversor analógico-digital, devido à sua baixa complexidade e à ausência de necessidade de memória. Com a vulgarização dos processadores digitais de sinal (DSP – *Digital signal processor*) e o aumento da complexidade dos codificadores, os sinais passaram a ser inicialmente codificados tipicamente com 16 bits por amostra, e só depois codificados a débitos binários mais baixos. A complexidade é normalmente aferida através do número de MIPS (milhões de instruções (em inteiro) por segundo) ou MFLOPS (milhões de instruções em vírgula flutuante por segundo) necessários para processar os algoritmos de codificação, enquanto a memória necessária é medida através do número de bytes necessários.

1.2.4 Sensibilidade a erros de canal

Na transmissão do sinal codificado, este fica sujeito a erros introduzidos pelo canal, que podem ser de dois tipos: erros aleatórios independentes, causados pelo ruído estacionário; e rajadas de erros, limitados temporalmente, causados por interferências eletromagnéticas nas imediações do canal. Estes erros afetam a qualidade do sinal e, conseqüentemente, a relação sinal-ruído. O impacto na qualidade depende do tipo de

codificador, sendo o impacto maior em codificadores que tiram partido da correlação do sinal para diminuir o débito binário, tentando não perder muito em qualidade.

1.2.5 Latência

A latência em codificação de sinais é definida como o tempo máximo que medeia entre o instante em que uma amostra é apresentada no transmissor e aquele em que a amostra correspondente é gerada pelo recetor. Este tempo é medido estando o recetor ligado diretamente ao transmissor, retirando a contribuição do atraso dos equipamentos de transmissão e receção e o tempo de propagação do sinal, mas não o tempo de transmissão de cada bit.

Embora a latência não seja importante em aplicações de armazenamento, na conversação bidirecional, como por exemplo na comunicação telefónica ou em jogos *online*, a latência pode tornar-se incómoda e mesmo afetar a naturalidade da conversação. Limites para a latência poderão ir, nos casos mais permissivos, até cerca de 400 ms.

2 Conversão analógico-digital

De modo a transmitir um sinal digitalmente é necessário convertê-lo numa sequência binária. Na sua forma mais simples, este processo corresponde à conversão analógico-digital, ou seja, a conversão de um sinal analógico, de variação contínua no domínio do tempo (representando, por exemplo, variações de pressão produzidas por um som quando captado através de um microfone) num conjunto finito de bits. A dificuldade encontrada prende-se com o carácter contínuo e, portanto, com infinitas possibilidades do sinal. Para resolver estes problemas, a conversão analógico-digital envolve três etapas que serão objeto de análise no resto deste capítulo:

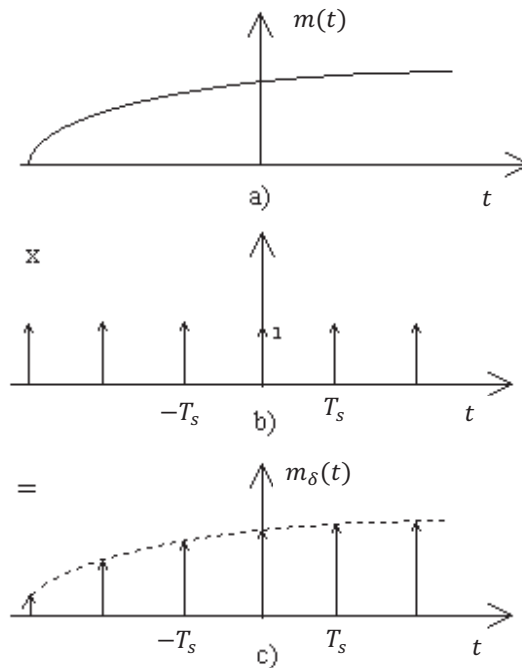
- A *amostragem*, que tem como objetivo tornar o sinal discreto no domínio do tempo e não envolve perda de informação desde que alguns pressupostos não sejam quebrados (teorema da amostragem de Nyquist²-Shannon³);
- A *quantificação*, que torna as amostras do sinal discretas na amplitude, transformando uma variável contínua num número finito de valores;
- A *codificação*, que atribui a cada amplitude discreta um código binário, designada modulação por codificação de impulsos (PCM – *Pulse Code Modulation*).

2.1 Amostragem

A amostragem tem como objetivo tornar o sinal discreto no domínio do tempo. Pode ser descrita como a “observação” do valor do sinal analógico de entrada, $m(t)$ (m – *mensagem*), a intervalos regulares. O sinal amostrado, $m_\delta(t)$, é obtido (figura 2.1) pelo produto entre o sinal de entrada e um trem de impulsos de *Dirac*, $\delta(t - nT_s)$ ($n = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$), com período T_s (*sampling period*). O espectro do sinal amostrado, $M_\delta(f)$, corresponde à convolução do espectro, $M(f)$, do sinal, $m(t)$, que se assume de banda limitada W , pela transformada de Fourier do trem de impulsos de *Dirac*, também um trem de impulsos de *Dirac* no domínio da frequência, $f_s \delta(f - nf_s)$, com frequência fundamental e área $f_s = 1/T_s$, em que f_s é a frequência de amostragem.

² Harry Nyquist, 1889-1976. Sueco-americano, trabalhou na AT&T e nos Laboratórios Bell.

³ Claude Shannon, 1916-2001. Americano, trabalhou nos Laboratórios Bell e foi professor no MIT.

**Figura 2.1****Interpretação da amostragem no domínio do tempo.**

Em a) representa-se um exemplo de um sinal $m(t)$ a amostrar. Em b) representa-se um trem de impulsos de *Dirac* de área unitária e período T_s , que multiplicado pelo sinal de entrada produz o sinal amostrado representado em c).

Como a convolução é uma operação linear, a convolução com um trem de impulsos de *Dirac* corresponde à soma das convoluções com cada um dos impulsos de *Dirac* (figura 2.2). Convolver o espectro com um impulso de *Dirac* corresponde a colocar esse espectro na posição do impulso de *Dirac* e afetá-lo em amplitude pela respetiva área. Para reconstruir o sinal amostrado é necessário filtrá-lo de forma passa-baixo (filtro reconstrutor) com frequência de corte $f_s/2$, e com ganho T_s para manter a amplitude original do sinal. Para evitar a sobreposição espectral e a correspondente distorção a que se dá o nome de *aliasing*, a frequência de amostragem tem de ser igual ou superior a duas vezes o valor W da frequência máxima do sinal (teorema da amostragem⁴ de Nyquist-Shannon):

$$f_s \geq 2W. \quad (2.1)$$

⁴ Apresentado em 1948 por C. Shannon e resultado de estudos realizados por Harry Nyquist em 1928.

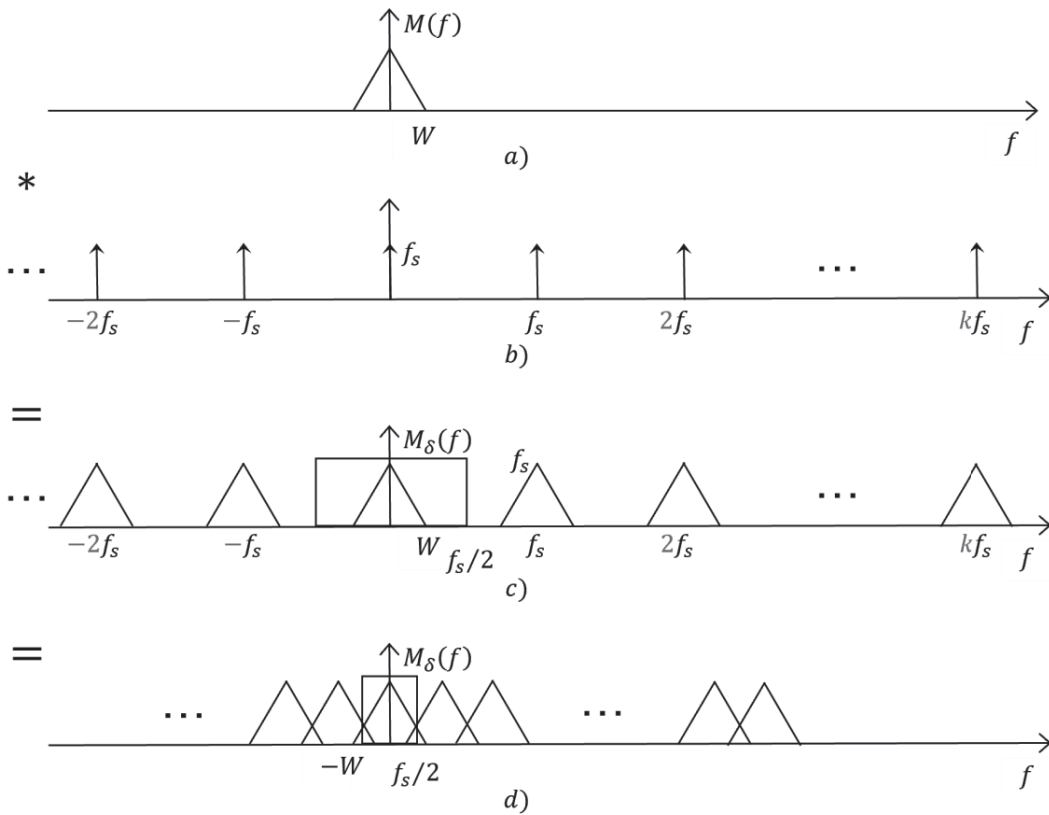


Figura 2.2

Interpretação da amostragem no domínio da frequência.

- a) Espectro de um sinal $m(t)$, com banda limitada W .
- b) Espectro do trem de impulsos de Dirac, também um trem de impulsos de Dirac com frequência fundamental f_s e área f_s .
- c) e d) O espectro do sinal amostrado corresponde à convolução dos espectros em a) e b). A reconstrução do sinal é possível sem distorção para o exemplo em c) por filtragem passa-baixo com frequência de corte $f_s/2$, pois $W < f_s/2$. Em d) não é possível recuperar o sinal sem erro uma vez que as repetições espectrais se sobrepõem (*aliasing*), pois $W > f_s/2$.

Teorema da amostragem de Nyquist-Shannon

É possível amostrar e reconstruir, sem erro, um sinal com banda limitada W , desde que a frequência de amostragem f_s seja superior ao ritmo de Nyquist $2W$. A reconstrução sem distorção do sinal amostrado é obtida por filtragem passa-baixo à frequência de Nyquist $f_s/2$. Se f_s for inferior a $2W$ o sinal reconstruído sofrerá uma distorção por sobreposição dos espectros, a que se dá o nome de *aliasing*.

Quando não há certeza de se evitar o *aliasing*, antes da amostragem o sinal a amostrar deve ser previamente limitado à frequência $f_s/2$, através de um filtro passa-baixo (filtro anti-*aliasing*). Na figura 2.3 é apresentado o diagrama de blocos de toda a cadeia filtro anti-*aliasing* – amostragem – reconstrução.

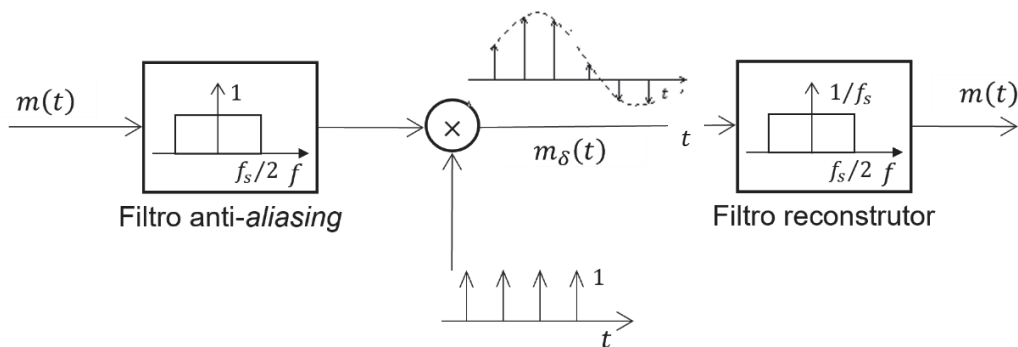


Figura 2.3

Cadeia amostragem-reconstrução.

Filtro anti-*aliasing* – amostragem – filtro reconstrutor.

O filtro anti-*aliasing* elimina as frequências acima de $f_s/2$.

O filtro reconstrutor faz interpolação com funções base do tipo “*sinc*” para reconstruir o sinal analógico.

Os filtros anti-*aliasing* e reconstrutor são idênticos, mas têm papel diferente na cadeia amostragem-reconstrução.

Uma vez que o filtro reconstrutor é linear, a reconstrução pode ser interpretada como a sobreposição de funções *sinc* (figura 2.4) devidas à resposta do filtro (transformada de Fourier inversa de um retângulo, correspondente ao filtro ideal passa-baixo), ponderadas pelo valor da amostra correspondente e deslocadas para a sua posição no tempo. As funções *sinc* tomam o valor zero no instante de todas as outras amostras, não contribuindo para as mesmas.

Para sinais de fala com qualidade telefônica está normalizada (POTS – *plain old telephone service*; GSM – *Global System for Mobile Communications*) uma frequência de amostragem de 8 kHz e uma filtragem passa-banda entre os 300 Hz e os 3,3 kHz, denominada banda telefônica. A frequência de amostragem ligeiramente superior à mínima exigida pelo teorema da amostragem de Nyquist-Shannon é justificada pela necessidade de uma banda de guarda, devida à característica não ideal dos filtros.

Como os sinais resultantes da amostragem têm valores não nulos apenas em múltiplos do período de amostragem T_s , estes podem ser representados com vantagens

na sua versão discreta (utilizada em processamento digital de sinais) $m[n]$, em que a variável independente n toma apenas valores inteiros. A amostra $m[n]$ é interpretada como a amostra n correspondente aos instantes de amostragem nT_s .



Figura 2.4

Interpretação da reconstrução do sinal no domínio do tempo.

O sinal é reconstruído por sobreposição de funções *sinc* (resposta impulsiva do filtro ótimo de reconstrução), ponderadas pelos valores da amostra correspondente e deslocadas para a sua posição. As funções *sinc* tomam o valor zero no instante de todas as outras amostras, não contribuindo para a sua reconstrução.

2.2 Quantificação

Quantificação de um sinal é o processo que converte um sinal amostrado (discreto no tempo), num sinal com valores discretos em amplitude. Considerando a gama dos sinais a quantificar entre o intervalo $-V$ e V , (figura 2.5) dividida em L intervalos de quantificação, a quantificação dá-se pela aproximação do valor de uma amostra que pertença a determinado intervalo pelo seu representante, denominado valor de quantificação, v_j , do intervalo. Para ser escolhido o valor mais próximo do valor de entrada (menor ruído de quantificação), os valores de decisão, t_j , que definem os intervalos de quantificação, devem estar equidistantes de dois valores consecutivos de quantificação:

$$t_j = \frac{v_j + v_{j-1}}{2}. \tag{2.2}$$

A quantificação é um processo irreversível, pois é impossível determinar, dentro do intervalo de quantificação, qual o valor de entrada $m[n]$ que produziu o valor quantificado $m_q[n]$. Devido à aproximação que se dá na quantificação, esta, ao invés da amostragem quando dentro dos limites impostos pelo teorema da amostragem de

Nyquist-Shannon, introduz sempre ruído. Este ruído, denominado ruído de quantificação, é definido como a diferença entre o valor da amostra de entrada e o valor de quantificação:

$$q[n] = m[n] - m_q[n]. \quad (2.3)$$

Quando os intervalos de quantificação são todos iguais, os quantificadores denominam-se de uniformes. A dimensão de cada intervalo de quantificação vem:

$$\Delta_q = \frac{2V}{L}, \quad (2.4)$$

e o valor máximo do ruído de quantificação corresponde a metade da largura do intervalo de quantificação.

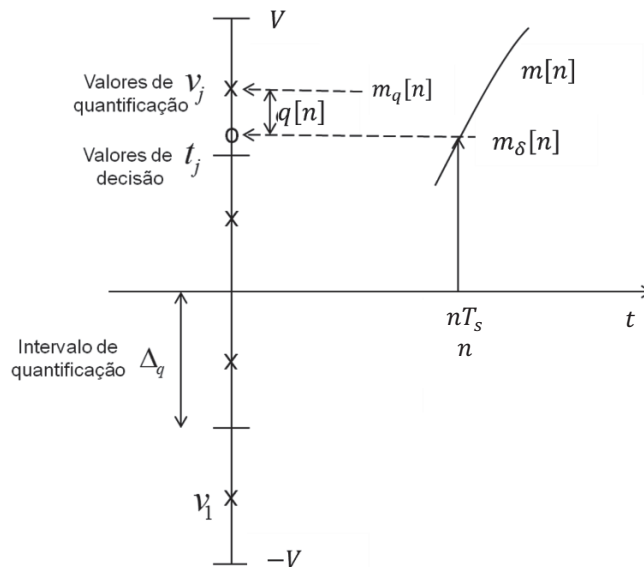


Figura 2.5

Quantificação de sinais.

Cada amostra do sinal amostrado $m[n]$ é quantificada, $m_q[n]$, no valor de quantificação mais próximo, v_j , um em cada um dos L intervalos de quantificação, originando ruído de quantificação $q[n]$.

Existem dois tipos de quantificadores: *midrise* e *midtread*.

Os quantificadores *midrise*, de que se apresenta um exemplo na figura 2.6 para quatro intervalos uniformes, são caracterizados por incluírem o valor zero como valor de decisão. Nas zonas de ausência de sinal, devido a pequenas variações causadas por ruído, este quantificador flutua entre os dois valores de quantificação em torno de zero.

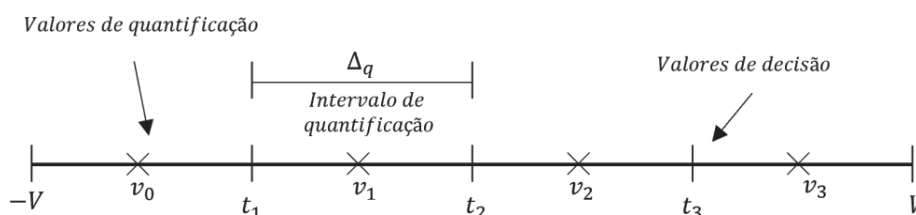


Figura 2.6

Quantificador uniforme *midrise* (4 intervalos).

O zero corresponde a um valor de decisão, sendo o quantificador simétrico. Os valores de decisão estão equidistantes dos valores de quantificação adjacentes. Nas zonas de silêncio o ruído de quantificação oscila entre $\pm\Delta_q/2$.

Não existe um valor de quantificação coincidente com os extremos de quantificação, $-V$ e V , requisito vantajoso em alguns tipos de codificadores, nomeadamente por Modulação por Codificação de Impulsos Diferencial (DPCM – *Differential pulse code modulation*) apresentados no capítulo 4. Para que isto aconteça, os intervalos de quantificação correspondem a:

$$\Delta_q = \frac{2V}{L - 1} \tag{2.5}$$

Os quantificadores *midtread*, de que é apresentado um exemplo para quatro intervalos uniformes na figura 2.7, são caracterizados por incluírem o valor zero como valor de quantificação, pelo que não sofrem da flutuação nas zonas de ausência de sinal, principal inconveniente dos quantificadores *midrise*. Pelo contrário, desde que o ruído tenha amplitude menor que metade do intervalo de quantificação, este é eliminado pela sua quantificação no valor zero. Tem, contudo, como desvantagem, uma vez que é regra usar quantificadores com um número par de valores de quantificação, que a sua função entrada-saída se torne não simétrica, pela inclusão num dos extremos de um valor de quantificação com um intervalo de quantificação menor e originando no outro extremo um intervalo de quantificação maior.

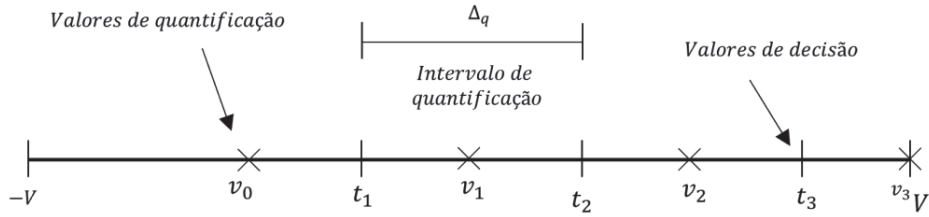


Figura 2.7

Quantificador uniforme *midtread* (4 intervalos).

O zero corresponde a um valor de quantificação, sendo o quantificador não simétrico.

Não sofre de flutuações nas zonas de silêncio.

Num extremo o intervalo vale $0,5\Delta_q$ e no outro extremo vale $1,5\Delta_q$.

2.3 Codificação

A codificação é a representação binária da sequência de valores de um sinal, após amostragem e quantificação. Exprime cada um dos L valores de quantificação possíveis em cada amostra quantificada através de um código binário. Esta codificação amostra-a-amostra denomina-se Modulação por Codificação de Impulsos (PCM – *Pulse Code Modulation*).

Utilizando um número L de valores de quantificação, que coincida com uma potência de dois de modo a otimizar o número de bits de codificação por amostra, R , pode-se reescrever a equação (2.4) introduzindo este termo, sendo o intervalo de quantificação dado por:

$$\Delta_q = \frac{2V}{L} = \frac{2V}{2^R}. \quad (2.6)$$

O débito binário, ou número de bits de codificação por segundo do sinal, R_b , para uma frequência de amostragem f_s , vem:

$$R_b = R \times f_s. \quad (2.7)$$

A figura 2.8 ilustra toda a cadeia de conversão digital. É apresentado um código sequencial do valor de quantificação mais pequeno para o mais alto. Havendo oito valores ($L = 8$) de quantificação por amostra são necessários três bits ($R = 3$) para os codificar. É ainda apresentada a sequência binária da codificação da sucessão de amostras.

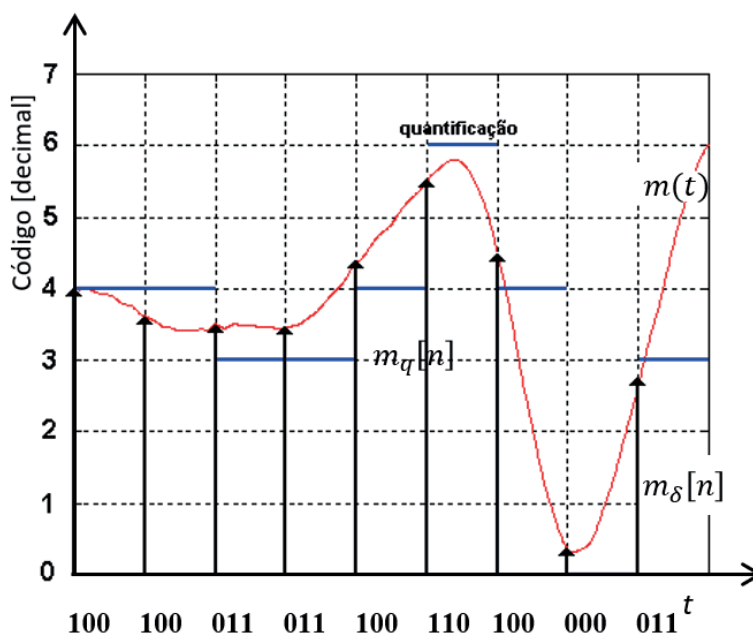


Figura 2.8

Amostragem e quantificação de sinais.

O sinal analógico $m(t)$ é amostrado dando origem ao sinal $m_q[n]$.

Cada amostra é quantificada, reconhecendo-se $L = 8$ valores de quantificação.

Cada amostra quantificada é codificada com um código binário sequencial de três bits.

2.4 Relação sinal-ruído em quantificação uniforme

Uma das medidas mais usadas para aferir a qualidade de codificadores de sinal é a relação entre a potência do sinal original e a potência do ruído introduzido pela quantificação, normalmente designada por relação sinal-ruído de quantificação (SNR_q – *Signal-to-Noise Ratio*). Esta relação é normalmente apresentada em decibéis (SNR_{dB}) (Anexo 2).

Para uma sequência suficientemente longa de amostras, os valores do ruído devido à quantificação podem ser considerados igualmente distribuídos no intervalo de quantificação (distribuição uniforme), como ilustrado na figura 2.9. Esta aproximação é válida quando se utiliza um número suficiente de valores de quantificação, digamos, para $L \geq 32$ (para melhor visualização, a figura 2.9 apresenta apenas quatro valores de quantificação). A função densidade de probabilidade do ruído é, nestas condições, praticamente uniforme à volta de cada valor de quantificação, sendo o valor máximo do ruído de $\Delta_q/2$, uma vez que o valor de quantificação está a meio do respetivo intervalo.

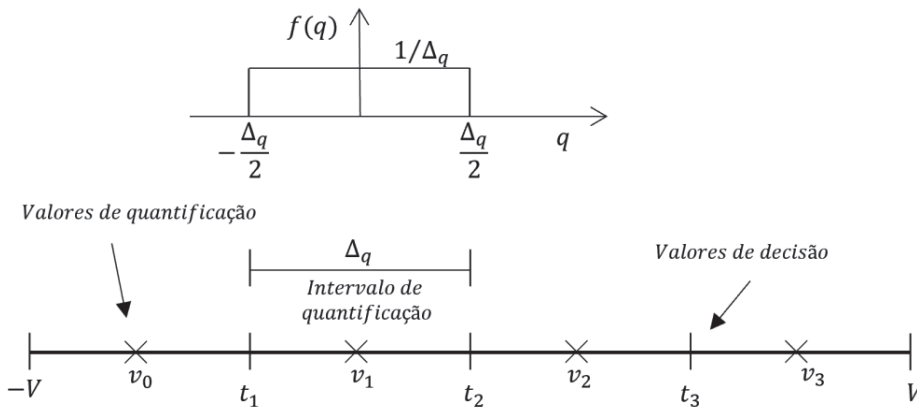


Figura 2.9

Função densidade de probabilidade do ruído de quantificação.

Para um número razoável de intervalos de quantificação a função densidade de probabilidade do ruído de quantificação aproxima-se de uma distribuição uniforme. O valor máximo absoluto do ruído de quantificação é $\Delta_q/2$, uma vez que o valor de quantificação está a meio do respetivo intervalo.

O sinal correspondente ao ruído de quantificação tem valor médio nulo e a sua potência (normalizada⁵) pode ser estimada⁶ como a sua variância (Anexo 1) σ_q^2 . Tendo também em conta a equação (2.4):

$$\sigma_q^2 = \int_{-\infty}^{\infty} q^2 f(q) dq = \frac{1}{\Delta_q} \int_{-\Delta_q/2}^{\Delta_q/2} q^2 dq = \frac{\Delta_q^2}{12} = \frac{V^2}{3 \times 2^{2R}}, \quad (2.8)$$

em que $f(q)$ designa a função densidade de probabilidade das amplitudes do ruído de quantificação.

A potência do ruído de quantificação aumenta com o aumento do valor do intervalo de quantificação. Este aumenta com a diminuição do número de intervalos de quantificação, que corresponde à diminuição do número de bits de codificação por amostra e conseqüentemente do débito binário (equação (2.7)). Diminuir o débito binário corresponde a aumentar a potência do ruído e a piorar a qualidade, comprovando o compromisso entre estes dois atributos importantes. A potência do ruído de quantificação aumenta também com o aumento da gama de quantificação $-V$ a V .

⁵ Assumindo um sinal de tensão ou corrente sobre uma carga de 1Ω .

⁶ Assumindo quantificação *midrise*, sendo os valores obtidos aproximados para quantificação *midtreadd*.

Em zonas de silêncio os quantificadores *midrise* produzem valores do ruído praticamente iguais a $\Delta_q/2$, o que para poucos bits de codificação pode ser audível e a potência do ruído é superior à dada pela equação (2.8). Devido à assimetria, a equação (2.8) dá um valor aproximado para quantificação *midtread*, sendo a potência do ruído menor se o sinal tiver zonas de silêncio, pois o ruído nessas zonas é praticamente nulo.

A relação entre a potência (normalizada), P , do sinal de entrada e a potência (normalizada), σ_q^2 , do ruído é estimada através de:

$$SNR_q = \frac{P}{\sigma_q^2} = 3 \times 2^{2R} \times \frac{P}{V^2}, \quad (2.9)$$

ou em decibéis:

$$SNR_{dB} = 6,02R + 10 \log_{10} \left(\frac{3P}{V^2} \right). \quad (2.10)$$

A diminuição do valor máximo de quantificação para metade equivale a diminuir para metade o intervalo de quantificação, a uma diminuição da potência do ruído para um quarto, a quadruplicar a relação sinal-ruído e a aumentar 6,02 dB na SNR_{dB} . Contudo, a amplitude do sinal de entrada, m_{max} , não deve ser superior ao valor máximo de quantificação. Caso contrário produz-se ruído por saturação de amplitude, deixando as equações (2.8) a (2.10) de ser válidas, pelo que o valor máximo de quantificação terá de respeitar a inequação:

$$V \geq m_{max}. \quad (2.11)$$

Assumindo o caso ideal, ou seja, que o valor máximo de quantificação corresponde à amplitude do sinal de entrada, evitando assim a saturação de amplitude, mas minimizando o ruído de quantificação, a equação (2.10) pode ser reescrita como:

$$SNR_{dB} = 6,02R + 10 \log_{10} \left(\frac{3P}{m_{max}^2} \right) = 6,02R + 10 \log_{10}(3P_n). \quad (2.12)$$

A SNR_{dB} passa a ser função da potência normalizada pelo quadrado da amplitude (relação entre a potência e a respetiva potência de pico), sendo dada por:

$$P_n = \frac{P}{m_{max}^2}, \quad (2.13)$$

que pode ser representada em valor absoluto (sem dimensões) ou em decibéis.

2.5 Compromissos entre atributos

Através da equação (2.10), pode-se verificar que a qualidade do sinal reconstruído depende de dois fatores: da relação entre a potência do sinal de entrada e o quadrado do valor máximo de quantificação; e do número de bits de codificação por amostra. Quanto maior for o número de bits de quantificação por amostra melhor a qualidade, mas também maior o débito binário. Note-se ainda que a qualidade não depende da frequência de amostragem, que deve ser a menor possível desde que cumpra o teorema de amostragem de Nyquist-Shannon, uma vez que minimiza o débito binário.

Na tabela 2.1 apresentam-se os valores da SNR_{dB} para codificação a oito bits por amostra e diversas potências normalizadas do sinal de entrada. Se para -3 dB de potência normalizada (sinal sinusoidal ($10\log_{10}(1/2)$)) o valor da SNR_{dB} de 50 dB é bastante bom, o valor de apenas 7,9 dB para uma potência normalizada de -45 dB é inaceitável. Muitos sinais, por exemplo, sinais de fala, exibem esta gama de variação. A grande dependência da qualidade em relação à potência do sinal de entrada é de facto uma das principais desvantagens do PCM com quantificação uniforme.

Tabela 2.1
Valores da SNR_{dB} de quantificação, função da potência normalizada do sinal.
 Comparação para oito bits de codificação por amostra e para diversos valores de potência normalizada do sinal de entrada.

P_n [dB]	Tipo de Entrada	SNR_{dB}
-45		7,9
-35		17,9
-25		27,9
-15		37,9
-4,77	Triangular ou distribuição uniforme	48,2
-3	Sinusoidal	49,9
0	Quadrada	52,9

Por cada bit de codificação por amostra a relação sinal-ruído varia 6,02 dB. Para garantir um valor mínimo da relação sinal-ruído de aproximadamente 32 dB para um sinal de entrada com -45 dB de potência normalizada seria necessário aumentar 24 dB na relação sinal-ruído, ou seja, utilizar mais quatro bits de codificação por amostra, resultando num aumento, eventualmente demasiado elevado, do débito binário (de 64

kbit/s para 96 kbit/s assumindo sinais de fala de banda telefónica), evidenciando um compromisso entre o débito binário e a qualidade.

Além de aumentar o débito binário, a melhoria da qualidade através do aumento do número de bits por amostra tem dois limites:

- A complexidade dos conversores, que duplicam o número de intervalos de quantificação por cada bit de codificação. Por exemplo, para 16 bits de codificação por amostra originam-se $2^{16} = 65536$ intervalos de quantificação;
- O intervalo muito pequeno a discriminar. Por exemplo, para 16 bits de codificação por amostra e um valor máximo de quantificação de 1 V, o intervalo de quantificação vale $\Delta_q = 2^{-15} = 30 \mu\text{V}$, que se pode confundir com o ruído térmico nos sistemas eletrónicos. Para valores mais pequenos, os sistemas tornam-se demasiado caros ou mesmo impossíveis de realizar diretamente, sendo necessário utilizar outro tipo de paradigma, como, por exemplo, a modulação delta-sigma ($\Delta\Sigma$), tópicos fora do contexto deste texto.

Na figura 2.10 é apresentado o gráfico da relação sinal-ruído em função da potência normalizada do sinal de entrada para diversos valores de número de bits por amostra.

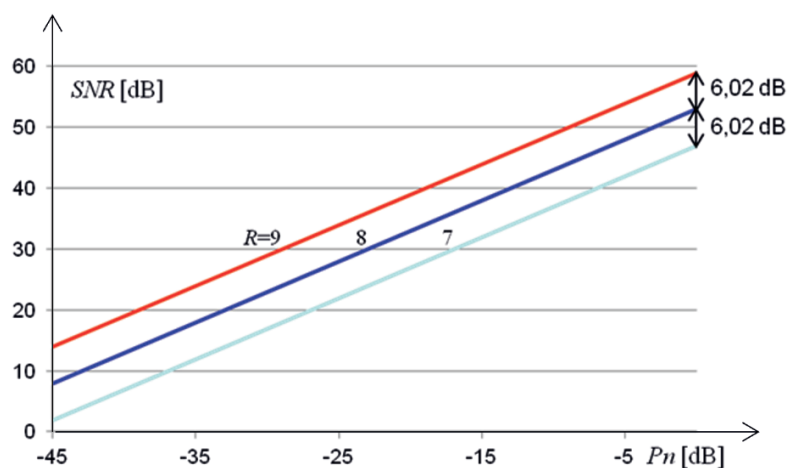


Figura 2.10

Relação sinal-ruído em PCM uniforme (dB).

Comparação para 7, 8, e 9 bits de codificação por amostra para diversos valores de potência normalizada (em decibéis) do sinal de entrada.

Este capítulo descreveu o primeiro passo na comunicação digital, com a conversão de sinais analógicos para uma sequência de bits utilizando modulação por codificação de impulsos, com quantificação uniforme. Este sistema afigura-se o mais simples capaz de representar um sinal analógico digitalmente. No entanto, a qualidade do sinal reconstruído depende muito das características do sinal de entrada e só é possível manter boa qualidade para débitos binários que poderão ser elevados para muitas aplicações. Nos próximos capítulos serão apresentados métodos para diminuir o débito binário, tirando partido das características do sinal, tendo sempre em consideração o compromisso com os outros atributos dos codificadores de sinais, particularmente a qualidade.

3 Quantificação não uniforme

No capítulo anterior discutiu-se a utilização da modulação por codificação de impulsos com quantificação uniforme (PCM uniforme) e a estimativa da respetiva relação sinal-ruído de quantificação, concluindo-se que é difícil manter uma elevada relação sinal-ruído, nomeadamente para potências baixas do sinal de entrada, que não seja à custa do aumento do débito binário e da diminuição “excessiva” da dimensão do intervalo de quantificação. Outra característica importante a ter em conta é a necessidade de a relação sinal-ruído ser independente do valor máximo de quantificação e das especificidades do sinal de entrada. Esta característica pode ser conseguida com a utilização de quantificação não uniforme, ou seja, com um quantificador em que os intervalos de quantificação não são todos iguais.

O histograma de um sinal de fala⁷ não é uniforme, tendendo a ter maior número de ocorrências para valores menores. Esta constatação levou à utilização de intervalos de quantificação menores nas zonas de maior ocorrência, como mostrado na figura 3.1, à custa do aumento do intervalo de quantificação nas zonas de menor ocorrência. O ruído de quantificação diminui na maioria das amostras, à custa de, em algumas amostras menos prováveis, o ruído de quantificação aumentar. Sendo a potência um valor médio quadrático, este procedimento diminui a potência do ruído de quantificação e, conseqüentemente, aumenta a relação sinal-ruído. A este método de codificação/quantificação dá-se o nome de PCM não uniforme.

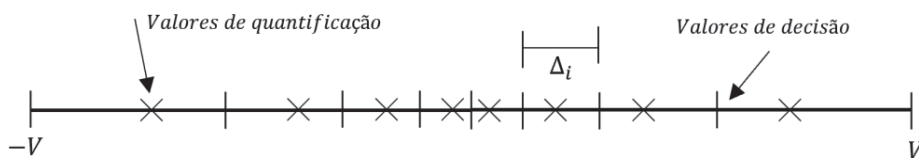


Figura 3.1

Exemplo de um quantificador não uniforme.

São mais bem quantificados os valores menores (em módulo) do que os valores maiores (em módulo). Para que este quantificador seja eficaz devem ser as amplitudes mais baixas as mais prováveis.

⁷ Considera-se, genericamente, que a função densidade de probabilidade de sinais de fala segue uma distribuição de Laplace.

Se o sinal de entrada apresentar uma função densidade de probabilidade das amplitudes em que os valores mais altos são os que tiverem maior ocorrência, então devem ser estes a ser quantificados com intervalos menores, à custa do aumento dos intervalos para valores mais pequenos. Na utilização destes quantificadores pressupõe-se que é conhecida uma estimativa da função densidade de probabilidade das amplitudes do sinal de entrada, sob pena de se obter desempenhos inferiores do que utilizando quantificadores uniformes.

Alternativamente à utilização de um quantificador não uniforme pode-se aplicar ao sinal analógico de entrada uma não linearidade, $g(m)$, como a mostrada na figura 3.2, seguido de um quantificador uniforme, como mostrado na figura 3.3.

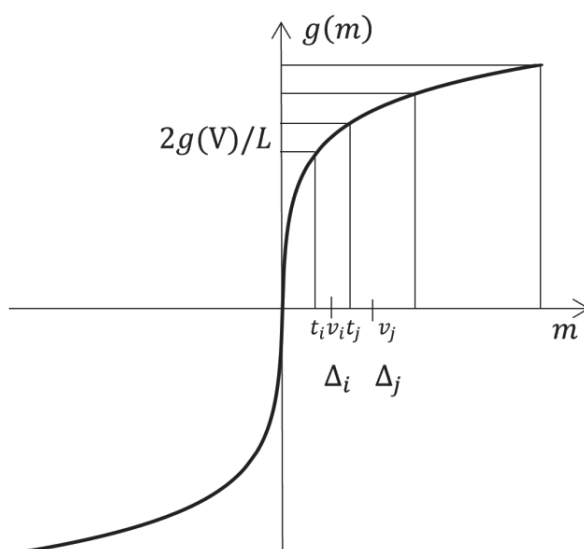


Figura 3.2

Exemplo de não linearidade utilizada em quantificação não uniforme.

A não linearidade seguida de quantificação uniforme é equivalente à quantificação não uniforme.

O tipo de não uniformidade é dependente da não linearidade utilizada. Para um sinal de fala, com distribuição de amplitudes com mais ocorrências perto do zero, pode-se verificar que o efeito da não linearidade é tornar a distribuição de amplitudes mais uniforme e, portanto, mais adequada a um quantificador uniforme. No recetor, após descodificação, aplica-se a função inversa para regenerar o sinal. A diferença entre o sinal original e o sinal descodificado é causada apenas pela quantificação.

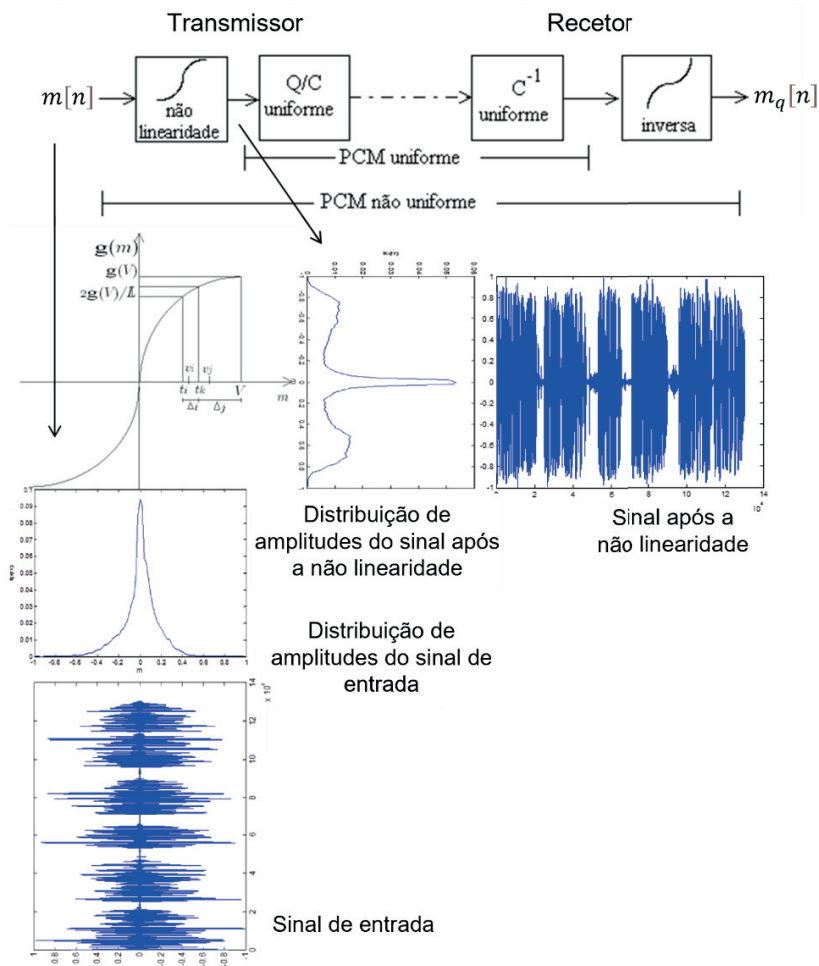


Figura 3.3

Implementação da codificação PCM não uniforme.

No codificador o sinal é aplicado a uma não linearidade seguida de quantificação uniforme. Para um sinal de fala, com distribuição de amplitudes com mais ocorrências perto do 0, a não linearidade torna a distribuição de amplitudes mais uniforme e, portanto, mais adequado a um quantificador uniforme.

O decodificador é uniforme seguido da função inversa da não linearidade, de modo a regenerar o sinal original. Alternativamente, pode-se obter valores de quantificação e decisão através da aplicação da função inversa da não linearidade aos respectivos valores do quantificador uniforme.

Note-se que, numa realização prática, a utilização direta do quantificador não uniforme é menos complexa quando comparada com a implementação do esquema apresentado na figura 3.3. Quer os valores de decisão, necessários no codificador, quer os valores de quantificação, necessários no decodificador, são obtidos por aplicação da função inversa da não linearidade, dos respectivos valores do quantificador uniforme.

3.1 Relação sinal-ruído em quantificação não uniforme

Para se analisar o efeito da não linearidade $g(m)$ e calcular a relação sinal-ruído de quantificação, verifica-se através da figura 3.2 que os diversos intervalos de quantificação são dados, aproximadamente, por:

$$\Delta_j \approx \frac{2g(V)}{Lg'(v_j)}, \quad (3.1)$$

em que $g'(v_j)$ é a função derivada de 1.^a ordem da não linearidade, em torno do j -ésimo valor de quantificação, v_j . Se o sinal de entrada for aleatório, mas com função densidade de probabilidade $f(m)$ conhecida, a potência do ruído de quantificação para o j -ésimo intervalo é dada pela variância centrada no valor de quantificação v_j :

$$N_j = \int_{t_j}^{t_{j+1}} (m - v_j)^2 f(m) dm, \quad (3.2)$$

sendo t_j a t_{j+1} o intervalo de quantificação correspondente ao valor de quantificação v_j .

Assumindo um número elevado de valores, a função densidade de probabilidade do sinal de entrada $f(m)$ é aproximadamente constante no intervalo de quantificação, ou seja, todos os valores do sinal de entrada no j -ésimo intervalo de quantificação têm aproximadamente a mesma probabilidade que $f(v_j)$. Igualmente, se os intervalos de quantificação adjacentes não tiverem dimensões muito diferentes, o valor de quantificação encontra-se aproximadamente a meio do intervalo de quantificação e o ruído está limitado ao intervalo $\left[v_j - \frac{\Delta_j}{2}; v_j + \frac{\Delta_j}{2}\right]$. Nestas condições, a equação (3.2) pode ser reescrita como:

$$N_j \approx f(v_j) \int_{t_j}^{t_{j+1}} (m - v_j)^2 dm \approx f(v_j) \frac{\Delta_j^3}{12}. \quad (3.3)$$

Incluindo nesta equação a aproximação dada pela equação (3.1) vem:

$$N_j \approx \frac{g(V)^2}{3L^2} \frac{f(v_j)}{g'(v_j)^2} \Delta_j. \quad (3.4)$$

A potência total do ruído de quantificação é a soma das potências em cada intervalo de quantificação, que se aproxima de uma função contínua desde que seja utilizado um número elevado de valores de quantificação, pelo que:

$$\sigma_q^2 = \sum_{j=1}^L N_j \approx \frac{g(V)^2}{3L^2} \sum_{j=1}^L \frac{f(v_j)}{g'(v_j)^2} \Delta_j \approx \frac{g(V)^2}{3L^2} \int_{-m_{max}}^{m_{max}} \frac{f(m)}{g'(m)^2} dm, \quad (3.5)$$

e a relação sinal-ruído de quantificação (não em decibéis) vem:

$$SNR_q = \frac{P}{\sigma_q^2} = \frac{3L^2 P}{g(V)^2 \int_{-m_{max}}^{m_{max}} \frac{f(m)}{g'(m)^2} dm}, \quad (3.6)$$

pelo que, para calcular a relação sinal-ruído de quantificação, é necessário conhecer a derivada de 1.^a ordem da não linearidade e a função densidade de probabilidade do sinal que se quer quantificar.

Se $g(m) = m$, ou seja, retirando a não linearidade, a quantificação é uniforme. A derivada da função vale um e a equação (3.6) reduz-se à equação (2.9). Esta conclusão é válida mesmo para uma amplificação do sinal de entrada, $g(m) = Km$, pois valendo a derivada $K = g(V)/V$ e assumindo $V = m_{max}$, tem-se para o denominador da equação (3.6):

$$g(V)^2 \int_{-m_{max}}^{m_{max}} \frac{f(m)}{g'(m)^2} dm = \frac{K^2}{K^2} m_{max}^2 \int_{-m_{max}}^{m_{max}} f(m) dm, \quad (3.7)$$

ou seja:

$$m_{max}^2 \int_{-m_{max}}^{m_{max}} f(m) dm = m_{max}^2, \quad (3.8)$$

porque a área total de qualquer função densidade de probabilidade vale um. Conclui-se que, um fator de escala (amplificação) aplicado ao sinal de entrada, ao alterar simultaneamente a potência do sinal e a dimensão dos intervalos de quantificação, não altera a relação sinal-ruído de quantificação.

3.2 PCM *companding*

Se a não linearidade for logarítmica, *i.e.*, $g(m) = \ln(|m|)$, cuja derivada de 1.^a ordem é $1/|m|$ e sabendo que o integral de $m^2 f(m) dm$, calculado no intervalo entre $-m_{max}$ e m_{max} (momento esperado de 2.^a ordem), é igual à potência, o valor da relação sinal-ruído de quantificação (equação (3.6)) deixa de depender da potência do sinal de entrada para ser dependente apenas do número de intervalos de quantificação:

$$SNR_q = \frac{3L^2 P}{2g(V)^2 \int_0^{m_{max}} m^2 f(m) dm} = \frac{3L^2}{g(m_{max})^2}. \quad (3.9)$$

A função logarítmica não pode, no entanto, ser realizada, pois converte o intervalo entre zero e um no intervalo entre $-\infty$ e zero. Estão, no entanto, normalizadas pelo ITU-T duas funções pseudo-logarítmicas, que convertem o intervalo entre zero e um no mesmo intervalo, tendo a função uma característica ímpar: a Lei- A utilizada na Europa e a Lei- μ utilizada nos EUA e Japão, descritas na recomendação ITU-T G.711, que data de 1972. Ambas utilizam oito bits de codificação por amostra e, como é normalizado para sinais de fala em qualidade telefónica, uma frequência de amostragem de 8 kHz, resulta num débito binário de 64 kbit/s. Se os valores de entrada estiverem normalizados em relação à amplitude do sinal de entrada, ou seja, V igual a um, a Lei- A é descrita por:

$$g(m) = \begin{cases} \pm \frac{1 + \ln(A|m|)}{1 + \ln(A)} & \frac{1}{A} \leq |m| \leq 1 \\ \frac{A}{1 + \ln(A)} m & 0 \leq |m| \leq \frac{1}{A} \end{cases}, \quad (3.10)$$

cujo gráfico é apresentado na figura 3.4. O parâmetro A governa o grau de compressão, sendo o valor normalizado na recomendação ITU-T G.711 de 87,56.

Com $A = 87,56$, para valores pequenos ($m < 1/A$) a Lei- A tem um comportamento linear ($g(m) = 16m$), enquanto para valores médios e altos tem um comportamento quase logarítmico. Esta não linearidade corresponde a comprimir o sinal de entrada. No recetor, após descodificação, tem de se incluir a não linearidade

inversa (figura 3.3), que corresponde a uma expansão. Esta técnica denomina-se de *companding* (*compressing-expanding*).

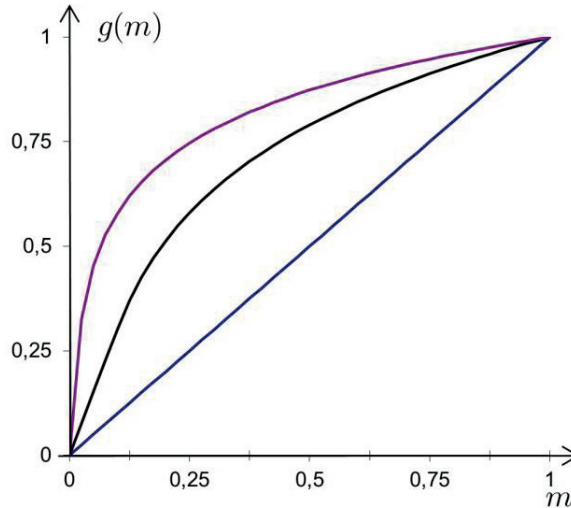


Figura 3.4

Não linearidade da Lei-A.

São ilustradas as funções não lineares da Lei-A, que dão origem a uma quantificação não uniforme. O valor normalizado pela recomendação ITU-T G.711 é de $A=87,56$. Só são apresentados valores positivos, tendo as funções características ímpares.

Como se verá seguidamente, a utilização de *companding* conduz a uma relação sinal-ruído de quantificação quase constante para uma gama vasta de potências do sinal de entrada, não tendo a dependência com esta grandeza do PCM uniforme, considerado muito bom para potências elevadas, mas insuficiente para potências médias e baixas.

Para a estimativa da relação sinal-ruído, tendo como base a equação (3.6), é necessário conhecer a derivada da equação (3.10) correspondente à Lei-A, dada por:

$$g'(m) = \begin{cases} \frac{1}{(1 + \ln(A))} \frac{1}{m} & \frac{1}{A} \leq |m| \leq 1 \\ \frac{A}{1 + \ln(A)} & 0 \leq |m| \leq \frac{1}{A} \end{cases} \quad (3.11)$$

Para potências médias e altas, ou seja, quando a potência normalizada do sinal de entrada for razoavelmente superior a $1/A^2$, os termos superiores das equações (3.10) e (3.11) são os termos dominantes, pelo que se pode desprezar o efeito da zona linear.

Nestas circunstâncias a relação sinal-ruído vem, usando o valor normalizado para A de 87,56 e utilizando a equação (3.6):

$$SNR_q \approx \frac{3L^2P}{(1 + \ln(A))^2 \int_{-1}^1 m^2 f_m(m) dm} = \frac{3L^2}{(1 + \ln(A))^2} = 0,1L^2, \quad (3.12)$$

ou, em decibéis:

$$SNR_{dB} = 6,02R - 10. \quad (3.13)$$

A relação sinal-ruído só depende do número de bits de codificação por amostra, deixando de depender da potência do sinal de entrada ou do valor máximo de quantificação. Para o codificador da recomendação ITU-T G.711, de 8 bits por amostra (64 kbit/s), o valor máximo da SNR_{dB} é de 38,16 dB e mantém-se praticamente constante para uma variação apreciável de potência normalizada do sinal de entrada (-40 dB). É esta característica quase constante do *companding* que o faz ter um desempenho médio superior ao PCM uniforme. Contudo, para sinais de muito baixa potência, ou seja, quando a potência normalizada do sinal de entrada é inferior a $1/A^2$, o termo dominante é o inferior da equação (3.10), com um comportamento linear, pelo que a relação sinal-ruído é dada pela equação (2.10).

Para a Lei- μ :

$$g(m) = \pm \frac{\ln(1 + \mu|m|)}{\ln(1 + \mu)}, \quad 0 \leq |m| \leq 1. \quad (3.14)$$

O parâmetro μ governa o grau de compressão, sendo o valor normalizado de 255. Para valores pequenos esta Lei tem, como a Lei- A , um comportamento linear, dado que $\ln(1 + \mu|m|) \approx \mu|m|$. Para valores elevados tem um comportamento logarítmico, dado que para $\mu|m| \gg 1$, então $\ln(1 + \mu|m|) \approx \ln(\mu|m|)$. A derivada desta função vale:

$$g'(m) = \frac{\mu}{\ln(1 + \mu)(1 + \mu|m|)}. \quad (3.15)$$

A relação sinal-ruído vem, com o valor normalizado $\mu = 255$, aplicando a equação (3.6) e após alguma manipulação algébrica:

$$SNR_q \approx \frac{3L^2}{(\ln(1 + \mu))^2} \approx 0,1L^2. \tag{3.16}$$

Para baixas potências esta aproximação não é válida, correspondendo, como na Lei-A, à entrada na zona linear, fazendo diminuir a relação sinal-ruído. Das equações (3.13) e (3.16) verifica-se que os desempenhos das duas Leis são idênticos.

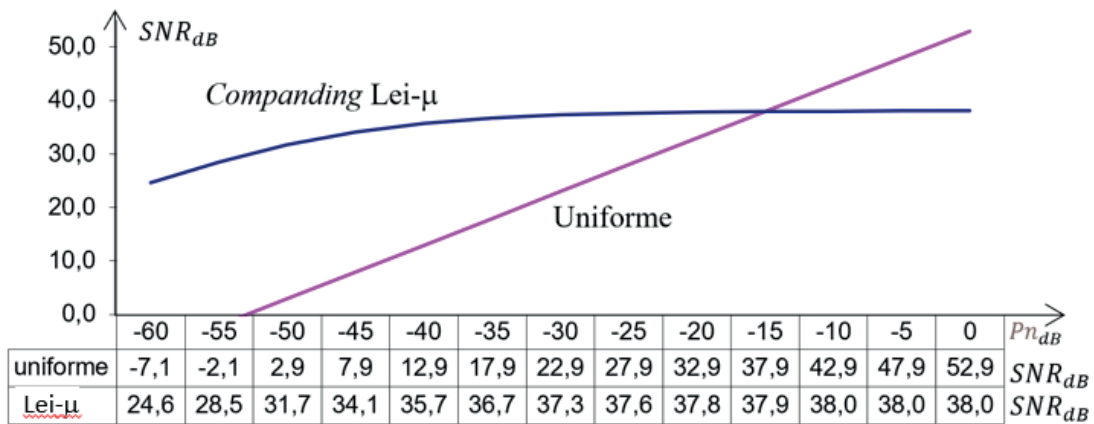


Figura 3.5
Relação sinal-ruído em PCM companding Lei- μ ($\mu=255$).

Comparação do PCM companding com PCM com quantificação uniforme, função da potência do sinal de entrada normalizada pelo quadrado do valor máximo de quantificação, para oito bits por amostra. Note-se a característica quase constante da relação sinal-ruído do PCM companding e o seu melhor desempenho em relação ao PCM uniforme para potências normalizadas abaixo dos -14,77 dB.

A característica quase constante da relação sinal-ruído em companding, ilustrada na figura 3.3, pode ser explicada do modo seguinte: para sinais de baixa potência a probabilidade de amplitudes baixas é maior, sendo mais bem quantificadas e baixando a potência do ruído. Para sinais de potência elevada, a probabilidade de amplitudes elevadas é maior, mas também são mais mal quantificadas. Em ambos os casos a relação entre a potência do sinal e do ruído de quantificação é quase idêntica.

3.3 Quantificação ótima

Quando, no sinal a quantificar, existe maior probabilidade de ocorrência de alguns dos valores do que de outros, deve-se diminuir a dimensão dos intervalos de quantificação nas zonas mais prováveis, à custa do aumento da dimensão dos intervalos nas zonas menos prováveis. Por exemplo, os sinais de fala têm uma função densidade de probabilidade das amplitudes com maiores ocorrências para os valores mais pequenos, pelo que o PCM *companding* é uma melhor alternativa em relação ao PCM uniforme. No entanto, a principal vantagem do PCM *companding* é a de tornar a relação sinal-ruído praticamente independente da potência do sinal de entrada e do valor máximo de quantificação.

Para sinais de potência razoável a utilização de PCM *companding* resulta numa diminuição da relação sinal-ruído em relação ao PCM uniforme, pelo que deve ser utilizado outro tipo de não linearidade.

Aplicando as equações (3.2) e (3.5), a potência do ruído de quantificação vem:

$$\sigma_q^2 = \sum_{j=1}^L N_j = \sum_{j=1}^L \int_{t_j}^{t_{j+1}} (m - v_j)^2 f(m) dm. \quad (3.17)$$

Os valores ótimos de decisão, t_j , e de quantificação, v_j , são estimados por minimização da potência do ruído de quantificação, ou seja, tomando as derivadas parciais de N_j em ordem a t_j e a v_j . Contudo, a resolução deste conjunto de equações não é fácil. Descreve-se a seguir um algoritmo iterativo conhecido por Lloyd-Max (Anexo 3), ilustrado na figura 3.6, para estimar os valores ótimos de quantificação e decisão. Tem como entrada o histograma das amplitudes do sinal a quantificar, estimando a respetiva função densidade de probabilidade.

O quantificador resultante só terá o mesmo desempenho quando for utilizado para quantificar sinais com a mesma função densidade de probabilidade dos sinais que geraram o histograma de entrada do algoritmo, denominado de *corpus* de *treino*. É necessário ser muito criterioso na escolha deste *corpus*, devendo incluir diversos oradores do género masculino e feminino, dizendo frases balanceadas foneticamente, ou

seja, em que as ocorrências dos fonemas que as compõem sejam aproximadas da respectiva ocorrência na linguagem falada.

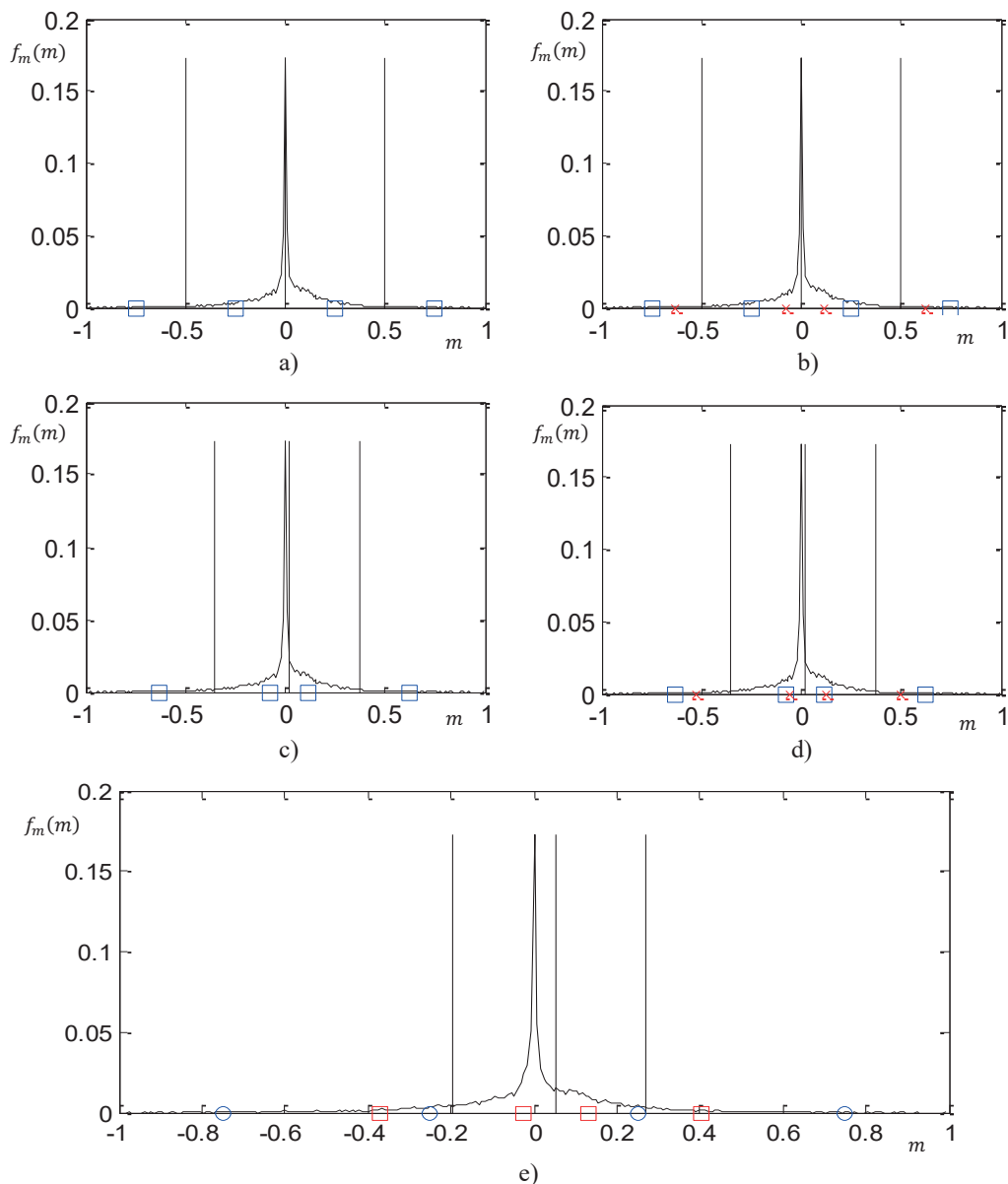


Figura 3.6

Exemplo do algoritmo Lloyd-Max para um sinal de fala.

Em a) é ilustrado o quantificador uniforme utilizado para inicializar o algoritmo.

Em b) são representados os novos valores de quantificação, obtidos pelos valores médios de cada intervalo de quantificação, ponderados pelos respectivos valores do histograma.

Em c) e d) é ilustrada a segunda iteração, partindo dos valores obtidos na iteração anterior.

Em e) são apresentados:

O - Valores de quantificação uniforme ($SNR_{dB} = -0,2$ dB)

□ - Valores ótimos ($SNR_{dB} = 7,5$ dB), obtidos após nove iterações.

Como inicialização do algoritmo, assume-se qualquer quantificador com L valores de quantificação. No exemplo ilustrado na figura 3.6-a, assume-se um quantificador uniforme com quatro intervalos de quantificação, marcado sobre o histograma do sinal de entrada com “|” os valores de decisão e com “□” os valores de quantificação.

Como iteração, calculam-se os valores médios de cada intervalo de quantificação, pesados pelo respetivo histograma, como mostrado na figura 3.6-b, marcado a “x”. Seguidamente substituem-se os valores de quantificação por estes valores médios e calculam-se os respetivos valores de decisão através da equação (2.2), como mostrado na figura 3.6-c. Os valores de quantificação deslocam-se para as zonas de maior probabilidade, diminuindo aí o ruído de quantificação, à custa do aumento nas zonas de menor probabilidade. O procedimento anterior repete-se com estes novos valores, como mostrado na figura 3.6-d, até não haver diferença entre duas iterações ou esta ser menor que determinado critério de paragem. Na figura 3.6-e são mostrados os valores de quantificação iniciais (uniforme) e finais (ótimos). A potência do ruído baixou 5,9 vezes (linear), ou seja, foi produzido um aumento da relação sinal-ruído de 7,7 dB. Estes valores foram obtidos após nove iterações e o aumento da relação sinal-ruído, após a primeira iteração, foi de 1,9 dB.

Este algoritmo é eficiente para quantificar amostras de um sinal de fala ou qualquer outro parâmetro, *e.g.*, áudio ou pontos de uma imagem. Para um sinal sinusoidal, caracterizado por ter uma função densidade de probabilidade das amplitudes com maiores ocorrências para amplitudes elevadas, como mostra a figura 3.7, os valores de quantificação tendem a deslocar-se para estas amplitudes. Para um sinal com distribuição uniforme, o quantificador resultante é o quantificador uniforme.

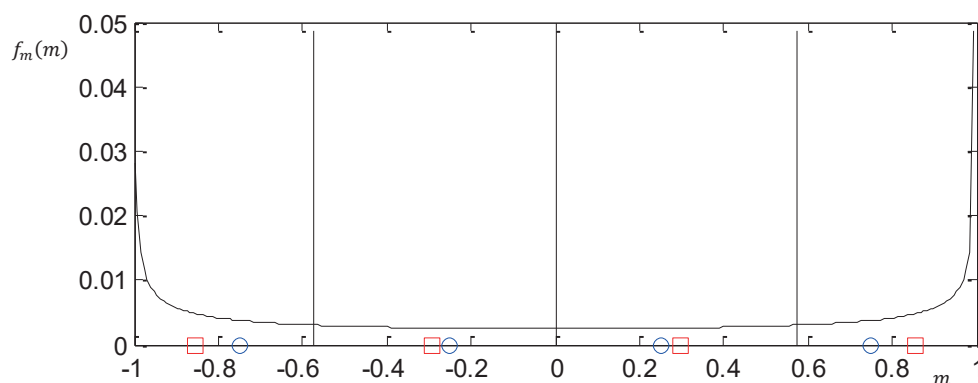


Figura 3.7
Algoritmo Lloyd-Max aplicado a uma senoide.

O - Valores de quantificação uniforme. □ - Valores de quantificação ótimos.

A relação sinal-ruído sobe de 12,8 dB para 13,8 dB após seis iterações.

3.4 Comparação entre quantificadores

Os codificadores PCM diferenciam-se pelo tipo de quantificador. Seguidamente são apresentadas as principais diferenças e compromissos:

- Quantificador uniforme – A relação sinal-ruído de quantificação é dependente da potência do sinal de entrada e do valor máximo de quantificação, sendo esta a sua principal desvantagem. Poderá ser uma boa opção quando não é conhecida a distribuição de amplitudes do sinal de entrada.

O codificador PCM uniforme é utilizado em áudio, por exemplo em CD (*Compact Disk*) e DVD (*Digital Versatile Disc*);

- Quantificador *companding* – A relação sinal-ruído é (praticamente) independente do sinal de entrada e do valor máximo de quantificação. A relação sinal-ruído tem uma diminuição de apenas 2,5 dB (figura 3.5), para uma variação da potência normalizada do sinal entre os 0 dB e aos -40 dB.

Acima dos -14,77 dB, o quantificador uniforme tem um melhor desempenho. Por exemplo, para sinais sinusoidais, cuja potência normalizada é de -3 dB (tabela 2.1) e apresenta uma função densidade de probabilidade das amplitudes com maiores ocorrências para valores maiores, a relação sinal-ruído correspondente, para 8 bits/amostra, em PCM uniforme, é de 50 dB, melhor do que os 38 dB obtidos pelo quantificador *companding*.

Os sinais de fala têm uma potência normalizada abaixo dos -14,77 dB, sendo nessa gama preferível utilizar um quantificador *companding* do que um quantificador uniforme. Outra forma de ver esta melhoria é ter em conta que, embora não conhecida exatamente, o sinal de fala tem uma função densidade de probabilidade das amplitudes com maiores ocorrências perto do zero, exatamente onde o quantificador *companding* quantifica melhor.

Um outro fator importante obtido pelo PCM *companding* quando aplicado a sinais de fala, é o aumento da qualidade percetiva em relação ao PCM uniforme. O aparelho auditivo humano, através de um processo de mascaramento auditivo, é menos sensível ao ruído em zonas de maior potência. Também por este facto se quantifica melhor os valores menores, em detrimento dos valores maiores. Conclui-se que, verifica-se melhor desempenho objetivo (aumento da relação sinal-ruído) e subjetivo (melhoria da qualidade percetiva) para sinais de fala, do quantificador *companding* em relação ao quantificador uniforme.

O codificador PCM *companding* é utilizado na transmissão telefónica em rede fixa;

- Quantificador ótimo – Tira partido do conhecimento sobre a função densidade de probabilidade das amplitudes dos sinais a quantificar. Os valores de quantificação e decisão são adaptados (treinados) de modo a maximizar a relação sinal-ruído. Como principal desvantagem, caso o sinal de entrada não mantenha a função densidade de probabilidade dos sinais que serviram para o treino dos quantificadores, a relação sinal-ruído pode descer acentuadamente.

4 Codificação preditiva

Nos capítulos anteriores estudou-se o efeito da quantificação individual das amostras do sinal de entrada. Para sinais de fala, esta é possível com qualidade codificando acima dos oito bits por amostra (64 kbit/s para sinais de fala amostrados a 8 kHz). Se se pretender baixar este débito é necessário tirar partido das redundâncias do sinal, nomeadamente da grande semelhança e/ou correlação entre amostras adjacentes, existente nos sinais de baixa frequência (quando comparado com a frequência de amostragem). Como exemplo, a figura 4.1 apresenta um gráfico das amostras de um sinal de fala em função da respetiva amostra anterior, apresentando-se à volta de uma reta de declive unitário, ou seja, exibem uma grande parecença. A codificação preditiva tira partido da parecença/correlação para estimar (predizer) a próxima amostra do sinal. Neste capítulo, é apresentada uma introdução à codificação preditiva, tirando partido da parecença/correlação entre duas amostras consecutivas. Fora do contexto deste texto, há codificadores preditivos que tiram partido da correlação entre as últimas amostras (*e.g.* codificador do GSM tira partido da correlação entre as últimas 10 amostras).

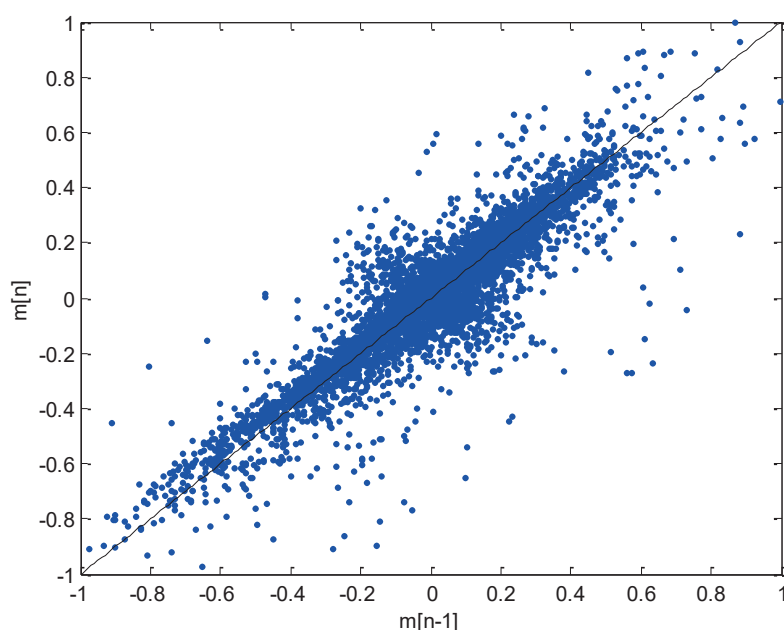


Figura 4.1

Semelhança entre amostras adjacentes em sinais de baixa frequência.

Amostras de um sinal de fala em função das respetivas amostras anteriores. A semelhança pode ser verificada pois esta função apresenta-se à volta de uma reta de declive unitário.

4.1 Modulação por codificação de impulsos diferencial

Tirando partido da semelhança entre amostras consecutivas, característica dos sinais de baixa frequência (quando comparado com a frequência de amostragem), consegue-se representar uma amostra à custa da amostra anterior, sendo transmitida em PCM, entre o codificador e o decodificador, apenas a diferença entre amostras consecutivas. Este tipo de representação do sinal toma o nome de Modulação por Codificação de Impulsos Diferencial (DPCM – *Differential pulse code modulation*).

Dada a necessidade de coerência entre os sinais no codificador e no decodificador, a diferença não é realizada sobre o sinal original, mas, como mostra a figura 4.2, sobre o sinal de saída quantificado, o único existente no decodificador. Para produzir o sinal quantificado existe no codificador uma réplica do decodificador.

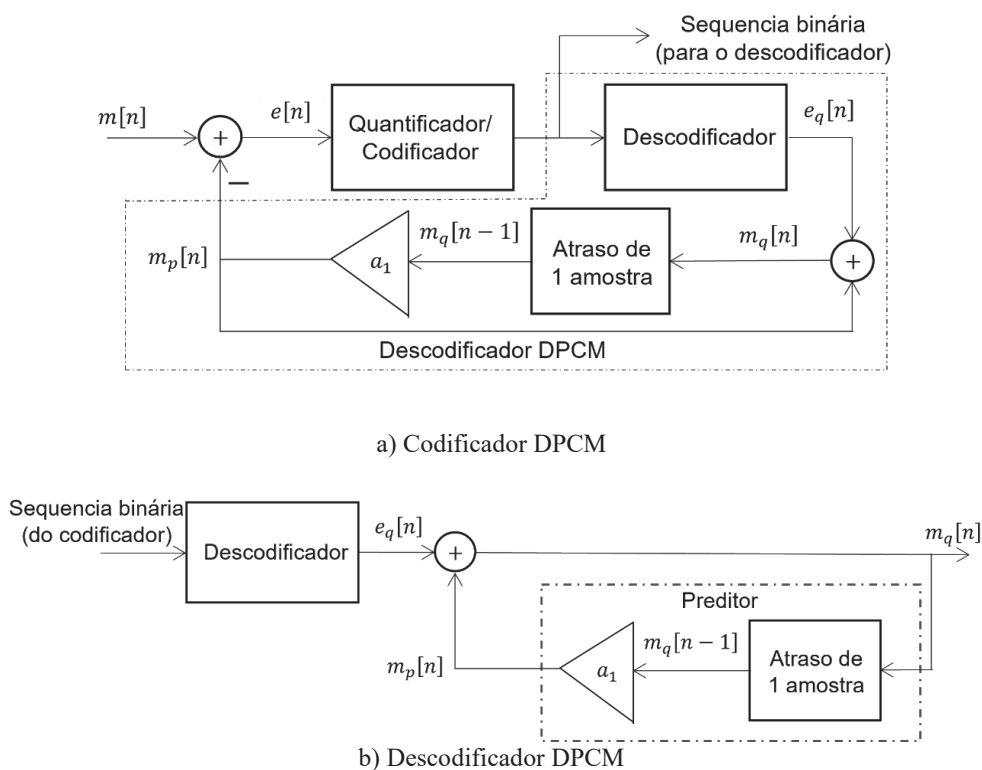


Figura 4.2

Modulação por codificação de impulsos diferencial.

- a) Esquema de blocos do codificador por modulação por código de impulso diferencial.
 b) Respetivo decodificador, correspondendo a parte do codificador.

O valor da amostra anterior quantificada, eventualmente multiplicada por um coeficiente de predição, a_1 , é interpretado como uma predição, $m_p[n]$, do valor da amostra atual. A diferença entre a amostra atual e o valor predito é interpretada como o resíduo ou erro de predição. É assim quantificado e codificado o erro de predição, $e[n]$, que deve ter uma menor variância (potência) que o sinal original, sendo suscetível de uma melhor quantificação.

4.1.1 Relação sinal-ruído em DPCM

Da análise do esquema de blocos da figura 4.2, conclui-se que o ruído de quantificação causado por este tipo de codificação é dado por:

$$q[n] = m[n] - m_q[n] = (m_p[n] + e[n]) - (m_p[n] + e_q[n]) = e[n] - e_q[n]. \quad (4.1)$$

O ruído na codificação preditiva resulta unicamente da quantificação, correspondendo ao ruído de quantificação em PCM do erro de predição. Este erro depende dos valores dos intervalos de quantificação. Para quantificação uniforme, Δ_q depende apenas do valor máximo de quantificação, V_1 , e do número de intervalos de quantificação, L . Através da equação (2.6), substituindo V (ou m_{max}) por V_1 , obtém-se:

$$\Delta_q = \frac{2V_1}{2^R}. \quad (4.2)$$

A relação sinal-ruído de quantificação (em linear) do codificador DPCM, correspondente à relação entre a potência do sinal de entrada e deste ruído, vem:

$$SNR_q = \frac{P}{\sigma_q^2} = \frac{12P}{\Delta_q^2}, \quad (4.3)$$

ou em decibéis, pela equação (2.10), com a alteração da equação (4.2) de V por V_1 :

$$SNR_{dB} = 6,02R + 10 \log_{10} \left(\frac{3P}{V_1^2} \right), \quad (4.4)$$

$$SNR_{dB} = 6,02R + 10 \log_{10} \left(\frac{3P}{m_{max}^2} \frac{m_{max}^2}{V_1^2} \right), \quad (4.5)$$

$$SNR_{dB} = 6,02R + \log_{10} \left(\frac{3P}{m_{max}^2} \right) + 10 \log_{10} \left(\frac{m_{max}^2}{V_1^2} \right). \quad (4.6)$$

O aumento da relação sinal-ruído em relação à codificação PCM, assumindo a situação ótima de $V = m_{max}$, é dado por:

$$10 \log_{10} \left(\frac{m_{max}^2}{V_1^2} \right) = 20 \log_{10} \left(\frac{m_{max}}{V_1} \right). \quad (4.7)$$

Para que a relação sinal-ruído de quantificação aumente em relação aos codificadores PCM, assumindo o mesmo número de bits de codificação, o valor máximo de quantificação, V_1 , deve ser menor que a amplitude do sinal de entrada, ou seja, resultar do preditor e do esquema diferencial uma diminuição de amplitude do sinal a ser efetivamente quantificado (erro de predição). Se não houver diminuição de V_1 não existe qualquer vantagem em utilizar codificação DPCM. É até desvantajoso, uma vez que a codificação DPCM é mais complexa (mais cara), e como se verá adiante, mais sensível a erros devido às limitações do canal de comunicação, que a codificação PCM. Note-se que o débito binário continua a ser dado pela equação (2.7).

4.1.2 Tipos de distorção

Conforme a equação (4.4), o valor máximo de quantificação, V_1 , é um parâmetro que influencia diretamente o desempenho do quantificador. Se este for demasiado elevado o desempenho diminui, pois aumenta o intervalo de quantificação, Δ_q , e a potência do ruído de quantificação. Se for demasiado pequeno o erro de predição pode excedê-lo, provocando saturação de declive (figura 4.3). Esta situação acontece com $\alpha_1 = 1$, preditor de 1.^a ordem unitário, quando a variação do sinal de entrada no intervalo entre amostras for superior a V_1 , sendo evitada na condição:

$$V_1 \geq |m(t) - m(t - T_s)|_{max} \approx \frac{m'_{max}}{f_s}, \quad (4.8)$$

em que m'_{max} corresponde à derivada máxima do sinal de entrada.

Em zonas de muito pequeno declive um quantificador *midrise* oscila em torno do sinal de entrada com salto Δ_q , provocando ruído denominado granular (figura 4.3). Para evitar o ruído granular deve ser minimizado Δ_q , o que pode provocar ruído de saturação de declive. Caso seja utilizado um quantificador *midtread*, o ruído granular é evitado, devido ao zero como nível de quantificação.

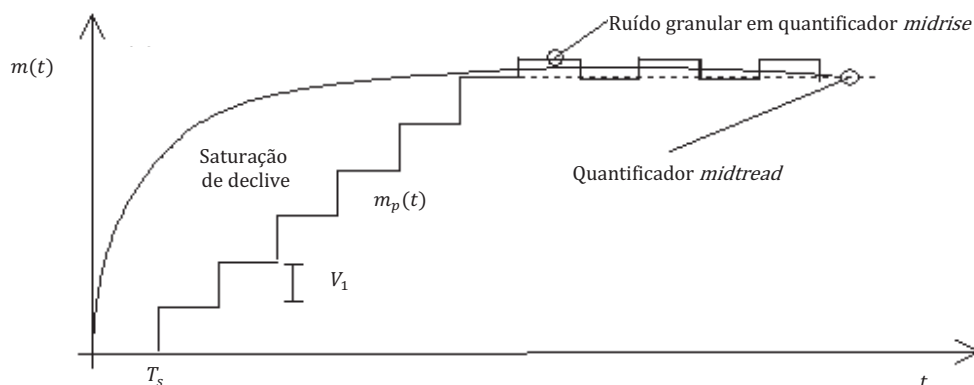


Figura 4.3

Distorção de declive em codificação DPCM.

Em codificação DPCM não existe saturação de amplitude, mas pode existir saturação de declive (*slope overload*) e ruído granular. Exemplo para preditor unitário.

A saturação de declive é preceitivamente incomodativa, pelo que deve ser evitada de acordo com a inequação (4.8). Para garantir no mínimo o valor exato de V_1 , deve-se utilizar a equação (2.5) e não a equação (2.4), ou seja, V_1 deve corresponder a um valor de quantificação. Por outro lado, o ruído granular ocorre essencialmente a metade da frequência de amostragem (1.^a harmónica), facilmente atenuado pelo filtro reconstrutor.

Uma forma de diminuir todos os tipos de ruído na codificação DPCM é aumentando a frequência de amostragem, inequação (4.8), embora à custa do aumento do débito binário, equação (2.7). O valor de V_1 para evitar a saturação de declive diminui, diminuindo Δ_q e conseqüentemente diminuindo a potência do ruído de quantificação, equação (2.6), e o ruído granular. Contudo, é preferível diminuir Δ_q aumentando o número de bits de codificação por amostra, pois a mesma qualidade é obtida com menor débito binário. De facto, apenas com mais um bit por amostra, V_1 diminui para metade, sendo necessário duplicar o valor da frequência de amostragem para obter o mesmo efeito.

A codificação DPCM não sofre de saturação de amplitude, tal como acontece em codificação PCM. De facto, é possível alcançar qualquer amplitude transmitindo consecutivamente o código correspondente ao valor máximo de quantificação, V_1 (ou mínimo $-V_1$).

4.1.3 Ganho de predição e estimação do valor máximo de quantificação

Uma das principais dificuldades em codificação DPCM é a estimação do valor máximo de quantificação do erro de predição, V_1 , de modo a evitar a saturação de declive, mas ao mesmo tempo minimizando o ruído. Um método aproximado para estimar V_1 consiste em assumir que a relação entre as potências de pico de $m[n]$ e $e[n]$ é igual à relação das respectivas potências, refletindo-se esta na gama dos quantificadores, ou seja:

$$G_p = \frac{P}{P_e} \approx \frac{m_{max}^2}{e_{max}^2}, \quad (4.9)$$

em que P_e representa a potência do sinal erro de predição, pelo que G_p , denominado ganho de predição, dá informação da redução de potência do sinal de entrada em relação ao erro de predição. O valor de quantificação que evita a saturação de declive vem:

$$V_1 \geq e_{max} \approx \sqrt{\frac{m_{max}^2}{G_p}}. \quad (4.10)$$

Resulta do esquema diferencial um aumento da relação sinal-ruído introduzido pelo ganho de predição (equações (4.6) e (4.9)). Na condição ideal de ser utilizada a igualdade na inequação (4.10), a equação (4.6) vem:

$$SNR_{dB} \approx G_{pdB} + 6,02R + 10 \log_{10} \left(\frac{3P}{m_{max}^2} \right) = G_{pdB} + SNR_{PCMDb}(m(n)). \quad (4.11)$$

Note-se que a equação (4.4) é sempre válida desde que não haja saturação de declive.

O aumento do ganho de predição, para determinado sinal de entrada, corresponde à diminuição da potência do erro de predição e, conseqüentemente, do seu valor máximo. Se, contudo, não for diminuído em conformidade o valor máximo de quantificação, V_1 , por exemplo utilizando a igualdade na inequação (4.10), não existe aumento da relação sinal-ruído.

Para se calcular o ganho de predição repare-se que, desde que a quantificação se faça com um número razoável de bits, a potência do ruído de quantificação pode-se

desprezar face à potência do sinal, ou seja, a potência do sinal quantificado, P_{mq} , é aproximadamente igual à potência do sinal original⁸:

$$P_{mq} = P + \sigma_q^2 \approx P. \quad (4.12)$$

Nestas circunstâncias, a potência do erro de predição vem:

$$\begin{aligned} P_e &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N e^2[n] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N (m[n] - a_1 m_q[n-1])^2 \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N m^2[n] + a_1^2 \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N m_q^2[n-1] \\ &\quad - 2a_1 \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N m[n]m_q[n-1] \\ &\approx P + a_1^2 P - 2a_1 R[1] = P(1 + a_1^2 - 2a_1 r[1]) \end{aligned} \quad (4.13)$$

sendo $R[k]$ o produto interno (Anexo 4) entre o sinal e ele próprio atrasado de k amostras, denominado de função de autocorrelação (Anexo 5) do sinal de entrada, aproximadamente igual à correlação cruzada entre o sinal de entrada e o sinal quantificado. $r[k]$ corresponde à função de autocorrelação normalizada pela potência $P = R[0]$. O ganho de predição (não em decibéis) resulta:

$$G_p = \frac{P}{P_e} = \frac{1}{(1 + a_1^2 - 2a_1 r[1])}. \quad (4.14)$$

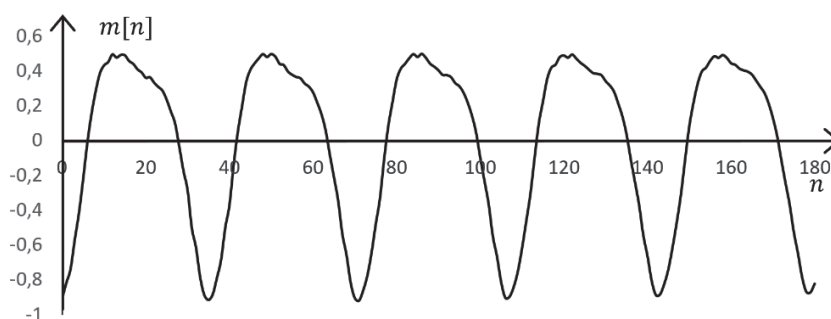
Esta equação vem, para o caso particular do coeficiente de predição ser igual a um ($a_1 = 1$, preditor de 1.^a ordem unitário), em decibéis:

$$G_{p_{dB}} = 10 \log_{10} \left(\frac{P}{P_e} \right) = 10 \log_{10} \left(\frac{1}{2(1 - r[1])} \right). \quad (4.15)$$

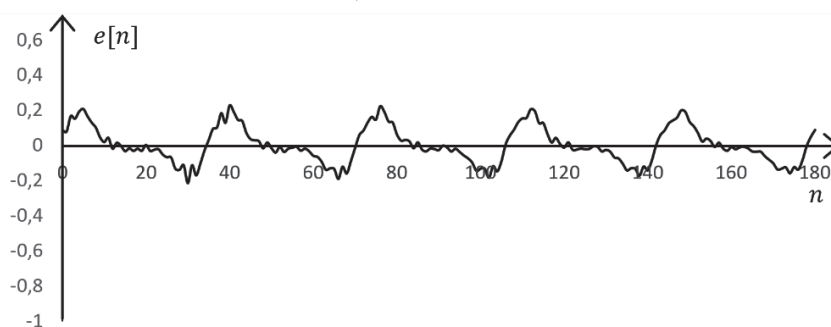
A aproximação da equação (4.9) apenas é exata para sinais sinusoidais (Anexo 6). Para sinais de fala, esta equação subestima o valor de V_1 , originando alguma saturação de declive, que pode ser precetivamente relevante. Contudo, como a saturação não é frequente, a relação sinal-ruído aumenta em relação à utilização do valor máximo do erro de predição, pois é utilizado um intervalo de quantificação menor com a

⁸ A potência do sinal soma só é igual à soma das potências desde que os sinais sejam ortogonais. Para um número suficiente de bits, pode-se considerar que o ruído de quantificação é ortogonal ao sinal de entrada.

consequente diminuição da potência do ruído de quantificação. Na figura 4.4 é ilustrada a redução da gama dinâmica do erro de predição em relação ao sinal de entrada, correspondendo a um ganho de predição maior que a unidade.



a) Sinal de fala.



b) Erro de predição.

Figura 4.4

Exemplo do desempenho de um preditor de 1.^a ordem unitário.

Em a) representa-se 180 amostras (22,5 ms amostrado a 8 kHz) de um sinal de fala.

Em b) apresenta-se o respetivo erro de predição com preditor unitário.

Estes sinais são apresentados na mesma escala, sendo visível a redução da gama dinâmica.

O codificador DPCM com preditor unitário não tem vantagens em relação ao codificador PCM quando o ganho de predição é igual a 0 dB, ou seja, $r[1] = 0,5$, equação (4.15), sendo vantajoso apenas para valores de $r[1]$ superiores a esse valor. Para $r[1] = 0,8$ o ganho de predição é de 4 dB, chegando aos 12 dB para um valor de 0,97. Nesta última situação, o codificador DPCM tem um ganho equivalente a dois bits de codificação por amostra, ou seja, tem a mesma qualidade que um codificador PCM mas com menos dois bits de codificação por amostra, resultando num menor débito binário. Dependendo da aplicação, pode-se assim, com o codificador DPCM, ganhar em qualidade, em débito binário, ou mesmo em ambos os atributos.

4.2 Adaptação do preditor

Supondo o esquema de blocos da figura 4.2, que apresenta um preditor linear de primeira ordem, o sinal predito⁹ é dado por:

$$m_p[n] = a_1 m[n - 1]. \quad (4.16)$$

O coeficiente de predição ótimo, a_1 , ou seja, aquele que minimiza a potência do erro de predição, corresponde a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_e}{\partial a_1} &= \frac{\partial \left(\frac{1}{N} \sum_n m^2[n] + a_1^2 \frac{1}{N} \sum_n m^2[n - 1] - 2a_1 \frac{1}{N} \sum_n m[n] m[n - 1] \right)}{\partial a_1}, \quad (4.17) \\ &= 2a_1 \frac{1}{N} \sum_n m^2[n - 1] - 2 \frac{1}{N} \sum_n m[n] m[n - 1] = 0 \end{aligned}$$

pelo que o valor ótimo do coeficiente de predição é dado (Anexo 4, produto interno normalizado) por:

$$a_1 = \frac{\sum_n m[n] m[n - 1]}{\sum_n m^2[n - 1]} = \frac{R[1]}{R[0]} = r[1]. \quad (4.18)$$

O coeficiente de predição é ótimo apenas para sinais com a mesma autocorrelação (de 1.^a ordem), pelo que o preditor está adaptado ao sinal de entrada.

Das equações (4.14) e (4.18), o ganho de predição vem:

$$Gp_{dB} = 10 \times \log_{10} \left(\frac{1}{1 - r[1]^2} \right). \quad (4.19)$$

Como mostra a figura 4.5, o ganho de predição com preditor adaptado é sempre maior ou igual a 0 dB, independentemente do valor da autocorrelação, o que não acontece com preditor unitário de primeira ordem, em que o ganho de predição é negativo abaixo de $r[1] = 0,5$, correspondendo a um desempenho pior que em codificação PCM. Para $r[1]$ perto de um os dois preditores têm praticamente o mesmo desempenho, pois nesta situação com preditor adaptado $a_1 = r[1] \approx 1$.

⁹ Assume-se a situação ideal da predição baseada na amostra anterior e não na amostra quantificada. No caso genérico da predição com a amostra atrasada de k , substitui-se 1 por k (equações 4.13 a 4.19).

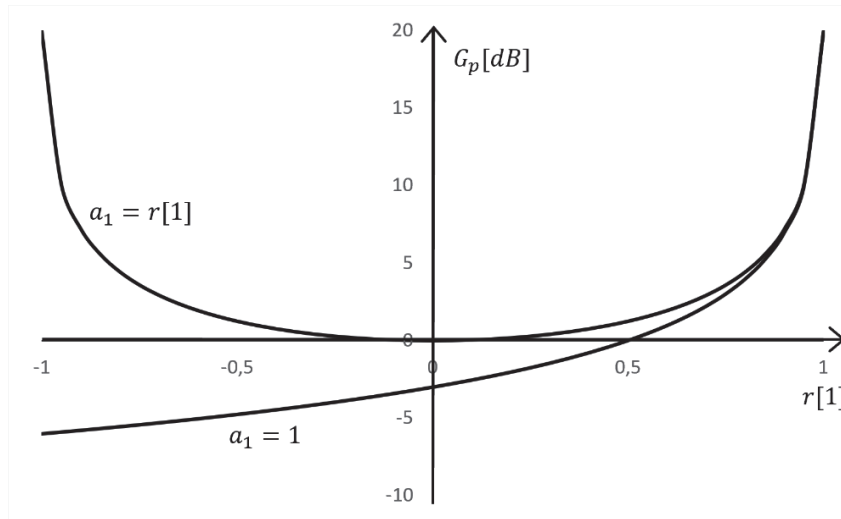


Figura 4.5

Ganho de predição da função da autocorrelação normalizada de 1.^a ordem para preditor de 1.^a ordem unitário e adaptado.

O preditor unitário tem ganho negativo abaixo de $r[1] = 0,5$. O preditor adaptado tem sempre ganho positivo, menos quando a correlação é zero em que o ganho é zero. Para $r[1]$ perto de um os dois preditores têm praticamente o mesmo desempenho.

O mesmo resultado é obtido por projeção do sinal de entrada sobre a sua versão deslocada de uma amostra, como ilustrado na figura 4.6, assumindo a melhor representação do primeiro sobre este último. De facto, a autocorrelação $R[k]$ não é mais do que o produto interno entre um sinal e a sua versão deslocada de k amostras, correspondendo a autocorrelação normalizada, $r[k]$, à respetiva projeção. À esquerda da figura exemplifica-se a predição com coeficiente unitário, para três situações distintas. A predição coincide com a amostra (quantificada) anterior, sendo o erro de predição a diferença entre esta e o sinal de entrada.

Pela equação (4.15), o ganho de predição é de 0 dB quando a projeção do sinal de entrada sobre a predição é 0,5. Esta situação acontece quando a amostra faz um “ângulo” de $\pi/3$ em relação à predição. Para um sinal sinusoidal na entrada, a autocorrelação normalizada de 1.^a ordem vem $r[1] = \cos(2\pi f/f_s)$ (equação (A.5.6)), pelo que $2\pi f/f_s = \pi/3$, ou seja, a frequência máxima para ganho de predição maior ou igual a 0 dB é de $f_s/6$. O ganho de predição só é positivo à direita deste ponto. No caso de um sinal de fala amostrado a 8 kHz (qualidade telefónica), esta frequência corresponde a 1,333 kHz. Dadas as características do sinal de fala, cuja descrição não cabe no âmbito deste texto, o ganho de predição é quase sempre maior ou igual a 0 dB.

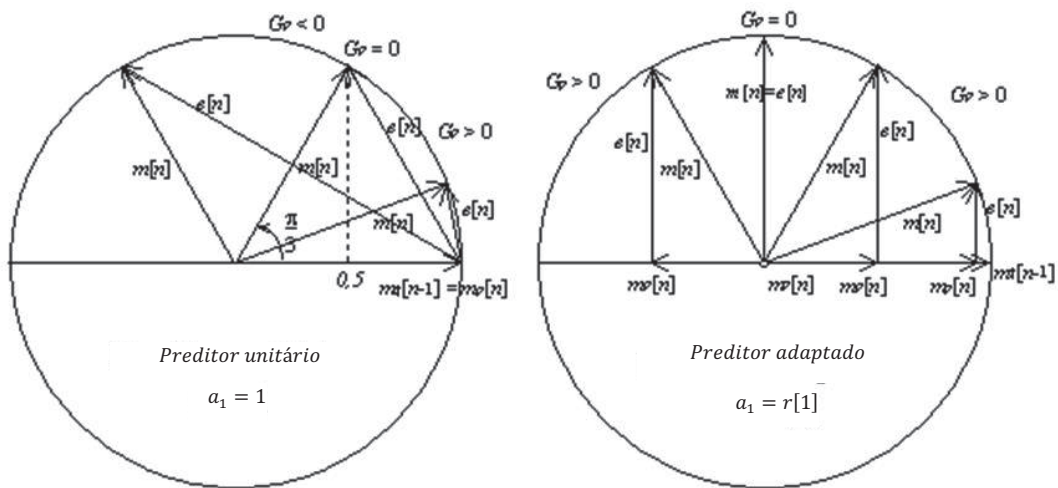


Figura 4.6
Interpretação vetorial da predição.

À esquerda, predição com coeficiente unitário. À direita, predição adaptada.

À direita da figura 4.6 exemplifica-se a predição adaptada, para quatro situações distintas. A predição corresponde à projeção sobre a amostra anterior, minimizando a energia (quadrado da norma do vetor) do erro de predição, que lhe é ortogonal. O ganho de predição é sempre positivo, equação (4.19), com exceção da situação em que o sinal de entrada e a sua projeção são ortogonais ($a_1 = r[1] = 0$), em que o erro de predição coincide com o sinal de entrada e o codificador transforma-se num codificador PCM.

Note-se que a adaptação do preditor já não tem como objetivo tirar partido da semelhança entre amostras, como no preditor unitário, mas sim tirar partido da correlação entre amostras. Por exemplo, se as amostras foram simétricas (muito diferentes) a correlação normalizada é $r[1] = -1$, mas, pela equação (4.19), o ganho de predição é de ∞ dB, o mesmo caso quando as amostras são todas iguais, a que corresponde uma correlação normalizada $r[1] = 1$.

Os codificadores de fala normalizados utilizam predição de ordem mais elevada, tipicamente com as 10 últimas amostras, de modo a melhorar o ganho de predição. Os coeficientes de predição são calculados no codificador e enviados a intervalos regulares. No codificador utilizado em GSM, por exemplo, a cada intervalo de 20 ms são calculados e enviados 10 coeficientes de predição.

4.3 Adaptação do quantificador

A utilização de um quantificador com valores fixos leva a que, como ilustrado na figura 4.7, quando a variância do sinal à sua entrada é grande, se possa exceder o valor máximo de quantificação e, por outro lado, para variâncias baixas, o ruído de quantificação seja elevado.

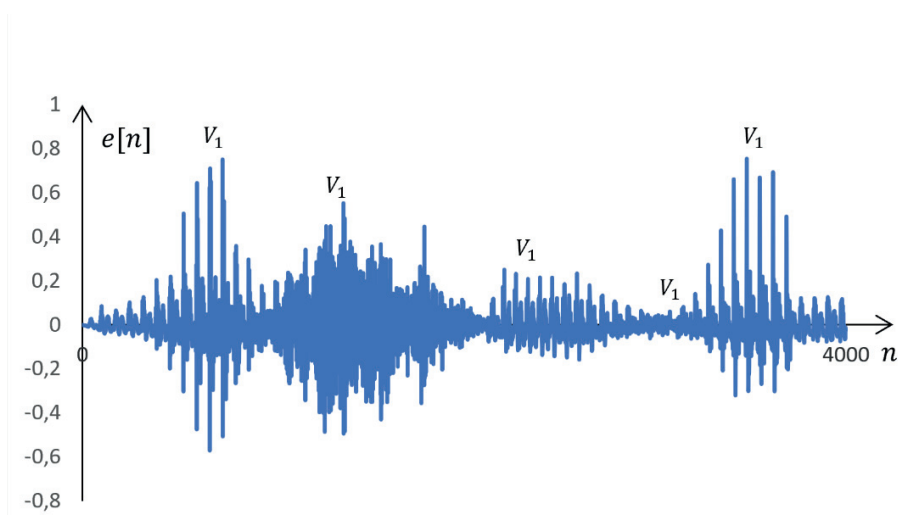


Figura 4.7

Adaptação ao valor ótimo de quantificação.

São apresentados os valores ótimos do valor máximo de quantificação em função do tempo, para o resíduo de previsão de 1.^a ordem unitário, de um sinal de fala (0,5 s).

A potência do sinal de entrada do quantificador é dependente da potência localizada e da autocorrelação do sinal de entrada e, portanto, do tempo. Para sinais quase estacionários (em que a potência e a autocorrelação variam lentamente, nomeadamente para sinais de fala) é possível adaptar localmente a gama do quantificador, dando origem ao codificador DPCM com quantificador adaptativo¹⁰.

Os parâmetros de adaptação podem ser obtidos diretamente do sinal original (AQF – *Adaptive quantization with forward estimation*), sendo esta informação enviada para o decodificador, o que aumenta o débito binário, mas oferece um aumento da qualidade. Pela equação (4.10) e conhecido o ganho de previsão pela equação (4.14), pode-se estimar o valor máximo de quantificação do erro de previsão.

¹⁰ *Adaptativo* – Que se modifica para se adaptar às condições locais do sinal. Não confundir com *adaptado*, que realiza a adaptação apenas uma vez e se mantém fixo.

Outro método de adaptação, que evita o aumento do débito binário do AQF, corresponde a obter os parâmetros de adaptação através de informação já existente no decodificador (AQB – *Adaptive quantization with backward estimation*). Um exemplo simples deste método, proposto por Jayant¹¹, é baseado no raciocínio seguinte: se o valor de quantificação numa amostra for próximo (em módulo) do valor máximo de quantificação V_1 , há risco de distorção de saturação de declive e, portanto, este último deve ser aumentado para quantificar a amostra seguinte; se o valor de quantificação for pequeno em relação ao valor máximo de quantificação, este último pode ser diminuído de modo a diminuir o intervalo de quantificação e conseqüentemente o ruído de quantificação. O valor de V_1 no instante n depende então do seu valor anterior e do índice de quantificação na amostra anterior, $(n - 1)$, seguindo a regra:

$$V_1[n] = V_1[n - 1]M(i[n - 1]). \quad (4.20)$$

Os valores de $M(i[n - 1])$, apresentados na tabela 4.1, correspondem aos fatores multiplicativos do índice i do quantificador na amostra anterior. Numa zona de silêncio V_1 tende para zero, pelo que se deve limitar este valor a um valor mínimo “aceitável”.

Tabela 4.1
Fatores multiplicativos de adaptação de quantificadores.

$M(0)$ corresponde ao valor mais pequeno de quantificação e o aumento do índice a um aumento do valor de quantificação. À volta do valor zero de quantificação o fator multiplicativo é menor que um, correspondendo a uma diminuição de V_1 , enquanto nos extremos (positivo e negativo) o fator multiplicativo é superior a um, para evitar a saturação de declive.

R	$M(0)$	$M(1)$	$M(2)$	$M(3)$	$M(4)$	$M(5)$	$M(6)$	$M(7)$	$M(8)$	$M(9)$	$M(10)$	$M(11)$	$M(12)$	$M(13)$	$M(14)$	$M(15)$
2	1,6	0,9	0,9	1,6												
3	1,7	1,25	0,9	0,9	0,9	0,9	1,25	1,7								
4	2,4	2,0	1,6	1,2	0,9	0,9	0,9	0,9	0,9	0,9	0,9	0,9	1,2	1,6	2,0	2,4

Com o coeficiente de predição igual a zero, o codificador transforma-se num codificador PCM adaptativo.

Uma versão do codificador DPCM com adaptação amostra-a-amostra do preditor e do quantificador (ADPCM – *Adaptive differential pulse code modulation*),

¹¹ Nikil Jayant, 1945 – Indiano e Americano. Professor no Georgia Institute of Technology, Atlanta.

cujos esquemas de blocos é apresentado na figura 4.8, foi adotada como recomendação G.726 (1990, unificação das recomendações ITU-T G.721 (1984) e G.723 (1988)), para codificação de sinais de fala com débitos binários de 16, 24, 32 e 40 kbit/s (2, 3, 4 e 5 bits por amostra).

Na recomendação ITU-T G.721 são utilizados 32 kbit/s para duplicar o número de conversações em relação à recomendação ITU-T G.711 em canais telefônicos e no sistema DECT (*Digital Enhanced Cordless Telecommunication*) de sistemas telefônicos sem fios de curto alcance.

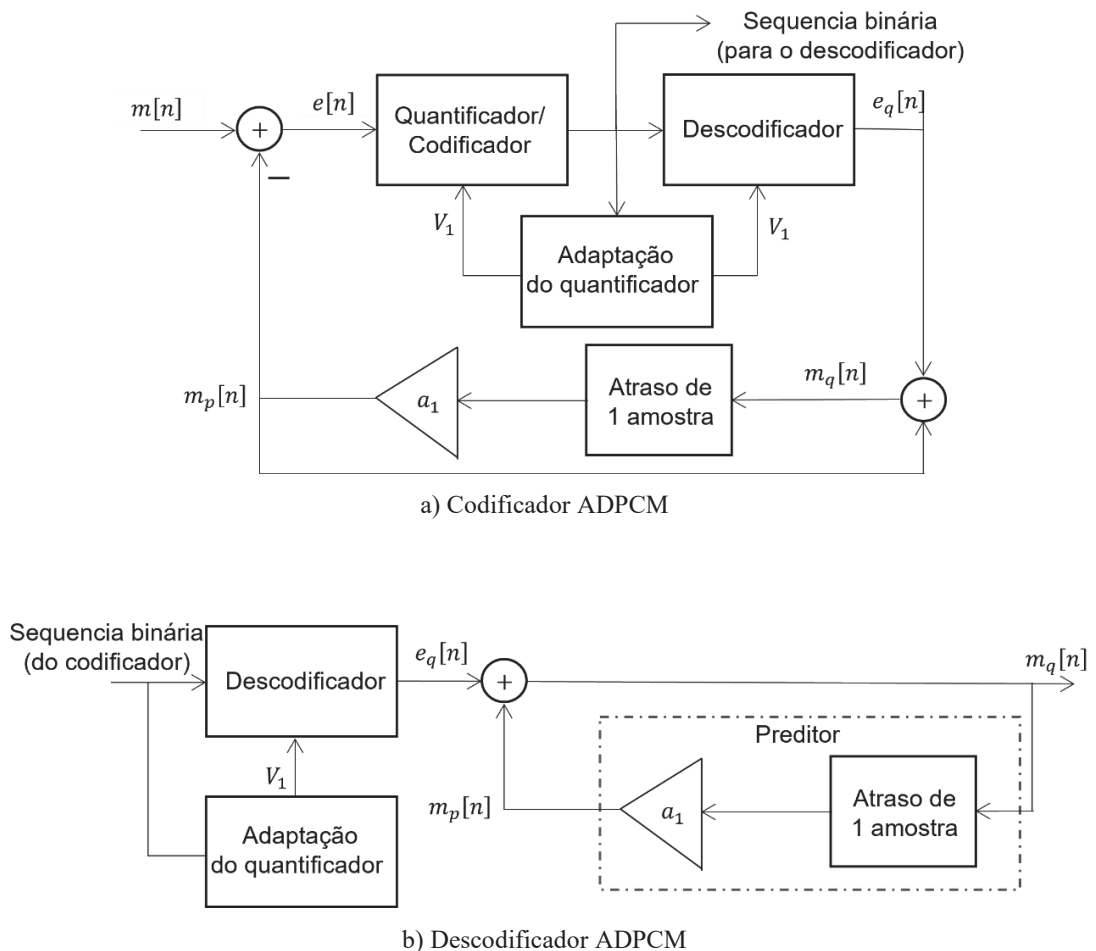


Figura 4.8

Modulação por codificação de impulsos diferencial adaptativa.

Esquema de blocos do codificador ADPCM, com adaptação amostra-a-amostra dos níveis de quantificação, baseado no índice de quantificação. a) Codificador b) Descodificador.

4.4 Modulação Delta

A modulação Delta (DM – *Delta modulation*) é um caso particular da modulação DPCM com preditor unitário e quantificador *midrise* de um bit por amostra. O esquema de blocos é apresentado na figura 4.9. O bit de codificação apenas dá informação do sentido do sinal diferença (se positivo ou se negativo), sendo o sinal de saída incrementado ou decrementado de um passo de quantificação Δ .

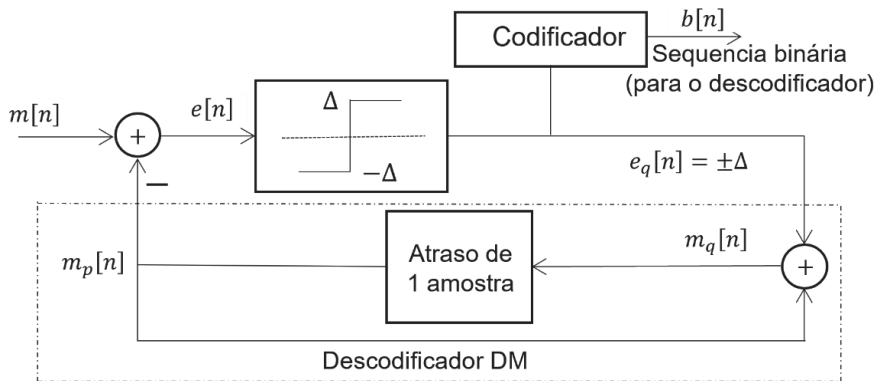


Figura 4.9
Modulação Delta (DM).

O decodificador é igual ao do DPCM (figura 4.2-b), mas com decodificador de um bit.

Este tipo de codificação teve a sua época quando a tecnologia digital ainda era de custo elevado, pois, como apresentado na figura 4.10, pode ser implementado com pequena complexidade tendo como entrada o sinal analógico e utilizando componentes analógicos (comparadores, integradores, S&H – *Sampling and Hold*). Hoje é a base da codificação delta-sigma ($\Delta\Sigma$), codificadores de alta qualidade.

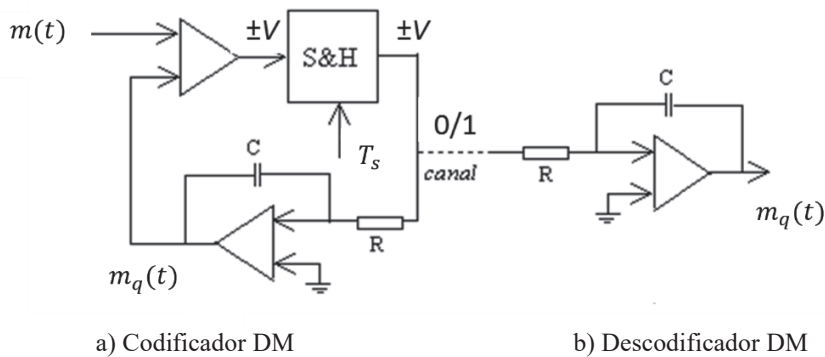


Figura 4.10
Implementação analógica da modulação Delta.
O valor de Δ é dado por VT_s/RC .

4.4.1 Tipos de distorção

Como em DPCM, existem dois tipos de distorções em DM, ilustradas na figura 4.11: a saturação de declive, típica das zonas de variação rápida do sinal de entrada; e o ruído granular, típico das zonas de silêncio ou de pequena variação do sinal de entrada, quando comparado com o passo de quantificação Δ .

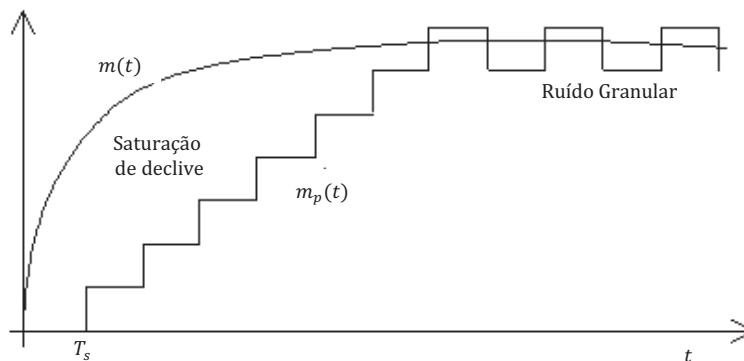


Figura 4.11
Tipos de distorção na Modulação Delta.

Há dois tipos de distorção na modulação delta: a distorção de saturação de declive, típica das zonas de variação brusca do sinal em que o passo Δ do quantificador é insuficiente; o ruído granular, típico das zonas de pequena variação do sinal de entrada em que o passo Δ do quantificador é demasiado grande.

Existe um compromisso entre estes dois tipos de ruído: aumentando o passo de quantificação, Δ , para se evitar a saturação de declive, aumenta-se o ruído granular e vice-versa. Em codificadores DPCM o ruído granular pode ser evitado com recurso a um quantificador *midtread*, o que não é possível em DM, por ser utilizado apenas um bit de codificação por amostra.

Como em codificadores DPCM, equação (4.8), de modo a evitar o ruído de saturação de declive o valor de Δ tem, no mínimo, de ser igual à variação máxima do sinal no intervalo entre duas amostras. No entanto, para garantir que existe um valor de quantificação exatamente no valor máximo de quantificação, $\Delta = V_1$, o que equivale, no cálculo do intervalo de quantificação, a utilizar a equação (2.5) em vez da equação (2.4):

$$\Delta = V_1 \geq |m(t) - m(t - T_s)|_{\max} \approx m'_{\max} T_s. \quad (4.21)$$

4.4.2 Relação sinal-ruído em DM

O intervalo de quantificação corresponde à diferença entre os dois níveis de quantificação, ou seja, de $-\Delta$ a Δ . O intervalo de quantificação vem então:

$$\Delta_q = 2\Delta = 2V_1, \quad (4.22)$$

e a potência do ruído de quantificação vem, pela equação (2.8):

$$\sigma_q^2 = \frac{\Delta_q^2}{12} = \frac{\Delta^2}{3}. \quad (4.23)$$

Note-se que, devido à utilização da equação (2.5) para o cálculo do intervalo de quantificação utilizando apenas um bit por amostra, este torna-se duas vezes maior do que utilizando a equação (2.4), produzindo uma potência do ruído de quantificação quatro vezes maior, ou seja, uma diminuição de 6,02 dB na relação sinal-ruído quando comparada com a equação correspondente para o codificador DPCM. A relação sinal-ruído de quantificação vem, tendo em conta a situação ótima na inequação (4.21) e a equação (4.23):

$$SNR_{dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{3P}{\Delta^2} \right) = 10 \log_{10} \left(\frac{3P f_s^2}{m_{max}^2} \right), \quad (4.24)$$

ou, introduzindo o ganho de predição dado pela equação (4.9) e $\Delta = V_1 = e_{max}$:

$$SNR_{dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{3P}{m_{max}^2} \right) + 10 \log_{10} \left(\frac{m_{max}^2}{\Delta^2} \right) = 10 \log_{10}(P_n) + G_{pdB} + 4,77. \quad (4.25)$$

O passo de quantificação, Δ , pode ser calculado a partir da equação (4.21) caso se conheça o valor da máxima derivada do sinal de entrada, continuando a ser válidas as equações (4.10) para o passo de quantificação e (4.15) para o cálculo do ganho de predição com preditor unitário:

$$G_p = \frac{1}{2(1-r[1])} \approx \frac{m_{max}^2}{e_{max}^2} = \frac{m_{max}^2}{\Delta^2}. \quad (4.26)$$

4.4.3 Sobreamostragem e ganho de filtragem

Na codificação DPCM é mais eficiente melhorar a qualidade aumentando o número de bits por amostra do que aumentar a frequência de amostragem e, conseqüentemente, aumentar a correlação entre amostras e o ganho de predição. Em codificadores DM, pelo contrário, pretende-se tirar partido da baixa complexidade, codificando com apenas um bit por amostra. Assim, só é possível aumentar a qualidade por sobreamostragem, ou seja, aumentando a frequência de amostragem para além do ritmo de Nyquist, tendo como contrapartida o aumento do débito binário, pois em codificação DM obtém-se:

$$R_b = f_s. \quad (4.27)$$

Por outro lado, o ruído de quantificação exibe, para sinais de entrada aleatórios, uma função densidade espectral de potência do ruído plana (ruído branco) entre $-f_s/2$ e $f_s/2$. Por este facto, como mostrado na figura 4.12, a potência do ruído pode ser diminuída por filtragem passa-baixo à frequência máxima do sinal de entrada, aumentando ainda mais a relação sinal-ruído.

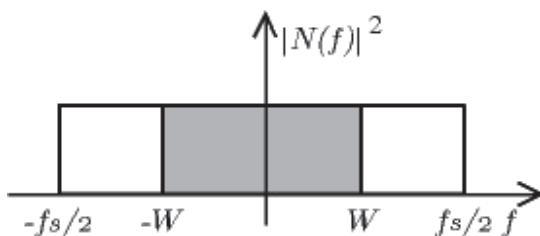


Figura 4.12

Função densidade espectral de potência do ruído de quantificação.

A função densidade espectral de potência do ruído de quantificação é plana (ruído branco) entre $-f_s/2$ e $f_s/2$. Devido à sobreamostragem é possível retirar o ruído de quantificação em DM fora da banda do sinal de entrada, por filtragem passa-baixo.

Denomina-se ganho de filtragem a relação entre a área da função densidade espectral de potência do ruído antes e depois da filtragem:

$$G_f = \frac{f_s}{2W} = OSR, \quad (4.28)$$

em que *OSR* (*over-sampling ratio*) é uma medida da sobreamostragem e corresponde ao número de vezes que a frequência de amostragem excede o ritmo de Nyquist. Introduzindo o ganho de filtragem na equação (4.24) obtém-se:

$$SNR_{dB} = 10\log_{10}\left(\frac{3P}{\Delta^2}\right) + 10\log_{10}(OSR), \quad (4.29)$$

$$SNR_{dB} = 10\log_{10}\left(\frac{3Pf_s^2}{m_{max}^{\prime 2}}\right) + 10\log_{10}\left(\frac{f_s}{2W}\right) = 10\log_{10}\left(\frac{3Pf_s^3}{m_{max}^{\prime 2}2W}\right), \quad (4.30)$$

correspondendo a primeira parcela da equação (4.29) à relação sinal-ruído sem filtragem e a segunda parcela ao ganho de filtragem.

A relação sinal-ruído (em linear) sem filtragem aumenta quadraticamente com a frequência de amostragem, tornando as amostras mais próximas e, portanto, diminuindo Δ , equação (4.21), e aumentando o ganho de predição (equação (4.26)). A frequência de amostragem contribui novamente para o ganho de filtragem e, portanto, cubicamente, equação (4.30), para a relação sinal-ruído final (em linear). Por exemplo, a duplicação (uma oitava) da frequência de amostragem leva a um aumento de 9 dB ($10\log_{10}(2^3)$), embora também duplique o débito binário, equação (4.27). A sobreamostragem é, portanto, um parâmetro crucial deste compromisso entre a qualidade e o débito binário em codificadores DM.

4.4.4 Modulação delta adaptativa

Os codificadores por modulação delta não são competitivos em relação ao PCM ou ao DPCM devido ao forte compromisso entre o ruído granular e de saturação de declive. É, no entanto, possível aumentar a qualidade adaptando o passo Δ de quantificação, dando origem à modulação delta adaptada (ADM – *Adaptive delta modulation*).

O ruído de saturação de declive na modulação delta pode ser detetado através de uma sequência de bits de codificação com o mesmo nível lógico. Por outro lado, uma sequência alternada de níveis lógicos indicia um sinal com frequência muito baixa e, portanto, a predominância de ruído granular. A deteção dos dois tipos de ruído pode ser utilizada para adaptar o valor do passo de quantificação, Δ .

Um método simples, mas eficaz, de adaptação amostra-a-amostra do passo de quantificação, seguindo o princípio acima referido, devendo este ser aumentado quando se deteta ruído de saturação de declive e diminuído quando se deteta ruído granular, tem a regra seguinte:

$$\Delta[n] = \Delta[n - 1] \left(1 + \lambda \frac{b[n - 1]}{b[n]} \right), \quad 0 < \lambda < 1, \quad (4.31)$$

em que $b[n]$ é o valor do nível lógico de saída do quantificador no instante n , tomando os valores 1 para o nível lógico “1” e -1 para o nível lógico “0”. λ gere o grau de adaptação. Por exemplo, com $\lambda = 0,5$ o passo da amostra anterior é multiplicado por 1,5 caso se suspeite de saturação de declive e multiplicado por 0,5 caso se suspeite de ruído granular. Este método é exemplificado na figura 4.13.

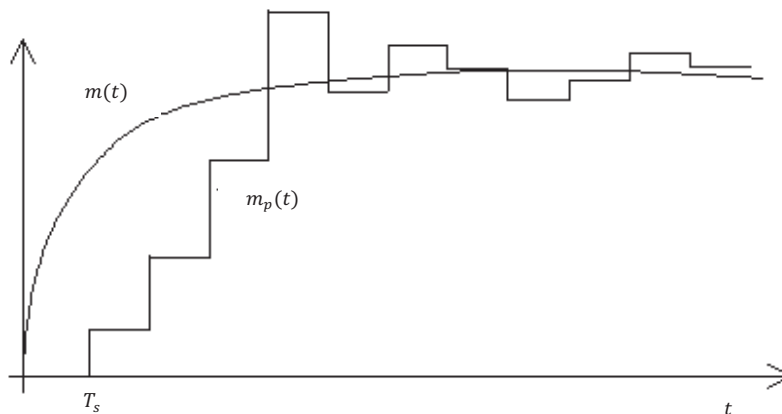


Figura 4.13
Modulação Delta Adaptativa.

O passo Δ do modulador é adaptado de modo a diminuir a distorção, segundo o raciocínio seguinte: uma sequência de bits de saída com o mesmo nível lógico indicia distorção de saturação de declive e o passo é aumentado; uma sequência de bits de saída com níveis lógicos alternados indicia ruído granular e o passo é diminuído.

O princípio de adaptação do quantificador ilustrado é utilizado em métodos mais complexos, mas também mais eficientes, tais como o CVSD (*Continuous variable slope delta*), para implementar codificadores de sinais de fala, com débitos binários entre os 16 kbit/s e os 128 kbit/s. Além da adaptação do quantificador, o aumento da qualidade é conseguido através do aumento da frequência de amostragem e consequente aumento do ganho de predição.

4.5 Propagação dos erros de bit devidos às limitações do canal de comunicação

Uma desvantagem da codificação preditiva, quer esta seja DPCM quer seja DM, em relação à codificação PCM, prende-se com a propagação de erros de bit entre o transmissor e o recetor. Em codificadores PCM, um erro no canal de comunicação afeta apenas a amostra correspondente, enquanto na codificação preditiva este erro é propagado às amostras posteriores, pois o sinal de saída é calculado através do sistema linear (filtro digital com um polo) representado por:

$$m_q[n] = m_p[n] + e_q[n] = a_1 m_q[n-1] + e_q[n]. \quad (4.32)$$

Se $|a_1| < 1$, como acontece com o preditor adaptado, então o erro é atenuado a cada iteração e tende para zero tão mais rapidamente quanto menor for o valor de $|a_1|$. Se $|a_1|$ for igual a zero o codificador DPCM degenera num codificador PCM. Se $|a_1|$ for igual a um, preditor unitário, então o erro nunca é atenuado, pelo que na prática se deve utilizar um número inferior, mas muito perto de um, por exemplo $|a_1| = 0,95$. Se $|a_1| > 1$ o erro é aumentado a cada iteração, situação que não traz qualquer vantagem, pelo que não deve ser utilizada.

Na presença de erros causados pelas limitações do canal de comunicação, além da propagação de erros típica do DPCM, o ADPCM tem como grande desvantagem uma adaptação do quantificador mal realizada no descodificador, o que conduz a que os quantificadores do descodificador e do codificador sejam diferentes, levando a uma perda significativa de qualidade.

5 Discussão sobre codificadores de sinal

Nos capítulos 2 a 4 descreveram-se os principais codificadores de sinal, segundo o método de codificação de forma de onda, com ênfase na codificação de sinais de fala. Foram deduzidas as expressões da relação sinal-ruído de quantificação, medida objetiva da qualidade, para os diversos métodos de codificação apresentados, tendo sido realçado o compromisso com o débito binário resultante. Na tabela 5.1 apresentam-se as vantagens/desvantagens dos codificadores apresentados, em relação aos seus atributos.

Tabela 5.1
Comparação entre codificadores de sinal.
 Codificadores de sinal com melhor (↑) e pior (↓) desempenho em termos de atributos.

	PCM uniforme	PCM <i>Companding</i>	PCM quantif. ótimo	DPCM preditor unitário	DPCM preditor adaptado	ADPCM	DM	ADM
Débito binário (mesma <i>SNR</i>)	↓↓↓	↓↓	↓	–	↑	↑↑	↓↓↓	↓
Qualidade (mesmo <i>Rb</i>)	↓↓↓	↓↓	↓	–	↑	↑↑	↓↓↓	↓
Complexidade	↑↑	↑↑	↑	–	↓	↓↓↓	↑↑↑	↓↓
Sensibilidade a erros de canal	↑↑	↑↑	↑↑	↓	–	↓↓↓	↓	↓↓↓

Os codificadores por modulação por codificação de impulsos (PCM) são os de menor complexidade e diferenciam-se pelo tipo de quantificador:

- Quantificador uniforme – A relação sinal-ruído de quantificação é dependente da potência do sinal de entrada e do valor máximo de quantificação;
- Quantificador *companding* – A relação sinal-ruído de quantificação é (praticamente) independente do sinal de entrada e do valor máximo de quantificação;
- Quantificador ótimo – Tira partido do conhecimento sobre a função de probabilidade das amplitudes dos sinais a quantificar. Os valores de quantificação e decisão são adaptados (treinados) de modo a maximizar a relação sinal-ruído, necessitando para tal de um *corpus* adequado.

As codificações diferenciais (DPCM), predizem o valor de uma amostra tirando partido da parecença entre amostras consecutivas (preditor unitário) ou da correlação (preditor adaptado). Por este facto, têm uma melhoria na relação sinal-ruído de quantificação em relação à codificação PCM, devido à introdução do ganho de predição. No entanto, além da maior complexidade, ao depender das amostras passadas, a modulação diferencial perde robustez na presença de erros causados pelas limitações do canal de comunicação. A análise da degradação da relação sinal-ruído em recetores de sinal quando o canal introduz erros de bit não foi abordada, saindo fora do contexto deste texto.

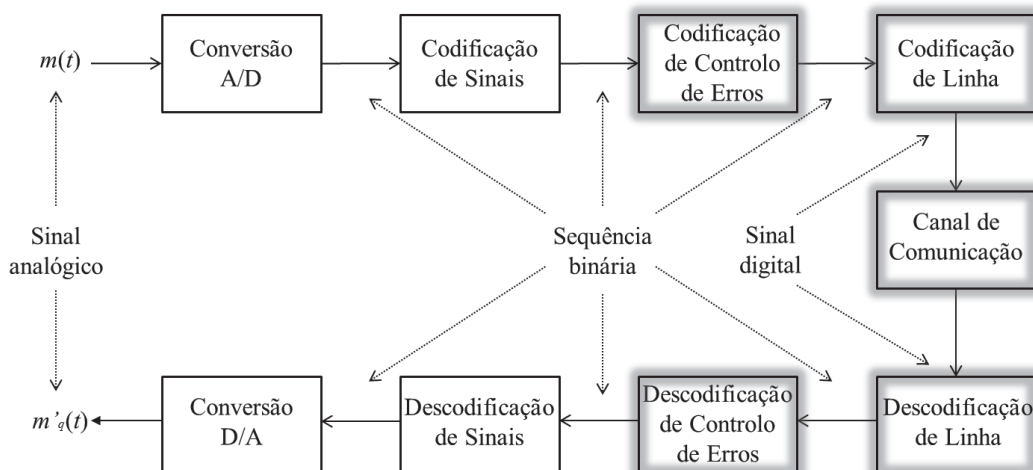
Os codificadores DM são um caso particular dos codificadores DPCM, utilizando apenas um bit de codificação por amostra, pelo que a qualidade atingida é baixa. Tem como vantagem poderem ser implementados com baixa complexidade através de *hardware* analógico. Para melhorar a qualidade pode-se aumentar a frequência de amostragem, aproximando as amostras e, portanto, diminuindo o passo de quantificação. O aumento da frequência de amostragem leva ainda a que se possa eliminar o ruído de quantificação fora da banda do sinal de entrada, através de filtragem. No entanto, a qualidade é a mais baixa dos codificadores apresentados.

Os codificadores com predição e quantificação adaptativa, que se ajustam às características dos sinais a codificar, melhoram a qualidade. Como desvantagens, além do aumento da complexidade, são menos robustos na presença de erros devidos às limitações do canal de comunicação que os codificadores preditivos sem adaptação, já que a adaptação pode ser mal efetuada, levando a diferenças entre os parâmetros adaptados no codificador e no decodificador.

O melhor codificador é um conceito inexistente em codificação de sinais, quer estes sejam sinais de fala, áudio, imagens, vídeos ou outros. Para determinada aplicação devem ser levados em conta os atributos mais relevantes, possivelmente à custa de um pior desempenho em relação aos outros atributos. Por exemplo, a diminuição do débito binário só é possível correlacionando a informação entre amostras, o que leva a um aumento da complexidade e atraso de processamento e, possivelmente, à diminuição da qualidade.

Segunda Parte

COMUNICAÇÃO DE DADOS



(...) um sistema de comunicação (...) consiste essencialmente em cinco partes:

1. Uma fonte de informação que produz uma mensagem ou sequência de mensagens a serem comunicadas ao terminal recetor. (...)
2. Um transmissor que opera sobre a mensagem de alguma forma para produzir um sinal adequado à transmissão ao longo do canal. Na telefonia esta operação consiste simplesmente na mudança de pressão sonora numa corrente elétrica proporcional. Em telegrafia temos um processo de codificação que produz a sequência de pontos, traços e espaços sobre o canal correspondente à mensagem. Num sistema multiplexado PCM os diferentes sinais de fala devem ser amostrados, quantificados, codificados e, finalmente, intercalados adequadamente para construir o sinal. Sistemas *vocoder*, televisão e de frequência modulada são outros exemplos de operações complexas aplicadas à mensagem para obter o sinal.
3. O canal é meramente o meio utilizado para transmitir o sinal do transmissor ao recetor. Pode ser um par de condutores, um cabo coaxial, uma banda de frequências de rádio, um feixe de luz, etc.
4. O recetor normalmente executa a operação inversa da que fez o transmissor, reconstruindo a mensagem a partir do sinal.
5. O destino é a pessoa (ou coisa), para quem a mensagem é proposta.

Claude E. Shannon

A Mathematical Theory of Communication, 1948

6 Introdução à comunicação de dados

O problema da comunicação de dados prende-se com a transmissão de informação digital entre dois equipamentos (computadores, telefones, *etc.*) através de um canal de comunicação. São transmitidos símbolos, representados por sinais discretos (elétricos, eletromagnéticos, óticos), que correspondem a códigos representando a informação digital.

6.1 Limitações do canal de comunicação

No canal de comunicação, os sinais são atenuados devido à resistência elétrica, distorcidos devido à largura de banda, inseridos em ruído devido ao ruído térmico ou a interferências eletromagnéticas e não são transmitidos instantaneamente. Os efeitos do canal de comunicação levam o recetor a nem sempre conseguir discriminar sem erros os símbolos. Havendo erros entre o transmissor e o recetor, a qualidade da transmissão é medida através da relação entre o número bits errados e a totalidade dos bits transmitidos (*BER – bit error rate*), que é uma estimativa da probabilidade de erro de bit (também denominada relação ou taxa de erro de bit).

A largura de banda do canal de comunicação é, a par da energia transmitida, um recurso extremamente importante que interessa usar adequadamente. A eficiência espectral, medida de qualidade de como determinado código utiliza a largura de banda, serve de medida de qualidade em relação a este atributo. A transmissão *M-ária* (em oposição à binária), ou seja, a transmissão de símbolos com mais de duas formas de onda possíveis, faz diminuir o débito de símbolos para o mesmo débito binário (ou aumentar o débito binário mantendo o débito de símbolos). A largura de banda é linearmente dependente do débito de símbolos, sendo esta uma forma de melhorar a eficiência espectral.

Aos bits de informação poderão ser adicionados bits de redundância, de modo que bits errados sejam detetados ou mesmo corrigidos no recetor. Os códigos de correção necessitam de mais redundância que os códigos de deteção, aumentando o número de bits transmitidos. No entanto, os códigos de deteção de erros necessitam de mecanismos que informem o transmissor destes erros de modo que a informação respetiva possa ser retransmitida (correção por retransmissão).

Não é possível encontrar um método de transmitir a informação digital com total eficácia, ou seja, com alta eficiência espectral, baixa probabilidade de erro de bit, baixa energia e com baixa complexidade dos equipamentos transmissores e recetores. São discutidos nos próximos capítulos os compromissos entre estes atributos e terá de ser encontrado, em função dos recursos disponíveis, o método que melhor se adequa a cada aplicação. Por exemplo, são diferentes as soluções para ligar dois computadores numa mesma sala distanciados de alguns metros, ou quando estes se encontram em qualquer parte de um país ou mesmo do mundo. Chega-se ainda a soluções diferentes quando os utilizadores geram pouco tráfego de baixa prioridade, como os utilizadores domésticos, ou muito tráfego de alta prioridade, como numa empresa com diversos balcões interligados.

6.2 Modelo de referência OSI

Para interligar diversos equipamentos de diferentes fabricantes, cada um com a sua arquitetura, formato de dados, sistema operativo, *etc.*, a ISO (*International Organization for Standardization*) normalizou em 1984 um modelo de referência (ISO/IEC 7498-1) denominado OSI (*Open Systems Interconnection*). Este é um modelo conceptual baseado em sete camadas (física, ligação, rede, transporte, sessão, apresentação e aplicação), esquematizado na figura 6.1. Cada camada apenas comunica com as camadas imediatamente acima e abaixo, através de uma interface bem definida, e com a mesma camada no equipamento destino, tornando os protocolos que implementam independentes das outras camadas. Estas camadas são de seguida descritas sucintamente.

6.2.1 Camada física

A camada física define as especificações físicas (mecânicas e elétricas) dos equipamentos, *i.e.*, define a relação entre o equipamento e o meio físico (*e.g.* tipo de fichas, cabos, formas e tensões dos sinais elétricos, débito binário, tipo de sincronismo). Apenas tem a noção de bit/símbolo ignorando as estruturas definidas pelas camadas superiores.

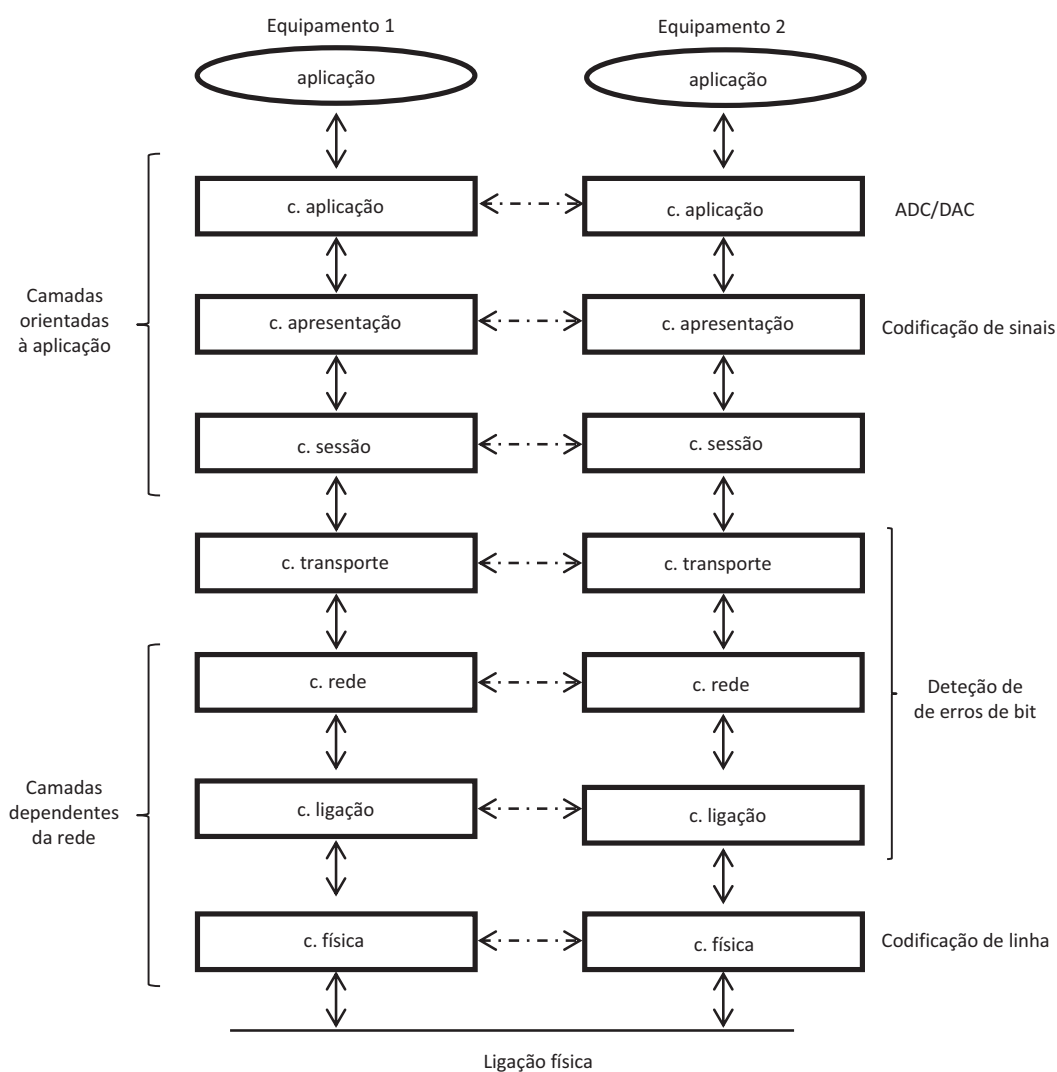


Figura 6.1
Modelo de referência OSI.
 Modelo de sete camadas normalizado em 1984 pela ISO.

6.2.2 Camada de ligação

A camada de ligação gere a ligação entre dois ou mais equipamentos que comuniquem diretamente entre si, recorrendo para tal à camada física. Oferece às camadas superiores uma forma de transmitir aos equipamentos de destino os dados estruturados em tramas que possuem um cabeçalho, uma zona de dados e uma cauda. O cabeçalho inclui campos de suporte aos serviços disponibilizados e a cauda é usada para suporte da deteção de erros. Presta serviços às camadas superiores (rede) e usa os serviços da camada inferior (física) para fazer chegar as tramas aos outros

equipamentos. Pode prestar vários tipos de serviços, tais como fiáveis, não fiáveis, ponto-a-ponto, ponto-multiponto, com controlo de fluxo e sem controlo de fluxo. Por exemplo, um trânsito fiável de dados nas ligações físicas da rede implica o uso de um algoritmo de correção de erros através de códigos apropriados, ou a utilização de protocolos que promovem a retransmissão da trama em falha. Poderá igualmente ser não fiável, deixando neste caso a tarefa da correção de erros, sequenciação, *etc.*, às camadas superiores, se assim for pretendido.

6.2.3 Camada de rede

A camada de rede procede ao encaminhamento da informação pela rede, organizando-a em pacotes, gerindo o endereçamento, podendo ter em consideração fatores como a quantidade de tráfego na rede, a capacidade em termos de débito máximo possível e a prioridade segundo o tipo de serviço requerido.

Ao contrário dos endereços da camada de ligação, de quem esta camada se socorre para transmitir entre equipamentos vizinhos os seus dados estruturados em pacotes, a noção de endereço, nesta camada, está associada ao conceito de morada e de encaminhamento. Implica encaminhamento ao longo de redes mais ou menos complexas, até atingir o destino (morada) que pode ser remoto.

Dependendo do protocolo usado e dos objetivos pretendidos, esta camada pode ou não realizar serviços tais como a segmentação de dados e a deteção de erros de bit. A implementação desta camada é realizada normalmente pelo Protocolo *Internet* (IP – *Internet protocol*).

6.2.4 Camada de transporte

A camada de transporte realiza um conjunto de serviços independentemente do protocolo de rede, tornando as camadas acima independentes da rede utilizada.

Os serviços prestados por esta camada realizam multiplexagem dos protocolos superiores sobre a mesma camada de rede (múltiplos protocolos superiores transportados sobre o mesmo protocolo de rede para o mesmo equipamento destino, mas para aplicações distintas no destino), caso, por exemplo, do protocolo UDP (*User*

Datagram Protocol). Além da multiplexagem, pode realizar serviços de transferência de dados com garantia de entrega sem erros de bit, possibilitando nomeadamente o controlo de fluxo e a garantia da sequência correta dos dados transportados nos vários segmentos formados nesta camada, caso, por exemplo, do protocolo TCP (*Transmission Control Protocol*).

6.2.5 Camadas orientadas à aplicação

As camadas orientadas à aplicação (sessão, apresentação e aplicação) são responsáveis pela comunicação entre aplicações executadas em dois equipamentos, pela compatibilidade entre formatos e pela interface com os utilizadores.

6.3 Modelo TCP/IP

O modelo TCP/IP (*Transport Control Protocol/Internet Protocol*) é um modelo menos rígido que o modelo OSI, mas funcionalmente equivalente. É formado por quatro camadas: camada de interface de rede (correspondente às camadas física e de ligação do modelo OSI); camada de Internet (camada de rede); camada de transporte (camada de transporte); camada de aplicação (camadas de sessão, apresentação e aplicação). Este modelo é anterior ao modelo OSI. Foi proposto em 1969 pela ARPA (*Advanced Research Project Agency*) dos EUA.

Os capítulos que correspondem à segunda parte deste texto focarão especificamente a interface elétrica da camada física (capítulos 7 a 11) e os métodos de deteção e correção de erros ao nível do bit (capítulo 12). Estes blocos de um sistema de comunicação digital são apresentados como solução para lidar com as limitações do canal de comunicação, que se assume do tipo passa-baixo, otimizando recursos importantes como a energia e a largura de banda disponível.

7 Códigos de linha binários

Os códigos de linha têm como objetivo transmitir informação digital (níveis lógicos “0” e “1”) num canal de comunicação¹² do tipo passa-baixo. Estes códigos são constituídos por símbolos que se encontram em banda de base, ou seja, são constituídos por níveis de tensão (ou corrente) que transitam de um modo descontínuo, ocupando uma zona do espectro em torno dos 0 Hz. Um código de linha binário corresponde à transmissão de apenas um bit por símbolo.

7.1 Atributos dos códigos de linha

Diferentes características do canal de comunicação, diferentes aplicações e requisitos de qualidade levaram ao desenvolvimento de diferentes códigos de linha, com atributos diferentes. Quase sempre estes atributos estabelecem compromissos, no sentido em que tentar melhorar um dos atributos corresponde a piorar outro ou mesmo outros atributos. Os atributos mais importantes num código de linha são apresentados nas subsecções seguintes:

7.1.1 Débito binário

Numa transmissão binária em série, o débito binário, R_b , (número de bits transmitidos por segundo) corresponde ao inverso do tempo de cada símbolo ou bit, T_b :

$$R_b = \frac{1}{T_b}. \quad (7.1)$$

7.1.2 Energia média por bit e potência transmitida

A energia é um recurso extremamente importante, do qual depende o valor a pagar à empresa fornecedora. Este torna-se ainda mais relevante num mundo cada vez mais móvel, em que os equipamentos não estão ligados a tomadas (*e.g.* telefones móveis, computadores portáteis) mas são alimentados por baterias. Um maior consumo de energia corresponde assim à utilização de baterias de maior capacidade e, portanto, mais caras e mais pesadas e/ou a um menor tempo da sua duração.

¹² Também designado de linha de transmissão, dando origem ao termo *código de linha*.

A energia (normalizada) de cada símbolo é determinada por:

$$E_l = \int_0^{T_b} s_l^2(t) dt, \quad l = 0 \text{ ou } 1, \quad (7.2)$$

em que l representa o nível lógico “0” ou “1” e $s_l(t)$ a respetiva forma de onda. A energia média por bit, E_b , corresponde à média ponderada pela probabilidade de cada nível lógico, p_0 e p_1 , respetivamente para o nível lógico “0” e “1”:

$$E_b = p_0 E_0 + p_1 E_1. \quad (7.3)$$

Neste texto, assume-se que os níveis lógicos são equiprováveis, ou seja, $p_0 = p_1 = 0,5$. Esta hipótese é suficientemente realista e simplifica a análise dos sistemas de comunicação. Nesta condição obtém-se:

$$E_b = \frac{E_0 + E_1}{2}. \quad (7.4)$$

A potência (normalizada) transmitida é definida por:

$$S_T = \frac{E_b}{T_b} = E_b R_b. \quad (7.5)$$

O valor da potência pode ser referenciado em valor absoluto, em dBW ou seus derivados (Anexo 2).

7.1.3 Largura de banda e eficiência espectral

Qualquer canal de comunicação (capítulo 8) funciona numa banda de frequências limitada. Para evitar distorção da forma de onda, o espectro do código de linha tem de estar contido na banda do canal de comunicação. Por outro lado, quando se pretende transmitir vários sinais digitais ao mesmo tempo no mesmo canal de comunicação, quanto menor for a largura de banda de cada sinal mais sinais se conseguem transmitir. A banda disponível no canal de comunicação surge assim como um recurso de extrema importância, que deve ser bem administrado.

Quando os códigos de linha apresentam transições bruscas (descontinuidades), a largura de banda é infinita. Soluções para este problema serão abordadas posteriormente (subsecção 7.3), mas a largura de banda do código de linha, B_T , depende do número

máximo de transições com inversão de polaridade por segundo e deve ser a menor possível. A eficiência espectral, medida de qualidade de como determinado código utiliza a largura de banda, correspondente à relação entre o débito binário e a largura de banda ocupada (unidades bits/s/Hz ou adimensional), é dada por:

$$\rho = \frac{R_b}{B_T}. \quad (7.6)$$

7.1.4 Probabilidade de erro de bit

Uma das características dos canais de comunicação é a presença de ruído, que pode levar a erros de bit entre o transmissor e o recetor. Um código de linha deve ser o mais imune possível ao ruído, ou seja, ser decodificado com o menor número de erros de bit. Deve-se então minimizar a probabilidade de erro de bit para uma dada relação sinal-ruído no canal de comunicação. A probabilidade de erro de bit é definida por:

$$BER = \frac{\text{Número de bits errados}}{\text{Número de bits transmitidos}}, \quad (7.7)$$

em que, como em qualquer estimativa estatística, o número de bits transmitidos deve tender para infinito.

7.1.5 Capacidade de deteção de erros de bit

Alguns códigos são capazes de detetar erros de bit, ao restringir por regra a sequência de símbolos transmitidos. Se houver possibilidade de informar o transmissor destes erros, os respetivos bits poderão ser retransmitidos. Esta capacidade, sem o envio de informação redundante, consegue diminuir a probabilidade de erro de bit sem aumentar o débito binário (exceto da informação retransmitida).

7.1.6 Sincronismo de símbolo

De modo que o recetor consiga extrair corretamente a informação, este tem de conhecer o instante de início e fim de cada símbolo (sincronismo de símbolo). Existem dois modos de transmissão: modo assíncrono e modo síncrono.

O modo assíncrono de transmissão é utilizado tipicamente quando a geração da informação é aleatória e em pequena quantidade e exemplificado na subsecção 7.4.4. O

modo síncrono é utilizado para transmitir grande quantidade de informação (trama). No recetor, o relógio com informação de início e fim de cada símbolo (ou bit no caso da transmissão binária) é extraído do próprio código de linha recebido, a partir das transições entre níveis. Esta capacidade deve ser independente da sequência de símbolos transmitidos. Idealmente, deve ser garantida uma transição por símbolo, denominando-se os símbolos de autossincronizáveis. Quando os códigos não são autossincronizáveis podem ser aplicadas algumas técnicas descritas na subsecção 7.4.

7.1.7 Componente DC e desvanecimento

Alguns canais de comunicação não têm acoplamento DC, isto é, têm acoplamento com condensadores ou transformadores que eliminam a componente DC (corrente contínua). Um canal típico com este tipo de acoplamento é a linha telefónica tradicional. Para transmitir neste tipo de canais, o código não pode apresentar componente DC, ou seja, o seu valor médio deve ser nulo, pois esta vai ser eliminada até chegar ao recetor.

Mesmo que o sinal não tenha componente DC, são igualmente de evitar componentes DC localizadas pois produzem no espectro do sinal componentes de muito baixa frequência. Estas componentes também não são apropriadas para poderem ser transmitidas em canais que eliminem a componente DC, sendo desvanecidas num tempo curto.

7.1.8 Insensibilidade à polaridade

Existem códigos insensíveis à polaridade, ou seja, pode-se inverter a polaridade do cabo de ligação entre os equipamentos transmissor e recetor que a informação continua a ser descodificada corretamente. Também existem canais em que poderá ocorrer essa inversão, tornando os códigos sensíveis à polaridade desadequados.

7.1.9 Complexidade

Um código de linha deve ser fácil de realizar e de ser detetado, pois esta facilidade leva à utilização de equipamentos menos complexos que por sua vez se traduzem num custo menor. Por exemplo, recetores que necessitem de sincronismo de

símbolo e em que este não seja fácil de realizar são mais sofisticados e, portanto, mais caros. Também o aumento do débito de símbolos e a consequente utilização de relógios de maior frequência aumentam a complexidade. A complexidade leva a um maior consumo de energia, o que, além de mais dispendioso, num mundo cada vez mais móvel leva a descargas de baterias com maior rapidez.

7.2 Formatos dos códigos de linha binários

Quanto à polaridade, os códigos de linha binários podem ser: (1) Polares (P), quando definidos por duas formas de onda simétricas; (2) Unipolares (U) quando um dos símbolos é definido pela tensão 0 V; (3) Bipolares¹³ (B) quando definidos por três símbolos, sendo duas formas de onda simétricas e pela tensão 0 V. Este código também é denominado pseudo-ternário (binário, mas com três símbolos).

Os códigos de linha podem ainda ser: (1) de retorno a zero (RZ – *Return-to-zero*), normalmente a meio tempo de símbolo, produzindo sempre pelo menos uma transição por símbolo de modo a facilitar o sincronismo (autossincronizáveis); (2) sem retorno a zero (NRZ – *No return-to-zero*), mantendo a tensão durante todo o tempo de bit.

Quanto à maneira como a informação é transmitida, os códigos de linha podem ser: (1) de nível, quando a informação se encontra no nível de tensão; (2) de transição, quando a informação se encontra na transição entre níveis. Esta transição pode dar-se entre símbolos consecutivos ou a meio do tempo de símbolo.

Seguidamente, descrevem-se alguns dos códigos de linha binários mais comuns, representados na figura 7.1. Cada um dos códigos apresenta uma ou mais das características ou atributos acima referidos, de modo a ser possível escolher, para cada aplicação em concreto, qual a que melhor se adequa. Outros códigos não apresentados acabam, de um modo geral, por partilhar das características ou atributos mencionados, permitindo, supostamente, a sua rápida compreensão.

¹³ Alguns autores referem-se à codificação bipolar como sendo aquela que neste texto é designada como codificação polar. Outros autores adotam a designação seguida neste texto.

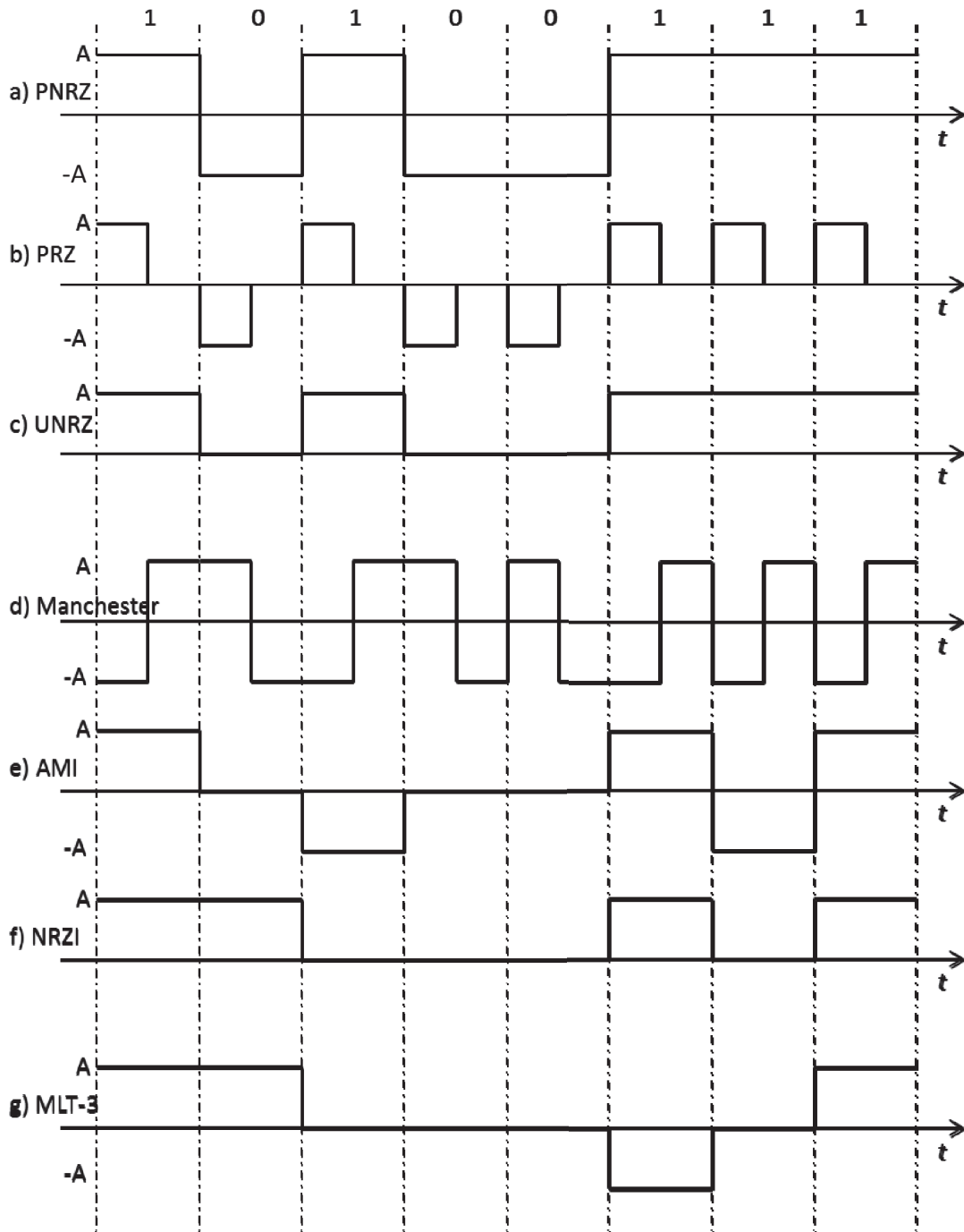


Figura 7.1

Formas de onda dos códigos de linha binários mais comuns.

Exemplo para a sequência binária ao nível lógico “1 0 1 0 0 1 1 1”.

a) PNRZ b) PRZ c) UNRZ d) Manchester e) Bipolar AMI (*Alternate Mark Inversion*)
f) NRZI g) Bipolar MLT-3 (*Multi-Level Transition*).

7.2.1 Polar sem retorno a zero (PNRZ)

O código polar sem retorno a zero (PNRZ – *Polar Non-Return-to-Zero*) é um código de nível em que o nível lógico “1” é representado pela tensão $+A$ e o nível lógico “0” pela tensão $-A$, como ilustrado na figura 7.1-*a*.

O sincronismo de símbolo é conseguido através das transições que só ocorrem quando da troca de níveis lógicos, pelo que este pode ser perdido quando da transmissão de uma sequência longa de bits ao mesmo nível lógico. O número máximo de transições por segundo é de R_b , ou seja, no máximo uma transição por símbolo. Esta situação dá-se quando se envia uma sequência alternada de níveis lógicos, sendo as transições sempre com inversão de polaridade.

Apenas se os níveis lógicos forem equiprováveis, a componente DC é nula. Contudo, para uma sequência ao mesmo nível lógico suficientemente prolongada, existirá desvanecimento do sinal se o canal de comunicação eliminar a componente DC.

A potência deste código, independentemente da probabilidade de ocorrência de cada nível lógico, é A^2 , obtendo-se uma energia média por bit de:

$$E_b = S_T T_b = A^2 T_b. \quad (7.8)$$

Um exemplo da transmissão com código PNRZ é a interface RS-232, usada para conectar numa rede local dois computadores, ou um computador e teclados, impressoras, *modems*, etc., com débitos binários até 115 kbit/s.

7.2.2 Polar com retorno a zero (PRZ)

O código polar com retorno a zero (PRZ – *Polar Return-to-Zero*) é semelhante ao PNRZ, mas, como representado na figura 7.1-*b*, é produzido um retorno a 0 V a meio de cada símbolo. Este código pode ser considerado um código de nível ou de transição, já que ao símbolo ao nível lógico “1” corresponde uma transição positiva no início do bit e negativa a meio do tempo de símbolo, tendo o símbolo do nível lógico “0” as transições contrárias.

A vantagem deste código em relação ao PNRZ é serem produzidas sempre duas transições por bit, uma no início e outra a meio do tempo de símbolo, nunca se

perdendo o sincronismo. Este é, portanto, um código autossincronizável, em que o número de transições por segundo é $2R_b$, independentemente da sequência de níveis lógicos. A potência, independentemente da probabilidade de ocorrência de cada nível lógico, é $A^2/2$, sendo a energia média por bit,

$$E_b = \frac{A^2}{2} T_b. \quad (7.9)$$

Apenas se os níveis lógicos forem equiprováveis, a componente DC é nula. Uma sequência ao mesmo símbolo lógico produz componente DC localizada, pelo que este código sofre de desvanecimento.

7.2.3 Unipolar sem retorno a zero (UNRZ)

O código unipolar sem retorno a zero (UNRZ – *Unipolar Non-Return-to-Zero*) é semelhante ao PNRZ, mas, como representado na figura 7.1-c, o nível lógico “0” é representado por 0 V. Este código pode ser interpretado como um código PNRZ ao qual foi adicionada uma componente DC, de modo que o nível lógico “0” seja representado por 0 V. A vantagem principal é ser de fácil implementação, nomeadamente por necessitar de uma fonte de alimentação apenas com uma polaridade. A grande desvantagem é ter sempre uma componente DC. Todas as outras características são idênticas às do código PNRZ. A energia do símbolo ao nível lógico “1” é $A^2 T_b$ e a do símbolo ao nível lógico “0” é 0 J. A energia média por bit é, para símbolos equiprováveis, dada também pela equação (7.9).

Este código é vulgarmente utilizado para interligar em paralelo (em *bus* normalmente com dimensão múltipla de um byte) componentes de um computador, tais como o microprocessador, a memória e os controladores. Outra norma que utiliza o código UNRZ é o “laço de corrente de 20 mA”. Esta utiliza 20 mA de corrente ou a ausência de corrente como símbolos. A vantagem da utilização da corrente em vez de tensão é um aumento da distância possível entre equipamentos. A corrente é utilizada no recetor para ativar um *led* que fará acoplamento ótico com um fototransistor, isolando eletricamente o transmissor do recetor. Uma terceira aplicação é a recomendação IEEE 802.3z Gigabit Ethernet 1000BASE-X que modula a luz em fibra ótica com débito binário de 1 Gbit/s.

7.2.4 Manchester

O código Manchester é um código polar de transição entre níveis. Como representado na figura 7.1-d, o nível lógico “1” é representado pela transição a meio do tempo de símbolo da tensão $-A$ para $+A$ e o nível lógico “0” pela transição contrária. Também pode ser considerado código de nível uma vez que o nível lógico “1” é representado pela amplitude $-A$ na primeira metade do símbolo e por $+A$ na segunda metade e o nível lógico “0” pelas amplitudes simétricas.

Como existe sempre uma transição a meio do tempo de símbolo o sincronismo de bit é garantido. Este é, portanto, um código autossincronizável, em que o número mínimo de transições por segundo é R_b . No máximo, o número de transições é $2R_b$, quando se envia uma sequência do mesmo nível lógico, sendo as transições com inversão de polaridade.

Os símbolos não têm componente DC, pelo que o código não tem componente DC, seja qual for a sequência a ser transmitida e a probabilidade de ocorrência dos símbolos. A potência é também independente da probabilidade de ocorrência dos símbolos, sendo dada por A^2 e a energia por bit é dada pela equação (7.8).

Este código é utilizado, por exemplo, na recomendação IEEE 802.3i Ethernet 10BASE-T a 10 Mbit/s, para ligar equipamentos em redes locais com cabos de cobre.

7.2.5 *Alternate Mark Inversion* (AMI)

Neste código de nível Bipolar NRZ ou pseudo-ternário, denominado inversão dos “1” (*mark*) (AMI – *alternate mark inversion*), o nível lógico “1” é representado alternadamente pelas tensões $-A$ para $+A$, e o símbolo ao nível lógico “0” por 0 V. Este código está ilustrado na figura 7.1-e em que se assume que o último nível lógico “1” foi representado por $-A$.

Uma das principais vantagens deste código é ter memória e ser possível detetar erros de bit quando da receção dos níveis lógicos “1”, que devem ocorrer no recetor com tensões alternadas. As violações a esta regra correspondem a erros de bit, como mostrado seguidamente:

- O último nível lógico “1” foi codificado com determinada polaridade e o nível lógico “0” subsequente é incorretamente descodificado para o nível lógico “1” com a mesma polaridade;
- O último nível lógico “1” foi codificado com determinada polaridade e o nível lógico “0” subsequente é incorretamente descodificado para a polaridade contrária. No próximo nível lógico “1” haverá uma violação;
- Havendo erro num nível lógico “1” que foi entendido como nível lógico “0”, haverá uma violação no próximo nível lógico “1” transmitido.

Outra vantagem deste código é ser insensível à polaridade. Pode-se inverter a polaridade do cabo de ligação entre os equipamentos transmissor e recetor que a informação continua a ser descodificada corretamente.

Devido à alternância da polaridade no símbolo ao nível lógico “1” o código não produz componente DC nem sequer durações prolongadas à mesma tensão e, portanto, não sofre de desvanecimento.

O número máximo de transições é de R_b , o que ocorre quando se transmitem apenas níveis lógicos “1” ou alternadamente níveis lógicos “0” e “1”. Quando ocorre o nível lógico “1”, existe sempre uma transição que permite o sincronismo de símbolo. Quando ocorre uma sequência prolongada de níveis lógicos “0” o sincronismo pode perder-se, pois não há sinal na linha (0 V). Em relação ao sincronismo de símbolo, o código AMI é assim melhor que os códigos NRZ que podem perder o sincronismo quando de uma sequência prolongada a qualquer nível lógico.

A energia do símbolo “1” é A^2T_b e a do símbolo “0” é 0 J. A energia por bit é, para símbolos lógicos equiprováveis, dada também pela equação (7.9).

Este código é utilizado, por exemplo, na interligação entre centrais telefónicas por cabo de cobre na Rede Digital Integrada de Serviços (RDIS) (ISDN – *Integrated Services Digital Network*), norma ITU-T Rec. I.430 a 192 kbit/s, embora com alternância no nível lógico “0”.

7.2.6 Sem retorno a zero invertido (NRZI)

O código sem retorno a zero invertido (NRZI – *No Return-to-Zero Inverted*) parece ser idêntico ao UNRZ (ou PNRZ conforme a versão), mas é um código de transição e não de nível como é o UNRZ (e o PNRZ). Representa um dos níveis lógicos invertendo o símbolo em relação ao último símbolo transmitido e o outro nível lógico corresponde a manter o último símbolo transmitido. Existem duas versões deste código: NRZ(M) (inversão em *mark*), representado na figura 7.1-f, em que o nível lógico “1” é codificado com a inversão do símbolo e o nível lógico “0”, sem inversão; e NRZ(S) (inversão em *space*), em que o nível lógico “0” corresponde a inverter o símbolo em relação ao último símbolo transmitido e o nível lógico “1” a manter o último símbolo transmitido. Estes códigos de inversão¹⁴ são também denominados códigos diferenciais, pois a informação está na diferença entre dois símbolos consecutivos.

A potência, energia e número máximo de transições por segundo são idênticos aos do código UNRZ.

Como apresentado na figura 7.2, os códigos diferenciais de inversão ao nível lógico “1” podem ser encarados como um código de linha não diferencial (no caso do código NRZ(M), um código UNRZ ou, na sua versão polar, PNRZ), em que a sequência binária $b[n]$ é pré-codificada em $a[n] = a[n - 1] \oplus b[n]$. No recetor, a pré-codificação é desfeita com pós-descodificação, $c[n] = a[n - 1] \oplus a[n] = b[n]$.

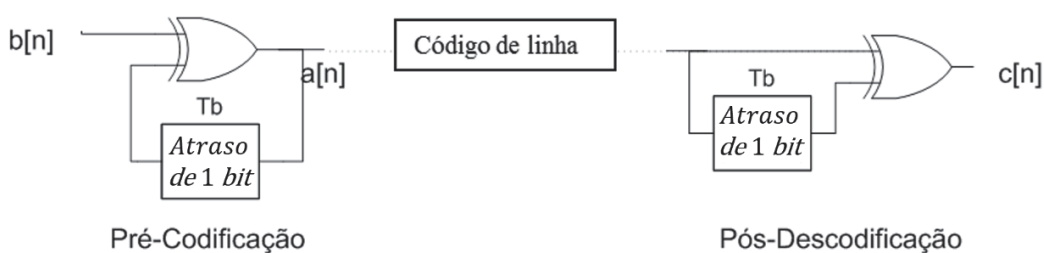


Figura 7.2

Código de linha diferencial de inversão ao nível lógico “1”.

Pré-codificação e pós-descodificação

Pré-codificação $a[n] = a[n - 1] \oplus b[n]$. Pós-descodificação $c[n] = a[n - 1] \oplus a[n] = b[n]$.

¹⁴ A versão polar deste código é insensível à polaridade, o que emerge do facto de a informação fluir na transição, independentemente de esta ser positiva ou negativa.

O código NRZ(M) tem sempre transições quando da codificação de bits ao nível lógico “1”, mas pode perder o sincronismo quando é enviada uma sequência longa de bits ao nível lógico “0”, acontecendo o oposto para o código NRZ(S). Não sendo autossincronizáveis, contudo, como o código AMI, estes códigos diferenciais garantem melhor sincronismo do que os códigos PNRZ e UNRZ.

Um exemplo da transmissão com código NRZ(S) é dado pela interface de computador USB (*Universal Serial Bus*), usada para conectar periféricos. Um exemplo de transmissão com código NRZ(M) é a recomendação IEEE 802.3u Fast Ethernet com débito binário de 100 Mbit/s em fibra ótica.

7.2.7 Transição multinível 3 (MLT-3)

De modo a diminuir a largura de banda, o código diferencial NRZI pode ser alterado para um código BNRZ ou pseudoternário, dando origem ao código MLT-3 (*multi-level transition 3*). O bit ao nível lógico “1” impõe transições, tal como no código NRZ(M), mas as transições ocupam sequencialmente as polaridades “+ 0 – 0 +”.

Como se pode verificar na figura 7.1-g, só existe inversão de polaridade do sinal no mínimo de dois em dois bits “0 + 0 – 0 + 0 –” e não a cada bit “0 + 0 +”, como nos códigos NRZ. Esta situação dá-se numa sequência de quatro bits seguidos ao nível lógico “1”, originando no máximo $R_b/2$ transições com mudança de polaridade por segundo, sendo este efeito responsável por uma diminuição da largura de banda, principal vantagem deste código. Esta regra pode também ser utilizada para a deteção de bits errados.

A energia média por bit do código MLT-3 é dada pela equação (7.9), já que, assumindo símbolos equiprováveis haverá tantos símbolos a 0 V como a soma dos símbolos positivos e negativos.

O código não tem componente DC pois oscila em torno de 0 V e, sendo um código diferencial, é insensível à polaridade. Sofre, no entanto, de desvanecimento, pois para grandes sequências de bits ao nível lógico “0” não existe transição de símbolo.

Um exemplo da transmissão com código MLT-3 é a recomendação IEEE 802.3u *Fast Ethernet* a 100 Mbit/s em par de cobre.

7.3 Largura de banda

Os códigos de linha têm, em geral, uma largura de banda infinita, imposta por transições instantâneas entre variações de nível de tensão. Na figura 7.3 são apresentadas as funções densidade espectral de potência para os diversos códigos de linha, sendo as respectivas equações apresentadas no Anexo 7. Não é apresentado o código NRZI, que neste contexto é idêntico ao código UNRZ.

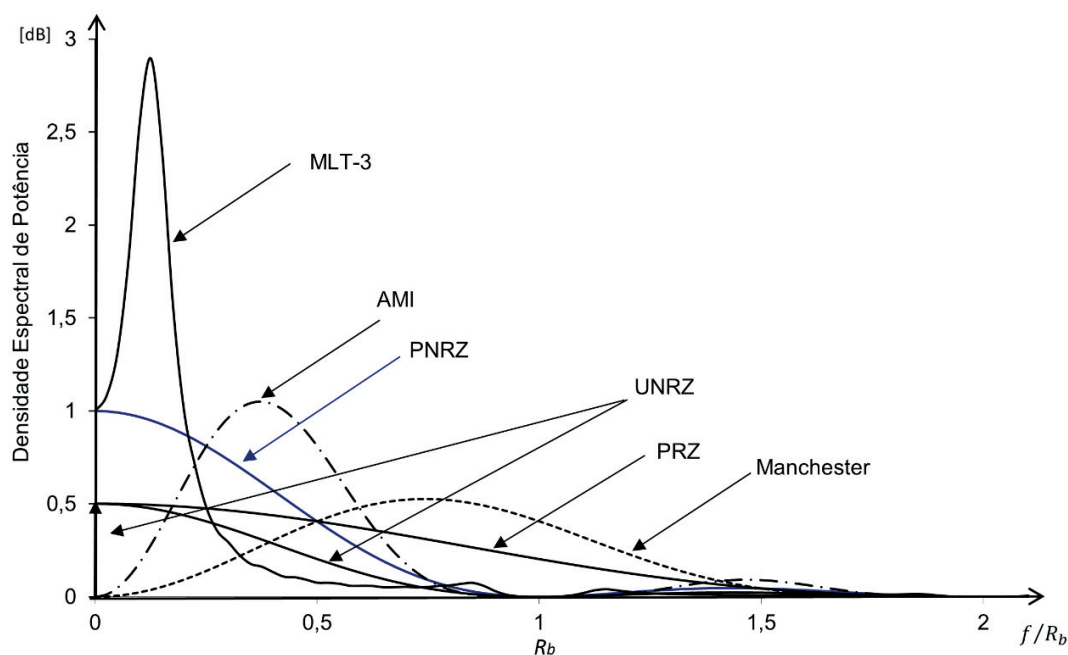


Figura 7.3

Funções densidade espectral de potência dos diversos códigos de linha binários.

Assume-se para todos os códigos uma potência de 1 W e geração independente e equiprovável dos níveis lógicos.

7.3.1 Interferência intersimbólica

A largura de banda de sinais com transições bruscas é infinita, como na generalidade dos códigos de linha. Quando se utiliza canais reais, limitados em frequência, estas transições bruscas transformam-se em variações lentas que interferem com os símbolos subsequentes. A esta distorção dá-se o nome de interferência intersimbólica (ISI – *Intersymbol interference*), que pode levar a que o recetor não consiga detetar sem erros os bits transmitidos. Existem dois critérios para lidar com a interferência intersimbólica e definir a largura de banda do sinal transmitido, apresentados seguidamente: o critério do primeiro zero espectral e o critério de Nyquist.

7.3.2 Critério do primeiro zero espectral

Como se pode verificar na figura 7.3, as funções densidade espectrais de potência vão tendendo para zero (segundo o quadrado de uma função *sinc*) à medida que a frequência aumenta, mais rapidamente quando o primeiro zero se situa em R_b (códigos NRZ incluindo o MLT-3) e mais lentamente quando este se situa em $2R_b$ (PRZ, Manchester). Um critério de determinação da largura de banda corresponde a verificar que a maior parte da potência do sinal está contida até à frequência do primeiro zero espectral, considerando ser esta a largura de banda (*first null bandwidth*). De facto, para qualquer dos códigos apresentados, esta potência é no mínimo 85% do valor total. Uma largura de banda do canal superior à frequência do primeiro zero espectral não produz distorção (interferência intersimbólica) suficiente para que o recetor deixe de conseguir detetar os símbolos.

A frequência deste primeiro zero espectral é numericamente igual ao número máximo de transições por segundo com inversão no sentido da polaridade. Assim, os códigos PRZ e Manchester, ao impor-se uma transição a meio do tempo de símbolo para os tornar autossincronizáveis, faz duplicar a largura de banda em relação aos códigos NRZ. O código MLT-3 mantém também o primeiro zero espectral em R_b mas, ao ter no máximo $R_b/2$ inversões de polaridade, a energia está praticamente toda concentrada abaixo de $R_b/2$ Hz, pelo que este valor é considerado a sua largura de banda.

7.3.3 Critério de Nyquist

Para que se consiga detetar sem erro os símbolos sem ruído no canal, em 1928 Nyquist definiu como critério que o sinal transmitido não pode sofrer de interferência intersimbólica a meio do tempo de símbolo, enquanto se limita a largura de banda através de variações lentas logo no transmissor. No recetor, utiliza-se esse instante sem distorção, como instante ótimo de amostragem para tomar uma decisão sobre o nível lógico recebido. Note-se que existe interferência intersimbólica, embora controlada, no sinal transmitido. Se a largura de banda do canal de comunicação for maior que a limitação de banda imposta pelo transmissor o sinal não é distorcido. Nesta análise, considera-se o canal ideal até à largura de banda imposta pelo transmissor.

Este método obriga, no transmissor, a uma formatação dos pulsos correspondentes aos símbolos (*pulse shaping*), já que estes deixam de apresentar transições bruscas para apresentarem transições lentas. Por exemplo, no caso do código PNRZ, basta garantir um instante sem distorção a meio do tempo dos símbolos ($\pm A$, conforme o nível lógico), sem ser determinante a evolução entre estes instantes.

7.3.4 Filtro ideal

Existe uma infinidade de sinais que cumprem o critério de Nyquist, bastando para tal que tomem o valor zero a meio do tempo de todos os outros símbolos, de modo a não os influenciar. Para se obter o sinal a que corresponde a menor largura de banda, lembre-se que, pelo teorema da amostragem de Nyquist-Shannon, um sinal deve ser amostrado com uma frequência igual (ou superior) a duas vezes a sua largura de banda e que o sinal é recuperado sem erro por filtragem passa-baixo ideal com frequência de corte igual a metade da frequência de amostragem. Deste modo, para os códigos NRZ, assumindo um instante sem interferência intersimbólica a meio de cada símbolo, gera-se nesse ponto uma amostra por símbolo e são conseqüentemente geradas R_b amostras por segundo. Filtrando esta sequência de amostras com um filtro passa-baixo com frequência de corte $R_b/2$ produz-se um sinal com esta largura de banda, pelo que:

$$B_T = \frac{R_b}{2}. \quad (7.10)$$

O critério de Nyquist para a menor largura de banda pode ser interpretado como o dual¹⁵ do teorema da amostragem de Nyquist-Shannon. Cada símbolo passa a ser definido pela resposta impulsiva de um filtro passa-baixo (transformada de Fourier inversa de um retângulo, correspondente ao filtro ideal):

$$p(t) = A \text{sinc}(R_b t). \quad (7.11)$$

Na figura 7.4 é apresentada a forma de onda com formatação de pulsos do sinal para a sequência binária “1011001” em PNRZ, positivos ou negativos conforme o nível

¹⁵ Na realidade o critério de Nyquist foi apresentado em 1928 por Henry Nyquist no artigo “*Certain Factors Affecting Telegraph Speed*”, sendo anterior ao teorema da amostragem de Nyquist-Shannon apresentado em 1949 por Claude Shannon no artigo “*Communication in the presence of noise*”.

lógico correspondente, e com amplitude $A = 1$ V e tempo normalizado t/T_b . O pulso toma, como se pretende, o valor $\pm A$ para t igual a zero, e zero nos instantes múltiplos de T_b , ou seja, para $t = \pm T_b, t, \pm 2T_b, \dots$, não interferindo nos instantes de amostragem dos outros símbolos. Verifica-se que, apesar das variações lentas, o código toma os valores $\pm A$ nos instantes de amostragem a meio do tempo de símbolo, sem distorção.

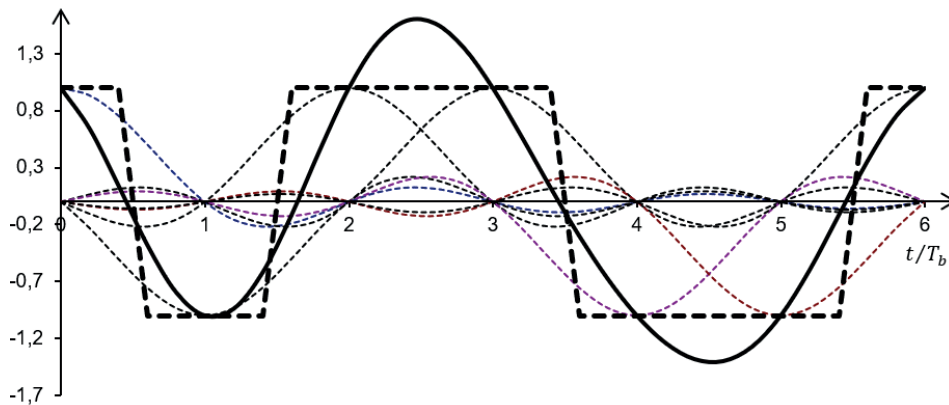


Figura 7.4

Resposta do filtro ideal de formação de pulsos para o código de linha PNRZ.

(- -) sem formação de pulsos; (—) com formação de pulsos.

$A = 1$ V, tendo como entrada a sequência binária “1011001” e tempo normalizado t/T_b .

As funções *sinc* da resposta ideal de um filtro passa-baixo estão centradas em cada amostra, com as passagens por zero centradas nas outras amostras, controlando a interferência intersimbólica.

Na figura 7.5 é apresentada a cadeia transmissor-canal-recetor, em que à saída do transmissor é colocado o filtro de formação de pulsos, limitando logo aí a banda do sinal. Para que não haja interferência intersimbólica provocada pelo canal de comunicação, este deve ter uma largura de banda superior à largura de banda dos códigos de linha após a formação de pulsos. O recetor pode amostrar o sinal a meio dos símbolos nos instantes de distorção nula, tomando a decisão sobre o nível lógico correspondente. Para tal, é necessário sincronismo de símbolo no recetor.

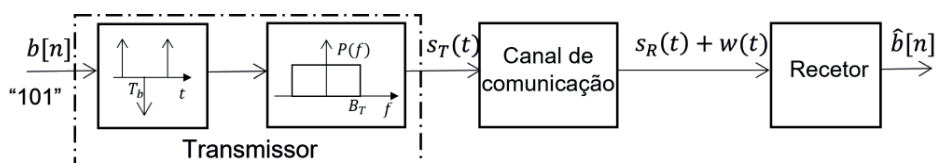


Figura 7.5

Transmissão de códigos PNRZ com formação de pulsos por filtro ideal.

O sinal transmitido é filtrado no transmissor de modo a limitar a largura de banda, mas criando um ponto de distorção nula a meio do tempo de símbolo. Este ponto serve no recetor para amostragem e tomar uma decisão sobre qual o bit enviado.

7.3.5 Filtro de cosseno elevado

Na subsecção anterior discutiu-se a utilização do filtro ideal para limitar a largura de banda, controlando a interferência intersimbólica, mas mantendo um ponto a meio do tempo de símbolo sem interferência intersimbólica. É, contudo, impossível realizar um filtro passa-baixo ideal e possíveis aproximações são não causais e com a “cauda” da função *sinc* da resposta impulsiva exibindo um decaimento lento, criando maior atraso e sendo difíceis de realizar. Outra desvantagem do filtro ideal advém de a sua resposta impulsiva manifestar uma grande variação à volta dos instantes sem interferência intersimbólica, correspondendo às passagens por zero da função *sinc* dos símbolos adjacentes. Esta característica torna o filtro sensível a erros de sincronismo de símbolo no recetor, já que uma pequena variação no instante ótimo de amostragem corresponde a obter um valor bastante diferente do desejado.

A filtragem ideal pode ser alterada de modo que a resposta ao impulso mantenha o termo da equação (7.11) e, portanto, continue a seguir o critério de Nyquist, mas que torne o decaimento da resposta em frequência mais suave, logo mais fácil de realizar. O pulso toma a forma:

$$p(t) = \frac{\cos(\pi\alpha R_b t)}{1 - (2\alpha R_b t)^2} \text{Asinc}(R_b t), \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad (7.12)$$

em que α é denominado fator de decaimento (*roll-off*), variando entre zero e um.

A resposta em frequência do pulso tem a forma de um cosseno elevado, dando o nome ao filtro respetivo (*raised-cosine filter*). Esta é dada por:

$$P(f) = \begin{cases} \frac{1}{R_b}, & |f| \leq \frac{R_b}{2}(1 - \alpha) \\ \frac{1}{R_b} \cos^2\left(\frac{\pi}{2\alpha R_b}\left(|f| + \frac{R_b}{2}(\alpha - 1)\right)\right), & \frac{R_b}{2}(1 - \alpha) \leq |f| \leq \frac{R_b}{2}(1 + \alpha) \\ 0, & |f| \geq \frac{R_b}{2}(1 + \alpha) \end{cases} \quad (7.13)$$

Este filtro continua a ser do tipo passa-baixo, com largura de banda dada por:

$$B_T = \frac{R_b}{2}(1 + \alpha), \quad (7.14)$$

que é tanto maior quanto maior for o fator de decaimento. Com $\alpha = 0$ obtém-se a filtragem ideal ilustrada na figura 7.5 e, no outro extremo, com $\alpha = 1$, duplica-se a largura de banda.

A forma de onda deste pulso é apresentada na figura 7.6-a e a respetiva resposta em frequência na figura 7.6-b, para diversos valores do fator de decaimento. Verifica-se que, quanto maior for o fator de decaimento, mais rapidamente se reduz a “cauda” da função *sinc* correspondente à resposta impulsiva do filtro de formatação de pulsos, produzindo menor atraso e sendo mais fácil de realizar.

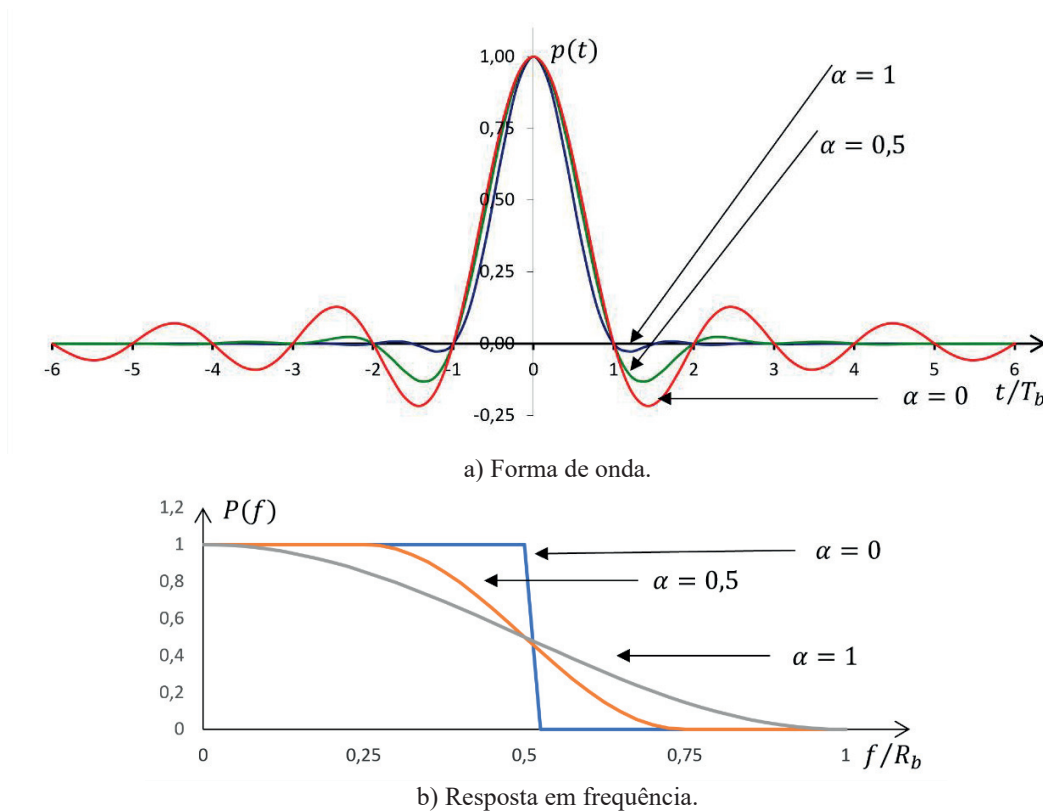


Figura 7.6

Filtro de cosseno elevado.

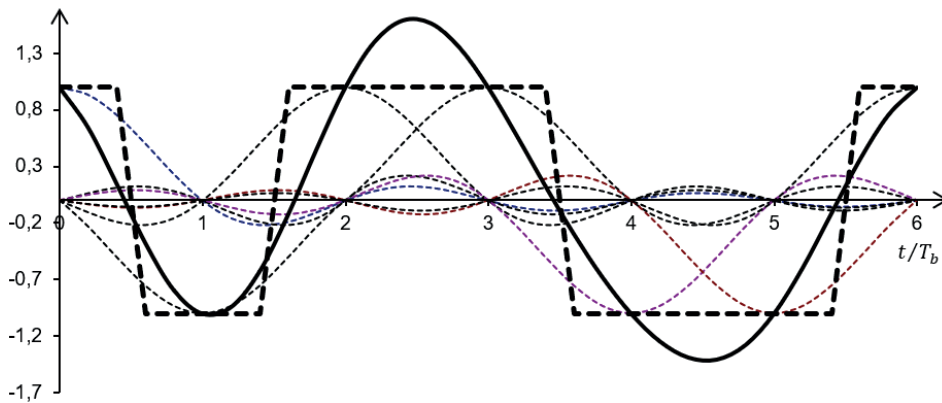
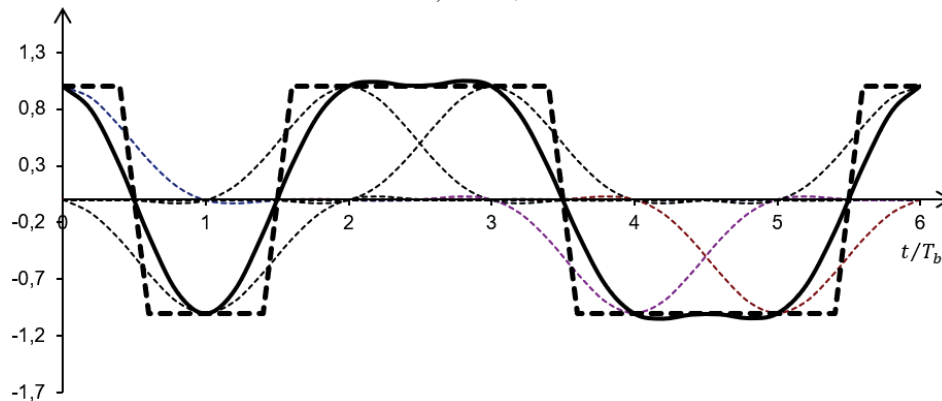
a) Forma de onda de formatação de pulsos para diversos valores do fator de decaimento.

b) Respetiva resposta em frequência.

Quanto menor for o valor do fator de decaimento mais o filtro se aproxima de um filtro ideal.

Quanto maior for o fator de decaimento maior a largura de banda é maior, mas a “cauda” da função *sinc* e a variação em torno dos zeros é menor, produzindo menor atraso e sendo mais fácil de realizar.

Na figura 7.7 é apresentada a forma de onda do sinal para a sequência binária “1011001” em PNRZ, com amplitude $A = 1$ V. O aumento do fator de decaimento, como também se verifica na figura 7.6, provoca uma menor variação do sinal, aproximando-se este do sinal original, sendo mais robusto na presença de erros de sincronismo de símbolo.

a) $\alpha = 0,5$ a) $\alpha = 1$ **Figura 7.7****Resposta do filtro de formação de pulsos para o código de linha PNRZ**

(- -) sem formação de pulsos; (—) com formação de pulsos.

$A=1$ V, tendo como entrada a sequência “1011001” e tempo normalizado t/T_b .

a) $\alpha = 0,5$; b) $\alpha = 1$.

O sinal para $\alpha = 0$ pode ser visto na figura 7.4.

Verifica-se que quanto maior for o fator de decaimento menor é a energia da “cauda” da função *sinc* e as passagens por zero do sinal aproximam-se das do sinal original.

A maior robustez a erros de sincronismo, o menor atraso e a maior facilidade de realização do filtro têm como contrapartida um aumento da largura de banda, sendo a escolha do fator de decaimento, claramente, um compromisso entre estes atributos.

7.3.6 Largura de banda e eficiência espectral

Para os códigos de linha sem retorno a zero (PNRZ, UNRZ e AMI) a largura de banda é dada pela equação (7.14), pois sendo códigos em que a tensão se mantém fixa durante todo o tempo de bit necessita apenas de um instante sem interferência intersimbólica por símbolo (abertura da função *sinc* na origem de $2T_b$). Note-se que todos estes códigos têm um número máximo de transições por segundo igual ao débito binário. A eficiência espectral, dada pela equação (7.6), vem:

$$\rho = \frac{R_b}{B_T} = \frac{2}{(1 + \alpha)}. \quad (7.15)$$

No caso dos códigos de linha PRZ e Manchester, estes são definidos por dois níveis de tensão por símbolo, tendo um número máximo de transições por segundo de $2R_b$. Para cada um destes níveis é necessário um instante sem interferência intersimbólica, pelo que o símbolo é definido por dois pulsos do tipo da equação (7.12), que têm uma abertura de apenas T_b e, conseqüentemente, a sua largura de banda é o dobro da produzida pelos códigos sem retorno a zero:

$$B_T = R_b(1 + \alpha). \quad (7.16)$$

A eficiência espectral vem:

$$\rho = \frac{R_b}{B_T} = \frac{1}{(1 + \alpha)}. \quad (7.17)$$

No caso dos códigos NRZ, a máxima frequência ocorre para uma sequência alternada de símbolos, produzindo um sinal com frequência fundamental de $R_b/2$. Para os códigos Manchester e RZ a máxima frequência ocorre quando é produzido um sinal com frequência fundamental R_b . Estas frequências máximas correspondem à largura de banda do sinal pelo critério de Nyquist com fator de decaimento igual a zero. Todas as outras sequências de bits produzem frequências mais baixas. Para o código MLT-3, a máxima frequência ocorre para uma sequência de bits ao nível lógico “1”, produzindo um sinal com frequência fundamental de $R_b/4$ Hz. Conclui-se, para o código MLT-3, como se verifica na figura 7.3, que embora com o primeiro zero espectral em R_b como nos outros códigos NRZ, a energia concentra-se (80%) até à frequência $R_b/4$, considerada a largura de banda.

A melhor eficiência espectral é de quatro bits por segundo por Hertz, obtida para o código MLT-3. A pior corresponde a uma eficiência espectral de 0,5 bits por segundo por Hertz, para os códigos RZ e Manchester com fator de decaimento de um.

7.4 Sincronismo de símbolo

Uma das principais dificuldades na comunicação digital é a necessidade de o recetor ter conhecimento do início e fim de cada símbolo, de modo a poder decodificá-lo. Os códigos Manchester e RZ são autossincronizáveis ao exibirem sempre pelo menos uma transição por bit, usado no recetor para ressincronizar um relógio e deste modo nunca se perder o sincronismo, mas à custa, como se viu na secção anterior, de um aumento da largura de banda e, portanto, da diminuição da eficiência espectral. Para os códigos não autossincronizáveis são apresentados seguidamente alguns métodos de sincronismo. Os códigos não autossincronizáveis que incluem estes métodos são um bom compromisso entre a eficiência espectral e a capacidade de sincronismo, embora à custa de um aumento da complexidade e do atraso.

7.4.1 Bit de enchimento

Os códigos PNRZ e UNRZ podem perder o sincronismo quando enviada uma sequência longa de bits ao mesmo nível lógico, e no código NRZI esta situação acontece quando do envio de uma sequência longa de bits ao nível lógico “0”. Para evitar a perda de sincronismo na transmissão destas sequências longas, o transmissor coloca um bit de enchimento (*bit stuffing*) que impõe uma transição. Este bit é descartado no recetor, mas a sua transição serve para efetuar o sincronismo, sem aumentar o número máximo de transições e consequentemente a largura de banda.

A desvantagem da introdução do bit de enchimento é o aumento artificial do número de bits a transmitir. Por exemplo, na interface USB que funciona com o código NRZ(S), de modo a nunca perder o sincronismo, para uma sequência de seis bits ao nível lógico “1” é colocado um sétimo bit ao nível lógico “0”. Mas como a probabilidade da ocorrência de cinco bits consecutivos ao nível lógico “0” é pequena (1/32 para sequências equiprováveis), este método consegue garantir o sincronismo de símbolo com a introdução de muito poucos bits de enchimento.

7.4.2 Codificação BNZS

Uma das maneiras de evitar a perda de sincronismo no código AMI é produzir transições como se fossem transmitidos níveis lógicos “1”, mas com violações que permitam ao recetor identificar esta situação e substituir por níveis lógicos “0”. A esta técnica dá-se o nome de bipolar com substituição de N zeros (BNZS – *Bipolar with N zero substitution*), em que N é o número de níveis lógicos consecutivos ao nível lógico “0” a serem substituídos. Exemplos comuns deste código são o B3ZS, B6ZS e B8ZS.

O B6ZS tem a regra seguinte:

- Último símbolo transmitido positivo, transmite-se “0 + A – A 0 – A + A”;
- Último símbolo transmitido negativo, transmite-se “0 – A + A 0 + A – A”.

Note-se que existem duas violações, no 2.º e 5.º símbolo. Se o número de zeros for múltiplo de seis, a substituição é efetuada o mesmo número de vezes. A utilização desta técnica não inibe a deteção de erros já que a probabilidade de ocorrência de uma substituição e de haver erros é muito pequena.

7.4.3 Codificação 4B/5B

Utilizando os códigos diferenciais NRZ(M) e MLT-3, o risco de perda de sincronismo surge quando da transmissão de uma sequência longa de bits ao nível lógico “0”, em que não são provocadas transições. A codificação 4B/5B transforma blocos de quatro bits em blocos de cinco bits, conforme a tabela 7.1, de tal modo que são garantidas sempre duas transições dentro do bloco¹⁶ (pelo menos dois bits ao nível lógico “1”) com código diferencial.

O número máximo de símbolos consecutivos sem transição é três, o que acontece quando um código termina com dois bits ao nível lógico “0” (2 casos em 16) e o código seguinte começa com um bit ao nível lógico “0” (5 casos em 16). Embora com um aumento do débito binário de 25%, esta codificação garante o sincronismo, sendo

¹⁶ A introdução do código 4B/5B torna dependente a ocorrência dos níveis lógicos de uma sequência independente e altera a probabilidade de ocorrência de bits ao nível lógico “1” de 0,5 para 0,6125.

mais eficiente que a utilização de códigos Manchester ou PRZ, que duplicam a largura de banda (dobro das transições em relação ao NRZ).

Tabela 7.1
Codificação 4B/5B.

Blocos de quatro bits são transformados em blocos de cinco bits de modo a garantir pelo menos duas transições (“1”) dentro do bloco.

0000	11110	0100	01010	1000	10010	1100	11010
0001	01001	0101	01011	1001	10011	1101	11011
0010	10100	0110	01110	1010	10110	1110	11100
0011	10101	0111	01111	1011	10111	1111	11101

Uma das aplicações da codificação 4B/5B ocorre na recomendação IEEE 802.3u *Fast Ethernet* a 100 Mbit/s, quer em cabo de cobre utilizando código MLT-3, quer em fibra ótica utilizando código NRZ(M). Em qualquer dos casos, o débito de 100 Mbit/s inicial é transformado em 125 Mbit/s. Existe uma variação deste código de sincronismo que converte oito bits em 10 bits, denominado 8B/10B. Esta variação é utilizada na recomendação IEEE 802.3z Gigabit Ethernet 1000BASE-X em fibra ótica a 1 Gbit/s.

7.4.4 Modo de transmissão assíncrono

Para distâncias curtas em que o canal de comunicação é um cabo elétrico, nomeadamente na transmissão numa mesma sala, é possível transmitir num segundo condutor a informação do relógio do transmissor para sincronismo do recetor. Contudo, existe um outro método para resolver o sincronismo de símbolo que evita a transmissão do relógio, especialmente quando a geração da informação é aleatória e em pequena quantidade, denominado modo de transmissão assíncrono.

É exemplo a geração de informação num teclado e transmitida para um computador, em que cada carácter é representado por um código, por exemplo o código ASCII (*American standard code for information interchange*) de sete bits.

O processo de transmissão assíncrono é exemplificado na figura 7.8 com o código de linha PNRZ e para a tecla “B”, que corresponde à sequência binária em ASCII “0100001”, começando pelo bit menos significativo (LSB). Entre o premir de duas teclas não há informação transmitida e a linha fica inativa (*idle*), representada pela tensão +A. Quando uma tecla é premida é gerado um bit de *início* de carácter (*start bit*) à

tensão $-A$. Esta transição da linha inativa para o bit de *início* desencadeia o sincronismo de símbolo, que não é perdido se for transmitido apenas um carácter (total ≈ 10 bits). O início de sincronismo corresponde a iniciar um relógio a uma frequência mais alta que o débito binário (tipicamente 16 ou 32 vezes maior), para que a meio de cada bit se verifique o valor do nível lógico.

A seguir ao bit de *início* são enviados os sete bits correspondentes ao código ASCII da tecla premida. Pode ainda ser transmitido um bit de paridade de modo que o conjunto de oito bits (byte) transmitidos contenha um número par de bits com nível lógico “1” (paridade par) ou ímpar (paridade ímpar). Este bit serve para detetar erros de bit. Por fim, são enviados um ou mais bits de *finalização* de carácter (*stop bit*).

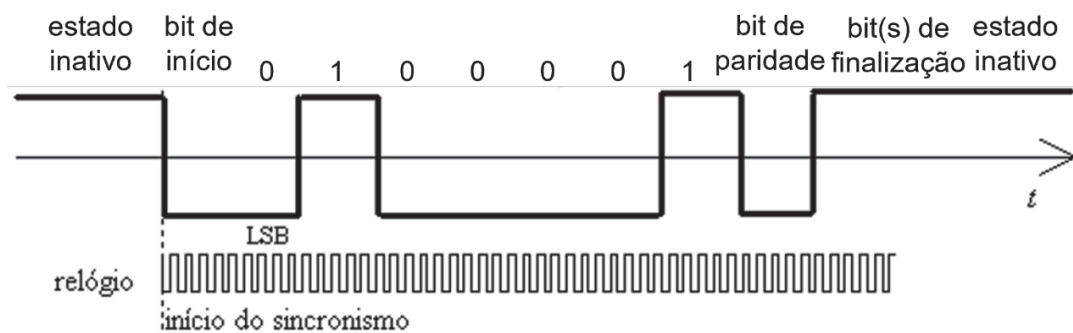


Figura 7.8

Exemplo de transmissão assíncrona com código de linha PNRZ para o carácter “B”, utilizando código ASCII.

Começa-se com um bit de *início* com polaridade contrária ao estado inativo, de modo a sincronizar um relógio. São depois enviados os sete bits de informação começando pelo bit menos significativo. Segue-se um bit de paridade e termina-se com o bit de *finalização* à mesma polaridade do estado inativo.

A transmissão assíncrona é também utilizada para transmitir informação de um conjunto de caracteres, por exemplo para impressoras. Neste caso, a informação não é gerada aleatoriamente, mas a seguir ao bit de *finalização* é enviado o bit de *início* de novo carácter, sincronizando novamente o relógio. O fim da transmissão corresponde ao envio do carácter especial ASCII EOT (*end of text*). Numa transmissão assíncrona o número de bits de informação, a existência ou não de bit de paridade e o número de bits de *finalização* de carácter têm de estar pré-definidos. Os bits de *início* e *finalização* de carácter correspondem a cerca de 20% dos bits transmitidos, sendo esta a sua principal desvantagem, quando transmitidas seguidamente grandes quantidades de informação.

8 Canal de comunicação

O canal de comunicação é o meio físico que liga os equipamentos. O canal tem características que afetam o desempenho dos sistemas de comunicação, pois diminuem a capacidade do recetor de discriminação dos símbolos: (1) o ruído, que altera o sinal de modo aleatório; (2) a largura de banda, que, para que não haja distorção tem de ser maior que a largura de banda do sinal transmitido; (3) a resposta em frequência, que provoca diferentes atenuações e atrasos do sinal ao longo da banda; (4) e a dimensão, que atrasa e atenua os sinais que chegam ao recetor.

8.1 Canal AWGN de banda limitada

Independentemente do meio de transmissão (cabo elétrico, fibra ótica, canal rádio, etc.), o modelo do canal adotado neste texto, denominado de canal AWGN (*Additive white Gaussian noise*), é apresentado na figura 8.1. À sua entrada encontra-se o sinal de saída do transmissor e à sua saída, o sinal de entrada do recetor.

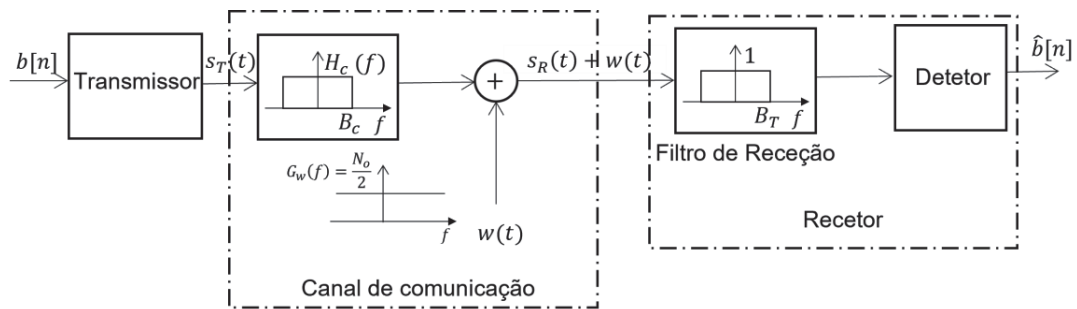


Figura 8.1

Modelo do canal AWGN com filtragem passa-baixo.

O canal adiciona ruído gaussiano e branco ao sinal de entrada.

Tem uma característica passa-baixo com ganho $H_c(0)$ e largura de banda B_c .

Para simular um canal passa-banda o filtro deve ser do tipo passa-banda.

O filtro $H_c(f)$ modela a banda do canal (B_c , frequência de corte do filtro), a atenuação (ganho na zona passante) e o atraso (fase na zona passante). O filtro que modela a banda do canal é do tipo passa-baixo, adequado aos códigos de linha, mas poderia modelar um canal do tipo passa-banda, adequado a modulações digitais. É ainda adicionado ruído branco e gaussiano. O ruído branco é caracterizado por ter uma função densidade espectral de potência constante ao longo de uma larga gama de frequências

($N_0/2$ – unidades W/Hz ou J)¹⁷. O termo *branco* provém da analogia com a luz branca, que contém todas as frequências e com igual energia (obviamente, no caso da luz, no espectro do visível). A causa do ruído é o movimento aleatório das partículas elétricas devido à temperatura (ruído térmico). O ruído gaussiano é caracterizado por ter distribuição de amplitudes que, justificada pelo teorema do limite central, segue uma distribuição normal (gaussiana), com valor médio nulo.

8.2 Relação sinal-ruído e relação E_b/N_0

Sendo o ruído branco, ocupa uma largura de banda infinita e a sua potência é teoricamente infinita. Este modelo ideal é válido desde que a função densidade espectral de potência do ruído tenha uma característica plana na banda do sinal transmitido, já que este deve ser filtrado à entrada do recetor com um filtro de receção, passa-baixo com largura de banda B_T . O filtro de receção retira o ruído fora da banda, sem alterar o sinal. O ruído após filtragem segue uma distribuição normal (Anexo 10). Para um filtro de receção de ganho unitário, a potência do ruído à sua saída é igual à sua variância, σ_c^2 , dada pela área da densidade espectral de potência do ruído na banda do sinal:

$$\sigma_c^2 = \frac{N_0}{2}(2B_T) = N_0B_T. \quad (8.1)$$

A relação sinal-ruído entre a potência do sinal e do ruído após o filtro de receção é uma medida indireta da qualidade da comunicação e, pelas equações (7.5), (7.6) e (8.1), é determinada por:

$$SNR_c = \frac{S_R}{\sigma_c^2} = \frac{S_R}{N_0B_T} = \frac{E_b R_b}{N_0 B_T} = \frac{E_b}{N_0} \rho. \quad (8.2)$$

A relação E_b/N_0 entre a energia média por bit à entrada do recetor e a densidade espectral de potência do ruído é também uma medida da qualidade da comunicação, sendo a probabilidade de erro de bit função deste valor, pelo que se torna uma medida mais importante que a relação sinal-ruído. A relação sinal-ruído e a relação E_b/N_0 são geralmente representadas em decibéis.

¹⁷ A densidade espectral de potência do ruído, $N_0/2$, é definida de $-\infty < f < +\infty$. Considerando apenas frequências positivas, a densidade espectral de potência corresponde a N_0 .

8.3 Canal sem distorção e equalização

Para que um sinal seja transmitido sem interferência intersimbólica além da inserida pelos critérios de Nyquist ou do primeiro zero espectral, a largura de banda do sinal transmitido, B_T , tem de ser no máximo igual à largura de banda do canal, B_C :

$$B_T \leq B_C. \quad (8.3)$$

Além de ter de seguir a equação (8.3) o sinal a transmitir apenas pode ser multiplicado por um fator de escala G (correspondente ao ganho do filtro $H_c(0)$ no modelo da figura 8.1) e sofrer um atraso constante T_p . A atenuação corresponde a uma perda de energia, contribuindo para aumentar a probabilidade de erro de bit. Um atraso constante não é significativo, porque existem nos recetores circuitos de recuperação do relógio síncronos com o sinal recebido. Em comunicação bidirecional, contudo, um atraso longo é psicologicamente incómodo.

Na banda do sinal a transmitir, o canal não pode, portanto, ter diferentes ganhos ou provocar diferentes atrasos, em função da frequência. O sinal de saída do canal, sem a influência do ruído, tem por isso de ser descrito por:

$$s_R(t) = G s_T(t - T_p), \quad (8.4)$$

ou seja, é uma versão atenuada/amplificada e atrasada do sinal à saída do transmissor. Tendo em conta as propriedades da linearidade e deslocamento no tempo da transformada de Fourier, o espectro do sinal recebido é descrito por:

$$S_R(f) = G S_T(f) e^{-j2\pi f T_p}. \quad (8.5)$$

A resposta em frequência do canal, $H_c(f)$, até à largura de banda do sinal, B_T , é descrita por:

$$H_c(f) = \frac{S_R(f)}{S_T(f)} = G e^{-j2\pi f T_p}, \quad |f| \leq B_T. \quad (8.6)$$

Para que não haja distorção de amplitude:

$$|H_c(f)| = |G|. \quad |f| \leq B_T. \quad (8.7)$$

Para que não haja distorção de fase:

$$\arg(H_c(f)) = -2\pi T_p f, \quad |f| \leq B_T, \quad (8.8)$$

em que T_p é denominado atraso de grupo, definido como o simétrico da derivada da fase em relação à frequência angular.

Os canais reais, contudo, podem provocar distorção de amplitude e de fase. Neste caso, é necessário que, à entrada do recetor, se coloque um equalizador. Este tem como função garantir que o sistema resultante (canal em série com o equalizador) não provoque distorção nem de amplitude nem de fase, ou seja, o produto da resposta em frequência do canal de comunicação com a resposta em frequência do equalizador, $H_e(f)$, cumpra os requisitos da equação (8.7) e (8.8):

$$\begin{cases} |H_c(f)H_e(f)| &= |G| \\ \text{arg}(H_c(f)H_e(f)) &= -2\pi T_p f \end{cases}, \quad |f| \leq B_T. \quad (8.9)$$

Se não for respeitada a inequação (8.3) e a equação (8.9) é provocada interferência intersimbólica e distorção que, como o ruído, leva também a detetar erradamente bits no recetor. Contudo, esta distorção é diferente do ruído uma vez que resulta da resposta em frequência do canal de comunicação.

8.4 Atenuação

Devido à dimensão do canal o sinal é atenuado (termo G da equação (8.6) ou ganho do filtro $H_c(0)$ no modelo da figura 8.1), sendo a atenuação correspondente à relação entre a potência transmitida e recebida (sem ruído):

$$A_{tdB} = \frac{S_T}{S_R} = \frac{1}{G^2} \quad (8.10)$$

ou, em decibéis:

$$A_{tdB} = 10 \times \log_{10} \left(\frac{S_T}{S_R} \right) = -20 \times \log_{10}(G). \quad (8.11)$$

A atenuação depende da distância e da frequência do sinal, podendo o canal ser caracterizado por atenuação em decibéis por quilómetro (para determinada frequência):

$$A_{tdB/km} = \frac{A_{tdB}}{D}, \quad (8.12)$$

sendo D a dimensão do canal, expressa em quilómetros.

As equações (7.3) a (7.5) e as que relacionam a potência do sinal com a energia média por bit e a amplitude do sinal são válidas também à entrada do recetor, desde que se utilize a respetiva potência recebida S_R . Embora a notação para a energia média por bit e para a amplitude utilizada neste texto seja a mesma à entrada e à saída do canal, esta ambiguidade deve ser resolvida no contexto em que os sinais se encontram.

8.5 Latência

A latência ou atraso total de uma transmissão define-se como o tempo entre o início da transmissão e o momento em que todos os dados estão presentes no recetor. Existem essencialmente três tipos de atraso: atraso de processamento (T_{pe}); atraso de propagação (T_p); e atraso de transmissão (T_t). A latência correspondente à soma dos diversos atrasos:

$$T_L = T_{pe} + T_p + T_t. \quad (8.13)$$

Atraso de processamento dos equipamentos (T_{pe}) – Tempo de processamento dos equipamentos da rede de telecomunicações para processar os sinais.

Atraso de propagação (T_p) – Tempo que um sinal leva a atravessar o canal de comunicação. Este depende da dimensão do canal e da velocidade de propagação no meio de transmissão. A velocidade de propagação no meio de transmissão é dada por:

$$v_i = \frac{C}{n_i}, \quad (8.14)$$

em que n_i é o índice de refração do meio e C é a velocidade de propagação da luz no vácuo (300000 km/s). O atraso de propagação é dado por:

$$T_p = \frac{D}{v_i}, \quad (8.15)$$

Quanto maior a dimensão do canal maior é o atraso de propagação. No vácuo, a luz demora $T_{p/km} = 3,3(3) \mu s$ a percorrer um quilómetro, sendo normal caracterizar um meio de transmissão através deste parâmetro, pelo que:

$$T_p = D_{km} T_{p/km}. \quad (8.16)$$

Para canais de grande dimensão, o tempo de propagação é elevado. Por exemplo numa transmissão por satélite geoestacionário, a uma distância de 36000 km da terra, o tempo de propagação é de 0,24 s. Já para distâncias curtas este tempo é desprezável.

Atraso de transmissão (T_t) – Nas redes de computadores os bits são enviados em pacotes de N bits. Uma vez que cada bit demora um tempo T_b a ser transmitido, o tempo total de transmissão de um pacote corresponde ao tempo que o transmissor demora a colocar todo o pacote de N bits no canal:

$$T_t = NT_b = \frac{N}{R_b}. \quad (8.17)$$

Na transmissão de pacotes com débito binário baixo, o tempo de bit é elevado e o atraso de transmissão para um pacote com um número razoável de bits é elevado. Já para débitos elevados este atraso é desprezável.

A latência pode ser um problema grave principalmente em aplicações interativas bidirecionais, como é o caso do telefone ou jogos *online*. O atraso de transmissão é relevante para débitos binários baixos enquanto o atraso de propagação é relevante para canais de grande dimensão. Para canais de dimensão e débito binário elevados o atraso dominante é o atraso de propagação. Pelo contrário, para canais de pequena dimensão e baixo débito binário é o atraso de transmissão o dominante.

8.6 Meios de transmissão

Os canais de comunicação são compostos por um ou mais meios de transmissão diferentes interligados em série, cada um com características distintas. Seguidamente descrevem-se sucintamente alguns dos principais meios de transmissão.

Cabo de par trançado – Os cabos de par trançado são constituídos por dois condutores de cobre enrolados em espiral, para, através do efeito de cancelamento, reduzir o efeito das interferências eletromagnéticas. A velocidade de propagação é de cerca de 175000 km/s, a que corresponde um atraso de propagação de 5,7 μ s/km.

Uma das suas aplicações é o canal telefónico (par trançado Categoria 1), construído de modo a transmitir sinais de fala entre dois pontos. Este canal tem um ganho praticamente constante entre os 300 e os 3,3 kHz, capaz de transmitir fala perceptível. Embora com maior atenuação que na zona do sinal de fala, este tipo de cabo é usado na transmissão de dados em Ethernet para ligar redes de computadores. Cabos blindados (até Categoria 8) podem ir até larguras de banda de 2 GHz e débitos binários de 40 Gbit/s numa distância de 30 m. Devido à elevada largura de banda que faz aumentar a atenuação, permitem distâncias de apenas algumas dezenas de metros.

Cabo coaxial – Os cabos coaxiais são constituídos por um condutor interno de cobre, coberto por um isolante. Uma malha exterior, também em cobre, atua como segundo condutor. Um segundo isolante protege todo o cabo. A largura de banda deste meio de transmissão é superior à do cabo de par trançado. A velocidade de propagação é de cerca de 250000 km/s, a que corresponde um atraso de propagação de 4 μ s/km.

Uma utilização típica dos cabos coaxiais é a ligação entre equipamentos numa rede local. Outra é a transmissão de sinais de TV analógicos que podem coexistir com sinais digitais no fornecimento de televisão por cabo.

Fibra ótica – As fibras óticas transportam sinais de luz de um ponto para outro. A sua grande vantagem é uma elevada largura de banda aliada a uma pequena atenuação. A largura de banda depende da distância percorrida (ao contrário dos outros meios de transmissão) pois esta aumenta a dispersão dos pulsos de luz. É ainda imune a interferências eletromagnéticas tendo um tamanho e peso pequenos. A velocidade da luz na fibra é cerca de 200000 km/s, sendo o atraso de propagação de cerca de 5 μ s/km.

As fibras óticas são largamente utilizadas na transmissão digital de informação, quer na ligação entre centrais e operadores quer no fornecimento de serviços integrados (Internet, televisão, voz).

Canal rádio – Os canais de comunicação que empregam a transmissão rádio utilizam o espaço livre como meio de propagação de ondas eletromagnéticas. Têm uma característica passa-banda, servindo para transmitir sinais modulados (áudio, televisão) ou para dar mobilidade à rede telefônica e às redes de computadores. Pode sofrer de recepção multipercurso devido a reflexões em obstáculos. O atraso de propagação num canal rádio é praticamente igual ao da luz, 3,3(3) $\mu\text{s}/\text{km}$.

Um exemplo muito particular de transmissão por canal rádio é a transmissão por satélite. Um satélite geostacionário encontra-se perto da linha do Equador, a uma distância de cerca de 36000 km, de modo que a força centrífuga e centrípeta se anulem. Uma ligação via satélite funciona com frequências acima dos 40 MHz, dado que tem de transpor a ionosfera, o que se dá apenas acima dessas frequências. O atraso de propagação do sinal para percorrer duas vezes (ida e volta) a distância da Terra ao satélite é de 0,24 s. Os satélites são usados como retransmissores, de modo a cobrir uma grande área para difundir sinais de televisão ou efetuar ligações intercontinentais de voz ou televisão. São também utilizados no fornecimento de serviços integrados.

Na tabela 8.1 são apresentados, como ilustração, valores típicos de largura de banda, atenuação por quilómetro e atraso de propagação por quilómetro, dos diversos meios de transmissão apresentados anteriormente.

Tabela 8.1
Caraterísticas de diversos tipos de meios de transmissão.
Os valores apresentados são meramente ilustrativos.

Meio de Transmissão	Largura de Banda [MHz]	Atenuação [dB/km]	Atraso de propagação [$\mu\text{s}/\text{km}$]
Par trançado Categoria 1	0,1	8,3	5,7
Par trançado Categoria 6	100	198	5,7
Par trançado Categoria 6	250	328	5,7
Par trançado Categoria 8	2000	800	5,7
Cabo coaxial RG59	1000	289	4
	2150	428	4
Fibra ótica (comp. onda 850 nm) (comp. onda 1310 nm) (comp. onda 1550 nm)	$10^3 \times \text{km}$	1	5
		0,3	5
		0,2	5
Rádio	0,1 a 10^3	----	3,3(3)
Satélite	10^3 a 10^5	----	3,3(3)

8.7 Padrão de olho

Além da amplitude do sinal à entrada do recetor, existem essencialmente duas causas, no canal de comunicação, que levam ao aumento da *BER* num sistema de comunicação: (1) a interferência intersimbólica; (2) e o ruído. Ao contrário das medidas objetivas relação sinal-ruído no canal de comunicação e relação E_b/N_0 , a influência destes dois efeitos do canal de comunicação pode ser aferida visualmente, de um modo subjetivo, através do padrão de olho (*eye pattern*).

O padrão de olho tem o aspeto corresponde a uma figura apresentada por um osciloscópio, tendo como sinal de entrada o sinal recebido, $s_R(t)$, e sincronizado no início do símbolo, mas em que a luminosidade de cada varrimento não desaparece. Quando o varrimento corresponde a dois símbolos, o padrão de olho tem a aparência de dois olhos, tais que quanto mais abertos melhor é o desempenho do sistema.

Na figura 8.2 é apresentado um padrão de olho de um código de linha PNRZ sem formatação de pulsos, num canal com largura de banda correspondente à do primeiro zero espectral ($B_T = R_b$). Na figura 8.2-a, sem ruído de canal, pode-se verificar a interferência intersimbólica correspondente à transição lenta entre símbolos, mas no instante ótimo de amostragem, onde se dá a deteção no recetor, está “perto” do nível correto. É esta característica que permite utilizar o critério do primeiro zero espectral para definição da largura de banda. De modo a verificar o efeito do ruído é apresentado na figura 8.2-b um padrão de olho para o canal da figura 8.2-a, mas com uma relação sinal-ruído de 13 dB. Pode-se verificar o fecho do olho, mas essencialmente devido ao ruído e não devido à interferência intersimbólica.

Na figura 8.3 é apresentado um padrão de olho para o mesmo código da figura 8.2, mas para que se verifique o maior efeito da interferência intersimbólica a largura de banda do canal é $B_c = R_b/2$, metade da largura de banda segundo o critério do primeiro zero espectral. Em 8.3-a, sem ruído de canal, o olho apresenta-se mais fechado devido às transições mais lentas entre símbolos. Consequentemente, no instante ótimo de amostragem o sinal está “longe” do nível correto, estando mais suscetível a erros de bit. Em 8.3-b é apresentado o padrão de olho também com 13 dB de relação sinal-ruído.

Comparando as figuras 8.2 e 8.3, verifica-se que quanto maior for a largura de banda do canal mais aberto se apresenta o olho e o pulso aproxima-se do pulso original. Esta melhoria, contudo, é conseguida através do aumento da largura de banda.

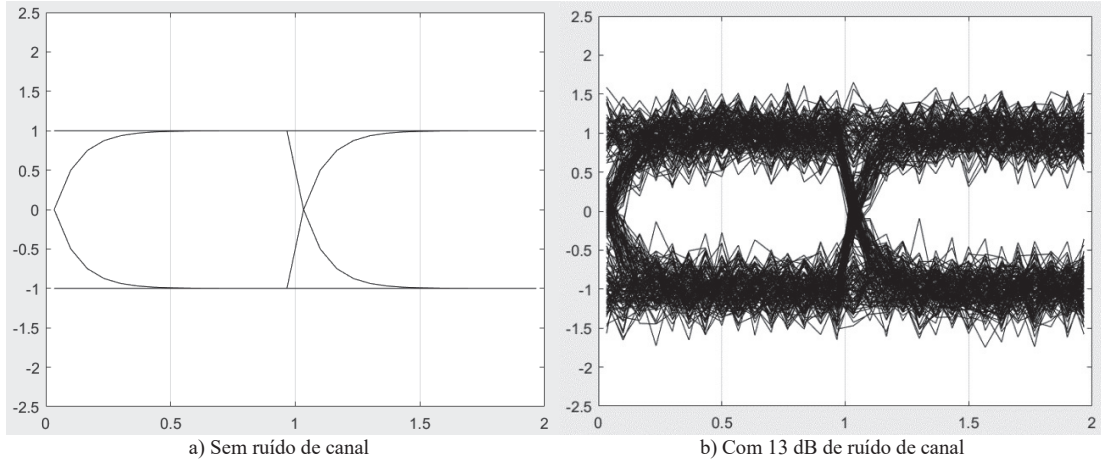


Figura 8.2

Padrão de olho com dois bits consecutivos do código de linha PNRZ.

Canal do tipo passa-baixo de 1.^a ordem, com $B_c = R_b$ (primeiro zero espectral).

O eixo das abcissas está normalizado em múltiplos de T_b .

Os instantes de deteção ótima correspondem a 0,5 e 1,5.

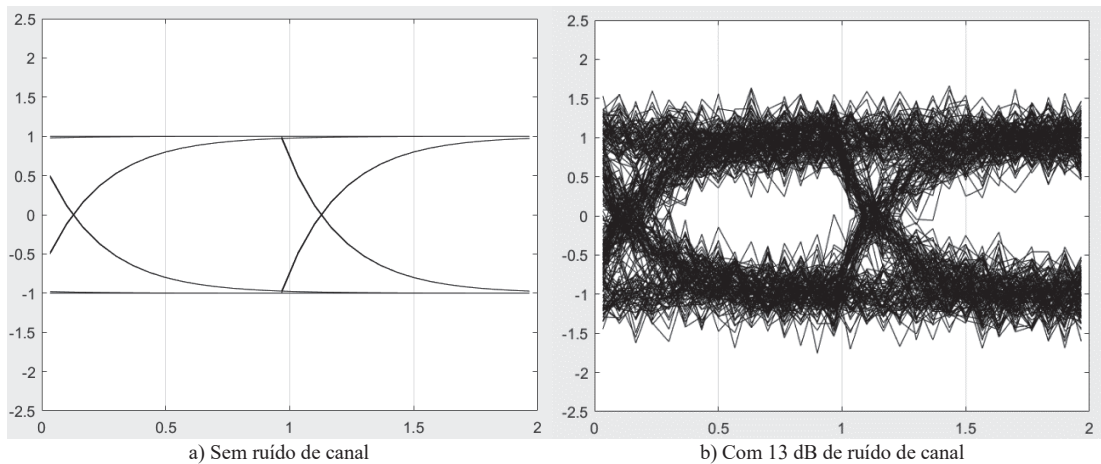


Figura 8.3

Padrão de olho com dois bits consecutivos do código de linha PNRZ.

Canal passa-baixo de 1.^a ordem, com $B_c = R_b/2$.

Na figura 8.4 é apresentado o padrão de olho para um código de linha PNRZ com formatação de pulsos com um fator de decaimento de zero. Pode-se verificar na figura 8.4-a, sem ruído de canal, que no instante ótimo de amostragem não existe

qualquer distorção e a abertura é máxima. Contudo, com ruído, como apresentado na figura 8.4-b, o olho fecha-se aumentando a probabilidade de erro de bit.

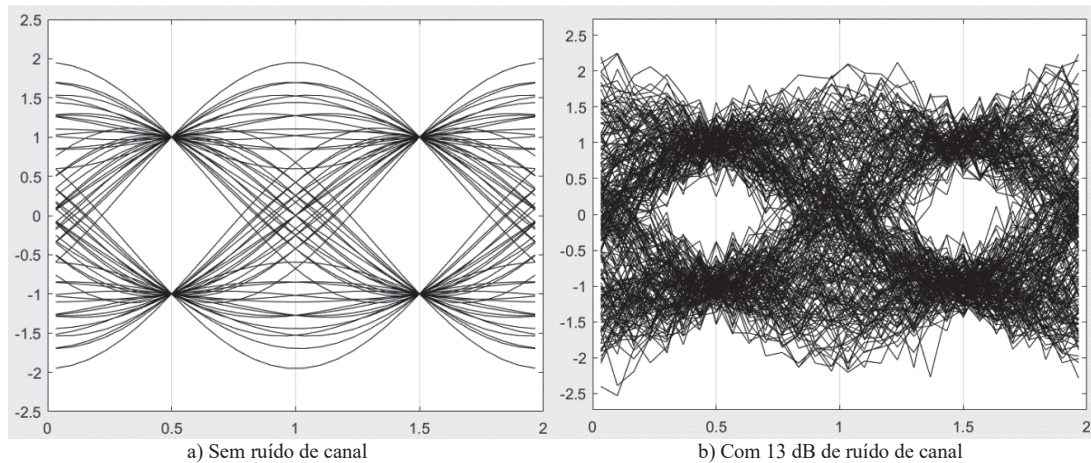


Figura 8.4
Padrão de olho com dois bits consecutivos do código de linha PNRZ.
 Formatação de pulsos com fator de decaimento $\alpha = 0$.

Na figura 8.5 são apresentados os padrões de olho correspondentes aos da figura 8.4, mas com fator de decaimento de um. A diminuição da abertura do padrão de olho em torno do instante ótimo de amostragem não é tão acentuada como com um fator de decaimento menor, sendo mais robusto em relação a erros de sincronismo. Contudo o sinal tem maior largura de banda.

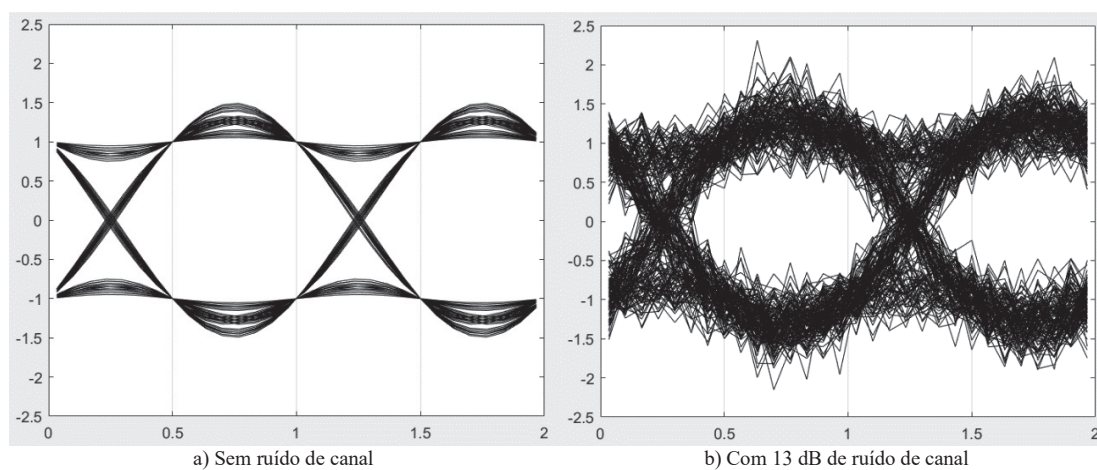


Figura 8.5
Padrão de olho com dois bits consecutivos do código de linha PNRZ.
 Formatação de pulsos com fator de decaimento $\alpha = 1$.

9 Recetor ótimo

Num canal de comunicação AWGN, ao sinal transmitido é adicionado ruído branco e gaussiano. Esta situação é ilustrada na figura 9.1 para a mesma sequência binária da figura 7.4, com código PNRZ. São exemplificadas as situações sem formatação de pulso, com formatação de pulso com fator de decaimento $\alpha = 1$, com e sem ruído.

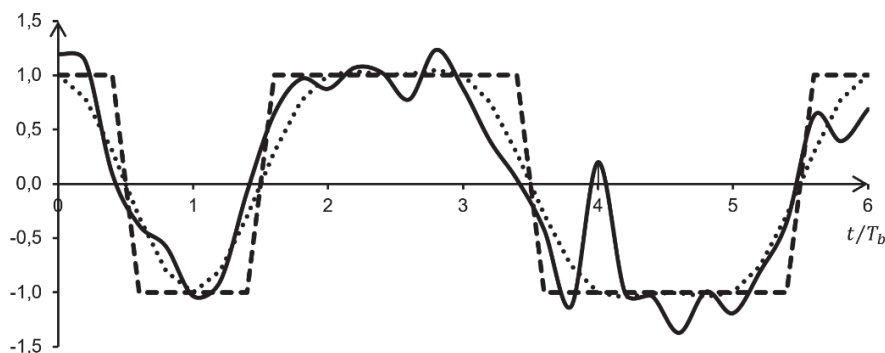
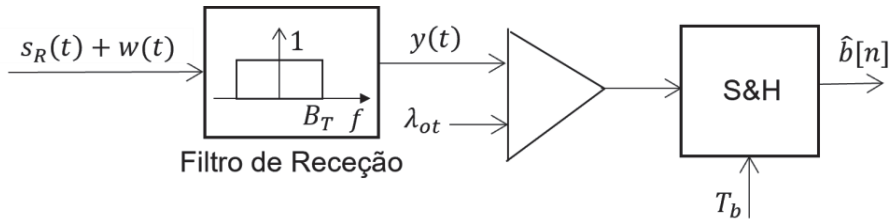


Figura 9.1
Código PNRZ com ruído.

(- -) sem formatação de pulsos; (···) com formatação de pulsos; (—) com formatação de pulsos e ruído.
Sequência “1011001” codificada em PNRZ (tempo normalizado t/T_b),
 $A = 1\text{ V}$, $\alpha = 1$, ao qual foi adicionado ruído gaussiano. Caso a detecção fosse efetuada por comparação num ponto intermédio entre os níveis lógicos ($\lambda = 0\text{ V}$), pode-se verificar no bit “4” a ocorrência de um erro devido ao ruído.

À entrada do recetor é colocado o filtro recetor, que deixe passar o sinal, mas que elimine o ruído fora da banda do sinal, tendo por isso largura de banda B_T . Como deduzido no resto deste capítulo, a estimativa da probabilidade de erro de bit depende da relação entre a energia média por bit e a densidade espectral de potência do ruído, E_b/N_0 . Esta relação não tem em conta a eficiência espectral, mas apenas a limitação de energia.

A figura 9.2 apresenta o diagrama de blocos do recetor, com o filtro recetor que elimina o ruído fora da banda do sinal e um descodificador (MAP – Máximo *a Posteriori*) implementado com um comparador com o valor ótimo de decisão λ_{ot} .

**Figura 9.2****Diagrama de blocos de um recetor de códigos binários.**

Recetor constituído pelo filtro de recepção elimina o ruído fora da banda do sinal e decodificador MAP.

A decisão é efetuada uma vez por símbolo, sincronizada (sincronismo de símbolo) no instante ótimo de amostragem a meio do símbolo, onde não há interferência intersimbólica, sendo esta implementada pelo circuito de amostragem e retenção (S&H – *sampling & hold*). A saída deste bloco contém a sequência binária com eventuais erros de bit, em que cada nível lógico é representado pelas correspondentes tensões de saturação do comparador.

9.1 Decodificador de máximo *a posteriori*

Denominando por y o valor observado após filtragem nos instantes sem interferência intersimbólica após o filtro de recepção, por y_0 e y_1 os valores correspondentes sem ruído quando enviados respetivamente o nível lógico “0” e “1” e assumindo que o filtro não afeta a amplitude do sinal (continuando o exemplo da figura 9.1, em PNRZ):

$$\begin{cases} y_1 = +A \\ y_0 = -A \end{cases} \quad (9.1)$$

correspondendo A à amplitude do sinal de código à entrada do recetor. Note-se que, sendo esta descodificação efetuada no recetor, assume-se sempre neste capítulo as amplitudes e energias recebidas e não as transmitidas.

Como ilustrado na figura 9.3, a função densidade de probabilidade das amplitudes após o filtro, dado que foi enviado o símbolo ao nível lógico “1”, é uma distribuição normal, $f(y|“1”) = N(y_1, \sigma_n^2)$, com valor médio y_1 e variância $\sigma_n^2 = \sigma_c^2$ (equação (8.1)). A função densidade de probabilidade $f(y|“0”) = N(y_0, \sigma_n^2)$, quando enviado o símbolo ao nível lógico “0”, tem valor médio y_0 e a mesma variância.

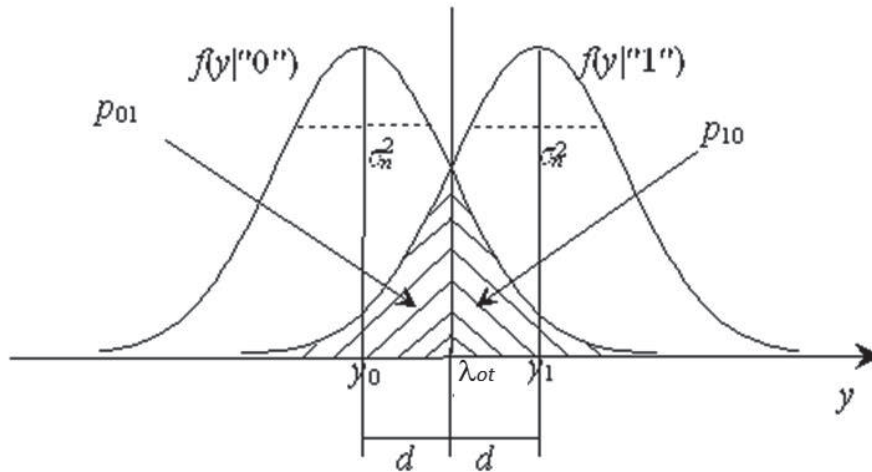


Figura 9.3

Funções densidade de probabilidade do ruído em códigos de linha binários.

d é a distância do símbolo sem ruído após filtragem ao valor ótimo de decisão λ_{ot} . σ_n^2 é a potência do ruído após filtragem. p_{01} é a probabilidade de erro o nível lógico “1” (enviar o nível lógico “1” mas descodificar o nível lógico “0”) e p_{10} é a probabilidade de erro o nível lógico “0”.

As probabilidades condicionadas (*a posteriori*) de ter sido transmitido cada um dos símbolos lógicos, dada a observação no instante ótimo de amostragem da tensão y após filtragem, seguem a Lei de Bayes¹⁸:

$$\begin{cases} P("1"|y) = \frac{f(y|"1'')p_1}{f(y)} & \text{para o nível lógico "1"} \\ P("0"|y) = \frac{f(y|"0'')p_0}{f(y)} & \text{para o nível lógico "0"} \end{cases}, \quad (9.2)$$

em que p_1 e p_0 são as probabilidades *a priori* de ocorrência dos níveis lógicos “1” e “0”, respetivamente. O critério ótimo de descodificação de qual o nível lógico emitido, pois minimiza a probabilidade de erro de bit, corresponde a seleccionar o nível lógico com a maior probabilidade *a posteriori*, ou seja:

$$\begin{cases} P("1"|y) > P("0"|y) & \text{descodifica-se o nível lógico "1"} \\ P("1"|y) < P("0"|y) & \text{descodifica-se o nível lógico "0"} \end{cases}. \quad (9.3)$$

Caso as probabilidades *à posteriori* sejam iguais, é indiferente qual o nível lógico descodificado.

¹⁸ Thomas Bayes, 1701-1761. Inglês, matemático e pastor presbiteriano.

9.2 Decodificador de máxima verosimilhança

Assumindo que as probabilidades *a priori* são iguais ($p_1 = p_0 = 0,5$) a descodificação MAP, que é ótima no sentido de minimizar a BER, é equivalente à descodificação com o critério de máxima verosimilhança (MV – Máxima verosimilhança), dada por:

$$\begin{cases} f(y|1) > f(y|0) & \text{descodifica-se o nível lógico "1"} \\ f(y|1) < f(y|0) & \text{descodifica-se o nível lógico "0"} \end{cases} \quad (9.4)$$

Este critério, utilizado na maioria das aplicações, é assumido neste texto, não necessitando da estimativa da probabilidade de cada um dos níveis lógicos. Note-se que os valores das probabilidades *a priori*, necessárias no critério MAP, não são conhecidos no recetor antes de se começar a deteção, mas o valor ótimo para o limiar de decisão, λ , tem de ser conhecido nessa altura. No caso em análise da descodificação em duas classes em que as distribuições de probabilidade são ambas normais com a mesma variância, este critério corresponde a assumir um limiar de decisão λ , cujo valor ótimo λ_{ot} (figuras (9.2) e (9.3)) é o valor médio entre as tensões dos dois símbolos sem ruído:

$$\lambda_{ot} = \frac{y_0 + y_1}{2}. \quad (9.5)$$

9.3 Probabilidade de erro de bit

A probabilidade de erro de bit, independentemente do critério utilizado (MAP, MV ou outro, nomeadamente utilizando um valor arbitrário do limiar de decisão λ) é dada pela soma das probabilidades de erro em cada nível lógico ponderadas pelas respetivas probabilidades *a priori*, ou seja,

$$BER = p_1 p_{01} + p_0 p_{10}, \quad (9.6)$$

em que p_{01} é a probabilidade de errar o nível lógico “1” (enviar o nível lógico “1” mas descodificar o nível lógico “0”) e p_{10} é a probabilidade de errar o nível lógico “0”. Estas probabilidades são definidas por:

$$\begin{cases} p_{01} = P(y < \lambda | 1) \\ p_{10} = P(y > \lambda | 0) \end{cases} \quad (9.7)$$

Utilizando o valor ótimo de λ seguindo a equação (9.5), tendo em conta a figura 9.3 e a função complementar de erro (Anexo 8):

$$\begin{cases} p_{01} = \int_{-\infty}^{\lambda_{opt}} f(y|1) dy = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{d^2}{2\sigma_n^2}} \right) \\ p_{10} = \int_{\lambda_{opt}}^{+\infty} f(y|0) dy = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{d^2}{2\sigma_n^2}} \right) \end{cases} \quad (9.8)$$

As probabilidades de errar os bits ao nível lógico “0” e ao nível lógico “1” são iguais. A probabilidade de erro de bit corresponde à soma destas probabilidades ponderadas pelas probabilidades *a priori*, ou seja:

$$BER = p_1 p_{01} + p_0 p_{10} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{d^2}{2\sigma_n^2}} \right). \quad (9.9)$$

A probabilidade de erro de bit depende da diferença de tensão entre os símbolos e não dos seus valores absolutos, uma vez que:

$$d = \frac{|y_1 - y_0|}{2}. \quad (9.10)$$

Se em vez de um critério de máxima verosimilhança (MV) fosse utilizado um critério de máximo *a posteriori* (MAP) com $p_0 \neq p_1$, as adaptações da figura 9.3 e das equações (9.5), (9.9) e (9.10) seriam as apresentadas no Anexo 9.

9.3.1 Código PNRZ

Para o código PNRZ exemplificado na figura 9.1, $d = A$, a largura de banda dada pela equação (7.14) e a energia média por símbolo dada pela equação (7.8) (assumindo a amplitude e a energia recebida), a *BER* vem:

$$BER = p_{01} = p_{10} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{A^2}{2N_0 B_T}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0(1 + \alpha)}} \right). \quad (9.11)$$

Tendo em conta a relação sinal-ruído no canal, (equação (8.2)), tem-se ainda:

$$BER = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{SNR_c}{2}} \right). \quad (9.12)$$

9.3.2 Código UNRZ

Se o código for UNRZ, então os valores das tensões sem ruído no instante ótimo de amostragem resultam:

$$\begin{cases} y_1 = +A \\ y_0 = 0 \end{cases} \quad (9.13)$$

Pela figura 9.3, $d = A/2$, com a largura de banda dada pela equação (7.14) e a energia média por símbolo dada pela equação (7.9), obtém-se para a BER:

$$BER = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{A^2}{4 \times 2N_0 B_T}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0(1 + \alpha)}} \right) \quad (9.14)$$

Comparando as equações (9.11) e (9.14), para que a BER seja igual com os códigos PNRZ e UNRZ, a relação E_b/N_0 tem de ser o dobro (+3,01 dB) em UNRZ do que em PNRZ. Isto deve-se ao facto de a componente DC presente nos códigos UNRZ consumir metade da energia, mas não servir para distanciar os dois símbolos.

9.4 Filtro adaptado

O recetor estudado nos pontos anteriores assume filtragem passa-baixo ideal, com frequência de corte igual à largura de banda do sinal recebido, de modo a eliminar o ruído fora da banda. Assume ainda um instante ótimo de amostragem em que não exista interferência intersimbólica. Contudo, nem sempre é possível definir um instante sem distorção e a filtragem não tem em conta a forma de onda do sinal transmitido.

Para resolver estes problemas, o americano Dwight North concebeu, em 1943, o filtro adaptado (*matched filter*) para deteção de um sinal conhecido, corrompido por ruído branco e aditivo. Considere-se que o símbolo transmitido é $s_l(t)$, com l igual a zero ou um, respetivamente para os símbolos correspondentes aos níveis lógicos “0” e “1”. A este sinal é adicionado ruído $w(t)$ no canal de comunicação, conforme o modelo AWGN referido no subcapítulo 8.1, sendo recebido o sinal $s_l(t) + w(t)$. Efetuando análise de sinais como vetores, se for efetuada uma projeção sobre o sinal $ks_j(t)$, como mostrado na figura 9.4, é anulada a componente do ruído perpendicular ao símbolo, permanecendo apenas a componente do ruído colinear ao símbolo.

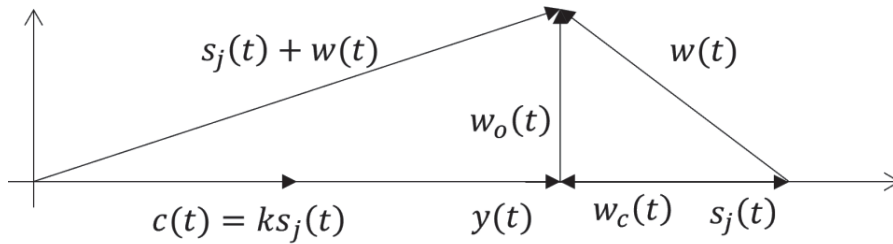


Figura 9.4

Interpretação vetorial do filtro adaptado.

Ao realizar o produto interno entre o sinal $s_l(t) + w(t)$, com $w(t) = w_o(t) + w_c(t)$, e um vetor de base $c(t)$ proporcional a um dos símbolos transmitidos, elimina-se o ruído ortogonal, $w_o(t)$, mantendo o ruído colinear, $w_c(t)$, a este símbolo.

A projeção é realizada pelo produto interno entre o sinal recebido com ruído e um vetor de base, por exemplo proporcional ao símbolo “1” ($j = 1$), pelo que $c(t)$ vem:

$$c(t) = ks_1(t). \tag{9.15}$$

O produto interno é definido como o integral do produto entre o sinal de entrada $s_R(t) + w(t)$ e o vetor de base $c(t)$. Se fosse possível integrar, como na definição do produto interno, em tempo infinito, e sendo o ruído ortogonal aos símbolos, o ruído seria totalmente eliminado. Não é, no entanto, possível, que este integral seja efetuado em tempo infinito, mas apenas no tempo de símbolo, pois é necessária uma decisão por símbolo. Nestas circunstâncias, o produto interno é aproximado por:

$$y(T_b) = \int_0^{T_b} c(t)(s_l(t) + w(t))dt, \tag{9.16}$$

que corresponde a uma filtragem em que a resposta impulsiva é definida por:

$$h(t) = c(T_b - t) = ks_1(T_b - t), \tag{9.17}$$

pelo que o filtro se designa de filtro adaptado (ao símbolo “1”) ou correlador. Com este filtro é retirado o ruído ortogonal, $w_o(t)$, ao sinal, ou seja, todo o ruído fora da banda e também a algum ruído na banda do sinal, mantendo apenas o ruído colinear, $w_c(t)$.

O diagrama de blocos do recetor ótimo, no sentido que minimiza a BER, composto pelo filtro adaptado e decodificação MAP, também designado de recetor de correlação, é apresentado na figura 9.5. O integrador é colocado a zero no início de cada símbolo, representado na figura 9.5 pela entrada T_b^+ , sendo tomada uma decisão no fim

do símbolo, amostrando $y(t)$ nos instantes T_b^- , imediatamente antes de o integrador ser recolocado a zero e se reiniciar o processo para descodificação do próximo símbolo.

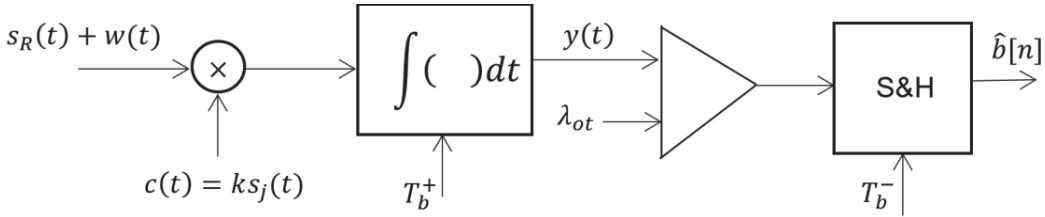


Figura 9.5
Diagrama de blocos do recetor ótimo ou recetor de correlação.
 Recetor constituído por filtro adaptado e deteção MAP.

No fim do símbolo a informação é passada pelo S&H para a saída, imediatamente antes, T_b^- , de recolocar o integrador a zero, T_b^+ , e recomeçar nova deteção de símbolo.

Com a integração, a função de verosimilhança para cada símbolo l tem uma distribuição normal $N(y_l, \sigma_n^2)$, sendo para a filtragem adaptada válida a figura 9.3. Partido da equação (9.17), obtém-se:

$$\begin{aligned}
 y(T_b) &= \int_0^{T_b} ks_1(t)s_l(t)dt + \int_0^{T_b} ks_1(t)w(t)dt \\
 &= y_l + \int_0^{T_b} ks_1(t)w(t)dt
 \end{aligned}
 , \quad l = 0 \text{ ou } 1. \quad (9.18)$$

O segundo termo desta equação corresponde ao resultado da filtragem do ruído introduzido pelo canal. Note-se que, para todos os códigos de linha, o símbolo “0” ou é nulo (unipolar, bipolar) ou simétrico ao símbolo ao nível lógico “1” (polar,). Deste modo, os valores da projeção sem ruído correspondem a:

$$\begin{cases}
 y_1 &= kE_1 \\
 y_0 &= -kE_1 & \text{polar} \\
 y_0 &= 0 & \text{unipolar}
 \end{cases}
 . \quad (9.19)$$

Definindo A_{eq} como a área equivalente do ruído no filtro adaptado (Anexo 10), numericamente igual à energia, E_c , do vetor de base, $c(t)$, e correspondente ao dobro da largura de banda de um filtro ideal passa-baixo de ganho unitário:

$$A_{eq} = \int_0^{T_b} c^2(t)dt = k^2 \int_0^{T_b} s_1^2(t)dt = k^2E_1. \quad (9.20)$$

A componente filtrada do ruído tem uma distribuição normal, de valor médio nulo e potência/variância dada por (Anexo 10):

$$\sigma_n^2 = \frac{N_0}{2} k^2 E_1 = \frac{N_0}{2} A_{eq} = \frac{N_0}{2} E_c. \quad (9.21)$$

9.5 Filtro adaptado normado

Assumindo que o vetor de base, $c(t)$, tem energia unitária, a área equivalente do ruído é também unitária (filtro adaptado normado¹⁹):

$$A_{eq} = 1, \quad (9.22)$$

e da equação (9.20) resulta para o fator de escala k :

$$k = \frac{1}{\sqrt{E_1}}. \quad (9.23)$$

As tensões sem ruído no instante de amostragem, para o filtro adaptado normado, pelas equações (9.19) e (9.23), resultam:

$$\begin{cases} y_1 = +\sqrt{E_1} \\ y_0 = -\sqrt{E_1} \\ y_0 = 0 \end{cases} \begin{matrix} \text{polar} \\ \text{unipolar} \end{matrix}, \quad (9.24)$$

e a potência do ruído vem, pelas equações (9.21) e (9.22):

$$\sigma_n^2 = \frac{N_0}{2}. \quad (9.25)$$

Nesta situação a equação (9.9) pode ser reescrita como:

$$BER = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{d^2}{N_0}} \right). \quad (9.26)$$

Note-se que assumir o vetor de base normado, ou tomando qualquer outro valor arbitrário, não altera a probabilidade de erro, já que a amplitude de $c(t)$ tanto afeta o sinal como o ruído. Torna mais fácil, no entanto, a comparação com espaços vetoriais e simplifica as expressões das tensões sem ruído e da potência do ruído após filtragem.

¹⁹ Referencial com vetor de base com norma unitária.

9.6 Código PNRZ

Retomando o exemplo com código PNRZ, os símbolos correspondem a tensões contínuas localizadas com amplitude A ou $-A$. Com o filtro adaptado ao símbolo ao nível lógico “1”, $c(t) = kA = C$. O valor de C , impondo que o filtro está normado, é determinado por²⁰:

$$A_{eq} = 1 = \int_0^{T_b} C^2 dt = C^2 T_b \Rightarrow c(t) = C = \sqrt{R_b}. \quad (9.27)$$

Nesta situação, y_1 é determinado por:

$$y_1 = \int_0^{T_b} c(t)s_1(t)dt = \int_0^{T_b} \sqrt{R_b}Adt = \sqrt{R_b}AT_b = \sqrt{A^2T_b} = \sqrt{E_1} = \sqrt{E_b}, \quad (9.28)$$

como já definido pela equação (9.24). O valor de y_0 , também como na equação (9.24), é igual a $-y_1$, uma vez que os símbolos são simétricos e, pela mesma razão e tendo em conta a equação (9.5), o limiar de decisão ótimo é igual a zero ($\lambda_{ot} = 0$). O valor de d é definido pela equação (9.10):

$$d = \frac{|y_1 - y_0|}{2} = \sqrt{E_b}. \quad (9.29)$$

A figura 9.6 é uma adaptação da figura 9.3 para código PNRZ e filtro adaptado normado. Desta figura, e das equações (9.26) e (9.29), a *BER* em PNRZ resulta:

$$BER = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right). \quad (9.30)$$

Ao contrário da equação (9.11), deduzida com filtro de banda plano, com um filtro cuja resposta em frequência é dada (filtro adaptado) pela transformada de Fourier dos símbolos (símbolo ao nível lógico “1”), a *BER* deixa de ser dependente do fator de decaimento e passa a depender apenas da relação entre energias E_b/N_0 , proporcional à relação sinal-ruído (equação (8.2)) na banda do sinal.

²⁰ O resultado da equação 9.27 é válido para todos os códigos apresentados com exceção do código PRZ. Para o código PRZ o resultado é $C = \sqrt{2R_b}$. Para o código Manchester a amplitude é dada pela equação (9.27), assegurando que $c(t)$ corresponde à forma de onda do código Manchester ao nível lógico “1”.

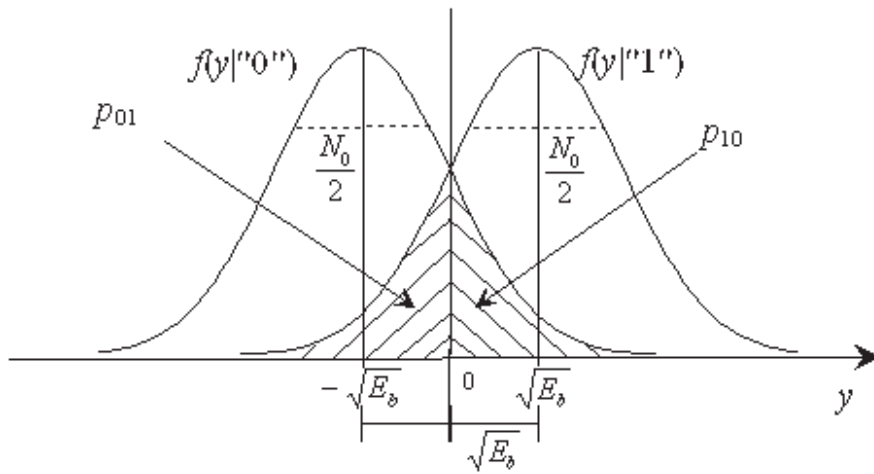


Figura 9.6
Funções densidade de probabilidade do ruído em PNRZ
com filtro adaptado normado.
 Adaptação da figura 9.3, com $\lambda_{ot} = 0$, $d = \sqrt{E_b}$, $\sigma_n^2 = \frac{N_0}{2}$.

Mantendo a potência recebida, das equações (7.8) e (9.30) resulta:

$$BER = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{A^2 T_b}{N_0}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{S_R}{R_b N_0}} \right). \tag{9.31}$$

Desta equação deduz-se que, desde que não se altere a potência recebida, o aumento do débito binário e consequente diminuição da energia de bit, corresponde a um aumento na probabilidade de erro de bit. Para manter a BER, terá de haver um aumento da amplitude do sinal, de modo a manter a energia recebida.

As formas de onda para o código PNRZ, ao longo do recetor ótimo normado, são apresentadas na figura 9.7. Pode-se verificar o retorno a zero do integrador no início do símbolo. Quando os bits estão ao nível lógico “1” a integração sem ruído é sempre para valores positivos e quando de níveis lógicos “0”, para valores negativos. A decisão é uma comparação com zero no fim do tempo de símbolo. A descodificação insere um símbolo de atraso devido à decisão ser tomada apenas no fim do tempo de símbolo.

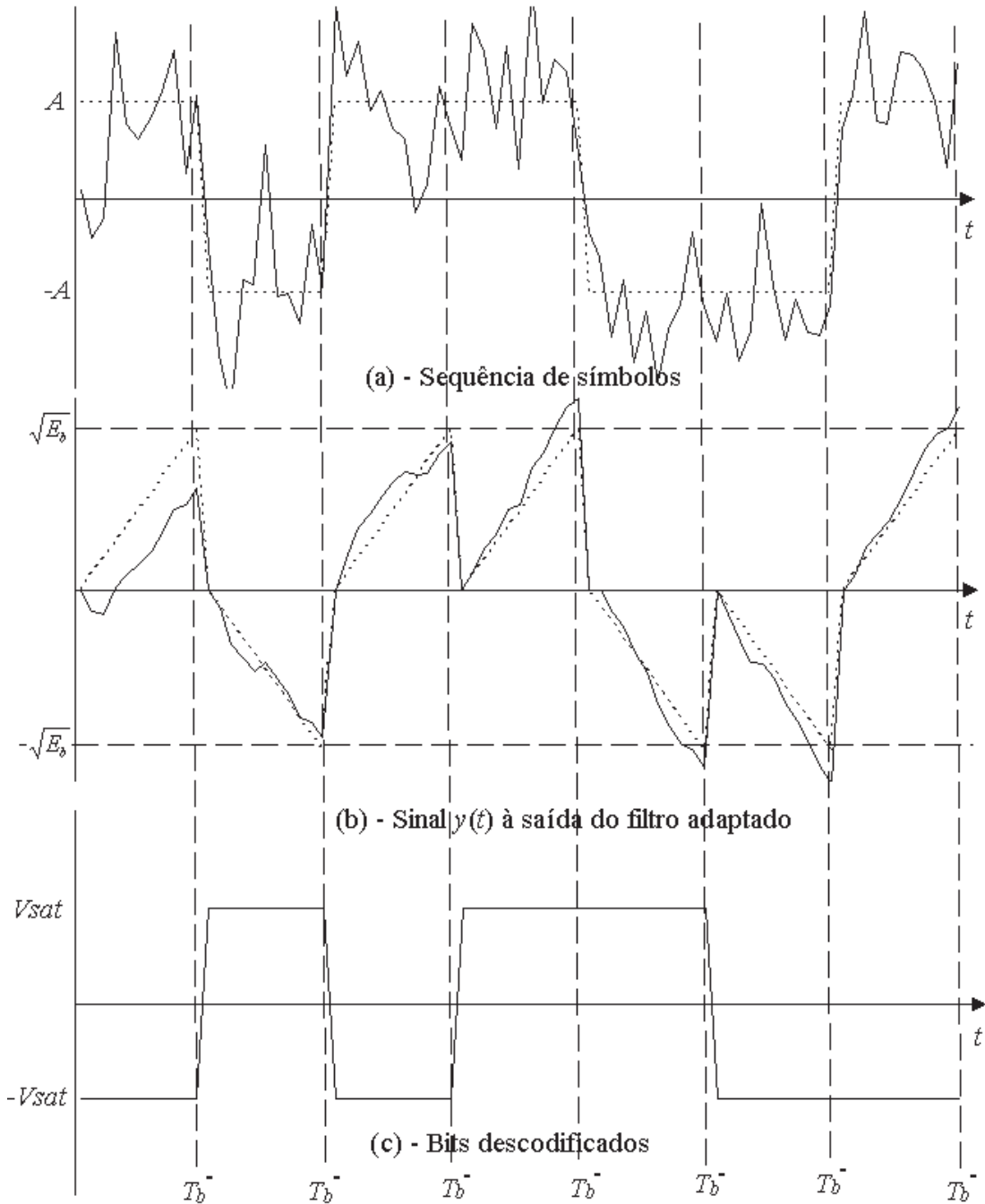


Figura 9.7

Formas de onda no recetor ótimo com código PNRZ com ruído para os bits ao nível lógico “1011001”.

a) Sequência de símbolos com ruído; b) Sinal à saída do filtro adaptado c) bits decodificados.

A tracejado, forma de onda do símbolo sem ruído.

A decodificação implica um símbolo de atraso devido à decisão ser tomada apenas no fim do tempo de símbolo. Apesar do ruído não existem erros.

9.7 BER em códigos de linha binários

Seguidamente, deduz-se a equação da BER para os diversos códigos em estudo neste texto. Assume-se que os níveis lógicos são equiprováveis.

9.7.1 Códigos polares (PNRZ, PRZ, Manchester)

Genericamente, para os casos dos códigos de linha polares (PNRZ, PRZ, Manchester), os símbolos estão relacionados por:

$$s_1(t) = -s_0(t). \tag{9.32}$$

As tensões de observação de cada símbolo sem ruído, no instante de amostragem, correspondem a (equação (9.19)):

$$\begin{cases} y_1 = +kE_1 = +kE_b \\ y_0 = -kE_1 = -kE_b \end{cases} \tag{9.33}$$

Nesta situação, o valor ótimo de decisão vem:

$$\lambda_{ot} = \frac{kE_b - kE_b}{2} = 0. \tag{9.34}$$

A distância, d , entre as tensões de observação de cada símbolo sem ruído no instante de amostragem e o valor ótimo de decisão vem:

$$d = y_1 - \lambda_{ot} = kE_b. \tag{9.35}$$

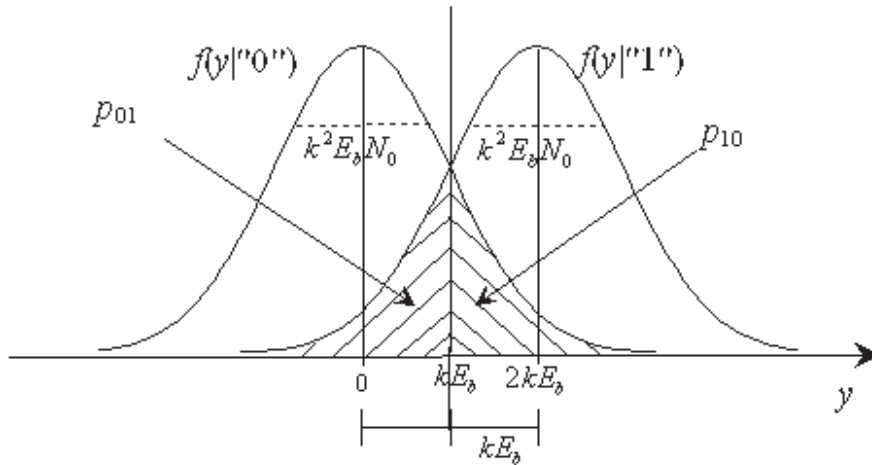
Da equação (9.9) com a potência do ruído dada pela equação (9.21), a BER vem:

$$BER = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{d^2}{2\sigma_n^2}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{k^2 E_b^2}{k^2 E_b N_0}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right). \tag{9.36}$$

9.7.2 Códigos unipolares (UNRZ)

A figura 9.8 apresenta a adaptação da figura 9.3 para o caso dos códigos de linha unipolares, em que o símbolo “0” corresponde a 0 V. As tensões de observação de cada símbolo sem ruído no instante de amostragem são, de acordo com a equação (9.19):

$$\begin{cases} y_1 = +kE_1 = +2kE_b \\ y_0 = 0 \end{cases} \tag{9.37}$$



As

Figura 9.8
Funções densidade de probabilidade do ruído em UNRZ
com filtro adaptado não normado.
 Adaptação da figura 9.3, com $\lambda_{ot} = kE_b$, $d = kE_b$, $\sigma_n^2 = k^2 E_b N_0$.

Nesta situação, o valor ótimo de decisão é determinado por:

$$\lambda_{ot} = \frac{2kE_b + 0}{2} = kE_b. \quad (9.38)$$

O valor de d é obtido de:

$$d = y_1 - \lambda_{ot} = 2kE_b - kE_b = kE_b. \quad (9.39)$$

Uma vez que a potência do ruído é dada pela equação (9.20) e (9.21):

$$\sigma_n^2 = k^2 E_b N_0. \quad (9.40)$$

A BER vem, pela equação (9.9):

$$BER = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{d^2}{2\sigma_n^2}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{k^2 E_b^2}{2k^2 E_b N_0}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}} \right). \quad (9.41)$$

Como nos códigos polares, a probabilidade de erro de bit depende apenas da relação E_b/N_0 e não, como na equação (9.14), do fator de decaimento.

Se o filtro adaptado estiver normado, $c(t)$ é o mesmo que o deduzido na equação (9.27), pois os símbolos lógicos “1” em PNRZ e UNRZ são iguais.

9.7.3 Código bipolares (AMI)

Na situação do código de linha bipolar sem retorno a zero, existem duas possibilidades quando se transmite o nível lógico “1”: ou se transmite o símbolo $+A$ ou o símbolo $-A$, situações que ocorrem alternadamente e com a mesma probabilidade. A figura 9.3 é então adaptada para três símbolos, conforme mostrado na figura 9.9.

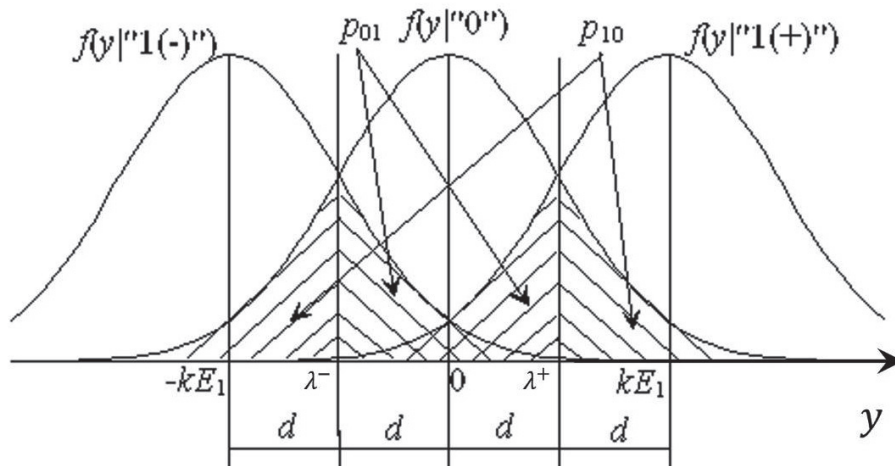


Figura 9.9
Funções densidade de probabilidade na recepção do código AMI.
 São apresentados três símbolos (pseudoternário), pois existem dois símbolos correspondentes ao símbolo lógico “1”.

As tensões no instante de amostragem do filtro adaptado, denominadas para o bit a “1” por y_{1+} e y_{1-} , respetivamente para os símbolos com as amplitudes $+A$ e $-A$, e y_0 para o bit “0”, e E_b dado pela equação (7.9), são dadas por:

$$\begin{cases} y_{1+} = +kE_1 = +2kE_b \\ y_{1-} = -kE_1 = -2kE_b \\ y_0 = 0 \end{cases} \tag{9.42}$$

Os valores das tensões ótimas de comparação, λ^+ e λ^- , são definidos pelos valores equidistantes das tensões sem ruído no instante de amostragem, pelo que:

$$\begin{cases} \lambda^+ = \frac{y_{1+} - y_0}{2} = +kE_b \\ \lambda^- = \frac{y_{1-} - y_0}{2} = -kE_b \end{cases} \tag{9.43}$$

O valor de d é definido pela equação (9.10), pelo que:

$$d = \frac{kE_1 - 0}{2} = \frac{2kE_b}{2} = kE_b. \tag{9.44}$$

O nível lógico “0” é descodificado com erro se o valor de y for maior que d ou menor que $-d$ (2 vezes a área abaixo da curva de Gauss). Cada um dos dois símbolos, representando o nível lógico “1”, com polarização positiva ou negativa, tem probabilidade *a priori* igual a metade da probabilidade *a priori* deste nível lógico. O esquema de blocos do recetor AMI é apresentado na figura 9.10, em que o comparador que efetua a descodificação MV é substituído por um quantificador de três níveis.

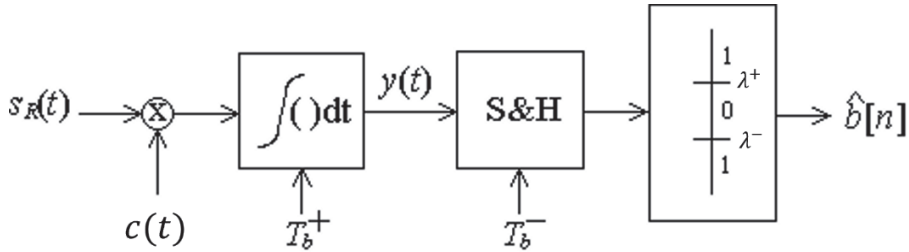


Figura 9.10

Recetor ótimo para o código AMI.

Pode-se trocar a posição dos comparadores e do S&H.
Havendo três símbolos os comparadores são substituídos por um
quantificador de três níveis.

Deste modo, resulta para a BER:

$$BER = 2p_0 \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{d^2}{2\sigma_n^2}} \right) + \frac{p_1}{2} \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{d^2}{2\sigma_n^2}} \right) + \frac{p_1}{2} \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{d^2}{2\sigma_n^2}} \right). \quad (9.45)$$

Assumindo os níveis lógicos equiprováveis esta equação reduz-se a:

$$BER = \frac{3}{4} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{d^2}{2\sigma_n^2}} \right), \quad (9.46)$$

pelo que, utilizando as equações (7.9), (9.21) e (9.44), vem:

$$BER = \frac{3}{4} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{k^2 E_b^2}{2k^2 E_b N_0}} \right) = \frac{3}{4} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}} \right). \quad (9.47)$$

Este valor da BER não entra em conta com a capacidade de o código detetar erros por violação da regra de polaridade alternada quando do envio de níveis lógicos “1” consecutivos.

9.7.4 Códigos diferenciais (NRZI)

Nos códigos diferenciais, um erro de símbolo isolado (antes da pós-codificação) origina dois erros de bit seguidos (depois da pós-descodificação), pois cada símbolo contém informação sobre o nível lógico presente e o imediatamente posterior. Sendo códigos insensíveis à polaridade, se antes da pós-descodificação forem cometidos erros consecutivos de símbolos, apenas são produzidos dois erros de bit com pós-descodificação, na posição do primeiro erro de símbolo e na posição seguinte ao último símbolo errado. Os códigos diferenciais exibem então uma BER inferior ao do dobro da BER do respetivo código não diferencial. Para os códigos NRZI unipolar tem-se que, da equação (9.41):

$$BER \leq \text{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}} \right). \tag{9.48}$$

Desde que a probabilidade de erro de símbolo seja baixa, a BER tende para a igualdade na equação (9.48). Esta é a situação mais realista, sendo um limite máximo, vai ser adotada no resto do texto. Note-se que os erros acontecem aos pares.

9.7.5 Código MLT-3

O esquema de blocos do recetor ótimo para o código MLT-3, sendo este BNRZ e diferencial, corresponde ao recetor ótimo bipolar seguido da respetiva pós-descodificação diferencial, como apresentado na figura 9.11.

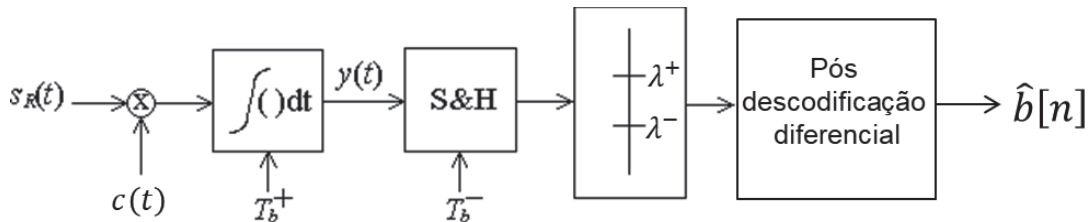


Figura 9.11
Recetor ótimo para o código MLT-3.
 Recetor bipolar seguido de pós-descodificação diferencial.

A probabilidade de erro de bit é dada pela equação (9.47) dos códigos bipolares, multiplicada por dois por ser diferencial, pelo que:

$$BER = \frac{3}{2} \text{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}} \right). \tag{9.49}$$

9.8 Regeneração do sinal

Por vezes, é necessário comunicar a distâncias consideráveis (maior atenuação) e através de canais que inserem bastante ruído, o que faz aumentar a probabilidade de erros. Uma estratégia para evitar estes erros é a regeneração. A regeneração do sinal consiste em detetar os símbolos e retransmiti-los sem ruído (*e.g.* nos equipamentos da rede como *hubs*, *switches* e *routers*), em pontos intermédios do canal de comunicação, como mostrado na figura 9.12.



Figura 9.12

Cadeia Transmissor-canal-regenerador-canal-recetor.

Regenerar corresponde a detetar os símbolos e retransmiti-los sem ruído, em pontos intermédios, por exemplo nos equipamentos da rede.

Se a atenuação ainda não for grande e o sinal ainda não tiver sido muito afetado pelo ruído é possível regenerar o sinal praticamente sem erros de bit. Teoricamente, é possível transmitir digitalmente a grandes distâncias, praticamente sem erros, desde que se introduza um número suficiente de regeneradores. A probabilidade de erro de bit total entre o transmissor e o recetor é aproximadamente dada pela soma das probabilidades em cada regenerador, mais a probabilidade de erro de bit no próprio recetor, BER_r . Designando a probabilidade no j -ésimo regenerador de BER_j e considerando J regeneradores, a probabilidade de erro de bit final vem, aproximadamente:

$$BER \approx \sum_{j=1}^J BER_j + BER_r, \quad (9.50)$$

sendo a aproximação resultante de se assumir que não existem erros no mesmo bit em mais do que um regenerador.

Note-se que não é possível regenerar um sinal analógico, mas apenas retirar ruído fora da banda do sinal e amplificá-lo, o que implica amplificar também o ruído dentro da banda. Esta é uma das razões para utilização da comunicação digital em vez da comunicação analógica.

10 Transmissão M-ária em banda de base

Como visto no capítulo 7, a largura de banda depende do número máximo de transições por segundo, em sentidos opostos, produzido pelo código de linha. Uma maneira de diminuir o número de transições e conseqüentemente a largura de banda é fazer com que o símbolo contenha informação de mais do que um bit, diminuindo o débito de símbolos R_s (*baud rate*) sem diminuir o débito binário. A transmissão deixa de ser binária para ser M-ária, ou seja, o símbolo tem M formas de onda possíveis.

10.1 Modulação por amplitude de impulsos digital

O código de linha PAM digital M-ário, em que os símbolos são representados por diferentes amplitudes, apresentado na figura 10.1, é denominado Modulação por Amplitude de Impulsos (PAM – *Pulse Amplitude Modulation*) digital²¹.

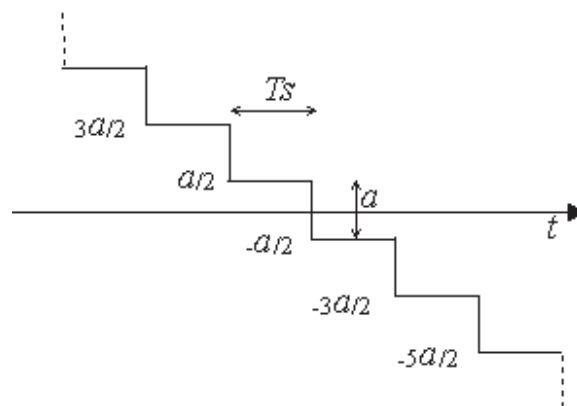


Figura 10.1
Código PAM digital M-ário.
 M símbolos NRZ simétricos em torno do zero.
 A distância entre símbolos adjacentes é de a .

O número de bits por símbolo, K , e o número de símbolos diferentes, M , a que correspondem M amplitudes diferentes²², estão relacionados por:

$$M = 2^K. \quad (10.1)$$

²¹ Em contraste com o denominado PAM analógico, em que são transmitidas diretamente as amplitudes de um sinal analógico após amostragem, podendo estes ter uma gama contínua de valores.

²² As fórmulas deduzidas para PAM digital M-ária, com $K = 1$, são válidas para PNRZ.

O tempo de símbolo, τ_s , e o tempo de bit, T_b , estão relacionados por:

$$\tau_s = KT_b. \quad (10.2)$$

O débito de símbolos, R_s , está relacionado com o débito binário, R_b , por:

$$R_s = \frac{R_b}{K}. \quad (10.3)$$

10.2 Energia média por bit

Denominando a como a tensão entre símbolos adjacentes, a energia média por símbolo, assumindo que estes são equiprováveis, é dada por:

$$E_s = \frac{2}{M} \left(\frac{a}{2}\right)^2 \tau_s + \frac{2}{M} \left(\frac{3a}{2}\right)^2 \tau_s + \dots = \frac{2}{M} E_{min} (1^2 + 3^2 + \dots) = \frac{(M^2 - 1)}{3} E_{min}, \quad (10.4)$$

que aumenta com M e com o quadrado de a . E_{min} é a energia do símbolo de menor energia, com amplitude $a/2$:

$$E_{min} = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \tau_s. \quad (10.5)$$

A energia média por bit vem:

$$E_b = \frac{E_s}{K} = \frac{(M^2 - 1)}{3K} E_{min} = \frac{(M^2 - 1)}{12} a^2 \frac{\tau_s}{K} = \frac{(M^2 - 1)}{12} a^2 T_b. \quad (10.6)$$

10.3 Largura de banda

Assumindo o instante ótimo de amostragem, sem interferência intersimbólica, a abertura dos pulsos com critério de Nyquist é de $2\tau_s$ e a largura de banda vem, pela equação (7.14), substituindo R_b por R_s :

$$B_T = \frac{R_s}{2} (1 + \alpha) = \frac{R_b}{2K} (1 + \alpha). \quad (10.7)$$

Como se pretende, a largura de banda diminui com o aumento do número de bits por símbolo. A eficiência espectral (equação (7.6)) também melhora com o aumento do número de bits por símbolo:

$$\rho = \frac{R_b}{B_T} = \frac{2K}{(1 + \alpha)}. \quad (10.8)$$

10.4 Probabilidade de erro de símbolo

O recetor ótimo para códigos PAM digital é mostrado na figura 10.2 e é idêntico ao do recetor de códigos binários da figura 9.5, mas com o comparador substituído por um quantificador/codificador, de modo a detetar M níveis de saída no filtro adaptado.

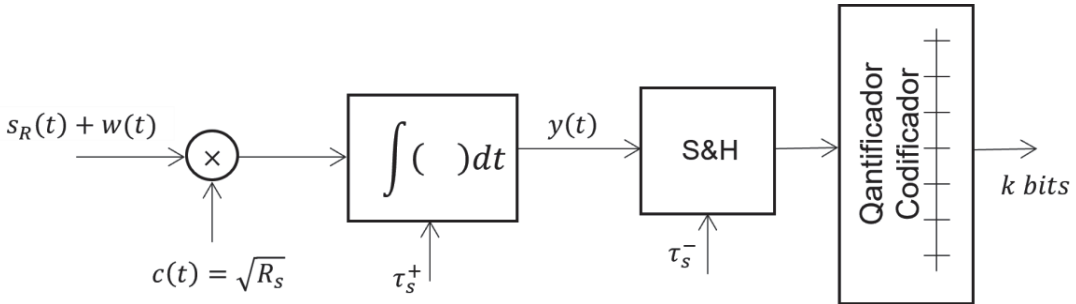


Figura 10.2
Recetor ótimo normado PAM digital.
 Filtro adaptado (normado) seguido de quantificador/codificador.

Assumindo o filtro ótimo normado e dado que os símbolos correspondem a tensões contínuas localizadas, $c(t) = C$, e pela equação (9.22):

$$A_{eq} = 1 = \int_0^{\tau_s} C^2 dt = C^2 \tau_s \Rightarrow c(t) = C = \sqrt{R_s} , \tag{10.9}$$

que é um caso geral da equação (9.27), outra vez substituindo R_b por R_s .

As funções densidade de probabilidade do ruído, para os diversos símbolos, à saída do filtro no momento de amostragem, são apresentadas na figura 10.3.

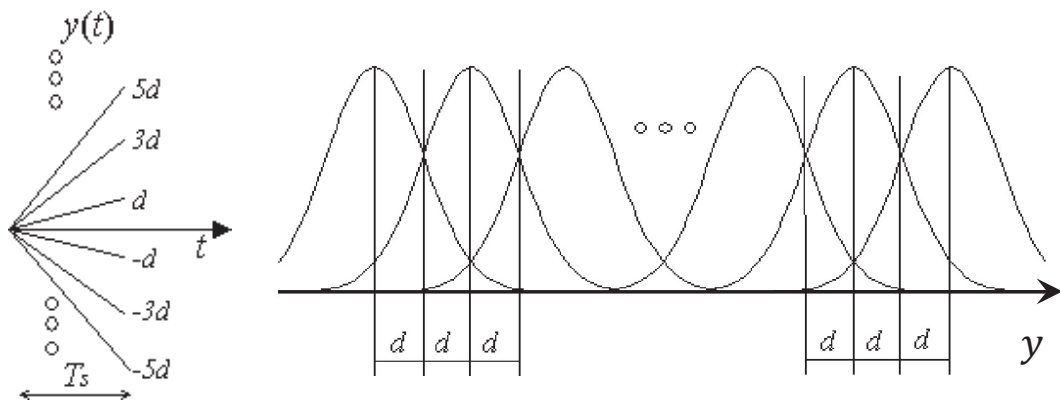


Figura 10.3
Funções densidade de probabilidade no código PAM digital.
 Adaptação da figura 9.3 para transmissão PAM digital M -ária.

O valor de d para o cálculo da probabilidade de erro de símbolo vem:

$$d = \int_0^{\tau_s} \frac{a}{2} c(t) dt = \frac{a}{2} \sqrt{R_s} \tau_s = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 \tau_s} = \sqrt{E_{min}}. \quad (10.10)$$

No cálculo da probabilidade de erro de símbolo tem-se em conta as áreas acima de d à esquerda e à direita, a menos das duas funções densidade de probabilidade dos extremos, cuja área só conta uma vez. A probabilidade de erro de símbolo (SER – *Symbol Error Rate*), vem então, assumindo que todos os símbolos são equiprováveis:

$$SER = \frac{2(M-2)}{M} \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{d^2}{N_o}} \right) + \frac{2}{M} \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{d^2}{N_o}} \right). \quad (10.11)$$

Através das equações (10.10) e (10.11), chega-se a:

$$SER = \frac{(M-1)}{M} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_{min}}{N_o}} \right). \quad (10.12)$$

10.5 Probabilidade de erro de bit

Um símbolo codifica um conjunto de K bits. Para o cálculo da probabilidade de erro de bit em função da probabilidade de erro de símbolo irão admitir-se duas situações na disposição dos bits em cada símbolo: (1) disposição aleatória: um erro de símbolo corresponde a errar de um a K bits de um modo equiprovável; (2) código Gray²³: 1 erro de símbolo corresponde com maior probabilidade ao erro de apenas um bit.

10.5.1 Código aleatório

Se não houver qualquer preocupação em como se dispõe o código de K bits pelos símbolos, pode assumir-se quando se erra um símbolo, que estão errados qualquer número de bits entre um e K . Em média estão errados $(K+1)/2$ bits, pelo que:

$$\frac{1}{SER} \text{ símbolos} \Leftrightarrow \frac{K}{SER} \text{ bits} \Leftrightarrow 1 \text{ símbolo errado} \Leftrightarrow \frac{K+1}{2} \text{ bits errados}, \quad (10.13)$$

²³ Frank Gray, 1887-1969. Americano, físico.

e a BER é dada por:

$$BER = \frac{(K + 1)/2}{K/SER} = \frac{K + 1}{K} \frac{SER}{2}. \quad (10.14)$$

10.5.2 Código Gray

Quando existe um erro de símbolo, a probabilidade de ser decodificado um dos dois símbolos adjacentes (amplitudes adjacentes) é muito maior do que a probabilidade de ser decodificado qualquer outro símbolo. Se houver o cuidado de a símbolos adjacentes corresponderem códigos com apenas um bit diferente, como num código Gray, então quando se erra um símbolo apenas um bit está errado. A tabela 10.1 ilustra o código Gray para quatro bits.

Tabela 10.1
Código Gray de quatro bits.

Se a símbolos adjacentes, com maior probabilidade de erro entre si, corresponderem duas palavras consecutivas que têm apenas um bit trocado, os erros de bit são minimizados

0	0000	4	0110	8	1100	12	1010
1	0001	5	0111	9	1101	13	1011
2	0011	6	0101	10	1111	14	1001
3	0010	7	0100	11	1110	15	1000

Nestas circunstâncias, vem:

$$\frac{1}{SER} \text{ símbolos} \Leftrightarrow \frac{K}{SER} \text{ bits} \Leftrightarrow 1 \text{ símbolo errado} \approx 1 \text{ bit errado}, \quad (10.15)$$

pelo que,

$$BER \approx \frac{SER}{K}. \quad (10.16)$$

Sendo esta disposição mais favorável que a utilização de uma disposição aleatória, assume-se, desde que nada seja dito em contrário, a utilização de um código Gray. A BER vem então, pelas equações (10.6), (10.12) e (10.16):

$$BER = \frac{(M - 1)}{KM} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_{min}}{N_o}} \right) = \frac{(M - 1)}{KM} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{3K}{(M^2 - 1)} \frac{E_b}{N_o}} \right). \quad (10.17)$$

Note-se que, para valores baixos de E_{min}/N_o , deixa de ser válida a aproximação de que, quando ocorre um erro de símbolo, é sempre decodificado um símbolo vizinho, a que corresponde apenas a um erro de bit, deixando a fórmula (10.17) de ser válida. Também uma limitação da potência recebida estabelece um número máximo de bits por símbolo para determinada relação sinal-ruído, de modo que os níveis correspondentes aos diversos símbolos estejam suficientemente espaçados, a fim de garantir determinada probabilidade de erro.

10.6 Código 2B1Q

Um *bom* compromisso entre o desempenho e a complexidade corresponde a utilizar um código PAM digital com dois bits por símbolo (2B1Q – 2 *binary* 1 *quaternary*) e código Gray, apresentado na figura 10.4.

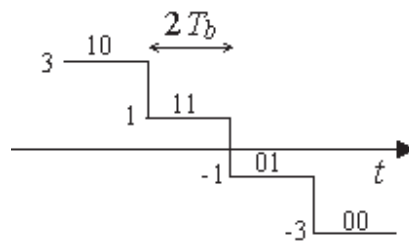


Figura 10.4
Código 2B1Q

Correspondente a PAM digital quaternário ou 4-ária, utilizando código Gray.

Aplicando a equação (10.17) com $K = 2$ bits por símbolo, obtém-se:

$$BER = \frac{3}{8} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{2E_b}{5N_0}} \right). \quad (10.18)$$

A largura de banda vem, pela equação (10.7):

$$B_T = \frac{R_b}{4} (1 + \alpha). \quad (10.19)$$

A energia média por bit vem, pela equação (10.6):

$$E_b = \frac{5}{4} a^2 T_b. \quad (10.20)$$

Obtém-se então metade da largura de banda que a do código PNRZ ($M = 2$), com um aumento *moderado* da complexidade e da *BER*. O recetor ótimo deste código corresponde ao da figura 10.2, com o quantificador/codificador de apenas dois bits em código Gray.

Na figura 10.5 é apresentado o padrão de olho do código 2B1Q com fator de decaimento de zero e distância entre símbolos adjacentes de 2 V, sem ruído de canal. Pode-se verificar os instantes sem distorção a meio do tempo de símbolo, correspondentes aos instantes ótimos de amostragem, com tensões ± 1 V e ± 3 V.

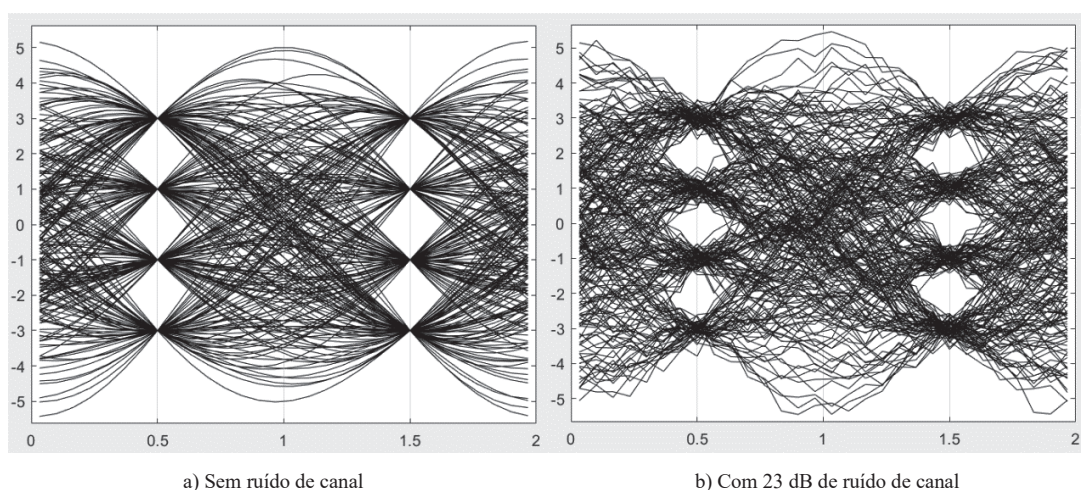


Figura 10.5

Padrão de olho com dois símbolos consecutivos do código 2B1Q

Formatação de pulsos com fator de decaimento $\alpha = 0$ e distância entre símbolos $a = 2$ V.

É possível verificar o ponto ótimo de amostragem, sem interferência intersimbólica, a meio do tempo de símbolo.

O código 2B1Q é utilizado, por exemplo, na Rede Digital Integrada de Serviços (RDIS) entre uma central telefónica e o equipamento de entrada, permitindo dois canais de 64 kbit/s e um canal de 16 kbit/s para sinalização e controlo.

10.7 Capacidade de canal

Assumindo a largura de banda mínima pelo critério de Nyquist ($\alpha = 0$) para transmissão com um instante sem interferência intersimbólica, ocupando toda a largura de banda do canal ($B_T = B_C$), o débito de símbolos corresponde ao dobro da largura de banda do canal de comunicação (equação (10.7)). O débito binário, máximo nestas

condições, $C_{(\text{Hartley})}$, é dependente do número de símbolos diferentes (equações (10.1) (10.3) e (10.7)), sendo dado pela regra de Hartley²⁴:

$$C_{(\text{Hartley})} = R_s K = R_s \log_2(M) = 2B_c \log_2(M). \quad (10.21)$$

O débito binário máximo pode ser limitado pela potência máxima ou pela necessidade de manter uma determinada distância entre símbolos de modo a garantir uma probabilidade de erro de bit máxima (equação (10.17)). Da equação (10.6) vem:

$$S_R = \frac{E_s}{T_s} = \frac{a^2}{12}(M^2 - 1) \Leftrightarrow M^2 = 1 + \frac{12S_R}{a^2}. \quad (10.22)$$

Com estas limitações, das equações (10.21) e (10.22), vem:

$$C_{(\text{Hartley})} = R_s \log_2(M) = B_c \log_2\left(1 + \frac{12S_R}{a^2}\right). \quad (10.23)$$

Note-se que, limitando a potência máxima recebida e a distância mínima entre símbolos (termo mais à direita da equação (10.23)), não se garante que o número de bits por símbolo seja um número inteiro.

Baseado em parte nas ideias de Hartley que datam de 1928, Shannon introduziu em 1948 o conceito de capacidade de canal, um limite teórico, conhecido por Lei de Shannon-Hartley. Para o caso particular de um canal AWGN de banda limitada, Shannon demonstrou que a capacidade de canal, medida em bits por segundo, é semelhante à equação (10.23):

$$C = B_c \log_2(1 + SNR_c) = B_c \log_2\left(1 + \frac{S_R}{N_o B_c}\right). \quad (10.24)$$

O termo capacidade de canal provém do facto de, se o débito binário for inferior à capacidade de canal, ser possível, teoricamente, transmitir com probabilidade de erro de bit arbitrariamente pequena. Se o débito binário for superior à capacidade de canal não é possível transmitir sem erros. Por exemplo, para banda telefónica, com largura de banda de 3400 Hz, para uma relação sinal-ruído no canal de 1023 (30,1 dB), a capacidade de canal é de 34 kbit/s.

²⁴ Ralph Hartley, 1888-1970. Americano, engenheiro eletrotécnico.

Para determinada capacidade de canal pode-se reduzir a largura de banda à custa do aumento da potência transmitida ou vice-versa. Note-se que a capacidade de canal depende linearmente da largura de banda, mas, para se obter o mesmo efeito alterando a potência recebida, é necessário alterá-la exponencialmente. Por exemplo, se a potência recebida aumentar oito vezes a largura de banda é reduzida três vezes, e se a largura de banda aumentar três vezes a potência recebida é reduzida oito vezes.

Shannon não especificou o método de codificação e decodificação capaz de atingir o limite da capacidade de canal, mas a Lei de Shannon-Hartley tem vindo a servir como referência para verificar a eficiência de uma transmissão. Esta comparação pode ser efetuada para transmissão PAM digital M -ária, por exemplo, considerando cada um dos atributos seguintes:

- (1) Débito binário – Para a mesma relação sinal-ruído no canal de comunicação, a relação entre o débito binário máximo em transmissão PAM digital M -ária determinado pela Regra de Hartley (equação (10.23)) e a capacidade de canal dada pela Lei de Shannon-Hartley (equação (10.24)), determina o grau de eficiência em relação ao débito binário;
- (2) Relação sinal-ruído – Para o mesmo débito binário obtido igualando a Lei de Shannon-Hartley (equação (10.24)) e o débito binário máximo em transmissão PAM digital M -ária (equação (10.23)), a relação entre as potências obtidas nas duas situações determina o grau de eficiência em relação à potência recebida. No mesmo canal, esta relação é igual à relação sinal-ruído.

As equações (10.22) da potência, (10.23) do débito binário máximo e (10.17) da probabilidade de erro de bit, correspondem às equações de três dos principais atributos do código PAM digital M -ário. Da sua análise verificam-se compromissos entre estes atributos e a dificuldade da sua otimização simultânea.

11 Discussão sobre códigos de linha

Nos capítulos 7 a 10 foram descritos os principais códigos de linha, binários e M -ário, com uma característica passa-baixo. Constituem atributos dos códigos de linha: a energia média por bit (*esforço*); o débito binário e eficiência espectral (*velocidade*); a probabilidade de erro de bit (*qualidade*); a capacidade de detecção de erros; a capacidade de autossincronização; a presença de componente DC e/ou desvanecimento do sinal; e a complexidade de implementação dos transmissores e recetores (*custo*). Existem claramente compromissos em relação a estes atributos, já que, por exemplo, para diminuir a largura de banda ocupada diminui-se o número de transições por segundo, o que dificulta o sincronismo de símbolo, que por sua vez aumenta a complexidade do recetor. Num outro exemplo, para melhorar a probabilidade de erro de bit pode-se aumentar a energia média por bit.

Para todos os códigos de linha apresentados foram deduzidas as expressões da energia média por bit, da probabilidade de erro de bit e da largura de banda. Para a determinação da largura de banda foi utilizado o critério do primeiro zero espectral, bastante para que a interferência intersimbólica não seja suficiente para afetar o sinal, e o critério de Nyquist, que controla a interferência intersimbólica, mantendo pelo menos um instante sem distorção por símbolo em que o recetor o poderá detetar. Foram também estudados os outros atributos dos códigos de linha.

Foram apresentados os recetores ótimos, realizados com filtro adaptado e detecção segundo o critério de máxima verosimilhança. Estes recetores pressupõem uma transmissão corrompida com ruído aditivo branco e gaussiano (canal AWGN). Tendo sido assumido que os símbolos são equiprováveis, a detecção de máxima verosimilhança é de facto equivalente à detecção ótima com critério de máximo *a posteriori*.

De modo a aumentar a eficiência espectral, foi apresentado o código PAM digital M -ária. Embora à custa do aumento da complexidade, energia média por bit e probabilidade de erros de bit, este código consegue um aumento do débito binário para canais com largura de banda limitada.

De modo a diminuir a probabilidade de erro é possível regenerar o sinal em pontos intermédios do canal de comunicação, por exemplo, nos equipamentos da rede (*e.g. hubs, switches, routers*). Se a atenuação ainda não for demasiada e o sinal ainda não tiver sido muito afetado pelo ruído é possível regenerar o sinal praticamente sem erros. Note-se que não é possível regenerar um sinal analógico, mas apenas amplificá-lo, o que implica amplificar também o ruído.

Na figura 11.1 é apresentada uma comparação entre as probabilidades de erro para diversos códigos de linha binários, função da relação entre a energia média por bit e a potência do ruído por Hertz (E_b/N_0) em decibéis.

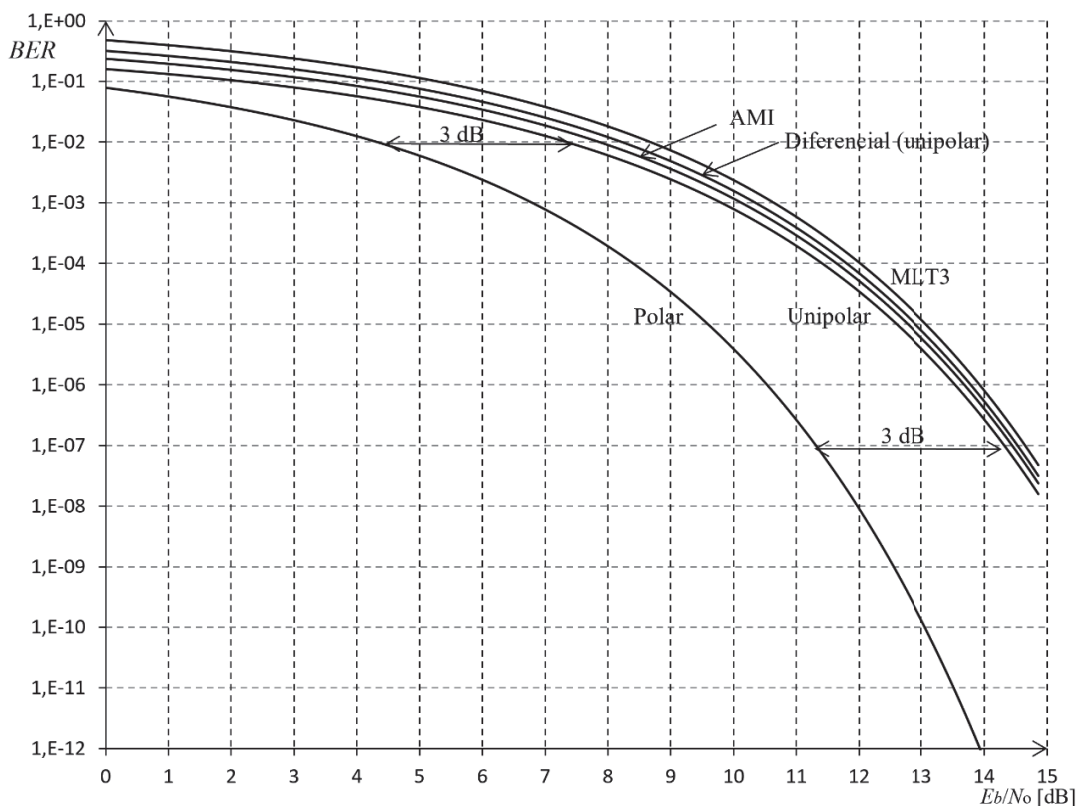


Figura 11.1

BER dos diversos códigos de linha em função da relação sinal-ruído E_b/N_0 .

O melhor desempenho (BER) para a menor relação E_b/N_0 é conseguido pelos códigos polares.

Os códigos unipolares precisam de +3 dB de E_b/N_0 para obter o mesmo desempenho.

Os códigos diferenciais têm o dobro da BER que os códigos não diferenciais correspondentes, para a mesma E_b/N_0 .

O código AMI tem o segundo pior desempenho, mas possui capacidade de deteção de erros.

O código MLT-3 tem o pior desempenho, mas tem a melhor eficiência espectral.

Na figura 11.2 e tabela 11.1 é apresentada uma comparação entre as probabilidades de erro em transmissão PAM digital M -ária para diversos números de bits por símbolo ($M = 2, 4, 8, 16$ bits por símbolo). Pode-se verificar, para a mesma relação E_b/N_0 , o aumento da BER à medida que se aumenta o número de bits por símbolo, mas este aumento beneficia de uma diminuição da largura de banda ocupada (equação (10.7)). Para a mesma probabilidade de erro de bit, quanto maior for o número de bits por símbolo e, portanto, melhor a eficiência espectral, pior será a relação E_b/N_0 .

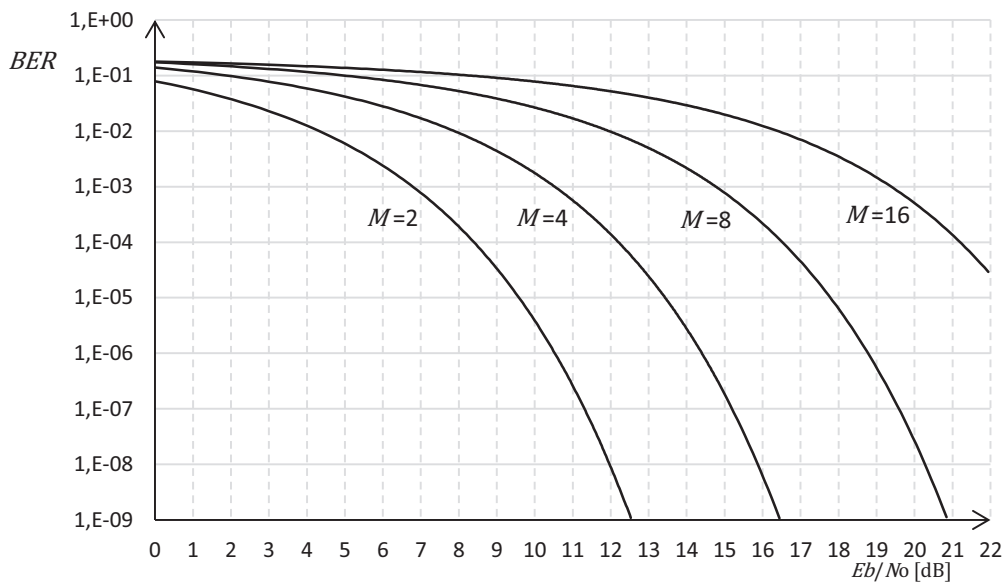


Figura 11.2
BER em função da relação E_b/N_0 , para PAM digital.

Código Gray com $M = 2, 4, 8, 16$ bits por símbolo.
 O aumento do número de bits por símbolo aumenta a eficiência espectral, mas aumenta a probabilidade de erro de bit, mostrando, claramente, o compromisso entre estes dois atributos.

Tabela 11.1
Compromisso entre a eficiência espectral e a BER para PAM digital.
 Para a mesma probabilidade de erro de bit, quanto maior for o número de bits por símbolo e, portanto, melhor a eficiência espectral, pior é a relação E_b/N_0 .
 Para a mesma relação E_b/N_0 , quanto maior for o número de bits por símbolo e, portanto, melhor a eficiência espectral, pior é a probabilidade de erro de bit.

	$M = 2$	$M = 4$	$M = 8$	$M = 16$
eficiência espectral	$2/(1 + \alpha)$	$4/(1 + \alpha)$	$6/(1 + \alpha)$	$8/(1 + \alpha)$
E_b/N_0 dB ($BER = 10^{-6}$)	10,5	14,4	18,8	23,5
BER ($E_b/N_0 = 15$ dB)	$8,9 \times 10^{-16}$	$1,8 \times 10^{-7}$	$7,7 \times 10^{-4}$	2×10^{-2}

Na tabela 11.2 apresentam-se, de um modo comparativo, as vantagens e desvantagens dos códigos de linha apresentados, em relação aos seus atributos.

Tabela 11.2

Códigos de linha com melhor (↑) e pior (↓) desempenho em termos de atributos.

Existem compromissos entre os diversos códigos de linha, não existindo nenhum código com melhor desempenho para todos os seus atributos nem nenhum código com pior desempenho para todos os seus atributos.

	PNRZ	PRZ	UNRZ	Manch.	AMI	NRZI	MLT-3	M-ário
E_b (mesma BER)	↑↑	↑↑	↑	↑↑	-	-	↓	↓↓
BER (mesma E_b)	↑↑	↑↑	↑	↑↑	-	-	↓	↓↓
Eficiência espectral ρ	-	↓	-	↓	-	-	↑	↑↑
Deteção de erros	-	-	-	-	↑↑	-	↑	-
Capacidade de sincronismo	↓	↑↑	↓	↑↑	↑	-	-	↓
Componente DC	-	-	↓↓	↑↑	↑↑	-	↑	-
Desvanecimento	↓	↓	↓↓	↑	↑	↓	↓	↓
Inversão de polaridade	-	-	-	-	↑	↑	↑	-
Complexidade do transmissor	-	-	↑	-	↓	-	↓	↓↓
Complexidade do recetor	↑	↑↑	-	↑↑	↓	↑	↓	↓↓

Apresentam-se seguidamente, conforme refletido na tabela 11.2 e figuras 11.1 e 11.2, algumas características e compromissos dos códigos de linha:

- Os códigos de linha polares (PNRZ, PRZ, Manchester), com símbolos simétricos, obtêm o melhor desempenho em termos da probabilidade de erro, pois são os que apresentam a menor energia para o mesmo afastamento entre símbolos;
- Os códigos de linha unipolares (UNRZ) estão distanciados dos códigos polares de $10 \log_{10} \left(\frac{1}{2} \right) = -3$ dB de relação E_b/N_0 , ou seja, têm o mesmo desempenho para +3 dB (o dobro em linear) de relação E_b/N_0 . Para o mesmo canal, isto significa que os códigos unipolares necessitam do dobro da energia do que os códigos polares, para conseguirem a mesma probabilidade de erro de bit;
- Os códigos diferenciais (NRZI, MLT-3) têm o dobro da probabilidade de erro de bit alcançada pelos códigos não diferenciais correspondentes. No entanto, são insensíveis à polaridade, o que, para certas aplicações, pode ser uma vantagem;

- Os códigos de linha com três símbolos (AMI e MLT-3) têm o pior desempenho em termos da probabilidade de erro de bit dos códigos binários. O código MLT-3, sendo também diferencial, é mesmo o que obtém a pior probabilidade de erro de bit. São, no entanto, os únicos que têm capacidade de detecção de erros, devido às regras de utilização dos três símbolos;
- A probabilidade de erro de bit depende da distância entre símbolos e não dos valores absolutos dos símbolos, da amplitude ou energia do sinal;
- A variação da probabilidade de erro de bit é mais acentuada para valores elevados de E_b/N_0 . Por exemplo, para códigos polares, a diminuição da probabilidade de erro de bit é de apenas 16 vezes quando E_b/N_0 varia 3 dB entre 4 e 7 dB, mas é de 383700 vezes quando E_b/N_0 varia os mesmos 3 dB entre 11 e 14 dB;
- Os códigos de linha com transição a meio do tempo de símbolo (Manchester e PRZ) são autossincronizáveis, simplificando o recetor. Contudo, esta transição faz aumentar a largura de banda, apresentando os códigos menor eficiência espectral;
- O código AMI tem boa capacidade de sincronismo desde que utilize a técnica BNZS, que não aumenta o débito binário, ocupando a largura de banda dos outros códigos NRZ, não autossincronizáveis;
- Os códigos PNRZ e UNRZ, mesmo introduzindo bit de enchimento como técnica para resolver a falta de sincronismo, têm melhor eficiência espectral do que os códigos autossincronizáveis;
- O código MLT-3, devido à regra de transição entre símbolos, apresenta a melhor eficiência espectral de entre os códigos binários. No entanto, exibe a pior probabilidade de erro de bit e maior complexidade do transmissor e do recetor;
- O código MLT-3 tem boa capacidade de sincronismo desde que se utilize o código 4B/5B, que embora aumente o débito binário em 5/4, continua a ter uma melhor eficiência espectral que todos os outros códigos binários;
- Os códigos não autossincronizáveis que incluam técnicas de sincronismo são um bom compromisso entre a eficiência espectral e a capacidade de sincronismo, embora à custa do aumento do atraso e da complexidade do recetor e do emissor;

- Os códigos sem componente DC (Manchester, em que os símbolos têm componente DC nula, e AMI, em que pares de símbolos ao nível lógico “1” têm componente DC nula) são propícios a serem implementados em canais de comunicação sem acoplamento DC;
- O código UNRZ, tendo componente DC, não pode ser utilizado em canais de comunicação sem acoplamento DC;
- Os códigos com componente DC localizada (PNRZ, PRZ, NRZI, MLT-3 e PAM digital *M*-ário) sofrem de desvanecimento, pelo que mesmo sem componente DC, também não são propícios a serem implementados em canais de comunicação sem acoplamento DC;
- Os códigos em que o valor de decisão no recetor ótimo é sempre zero (códigos polares) independentemente da amplitude do sinal recebido e, portanto, da atenuação no canal, tornam o recetor mais simples de implementar;
- O código de linha PAM digital *M*-ário corresponde a compromissos: com o aumento do número de bits por símbolo consegue uma melhor eficiência espectral, mas aumenta a complexidade e a probabilidade de erro de bit para a mesma potência recebida;
- Quanto maior for o débito binário, maior é a necessidade de serem implementados com dispositivos eletrónicos mais rápidos, o que se reflete no aumento do preço dos equipamentos e na energia consumida;
- Para a definição da complexidade dos transmissores e dos recetores é necessário entrar em consideração com vários fatores, tais como: capacidade de autossincronismo ou utilização de técnicas de sincronismo; número de símbolos; simplicidade na definição dos valores ótimos de decisão no recetor; ou débito binário. Sistemas menos complexos são mais baratos e consomem menos energia.

12 Codificação de controlo de erros

Num sistema de comunicação digital existem dois tipos de erros de bit: os erros causados pelos efeitos do canal AWGN; e os erros causados pelas interferências eletromagnéticas esporádicas ou por variações rápidas das condições do próprio canal de comunicação. Os primeiros correspondem a erros aleatórios independentes, como apresentado nos capítulos 9 e 10. Os segundos correspondem a rajadas de erros.

Dependendo do tipo de erros, existem estratégias diferenciadas para, no recetor (descodificador de controlo de erros), os detetar ou corrigir. Na deteção é necessário um *pedido automático de retransmissão da informação* (ARQ – *automatic repeat request*). A correção (precedida de deteção) é realizada no descodificador sem necessidade de retransmitir mais informação (FEC – *forward error correction*).

Em qualquer dos casos, como ilustrado na figura 12.1, é necessário no transmissor (codificador de controlo de erros) introduzir bits com informação redundante, produzindo um aumento do débito binário de R'_b (débito binário da informação) para R_b (débito binário no canal de comunicação). O efeito da codificação para o controlo de erros e respetiva descodificação é a diminuição da probabilidade de erro de bit de BER (devido aos efeitos do canal de comunicação) para BER' (após descodificação de controlo de erros).

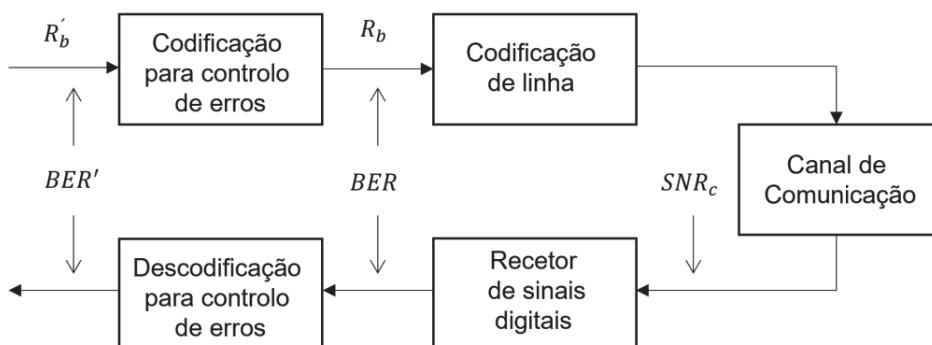


Figura 12.1

Cadeia transmissor-canal-recetor com codificação de controlo de erros.

A codificação de controlo de erros coloca bits de redundância aumentando o débito binário.

No recetor, após deteção ou correção de erros, os bits de redundância são retirados.

Um código composto por um bloco de dimensão fixa é denominado código de bloco. Ao contrário, existem códigos, por exemplo os códigos convolucionais, que estendem a sua atuação a todos os bits transmitidos em vez de estarem limitados a dimensões fixas. Este texto foca apenas os códigos de bloco, que têm à sua entrada k bits de informação, gerando à sua saída n bits, com $k < n$, sendo referido como código de bloco (n, k) . São inseridos $n - k$ bits de redundância para controlo de erros, formando um bloco designado palavra de código (blocos válidos). Os códigos de bloco contêm c palavras de código, resultado das possíveis combinações dos k bits de informação à entrada do codificador:

$$c = 2^k. \quad (12.1)$$

12.1 Atributos dos códigos de controlo de erros

Seguidamente, descrevem-se os atributos dos códigos de controlo de erros, que devem ser ponderados face ao tipo de aplicação desejada.

12.1.1 Razão do código

A razão do código, R_c (*code rate*), é uma das medidas da eficiência do código e mede o número de bits de informação em relação ao número total de bits do código:

$$R_c = \frac{k}{n} = \frac{R'_b}{R_b}, \quad 0 < R_c < 1. \quad (12.2)$$

Com o aumento do número de bits devido à inserção do código, duas situações (ou uma situação intermédia) podem ocorrer em relação à situação sem codificação:

Mantém-se o tempo de transmissão da informação. Aumenta-se o débito binário no canal de comunicação, R_b , de modo a manter o débito de informação, R'_b . Este procedimento diminui a energia por bit, que por sua vez aumenta a probabilidade de erro no canal. A diminuição da relação E_b/N_o é dada por:

$$\frac{E_b}{N_{o\text{ com controlo}}} = R_c \frac{E_b}{N_{o\text{ sem controlo}}}. \quad (12.3)$$

Espera-se que, após descodificação, o valor da probabilidade de erro de bit, BER' , seja mais baixo que o valor sem codificação, o que, dependendo do código e da probabilidade de erro antes da correção, nem sempre acontece.

Mantém-se o débito binário R_b no canal de comunicação. Diminui-se o débito binário da informação e demora-se mais tempo a transmitir:

$$T_{com\ codificação} = \frac{1}{R_c} T_{sem\ codificação}. \quad (12.4)$$

12.1.2 Capacidade de deteção e correção

Existem códigos de controlo de erros que levam a que seja possível afirmar que num conjunto de bits alguns estão errados, mas não se sabe quais. Estes códigos denominam-se códigos de deteção de erros. Em algumas aplicações o recetor descarta esta informação, mas consegue continuar a operar. Noutras aplicações, contudo, tem de existir um mecanismo automático para que o recetor solicite ao transmissor que repita o envio da informação (ARQ).

Se após a deteção se conseguir encontrar a posição dos erros, estes erros podem ser corrigidos diretamente no descodificador (FEC), por inversão do valor lógico do respetivo bit. Estes códigos denominam-se códigos de correção de erros. Ao contrário dos códigos (apenas) de deteção, os códigos de correção não necessitam de ligações bidirecionais e, portanto, não necessitam (ou não podem) esperar que a informação seja retransmitida.

A capacidade de deteção de bits errados, l , mede-se através do número máximo de bits errados capazes de serem sempre detetados. Se este valor for ultrapassado é possível que os erros não sejam detetados. A capacidade de correção de bits errados, t , mede-se através do número máximo de bits errados capazes de serem sempre corrigidos. Se este valor for ultrapassado, duas situações podem acontecer: manter a informação recebida; ou inverter bits corretos originando mais erros.

Para a mesma capacidade de deteção e correção, os códigos de correção necessitam de colocar maior número de bits de redundância no canal do que os códigos de deteção, apresentando uma razão de código pior.

12.1.3 Probabilidade de erro após controlo de erros

Devido à capacidade de deteção e correção de cada código, não é possível detetar e/ou corrigir todos os erros de bit. É necessário, portanto, medir a diminuição da probabilidade de erro após deteção e retransmissão ou correção, BER' em relação à BER , que mede o ganho efetivo da introdução dos códigos de controlo de erros. Assumindo a mesma probabilidade de erro no canal, códigos diferentes, mas com a mesma capacidade de deteção/correção, podem apresentar probabilidades diferentes de erro de bit após controlo de erros, dependendo da razão do código.

A razão do código, por um lado, e a capacidade de deteção/correção e/ou a probabilidade de erro após controlo de erros, por outro, são de difícil otimização em conjunto. Quanto maior (melhor) for a razão do código menor (pior) a capacidade de deteção/correção e vice-versa. Para códigos com a mesma capacidade de deteção/correção, quanto maior (melhor) for a razão de código, maior (pior) a probabilidade de erro de bit após controlo de erros e vice-versa. A solução a implementar corresponde sempre a um compromisso entre estes atributos.

12.1.4 Controlo de erros aleatórios e rajadas de erros

Algumas perturbações no canal de comunicação, como, por exemplo, descargas eletromagnéticas, podem corromper com vários erros seguidos um bloco de dados, sendo este efeito denominado de rajada de erros. Define-se comprimento de uma rajada de erros como o número de bits entre o primeiro e o último erro, inclusive. Dentro da rajada de erros, os bits podem ou não estar errados. Entre duas rajadas de erros consecutivas ocorre pelo menos determinado número de bits corretos, denominado banda de guarda, que faz parte da definição de comprimento da rajada de erros. Na transmissão de um carácter ou pacote, se a banda de guarda for definida como a sua dimensão, o comprimento da rajada de erros corresponde ao número de bits entre o primeiro e o último erro.

Alguns códigos têm a capacidade de detetar ou corrigir erros aleatórios independentes, mas não rajadas de erros. Outros são capazes de detetar rajadas de erros, sendo esta capacidade medida através do comprimento máximo da rajada de erros que é

sempre detetada e pela relação de rajadas de erros não detetadas. Não é possível corrigir diretamente uma rajada de erros, mas através da técnica *interleaving*, apresentada adiante, é possível converter uma rajada de erros em erros isolados, sendo estes detetados ou corrigidos.

12.2 Probabilidade de erro de bloco

Assume-se neste texto que a probabilidade de geração dos símbolos lógicos e a respetiva probabilidade de os descodificar erradamente é a mesma e não depende de erros noutros bits (canal binário simétrico sem memória). Assume-se BER como a probabilidade de errar um bit. Num bloco de n bits, o número de bits errados, independentemente da posição no bloco, segue uma distribuição binomial, com parâmetros n e $p = BER$ (Anexo 12). Assim, a probabilidade de errar i bits é dada por (equação A.12.1),

$$P(X = i) = C_i^n BER^i (1 - BER)^{n-i} \approx C_i^n BER^i. \quad (12.5)$$

A aproximação é válida para i diferente de zero e valores típicos de BER e $nBER$ muito pequenos²⁵, pois $(1 - BER) \approx 1$. A probabilidade de errar i ou mais bits é dada pela soma das respetivas probabilidades (equação A.12.10):

$$P(X \geq i) = \sum_{j=i}^n C_j^n BER^j (1 - BER)^{n-j} \approx C_i^n BER^i, \quad (12.6)$$

ou seja, a probabilidade de errar i ou mais bits é aproximadamente igual à probabilidade de errar i bits (aproximação ao 1.º termo). O número médio de erros (equação A.12.3) é $nBER$. A probabilidade de um bloco de n bits não conter erros é (equação A.12.5):

$$(1 - BER)^n. \quad (12.7)$$

Havendo bits com erros aleatórios com probabilidade BER , é produzido em média um erro em cada $1/BER$ bits. O tempo médio entre erros vem igual a esse valor multiplicado pelo tempo de cada bit, ou seja:

²⁵ Caso esta condição não se satisfaça a aproximação não é válida podendo nesta estimativa os valores de probabilidade serem superiores a um. Esta situação estende-se a todas as fórmulas posteriores com esta simplificação.

$$T_e = \frac{1}{BER} T_b = \frac{1}{R_b BER}. \quad (12.8)$$

Num sistema de deteção de erros com retransmissão (ARQ), assumindo a aproximação ao 1.º termo da equação (12.6), a probabilidade de retransmissão é aproximadamente igual à probabilidade de errar um bit no bloco:

$$P_r = P(X = 1) = C_1^n BER(1 - BER)^{n-1} \approx nBER. \quad (12.9)$$

12.3 Código de bit de paridade

A paridade de um bloco de bits é considerada par se o número de bits com valor lógico “1” for par e considerada ímpar se este número for ímpar. Um código de bit de paridade é constituído por n bits, dos quais $k = n - 1$ são bits de informação, sendo adicionado um bit de modo a garantir a paridade desejada. O código correspondente é do tipo $(n, n - 1)$ ou $(k + 1, k)$.

Este texto assume sempre paridade par. Para $n = 3$, as palavras de código são “000”, “011”, “101” e “110”, correspondendo o último bit ao bit de paridade colocado pelo codificador. No decodificador, caso se receba um bloco com paridade ímpar, como, por exemplo, “010”, conclui-se que foi produzido entre o transmissor e o recetor pelo menos um erro e o bloco deve ser retransmitido.

Caso se produzam dois erros, a paridade vem novamente correta. Por exemplo, caso se transmita “110” e se receba “011”, são produzidos erros no primeiro e terceiro bits, mas o bloco corresponde a uma palavra de código. De facto, só é possível detetar um número ímpar de erros. Assumindo a aproximação da equação (12.5), a probabilidade de o decodificador não detetar erros corresponderá à probabilidade de errar dois bits no bloco de n bits:

$$P_b \approx P(X = 2) = C_2^n BER^2 = \frac{n(n-1)}{2} BER^2. \quad (12.10)$$

Nesta situação estarão errados apenas dois bits em n bits, pelo que a probabilidade de erro de bit após decodificação vem, aproximadamente:

$$BER' \approx \frac{2}{n} P_b \approx (n-1)BER^2. \quad (12.11)$$

Este código tem uma capacidade de deteção de apenas um bit, não sendo capaz de corrigir qualquer bit. Pelo contrário, dado que os bits de informação são $k = n - 1$, a razão do código é a melhor possível para o mesmo n :

$$R_c = \frac{n - 1}{n}. \quad (12.12)$$

O tempo médio entre erros após correção corresponde à aplicação da equação (12.8), substituindo BER por BER' e com débito binário, R'_b , sem os bits de redundância. Este é um tempo médio entre erros, mas note-se que, num código de bit de paridade, os erros sucedem-se aos pares no mesmo bloco.

A melhoria na probabilidade de erro de bit é conseguida à custa da implementação de um sistema de retransmissão e de um maior número de bits transmitidos (bits de paridade e bits retransmitidos).

O código de bit de paridade pode ser utilizado em recuperação de discos rígidos em falha (*disaster recovery*). Por exemplo, se quando da escrita de um bloco cada bit for armazenado num disco diferente, e num disco suplementar for armazenado o respetivo bit de paridade, qualquer disco em falha pode ser recuperado recalculando a paridade dos bits correspondentes dos outros discos.

12.4 Código de repetição

Um código de repetição corresponde a repetir um bit de informação $n - 1$ vezes, produzindo um código $(n, 1)$, também denominado $R(n)$, com n ímpar. Por exemplo, para $n = 5$, as duas palavras de código são “00000” e “11111”.

Na deteção de erros, descodifica-se o bit que ocorre em maioria, pelo que se corrige até $t = (n - 1)/2$ bits. Por exemplo, se, para $n = 5$, for recebido o bloco “01001” é descodificado o nível lógico “0”, pois existe uma maioria de “0” recebidos. Para $(n + 1)/2$ ou mais bits errados, a descodificação produz um erro. A probabilidade de erro vem:

$$BER' \approx C_{\frac{n+1}{2}}^n BER^{\frac{n+1}{2}}. \quad (12.13)$$

A razão do código de repetição ($k = 1$) é dada por:

$$R_c = \frac{1}{n}. \quad (12.14)$$

Para o mesmo n , o código de repetição tem a razão de código menor (pior) possível, pois o numerador da equação (12.14) é sempre $k = 1$. Como contrapartida é o código que consegue corrigir o maior número de erros, ou seja, até metade (exclusive) de n , e detetar o maior número de bits errados, ou seja, $l = (n - 1)$ bits.

Ao contrário do código de repetição, o código de bit de paridade tem a melhor razão de código possível para o mesmo n , mas consegue apenas detetar um erro de bit e não consegue corrigir nenhum erro de bit, encontrando-se estes dois códigos nos dois extremos de razão do código *versus* capacidade de deteção e correção. Na figura 12.2 apresentam-se os blocos possíveis de três bits num espaço tridimensional, em que cada bloco corresponde a um vértice de um cubo. Os pontos a cheio representam as palavras de código. Errar um bit corresponde ao deslocamento numa aresta. O código de repetição (figura 12.2-a) tem maior separação entre palavras de código (três arestas) do que o código de bit de paridade (figura 12.2-b) (duas arestas). No código de bit de paridade, quando existe um erro o bloco recebido posiciona-se num vértice à distância de uma aresta de três palavras de código, todas com a mesma probabilidade, não sendo possível corrigir. No código de repetição, o bloco recebido fica a uma aresta da palavra original e a duas da outra palavra de código, corrigindo-se para a palavra de código correta.

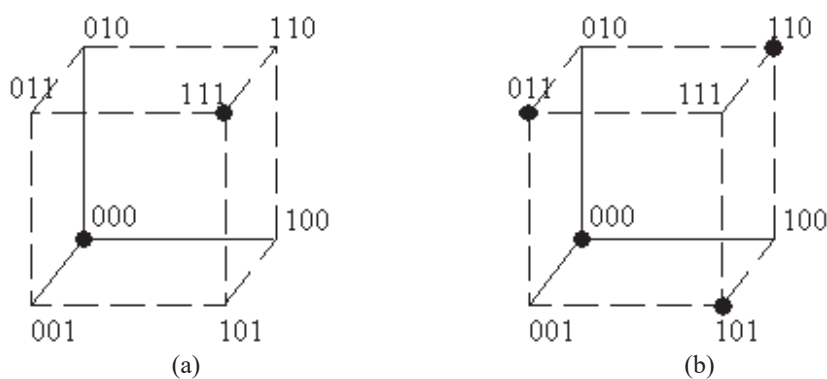


Figura 12.2

Blocos de três bits num espaço tridimensional.

a) Código de repetição b) Código de bit de paridade.

● Palavras de código.

Errar um bit corresponde ao deslocamento numa aresta.

O código de repetição é utilizado no armazenamento de dados que necessitem de alta proteção, como por exemplo os dados de clientes num banco, colocando n discos em paralelo. Quando da escrita a mesma informação é gravada em todos os discos. Quando a informação é lida é aplicada uma regra por maioria de modo a corrigir eventuais erros.

Embora mais dispendioso (má razão do código) que o método de recuperação de falhas com código de bit de paridade, que necessita apenas de mais um disco (boa razão do código), o método de recuperação de falhas com código de repetição consegue suportar a falha simultânea de tantos discos (*disaster recovery*) como a capacidade de correção, continuando o sistema a funcionar. Pelo contrário, para o método de paridade, se um dos discos deixar de funcionar o sistema tem de parar para sua substituição (capacidade de correção de zero).

12.5 Caráter de verificação de bloco

Um bloco de bits pode ser subdividido em sub-blocos, em que cada sub-bloco está protegido através de um bit de paridade. Por exemplo, na transmissão de caracteres ASCII (sete bits), cada carácter pode estar protegido por um bit de paridade, p_x . Este procedimento está ilustrado na figura 12.3, em que cada carácter e o respetivo bit de paridade é colocado em cada linha. Por sua vez, cada coluna, correspondente ao bit com o mesmo peso de cada carácter, está também protegida por um bit de paridade, produzindo um carácter de verificação, c , que dá o nome ao código de carácter de verificação de bloco (BCC – *block check character*).

m_{71}	m_{61}	m_{51}	m_{41}	m_{31}	m_{21}	m_{11}	p_1
m_{72}	m_{62}	m_{52}	m_{42}	m_{32}	m_{22}	m_{12}	p_2
m_{73}	m_{63}	m_{53}	m_{43}	m_{33}	m_{23}	m_{13}	p_3
m_{74}	m_{64}	m_{54}	m_{44}	m_{34}	m_{24}	m_{14}	p_4
m_{75}	m_{65}	m_{55}	m_{45}	m_{35}	m_{25}	m_{15}	p_5
m_{76}	m_{66}	m_{56}	m_{46}	m_{36}	m_{26}	m_{16}	p_6
m_{77}	m_{67}	m_{57}	m_{47}	m_{37}	m_{27}	m_{17}	p_7
c_7	c_6	c_5	c_4	c_3	c_2	c_1	c_0

Figura 12.3

Código de carácter de verificação de bloco.

m – bits de mensagem; p_x – bits de paridade; c – carácter de verificação de bloco.

A razão de código é função do número de colunas (cl) e de linhas (li):

$$R_c = \frac{(cl - 1)(li - 1)}{cl \times li}. \quad (12.15)$$

Seguidamente, apresentam-se situações de deteção e/ou correção de bits:

- um erro de bit – é sempre detetado e a sua posição encontrada pela interseção entre a linha e coluna com paridade errada, pelo que pode ser corrigido;
- dois erros de bit – embora possam escapar à deteção de linha se os erros forem numa linha, não passam na deteção de bloco (coluna) e vice-versa. Dois erros em linhas e colunas diferentes são também detetados. Não é possível corrigir dois erros porque a sua posição fica indefinida entre duas hipóteses (duas diagonais de um retângulo);
- três erros de bit – são sempre detetados. Se os três erros corresponderem a dois erros na mesma coluna e dois erros na mesma linha, apenas uma linha e uma coluna apresentam paridades erradas, confundindo-se com a situação de um erro de bit e a “correção” corresponde de facto a errar um quarto bit;
- quatro erros de bit – embora na maioria das situações se consiga detetar os erros, uma situação de erros não detetados corresponde a quatro erros nos vértices de um retângulo.

Dado que com dois bits errados já não é possível corrigir, a capacidade de correção deste código é de um bit. Dado que com quatro bits errados algumas situações não são detetadas, a capacidade de deteção é de três bits. Este código pode então funcionar ao mesmo tempo como corretor de um bit e detetor de dois ou três bits.

12.6 *Interleaving*

Se o comprimento de uma rajada de erros for *grande*, o número de erros pode com facilidade ser maior que a capacidade de deteção, e principalmente de correção. De modo a resolver esta insuficiência, o *interleaving* (entrelaçamento) é uma técnica capaz de converter rajadas de erros em erros isolados, para que estes sejam detetados ou corrigidos através de um qualquer código de controlo de erros.

O *interleaving* é implementado criando uma matriz, em que os bits são colocados por linha, mas transmitidos por coluna. No recetor, os bits são recolocados na sua ordem original. Os bits que no canal apareciam consecutivos passam a estar distanciados do número de linhas. Se a rajada de erros tiver um comprimento inferior ao número de linhas, as rajadas de erros transformam-se em erros isolados. Na figura 12.4 apresenta-se um exemplo em que os bits são substituídos por letras, para mais fácil demonstração do procedimento.

<i>E</i>	<i>æ</i>	<i>e</i>	<i>m</i>
<i>p</i>	<i>l</i>	<i>o</i>	<i>D</i>
<i>e</i>	<i>T</i>	<i>r</i>	<i>a</i>
<i>n</i>	<i>s</i>	<i>m</i>	<i>i</i>
<i>s</i>	<i>s</i>	<i>a</i>	<i>o</i>
<i>I</i>	<i>n</i>	<i>t</i>	<i>e</i>
<i>#</i>	<i>l</i>	<i>e</i>	<i>a</i>
<i>¶</i>	<i>i</i>	<i>n</i>	<i>g</i>

ExemploDeTransmissaoInterleaving ⇒ Código Original.

EpenslrvxlTssnlieormatenmDaioeag ⇒ Código transmitido com Interleaving.

EpenslrvxlTssnlieormatenmDaioeag ⇒ Código recebido com rajada de erros.

ExemploDeTransmissaoInterleaving ⇒ Código com erros isolados após reconstrução.

Figura 12.4

Exemplo de código com *interleaving*.

O comprimento da rajada de erros é de seis (*rvxlTs*), menor que o número de linhas, oito. A rajada de erros transforma-se em erros isolados espaçados do número de colunas, quatro.

O código BCC pode utilizar *interleaving* se a informação for transmitida por coluna. Uma rajada de erros de comprimento máximo igual ao número de linhas produz apenas um bit errado por carácter e esta situação é verificada através do respetivo bit de paridade.

Para corrigir uma rajada de erros deverão ser colocados os bits de um código de correção em cada linha e transmitida a informação por colunas. Se o código corretor tiver a capacidade de corrigir apenas um bit, o comprimento máximo da rajada de erros corrigida é igual ao número de linhas. Utilizando um código de correção de t bits e considerando li como o número de linhas ou número de blocos do código de correção utilizado, o comprimento máximo da rajada de erros corrigida, b_{max} , é de:

$$b_{max} = t \times li. \quad (12.16)$$

No projeto de um sistema *interleaving*, toma-se em consideração o número de bits do código que se quer utilizar (*número de colunas: $cl = n$*), e a respetiva capacidade de correção, de modo que, dado o comprimento máximo da rajada de erros que se quer corrigir, determinar o número de linhas a partir da equação (12.16). A razão de código é a razão do código de correção utilizado em cada linha.

Se não for já inerente um atraso na transmissão, como, por exemplo, na transmissão de um pacote em redes de computadores, o sistema *interleaving* impõe um atraso correspondente a duas vezes a dimensão do número de bits da matriz, já que no transmissor são necessários todos os bits para os começar a entrelaçar e no recetor é preciso ter acesso a todos os bits para os poder recolocar. Além do aumento da complexidade, o atraso é, pois, a contrapartida a pagar pela utilização do sistema *interleaving* para correção de rajadas de erros.

O *interleaving* é utilizado, por exemplo, no sistema de televisão digital terrestre (TDT), já que sendo um sistema rádio está muito sujeito a interferências e, sendo um sistema unidirecional, não pode ser utilizado com um detetor de erros e a técnica ARQ.

12.7 Descodificação por máxima verosimilhança

Nas secções anteriores apresentaram-se alguns códigos de controlo de erros e métodos para a sua descodificação. Neste subcapítulo apresentam-se os conceitos teóricos que suportam esta descodificação e que serão utilizados na explicação de próximos códigos.

12.7.1 Descodificação por máxima verosimilhança

Dado um bloco (palavra de código com ou sem erros) recebido, b_r , a função de probabilidade condicionada (probabilidade *a posteriori*) de ter sido transmitida a palavra de código c_j , é dada por:

$$P(c_j|b_r) = \frac{f(b_r|c_j)p_{c_j}}{f(b_r)}. \quad (12.17)$$

Recorrendo a um código corretor e utilizando um critério de máximo *a posteriori*, é descodificada a palavra de código, c_j , com maior probabilidade *a posteriori*

(MAP). Assumindo que todas as palavras de código são equiprováveis, o critério de máximo *a posteriori* é equivalente ao critério de máxima verosimilhança (MV), pelo que é descodificada a palavra de código c_j que maximiza a função de verosimilhança:

$$f(b_r|c_j). \quad (12.18)$$

12.7.2 Distância de Hamming e capacidade de deteção e correção

Pela análise do comportamento da função de probabilidade binomial (equação (12.5), com BER e $nBER$, muito pequeno, verifica-se que a função de verosimilhança é tanto maior quanto menor for o número de bits diferentes entre b_r e c_j . Define-se distância de Hamming²⁶ entre dois blocos, $d(b_r, c_j)$, como o número de bits diferentes entre b_r e c_j , em igual posição. Por exemplo, os blocos “001” e “010” terão uma distância de Hamming de 2, porque os 2.º e 3.º bits são diferentes. Para correção de erros, o critério de máxima verosimilhança é equivalente a:

Descodificar a palavra de código que apresente a menor distância de Hamming em relação ao bloco recebido.

Define-se distância mínima de Hamming de um código, d_{\min} , como a menor distância de Hamming entre todas as palavras desse código. Este parâmetro limita a capacidade de deteção e de correção. Se o número de erros for igual a d_{\min} o bloco recebido pode corresponder a outra palavra de código. Como ilustrado na figura 12.5, para detetar erros o número de erros num bloco de n bits tem de ser inferior a d_{\min} .

Como corretor, se o número de erros for igual ou superior a metade de d_{\min} , pode existir outra palavra de código com distância de Hamming menor, e a tentativa de correção dá origem a descodificar uma palavra de código errada. A capacidade de deteção e correção ($\lfloor \cdot \rfloor$ – operador truncatura ao inteiro mais próximo) vêm:

$$\text{Deteção até } l \text{ erros} \quad l = d_{\min} - 1 \quad (12.19 - a)$$

$$\text{Correção até } t \text{ erros} \quad t = \left\lfloor \frac{d_{\min} - 1}{2} \right\rfloor \quad (12.19 - b)$$

²⁶ Richard W. Hamming, 1915–1998. Americano, trabalhou nos Laboratórios Bell e foi professor na Naval Post-graduate School.

O código de bit de paridade tem uma distância mínima de Hamming de dois, pelo que não consegue corrigir qualquer erro e tem uma capacidade de deteção de um bit, pois neste caso ocorrem sempre pelo menos duas palavras de código com distância de Hamming de um. Revendo a figura 12.2-b, duas palavras de código estão à distância de duas arestas ($d_{\min} = 2$) e todas as palavras de código com um erro ficam equidistantes de três palavras de código.

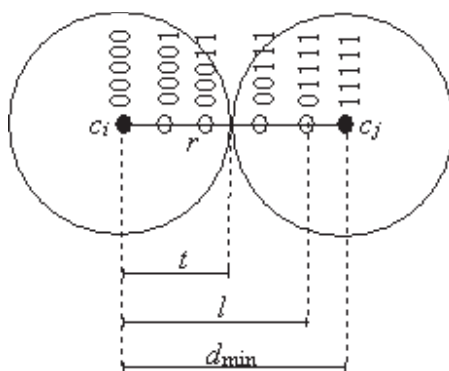


Figura 12.5

Capacidade de deteção e correção.

Exemplo de código com $d_{\min} = 5$.

Bloco recebido r a $d(b_r, c_i) = 2$ bits e $d(b_r, c_j) = 3$ bits.

Código de deteção – uma vez que não é uma palavra de código, são detetados erros.

Código de correção – decodificado c_i , já que é esta palavra de código que lhe fica mais próxima (menor distância de Hamming).

O código de repetição tem uma distância mínima de Hamming de n (de n bits todos ao nível lógico “0” até n bits todos ao nível lógico “1”), pelo que consegue corrigir até $(n - 1)/2$ bits errados (regra por maioria). Para $(n + 1)/2$ ou mais bits errados, a decodificação produz um erro. Revendo a figura 12.2-a para $n=3$, as duas palavras de código estão à distância de três arestas ($d_{\min} = 3$) e um erro fica a uma aresta da palavra de código correta e a duas da outra palavra de código.

O código BCC tem uma distância mínima de Hamming de quatro bits, já que consegue sempre corrigir um bit errado e detetar sempre dois ou três bits errados, mas existem situações de quatro bits errados não detetados. Este valor também podia ser obtido observando que, ao alterar um bit de informação, altera-se as paridades da sua linha e coluna, e altera-se c_0 , paridade dos bits de paridade, sendo alterados ao todo quatro bits.

12.7.3 Limite de Hamming

Como ilustrado na figura 12.6, para um código de dimensão n ser capaz de corrigir um bit, tem de haver por cada uma das $c = 2^k$ palavras de código pelo menos mais n blocos não válidos, cada um correspondendo a um bit trocado em cada uma das n posições. Como ao todo existem 2^n blocos diferentes de n bits:

$$2^n \geq (n + 1) \times 2^k. \tag{12.20}$$

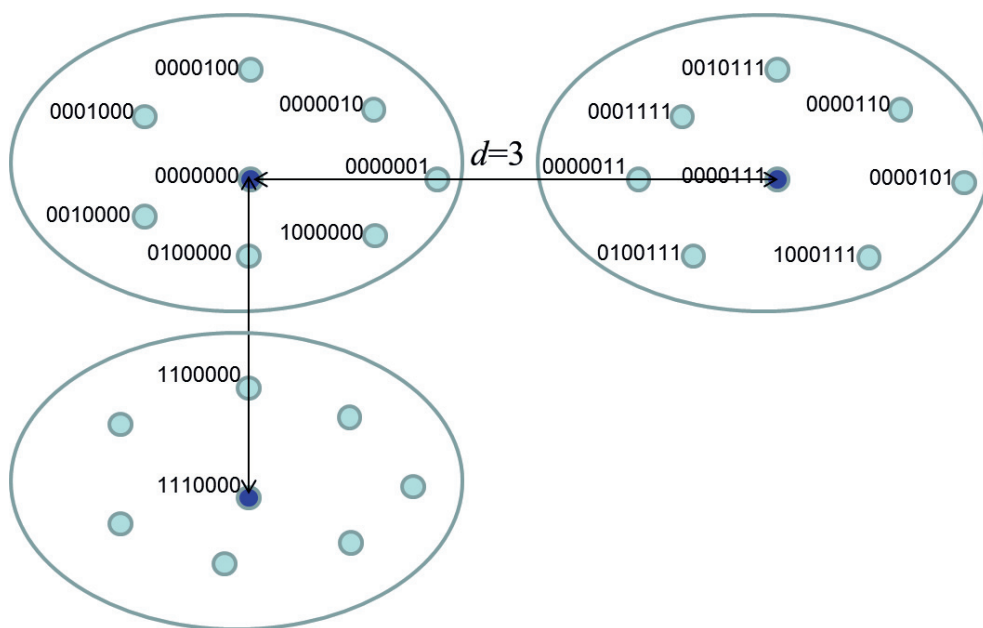


Figura 12.6
Separação de palavras de código, para correção de um bit.

● Palavras de código ● Blocos de n bits.

Existem 2^k palavras de código (não ilustradas na totalidade), cada uma com n blocos à sua volta, correspondendo cada um desses blocos a um bit trocado em cada uma das n posições.

Para que se consiga corrigir até dois bits tem de se acrescentar ao lado direito da inequação (12.20) o número de combinações de n , 2 a 2, e assim sucessivamente até combinações de n , t a t :

$$2^{n-k} \geq (n + 1) + C_2^n + \dots + C_t^n = \sum_{j=0}^t C_j^n. \tag{12.21}$$

Define-se limite de Hamming como o número mínimo de bits de redundância necessários para se corrigir até t bits, que satisfaz a inequação (12.21). Pelo limite de

Hamming depreende-se que quanto maior for a capacidade de correção maior é o número de bits de redundância necessários e, portanto, menor a razão do código. Contudo, nem todos os códigos que satisfaçam esta inequação conseguem de facto corrigir t bits errados, sendo necessário também que o código tenha uma distância mínima de Hamming que respeite a equação (12.19- b).

Um código que utilize o mínimo de bits de redundância para correção de t bits, segundo o limite de Hamming (igualdade da inequação (12.21)), designa-se por código perfeito. Note-se que os códigos de repetição são códigos perfeitos.

12.8 Códigos lineares

Um código linear define-se como aquele em que a adição em aritmética em módulo-2 (\oplus , ou exclusivo bit a bit; paridade par) de quaisquer duas das suas palavras de código dá origem a outra palavra do código. Contém ainda a palavra de código nula, com todos os bits ao nível lógico "0", resultante da soma de qualquer palavra de código com ela própria. O peso de Hamming de uma palavra de código é definido como o número de elementos diferentes de "0" dessa palavra. A distância mínima de Hamming de um código linear corresponde ao menor peso de Hamming de todas as palavras do código, com exceção da palavra de código nula.

Caso haja erros, definidos por um padrão de erro, E , em que:

$$e_i = \begin{cases} "1" & \text{quando é produzido um erro na posição } i \\ "0" & \text{quando não é produzido um erro na posição } i \end{cases}, \quad (12.22)$$

O canal de comunicação e respetivos erros de bit podem ser modelados adicionando em módulo-2 os bits transmitidos e o padrão de erro, como ilustrado na figura 12.7.

$$\begin{aligned} E &= 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \\ T &= \underline{1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0} \oplus \\ R &= 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \end{aligned}$$

Figura 12.7

Simulação dos erros de bit devidos às limitações do canal de comunicação, modelados pelo padrão de erro E .

T – Código transmitido. R – Código recebido. $R = T \oplus E$.

As posições dos bits ao nível lógico "1" no padrão de erro correspondem a erros de bit.

Dado que num código linear a soma de duas palavras de código dá origem a outra palavra de código, se um código for linear e o padrão de erro coincidir com uma palavra de código, o bloco recebido corresponde a outra palavra de código e os erros não são detetados. Esta é uma propriedade importante dos códigos lineares.

Os códigos de paridade par, repetição e BCC são códigos lineares.

12.9 Código de Hamming

Um código perfeito com distância de Hamming mínima de três, capaz de corrigir um bit ou detetar dois bits errados, é o código de Hamming. Para ilustrar este código considere-se uma mensagem de quatro bits, por exemplo “1001”. Este código requer três bits de paridade, num total de sete bits (equação (12.20) com código perfeito), correspondendo a um código H(7,4) (Hamming (7,4)). Coloque-se os bits de informação da esquerda para a direita, respetivamente nas posições m_x :

$$\begin{array}{ccccccc} m_7 & m_6 & m_5 & p_4 & m_3 & p_2 & p_1 \\ 1 & 0 & 0 & x & 1 & x & x \end{array}$$

Os três bits marcados com x, que estão nas posições condizentes com potências de 2, corresponderão aos bits de paridade. Coloque-se agora os bits de mensagem nas posições indicadas na figura 12.6-a, como ilustrado na figura 12.6-b.

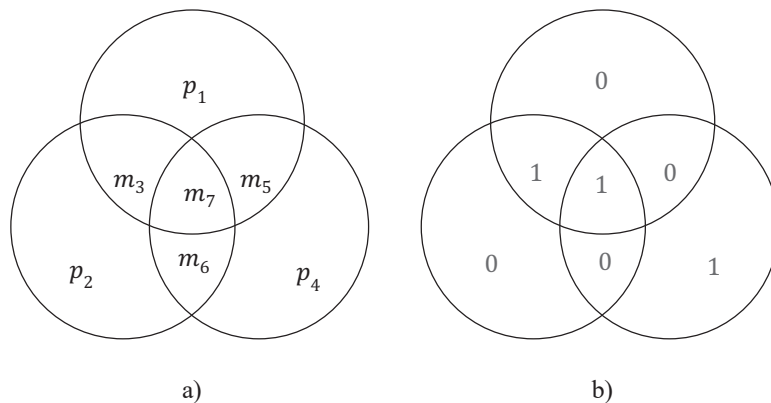


Figura 12.6

Cálculo dos bits de redundância do código de Hamming H(7,4).

a) Diagrama genérico b) Exemplo.

Os bits de paridade correspondem ao cálculo da paridade par dentro do mesmo círculo.

Os bits de paridade correspondem ao cálculo da paridade par dentro do mesmo círculo. Os bits transmitidos, incluindo os bits de paridade, são:

	m_7	m_6	m_5	p_4	m_3	p_2	p_1
bits transmitidos	1	0	0	1	1	0	0

Caso haja um erro, por exemplo em m_6 , os bits recebidos são:

	m_7	m_6	m_5	p_4	m_3	p_2	p_1
bits recebidos	1	1	0	1	1	0	0

O procedimento de correção a ser efetuado no decodificador é o seguinte:

- 1) Recalcula-se os bits de paridade, a partir dos bits de informação recebidos,

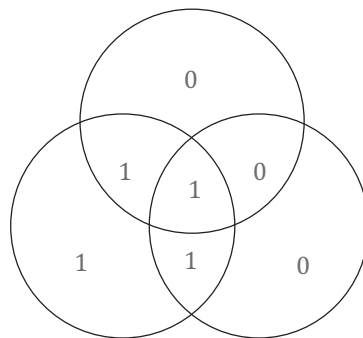


Figura 12.7
Descodificação do código de Hamming (7,4).

No decodificador, recalcula-se os bits de paridade para comparação com os recebidos.

- 2) Adiciona-se (módulo-2) os bits de paridade recebidos e calculados correspondentes (ou, de um modo equivalente, calcula-se a paridade par), produzindo uma síndrome:

	m_7	m_6	m_5	p_4	m_3	p_2	p_1
bits recebidos	1	1	0	1	1	0	0
bits calculados	1	1	0	0	1	1	0
síndrome				1		1	0

- 3) Lendo os bits da síndrome da esquerda para a direita, e convertendo em decimal, $110 \leftrightarrow 6$, então o bit errado é o bit m_6 ;
- 4) Inverte-se o nível lógico do bit errado e retira-se os bits de paridade, decodificando os bits $m_7 m_6 m_5 m_3 = "1001"$, os bits corretos;
- 5) Quando não há erros os bits de paridade recebidos e recalculados são iguais, pelo que a síndrome vem "000", indicando não haver erros.

Note-se, pelo diagrama da figura 12.6-a, que o bit m_6 influencia apenas as paridades p_4 e p_2 exatamente as posições com nível lógico “1” da conversão para binário do seu índice ($6 \leftrightarrow “110”$). Esta situação repete-se para todos os outros bits de informação e é por este facto que a síndrome corresponde ao bit errado.

Pelo mesmo motivo, pode-se calcular as paridades adicionando em módulo-2 as posições em binário dos bits de informação ao nível lógico “1”. Seguindo o exemplo anterior, o bit m_3 influencia apenas os bits de paridade p_2 e p_1 , e o bit m_7 influencia todas paridades, pelo que:

	p_4	p_2	p_1
$7 \leftrightarrow 111$	1	1	1
$3 \leftrightarrow 011$	0	1	1
Paridade	1	0	0

chegando-se exatamente aos mesmos bits de paridade no codificador.

No decodificador, repete-se o procedimento, incluindo os bits de paridade. As paridades que estiverem ao nível lógico “0”, p_2 e p_1 , nada influenciam. As paridades que estiverem ao nível lógico “1”, p_4 , afetam apenas o seu próprio resultado invertendo para o nível lógico “0”. Consequentemente, se a síndrome der zero não existem erros:

	p_4	p_2	p_1
$7 \leftrightarrow 111$	1	1	1
$4 \leftrightarrow 100$	1	0	0
$3 \leftrightarrow 011$	0	1	1
Síndrome $0 \leftrightarrow 000$	0	0	0

Assumindo um erro a síndrome corresponde novamente à posição errada, bastando para corrigir o bit inverter o seu nível lógico. Por exemplo, se o erro for na posição m_6 , do nível lógico “0” para “1”, aparece na adição “1” nas posições da conversão de seis para binário, p_4 e p_2 , e a síndrome assume esse valor:

	p_4	p_2	p_1
$7 \leftrightarrow 111$	1	1	1
$6 \leftrightarrow 110$	1	1	0
$4 \leftrightarrow 100$	1	0	0
$3 \leftrightarrow 011$	0	1	1
Síndrome $6 \leftrightarrow 110$	1	1	0

Caso o erro seja do nível lógico “1” para “0” a sua contribuição é retirada à soma e a síndrome toma também o valor do bit errado. Caso se retirem ou se somem duas parcelas correspondentes a dois erros, a síndrome irá corresponder a um terceiro bit e a “correção” corresponde, de facto, à introdução de um terceiro erro.

Num código de Hamming, qualquer que seja o número de bits de redundância introduzidos é apenas possível corrigir um bit, pois a distância mínima de Hamming é sempre três. A relação entre o número de bits de informação e a dimensão do código torna o código de Hamming perfeito, ou seja, corresponde ao menor valor de n da inequação (12.20), dado por:

$$n = 2^{n-k} - 1. \quad (12.23)$$

Qualquer que seja o código de Hamming, a probabilidade de errar um bloco corresponde à probabilidade de errar dois bits (ou mais, mas assume-se a aproximação ao 1.º termo):

$$P_b \approx C_2^n BER^2 = \frac{n(n-1)}{2} BER^2. \quad (12.24)$$

Nesta situação, o bit “corrigido” é sempre um terceiro bit (mal corrigido), o que corresponde no final a três bits errados em n , pelo que:

$$BER' = \frac{3}{n} P_b = \frac{3}{2} (n-1) BER^2. \quad (12.25)$$

Esta equação é aproximada após a retirada dos bits de redundância. A tabela 12.1 apresenta, para cada número de bits $n - k$ de redundância introduzidos, o respetivo número de bits totais e de informação, a razão do código e a probabilidade de erro após correção. Com apenas $n - k = 1$ bit de redundância o número de bits de informação, k , seria zero, pelo que não é possível construir o código.

Utilizando dois bits de redundância é gerado o código (3,1), correspondente a um código de repetição de três bits. No entanto, este não é considerado como código Hamming, embora gozando de todas as suas propriedades, como por exemplo a fórmula da BER' e o método de codificação e descodificação, sendo definido por:

$$m_3 p_2 p_1.$$

Tabela 12.1

Relação entre bits e razão do código em códigos de Hamming.

Para apenas um bit de redundância o número de bits de informação é zero, o que não é possível. Para dois bits de redundância o código degenera num código de repetição de três bits e não é considerado um código de Hamming. À medida que o número de bits totais aumenta, aumenta a probabilidade de errar dois bits, mas também diminui a razão do código. O número de hipóteses da síndrome, 2^{n-k} , corresponde sempre ao número total de bits n indicando que bit está errado, mais a hipótese zero indicando ausência de erros.

$n - k$	2^{n-k}	n	k	R_c	BER'
1	2	1	0	-	-
2	4	3	1	0,333	$3BER^2$
3	8	7	4	0,571	$9BER^2$
4	16	15	11	0,733	$21BER^2$
5	32	31	26	0,839	$45BER^2$
10	1024	1023	1013	0,997	$1533BER^2$
11	2048	2047	2036	0,998	$6141BER^2$

À medida que o número total de bits do código, n , aumenta, a probabilidade de se errar dois bits e não ser possível a correção aumenta, aumentando a probabilidade de erro após correção, tendo como contrapartida o aumento da razão do código.

Para quatro bits de paridade o código resulta no código H(15,11), gerando 16 hipóteses, sendo possível corrigir 1 de 15 bits:

$$m_{15} m_{14} m_{13} m_{12} m_{11} m_{10} m_9 p_8 m_7 m_6 m_5 p_4 m_3 p_2 p_1$$

O procedimento de codificação e descodificação é idêntico ao do código H(7,4) e idêntico para qualquer código Hamming: na codificação, tomam-se os bits de informação com nível lógico “1” e escrevem-se as respetivas conversões para binário do seu índice. Os bits de paridade correspondem pela ordem ($p_8 p_4 p_2 p_1$) à paridade par dos bits do mesmo peso. Na descodificação repete-se o procedimento incluindo os bits de paridade para encontrar a síndrome, correspondendo a sua leitura em decimal ao bit errado. Caso a síndrome dê zero, não há erros. O número de hipóteses da síndrome, 2^{n-k} , corresponde sempre ao número total de bits, n , indicando que bit está errado mais a hipótese zero indicando a ausência de erro.

12.10 Códigos cíclicos

Os códigos cíclicos são uma subclasse dos códigos lineares, com uma estrutura algébrica bem definida e simples de implementar. O princípio dos códigos cíclicos é o seguinte: considere um número a enviar entre o transmissor e o recetor. No codificador,

faça-se a divisão inteira deste número por um divisor conhecido no codificador e no decodificador. São enviados o número original e o resto da divisão inteira. No decodificador é subtraído o resto e novamente efetuada a divisão. Caso o resto seja zero é considerado que não há erros. Erros em que resulte um resto diferente de zero serão detetados. Aplicando este princípio para transmissão binária, considerando:

$m(x)$ – polinómio de grau $k - 1$ (k bits ou coeficientes do polinómio, tomando valores zero ou um, correspondentes à mensagem a enviar²⁷);

$g(x)$ – divisor ou polinómio gerador, de grau $n - k$;

$r(x)$ – polinómio correspondente ao resto da divisão inteira (em módulo-2) com $g(x)$, de grau $n - k - 1$ (com $n - k$ coeficientes),

tem-se que:

$$\frac{m(x)x^{n-k}}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}, \quad (12.26)$$

e,

$$\frac{m(x)x^{n-k} - r(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)} - \frac{r(x)}{g(x)} = q(x). \quad (12.27)$$

As palavras de código correspondem a $T(x) = m(x)x^{n-k} - r(x)$, equivalente a colocar os $n - k$ bits de $r(x)$ nos bits à direita de $m(x)x^{n-k}$ (somar ou subtrair é idêntico em módulo-2). O polinómio $m(x)$ tem exatamente k bits e são adicionados $n - k$ bits de redundância (resto), pelo que este código corresponde a um código (n, k) .

No decodificador, o polinómio recebido é dividido por $g(x)$, sendo o resto zero como resulta da equação (12.27). Como consequência, todas as palavras de código são múltiplas (módulo-2) do polinómio gerador, $g(x)$. Havendo erros representados pelo padrão de erro da equação (12.22), o que é recebido é $T(x) + E(x)$. Este polinómio é dividido pelo polinómio gerador para se verificar o resto:

$$\frac{T(x) + E(x)}{g(x)} = \frac{T(x)}{g(x)} + \frac{E(x)}{g(x)}. \quad (12.28)$$

²⁷ Para $x=2$ os polinómios correspondem à leitura dos bits em binário.

Como $T(x)/g(x)$ produz resto zero, os erros só não são detetados se $E(x)/g(x)$ não produzir resto zero. Esta situação dá-se quando o padrão de erro é múltiplo do polinómio gerador, coincidindo com uma das palavras de código. A mesma conclusão é tirada da propriedade dos códigos lineares, segundo a qual os padrões de erro correspondentes às palavras de código não são detetados.

Se uma palavra de código for rodada para a esquerda (ou direita), colocando o coeficiente de ordem $n - 1$ (ou 0) na posição do coeficiente de ordem 0 (ou $n - 1$), o resultado é outra palavra de código. É esta característica que dá o nome de códigos cíclicos. É também a estrutura cíclica que torna o código fácil de implementar. Contudo, para garantir que um código de dimensão n é cíclico, duas condições devem ser satisfeitas:

- $g(x)$ tem de ser um fator de $x^n - 1$;
- O coeficiente de ordem zero de $g(x)$ tem de ser 1.

Se a segunda condição não fosse satisfeita, o bit mais à direita do resto e , portanto, das palavras de código, seria sempre 0, independentemente dos bits a transmitir, o que, além de tornar o código não cíclico, é inútil.

12.10.1 Códigos cíclicos como códigos de correção

Além das condições para que o código seja cíclico, para corrigir t bits o número de bits de redundância a introduzir deverá satisfazer o limite de Hamming dado pela equação (12.21). Uma escolha apropriada do polinómio gerador deverá ainda atender à distância mínima de Hamming, satisfazendo a equação (12.19-*b*). A informação sobre quais os bits errados é dada pelo resto, que opera como síndrome.

12.10.2 CRC – Verificação cíclica de redundância

Um código cíclico utilizado como código detetor é denominado código de verificação cíclica de redundância (CRC – *cyclic redundancy check*). Na transmissão de pacotes em redes de computadores, estes atingem uma dimensão de centenas ou mesmo milhares de bits, sendo de dimensão variável. A implementação de códigos corretores para estas dimensões é uma tarefa complexa, nomeadamente na presença de rajadas de

erros. Contudo, para o código funcionar apenas como detetor de erros, basta verificar se o resto é diferente de 0. O resto não opera como síndrome, pelo que não há qualquer restrição ao número de bits de informação em relação à dimensão total do código. Note-se que o código deixa de ser cíclico uma vez que $g(x)$ deixa de ser um fator de $x^n - 1$. Daqui se conclui que, quando se pretende apenas detetar erros, qualquer polinómio gerador pode ser utilizado, independentemente do número de bits a transmitir.

Como já referido, a implementação deste código é possível em *hardware* simples com atrasos de 1 bit e operadores ou-exclusivo, quer seja cíclico ou não. Na figura 12.8, apresenta-se o codificador CRC com $g(x) = x^3 + x^1 + 1$, correspondente ao código Hamming H(7,4). A informação entra no sistema bit a bit em série, podendo ser colocados à medida que vão sendo produzidos (codificador) ou recebidos (descodificador). $r(x) = [r_1 \ r_2 \ r_3]$ corresponde aos bits do resto após inseridos todos os bits de informação.

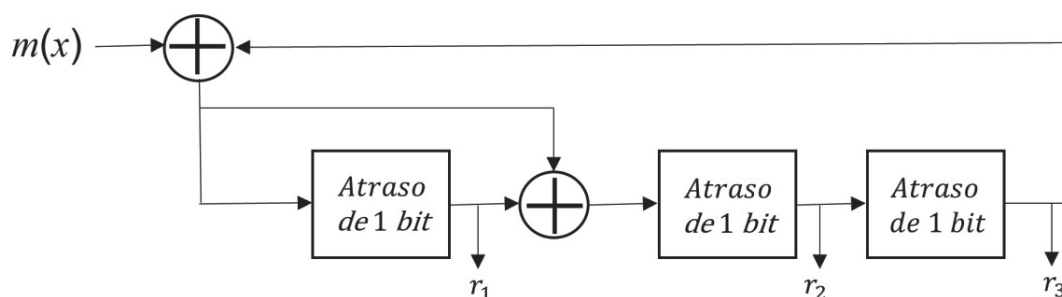


Figura 12.8

Codificador CRC com $g(x) = x^3 + x^1 + 1$ correspondente ao código H(7,4).

$r(x) = [r_1 \ r_2 \ r_3]$ corresponde aos bits do resto após todos os bits serem processados.

Implementado com circuitos simples, atrasos de 1 bit (*flip-flop*) e operadores ou-exclusivo.

Esta implementação pode ser utilizada como corretor de erros, em que a ordem de entrada dos bits é, da direita para a esquerda, $m(x) = [m_3 \ m_6 \ m_7 \ m_5]$.

O descodificador correspondente ao CRC com $g(x) = x^3 + x^1 + 1$, é apresentado na figura 12.9. Devem entrar no sistema os bits pela mesma ordem que no codificador, seguidos pelos bits do resto da divisão, respetivamente da direita para a esquerda, $r(x) = [r_1 \ r_2 \ r_3]$.

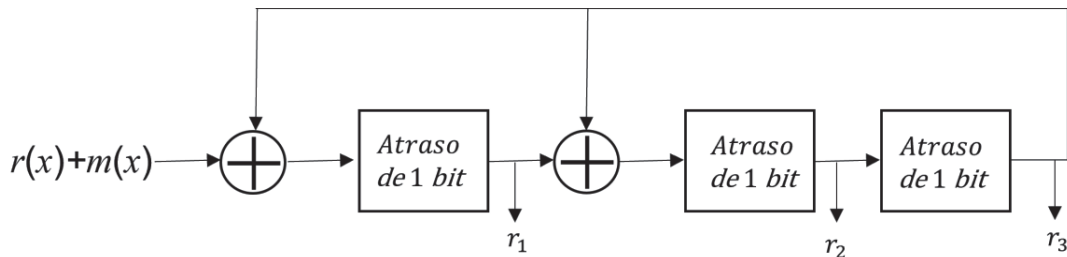


Figura 12.9

Decodificador CRC com $g(x) = x^3 + x^1 + 1$ correspondente ao código H(7,4).

$[r_1 r_2 r_3]$ corresponde aos bits do resto após todos os bits serem processados.

Implementado com circuitos simples, atrasos de 1 bit (*flip-flop*) e operadores ou-exclusivo.

Esta implementação pode ser utilizada como corretor de erros em que a ordem de entrada dos bits é, da direita para a esquerda, $r(x) + m(x) = [r_1 r_2 r_3 m_3 m_6 m_7 m_5]$. O resto da divisão corresponde à síndrome com $p_1 = r_1$, $p_2 = r_2$ e $p_3 = r_3$.

12.10.3 CRC – Detecção de rajadas de erros

Uma das grandes vantagens do código CRC é a capacidade de deteção de rajadas de erros. Segundo a equação (12.28), não se deteta erros se o padrão de erro for múltiplo do polinómio gerador. Relembrando que uma rajada de erros começa e acaba sempre com um erro, existem três casos a serem considerados:

- (Situação 1) Para rajadas de erros de comprimento menor ou igual ao grau $(n - k)$ do polinómio gerador $g(x)$ não poderão corresponder aos seus múltiplos e são todas detetadas;
- (Situação 2) Para rajadas de erros de comprimento $(n - k + 1)$ existe apenas um padrão de erro múltiplo de $g(x)$, que coincide exatamente com $g(x)$, em $2^{(n-k-1)}$ padrões de erro possíveis, devidas a $(n - k + 1) - 2$ bits no interior da rajada de erros. Assumindo que estes padrões são equiprováveis, a relação de rajadas de erros não detetadas, definida como a relação entre o número de rajadas de erros não detetadas e o número total de rajadas, vem:

$$\frac{1}{2^{(n-k-1)}} = 2^{-(n-k-1)}. \quad (12.29)$$

- (Situação 3) Para rajadas de erros de comprimento $(n - k + 2)$ existe apenas um múltiplo de $g(x)$ em $2^{(n-k)}$ padrões de erro possíveis, devidas a $(n - k + 2) - 2$ bits no interior da rajada. Por cada bit que se aumenta no comprimento da rajada, o número de padrões de erro diferentes duplica, mas também duplica o número de múltiplos de $g(x)$, mantendo-se a relação $2^{-(n-k)}$.

A relação total de rajadas de erros não detetadas numa trama (*BEDR – Burst Error Detection Rate*) entre o número de rajadas de erros não detetadas e o número total de rajadas de erros, corresponde ao valor médio das três situações anteriores. Dado que o somatório de padrões de erro da situação 1 iguala os da situação 2, o seu valor médio iguala o da situação 3. A relação de rajadas de erros não detetadas, *BEDR*, assumindo que todas as dimensões de rajadas de erros e todos os padrões de erro são equiprováveis, vem:

$$BEDR = \frac{\text{número de rajadas de erros não detetadas}}{\text{número total de rajadas}} = 2^{-(n-k)}. \quad (12.30)$$

A dimensão do polinómio gerador é, pois, um parâmetro importante que determina o comprimento das rajadas de erros a detetar. Com o aumento da dimensão $(n - k)$ do polinómio gerador a razão do código diminui. Contudo, aumenta o comprimento mínimo $(n - k)$ das rajadas de erros sempre detetadas e diminui, segundo a equação (12.30), a relação de rajadas de erros não detetadas. Note-se ainda que, mesmo para um polinómio gerador com uma ordem moderada, é detetada a maioria dos padrões de erro.

Os códigos de bit de paridade, repetição e Hamming são códigos cíclicos e podem ser implementados, alternativamente ao anteriormente apresentado, através do polinómio gerador adequado. Apresentam-se seguidamente exemplos de polinómios geradores, incluído o código de Golay²⁸ (23, 12), com distância mínima de Hamming de 7 bits, único código perfeito conhecido para correção de três bits:

²⁸ Marcel Golay, 1902-1989. Suíço, matemático e físico.

– Paridade	$x+1$	
– CRC-5 USB	x^5+x^2+1	
– Hamming (7,4) ($m_5 m_7 m_6 m_3$)	x^3+x+1	
– Hamming (15,11)	x^4+x+1	
– CRC8 ITU-T	$x^8+x^7+x^3+x^2+1$	(12.31)
– CRC16 ITU-T	$x^{16}+x^{12}+x^5+1$	
– CRC16 (EUA)	$x^{16}+x^{15}+x^2+1$	
– Código de Golay (23, 12)	$x^{11}+x^9+x^7+x^6+x^5+x+1$	

Os códigos CRC são utilizados por exemplo na interface USB (*Universal Serial Bus*), na deteção de erros em ficheiros do tipo ZIP e em redes de computadores.

12.11 IP Checksum

Um código robusto de deteção de erros, embora não linear, é o código IP *checksum* (soma de verificação), utilizado na deteção de erros dos cabeçalhos do protocolo TCP/IP. Considere-se que se divide os bits de informação em sub-blocos, M_i , com dimensão $(n - k)$ bits. O *checksum* corresponde ao *complemento para um* (negação) da adição a $(n - k)$ bits em *complemento para um* de todos os sub-blocos:

$$CS = \sim X = \sim(M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + \dots + M_j). \quad (12.32)$$

A adição em *complemento para um* tem a mesma dimensão das parcelas, qualquer que seja o número de parcelas, pois, ao contrário da adição vulgar, os bits de arrasto finais são adicionados aos bits menos significativos. O *checksum* tem, portanto, $(n - k)$, bits correspondendo aos bits de redundância. A palavra de código é constituída pelos bits de informação e pelo *checksum*.

No decodificador, repete-se o procedimento do codificador, incluindo o *checksum*. Correspondendo o *checksum* ao *complemento para um* da adição em *complemento para um*, o resultado é 0:

$$\sim(X + CS) = \sim(X + \sim X) = 0. \quad (12.33)$$

Caso este valor não seja zero é porque foram produzidos erros entre o transmissor e o recetor e a informação deve ser retransmitida.

A adição em *complemento para um* goza das propriedades comutativa e associativa da adição vulgar:

$$\begin{aligned} M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + \dots + M_j &= \left(\left(\left((M_1 + M_2) + M_3 \right) + M_4 \right) + \dots + M_j \right) \\ &= (M_1 + M_2) + (M_3 + M_4) + \dots + M_j \end{aligned} \quad (12.34)$$

Estas propriedades podem ser utilizadas para diminuir a complexidade na implementação, quer em *hardware* quer em *software*, nomeadamente efetuando a adição aos pares ou em paralelo.

O código IP *checksum*, usado em redes de computadores, utiliza sub-blocos de dimensão de 16 bits.

12.12 Discussão sobre códigos de controlo de erros

Foram apresentados alguns dos principais códigos de bloco de controlo de erros e suas limitações, sendo os seus atributos sintetizados na tabela 12.2.

Tabela 12.2
Comparação dos codificadores de controlo de erros em termos de atributos.
Como se pode verificar, existem compromissos entre os diversos códigos, não existindo nenhum código com melhor desempenho para todos os atributos.

Código	Deteção de rajadas de erros	d_{\min} [bit]	l [bit]	t [bit]	R_c	BER'
Paridade	Não	2	1	0	$\frac{n-1}{n}$	$(n-1)BER^2$
Repetição	Não	n	$n-1$	$\frac{n-1}{2}$	$\frac{1}{n}$	$C_{\frac{n+1}{2}}^n BER^{\frac{n+1}{2}}$
BCC	Sim	4	3	1	$\frac{(cl-1)(li-1)}{cl \times li}$	-
Hamming	Não	3	2	1	-	$\frac{3}{2}(n-1)BER^2$
CRC	Sim $n-k$	-	Sim	-	-	-
IP-checksum	Não	-	Sim	0	-	-

Na escolha de um código de controlo de erros é necessário levar em conta os seus atributos: razão de código, medida da quantidade de redundância introduzida; capacidade de deteção e correção, medida do número de erros que um código é capaz de

detetar e corrigir; probabilidade de erro de bit após controlo, medida efetiva do ganho da introdução do código; e capacidade de deteção de rajadas de erros.

Todos os códigos podem operar como detetores de erros, mas só alguns operam como corretores. Estão neste último caso os códigos BCC, Repetição e Hamming.

O código BCC pode funcionar ao mesmo tempo como corretor de um bit e detetor de dois bits. Se houver três bits errados pode acontecer que o decodificador altere um bit correto, mantendo os bits errados.

Dos códigos de controlo de erros apresentados, apenas os códigos de repetição e de Hamming têm o número de bits à entrada (k) do codificador fixos. Em todos os outros códigos é possível utilizar à entrada do codificador um número arbitrário de bits, o que os torna flexíveis no caso do envio de pacotes de bits de dimensão variável. No caso dos códigos de Hamming é sempre possível escolher um número n de bits a transmitir, conforme a tabela 12.1, e preencher, por exemplo, com “0” os k bits correspondentes, sem os transmitir. Por exemplo, para k entre 1014 e 2036, pode-se ter uma trama com n igual a 2047 e 11 bits de redundância. Este procedimento, embora com uma relação do código bastante boa, é, no entanto, pouco eficiente e permite apenas detetar 2 bits errados ou corrigir um bit.

Como código para lidar com rajadas de erros foi apresentado o código CRC e calculada a respetiva relação de rajadas de erros não detetadas, que funciona como medida de qualidade da transmissão na presença deste tipo de erros. Quanto maior for a ordem do polinómio gerador, maior é a dimensão das rajadas detetadas e menor a relação de rajadas não detetadas.

Foi ainda apresentado o *interleaving*, um procedimento para lidar também com rajadas de erros, mas utilizando códigos para erros aleatórios. O *interleaving* não é um código uma vez que não acrescenta redundância, mas devido à ordem com que são enviados os bits transforma rajadas de erros em erros aleatórios e, através do código de controlo de erros apropriado, estes podem ser detetados ou corrigidos. A razão do código final é a razão do código detetor ou corretor utilizado. O código BCC pode ser utilizado juntamente com o procedimento *interleaving* como detetor de rajadas de erros.

Como resultado do limite de Hamming dado pelo mínimo da inequação (12.21), quanto maior o número de bits a corrigir maior o número de bits redundantes a colocar, piorando a razão do código. Por exemplo, num código de repetição, como mostrado na figura 12.10, assumindo a mesma BER no canal de comunicação, quanto maior for o número de bits repetidos mais bits se conseguem corrigir, mas a razão do código decai também muito rapidamente.

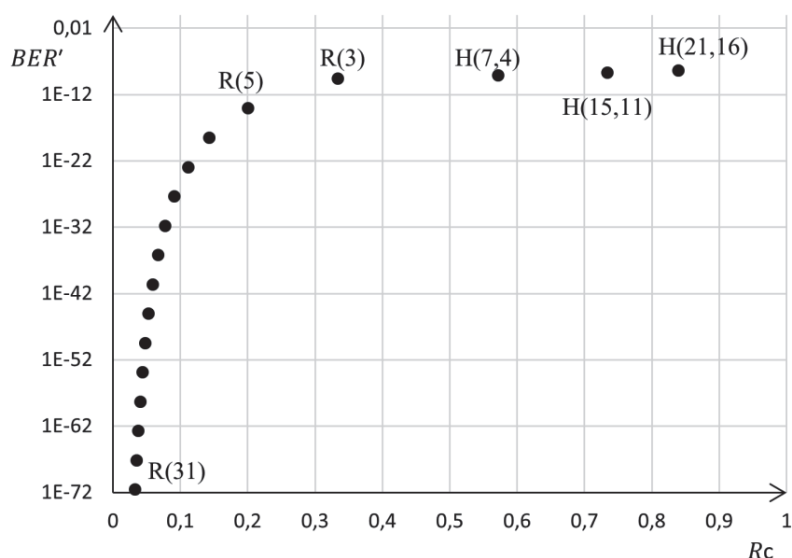


Figura 12.10

Desempenho dos códigos de repetição e códigos de Hamming.

Exemplo com $BER=10^{-5}$. A probabilidade de erro após correção é tanto maior (pior) quanto maior (melhor) for a razão do código e vice-versa.

Através do limite de Hamming, pode-se verificar o compromisso entre a razão do código e a probabilidade de erro após controlo de erros. Assumindo a mesma probabilidade de erro no canal, códigos diferentes, mas com a mesma capacidade de correção, podem apresentar probabilidade de erro após correção diferente, dependendo da razão do código. É o caso dos códigos de Hamming (incluindo o código de repetição de três bits) que têm, todos, capacidade de correção de um bit, mas apresentam probabilidades de erro após correção diferentes, como mostrado na figura 12.10, sendo melhores (menor probabilidade de erro) para razões de código piores (menor). Estes códigos, mantendo a capacidade de corrigir um bit, melhoram a razão do código à

medida que vão protegendo maior número de bits de informação, pois a probabilidade de existir um bit de erro é diretamente proporcional à dimensão do bloco.

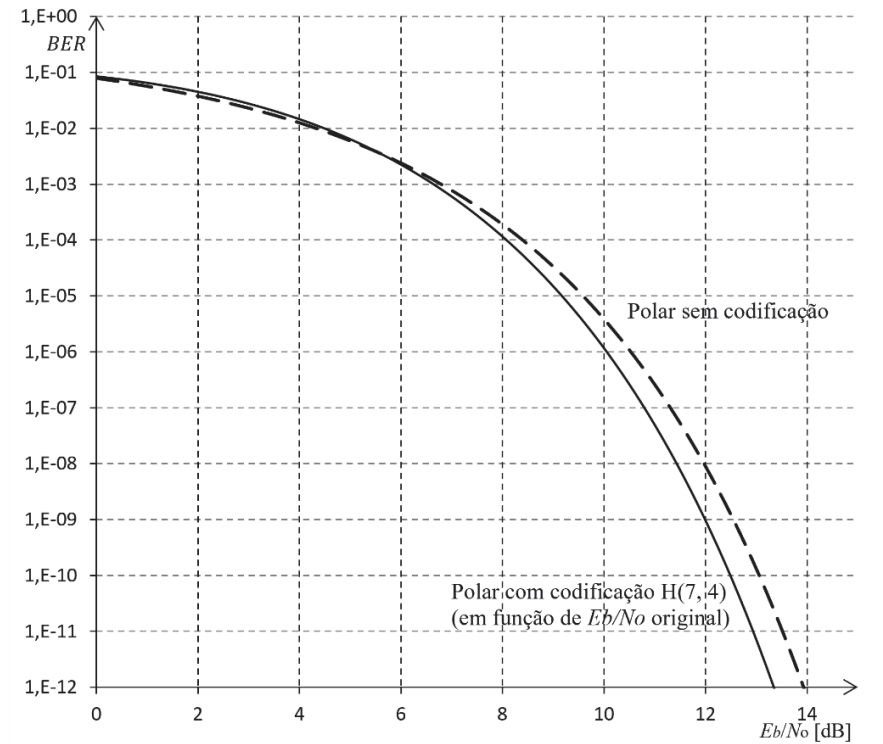


Figura 12.11

Desempenho do código H(7,4) com a relação E_b/N_0 .

Mantendo a amplitude dos símbolos, a BER no canal vai aumentar pois a energia média por bit diminui ao aumentar o débito binário. Só é rentável utilizar o código de correção H(7,4) e código de linha polar, para valores de E_b/N_0 acima dos 5,6 dB.

A codificação de controlo de erros introduz bits de redundância. Assumindo que se quer manter o débito binário dos bits de informação, vai ter de se aumentar o débito binário no canal e, mantendo amplitude dos símbolos, ou seja, a potência, a energia por símbolo diminui. Como consequência a probabilidade de erro no canal vai aumentar, mas espera-se que, após correção, o valor da probabilidade de erro seja mais baixo que o valor sem codificação. Esta melhoria, contudo, só acontece para códigos com uma razão de código que não seja demasiado baixa, ou seja, que não faça diminuir demasiado a energia por bit. Para o código H(7,4), com razão de código de 0,57, como se pode verificar na figura 12.11, só há vantagens na sua utilização acima dos 5,6 dB de relação E_b/N_0 .

Anexos

Principais Equações

Perguntas Teóricas

Exercícios Resolvidos

Exercícios Propostos

Exercícios em Ambiente de
Programação

Anexo 1 – Estimação estatística da potência de um sinal

Assumindo um sinal $x(t)$, com função densidade de probabilidade das amplitudes $f(x)$, verifica-se que o seu valor médio corresponde à componente contínua e o valor esperado de segunda ordem corresponde à potência do sinal:

$$\mu_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx, \quad (\text{A. 1.1})$$

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx. \quad (\text{A. 1.2})$$

Tem-se ainda que:

$$P_x = \mu_x^2 + \sigma_x^2 = P_{xDC} + P_{xAC}. \quad (\text{A. 1.3})$$

em que P_{xDC} é a potência da componente contínua e P_{xAC} a potência da componente variável. Se a componente DC for 0 V, o que acontece na maioria dos sinais de interesse:

$$P_x = \sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - 0)^2 f(x) dx. \quad (\text{A. 1.4})$$

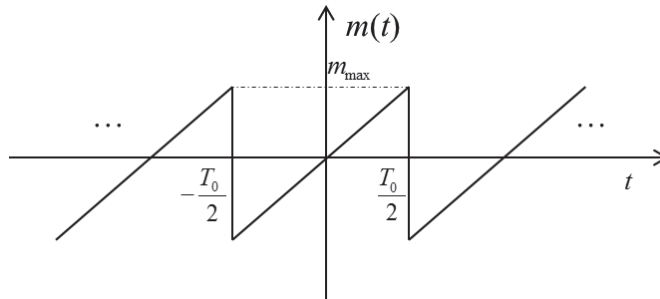
Estes conceitos podem ser estendidos a sinais discretos:

$$\mu_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} x[n] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx, \quad (\text{A. 1.5})$$

$$P_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} x^2[n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx. \quad (\text{A. 1.6})$$

O que estas equações traduzem é que não é necessário conhecer um sinal em todos os instantes, mas apenas a sua função densidade de probabilidade das amplitudes, para estimar a componente contínua e a potência. Esta conclusão é de extrema utilidade quando se analisam sinais aleatórios como o ruído (*e.g.* com distribuição de amplitudes uniforme ou normal).

Exemplo: cálculo do valor da componente contínua e da potência de um sinal *dente de serra*, $m(t)$, com período T_0 e amplitude m_{max} .

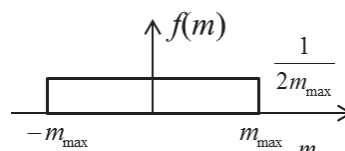


No domínio do tempo, uma vez que o sinal é periódico, o valor médio é dado por:

$$m_{DC} = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \frac{2m_{max}}{T_0} t dt = \frac{2m_{max}}{2T_0^2} t^2 \Big|_{-T_0/2}^{T_0/2} = \frac{m_{max}}{T_0^2} \left(\frac{T_0^2}{4} - \frac{T_0^2}{4} \right) = 0. \quad (\text{A.1.7})$$

$$P_m = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \left(\frac{2m_{max}}{T_0} \right)^2 t^2 dt = \frac{4m_{max}^2}{3T_0^3} t^3 \Big|_{-T_0/2}^{T_0/2} = \frac{4m_{max}^2}{3T_0^3} \left(\frac{T_0^3}{8} + \frac{T_0^3}{8} \right) = \frac{m_{max}^2}{3}. \quad (\text{A.1.8})$$

Uma vez que as amplitudes do sinal *dente de serra* têm distribuição uniforme entre m_{max} e $-m_{max}$:



$$m_{DC} = \int_{-\infty}^{\infty} m f(m) dm = \frac{1}{2m_{max}} \int_{-m_{max}}^{m_{max}} m dm = \frac{m^2}{4m_{max}} \Big|_{-m_{max}}^{m_{max}} = \frac{m_{max}^2 - m_{max}^2}{4m_{max}} = 0. \quad (\text{A.1.9})$$

$$P_m = \int_{-\infty}^{\infty} m^2 f(m) dm = \frac{1}{2m_{max}} \int_{-m_{max}}^{m_{max}} m^2 dm = \frac{m^3}{6m_{max}} \Big|_{-m_{max}}^{m_{max}} = \frac{m_{max}^3 + m_{max}^3}{6m_{max}} = \frac{m_{max}^2}{3}. \quad (\text{A.1.10})$$

Verifica-se, como nas equações (A.1.1) e (A.1.2), que o cálculo no domínio do tempo ou no domínio das amplitudes dá valores iguais.

Anexo 2 – Decibéis

O decibel (dB) é uma unidade que expressa a relação entre duas grandezas físicas, geralmente entre duas potências (S_1 e S_2), através de uma escala logarítmica, sendo definido como:

$$10 \log_{10} \left(\frac{S_1}{S_2} \right). \quad (\text{A. 2.1})$$

O decibel corresponde a um décimo de Bel, nome atribuído em homenagem ao fundador da companhia de telefones Bell (1877), nos EUA. Seguidamente apresentam-se utilizações típicas do decibel:

Relação sinal-ruído – Medida de qualidade entre dois sinais analógicos que deveriam ser iguais, mas em que um deles (normalmente o sinal de saída de um sistema) está contaminado com ruído aditivo. Mede-se assim a qualidade através da *SNR* (*Signal to noise ratio*), relação entre a potência do sinal (P) e a potência do ruído (N):

$$SNR_{dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{P}{N} \right). \quad (\text{A. 2.2})$$

Atenuação – Relação entre a potência de entrada e a potência de saída de um sistema que atenua um sinal, por exemplo, um canal de comunicação, em que a potência do sinal no recetor, S_R , é menor que a potência no transmissor, S_T :

$$A_{t_{dB}} = 10 \log_{10} \left(\frac{S_T}{S_R} \right) = 10 \log_{10}(A_t), \quad (\text{A. 2.3})$$

em que A_t é a atenuação de potências em relação linear.

Ganho – Relação entre a potência de saída (S_o) e entrada (S_i) de um sistema (*e.g.* amplificador) que amplifica um sinal:

$$G_{dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{S_o}{S_i} \right) = 10 \log_{10}(G) = 20 \log_{10} \left(\frac{v_o}{v_i} \right), \quad (\text{A. 2.4})$$

considerando v_o e v_i respetivamente como as tensões de saída e entrada do sistema (assumindo sobre a mesma carga).

Decibel como valor absoluto

Um valor de potência é expresso em relação a um valor de referência, como por exemplo 1 W, dando origem à unidade dBW:

$$S_{dBW} = 10 \log_{10} \left(\frac{S}{1} \right), \quad (\text{A. 2.5})$$

com S expresso em Watt. Note-se que, por exemplo, uma potência de 1 W corresponde a 0 dBW, 2 W a 3 dBW, 10 W a 10 dBW e 1 mW a -30 dBW. Sinais com potência menor que 1 W tornam o valor em dBW negativo, o que é evitado tomando como referência 1 mW em vez de 1 W, definido como dBm (ou mesmo 1 μ W, definindo-se como dB μ):

$$S_{dBm} = 10 \log_{10} \left(\frac{S}{10^{-3}} \right). \quad (\text{A. 2.6})$$

Para converter potências em dBW para dBm tem-se que:

$$S_{dBm} = 10 \log_{10} \left(\frac{S}{10^{-3}} \right) = 10 \log_{10}(S) + 10 \log_{10} \left(\frac{1}{10^{-3}} \right) = S_{dBW} + 30. \quad (\text{A. 2.7})$$

As principais vantagens da utilização do decibel são:

– O resultado dos ganhos (ou atenuações) de sistemas consecutivos corresponde à sua soma (ou subtração) em decibéis, e não à multiplicação (ou divisão);

$$S_{odBW} = 10 \log_{10} \left(\frac{S_o}{1} \right) = 10 \log_{10}(S_i G) = S_{idBW} + G_{dB}; \quad (\text{A. 2.8})$$

$$S_{RdBW} = 10 \log_{10} \left(\frac{S_R}{1} \right) = 10 \log_{10} \left(\frac{S_T}{A_t} \right) = S_{TdBW} - A_{t dB}. \quad (\text{A. 2.9})$$

– Transforma números muito pequenos ou muito grandes em números mais fáceis de operar;

– Na acústica, está mais próxima da sensibilidade do ouvido humano, que tem uma resposta logarítmica da sensação em relação ao nível de pressão sonora. Tem como referência o limiar de sensibilidade humana a 1 kHz, 20 μ N/m² ou 20 μ Pa. Denominado dB SPL (*sound pressure level*).

Anexo 3 – Algoritmo de quantificação ótima

Entradas:

Número L de valores de quantificação;

Histograma normalizado dos valores de entrada, $m_i, i = 1:k \quad k \gg L$;

Histograma normalizado dos valores de entrada, $f_M(m_i), i = 1:k$.

Índice de distorção ε ;

Inicialização:

1) Calculam-se arbitrariamente L níveis de quantificação

$$v_j, j = 1:L; \text{ (e.g.: quantificação uniforme);}$$

2) Assume-se a potência do ruído de quantificação da iteração $-1, \sigma_q^2(-1) = \infty$;

3) Coloca-se a ordem de iteração $n = 0$;

Iteração:

1) Calculam-se os espaços $S_j, j = 1:L$ com $m_i \in S_j$ se,

$$(m_i - v_j)^2 \leq (m_i - v_l)^2, l \neq j, l = 1:L, j = 1:L$$

2) Calcula-se a potência do ruído de quantificação da iteração $n, \sigma_q^2(n)$,

$$\sigma_q^2(n) = \sum_{j=1}^L \sum_i (m_i - v_j)^2 f_M(m_i), \quad m_i \in S_j;$$

3) Se $\varepsilon \geq \frac{\sigma_q^2(n-1) - \sigma_q^2(n)}{\sigma_q^2(n)}$ calculam-se as saídas e termina-se o algoritmo;

4) Calculam-se novos valores de quantificação como a média normalizada

$$\text{dos espaços } S_j: v_j = \frac{\sum_i m_i f_M(m_i)}{\sum_i f(m_i)}, \quad j = 1:L, m_i \in S_j;$$

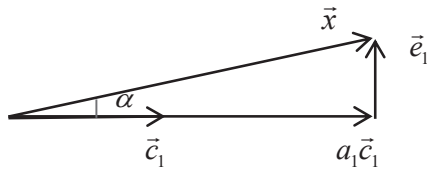
5) Incrementa-se n e retorna-se ao ponto 1);

Saídas:

Valores de quantificação: $v_j: j = 1:L$;

Valores de decisão: $(L - 1)$ valores equidistantes dos valores de quantificação;

Anexo 4 – Parecência entre sinais e vetores



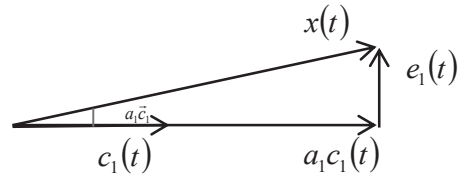
Pretende-se representar o vetor \vec{x} à custa do vetor de base, \vec{c}_1 , por:

$$a_1 \vec{c}_1,$$

de modo que a norma do vetor de erro, \vec{e}_1 , resultante da representação, seja a menor possível. Esta representação dá-se pela projeção na ortogonal, ou seja, pelo produto interno entre \vec{x} e \vec{c}_1 , normalizado pela norma ao quadrado do vetor de base,

$$a_1 = \frac{\langle \vec{x}, \vec{c}_1 \rangle}{\langle \vec{c}_1, \vec{c}_1 \rangle},$$

$$a_1 = \frac{|\vec{x}| |\vec{c}_1| \cos(\alpha)}{|\vec{c}_1|^2}. \quad (\text{A.4.1})$$



Pretende-se representar o sinal de energia $x(t)$ à custa do sinal de base, $c_1(t)$, por:

$$a_1 c_1(t),$$

de modo que a energia E_{e_1} do sinal de erro, $e_1(t)$, resultante da representação, seja a menor possível. Esta representação dá-se pela projeção na ortogonal.

$$\begin{aligned} E_{e_1} &= \int_{-\infty}^{\infty} e_1^2(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x(t) - a_1 c_1(t))^2 dt. \end{aligned}$$

Para minimizar E_{e_1} é necessário derivar a sua expressão em ordem a a_1 e igualar a 0.

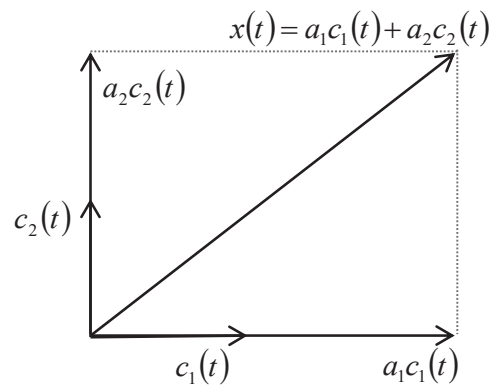
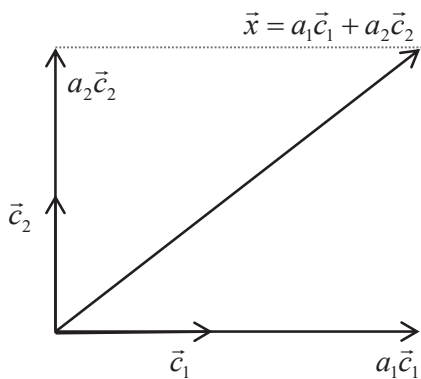
$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{e_1}}{\partial a_1} &= \frac{\partial}{\partial a_1} \int_{-\infty}^{\infty} (x^2(t) + a_1^2 c_1^2(t) \\ &\quad - 2x(t)a_1 c_1(t)) dt = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} (2a_1 c_1^2(t) - 2x(t)c_1(t)) dt = 0$$

$$a_1 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)c_1(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} c_1^2(t) dt} \quad (\text{A.4.2})$$

Comparando as equações (A.4.1) e (A.4.2), as equações são análogas, desde que se denomine produto interno entre dois sinais de energia, $x(t)$ e $y(t)$,

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t) dt. \quad (\text{A.4.3})$$



Se a base for composta por mais do que uma direção, a projeção em cada um dos vetores de base, \vec{c}_n , é dada por:

$$a_n = \frac{\langle \vec{x}, \vec{c}_n \rangle}{\langle \vec{c}_n, \vec{c}_n \rangle}$$

Se a base for ortogonal (vetores de base ortogonais, com produto interno zero) e completa, o vetor \vec{x} é representado pela soma das suas componentes,

$$\vec{x} = \sum_n a_n \vec{c}_n$$

Pelo teorema de Pitágoras²⁹ *generalizado*, o quadrado da norma do vetor \vec{x} é dado pela soma dos quadrados das normas das suas componentes,

$$|\vec{x}|^2 = \sum_n a_n^2 |\vec{c}_n|^2$$

Se a base for composta por mais do que um sinal, a projeção em cada um dos sinais de base, $c_n(t)$, é dada por:

$$a_n = \frac{\langle x(t), c_n(t) \rangle}{\langle c_n(t), c_n(t) \rangle}$$

Se a base for ortogonal (sinais de base ortogonais, com produto interno zero) e completa, o sinal $x(t)$ é representado pela soma das suas componentes,

$$x(t) = \sum_n a_n c_n(t)$$

Pelo teorema de Rayleigh, a energia do sinal $x(t)$ é dado pela soma das energias das suas componentes,

$$E_x = \sum_n a_n^2 E_n$$

O mesmo tipo de analogia se pode fazer para sinais de potência, pelo que:

$$\langle x(t), c(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)c(t)dt$$

e em particular para sinais periódicos:

$$\langle x(t), c(t) \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t)c(t)dt$$

A raiz quadrada da potência, valor quadrático médio ou RMS, é denominada de norma.

²⁹ Pitágoras viveu por volta de 570-496 a.C. Grego. Filósofo e Matemático.

Anexo 5 – Função de autocorrelação

A função de autocorrelação temporal de sinais discretos é definida por:

$$R[k] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{n=-N}^N m[n]m[n - k], \quad (\text{A. 5.1})$$

correspondendo ao produto interno do sinal com a sua versão deslocada de k amostras. A autocorrelação normalizada é dada pela relação entre a autocorrelação e a potência (autocorrelação de ordem zero), e torna esta independente da amplitude do sinal.

$$r[k] = \frac{R[k]}{P} = \frac{R[k]}{R[0]}. \quad (\text{A. 5.2})$$

A função de autocorrelação para sinais em tempo contínuo corresponde ao produto interno do sinal e da sua versão deslocada do tempo τ :

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T m(t)m(t - \tau)dt. \quad (\text{A. 5.3})$$

Exemplo para uma senoide:

$m(t) = m_{max} \cos(2\pi f_0 t + \alpha)$, de período fundamental T_0 .

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} m_{max} \cos(2\pi f_0 t + \alpha) m_{max} \cos(2\pi f_0 (t - \tau) + \alpha) dt \\ R(\tau) &= \frac{m_{max}^2}{2T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} [\cos(2\pi f_0 \tau) + \cos(4\pi f_0 t + 2\pi f_0 \tau + 2\alpha)] dt = \frac{m_{max}^2}{2T_0} \cos(2\pi f_0 \tau) t \Big|_{-T_0/2}^{T_0/2} \\ R(\tau) &= \frac{m_{max}^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau) \end{aligned} \quad (\text{A. 5.4})$$

Para sinais discretos, amostra-se esta função com período T_s ($\tau = kT_s$) e vem:

$$R[k] = \frac{m_{max}^2}{2} \cos\left(2\pi \frac{f_0}{f_s} k\right). \quad (\text{A. 5.5})$$

A autocorrelação normalizada vem:

$$r(\tau) = \frac{R(\tau)}{R(0)} = \cos(2\pi f_0 \tau); \quad r[k] = \frac{R[k]}{R[0]} = \cos\left(2\pi \frac{f_0}{f_s} k\right). \quad (\text{A. 5.6})$$

A autocorrelação de uma senoide não depende da fase inicial. A autocorrelação de uma senoide discreta depende da relação f_0/f_s e não dos seus valores absolutos.

Anexo 6 – Sinusoide com preditor unitário

Prova que, $V_1 \approx \sqrt{\frac{m_{max}^2}{G_p}}$, com preditor unitário, é exato para entrada sinusoidal:

- i. Pela equação (4.15), $G_p = \frac{1}{2(1-r[1])}$
- ii. A autocorrelação de uma sinusoide normalizada (A.5.6) para uma amostra de atraso vem $r[1] = \cos\left(2\pi\frac{f_0}{f_s}\right)$, pelo que: $G_p = \frac{1}{2(1-\cos(2\pi\frac{f_0}{f_s}))}$.
- iii. Assumindo a aproximação da equação (4.10),

$$V_1 = \sqrt{\frac{m_{max}^2}{G_p}} = \sqrt{m_{max}^2 2(1 - \cos(2\pi\frac{f_0}{f_s}))} = \sqrt{m_{max}^2 4\sin^2\left(\pi\frac{f_0}{f_s}\right)} = 2m_{max}\sin\left(\pi\frac{f_0}{f_s}\right), \quad (A.6.1)$$

que corresponde de facto sem aproximação, para uma sinusoide, à máxima variação no tempo T_s , que se dá na zona de maior declive, ou seja, à volta de zero, como se pode verificar pela figura A.6.1:

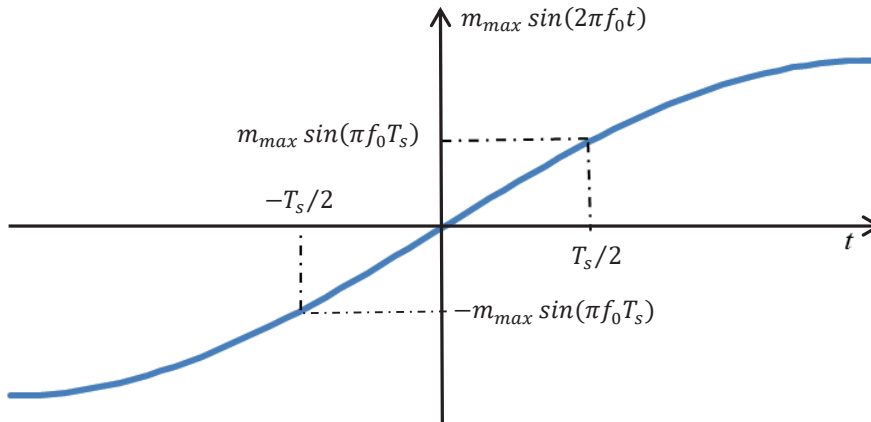


Figura A.6.1 Maior variação de uma sinusoide amostrada.

A equação (A.6.1) é uma melhor (menor) estimativa de V_1 do que a produzida pela situação mínima da equação (4.8):

$$V_1 = m'_{max}T_s = 2m_{max}\pi\frac{f_0}{f_s}. \quad (A.6.2)$$

Estas aproximam-se se $f_0 \ll f_s$, pois nestas condições

$$m'_{max}T_s = 2m_{max}\pi\frac{f_0}{f_s} \approx 2m_{max}\sin\left(\pi\frac{f_0}{f_s}\right). \quad (A.6.3)$$

Anexo 7 – Funções densidade espectral de potência em códigos de linha

Considera-se a geração dos símbolos binários independentes e equiprováveis.

$$\text{PNRZ} \quad G(f) = \frac{A^2}{R_b} \text{sinc}^2\left(\frac{f}{R_b}\right) \quad (\text{A. 7.1})$$

$$\text{PRZ} \quad G(f) = \frac{A^2}{4R_b} \text{sinc}^2\left(\frac{f}{2R_b}\right) \quad (\text{A. 7.2})$$

$$\text{UNRZ} \quad G(f) = \frac{A^2}{4R_b} \text{sinc}^2\left(\frac{f}{R_b}\right) + \frac{A^2}{4} \delta(f) \quad (\text{A. 7.3})$$

$$\text{AMI} \quad G(f) = \frac{A^2}{R_b} \text{sinc}^2\left(\frac{f}{R_b}\right) \sin^2\left(\frac{\pi f}{R_b}\right) \quad (\text{A. 7.4})$$

$$\text{Manchester} \quad G(f) = \frac{A^2}{R_b} \text{sinc}^2\left(\frac{f}{2R_b}\right) \sin^2\left(\frac{\pi f}{2R_b}\right) \quad (\text{A. 7.5})$$

$$\text{NRZI} \quad G(f) = \frac{A^2}{R_b} \text{sinc}^2\left(\frac{f}{R_b}\right) \quad (\text{A. 7.6})$$

$$\text{MLT-3} \quad G(f) = \frac{A^2}{R_b} \text{sinc}^2\left(\frac{f}{R_b}\right) \left(\cos^2\left(\frac{\pi f}{R_b}\right) - 0,25 \cos\left(\frac{6\pi f}{R_b}\right) + \dots \right) \quad (\text{A. 7.7})$$

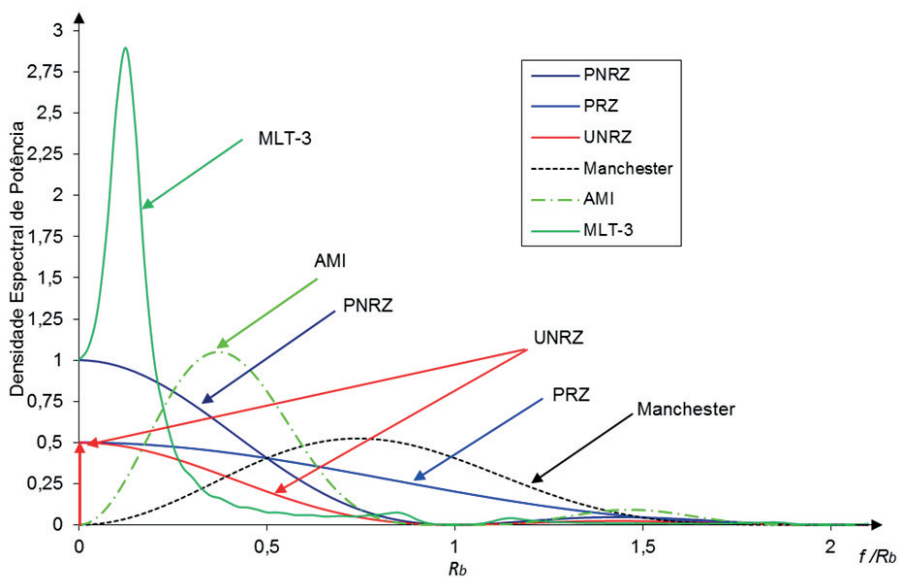


Figura A.7.1 Funções densidade espectral de potência dos diversos códigos de linha binários. Potência de 1 W e geração independente e equiprovável dos níveis lógicos.

Anexo 8 – Função complementar de erro

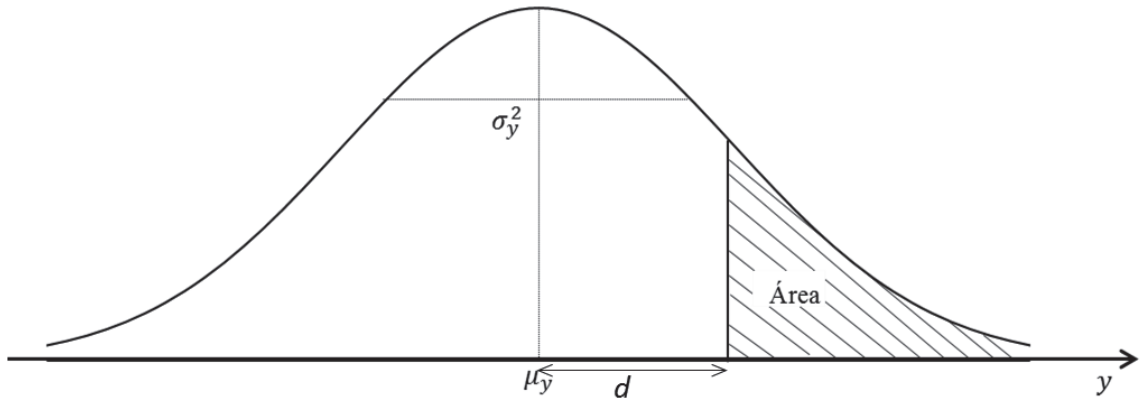


Figura A.8.1 Distribuição normal ou gaussiana.

A função complementar de erro ($erfc(x)$ – *Complementary Error Function*), é definida por:

$$erfc(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau, \tag{A.8.1}$$

e sabendo que a área a tracejado é dada por:

$$\text{Área} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}} \int_{\mu_y+d}^{\infty} e^{-\frac{(y-\mu_y)^2}{2\sigma_y^2}} dy, \tag{A.8.2}$$

Pode-se fazer a mudança de variável:

$$\begin{aligned} \tau = \frac{y-\mu_y}{\sqrt{2\sigma_y^2}} \quad dy = \sqrt{2\sigma_y^2} d\tau \quad \left. \frac{y-\mu_y}{\sqrt{2\sigma_y^2}} \right|_{y=\mu_y+d} &= \frac{d}{\sqrt{2\sigma_y^2}} \\ \text{Área} = \frac{\sqrt{2\sigma_y^2}}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}} \int_{\frac{d}{\sqrt{2\sigma_y^2}}}^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{d}{\sqrt{2\sigma_y^2}}}^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau \\ \text{Área} = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{d^2}{2\sigma_y^2}}\right) &= \frac{1}{2} erfc(x), \quad \text{com } x = \sqrt{\frac{d^2}{2\sigma_y^2}} \end{aligned} \tag{A.8.3}$$

Nota: Alguns autores utilizam a função $Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{\tau^2}{2}} d\tau$ (A.8.4)

Prova-se que, $\text{Área} = Q\left(\sqrt{\frac{d^2}{\sigma_y^2}}\right)$, com $x = \sqrt{\frac{d^2}{\sigma_y^2}}$ (A.8.5)

x	$erfc(x)/2$
0	5,000E-01
0,05	4,718E-01
0,1	4,438E-01
0,15	4,160E-01
0,2	3,886E-01
0,25	3,618E-01
0,3	3,357E-01
0,35	3,103E-01
0,4	2,858E-01
0,45	2,623E-01
0,5	2,398E-01
0,55	2,183E-01
0,6	1,981E-01
0,65	1,790E-01
0,7	1,611E-01
0,75	1,444E-01
0,8	1,289E-01
0,85	1,147E-01
0,9	1,015E-01
0,95	8,955E-02
1	7,865E-02
1,05	6,878E-02
1,1	5,990E-02
1,15	5,194E-02
1,2	4,484E-02
1,25	3,855E-02
1,3	3,300E-02
1,35	2,812E-02
1,4	2,386E-02
1,45	2,015E-02
1,5	1,695E-02
1,55	1,419E-02
1,6	1,183E-02
1,65	9,812E-03
1,7	8,105E-03
1,75	6,664E-03
1,8	5,455E-03
1,85	4,444E-03
1,9	3,605E-03
1,95	2,910E-03

x	$erfc(x)/2$
2	2,339E-03
2,05	1,871E-03
2,1	1,490E-03
2,15	1,181E-03
2,2	9,314E-04
2,25	7,314E-04
2,3	5,716E-04
2,35	4,446E-04
2,4	3,443E-04
2,45	2,653E-04
2,5	2,035E-04
2,55	1,553E-04
2,6	1,180E-04
2,65	8,924E-05
2,7	6,717E-05
2,75	5,031E-05
2,8	3,751E-05
2,85	2,783E-05
2,9	2,055E-05
2,95	1,510E-05
3	1,105E-05
3,05	8,040E-06
3,1	5,824E-06
3,15	4,199E-06
3,2	3,013E-06
3,25	2,151E-06
3,3	1,529E-06
3,35	1,081E-06
3,4	7,610E-07
3,45	5,330E-07
3,5	3,715E-07
3,55	2,577E-07
3,6	1,779E-07
3,65	1,222E-07
3,7	8,358E-08
3,75	5,686E-08
3,8	3,850E-08
3,85	2,594E-08
3,9	1,740E-08
3,95	1,161E-08

x	$erfc(x)/2$
4	7,709E-09
4,05	5,094E-09
4,1	3,350E-09
4,15	2,192E-09
4,2	1,428E-09
4,25	9,253E-10
4,3	5,967E-10
4,35	3,830E-10
4,4	2,446E-10
4,45	1,554E-10
4,5	9,831E-11
4,55	6,187E-11
4,6	3,875E-11
4,65	2,415E-11
4,7	1,498E-11
4,75	9,243E-12
4,8	5,676E-12
4,85	3,469E-12
4,9	2,109E-12
4,95	1,277E-12
5	7,687E-13
5,05	4,606E-13
5,1	2,747E-13
5,15	1,630E-13
5,2	9,626E-14
5,25	5,657E-14
5,3	3,308E-14
5,35	1,926E-14
5,4	1,116E-14
5,45	6,439E-15
5,5	3,664E-15
5,55	2,109E-15
5,6	1,166E-15
5,65	6,661E-16
5,7	3,886E-16
5,75	2,220E-16
5,8	1,110E-16
5,85	5,551E-17
5,9	5,551E-17
5,95	0,000E+00

Anexo 9 – BER com critério MAP

Numa transmissão binária num canal AWGN (*Additive White Gaussian Noise*) em que os símbolos não têm a mesma probabilidade, a distribuição do sinal recebido no instante de amostragem é ilustrada pela figura:

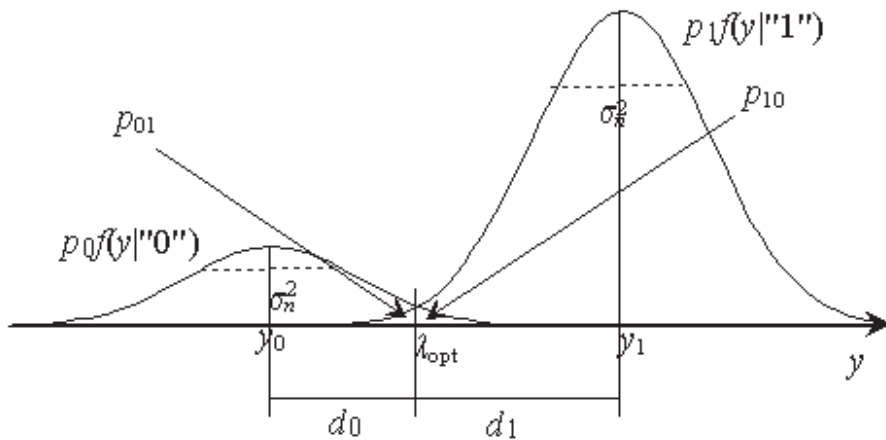


Figura A.9.1 Funções densidade de probabilidade com critério MAP.

Assumindo um critério de máximo *a posterior* (MAP), retira-se da figura:

$$d_1 = |y_1 - \lambda_{ot}| \qquad d_0 = |y_0 - \lambda_{ot}|, \qquad (A.9.1)$$

$$BER = p_1 p_{01} + p_0 p_{10} = \frac{p_1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{d_1^2}{2\sigma_n^2}} \right) + \frac{p_0}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{d_0^2}{2\sigma_n^2}} \right). \qquad (A.9.2)$$

Note-se que estas equações são válidas para qualquer valor de λ , p_0 e p_1 , e não apenas para a situação ótima.

O valor ótimo de decisão, λ_{ot} , é o ponto y de intersecção das funções densidade de probabilidade do ruído, distribuições normais com variância idêntica, σ_n^2 , pesadas pelas respectivas probabilidades *a priori*:

$$p_1 f(y|'1') = p_0 f(y|'0') \Rightarrow y = \lambda_{ot}. \qquad (A.9.3)$$

Desta equação, após alguma manipulação algébrica, obtém-se:

$$\lambda_{ot} = \frac{(y_1 + y_0)}{2} + \frac{\sigma_n^2}{(y_1 - y_0)} \ln \left(\frac{p_0}{p_1} \right). \qquad (A.9.4)$$

Para $p_0 = p_1$, o resultado simplifica-se para,

$$\lambda_{ot} = \frac{(y_1 + y_0)}{2} + \frac{\sigma_n^2}{(y_1 - y_0)}, \quad (\text{A.9.5})$$

ou seja, o valor equidistante de y_0 e y_1 .

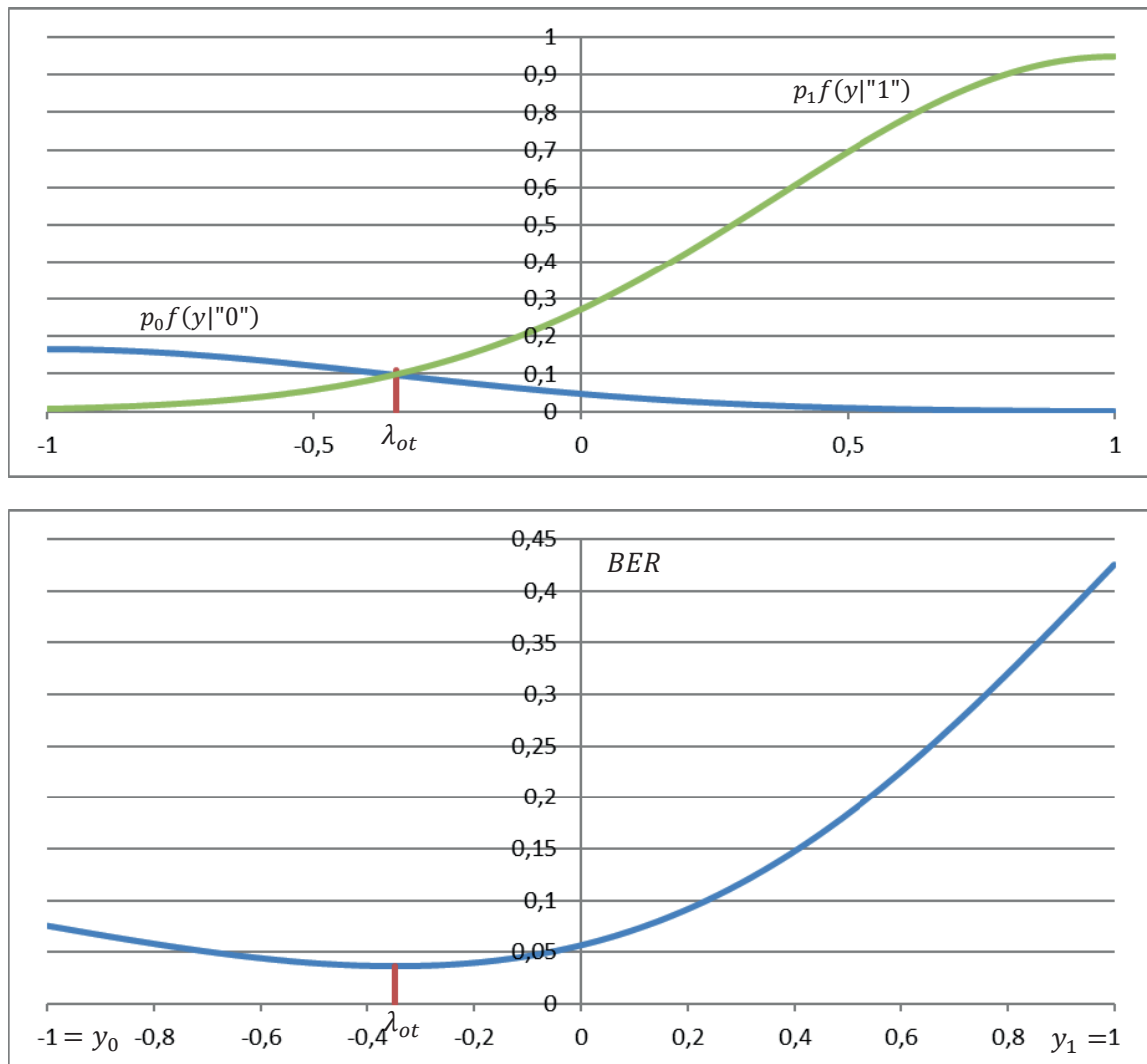


Figura A.9.2 BER em função do valor de decisão λ .

Assume-se $y_0 = -1$ V; $y_1 = 1$ V; $p_0 = 0,15$; $p_1 = 0,85$; $\sigma_n^2 = 0,4$ W.

Em cima: Funções densidade de probabilidade de y para cada um dos níveis lógicos.

Em baixo: BER em função do valor de decisão λ .

O valor ótimo de decisão $\lambda_{ot} = -0,347$ V (equação (A.9.4)),
a que corresponde o mínimo da BER de 0,037 (equação (A.9.2)).

Anexo 10 – Largura de banda equivalente do ruído

Função densidade espectral de potência do sinal de entrada: $G_x(f)$ [W/Hz]

Função densidade espectral de potência do sinal de saída: $G_y(f)$ [W/Hz]

Potência do sinal de saída: P_y [W]

Resposta em frequência do filtro: $H(f)$ []

Função densidade espectral de potência do ruído branco: $G_w(f)$ [W/Hz]

Potência do ruído na saída do filtro: σ_n^2 [W]

Largura de banda equivalente do ruído: B_{eq} [Hz]

Área equivalente do ruído: A_{eq} [Hz]

Das relações de densidade espectral de potência num sistema linear e invariante no tempo (SLIT) tem-se:

$$G_y(f) = G_x(f)|H(f)|^2, \quad (\text{A. 10.1})$$

$$P_y = \int_{-\infty}^{\infty} G_y(f)df = \int_{-\infty}^{\infty} G_x(f)|H(f)|^2df. \quad (\text{A. 10.2})$$

O ruído branco é caracterizado por ter uma função densidade espectral de potência constante para todas as frequências:

$$G_w(f) = \frac{N_0}{2}. \quad (\text{A. 10.3})$$

Tendo o sinal de entrada uma distribuição de amplitudes normal, a distribuição das amplitudes do sinal de saída é também normal. Tendo o filtro à entrada ruído branco, obtém-se para a potência do ruído filtrado:

$$\sigma_n^2 = \int_{-\infty}^{\infty} G_y(f)df = \int_{-\infty}^{\infty} G_w(f)|H(f)|^2df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2df. \quad (\text{A. 10.4})$$

Se o filtro tiver característica passa-baixo ideal, de banda B_{eq} e ganho g :

$$\sigma_n^2 = \frac{N_0}{2} \int_{-B_{eq}}^{B_{eq}} g^2 df = N_0 B_{eq} g^2. \quad (\text{A. 10.5})$$

Define-se largura de banda equivalente do ruído, B_{eq} , de um filtro com resposta em frequência arbitrária, $H(f)$, e ganho máximo g , como sendo a largura de banda de um filtro ideal com o mesmo ganho e cuja saída fornece a mesma potência do ruído. Igualando as equações (A.10.4) e (A.10.5) tem-se que:

$$B_{eq} = \frac{1}{2g^2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df. \quad (\text{A. 10.6})$$

Define-se a área equivalente do ruído como:

$$A_{eq} = 2B_{eq}g^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)^2 dt, \quad (\text{A. 10.7})$$

em que $h(t)$ corresponde à resposta impulsiva do filtro. A área equivalente correspondente ao dobro da largura de banda (bilateral) de um filtro ideal com ganho unitário, cuja saída fornece a mesma potência do ruído que um filtro com ganho g . Da equação (A.10.4) vem, para a potência do ruído à saída do filtro:

$$\sigma_n^2 = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} h(t)^2 dt = N_0 B_{eq} g^2 = \frac{N_0}{2} A_{eq}. \quad (\text{A. 10.8})$$

Note-se que, quer a área equivalente quer a largura de banda equivalente referem-se a uma largura de banda e têm como unidades Hertz. Note-se ainda que o valor da área equivalente corresponde numericamente (A.10.7) à energia da resposta impulsiva do SLIT, embora tenha como unidades Hertz e não Joules.

Anexo 11 – BER em sistemas discretos

1) Num canal AWGN (*Additive White Gaussian Noise*) simulado discretamente, assumindo uma sequência de ruído branco gaussiano $w[n] = Xu[n]$ com potência σ_w^2 , e em que $u[n]$ tem valor médio nulo e variância unitária, então:

$$\sigma_w^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{n=-N/2}^{N/2} w^2[n] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{n=-N/2}^{N/2} X^2 u^2[n] = X^2. \quad (\text{A.11.1})$$

$$X = \sqrt{\sigma_w^2}. \quad (\text{A.11.2})$$

2) σ_w^2 é a potência total do ruído entre $-f_s/2$ e $f_s/2$ (teorema da amostragem de Nyquist-Shannon). Para um sistema discreto assumindo uma frequência de amostragem normalizada $f_s = 1$ Hz:

$$\sigma_w^2 = \frac{N_o}{2} f_s = \frac{N_o}{2}. \quad (\text{A.11.3})$$

3) O recetor ótimo discreto, com os símbolos definidos por T_b pontos (sendo $f_s = 1$, T_b corresponde ao período de amostragem), é representado pelo diagrama de blocos seguinte:

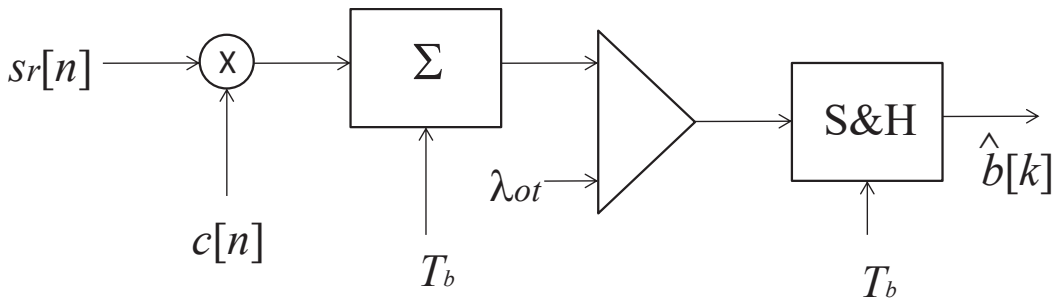


Figura A.11.1 Recetor ótimo binário discreto.

4) A potência do ruído, σ_n^2 (figura 9.3), após a filtragem, é dada por:

$$\sigma_n^2 = A_{eq} \frac{N_o}{2} = E_c \frac{N_o}{2} = E_c \sigma_w^2, \quad (\text{A.11.4})$$

sendo $E_c = C^2 T_b$ (NRZ) a energia de $c[n]$, e C a sua amplitude.

5) BER genérica:

$$BER = \frac{p_1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{d_1^2}{2E_c \sigma_w^2}} \right) + \frac{p_0}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{d_0^2}{2E_c \sigma_w^2}} \right). \quad (\text{A. 11.5})$$

6) BER para qualquer código de linha polar:

$$BER = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_o}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{2\sigma_w^2}} \right). \quad (\text{A. 11.6})$$

PNRZ e Manchester:

$$E_b = E_1 = \sum_{n=1}^{T_b} A^2 = A^2 T_b. \quad (\text{A. 11.7})$$

PRZ:

$$E_b = E_1 = \sum_{n=1}^{T_b} A^2 = \frac{A^2 T_b}{2}. \quad (\text{A. 11.8})$$

7) BER para qualquer código de linha unipolar:

$$BER = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_o}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{4\sigma_w^2}} \right). \quad (\text{A. 11.9})$$

UNRZ:

$$E_b = \frac{E_1}{2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{T_b} A^2 = \frac{A^2 T_b}{2}. \quad (\text{A. 11.10})$$

8) BER para código de linha PAM digital M -ário com código Gray:

$$BER = \frac{(M-1)}{KM} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_{min}}{N_o}} \right) = \frac{(M-1)}{KM} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{a^2 \tau_s}{8\sigma_w^2}} \right). \quad (\text{A. 11.11})$$

$$E_{min} = \left(\frac{a}{2} \right)^2 \tau_s. \quad (\text{A. 11.12})$$

Nota 1: PNRZ é um caso particular de PAM digital M -ária, com $A = a/2$, $K = 1$ e $M = 2$.

Nota 2: 2B1Q é um caso particular de PAM digital M -ária com $K = 2$ e $M = 4$.

Anexo 12 – Função de probabilidade binomial

Considere-se X a variável aleatória que representa o número de sucessos em n provas independentes, realizadas sempre nas mesmas condições, em que em cada prova só há dois resultados possíveis: sucesso ou insucesso. Dada a probabilidade, p , de sucesso numa prova, a probabilidade de i sucessos é dada pela função de probabilidade binomial, definida por:

$$P(X = i) = C_i^n p^i (1 - p)^{n-i}, \quad i = 0:n. \quad (\text{A.12.1})$$

C_i^n corresponde ao número de combinações em que podem ocorrer i sucessos em n provas e é definida por:

$$C_i^n = \frac{n!}{(n-i)! i!}, \quad (\text{A.12.2})$$

sendo que p^i corresponde à probabilidade de i provas com sucesso e $(1-p)^{n-i}$ corresponde à probabilidade das restantes $n-i$ provas não terem sucesso.

O valor médio e a variância da distribuição binomial são dadas respetivamente por:

$$\mu = np, \quad (\text{A.12.3})$$

$$\sigma^2 = np(1-p). \quad (\text{A.12.4})$$

A probabilidade de não ocorrer qualquer sucesso em n provas é:

$$P(X = 0) = (1-p)^n, \quad (\text{A.12.5})$$

e a probabilidade de ocorrer apenas um sucesso vem:

$$P(X = 1) = C_1^n p^1 (1-p)^{n-1} = np(1-p)^{n-1}. \quad (\text{A.12.6})$$

A probabilidade de acontecerem até r provas com sucesso iguala a soma das respetivas probabilidades e é dada pela função de distribuição:

$$F(r) = P(X \leq r) = \sum_{i=0}^r P(X = i) = \sum_{i=0}^r C_i^n p^i (1-p)^{n-i}. \quad (\text{A.12.7})$$

Quando a probabilidade de sucesso da prova, p , é muito pequena, o termo $(1-p)^{n-i} \approx 1$, pelo que a função de probabilidade, desde que $i \neq 0$, simplifica-se para:

$$P(X = i) \approx C_i^n p^i, \quad i = 1:n \quad (\text{A.12.8})$$

Quando, além de a probabilidade de o sucesso ser pequena, o valor médio $np \ll 1$, a probabilidade de $i + 1$ provas com sucesso é muito menor que a probabilidade de i provas com sucesso:

$$C_{i+1}^n p^{i+1} \ll C_i^n p^i, \quad (\text{A.12.9})$$

pelo que a probabilidade de sucesso de i ou mais provas é aproximadamente igual à probabilidade de sucesso em i provas (aproximação ao 1.º termo), pelo que:

$$P(X \geq i) \approx P(X = i) \approx C_i^n p^i. \quad (\text{A.12.10})$$

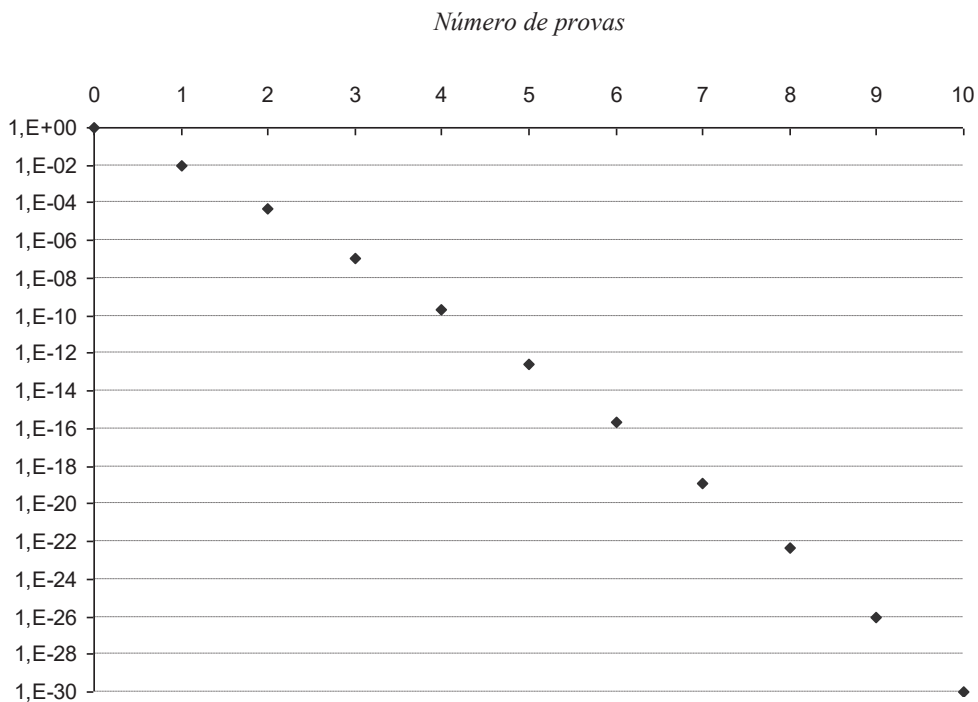


Figura A.12.1 Exemplo da função de probabilidade binomial

Valor médio $np = 0,01$, probabilidade de sucesso $p = 0,001$ e número de provas $i = 0: 10$.

Principais Equações

Codificação de Sinal – Modulação por codificação de impulsos

$m(t)$	Sinal de entrada (analógico) [V] ou [A]
$m[n]$	Sinal de entrada (amostrado) [V] ou [A]
$m_q[n]$	Sinal $m[n]$ quantificado [V] ou [A]
$q[n]$	Ruído de quantificação [V] ou [A]
W	Máxima frequência do sinal de entrada [Hz]
f_s	Frequência de amostragem [amostras/s] [Hz]
R	Número de bits de codificação por amostra [bit/amostra] []
R_b	Débito binário [bit/s] [Hz]
P	Potência do sinal de entrada [W]
m_{max}	Amplitude do sinal de entrada [V] ou [A]
P_n	Potência normalizada do sinal de entrada []
$R[k]$	Autocorrelação do sinal de entrada [W]
$r[k]$	Autocorrelação normalizada do sinal de entrada []
V	Máximo valor de quantificação em PCM [V] ou [A]
Δ_q	Intervalo de quantificação em quantificação uniforme [V] ou [A]
σ_q^2	Potência do ruído de quantificação [W]
SNR_{dB}	SNR de quantificação em decibéis [dB]
V_1	Máximo valor de quantificação do erro de predição em DPCM [V] ou [A]
P_e	Potência do erro de predição [W]
G_p	Ganho de predição []
a_1	Coefficiente de predição (de 1. ^a ordem) []
Δ	Passo de quantificação em DM []
m'_{max}	Derivada máxima [V/s] [A/s]
G_f	Ganho de filtragem []
OSR	<i>Over sampling ratio</i> []

Teorema da amostragem de Nyquist-Shannon:

$$f_s \geq 2W \quad (2.1)$$

Gerais:

$$q[n] = m[n] - m_q[n] \quad (2.3)$$

$$R_b = R \times f_s \quad (2.7)$$

$$SNR = \frac{P}{\sigma_q^2} \quad (2.9)$$

$$P_n = \frac{P}{m_{max}^2} \quad (2.13) \quad r[k] = \frac{R[k]}{R[0]} = \frac{R[k]}{P} \quad (A.5.2)$$

Sinal com distribuição uniforme (com valor médio nulo):

$$P = \frac{m_{max}^2}{3} \quad (\text{A. 1.8}) \quad P_n = \frac{P}{m_{max}^2} = \frac{1}{3}$$

Sinal sinusoidal:

$$m(t) = m_{max} \cos(2\pi f_0 t + \alpha)$$

$$P = \frac{m_{max}^2}{2} \quad P_n = \frac{P}{m_{max}^2} = \frac{1}{2} \quad W = f_0$$

$$R[k] = \frac{m_{max}^2}{2} \cos\left(2\pi \frac{f_0}{f_s} k\right) \quad (\text{A. 5.5})$$

$$r[k] = \frac{R[k]}{R[0]} = \cos\left(2\pi \frac{f_0}{f_s} k\right) \quad (\text{A. 5.6})$$

$$m'_{max} T_s = 2m_{max} \pi \frac{f_0}{f_s} \approx 2m_{max} \sin\left(\pi \frac{f_0}{f_s}\right) \quad (\text{A. 6.3})$$

PCM uniforme:

$$\Delta_q = \frac{2V}{2^R} \quad (2.6) \quad \sigma_q^2 = \frac{\Delta_q^2}{12} \quad (2.8)$$

$$SNR_{dB} = 6,02R + 10 \log_{10} \left(\frac{3P}{V^2}\right) \quad (2.10)$$

$$V \geq m_{max} \quad (2.11)$$

PCM companding, Lei-A/Lei-μ, zona logarítmica:

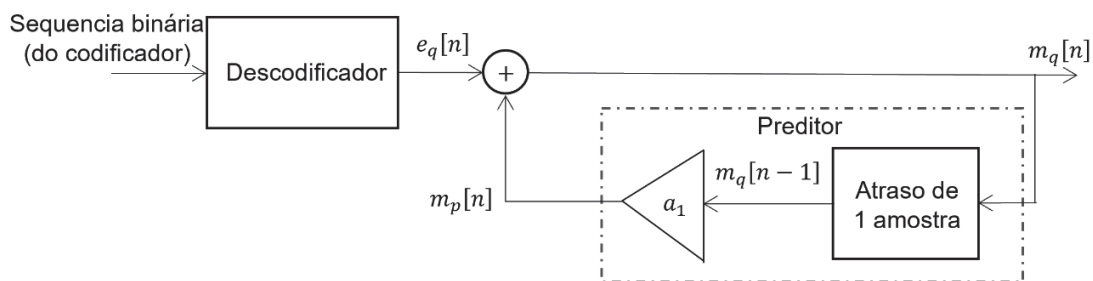
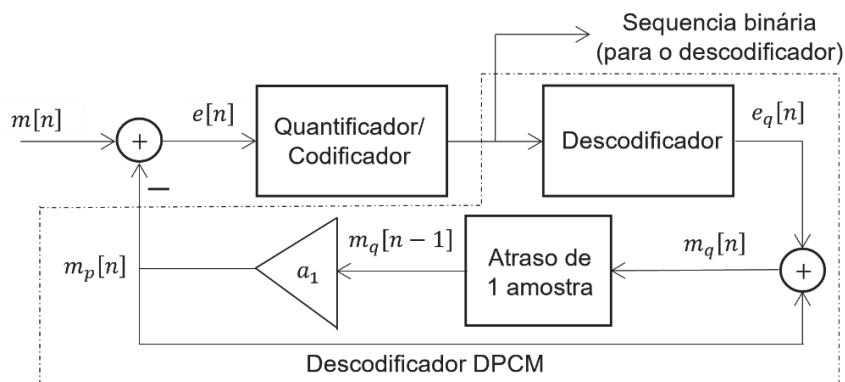
$$SNR_{dB} = 6,02R - 10 \quad (3.13)$$

DPCM:

$$SNR_{dB} = 6,02R + 10 \log_{10} \left(\frac{3P}{V_1^2}\right) = 6,02R + 10 \log_{10} \left(\frac{3P}{m_{max}^2}\right) + 10 \log_{10} \left(\frac{m_{max}^2}{V_1^2}\right) \quad (4.4) \quad (4.6)$$

$$G_p = \frac{P}{P_e} \approx \frac{m_{max}^2}{V_1^2} \quad (\text{aproximação na situação ótima de } V_1) \quad (4.9)$$

$$SNR_{dB} \approx G_{pdB} + 6,02R + 10 \log_{10} \left(\frac{3P}{m_{max}^2}\right) = G_{pdB} + SNR_{PCMDb}(m(n)). \quad (4.11)$$



$$G_p \text{ dB} = 10 \log_{10} \left[\frac{1}{(1 + a_1^2 - 2a_1r[1])} \right] = \begin{cases} G_p \text{ dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{1}{2(1 - r[1])} \right); & a_1 = 1 \\ G_p \text{ dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{1}{(1 - r[1])^2} \right); & a_1 = r[1] \end{cases} \quad (4.14)(4.15)(4.19)$$

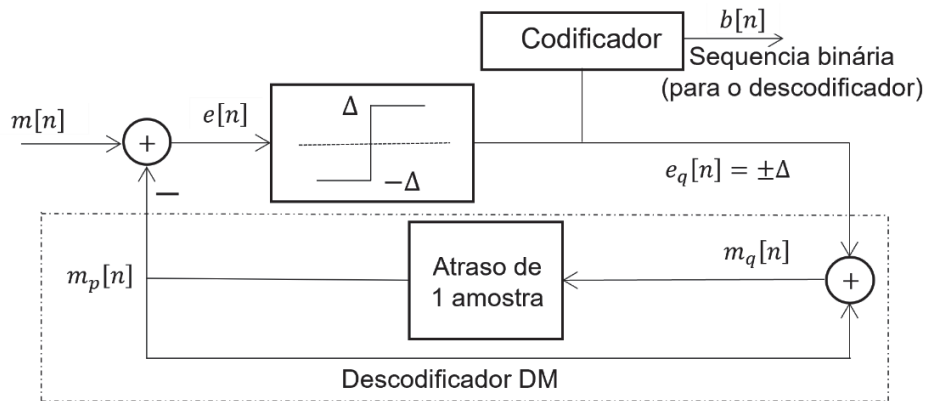
Preditor unitário:

$$V_1 \geq \frac{m'_{max}}{f_s} \quad (4.8)$$

Entrada sinusoidal e preditor unitário:

$$V_1 \geq 2m_{max} \sin \left(\pi \frac{f_o}{f_s} \right) \quad (A.6.3)$$

DM:



$$R_b = f_s \quad (4.27) \qquad \Delta = V_1 \geq \frac{m'_{max}}{f_s} \quad (4.21)$$

$$\sigma_q^2 = \frac{\Delta^2}{3} \quad (4.23) \qquad G_p = \frac{1}{2(1-r[1])} \approx \frac{m_{max}^2}{\Delta^2} \quad (4.26)$$

Entrada sinusoidal:

$$\Delta = V_1 \geq 2m_{max} \sin\left(\pi \frac{f_o}{f_s}\right) \quad (A.6.1)(A6.3)$$

Sem ganho de filtragem:

$$SNR_{dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{3P}{\Delta^2} \right) = 10 \log_{10} \left(\frac{3P f_s^2}{m_{max}^2} \right) \quad (4.24)$$

$$SNR_{dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{3P}{m_{max}^2} \right) + 10 \log_{10} \left(\frac{m_{max}^2}{\Delta^2} \right) = 10 \log_{10}(P_n) + G_{p dB} + 4,77 \quad (4.25)$$

Com ganho de filtragem:

$$G_f = \frac{f_s}{2W} = OSR \quad (4.28)$$

$$SNR_{dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{3P}{\Delta^2} \right) + 10 \log_{10}(OSR) \quad (4.29)$$

$$SNR_{dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{3P f_s^2}{m_{max}^2} \right) + 10 \log_{10} \left(\frac{f_s}{2W} \right) = 10 \log_{10} \left(\frac{3P f_s^3}{m_{max}^2 2W} \right) \quad (4.30)$$

ADM:

$$\Delta[n] = \Delta[n-1] \left(1 + \lambda \frac{b[n-1]}{b[n]} \right), \quad 0 < \lambda < 1 \quad (4.31)$$

Codificação de Linha – Transmissão binária

T_b	Tempo de bit [s]
R_b	Débito binário [bit/s] [Hz]
B_T	Largura de banda do sinal transmitido [Hz]
ρ	Eficiência espectral [] [bit/s/Hz]
A	Amplitude do sinal de código de linha [V] ou [A]
$s_l(t)$	Símbolo lógico l , $l = 0$ ou 1 [V] ou [A]
E_l	Energia (normalizada) do símbolo l , $l = 0$ ou 1 [J]
E_b	Energia (normalizada) média por bit [J]
S_T	Potência (normalizada) transmitida [W]
S_R	Potência (normalizada) recebida [W]
A_t	Atenuação no canal []
$A_{t/km}$	Atenuação no canal por quilómetro [1/km]
σ_c^2	Potência do ruído na banda do sinal [W]
$N_0/2$	Potência por Hertz do ruído no canal AWGN [W/Hz] [J]
SNR_c	Relação sinal-ruído após filtro de receção [] ou dB
B_C	Largura de banda do canal de comunicação [Hz]
T_L	Latência [s] (atraso total)
T_{pe}	Atraso de processamento dos equipamentos [s]
T_t	Atraso de transmissão [s]
T_p	Atraso de propagação [s]
$T_{p/km}$	Atraso de propagação por quilómetro [s/km]
D	Dimensão do canal [km]
N	Número de bits da trama
λ_{ot}	Valor ótimo de decisão na deteção binária [V] ou [A]
y_l	Valor após filtragem sem ruído para o símbolo l , $l=0$ ou 1 [V] ou [A]
d	Metade da distância entre símbolos após filtragem [V] ou [A]
BER	Probabilidade de erro de bit []
σ_n^2	Potência do ruído no recetor após filtragem [W]
$c(t)$	Vetor de base no recetor [V] ou [A]
k	Fator de escala no vetor de base []
A_{eq}	Área equivalente do ruído do filtro ótimo [Hz]
α	Fator de decaimento []
J	Número de regeneradores
BER_j	Probabilidade de erro de bit em cada j regenerador
BER_r	Probabilidade de erro de bit no recetor

$$R_b = \frac{1}{T_b} \quad (7.1)$$

$$\rho = \frac{R_b}{B_T} \quad (7.6)$$

$$E_l = \int_0^{T_b} s_l^2(t) dt \quad (7.2)$$

$$E_b = \frac{E_0 + E_1}{2} \quad (7.4)$$

$$S_T = \frac{E_b}{T_b} = E_b R_b \quad (7.5)$$

$$S_{TABW} = 10 \times \log_{10}(S_T) \quad (A.2.5)$$

Canal de comunicação:

$$\sigma_c^2 = \frac{N_0}{2}(2B_T) = N_0 B_T \tag{8.1}$$

$$SNR_c = \frac{S_R}{\sigma_c^2} = \frac{S_R}{N_0 B_T} = \frac{E_b R_b}{N_0 B_T} = \frac{E_b}{N_0} \rho \tag{8.2}$$

$$B_T \leq B_C. \tag{8.3}$$

$$A_{tdB} = 10 \times \log_{10} \left(\frac{S_T}{S_R} \right) \tag{8.11} \quad A_{tdB/km} = \frac{At_{dB}}{D} \tag{8.12}$$

$$S_{RdBW} = 10 \times \log_{10}(S_R) = 10 \times \log_{10} \left(\frac{S_T}{A_t} \right) = S_{TdBW} - At_{dB} \tag{A.2.9}$$

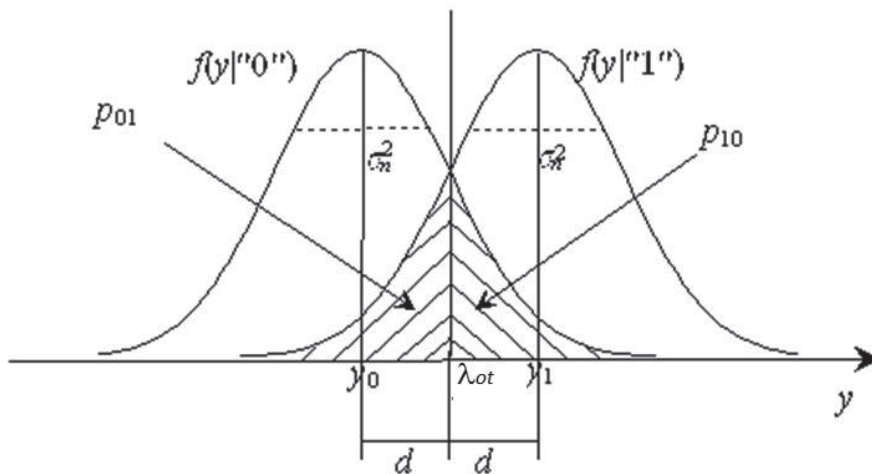
$$T_p = DT_{p/km} \tag{8.16} \quad T_t = \frac{N}{R_b} \tag{8.17} \quad T_L = T_{pe} + T_t + T_p \tag{8.13}$$

$$BER \approx \sum_{j=1}^J BER_j + BER_r, \tag{9.50}$$

Descodificador de máxima verosimilhança:

$$\lambda_{ot} = \frac{y_0 + y_1}{2} \tag{9.5} \quad d = \frac{|y_1 - y_0|}{2} \tag{9.10}$$

$$BER = p_1 p_{01} + p_0 p_{10} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(x) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{d^2}{2\sigma_n^2}} \right) \tag{9.9)(A.8.3)}$$



Filtro adaptado:

$$c(t) = ks_1(t) \quad (9.15) \quad \begin{cases} y_1 = kE_1 \\ y_0 = -kE_1 \\ y_0 = 0 \end{cases} \begin{matrix} polar \\ unipolar \end{matrix} \quad (9.19)$$

$$A_{eq} = \int_0^{T_b} c^2(t)dt \quad (9.20) \quad \sigma_n^2 = \frac{N_0}{2} A_{eq} \quad (9.21)$$

Filtro adaptado normado:

$$\begin{cases} y_1 = +\sqrt{E_1} \\ y_0 = -\sqrt{E_1} \\ y_0 = 0 \end{cases} \begin{matrix} polar \\ unipolar \end{matrix} \quad (9.24) \quad \begin{matrix} A_{eq} = 1 \\ \sigma_n^2 = \frac{N_0}{2} \end{matrix} \quad (9.25)$$

$$BER = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{d^2}{N_0}} \right) \quad (9.26)$$

Códigos de linha binários

Código Binário	Energia por bit E_b	DC	Desvanecimento	Fácil Sincronismo	1.º zero espectral B_T	Largura de Banda B_T	BER
PNRZ	$A^2 T_b$	Não ⁽¹⁾	Sim	Não	R_b	$\frac{R_b}{2} (1 + \alpha)$	$\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right)$
PRZ	$\frac{A^2}{2} T_b$	Não ⁽¹⁾	Não	Sim	$2R_b$	$R_b (1 + \alpha)$	$\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right)$
UNRZ	$\frac{A^2}{2} T_b$ ⁽¹⁾	Sim	Sim	Não	R_b	$\frac{R_b}{2} (1 + \alpha)$	$\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}} \right)$
Manchester	$A^2 T_b$	Não	Não	Sim	$2R_b$	$R_b (1 + \alpha)$	$\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right)$
AMI	$\frac{A^2}{2} T_b$ ⁽¹⁾	Não	Não	Não ⁽²⁾	R_b	$\frac{R_b}{2} (1 + \alpha)$	$\frac{3}{4} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}} \right)$
NRZI (unipolar)	$\frac{A^2}{2} T_b$	Sim	Sim	Não	R_b	$\frac{R_b}{2} (1 + \alpha)$	$\operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}} \right)$
MLT-3	$\frac{A^2}{2} T_b$	Não	Sim	Não	$\frac{R_b}{2}$	$\frac{R_b}{4}$ ⁽³⁾	$\frac{3}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}} \right)$

1 – Desde que com 50% de ocorrência de bits a cada nível lógico.

2 – Sim, mas apenas com código BNZS. 3 – Baseado em 85% da energia e não no critério de Nyquist.

Codificação de Linha – Transmissão PAM digital M -ária

K	Número de bits por símbolo [bit/símbolo] []
M	Número de símbolos diferentes [símbolos] []
R_s	Débito de símbolos [símbolo/s] [baud] [Hz]
τ_s	Tempo de símbolo [s]
E_s	Energia média por símbolo [J]
R_b	Débito binário [bit/s] [Hz]
T_b	Tempo de bit [s]
E_b	Energia (normalizada) média por bit [J]
a	Distância entre símbolos adjacentes [V] ou [A]
E_{min}	Energia do símbolo com menor energia [J]
B_T	Largura de banda de sinal transmitido [Hz]
α	Fator de decaimento []
ρ	Eficiência espectral [bit/s/Hz] []
SER	Probabilidade de erro de símbolo []
BER	Probabilidade de erro de bit []
$C_{(Hartley)}$	Regra de Hartley [bit/s] [Hz]
C	Capacidade de canal [bit/s] [Hz]

$$M = 2^K. \quad (10.1)$$

$$\tau_s = KT_b \quad (10.2)$$

$$R_s = \frac{R_b}{K} \quad (10.3)$$

$$E_s = \tau_s \frac{a^2 (M^2 - 1)}{4} \frac{(M^2 - 1)}{3} = \frac{(M^2 - 1)}{3} E_{min} \quad (10.4)$$

$$E_{min} = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \tau_s \quad (10.5)$$

$$E_b = \frac{E_s}{K} = \frac{(M^2 - 1)}{3K} E_{min} = \frac{(M^2 - 1)}{12} a^2 \frac{\tau_s}{K} = \frac{(M^2 - 1)}{12} a^2 T_b. \quad (10.6)$$

$$S_{R,T} = \frac{(M^2 - 1)}{12} a^2$$

$$B_T = \frac{R_s}{2} (1 + \alpha) = \frac{R_b}{2K} (1 + \alpha) \quad (10.7)$$

$$\rho = \frac{R_b}{B_T} = \frac{2K}{(1 + \alpha)} \quad (10.8)$$

$$SER = \frac{(M-1)}{M} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_{min}}{N_o}} \right) \quad (10.12)$$

$$\text{Código aleatório} \quad BER = \frac{K+1}{K} \frac{SER}{2} \quad (10.14)$$

$$\text{Código Gray} \quad BER \approx \frac{SER}{K} \quad (10.16)$$

$$BER = \frac{(M-1)}{KM} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_{min}}{N_o}} \right) = \frac{(M-1)}{KM} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{3K}{(M^2-1)} \frac{E_b}{N_o}} \right) \quad (10.17)$$

Código	Largura de Banda B_T	Energia média por bit E_b	BER (Código Gray)
2B1Q	$\frac{R_b}{4}(1+\alpha)$	$\frac{5a^2}{4}T_b = \frac{5}{2}E_{min}$	$\frac{3}{8} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{2E_b}{5N_o}} \right)$
M-PAM	$\frac{R_b}{2K}(1+\alpha)$	$\frac{(M^2-1)a^2}{12}T_b = \frac{(M^2-1)}{3K}E_{min}$	$\frac{(M-1)}{KM} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{3K}{(M^2-1)} \frac{E_b}{N_o}} \right)$

Regra de Hartley

$$C_{(\text{Hartley})} = R_s \log_2(M) = 2B_c \log_2(M) = B_c \log_2 \left(1 + \frac{12S_R}{a^2} \right) \quad (10.23)$$

Nota: pelo lado mais à direita da equação (10.23) não se garante que o número de bits por símbolo seja um número inteiro.

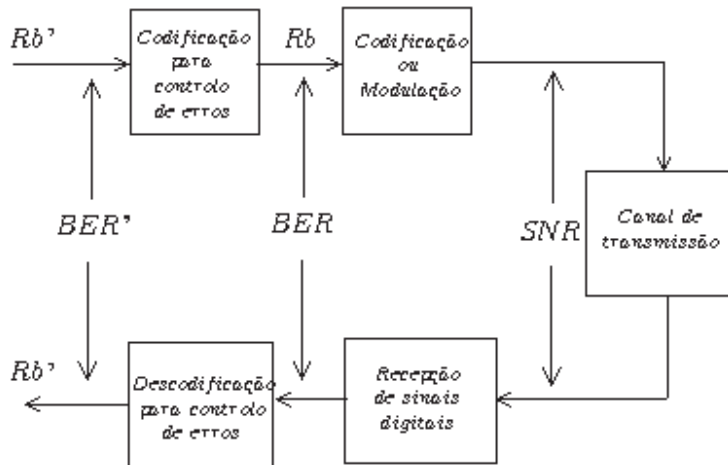
Capacidade de canal (Lei de Shannon-Hartley)

$$C = B_c \log_2(1 + SNR_c) = B_c \log_2 \left(1 + \frac{S_R}{N_o B_c} \right) \quad (10.24)$$

Nota: $\log_2(x) = 3,3219 \log_{10}(x) = 1,4427 \ln(x)$

Codificação de controlo de erros

BER	Probabilidade de erro de bit sem correção []
c	Número total de palavras de código []
R_c	Razão do código []
n	Dimensão em número de bits das palavras de código [bit] []
k	Dimensão em número de bits antes da aplicação do código [bit] []
R_b	Débito binário no canal (com aplicação do código) [bit/s] [Hz]
R'_b	Débito binário da informação (sem aplicação do código) [bit/s] [Hz]
BER'	Probabilidade de erro de bit após correção ou retransmissão []
T_e	Tempo médio entre erros de bit sem correção [s]
T'_e	Tempo médio entre erros de bit após correção ou retransmissão [s]
P_r	Probabilidade de deteção de erro e retransmissão []
d_{min}	Distância mínima de Hamming [bit] []
t	Número máximo de erros de bit corrigidos [bit] []
l	Número máximo de erros de bit detetados [bit] []
li	Número de linhas em BCC e <i>interleaving</i> []
cl	Número de colunas em BCC e <i>interleaving</i> []
b_{max}	Comprimento máximo da rajada de erros corrigida em <i>interleaving</i> [bit]
$BEDR$	Relação de rajadas de erros não detetadas []



Distribuição binomial (valores aproximados, assumindo $nBER \ll 1$):

$$P(X = i) = C_i^n BER^i (1 - BER)^{n-i} \approx C_i^n BER^i \tag{12.5}$$

$$P(X \geq i) \approx P(X = i) \approx C_i^n BER^i \tag{12.6}$$

$$P(X = 0) = (1 - BER)^n \tag{12.7}$$

$$C_i^n = \frac{n!}{(n - i)! i!} \tag{A. 12.2}$$

Gerais

$$c = 2^k \quad (12.1)$$

$$R_c = \frac{k}{n} = \frac{R'_b}{R_b} \quad (12.2)$$

$$\frac{E_b}{N_{o\text{com controlo}}} = R_c \frac{E_b}{N_{o\text{sem controlo}}} \quad (12.3)$$

$$T_{\text{com codificação}} = \frac{T_{\text{sem codificação}}}{R_c} \quad (12.4)$$

$$\mu_{\text{erros}} = \overline{\text{erros}} = nBER \quad (\text{A.12.3})$$

$$T_e = \frac{1}{R_b BER} \quad T'_e = \frac{1}{R'_b BER'} \quad (12.8)$$

$$P_r = nBER \quad (12.9)$$

$$l = (d_{\min} - 1) \quad (12.19\text{-a}) \quad t = \left\lfloor \frac{d_{\min} - 1}{2} \right\rfloor \quad (12.19\text{-b})$$

Nota: $\lfloor x \rfloor$ operador truncatura ao inteiro mais próximo.

$$2^{n-k} \geq \sum_{j=0}^t C_j^n \quad (12.21)$$

(correção de um bit) $2^{n-k} \geq (n + 1) \quad (12.20)$

Interleaving: $b_{\max} = t \times li \quad (12.16)$

CRC: $BEDR = 2^{-(n-k)} \quad (12.30)$

Código	Deteção de rajadas de erros	d_{\min} [bit]	Capacidade de deteção l [bit]	Capacidade de correção t [bit]	Razão do código, R_c	Probabilidade de erro após controlo, BER'
Paridade	Não	2	1	0	$\frac{n-1}{n}$	$(n-1)BER^2$
Repetição	Não	n	$(n-1)$	$\frac{n-1}{2}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{C_{n+1}^n}{2} BER^{\frac{n+1}{2}}$
BCC	Sim	4	3	1	$\frac{(cl-1)(li-1)}{cl \times li}$	-
Hamming	Não	3	2	1	-	$\frac{3}{2}(n-1)BER^2$
CRC	Sim $n-k$	-	Sim	-	-	-
IP-checksum	Não	-	Sim	Não	-	-

Código	R_c	BER'
R(3)	0,333(3)	$3BER^2$
R(5)	0,2	$10BER^3$
H(7,4)	0,57	$9BER^2$
H(15,11)	0,73	$21BER^2$

Perguntas teóricas

1. (capítulo 4.3) Diga se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:
 - a) Em PCM *companding*, tira-se partido da correlação entre amostras para aumentar a relação sinal-ruído;
 - b) Em DPCM, não é importante que tipo de preditor se está a usar para se calcular a relação sinal-ruído. Basta ser conhecido o valor do intervalo de quantificação.
2. (capítulo 4.2) Em DPCM com uma senoide como sinal de entrada, suponha que diminui a sua frequência. O que acontece à autocorrelação normalizada de 1.^a ordem, ao ganho de predição e ao valor máximo do erro de predição? Discuta o caso do preditor unitário e do preditor adaptado.
3. (capítulo 4.3) Explique o mecanismo de adaptação do quantificador em ADPCM.
4. (capítulo 4) Em DM, que tipos de ruído existem? Existe algum compromisso entre eles? Que tipo de soluções conhece?
5. (capítulo 4) Em codificação diferencial, qual a relação entre o coeficiente de predição e a propagação de erros devidos às limitações do canal de comunicação?
6. (capítulo 5) Compare, dizendo as vantagens e desvantagens, dos seguintes métodos de codificação de sinais de fala: PCM uniforme; PCM *companding*; DPCM; ADPCM; DM; ADM.
7. (capítulo 5) Das codificações de sinal apresentadas, em quais e porquê a potência do ruído depende do sinal de entrada?
8. (capítulo 5) Nos codificadores de sinal estudados, de que tipo de características dos sinais se tira partido para diminuir o débito binário?
9. (capítulo 5) Em codificadores de sinal, existe algum compromisso entre o débito binário, a qualidade e a complexidade? Dê exemplos. Quais as unidades de medição de cada um destes atributos?
10. (capítulo 7) Que atributos se devem ter em conta num código de linha?
11. (capítulo 7) Sabendo que numa linha telefónica não podem ser transmitidas componentes DC e que componentes DC localizadas sofrem de desvanecimento, comente a utilização do código Manchester por exemplo comparando com um PNRZ ou um UNRZ.
12. (capítulo 7) Porque é que num código NRZI (diferencial) existe uma grande probabilidade de os erros de bit acontecerem aos pares?
13. (capítulo 7) Compare as técnicas para facilitar o sincronismo: um bit de enchimento; BNZS; e 4B/5B. Responda nomeadamente às seguintes questões:
 - (1) Pode utilizar BNZS com qualquer código?
 - (2) Com bit de enchimento aumenta o débito binário? E com BNZS?
 - (3) Qual dos códigos tem menor eficiência em termos do débito binário final?
14. (capítulo 7) Existe algum compromisso entre a eficiência espectral e a capacidade de sincronismo de símbolo? Compare os códigos Manchester, AMI com e sem BNZS e MLT-3 com e sem código 4B/5B.

15. (capítulo 7) Quais as vantagens e desvantagens de utilizar, para definição da largura de banda, o critério de primeiro zero espectral ou o critério de Nyquist?
16. (capítulo 7) Como e que efeito se evita com um filtro de formatação de pulsos?
17. (capítulo 8) Como e que efeitos do canal de comunicação limitam a comunicação de sinais digitais?
18. (capítulo 8) Para que serve o padrão de olho?
19. (capítulo 9) Quais as causas de haver erros de bit numa transmissão digital? Como podem ser estes erros evitados/minimizados?
20. (capítulo 9) Explique o objetivo e o funcionamento do filtro adaptado de recepção.
21. (capítulo 9) Em que limites se situa a probabilidade de erro de bit?
22. (capítulo 9) Diga se são verdadeiras ou falsas, justificando, as seguintes afirmações:
 - a) O aumento do débito de símbolos faz diminuir a BER ;
 - b) A medida de qualidade de um sistema de comunicação digital é a SNR ;
 - c) Um código de linha com componente DC tem sempre um pior desempenho (maior BER) que o correspondente código sem componente DC. Estude duas situações distintas: 1) mantendo a potência recebida; 2) mantendo a “distância” entre símbolos.
23. (capítulo 11) Compare os atributos dos códigos de linha PRZ e PNRZ.
24. (capítulo 11) Quais as vantagens e desvantagens de uma transmissão binária em relação a uma transmissão PAM digital M -ária?
25. (capítulo 12) Quais as vantagens e desvantagens da introdução de códigos de controlo de erros numa transmissão digital?
26. (capítulo 12) Existe algum compromisso entre a razão de um código de correção de erros e a probabilidade de erro de bit após correção?
27. (capítulo 12) Quais as vantagens e desvantagens entre os códigos de bit de paridade e de Hamming?
28. (capítulo 12) Quais as vantagens e desvantagens entre os códigos de correção e de deteção de erros? Existe alguma gama de valores da probabilidade de erro de bit para a qual é preferível utilizar um ou outro método? Dê exemplos de aplicações que utilizem cada um dos métodos.

Exercícios resolvidos

1. (capítulo 2.3) Produza quantificadores *midtread* e *midrise* com oito intervalos de quantificação uniformes, para quantificar sinais até 1 V. Defina um código numérico sequencial do valor mais pequeno para o mais elevado.

Resolução:

- i. Pela equação (2.4), o intervalo de quantificação $\Delta_q = 2V/L = 2/8 = 250$ mV.
- ii. Os valores de quantificação em *midtread* incluem o valor 0 V, somando e subtraindo desde aí Δ_q , não ultrapassando as tensões máximas ± 1 V.
- iii. Os valores de decisão encontram-se a meio dos valores de quantificação, com exceção dos extremos cujos valores são $\pm\infty$.
- iv. Os valores de decisão em *midrise* incluem o 0 V, somando e subtraindo desde aí Δ_q , nunca ultrapassando as tensões máximas ± 1 V, com exceção dos extremos cujos valores são $\pm\infty$.
- v. Os valores de quantificação estão a meio dos valores de decisão.
- vi. Numera-se cada valor de quantificação, sequencialmente, do valor mais pequeno para o valor maior.

Quantificação <i>midtread</i>	
Valores de decisão	Valores de quantificação
∞	1
0,875	0,75
0,625	0,5
0,375	0,25
0,125	0
-0,125	-0,25
-0,375	-0,5
-0,625	-0,75
$-\infty$	

Quantificação <i>midrise</i>		Código
Valores de decisão	Valores de quantificação	dec (bin)
∞	0,875	7 (111)
0,75	0,625	6 (110)
0,5	0,375	5 (101)
0,25	0,125	4 (100)
0	-0,125	3 (011)
-0,25	-0,375	2 (010)
-0,5	-0,625	1 (001)
-0,75	-0,875	0 (000)
$-\infty$		

2. (capítulo 2.3) Utilize o quantificador *midrise* e consequente codificador do exercício 1 para quantificar um sinal sinusoidal de amplitude 1 V e frequência de 1327 Hz, $\cos(2\pi 1327t)$, amostrado com 8000 amostras por segundo (8 kHz). Represente as oito primeiras amostras e a respectiva sequência binária transmitida. Calcule o débito binário.

Resolução:

- i. A amostra de ordem n corresponde a substituir no sinal t por nT_s :

$$m[n] = \cos(2\pi 1327t)|_{t=nT_s} = \cos\left(2\pi \frac{1327}{8000}n\right)$$

- ii. Para cada amostra verifica-se em que intervalo do quantificador esta recai (tabela do exercício 1) e o respetivo código.

Amostra n	Amostragem $m[n]$	Quantificação		Codificação	
		$m_q[n]$	$q[n]$	decimal	binário
0	1,000	0,875	0,125	7	111
1	0,504	0,625	-0,121	6	110
2	-0,491	-0,375	-0,116	2	010
3	-1,000	-0,875	-0,125	0	000
4	-0,517	-0,625	0,108	1	001
5	0,478	0,375	0,103	5	101
6	1,000	0,875	0,125	7	111
7	0,530	0,625	-0,095	6	110

- iii. A sequência binária a ser transmitida corresponde à concatenação por ordem temporal dos códigos em binário: “111 110 010 000 001 101 111 110”
- iv. Note-se que para os cálculos do codificador apenas é necessário conhecer os valores de decisão e respetiva codificação, não sendo necessário conhecer os valores de quantificação. No decodificador apenas é necessário conhecer os valores de quantificação e respetiva codificação, não sendo necessário conhecer os valores de decisão.
- v. O débito binário é de (equação (2.7)) $R_b = f_s R = 8000 \times 3 = 24 \text{ kbit/s}$.

3. (capítulo 2) Considere um sinal sinusoidal com amplitude 1 V, amostrado a 8000 amostras/s e com um débito binário de 24 kbit/s.

- a) Calcule a potência do sinal, bem como a sua variância;
- b) Determine a SNR_{dB} de um codificador PCM uniforme com este sinal.

Resolução:

- i. a) A potência de um sinal sinusoidal é dada por $P = \frac{m_{max}^2}{2} = 0.5$ W. Este valor corresponde à variância pois o valor médio é 0 V.
- ii. b) O número de bits por amostra, dado pela equação (2.7), é de $24/8 = 3$ bits/amostra, que correspondem oito valores de quantificação.
- iii. Pela equação (2.4), o intervalo de quantificação é $\Delta_q = \frac{2}{8} = 250$ mV.
- vi. Utilizando a equação (2.8) a potência do ruído de quantificação vem:

$$\sigma_q^2 = \frac{\Delta_q^2}{12} = 0,0052 \text{ W, pelo que a } SNR_{dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{P}{\sigma_q^2} \right) = 19,82 \text{ dB.}$$
- vii. O mesmo valor pode ser obtido através da equação (2.10):

$$SNR_{dB} = 6,02R + 10 \log_{10} \left(\frac{3P}{V^2} \right) = 6,02 \times 3 + 10 \log_{10} \left(\frac{3 \times 0,5}{1^2} \right) = 19,82 \text{ dB.}$$

4. (capítulo 2) Um CD de áudio contém sinais em estéreo amostrados a 44,1 kHz e codificados em PCM uniforme com 16 bits por amostra.

- Quantos minutos de música podem ser gravados num CD de 700 Mbyte?
- Qual a banda máxima dos sinais contidos no CD?
- Considere um sinal com função densidade de probabilidade de amplitudes uniforme entre -1 e +1 V. Calcule a potência do sinal, bem como a sua variância;
- Determine a SNR_{dB} com este sinal;
- Determine a SNR_{dB} com um sinal de potência normalizada de -45 dB.

Resolução:

- a) O débito binário total em estéreo é de $2 \times 16 \times 44100 = 1,4112$ Mbit/s.
- Um CD com capacidade de 700 Mbyte (valor aproximado) poderá gravar até $8 \times 700 / 1,4112 = 3968$ segundos ou aproximadamente 66 minutos.
- b) A banda máxima do sinal, pelo teorema da amostragem de Nyquist-Shannon é de metade da frequência de amostragem, ou seja, 22,05 kHz.
- c) A função densidade de probabilidade de amplitudes do sinal de entrada uniforme entre -1 e +1 V, vale zero fora do intervalo e $\frac{1}{2}$ no intervalo para que a sua área seja um.
- Sendo a função densidade de probabilidade simétrica à volta do valor 0, o valor médio do sinal é 0 (equação (A.1.9)), pelo que a potência é igual à variância.

$$\bar{m} = \int_{-\infty}^{\infty} f_m(m) m dm = \frac{1}{2m_{max}} \frac{1}{2} m^2 \Big|_{-m_{max}}^{m_{max}} = \frac{1}{4m_{max}} (m_{max}^2 - m_{max}^2) = 0 \text{ V}$$

- A equação genérica da potência de um sinal com distribuição uniforme e amplitude m_{max} é dada (equação (A.1.10)) por $m_{max}^2/3$.
- Calculando diretamente a potência (equação (A.1.2)) vem:

$$P = \sigma_m^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f_m(m) m^2 dm = \frac{1}{2m_{max}} \frac{1}{3} m^3 \Big|_{-m_{max}}^{m_{max}} = \frac{1}{6m_{max}} (m_{max}^3 + m_{max}^3) = \frac{m_{max}^2}{3} = \frac{1}{3} \text{ W}$$

- d) A qualidade dos sinais CD áudio é de (equação (2.10)).

$$\text{ix. } SNR_{dB} = 6,02R + 10 \log_{10} \left(\frac{3P}{V^2} \right) = 6,02 \times 16 + 10 \log_{10} \left(\frac{3m_{max}^2}{3m_{max}^2} \right) = 96,3 \text{ dB}$$

- e) $SNR_{dB} = 6,02R + 10 \log_{10}(3) + 10 \log_{10}(P_n) = 96,3 + 10 \log_{10}(3) - 45 = 56,1 \text{ dB}$, mantendo elevada qualidade para uma larga gama de potência, embora à custa do elevado débito binário.

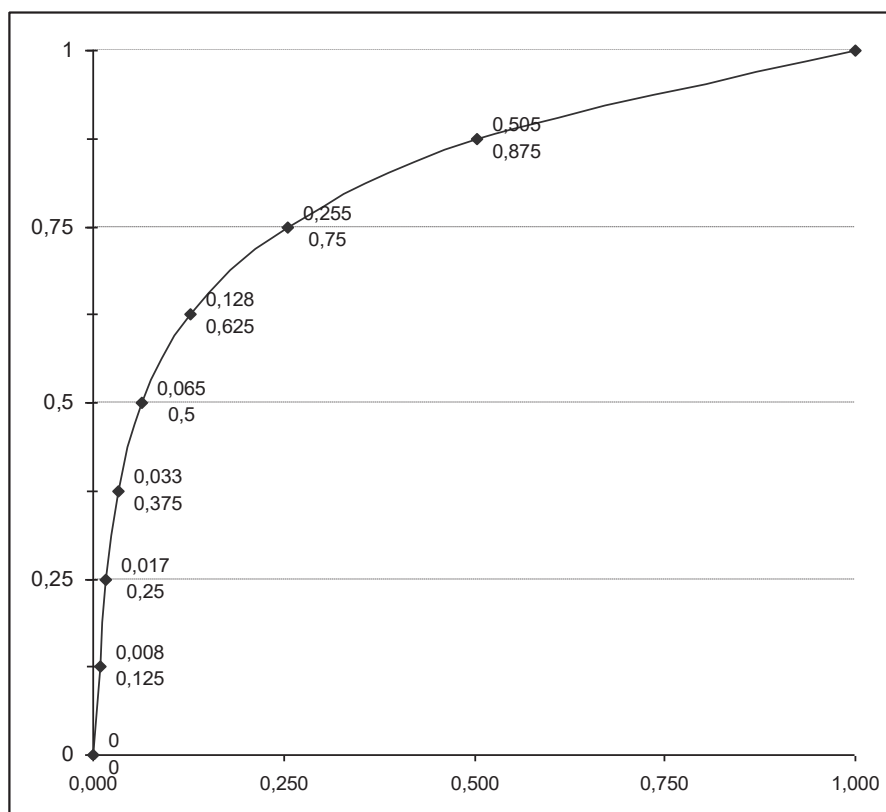
5. (capítulo 3.2) Produza um quantificador *companding* Lei-A ($A = 87,56$) com oito intervalos de quantificação.

Resolução:

- Gera-se um quantificador uniforme *midrise* (exercício 1).
- Gera-se o quantificador *companding* utilizando os valores do quantificador uniforme como entrada da não linearidade inversa da equação (3.10) (Lei-A).

Quantificação uniforme	
Valores de decisão	Valores de quantificação
∞	0,875
0,75	0,625
0,5	0,375
0,25	0,125
0	

<i>Companding</i> Lei-A (*)	
Valores de decisão	Valores de quantificação
0,255	0,505
0,065	0,128
0,017	0,033
0	0,008



(*) Comando Python/Octave/MATLAB – $g(m) = \text{compand}(m, 87.56, 1, 'A/\text{expander}')$

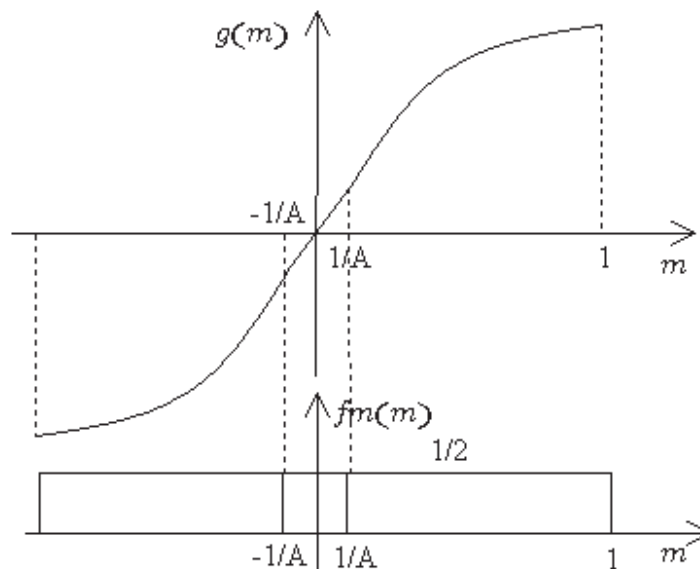
6. (capítulo 2.2) Considere um sinal com uma distribuição de amplitudes uniforme entre -1 e +1 V. A largura de banda do sinal é de 4 kHz e pretende-se um débito binário máximo de 48 kbit/s.
- Calcule a potência do sinal;
 - Determine a SNR_{dB} de um codificador PCM uniforme com este sinal;
 - Considere agora que utiliza um codificador PCM com *companding* usando Lei- A , sendo $A=87,56$. Calcule as percentagens de tempo em que o sinal está na zona linear e na zona logarítmica;
 - Calcule a SNR_{dB} na situação correspondente à alínea anterior e compare com o resultado obtido com PCM uniforme.
 - Qual a SNR_{dB} com quantificador ótimo para este sinal?

Resolução:

- a) A equação genérica da potência de um sinal com distribuição uniforme e amplitude m_{max} é dada por $P = m_{max}^2/3$, pelo que a potência é $1/3$ W.
- b) Pelo teorema da amostragem de Nyquist-Shannon a frequência mínima de amostragem (produz o débito binário mínimo) é o ritmo de Nyquist $2W = 8$ kHz.
- iii. O número de bits por amostra, dado pela equação (2.7), é de $48/8 = 6$ bits/amostra.
- iv. A SNR_{dB} em PCM uniforme é dada pelas equações (2.10) ou (2.12).

$$SNR_{dB} = 6,02R + 10 \log_{10} \left(\frac{3P}{V^2} \right) = 6,02 \times 6 + 10 \log_{10} \left(\frac{3}{12} \frac{1}{3} \right) = 36,12 \text{ dB.}$$

- v. c) A percentagem de tempo que o sinal se encontra na zona linear, $|m| < \frac{1}{A}$, corresponde à área da função densidade de probabilidade nesta condição, ou seja, à área do retângulo de lados $1/2$ e $2/A$. Esta área vale $1/A$. Como $A = 87,56$, a percentagem de tempo é de 1,14%.

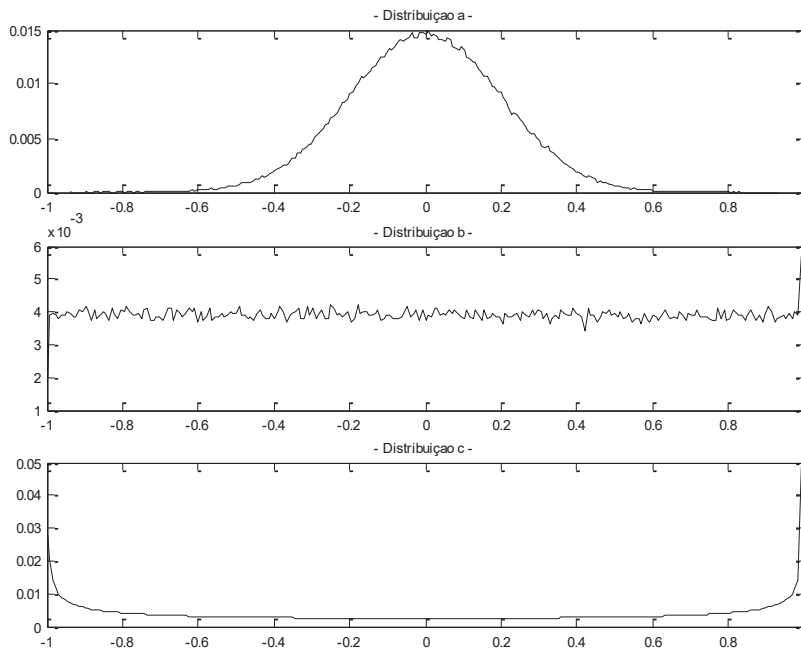


- vi. A percentagem de tempo na zona logarítmica é a restante, ou seja,
- $$1 - 0,0114 = 0,9886 = 98,86\%.$$
- vii. O sinal está praticamente sempre na zona logarítmica, pelo que a aproximação correspondente à equação (3.13) é válida.
- viii. d) A $SNR_{dB} = 6,02R - 10 = 6,02 \times 6 - 10 = 26,12$ dB.
- ix. Este valor é menor que o obtido através de um PCM uniforme porque a potência normalizada do sinal de entrada é bastante grande (-4,77 dB). Como se verifica pela figura 3.5, a SNR_{dB} em PCM uniforme é melhor que em *companding* quando a potência normalizada está acima dos -14,77 dB.
- x. e) O quantificador ótimo para um sinal com distribuição uniforme é de facto um quantificador uniforme. 36,12 dB é assim a melhor SNR_{dB} em PCM.

7. (capítulo 3.3) Considere três quantificadores, cada um com quatro valores de quantificação, cujos valores de quantificação são apresentados em cada linha da tabela seguinte. A última linha corresponde ao código binário de codificação de cada valor de quantificação.

	Valores de quantificação			
Quantificador 1	-0,8536	-0,2945	0,2983	0,8529
Quantificador 2	-0,7485	-0,2463	0,2535	0,7525
Quantificador 3	-0,3057	-0,0910	0,0948	0,3061
Código	00	01	10	11

Estes quantificadores são resultado do algoritmo de quantificação ótima Max-Lloyd, tendo como entrada as três funções densidade de probabilidade ilustradas na figura seguinte, referenciadas por a, b, e c.



- Identifique qual das funções densidade de probabilidade (a, b, c) corresponde a cada um dos quantificadores (1, 2, 3). Explique.
- Para o quantificador 1, calcule os valores de decisão.
- Considere amostras consecutivas com valores 0,5 -0,1 e 2. Qual a sequência binária transmitida supondo o quantificador 1?
- Descodifique quais os valores representados pela sequência “110100”.

Resolução:

- i. a) As três funções densidade de probabilidade distinguem-se por a (a) estar mais concentrada na origem, a (b) ser praticamente uniforme, e a (c) estar mais concentrada nos valores maiores em módulo. Assim, a função (a) corresponde ao quantificador com valores menores, o quantificador (3). A função (c) ao quantificador com valores maiores, o (1). À função (b) corresponde o quantificador que falta atribuir, o quantificador (2), mas este é de facto aquele que se aproxima de um quantificador uniforme.
- ii. b) Os valores de decisão estão a meio dos valores de quantificação (equação (2.2)). Assim:

Valores de quantificação	-0,8536		-0,2945		0,2983		0,8529
Valores de decisão		-0,5741		0,0019		0,5756	
Código	00		01		10		11

- iii. c) Para cada amostra verifica-se em que intervalo do quantificador esta recai (quantificação) e o respetivo código (codificação).

0,5 recai no intervalo $[0,0019 : 0,5756]$ que corresponde o código “10”;

-0,1 recai no intervalo $[-0,5741 : 0,0019]$ que corresponde o código “01”;

2 recai no intervalo $[0,5756 : \infty]$ que corresponde o código “11”. As distribuições têm o valor máximo de um, pelo que o quantificador está saturado;

- iv. A sequência binária a ser transmitida corresponde à concatenação por ordem temporal dos códigos em binário: “100111”.

- v. d) Divide-se a sequência em conjuntos de $R=2$ bits “11” “01” “00”, correspondendo cada conjunto ao código de cada amostra (3 amostras).

- vi. (Descodificação) Verifica-se para cada código o valor de quantificação,

“11” corresponde ao valor de quantificação 0,8529

“01” corresponde ao valor de quantificação -0,2945

“00” corresponde ao valor de quantificação -0,8536

8. (capítulo 4.1) Considere um sinal sinusoidal de amplitude 1 V e frequência 513 Hz, amostrado a 8 kHz e codificado em DPCM com preditor unitário. O número de bits de codificação por amostra é de dois. O valor de predição inicial é de 0 V.
- Calcule a autocorrelação normalizada do sinal de entrada para um atraso de uma amostra.
 - Calcule o ganho de predição e o valor máximo de quantificação a partir do valor da autocorrelação.
 - Qual a sequência binária a ser transmitida para as oito primeiras amostras?

Resolução:

$$i. a) r[1] = \cos\left(2\pi \frac{f_0}{f_s} 1\right) = \cos\left(2\pi \frac{513}{8000}\right) = 0,9199$$

$$ii. b) G_p \text{ dB} = 10 \log_{10}\left(\frac{1}{2(1-r[1])}\right) = 10 \log_{10}(6,244) = 7,96 \text{ dB}$$

$$V_1 = \frac{V}{\sqrt{G_p}} = \frac{V1}{\sqrt{6,25}} = 0,4 \text{ V}$$

- iii. c) Para evitar o ruído granular utiliza-se um quantificador *midtread*.

Segue-se a metodologia do problema 1 para projetar o quantificador:

Valores de decisão	Valores de quantificação	dec/bin
∞	0,4	3 (11)
0,3	0,2	2 (10)
0,1	0	1 (01)
-0,1	-0,2	0 (00)
$-\infty$		

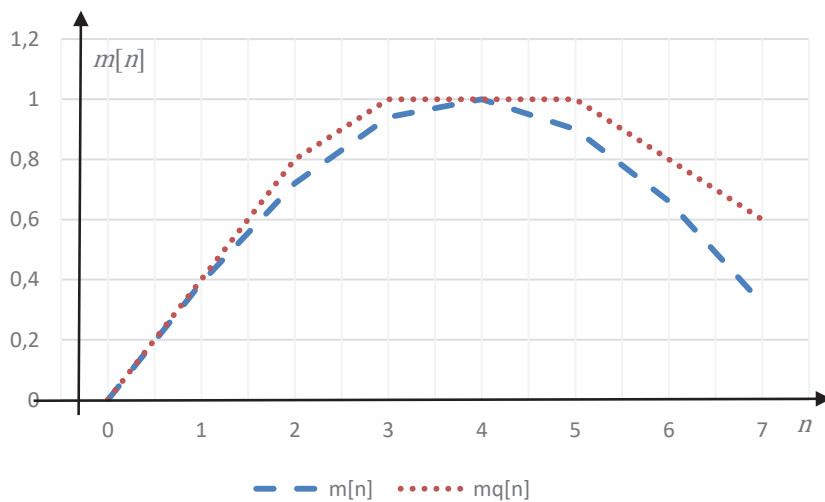
- iv. As oito primeiras amostras correspondem a substituir n de 0:7 na equação

$$m[n] = \sin(2\pi 513t)|_{t=nT_s} = \sin\left(2\pi \frac{513}{8000} n\right)$$

- v. Assume-se um valor predito inicial de 0 V.

- vi. Calcula-se o erro de predição como a diferença entre a amostra de entrada e a sua predição.
- vii. Quantifica-se este valor com o quantificador calculado em iv).
- viii. Calcula-se a amostra quantificada como a soma do valor predito com o erro de predição quantificado.
- ix. Este valor corresponde ao valor predito da próxima amostra.
- x. Repete-se vii) a x) até à última amostra (Figura 4.2 a)).
- xi. Note-se que para $n = 7$ o ruído de quantificação é maior que $\Delta/2$, devido à falta do valor $-0,4$ como valor de quantificação, uma vez que o quantificador é *midtread*.

n	$m[n]$	$m_p[n]$	$e[n]$	$e_q[n]$	$m_q[n]$	Código	Ruído
0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	01	0,0
1	0,3921	0,0	0,3921	0,4	0,4	11	-0,0078
2	0,7214	0,4	0,3215	0,4	0,7998	11	-0,0784
3	0,9352	0,7998	0,1354	0,2	0,9998	10	-0,0646
4	0,9992	0,9998	0,0	0,0	0,9998	01	0,0
5	0,9031	0,9998	-0,0966	0,0	0,9998	01	-0,0966
6	0,6625	0,9998	-0,3373	-0,2	0,7998	00	-0,1373
7	0,3157	0,7998	-0,4841	-0,2	0,599	00	-0,2841



9. (capítulo 4.1) Considere um codificador DPCM com preditor unitário e quantificador de quatro bits por amostra. O sinal de entrada é amostrado a 10 kHz, tem uma amplitude de 2 V, potência de 4/3 W e uma derivada máxima de 5 kV/s.

- Qual o débito binário?
- Qual o valor máximo de quantificação?
- Qual a relação sinal-ruído de quantificação?
- Qual o ganho de predição?
- Qual a potência do erro de predição?
- Qual a autocorrelação normalizada de 1.^a ordem?
- Qual a autocorrelação de 1.^a ordem?

Resolução:

i. a) O débito binário vem:

$$R_b = Rf_s = 40 \text{ kbit/s}$$

ii. b) Pelo valor mínimo da inequação (4.8):

$$V_1 = m'_{max} \frac{5000}{10000} = 0,5 \text{ V}$$

iii. c) A relação sinal-ruído de quantificação vem, pela equação (4.4):

$$SNR_{dB} = 6,02R + 10 \log_{10} \left(\frac{3P}{V_1^2} \right) = 6,02 \times 4 + 10 \log_{10} \left(\frac{3 \times 4}{3 \times 0,5^2} \right) = 36,12 \text{ dB.}$$

iv. d) O ganho de predição vem, pela equação (4.9):

$$G_p = \frac{P}{P_e} \approx \frac{m_{max}^2}{V_1^2} = \frac{2^2}{0,5^2} = 16 \text{ (12,04 dB)}$$

v. e) A potência do erro de predição vem, pela equação (4.9):

$$P_e = \frac{P}{G_p} = \frac{4}{3 \times 16} = 0,0833 \text{ W}$$

vi. f) A autocorrelação normalizada de 1.^a ordem (preditor unitário), pela equação (4.14):

$$G_p = \frac{1}{2(1 - r[1])} \quad r[1] = \frac{G_p - 0,5}{G_p} = 0,96875$$

vii. g) A autocorrelação de 1.^a ordem vem, desnormalizando pela potência:

$$R[1] = r[1] \times P = 1,29 \text{ W.}$$

10. (capítulo 4.1) Considere um codificador DPCM com preditor unitário. O sinal de entrada é uma senoide amostrada a 12566,37 Hz com amplitude de 2 V e frequência 1 kHz. Qual o valor máximo de quantificação?

Resolução:

viii. Solução 1 – A derivada máxima vem:

$$m'_{max} = 2\pi m_{max} f_m = 2\pi \times 2 \times 1000 = 12566,37 \quad \text{V/s}$$

ix. Pelo valor mínimo da inequação (4.8), o valor máximo de quantificação vem:

$$V_1 \approx \frac{m'_{max}}{f_s} = \frac{12566,37}{12566,37} = 1 \text{ V.}$$

x. Solução 2 – A autocorrelação normalizada de 1.^a ordem para uma senoide vem (A.5.6):

$$r[1] = \cos\left(2\pi \frac{1000}{12566,37}\right) = 0,877583.$$

xi. O ganho de predição vem, pela equação (4.15):

$$G_p = \frac{1}{2(1 - r[1])} = \frac{1}{2(1 - 0,877583)} = 4,084385.$$

xii. O valor máximo de quantificação vem, pela equação (4.10):

$$V_1 = \sqrt{\frac{m_{max}^2}{G_p}} = \sqrt{\frac{4}{4,084385}} = 0,989616.$$

xiii. Solução 3 – Utilizando a equação (A.6.1):

$$V_1 = 2m_{max} \sin\left(\pi \frac{f_0}{f_s}\right) = 4 \sin\left(\pi \frac{1000}{12566,37}\right) = 0,988616 \text{ V.}$$

xiv. As soluções 2 e 3 são exatas. A solução 1 tende para a solução exata à medida que a relação entre as frequências da senoide e de amostragem diminui.

11. (capítulo 4.2) Considere um sinal com função de autocorrelação dada por:

$$R[k] = 4,5 \cos(2\pi 0,0833k)$$

- Que tipo de sinal se trata? Qual a sua potência e amplitude?
- Qual a relação entre a frequência deste sinal e a frequência de amostragem?
- Qual a relação sinal-ruído obtida por um codificador PCM uniforme que opere com 10 bits por amostra?
- Qual a autocorrelação normalizada de 1.^a ordem?
- Calcule o ganho de predição utilizando um codificador DPCM com preditor adaptado;
- Calcule o valor máximo de quantificação do erro de predição, de tal modo que não haja saturação de declive, mas se maximize a relação sinal-ruído;
- Qual a relação sinal-ruído?
- Assumindo que a frequência de amostragem é de 10 kHz, qual o débito binário?
- Se codificar com mais um bit/amostra qual a nova SNR_{dB} e débito binário?
- Se voltar a utilizar 10 bit/amostra e duplicar a frequência de amostragem, qual a nova SNR_{dB} e débito binário?
- Compare os resultados obtidos em i) e j).

Resolução:

- a) Pelo Anexo 5, a função de autocorrelação corresponde à de um sinal sinusoidal.
- Sendo $R[k] = \frac{m_{max}^2}{2} \cos\left(2\pi \frac{f_m}{f_s} k\right) = P \cos\left(2\pi \frac{f_m}{f_s} k\right) = 4,5 \cos(2\pi 0,0833k)$,
então tem-se que $P = R[0] = 4,5$ W e $m_{max} = 3$ V.
- b) Por analogia das fórmulas a relação entre a frequência do sinal e a frequência de amostragem é $f_m/f_s = 0,0833$.
- c) A SNR_{dB} em PCM uniforme vem, com $V = m_{max}$, valor que evita a saturação de amplitude e maximiza a SNR_{dB} ,

$$SNR_{dB} = 6,02R + 10 \log_{10}\left(\frac{3P}{V^2}\right) = 61,96 \text{ dB.}$$

- d) A autocorrelação de 1.^a ordem vem $R[1] = 4,5 \cos(2\pi 0,0833) = 3,898$ W. A autocorrelação normalizada de 1.^a ordem vem $r[1] = \frac{R[1]}{P} = \frac{3,898}{4,5} = 0,867$.

vi. e) O ganho de predição, com preditor adaptado, vem:

$$G_p = \frac{1}{1-r[1]^2} = 4 \text{ (linear) e } G_{p\vec{r}} \text{ dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{1}{1-r[1]^2} \right) = 6,02 \text{ dB}$$

vii. f) O valor máximo de quantificação do erro de predição, de tal modo que não haja saturação de declive, mas se maximize a relação sinal-ruído, vem:

$$V_1 = \sqrt{\frac{V^2}{G_p}} = 1,5 \text{ V. O mesmo valor é obtido diretamente através de A.6.1.}$$

viii. Pelo mínimo da inequação (4.8), o valor aproximado de V_1 vem:

$$V_1 = m'_{max} T_s = 2\pi \frac{f_m}{f_s} = 2\pi \times 3 \times 0,0833 = 1,57 \text{ V.}$$

ix. g) A $SNR_{dB} = G_{p_{dB}} + SNR_{PCM_{dB}}(m[n]) = 67,98 \text{ dB}$.

$$\text{Ou } SNR_{dB} = 6,02R + 10 \log_{10} \left(\frac{3P}{V_1^2} \right) = 67,98 \text{ dB.}$$

x. h) O débito binário vem:

$$R_b = R f_s = 10 \times 10000 = 100 \text{ kbit/s}$$

xi. i) $R_b = R f_s = 11 \times 10000 = 110 \text{ kbit/s}$. Melhoria de 6,02 dB na qualidade, para 74 dB.

xii. j) Se a frequência duplicar,

$$R[k] = 4,5 \cos \left(2\pi \frac{0,0833}{2} k \right) \text{ W, e } r[k] = \cos(\pi 0,0833k)$$

$$r[1] = \cos(\pi 0,0833) = 0,966, \text{ e } G_{p_{dB}} = 11,74 \text{ dB}$$

$$SNR_{dB} = G_{p_{dB}} + SNR_{PCM_{dB}}(m[n]) = 73,7 \text{ dB.}$$

$$R_b = R f_s = 10 \times 20000 = 200 \text{ kbit/s}$$

xiii. k) De modo a melhorar a qualidade, é mais eficiente aumentar um bit de codificação por amostra do que aumentar a frequência de amostragem, pois produz melhor qualidade com menor débito binário. Deve ser utilizado sempre que possível o ritmo de Nyquist $2W$ e ajustar o número de bits de codificação por amostra à qualidade desejada.

12. (capítulo 4) Num codificador ADM o algoritmo de adaptação do passo de quantificação é dado por:

$$\Delta[n] = |\Delta[n - 1]| \left(1 + \frac{0,5b[n - 1]}{b[n]} \right).$$

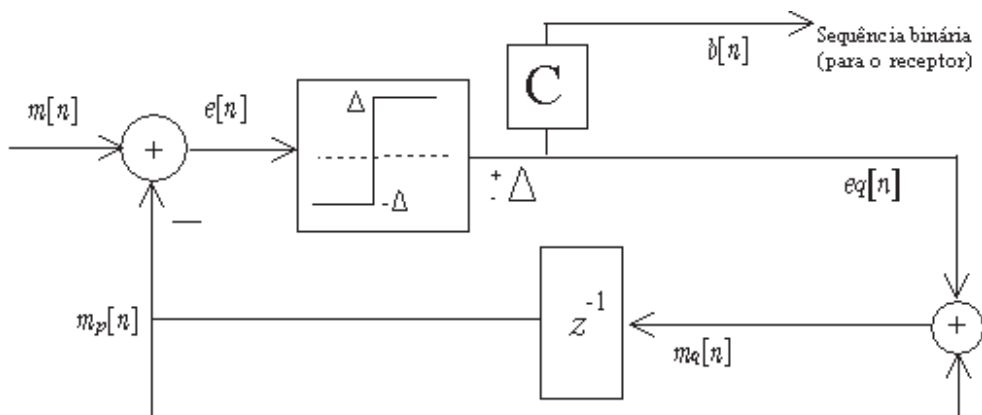
As amostras do sinal de entrada são:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$m[n]$	1	2	3	3	3	3	2	1	0	-1	-2

No instante $n = -1$ o valor do sinal quantificado $m_q[n] = 0$, o valor do passo de quantificação $\Delta[n] = 0,5$ V, e o nível lógico do bit de codificação é “1”. Calcule o sinal quantificado $m_q[n]$.

Resolução:

Tendo em atenção o esquema de blocos do codificador DM,



e as respetivas inicializações para $n = -1$, então:

n	$m[n]$	$m_p[n]$	$e[n]$	$\Delta[n]$	$b[n]$	$e_q[n]$	$m_q[n]$
-1				0,5	1		0
0	1	0	1	0,75	1	0,75	0,75
1	2	0,75	1,25	1,125	1	1,125	1,875
2	3	1,875	1,125	1,6875	1	1,6875	3,5625
3	3	3,5625	-0,5625	0,84375	-1	-0,84375	2,71875
4	3	2,71875	0,28125	0,421875	1	0,421875	3,140625
5	3	3,140625	-0,14063	0,210938	-1	-0,21094	2,929688
6	2	2,929688	-0,92969	0,316406	-1	-0,31641	2,613281
7	1	2,613281	-1,61328	0,474609	-1	-0,47461	2,138672
8	0	2,138672	-2,13867	0,711914	-1	-0,71191	1,426758
9	-1	1,426758	-2,42676	1,067871	-1	-1,06787	0,358887
10	-2	0,358887	-2,35889	1,601807	-1	-1,60181	-1,24292

13. (capítulo 4) Considere-se um sinal sinusoidal de amplitude 1 V e frequência 320 Hz, amostrado a 8 kHz. Calcule a SNR_{dB} para os diversos codificadores apresentados. Tome como referência oito bits por amostra.

Resolução:

- i. Como a amplitude da senoide é de 1 V a sua potência é de 0,5 W, que coincide com o seu valor normalizado.
- ii. Um codificador PCM uniforme com oito bits por amostra (64 kbit/s) produz uma SNR_{dB} de 49,9 dB (equação (2.12)).
- iii. Um codificador PCM *companding*, com $A = 87,56$, produz uma SNR_{dB} de 38,2 dB (equação (3.13)).
- iv. A função de autocorrelação de um sinal sinusoidal é uma função cosseno com a mesma frequência (A.5.6), $r[1] = \cos(2\pi 320kT_s)$. $r[1] = 0,968$, pelo que o ganho de predição de um codificador DPCM com adaptação do preditor vem $G_p = 16,17$ (linear) ou $G_p = 12,1$ dB (equação (4.19)).
- v. Note-se que para uma autocorrelação normalizada tão elevada praticamente não existe diferença de um preditor adaptado para um preditor unitário, que produz $G_p = 15,9$ (equação (4.15)), ou seja, 12,0 dB.
- vi. Um codificador DPCM com oito bits por amostra produz 62 dB de SNR_{dB} (equação (4.11), SNR_{dB} em PCM uniforme + G_p).
- vii. O valor máximo de quantificação é de $V_1 = 0,248$ V (equação (4.10)).
- viii. Para manter a mesma SNR_{dB} que em PCM uniforme são necessários apenas seis bits de codificação por amostra (48 kbit/s), que originam a perda de 2x6 dB correspondentes ao ganho de predição.
- ix. Se a frequência da onda sinusoidal subisse para 640 Hz a autocorrelação desceria para $r[1] = 0,876$ e $G_p = 6,3$ dB, pelo que a melhoria em relação ao codificador PCM seria equivalente a apenas um bit por amostra (56,2 dB).
- x. A mesma SNR_{dB} em DPCM com preditor adaptado e PCM dá-se para a frequência $f_s/4 = 2$ kHz (equação (4.19), $a_1 = r[1] = 0$). Acima desta frequência o codificador DPCM tem novamente melhor desempenho.

- xi. Com preditor adaptado a SNR_{dB} é sempre superior à do PCM. Para $a_1 = r[1] = 0$ o codificador DPCM degenera num codificador PCM.
- xii. A SNR_{dB} em PCM não varia com a variação da frequência do sinal.
- xiii. Relembre-se o ponto ix), em DPCM, da perda de 6 dB de SNR_{dB} quando se aumentou a frequência do sinal de entrada de 320 Hz para 640 Hz. Estes 6 dB poderiam ser recuperados aumentando a f_s de uma oitava, para os 16 kHz, pois novamente $r[1] = 0,968$ (ver ponto iv)).
- xiv. A somar a estes 6 dB, estariam mais 3 dB devido ao ganho de filtragem, num total de 65 dB. Contudo o débito binário total é de $16000 \times 8 = 128$ kbit/s.
- xv. Obtém-se melhores resultados mantendo a frequência de amostragem a 8 kHz e aumentando em dois o número de bits de codificação por amostra para $8+2 = 10$, ganhando 12 dB e não 9 dB, para um total de 68,3 dB.
- xvi. O débito binário é de apenas 80 kbit/s.
- xvii. Com modulação delta, $G_p = 15,9$ (ponto v, preditor unitário) e,
 $V_1 = V/\sqrt{G_p} = 250,6$ mV. O mesmo que A.6.2, $V_1 = 2V\sin(2\pi 320/8000)$.
- xxviii. Um valor aproximado para Δ é obtido utilizando o valor mínimo da inequação (4.21),
 $\Delta = m'_{max}T_s$, com $m'_{max} = m_{max}2\pi f_o = 2010,6$ v/s, $\Delta = 251,3$ mV.
- xix. Pela equação (4.23) a potência do ruído de quantificação é: $\sigma_q^2 = \Delta^2/3 = 20,9$ mW.
- xx. A potência do sinal de entrada é de 0,5 W e a SNR_{dB} corresponde a 13,78 dB.
- xxi. Este cálculo não entra em conta com o ganho de filtragem:
 $G_{f\ dB} = 10\log_{10}(f_s/2W) = 10\log_{10}(8000/(2 \times 320)) = 10,97$ dB.
- xxii. A SNR_{dB} total é de $13,78 + 10,97 = 24,75$ dB. A SNR_{dB} é mais baixa que em PCM uniforme, mas o débito binário também é de apenas $R_b = f_s = 8$ kbit/s.
- xxiii. Para que o débito binário seja o mesmo que em PCM uniforme, $R_b = f_s = 64$ kbit/s.
- xxiv. $r[1] = \cos(2\pi 320/f_s) = 0,9995$; $G_p = 30,06$ dB (1013,3); $\Delta = 31,4$ mV; $\sigma_q^2 = 0,329$ mW.
- xxv. $G_{f\ dB} = 10\log_{10}(f_s/2W) = 10\log_{10}(64000/(2 \times 320)) = 20$ dB.
- xxvi. Quer calculando SNR_{dB} pela relação entre potências, quer utilizando a equação (4.25), $SNR_{dB} = 31,82$ dB sem ganho de filtragem. Com ganho de filtragem obtém-se 51,82 dB, ligeiramente melhor que em PCM uniforme.

14. (capítulo 7) Considere um sinal com débito binário de 10 kbit/s, transmitido em PNRZ com amplitude 4 V.

- Calcule a energia por bit à saída do transmissor;
- Calcule a potência do sinal transmitido;
- Calcule a largura de banda utilizando o critério de primeiro zero espectral;
- Calcule o valor mínimo e máximo da largura de banda utilizando o critério de Nyquist (com filtro de formatação de pulsos);
- Qual a eficiência espectral?

Resolução:

- a) A energia por bit em PNRZ é dada pela equação (7.8), pelo que $E_b = A^2 T_b = 4^2 / 10000 = 1,6$ mJ.
- b) A potência do sinal transmitido é obtida da equação (7.5), $S_T = E_b / T_b = A^2 = 16$ W, que correspondem a (equações (A.2.5) e (A.2.6)):

$$S_{TdBW} = 10 \log_{10}(16) = 12,04 \text{ dBW} \quad , \text{ ou } \quad S_{TdBm} = 10 \log_{10} \left(\frac{16}{10^{-3}} \right) = 42,04 \text{ dBm.}$$

- Através da equação (A.2.7), pode-se relacionar o resultado em dBW e dBm.

$$S_{TdBm} = S_{TdBW} + 30 = 12,04 + 30 = 42,04 \text{ dBm.}$$

- c) Pela figura 7.3, para o código PNRZ o primeiro zero espectral ocorre para $R_b = 10$ kHz, pelo que é este o valor de B_T .
- d) A largura de banda é definida pela equação (7.14), com $\alpha = 0$ para o valor mínimo e $\alpha = 1$ para o valor máximo:
- vi.

$$B_T = \frac{R_b}{2} (1 + \alpha) = \frac{10000}{2} (1 + \alpha) = \begin{cases} 5 \text{ kHz} & \text{valor mínimo } \alpha = 0 \\ 10 \text{ kHz} & \text{valor máximo } \alpha = 1 \end{cases}$$

- e) A eficiência espectral, para o critério do primeiro zero espectral, vem, pela equação (7.6):

$$\rho = R_b / B_T = 1 \text{ bit/s/Hz (não tem unidades).}$$

- Com filtro de formatação de pulsos,

$$\rho = R_b / B_T = \begin{cases} 2 & \text{valor mínimo } \alpha = 0 \\ 1 & \text{valor máximo } \alpha = 1 \end{cases}$$

- Note-se que a largura de banda e consequentemente, a eficiência espectral são idênticas para os critérios do primeiro zero espectral e critério de Nyquist com $\alpha = 1$.

15. (capítulo 8) Considere um sinal com débito binário de 10 kbit/s, transmitido em PNRZ com potência 16 W (ver exercício 14). O canal tem uma dimensão de 2 km, atenuação de 3,01 dB/km, densidade espectral de potência do ruído de 10 μ W/Hz e atraso de propagação de 5 μ s/km.

- Calcule a potência do sinal recebido;
- Calcule a energia por bit à entrada do recetor;
- Considere para a definição da largura de banda o critério do 1.º zero espectral. Qual a relação sinal-ruído no canal de comunicação?
- Calcule a amplitude do sinal de código à entrada do recetor;
- Calcule o atraso de processamento, assumindo que o transmissor tem um atraso de 40 μ s e o recetor tem um atraso de 60 μ s;
- Calcule o atraso de propagação;
- Calcule o atraso de transmissão de um pacote com 2 kbit;
- Calcule a latência (atraso total) da transmissão.

Resolução:

- i. a) A atenuação para um canal de dimensão $D = 2$ km é (equação (8.12)) de,

$$A_{tdB/km} \times D = A_{tdB} = 3,01 \times 2 = 6,02 \text{ dB.}$$

- ii. Em relação linear a atenuação é obtida da equação (8.10),

$$A_t = \frac{S_T}{S_R} = 10^{6/10} = 4.$$

- iii. Sendo a potência transmitida de 16 W (exercício 14) a potência recebida resulta,

$$S_R = \frac{16}{4} = 4 \text{ W.}$$

que corresponde a:

$$10 \log_{10}(4) = 6,02 \text{ dBW,} \quad \text{ou} \quad 10 \log_{10}\left(\frac{4}{10^{-3}}\right) = 36,02 \text{ dBm.}$$

- iv. O mesmo valor pode ser obtido de (A.2.9):

$$S_{RdB} = S_{TdB} - A_{tdB} = 12,04 - 6,02 = 6,02 \text{ dBW,}$$

$$S_{RdBm} = S_{TdBm} - A_{tdB} = 42,04 - 6,02 = 36,02 \text{ dBm.}$$

- v. b) A energia recebida por bit corresponde a:

$$E_b = S_R T_b = 4/10000 = 400 \mu\text{J}.$$

- vi. Alternativamente pode-se afetar a energia transmitida (exercício 14) da atenuação, pelo que,

$$E_b = (1,6 \times 10^{-3})/4 = 400 \mu\text{J}.$$

- vii. c) A SNR_c no canal, relação entre a potência do sinal recebido e a potência do ruído na banda do sinal, vem (equação (8.2)):

$$SNR_c = \frac{S_R}{N_o B_T} = \frac{4}{20 \times 10^{-6} \times 10^4} = 20 \quad (13 \text{ dB})$$

- viii. d) A amplitude do sinal recebido é de:

$$A = \sqrt{S_R} = 2 \text{ V}.$$

- ix. e) O atraso de processamento dos equipamentos é a soma dos atrasos em cada equipamento, ou seja $100 \mu\text{s}$.

- x. f) O atraso de propagação em 2 km vem (equação (8.15)):

$$T_p = D \times T_{p/km} = 2 \times 5 \times 10^{-6} = 10 \mu\text{s}.$$

- xi. g) O atraso de transmissão vem (equação (8.17)):

$$T_t = \frac{N}{R_b} = \frac{2000}{10000} = 0,2 \text{ s}.$$

- xii. h) A latência da transmissão corresponde à soma do atraso de propagação e de transmissão:

$$T_L = T_e + T_p + T_t = 10^{-4} + 10^{-5} + 0,2 \approx 0,2\text{s}$$

sendo neste caso o atraso de transmissão dominante.

16. (capítulo 9.3) Considere um sinal com débito binário de 10 kbit/s, codificado em PNRZ e recebido com amplitude 2 V, num canal AWGN com densidade espectral de potência do ruído de 10 μ W/Hz. Considere para a definição da largura de banda o critério do 1.º zero espectral. Considere que no recetor o sinal é filtrado com um filtro passa-baixo de ganho unitário (figura 9.2) para cancelar o ruído fora da banda do sinal (ver exercícios 14 e 15).

- a) Qual a largura de banda do filtro?
- b) Calcule a potência do ruído após o filtro.
- c) A seguir ao filtro coloca-se um comparador (figura 9.2) para detetar qual o nível lógico do bit transmitido. Qual o valor ótimo de λ ?
- d) Qual a BER deste sistema?

Resolução:

- i. a) A largura de banda do filtro é a da largura de banda do sinal. Com o critério de primeiro zero espectral, $B_T = R_b = 10$ kHz (exercício 14).
- ii. b) A potência do ruído após este filtro vem, (equação (8.1)) $\sigma_n^2 = \sigma_c^2 = N_0 B_T = 0,2$ W.
- iii. c) O valor ótimo de λ vem, pela equação (9.5), equidistante dos valores correspondentes aos símbolos lógicos sem ruído, $\pm A = \pm 2$ V, correspondendo, como em qualquer código polar, $\lambda_{ot} = 0$ V.
- iv. d) Tendo em conta a figura 9.3, utilizando a equação (9.9) com o valor de d determinado pela equação (9.10), $d = 2$ V, a BER vem:

$$BER = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{d^2}{2\sigma_n^2}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{4}{2 \times 0,2}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(3,16) \approx 4 \times 10^{-6}$$

(Anexo 8).

ou

$$BER = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0(1 + \alpha)}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{400}{20 \times 2}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(3,16) \approx 4 \times 10^{-6}$$

17. (capítulo 9.6) Considere uma transmissão binária em PNRZ com um débito binário de 10 kbit/s, em que o sinal recebido tem uma amplitude de 2 V. O sinal é corrompido com ruído branco, gaussiano e aditivo, com densidade espectral de potência do ruído de $10 \mu\text{W/Hz}$ (ver exercícios 14, 15 e 16).

- Desenhe o recetor ótimo normado;
- Calcule as tensões sem ruído, à saída do filtro adaptado, no instante de amostragem;
- Calcule a potência do ruído à saída do filtro adaptado, no instante de amostragem;
- Calcule a probabilidade de erro de bit através da equação geral (9.9);
- Calcule a relação E_b/N_0 ;
- Calcule a probabilidade de erro de bit pela equação (9.36);
- Compare com o resultado do problema anterior.

Resolução:

- a) O recetor ótimo binário corresponde à figura 9.5 (filtro adaptado e detecção MAP, equivalente a MV desde que $p_0 = p_1$).
- $\lambda_{ot} = 0 \text{ V}$ (equação (9.5), polar, $y_0 = -y_1$)
- Pela equação (9.15), $c(t) = ks_1(t)$ (adaptado ao símbolo ao nível lógico “1”), que é um sinal constante (PNRZ) com amplitude $c(t) = \sqrt{R_b} = 100 \text{ V}$, de modo que $A_{eq} = 1 \text{ Hz}$ (filtro normado, equação (9.27)).
- b) Sendo um código polar as tensões sem ruído à saída do filtro adaptado normado, no momento de amostragem, são dadas por (equação (9.24)):

$$y_1 = +\sqrt{E_b} = A\sqrt{T_b} = 20 \text{ mV} \quad \text{e} \quad y_0 = -\sqrt{E_b} = -20 \text{ mV}.$$

- ou, alternativamente,

$$y_1 = \int_0^{T_b} c(t)s_1(t)dt = \int_0^{T_b} 100 \times 2dt = 200T_b = 20 \text{ mV}$$

e, por ser um código polar, $y_0 = -y_1 = -20 \text{ mV}$.

- c) A potência do ruído à saída do filtro adaptado é definida pela equação (9.21):

$$\sigma_n^2 = \frac{N_0}{2} A_{eq}.$$

vii. Com o recetor normado, $A_{eq} = 1$ Hz,

$$\sigma_n^2 = \frac{N_0}{2} = 10 \mu\text{W}.$$

viii. d) É válida a figura 9.3, com $d = y_1 - \lambda_{opt} = 20$ mV e, pela equação geral (9.9):

$$BER = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{d^2}{2\sigma_n^2}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{(20 \times 10^{-3})^2}{20 \times 10^{-6}}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(4,47) \approx 1,3 \times 10^{-10}.$$

ix. e) A relação sinal-ruído, E_b/N_0 , vem:

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{400 \times 10^{-6}}{20 \times 10^{-6}} = 20 \quad (13 \text{ dB})$$

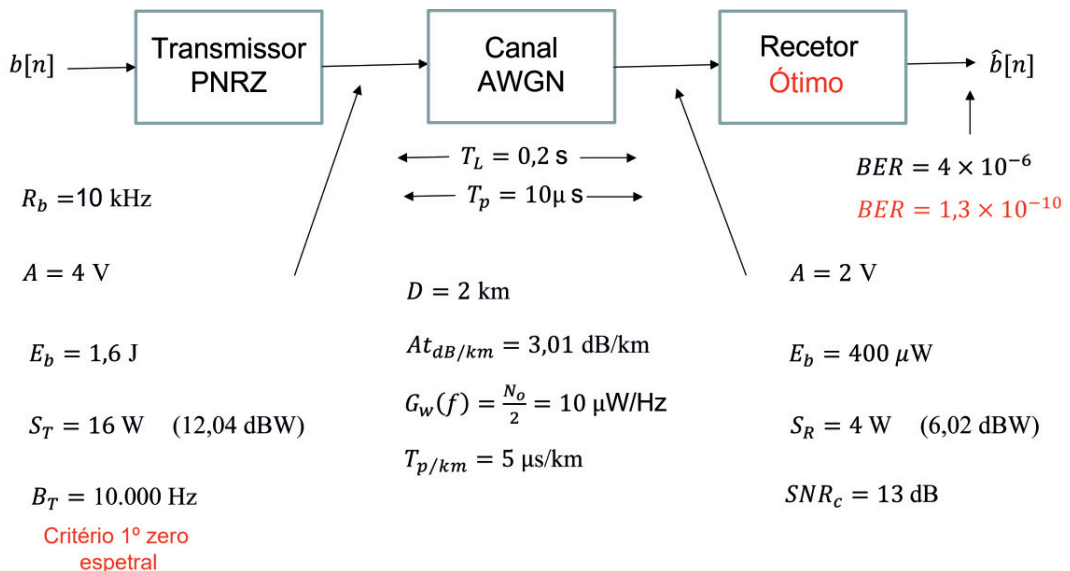
x. Este valor é igual à SNR_c pois $\rho = 1$ (equação (8.2)).

xi. f) Através da equação (9.36), a BER vem:

$$BER = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(4,47) \approx 1,3 \times 10^{-10}$$

xii. g) O resultado da BER é substancialmente melhor (menor) que o do exercício anterior (4×10^{-6}). Ao não se utilizar o filtro adaptado, mas sim um filtro de banda, como no exercício anterior, o ruído é dependente da banda do sinal. Para o critério do primeiro zero espectral o argumento da função erfc é $\sqrt{2}$ menor que utilizando o filtro adaptado.

xiii. Resumo dos resultados dos exercícios 14 a 17:



18. (capítulo 9.6) Considere uma transmissão binária em PNRZ com um débito binário de 10 kbit/s, em que o sinal recebido tem uma amplitude de 2 V. O sinal é corrompido com ruído branco, gaussiano e aditivo, com densidade espectral de potência do ruído de $10 \mu\text{W/Hz}$ (ver exercícios 14, 15, 16 e 17).

- Calcule as tensões sem ruído, à saída do filtro adaptado, no instante de amostragem, assumindo que a amplitude do sinal com que se está a fazer o produto interno é de 10 V;
- Calcule a potência do ruído à saída do filtro adaptado;
- Calcule a probabilidade de erro de bit através da equação geral (9.9);
- Compare com os resultados obtidos no exercício anterior.

Resolução:

xiv. a) Com $c(t) = 10 \text{ V}$,

$$y_1 = \int_0^{T_b} c(t)s_1(t)dt = \int_0^{T_b} 10 \times 2dt = 20T_b = 2 \text{ mV},$$

e, por ser um código polar, $y_0 = -2 \text{ mV}$.

xv. b) A área equivalente do ruído vem $A_{eq} = 10^2 T_b = 0,01 \text{ Hz}$, pelo que a potência do ruído vem:

$$\sigma_n^2 = \frac{N_0}{2} A_{eq} = 10 \times 10^{-6} \times 0,01 = 10^{-7} \text{ W}.$$

xvi. c) É válida a figura 9.3, com $d = y_1 - \lambda_{opt} = 2 \text{ mV}$ e, pela equação geral (9.9):

$$BER = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{d^2}{2\sigma_n^2}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{(2 \times 10^{-3})^2}{2 \times 10^{-7}}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(4,47) \approx 1,3 \times 10^{-10}.$$

xvii. d) A BER calculada das três maneiras é sempre a mesma, sendo nomeadamente independente da amplitude do vetor de base com que se efetua o produto interno.

19. (capítulo 9.7) Considere uma transmissão binária com código NRZI (unipolar). A amplitude do sinal recebido é de 3 V. O canal de comunicação é AWGN com densidade espectral de potência do ruído de $0,5 \times 10^{-6}$ W/Hz, uma atenuação de 6,02 dB/km e mede 3 km. Pretende-se uma probabilidade de erro de bit de $2,2 \times 10^{-5}$.

- Calcule a energia por bit.
- Calcule o débito binário.
- Considere o critério do primeiro zero espectral. Qual a relação sinal-ruído no canal de comunicação?
- Qual a potência do sinal transmitido?
- Qual a amplitude do sinal transmitido?
- Qual a energia média por bit à saída do transmissor?

Resolução:

- i. a) Para o código NRZI,

$$BER = \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}} \right) = 2,2 \times 10^{-5} \Rightarrow \sqrt{\frac{E_b}{2N_0}} = 3,$$

- ii. e a energia média por bit no recetor vem $E_b = 9 \times 2 \times N_0 = 9 \times 2 \times 10^{-6} = 18 \mu\text{J}$.

iii. b) $R_b = \frac{A^2}{2E_b} = \frac{3^2}{2 \times 18 \times 10^{-6}} = 250 \text{ kbit/s}$.

- iv. c) Com o critério do 1.º zero espectral $B_T = R_b = 250 \text{ kHz}$.

v. A potência recebida vem $S_R = \frac{A^2}{2} = 4,5 \text{ W}$. (6,53 dBW).

vi. Pela equação (8.2) a $SNR_c = \frac{S_R}{N_0 B_T} = \frac{4,5}{10^{-6} \times 250 \times 10^3} = 18$ (12,6 dB).

- vii. d) 6,02 dB de atenuação/km correspondem em relação linear a 4 atenuação/km. Em 3 km a atenuação é de $4^3 = 64$ (18,06 dB).

viii. Pela equação (8.10), $S_T = 288 \text{ W}$ (24,5 dBW).

- ix. Calculando de outra forma, a atenuação é de:

$$A_{tdB} = D \times At_{dB/km} = 3 \times 6,02 = 18,06 \text{ dB}.$$

x. e $S_{TdB} = S_{RdB} + A_{tdB} = 24,5 \text{ dBW}$.

xi. e) A amplitude no transmissor vem, $A = \sqrt{2S_T} = 24 \text{ V}$.

xii. f) A energia média por bit no transmissor vem, $E_b = S_T T_b = \frac{288}{250000} = 1,15 \text{ mJ}$.

20. (capítulo 9.7) Considere uma transmissão segundo a recomendação IEEE 802.3u *Fast Ethernet* a 100 Mbit/s (informação) em par de cobre, com um código MLT-3. O canal de comunicação é do tipo AWGN com densidade espectral de potência de ruído de 10^{-10} W/Hz. A amplitude do sinal no recetor é de 1 V.

- Explique a necessidade da introdução de um código de sincronismo de bit 4B/5B.
- Qual o débito binário após a inclusão deste código?
- Qual a distância entre símbolos?
- Desenhe o recetor ótimo calculando todos os parâmetros.
- Qual a probabilidade de erro deste sistema?
- Qual a largura de banda mínima que o canal deve ter?
- Explique porque é que este código é mais indicado para uma transmissão por cabo do que por fibra ótica.

Resolução:

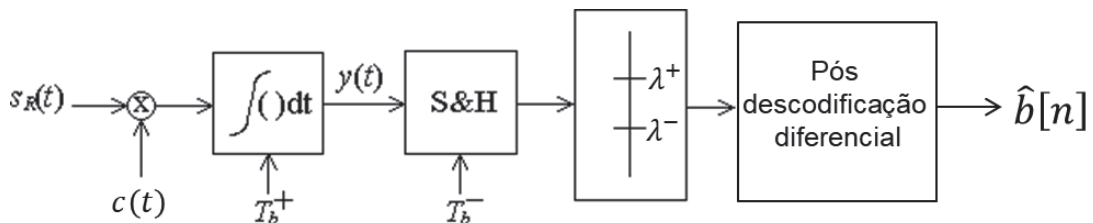
i. a) Sendo o MLT-3 um código diferencial NRZ em que se mantém o símbolo anterior para codificar o bit ao nível lógico “0”, o sincronismo pode-se perder quando da transmissão de uma sequência longa de bits ao nível lógico “0” pois não se produzem transições no sinal. A codificação 4B/5B transforma blocos de quatro bits em blocos de cinco bits, conforme tabela 7.1, de tal modo que são garantidas sempre duas transições dentro do bloco (dois bits ao nível lógico “1”) com código diferencial.

ii. b) O débito binário após a inclusão do código 4B/5B é de:

$$R_b = \frac{5}{4} R_b(\text{informação}) = \frac{5}{4} 100 \times 10^6 = 125 \text{ Mbit/s}$$

iii. c) Uma vez que existe um símbolo central correspondente a zero V e os outros dois símbolos estão à distância de A V, a distância entre símbolos é de $A = 1$ V.

iv. d) O recetor ótimo para o código MLT-3 corresponde ao da figura 9.11.



v. $c(t)$ é dado por,

$$A_{eq} = 1 = \int_0^{T_b} C^2 dt = C^2 T_b \Rightarrow c(t) = C = \sqrt{R_b}.$$

vi. As tensões à saída do filtro são dadas por:

vii. $y^0 = 0 \text{ V}$

viii.

$$y^+ = \int_{T_b} ACdt = A\sqrt{T_b} = 1 \times \sqrt{1/(125 \times 10^6)} = 89,4 \mu\text{V}.$$

ix. $y^- = -y^+ = -89,4 \mu\text{V}.$

x. As tensões de comparação são:

$$\lambda^+ = \frac{y^+ - y^0}{2} = 44,7 \mu\text{V} \qquad \lambda^- = -\lambda^+ = -44,7 \mu\text{V}$$

xi. e)

$$E_b = \frac{A^2}{2} T_b = \frac{1}{2} \frac{1}{125 \times 10^6} = 4 \text{ nJ}$$

$$BER = \frac{3}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_o}} \right) = \frac{3}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{4 \times 10^{-9}}{2 \times 2 \times 10^{-10}}} \right) = \frac{3}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{10}) = 1,16 \times 10^{-5}$$

xii. f)

$$B_T = \frac{R_b}{4} = 31,25 \text{ MHz}.$$

xiii. g) Este é o código de transmissão binária que, para o mesmo débito binário, ocupa a menor largura de banda, o que é importante numa ligação por cabo, já a trabalhar nas centenas de MHz. Contrariamente, a fibra ótica é capaz de suportar débitos binários na ordem dos GHz. Mas porque não utilizar mesmo assim este código em fibra ótica? Porque a utilização de tensões negativas (fase na luz) torna mais difícil a implementação de transmissores e recetores e a probabilidade de erro em MLT-3 é a pior de todos os códigos para transmissão binária, para a mesma relação E_b/N_o .

21. (capítulo 10) Considere uma transmissão digital num canal AWGN passa-baixo de largura de banda 1,5 MHz e densidade espectral de potência do ruído de 10^{-9} W/Hz. O débito binário é de 10 Mbit/s e pretende-se uma probabilidade de erro de bit máxima de 4×10^{-13} .

- Qual o número mínimo de bits por símbolo?
- Qual o valor máximo do fator de decaimento?
- Calcule o débito de símbolos;
- Qual a energia mínima por bit do sinal recebido?
- Qual a energia mínima por símbolo?
- Qual a potência mínima a ser recebida?
- Qual a tensão mínima entre símbolos adjacentes?
- Se o método de disposição de bits por símbolo não seguisse um código Gray, mas fosse aleatório, qual o aumento da probabilidade de erro de bit?

Resolução:

xiv. a) A transmissão tem de ser PAM digital M -ária pois para uma transmissão binária:

$$B_c = 1,5 \times 10^6 < B_T = \frac{R_b}{4} = 2,5 \times 10^6$$

que é o mínimo conseguido para uma transmissão binária (MLT-3).

xv. O número mínimo de bits por símbolo vem (equação (10.7) com $\alpha = 0$), utilizando toda a largura de banda do canal:

$$K \geq \frac{R_b}{2B_c} = \frac{10 \times 10^6}{2 \times 1,5 \times 10^6} = 3,3 \text{ bit/símbolo}$$

e sendo o número de bits por símbolo um número inteiro, o valor mínimo de K é de quatro bits por símbolo.

xvi. b) Ao realizar a aproximação para K inteiro, aparecendo este termo no denominador da equação (10.7), a largura de banda do sinal diminui, dando possibilidade a que o fator de decaimento deixe de ser zero. O fator de decaimento máximo é calculado de modo a não ser ultrapassada a largura de banda B_c do canal de comunicação:

$$\alpha = \frac{2KB_c}{R_b} - 1 = \frac{2 \times 4 \times 1,5 \times 10^6}{10 \times 10^6} - 1 = 0,2.$$

xvii. c) O débito de símbolos vem:

$$R_s = \frac{R_b}{K} = \frac{10 \times 10^6}{4} = 2,5 \times 10^6 \text{ símbolos/s (baud)}$$

xviii. d) A energia por bit do sinal recebido é calculada de:

$$BER = \frac{(M-1)}{KM} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{3K}{(M^2-1)} \frac{E_b}{N_0}} \right) =$$

$$= \frac{15}{32} \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{12}{255} \frac{E_b}{N_0}} \right) = 0,46875 \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{0,047059 \frac{E_b}{N_0}} \right) = 4 \times 10^{-13}$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{0,047059 \frac{E_b}{N_0}} \right) = 8,53 \times 10^{-13}; \quad \sqrt{0,047059 \frac{E_b}{N_0}} \approx 5$$

$$0,047059 \frac{E_b}{N_0} = 25 \quad \frac{E_b}{N_0} = 531 \text{ (27,25 dB)}$$

$$E_b = 531 N_0 = 531 \times 2 \times 10^{-9} = 1,063 \mu\text{J}.$$

xix. e) Da equação (10.6), a energia por símbolo corresponde a:

$$E_s = K E_b = 4,25 \mu\text{J}$$

xx. f) $S_R = E_b \times R_b = 10,6 \text{ W}$ $S_{RdBW} = 10 \log_{10}(S_R) = 10,3 \text{ dBW}.$

xxi. g) Da equação (10.4):

$$E_s = \frac{a^2 (M^2 - 1)}{4} \frac{1}{3} \tau_s \quad \text{e} \quad a = \sqrt{\frac{12 E_s R_s}{(M^2 - 1)}} = 0,7 \text{ V}.$$

xxii. h) Comparando as equações (10.14) e (10.16), o aumento da BER vem:

$$\frac{K+1}{2} = 2,5,$$

xxiii. ou seja,

$$BER = 2,5 \times 4 \times 10^{-13} = 10^{-12}.$$

22. (capítulo 10.8) Considere uma transmissão digital em PAM digital M -ária num canal AWGN passa-baixo de largura de banda 4 kHz e densidade espectral de potência do ruído de $2,5 \times 10^{-7}$ W/Hz. A distância entre símbolos no recetor é de 0,4 V, com uma limitação de potência recebida de 250 W.

- Qual o número máximo de bits por símbolo?
- Qual o débito binário máximo?
- Qual a probabilidade de erro de bit?
- Qual a relação sinal-ruído no canal de comunicação?
- Qual a capacidade de canal para a mesma relação sinal-ruído? Compare com o débito binário máximo em PAM digital M -ária (regra de Hartley).
- Qual a relação sinal-ruído para o mesmo débito binário, assumindo a Lei de Shannon-Hartley? Compare com a relação sinal-ruído em PAM digital M -ária.

Resolução:

- i. a) Limitando a potência recebida a 250 W,

$$S_R = a^2 \frac{(M^2 - 1)}{12} < 250 \text{ W, ou seja, } M < 136,9$$

Sendo M uma potência de 2, toma-se o valor maior possível, $M=128$ e $K=7$ bit/símbolo.

Nesta situação,

$$S_R = a^2 \frac{(M^2 - 1)}{12} = 218,44 \quad (23,4 \text{ dBW})$$

- ii. b) O débito binário máximo ($\alpha = 0$) segundo a regra de Hartley (equações (10.21) e (10.23)) vem:

$$C_{(\text{Hartley})} = B_c 2K = B_c \log_2(M^2) = B_c \log_2 \left(1 + \frac{12S_R}{a^2} \right) = 56 \text{ kbit/s}$$

- iii. c) Uma vez que:

$$B_c = \frac{R_S}{2} \qquad \tau_s = \frac{1}{2B_c} = 125 \mu\text{s}$$

$$E_{min} = \frac{a^2 \tau_s}{4} = \frac{0,4^2 \tau_s}{4} = 5 \mu\text{J}$$

iv. A BER vem:

$$BER = \frac{(M-1)}{KM} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_{min}}{N_o}} \right) = 0,142 \times \operatorname{erfc}(3,1628) = 1,1 \times 10^{-6},$$

xxiv. d) A SNR_C vem:

$$SNR_C = \frac{S_R}{B_C N_o} = 109220 (50,38 \text{ dB})$$

xxv. e) Pela equação (10.24), para a mesma relação sinal-ruído e mesma largura do canal,

$$C = B_c \log_2(1 + SNR_C) = 66947,56 \text{ bit/s.}$$

O débito binário máximo em transmissão PAM digital M -ária é de 0,836 deste valor. Note-se ainda que a probabilidade de erro em PAM digital M -ária é de $1,1 \times 10^{-6}$, enquanto Shannon pressupõe uma BER arbitrariamente pequena, mesmo com o aumento do débito binário.

f) Igualando as equações (10.23) e (10.24), para o mesmo débito binário e mesma largura de banda,

$$\frac{12S_R}{a^2} = \frac{S_{RShannon}}{N_o B_C}$$

e se fosse possível atingir a capacidade de canal seria possível reduzir a potência do sinal recebido para:

$$S_{RShannon} = \frac{12N_o B_C}{a^2} \quad S_R = 0,15S_R = 32,77 \text{ W} (15,15 \text{ dBW})$$

A SNR_C , assumindo que era possível transmitir à capacidade de canal, vem:

$$SNR_{CShannon} = \frac{S_{RShannon}}{B_C N_o} = 16383 \quad (42,14 \text{ dB})$$

Este valor pode também ser obtido comparando as equações (10.23) e (10.24),

$$SNR_{CShannon} = M^2 - 1,$$

0,15 da relação sinal-ruído em transmissão PAM digital M -ária. Note-se ainda que a probabilidade de erro em transmissão PAM digital M -ária é de $1,1 \times 10^{-6}$, enquanto Shannon pressupõe uma BER arbitrariamente pequena.

23. (capítulo 12.3) Considere uma transmissão com débito binário de 1 Mbit/s e probabilidade de erro 10^{-6} , de blocos de 10 bits, incluindo um bit de paridade.

- a) Qual a razão do código?
- b) Qual a probabilidade de retransmissão?
- c) Qual a probabilidade de erro de bit após detecção e reenvio?
- d) Qual o tempo médio entre erros?
- e) Qual a capacidade de detecção e correção?

Resolução:

- i. a) Pela equação (12.12), e sendo o número total do bloco, $n = 10$,

$$R_c = \frac{n-1}{n} = \frac{9}{10} = 0,9$$

- ii. b) Pela equação (12.9),

$$P_r = P(X = 1) \approx nBER = 10^{-5}.$$

- iii. c) Pela equação (12.11),

$$BER' \approx \frac{2}{n}P_b \approx (n-1)BER^2 = 9 \times 10^{-12}.$$

- iv. d) Pela equação (12.18), antes da detecção,

$$T_e = \frac{1}{R_b BER} = \frac{1}{10^6 \times 10^{-6}} = 1 \text{ s (1 erro em cada milhão de bits)}$$

e depois da detecção e retransmissão,

$$T'_e = \frac{1}{R'_b BER'} = \frac{1}{0,9 \times 10^6 \times 9 \times 10^{-12}} = 123 \text{ ks}$$

ou seja, 1 erro em cada dia e 10,32 horas.

- v. e) Num código de bit de paridade, dois erros levam a que a paridade esteja correta, coincidindo os bits recebidos com uma palavra de código. Com um bit errado a paridade não está correta detetando-se erros, mas o bloco recebido pode ter sido gerado por n palavras de código (uma por cada um dos n bits).

25. (capítulo 12.8) Considere uma transmissão digital binária polar, com um débito binário de 10 kbit/s (no canal de comunicação, com ou sem código de correção de erros) com uma relação $E_b/N_o = 9$. Calcule o tempo médio entre erros de bit nas seguintes condições:

- Sem código de correção ou detecção;
- Com código de repetição de três bits;
- Com código de repetição de cinco bits;
- Com código de Hamming H(7,4);
- Compare os resultados anteriores.

Resolução:

- i. A BER desta transmissão (polar) é determinada por:

$$BER = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_o}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{9}) \approx 10^{-5}$$

- ii. a) Sem códigos de correção de erros, o tempo médio entre erros (equação (12.8)) vem:

$$T_e = \frac{1}{R_b BER} = \frac{1}{10^4 10^{-5}} = 10 \text{ s}$$

- iii. b) Para um código (de correção) de repetição de três bits, a probabilidade de erro de bit (equação (12.13)) após correção vem:

$$BER' = \frac{C_{n+1}^n}{2} BER^{\frac{n+1}{2}} = C_2^3 BER^2 = 3 \times 10^{-10}$$

- iv. A razão do código e o débito binário dos bits da informação virão:

$$R_c = \frac{k}{n} = \frac{1}{3} = 0,33 \quad R_b' = \frac{kR_b}{n} = \frac{1}{3} 10^4 = 3,33 \text{ kbit/s.}$$

- v. O tempo entre erros vem (equação (12.8)):

$$T_e' = \frac{1}{R_b' BER'} = \frac{1}{3,33 \times 10^3 \times 3 \times 10^{-10}} = 10^6 \text{ s} \quad (11,6 \text{ dias}).$$

- vi. c) Para um código de correção de repetição de cinco bits, a probabilidade de erro de bit após correção vem:

$$BER' = \frac{C_{n+1}^n}{2} BER^{\frac{n+1}{2}} = C_3^5 BER^3 = 10 \times 10^{-15}$$

- vii. A razão do código e o débito binário dos bits da informação virão:

$$R_c = \frac{k}{n} = \frac{1}{5} = 0,2 \quad R_b' = \frac{kR_b}{n} = \frac{1}{5} 10^4 = 2 \text{ kbit/s.}$$

viii. O tempo entre erros vem:

$$T'_e = \frac{1}{R'_b BER'} = \frac{1}{2 \times 10^3 \times 10^{-14}} = 5 \times 10^{10} \text{ s} \quad (15,85 \text{ séculos}).$$

ix. d) Para um código de Hamming H(7,4), a probabilidade de erro de bit após correção vem:

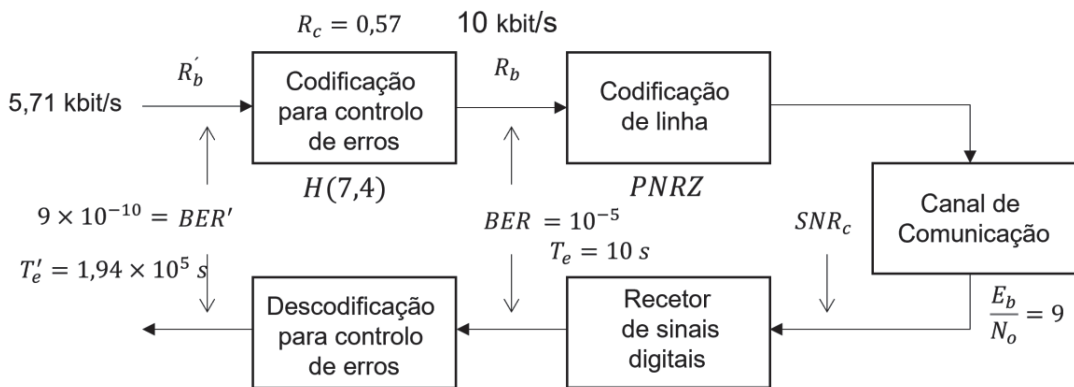
$$BER' = 9BER^2 = 9 \times 10^{-10}$$

x. A razão do código e o débito binário dos bits de informação (equação (12.2)) virão:

$$R_c = \frac{k}{n} = \frac{4}{7} = 0,57 \quad R'_b = \frac{kR_b}{n} = \frac{4}{7} 10^4 = 5,71 \times 10^3 \text{ bit/s},$$

xi. e o tempo entre erros após correção vem:

$$T'_e = \frac{1}{R'_b BER'} = \frac{1}{5,71 \times 10^3 \times 9 \times 10^{-10}} = 1,94 \times 10^5 \text{ s} \quad (54 \text{ horas})$$



xii. e) A diminuição da razão do código, devido ao aumento do número de bits de paridade introduzidos, faz diminuir o número de erros e, portanto, aumenta o tempo médio entre erros. No entanto o débito binário dos bits da informação também diminui, sendo necessário mais tempo para transmitir a mesma informação.

	Razão do código	Débito dos bits da informação [kbit/s]	BER'	T_e [s]
Sem código	1	10	10^{-5}	10
H(7,4)	0,57	5,71	9×10^{-10}	$1,94 \times 10^5$
R3	0,33	3,33	3×10^{-10}	10^6
R5	0,2	2	10×10^{-15}	5×10^{10}

Tabela síntese dos resultados.

26. (capítulo 12.8) Considere uma transmissão digital binária polar, com um débito binário de 10 kbit/s e uma relação $E_b/N_o = 9$. Calcule o tempo médio entre erros de bit nas seguintes condições:

- Sem código de correção ou detecção;
- Com código de Hamming H(7,4) mas mantendo o débito binário dos bits de informação;
- Compare o resultado anterior com o resultado obtido mantendo o débito binário no canal (problema anterior);
- Qual a variação de amplitude do sinal que deve produzir de modo que o tempo médio entre erros mantendo o débito binário dos bits de informação seja o mesmo que mantendo o débito binário no canal (problema 25).

Resolução:

i. a) A BER desta transmissão é dada por:

$$BER = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_o}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{9}) \approx 10^{-5}$$

ii. Sem códigos de correção ou detecção o tempo médio entre erros (equação (12.8)) vem:

$$T_e = \frac{1}{R_b BER} = \frac{1}{10^4 10^{-5}} = 10 \text{ s.}$$

iii. b) A razão do código e o débito binário no canal virão:

$$R_c = \frac{k}{n} = \frac{4}{7} = 0,57 \quad R_b = \frac{nR'_b}{k} = \frac{7 \times 10^4}{4} = 17,5 \text{ kbit/s}$$

iv. A variação do débito binário em relação à situação sem controlo vem (equação (12.2)),

$$R_b = \frac{R_b(\text{sem controlo})}{R_c} = \frac{R'_b}{R_c}$$

o que muda o tempo de bit e na mesma proporção a energia de bit. A nova relação sinal-ruído vem

$$\frac{E_b}{N_o} = \frac{S_R T_b}{N_o} = \frac{S_R T_b T'_b}{N_o T'_b} = \frac{S_R T'_b R'_b}{N_o R_b} = \frac{E_b}{N_o} (\text{sem controlo}) R_c$$

v. o que muda na mesma proporção a energia de bit. A nova relação sinal-ruído vem:

$$\frac{E_b}{N_o} = \frac{4 E_b}{7 N_o} (\text{sem controlo}) = 5,14$$

vi. e a nova BER vem:

$$BER = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{5,14}) = 67 \times 10^{-5}$$

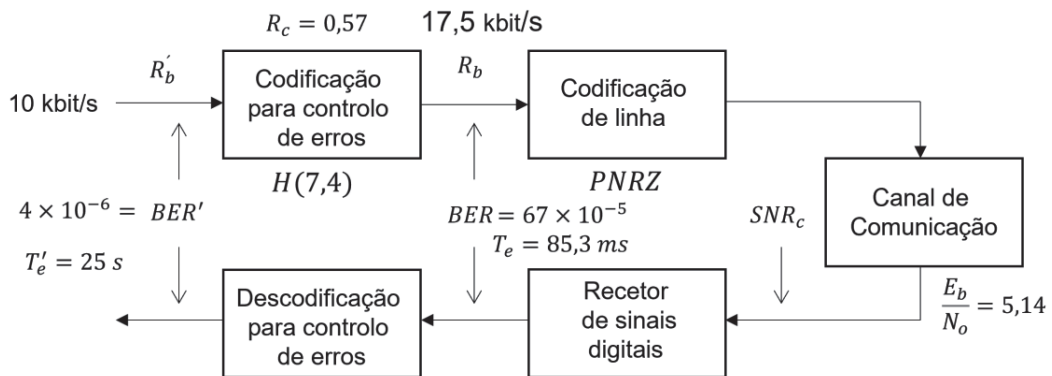
vii. Para um código $H(7,4)$, a probabilidade de erro de bit após correção vem:

$$BER' = 9BER^2 = 9 \times (67 \times 10^{-5})^2 = 4 \times 10^{-6}$$

viii. O tempo entre erros de bit após correção vem:

$$T_e' = \frac{1}{R_b' BER'} = \frac{1}{10^4 \times 4 \times 10^{-6}} = 25 \text{ s}$$

ix. c) Comparando o resultado anterior com o resultado obtido no problema 25 alínea b), verifica-se que se aumenta o débito binário dos bits da informação, mas aumenta-se a probabilidade de erro de bit e, conseqüentemente, diminui-se o tempo entre erros.



x. d) Para manter o tempo entre erros é preciso manter a BER e conseqüentemente manter a energia média por bit, pelo que a potência do sinal com um débito binário no canal maior (mesmo débito binário dos bits da informação) deve compensar a diminuição do tempo de bit de R_c . Conseqüentemente a potência do sinal deve aumentar da mesma quantidade. Como a potência é proporcional ao quadrado da amplitude, então o aumento da amplitude vem:

$$\frac{A^2}{N_o R_b} = \frac{A^2(\text{sem controlo})}{N_o R_b(\text{sem controlo})} = \frac{A^2(\text{sem controlo})}{N_o R_b R_c}$$

$$\frac{A}{A(\text{sem controlo})} = \sqrt{\frac{1}{R_c}} = 1,32$$

xi. A BER é a mesma que na alínea d) do exercício anterior, mas com débito binário dos bits da informação de 10 kbit/s, pelo que o tempo médio entre erros vem:

$$T_e' = \frac{1}{R_b' BER'} = \frac{1}{10^4 \times 9 \times 10^{-10}} = 1,1 \times 10^5 \text{ s}$$

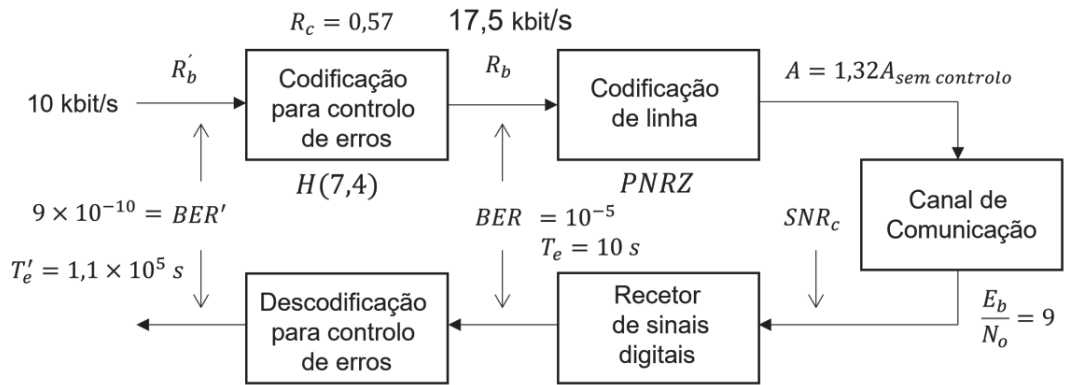


Tabela síntese dos resultados.

	Razão do código	$\frac{A}{A(sem\ cont)}$	Débito binário dos bits da informação [kbit/s]	BER'	T_e [s]
Sem código	1	1	10	10^{-5}	10
H(7,4)	0,57	1	10	4×10^{-6}	25
H(7,4)	0,57	1,32	10	9×10^{-10}	$1,1 \times 10^5$
H(7,4)	0,57	1	5,71	9×10^{-10}	$1,94 \times 10^5$

27. (capítulo 12.9) Considere um código cíclico com polinómio gerador $g(x) = x^3 + x^1 + 1$ (“1011”).

- Calcule os bits transmitidos para os bits de informação “0101”;
- Verifique a situação de uma transmissão sem erros;
- Considere um padrão de erro $E(x) = x^4$ (“0010000”). Quais os bits recebidos?
- Verifique a situação de erro;
- Qual o comprimento máximo da rajada de erros sempre detetada?
- Qual a relação de rajadas de erros não detetadas?

Resolução:

- a) os bits transmitidos são $T(x) = m(x)x^{n-k} + r(x)$;
- O grau do polinómio gerador é igual ao número de bits de redundância a colocar $n - k = 3$;

iii. $m(x)x^{n-k} = (0x^3 + 1x^2 + 0x + 1)x^3 = (x^5 + x^3)$ (“0101000”)

$$\begin{array}{r}
 m(x)x^{n-k} = 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \quad \left| \begin{array}{l} g(x) = 1 \ 0 \ 1 \ 1 \\ q(x) = 0 \ 1 \ 0 \ 0 \end{array} \right. \\
 - \quad \underline{0 \ 0 \ 0 \ 0} \\
 \quad \quad 1 \ 0 \ 1 \ 0 \\
 - \quad \underline{1 \ 0 \ 1 \ 1} \\
 \quad \quad \quad 0 \ 0 \ 1 \ 0 \\
 \quad \quad \quad - \quad \underline{0 \ 0 \ 0 \ 0} \\
 \quad \quad \quad \quad 0 \ 1 \ 0 \ 0 \\
 \quad \quad \quad \quad - \quad \underline{0 \ 0 \ 0 \ 0} \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad 1 \ 0 \ 0 = r(x)
 \end{array}$$

iv. Pelo que $T(x) = m(x)x^{n-k} + r(x)$ vem $x^5 + x^3 + x^2$ (“0101100”)

- b) No decodificador, calcula-se o resto de $T(x)/g(x)$ e, caso este seja igual a zero não houve erros na transmissão.

$$\begin{array}{r}
 T(x) = 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \quad \left| \begin{array}{l} g(x) = 1 \ 0 \ 1 \ 1 \\ q(x) = 0 \ 1 \ 0 \ 0 \end{array} \right. \\
 - \quad \underline{0 \ 0 \ 0 \ 0} \\
 \quad \quad 1 \ 0 \ 1 \ 1 \\
 - \quad \underline{1 \ 0 \ 1 \ 1} \\
 \quad \quad \quad 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\
 \quad \quad \quad - \quad \underline{0 \ 0 \ 0 \ 0} \\
 \quad \quad \quad \quad 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\
 \quad \quad \quad \quad - \quad \underline{0 \ 0 \ 0 \ 0} \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0 \ 0 \ 0
 \end{array}$$

vi. Resto é zero, não houve erros.

vii. c) $T(x) + E(x)$ serão os bits recebidos.

$$\begin{array}{rcccccccc} T(x) & = & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ E(x) & = & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \oplus \\ \hline T(x) + E(x) & = & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

$$T(x) + E(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 \text{ ("0111100")}$$

viii. d) Verifica-se se $(T(x) + E(x))/g(x) \neq 0$, detetando erros:

$$\begin{array}{rcccccccc} T(x)+E(x) & = & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & | & g(x) & = & 1 & 0 & 1 & 1 \\ - & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & q(x) & = & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline & & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & & & & & \\ - & 1 & 0 & 1 & 1 & & & & & & & & & & & \\ \hline & & 1 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & & & & \\ - & 1 & 0 & 1 & 1 & & & & & & & & & & & \\ \hline & & 0 & 1 & 1 & 0 & & & & & & & & & & \\ - & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & & & & & \\ \hline & & 1 & 1 & 0 & & & & & & & & & & & \end{array}$$

ix. Pela equação (12.28), o resto de $(T(x) + E(x))/g(x)$ é igual ao resto de $E(x)/g(x)$. Também o quociente de $(T(x) + E(x))/g(x)$ é igual à soma dos quocientes de $T(x)/g(x)$ e $E(x)/g(x)$.

$$\begin{array}{rcccccccc} E(x) & = & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & g(x) & = & 1 & 0 & 1 & 1 \\ - & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & q(x) & = & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & & 0 & 1 & 0 & 0 & & & & & & & & & & \\ - & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & & & & & \\ \hline & & 1 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & & & & \\ - & 1 & 0 & 1 & 1 & & & & & & & & & & & \\ \hline & & 0 & 1 & 1 & 0 & & & & & & & & & & \\ - & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & & & & & \\ \hline & & 1 & 1 & 0 & & & & & & & & & & & \end{array}$$

x. e) O comprimento máximo da rajada de erros sempre detetável é 3, igual ao grau do polinómio gerador.

xi. f) Pela equação (12.30), $BEDR = 0,125$.

28. (capítulo 12.9) Em relação ao código de Hamming $H(7,4)$, qual o polinómio gerador correspondente, sabendo que se mantém a estrutura cíclica?

Resolução:

- i. Este código, sendo $H(7,4)$, tem $k = 4$ e $n = 7$.
- ii. Relembre-se que, para manter a estrutura cíclica, $g(x)$ tem de ser um fator de $x^n - 1 = x^7 + 1$ e,

$$x^7 + 1 = (x + 1)(x^3 + x + 1)(x^3 + x^2 + 1).$$

- iii. Como a ordem do polinómio gerador tem de ser $n - k = 3$, duas hipóteses são possíveis:

$$g(x) = (x^3 + x + 1) \quad \text{ou} \quad g(x) = (x^3 + x^2 + 1)$$

29. (capítulo 12.10) Calcule o *checksum* do código IP *checksum* tendo como bits de informação a sequência 100EF3459ABCA892 (em hexadecimal) com sub-blocos de quatro dígitos (16 bits). Verifique a soma do conjunto dos sub-blocos, em sequência e aos pares.

Resolução:

- i. Divide-se a sequência a codificar em subconjuntos de quatro dígitos hexadecimais, resultando nos números 100E, F345, 9ABC e A892.
- ii. A adição destes números é: $100E+F345+9ABC+A892 = 246A1$
- iii. A adição em complemento para um requer que se adicione o último arrasto (2) à soma sem esse arrasto: $46A1+2 = 46A3$.
- iv. Somando dois a dois em sequência, obtém-se o mesmo resultado:

$100E+F345=10353$	$0353+1=0354$ (*)
$0354+9ABC=9E10$	$9E10$
$9E10+A892=146A2$	$46A2+1=46A3$
- v. Adicionando aos pares com soma final obtém-se o mesmo resultado:

$100E+F345=10353$	$0355+1=0354$
$9ABC+A892=1434E$	$434E+1=434F$
$0354+434F=46A3$	$46A3$
- vi. O complemento para um de 46A3 é $CS=FFFF-46A3 = B95C$.
- vii. É transmitida a informação inicial mais o código *checksum*:
100EF3459ABCA892 B95C.
- viii. O descodificador repete este procedimento incluindo o código *checksum*:
 $100E+F345+9ABC+A892+ B95C = 2FFFD$;
- ix. Adicionando o arrasto (2) dará $FFFD+2=FFFF$
- x. O valor FFFF (todos os bits a 1), cujo complemento para “1” é 0000, indica que não existem erros devidos às limitações do canal de comunicação. Qualquer outro valor indica que foram cometidos erros e os dados devem ser retransmitidos.

(*) – Pode ser realizado em binário:

100E=	0001	0000	0000	1110	
F345=	1111	0011	0100	0101	+
10353=	1	0000	0011	0101	0011
					1+
0354=	0000	0011	0101	0100	

Exercícios propostos

-
1. (capítulo 2) Considere um sinal com largura de banda de 10 kHz e amplitude de 10 V.
- Qual a frequência mínima para amostragem deste sinal sem erro?
 - Calcule os valores de quantificação e os valores de decisão para um quantificador uniforme *midtread* que permita codificar o sinal em PCM com um débito binário total de 40 kbit/s;
 - Calcule a SNR_{dB} de quantificação nas condições da alínea anterior, assumindo uma senoide como sinal de entrada.
-
2. (capítulo 3) Considere um sinal com uma distribuição de amplitudes uniforme entre -1 e +1 V. A largura de banda do sinal é de 5 kHz.
- Qual a frequência mínima para amostragem deste sinal sem erro?
 - Calcule os valores de quantificação e os valores de decisão para um quantificador *midrise* que permita codificar o sinal em PCM uniforme com um débito binário de 20 kbit/s;
 - Calcule a SNR_{dB} de quantificação nas condições da alínea anterior;
 - Qual a SNR_{dB} se a quantificação fosse *companding* Lei-A ($A = 87,56$)?
 - Qual a SNR_{dB} se o quantificador for obtido através do algoritmo de quantificação ótima?
-
3. (capítulo 2) Considere um sinal com uma distribuição gaussiana de valor médio 1 V e variância 2,25 W, aplicado à entrada de um quantificador uniforme cuja excursão varia entre -3,5 e 5,5 V e cujo intervalo de quantificação é de 35,16 mV.
- Calcule a potência do sinal;
 - Qual é a potência do ruído de quantificação? Está a fazer alguma aproximação?
 - Determine a relação sinal/ruído de quantificação com este sinal;
 - Qual o débito binário deste codificador, sabendo que a largura de banda do sinal é de 2 kHz?
-
4. (capítulo 4.1) Num codificador DPCM com preditor unitário, o valor máximo de quantificação do erro de predição é de 0,5 V, sendo utilizado um quantificador *midrise* de quatro intervalos de quantificação. Uma sequência de bits recebidos no decodificador é: “00100111”.
- Determine o quantificador. Considere um código numérico binário sequencial do valor de quantificação mais pequeno para o mais alto.
 - A quantas amostras corresponde a sequência de bits recebida?
 - Determine o sinal decodificado para as amostras respetivas. Considere zero o valor predito na primeira amostra.

-
5. (capítulo 4.1) Considere um sinal sinusoidal, amostrado a 6 kHz com sete bit/amostra.
- Qual é a SNR_{dB} quando este sinal é codificado com PCM uniforme?
 - Qual a SNR_{dB} de quantificação para PCM *companding* Lei-A? Porque é que este valor é pior do que o obtido com quantificador uniforme?
 - Qual a frequência do sinal de entrada para que a SNR_{dB} em DPCM com preditor unitário seja igual à do PCM uniforme?
 - Considere que aumenta a frequência de amostragem para o dobro. Qual a variação na SNR_{dB} ?
 - Qual a característica do qual o DPCM tira partido, que permite a variação da alínea anterior?
 - Qual o aumento do débito binário correspondente à alínea d)?
 - Existiria um processo mais eficiente de melhorar a qualidade? Qual?
 - Qual o aumento do débito binário correspondente à alínea anterior?
-
6. (capítulo 4.1) Considere um sinal a codificar com 15 kHz de largura de banda, amplitude 1 V e potência de 1/500 W.
- Quantos bits (aproximadamente) são necessários para quantificar este sinal com 38 dB de relação sinal-ruído em PCM uniforme?
 - Qual o débito binário desta codificação?
 - Se a autocorrelação de primeira ordem (não normalizada) for de 1/570 W, qual o ganho de predição e respetiva relação sinal-ruído de quantificação, para um codificador DPCM com preditor unitário?
 - Calcule os valores de quantificação e os valores de decisão que permitam codificar o sinal em DPCM preditor unitário que não produza ruído granular e com um débito binário total de 60 kbit/s.
-
7. (capítulo 4.1) Considere um sinal com uma distribuição uniforme entre -1 e $+1$ V. A largura de banda do sinal é de 4 kHz e pretende-se um débito binário máximo de 56 kbit/s. Admita que a autocorrelação normalizada de 1.^a ordem é de 0,9.
- Calcule a potência do sinal, bem como a sua variância;
 - Determine a SNR_{dB} de um codificador PCM uniforme com este sinal;
 - Determine a SNR_{dB} usando um codificador DPCM, em que o preditor é adaptado de 1.^a ordem;
 - Calcule o valor máximo do quantificador;
 - Determine a SNR_{dB} com o valor máximo do quantificador de 0,8 V.

-
8. (capítulo 4.1) Considere um sinal sinusoidal de amplitude 1 V, amostrado a 10 kHz e codificado com oito bit/amostra.
- Qual a SNR_{dB} quando este sinal é codificado com PCM uniforme?
 - Qual a frequência do sinal de entrada para que a SNR_{dB} em DPCM com preditor unitário seja igual à do PCM uniforme?
 - Considere que aumenta a frequência de amostragem para o dobro. Qual a variação da SNR_{dB} usando PCM uniforme?
 - Repita a alínea anterior para DPCM com preditor unitário, mantendo a frequência do sinal calculada na alínea b);
 - Nas condições da alínea b) (sem o aumento da frequência de amostragem para o dobro da alínea c)), qual o aumento da SNR_{dB} assumindo um preditor de 1.^a ordem adaptado ao sinal?
 - Em relação à alínea e) determine o valor máximo do quantificador;
 - Repita as alíneas e) e f) usando um coeficiente de predição de 0,8.

-
9. (capítulo 4.1) Considere um sinal com valor médio 0 V e variância 2 W, tendo uma largura de banda de 5 kHz.
- Determine o valor do intervalo de quantificação se este sinal for codificado em PCM uniforme com um débito binário de 60 kbit/s, com uma SNR_{dB} de 29,92 dB.
 - Qual o valor máximo de quantificação?
 - Determine o valor máximo do quantificador se este sinal for codificado em DPCM com o mesmo débito binário e a mesma SNR_{dB} ;
 - Que tipo de preditor está a assumir na alínea anterior?
 - Se o valor máximo possível da SNR_{dB} em DPCM com preditor unitário for de 36 dB, qual o valor da autocorrelação normalizada de 1.^a ordem do sinal de entrada?

-
10. (capítulo 4.1) Considere um sinal de entrada de valor médio 0 V e variância 2 W e com uma largura de banda 5 kHz.
- Determine o valor do intervalo de quantificação, se este sinal for quantificado em PCM uniforme com uma SNR_{dB} de 25,84 dB;
 - Qual a amplitude do sinal se este for codificado com 50 kbit/s?
 - Considere que o sinal foi codificado em DPCM com um preditor adaptado de 1.^a ordem e uma variação máxima do erro de predição de ± 2 V. Qual o ganho de predição?
 - Qual o número de bits por amostra para uma SNR_{dB} de 25,84 dB?

-
11. (capítulo 4.1) Considere um sinal de entrada, $m(t)$ com a seguinte autocorrelação:

$$R_m(\tau) = 2 \operatorname{sinc}(10000\tau) = 2 \frac{\operatorname{sen}(10000\pi\tau)}{10000\pi\tau}$$

- Qual a potência do sinal?
- Supondo que o sinal é codificado em DPCM com preditor adaptado de 1.^a ordem, amostrado a 34,5 kHz, qual o valor do coeficiente de predição?
- Qual o coeficiente de predição para um preditor de 2.^a ordem?

12. (capítulo 4.2) Num decodificador ADM o algoritmo de adaptação do passo de quantificação é dado por:

$$\Delta[n] = |\Delta[n-1]| \left(1 + \frac{0,5b[n-1]}{b[n]} \right).$$

Os níveis lógicos dos bits recebidos são:

n	0	1	2	3
	1	0	1	1

No instante $n = -1$ o valor do sinal quantificado $m_q[n] = 0,5$, o valor do passo de quantificação $\Delta[n] = 1$ V, e o nível lógico do bit de codificação é “0”. Calcule o sinal quantificado $m_q[n]$.

13. (capítulo 7) Considere uma transmissão digital com código AMI. Diga em que seqüências se conseguem detetar erros na transmissão e comente.

a) + 0 0 + b) + 0 - + c) + 0 - -

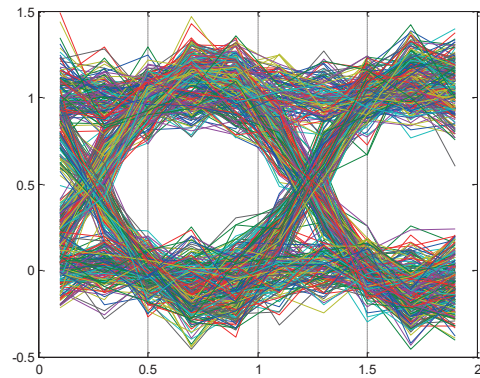
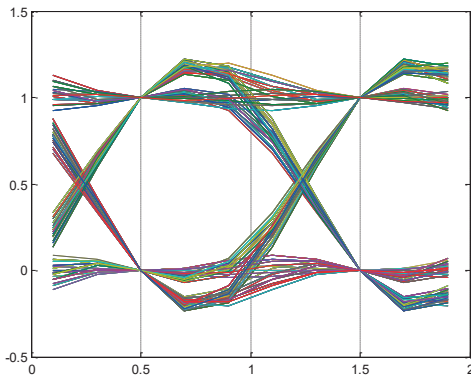
14. (capítulo 7) Considere uma transmissão em NRZI.

- a) Transmite os bits com os níveis lógicos “01011001”. A polaridade do último símbolo transmitido antes desta seqüência é zero. Qual a polaridade dos símbolos transmitidos?
- b) Recebe os símbolos com polaridade + 0 0 + + 0 + 0 e a polaridade do último símbolo transmitido é zero. Qual os níveis lógicos dos bits recebidos?

15. (capítulo 8) Considere um canal de fibra ótica, com dimensão de 275 km (distância entre Lisboa e Porto), utilizado no comprimento de onda 1550 nm (caraterísticas na tabela 8.1).

- a) Calcule o atraso de propagação.
- b) Se a transmissão fosse feita por satélite, quantas vezes mais demoraria o sinal a propagar-se?
- c) Se o sinal for transmitido a um débito de 50 Mbit/s em pacotes de 2 kbit, qual o tempo de transmissão de cada pacote?
- d) Supondo que os equipamentos utilizados originam um atraso de 60 μ s, qual a latência?
- e) Numa conversa telefónica, qual o tempo mínimo entre uma eventual pergunta de um dos oradores e a correspondente resposta?
- f) Qual a atenuação?

16. (capítulo 8.7) As figuras abaixo representam o padrão de olho, com varrimento de dois bits, da transmissão de um código de linha. Numa das figuras o canal tem ruído e noutra não.



Diga, justificando,

- Que tipo de código é representado?
- Existe distorção a meio dos símbolos?
- Está à espera de muitos erros nesta transmissão?

17. (capítulo 9) Considere uma transmissão digital binária em PNRZ, num canal com largura de banda 1 GHz e em que o ruído tem uma densidade espectral de potência do ruído de 10^{-9} W/Hz. A probabilidade de erro de bit deve ser no máximo $7,7 \times 10^{-9}$.

- Qual o débito binário com critério de primeiro zero espectral?
- Qual a energia por bit?
- Qual a amplitude do sinal recebido?

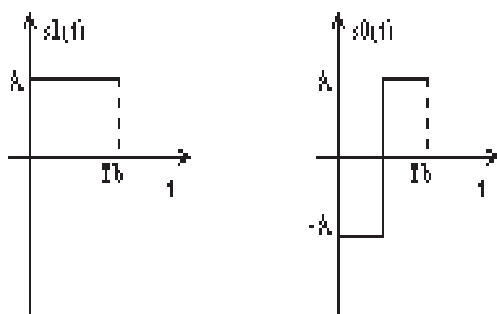
18. (capítulo 9) Considere uma transmissão binária em PNRZ com um débito binário de 10 kbit/s e com tensões de ± 3 V no recetor. O sinal é transmitido num canal AWGN com densidade espectral de potência do ruído de $100 \mu\text{W/Hz}$.

- Desenhe o diagrama de blocos do recetor ótimo normado;
- Calcule as tensões sem ruído e a potência do ruído após o filtro adaptado;
- Determine o valor da *BER* deste sistema;
- Considere que a amplitude do sinal de base do produto interno é de 10 V. Calcule as tensões sem ruído e a potência do ruído após o filtro adaptado e determine o valor da *BER*.

19. (capítulo 9) Considere uma transmissão digital binária UNRZ, com débito binário de 24 kbit/s. A amplitude do símbolo ao nível lógico “1” é de 2 V. O canal é AWGN com densidade espectral de potência do ruído de $1 \mu\text{W/Hz}$.

- Calcule as tensões sem ruído à saída do filtro adaptado do recetor ótimo normado, para cada símbolo, bem como a potência do ruído;
- Desenhe o diagrama de blocos do recetor ótimo;
- Calcule a *BER*.

20. (capítulo 9) Considere uma transmissão binária num canal com uma largura de banda de 3300 Hz (banda telefónica). O canal é AWGN com densidade espectral de potência do ruído de $200 \mu\text{W/Hz}$. O código de linha usado é Manchester, mas as amplitudes recebidas são 2 V para o símbolo ao nível lógico “0” e 3 V para o símbolo ao nível lógico “1”.
- Determine o máximo valor do débito binário se o filtro de formatação de pulsos tiver um fator de decaimento de 0,5;
 - Desenhe o diagrama de blocos de um recetor ótimo normado;
 - Calcule as tensões correspondentes aos símbolos lógicos após o filtro adaptado;
 - Calcule a *BER* desta transmissão;
 - Em média, em quanto tempo é cometido um erro de bit?
-
21. (capítulo 9) Considere uma transmissão binária em que o canal tem uma densidade espectral de potência do ruído de $G_w(f) = N_o/2 \text{ W/Hz}$, com os símbolos seguintes:



- Qual a energia média por bit (função de A e T_b)?
 - Desenhe o recetor ótimo normado adaptado ao símbolo ao nível lógico “1”;
 - Calcule, função de E_b , as tensões y_1 e y_0 , correspondentes ao símbolo ao nível lógico “1” e “0” sem ruído, no instante de amostragem;
 - Qual o valor da *BER* (função de E_b , e N_o)?
 - Se o símbolo ao nível lógico “0” fosse representado por $S_0(t) = 0 \text{ V}$ (unipolar) e não alterasse o valor de A , a *BER* seria alterada? Ganharia alguma coisa com esta mudança?
-
22. (capítulo 10) Considere uma transmissão digital, com débito binário de 40 kbit/s. A largura de banda do canal é de 10 kHz, e o filtro de formatação de pulsos tem um fator de decaimento de 0,2. O sinal é transmitido em PAM digital M -ária, sendo a diferença entre símbolos adjacentes de 1 V. O canal é do tipo AWGN, com densidade espectral de potência do ruído de 10^{-6} W/Hz .
- Calcule o máximo débito de símbolos;
 - Desenhe o recetor ótimo com filtro adaptado normado;
 - Calcule a potência do ruído à saída do filtro;
 - Calcule as tensões à saída do filtro adaptado para distinguir as diversas hipóteses;
 - Calcule a probabilidade de erro de bit.

23. (capítulo 10) Uma transmissão digital num canal passa-baixo de largura de banda 2 MHz é contaminada com ruído com densidade espectral de potência de 10^{-9} W/Hz. Sabendo que a transmissão é PAM digital M -ária com três bits/símbolo e que a probabilidade de erro de bit máxima é de $4,5 \times 10^{-9}$.
- Qual o débito binário máximo do sinal transmitido?
 - Qual a energia média por bit do sinal recebido?
 - Qual a eficiência espectral?
 - Qual a capacidade de canal mantendo a relação sinal-ruído?

24. (capítulo 12.4) Uma transmissão em PRZ com um débito no canal de 24 kbit/s, protegida por um código de repetição de três bits, tem em média um erro em cada 1000 segundos antes da correção.
- Qual o débito binário dos bits da informação?
 - Qual a probabilidade de erro de bit antes da correção?
 - Calcule a relação sinal-ruído E_b/N_0 ;
 - Qual o tempo médio entre erros após correção?
 - Se gerar a sequência de dados binária “10”, qual a sequência a transmitir após a aplicação do código de correção?
 - Recebendo a sequência de bits “101111”, quais os bits decodificados?

25. (capítulo 12.5) Considere o seguinte código BCC, em que os bits m correspondem aos bits de informação, os bits p_n aos bits de paridade de linha e os bits c_n ao caráter de verificação de bloco, sendo utilizada em ambos os casos paridade par.

m_{31}	m_{21}	m_{11}	p_1
m_{32}	m_{22}	m_{12}	p_2
m_{33}	m_{23}	m_{13}	p_3
c_3	c_2	c_1	c_0

0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1

bits recebidos situação 1

0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	1	1
0	1	0	1

bits recebidos situação 2

- Qual a razão do código?
- (situação 1) Existem bits errados? Se sim, é possível corrigi-los? Se sim, corrija-os. Se não, é possível perceber em que subconjuntos de bits foram produzidos os erros?
- Repita a alínea anterior para a situação 2.

26. (capítulo 12.7) Considere o código de controlo de erros cujas palavras estão organizadas na forma $c_n = [m_2 m_1 p_0 p_1]$, tal que $p_0 = m_2 \oplus m_1$ e $p_1 = m_1$.
- Apresente todas as palavras de código.
 - O código é linear?
 - Qual o peso de Hamming de cada palavra de código?
 - Qual a distância mínima de Hamming e a capacidade de deteção e correção?
 - Considere que se transmite a mensagem “01” e que sobre a palavra de código resultante é aplicado o padrão de erro “1010”. O que resulta no recetor?
 - Considere que se transmite a mensagem “01” e que sobre a palavra de código resultante é aplicado o padrão de erro “1001”. O que resulta no recetor?

27. (capítulo 12.7) Considere um código de controlo de erros com quatro palavras de código ($C1$, $C2$, $C3$, $C4$) definidas por:

$$C1 = 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$$

$$C2 = 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1$$

$$C3 = 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0$$

$$C4 = 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1$$

- O código é linear?
 - Qual o peso de Hamming de cada palavra de código?
 - Qual a distância mínima de Hamming deste código?
 - Qual a capacidade de deteção e correção do código?
 - Qual a razão do código?
-

28. (capítulo 12.8) Considere uma transmissão binária em PNRZ com um débito binário de 10 kbit/s e com amplitude 5 V. Adicionalmente considere que o sinal é corrompido por ruído branco, gaussiano e aditivo (canal AWGN), com densidade espectral de potência do ruído de $100 \mu\text{W/Hz}$.

- Determine o valor da BER deste sistema;
 - Considere que se utiliza um código $H(7,4)$ e que não altera o débito binário no canal. Qual o débito binário dos bits da informação?
 - Considere que não altera a amplitude do sinal transmitido. Qual a nova BER deste sistema (após correção)?
 - Se mantiver o débito binário dos bits da informação igual ao débito binário sem codificação, qual a nova BER do sistema?
 - Compare os resultados anteriores e comente.
-

29. (capítulo 12.8) Num código com distância de Hamming mínima de 5, quantos bits errados se conseguem detetar e corrigir?

30. (capítulo 12.8) Numa transmissão protegida com um código $H(7,4)$,

- Qual o resultado da aplicação da sequência binária “1010” ($m_7 \ m_6 \ m_5 \ m_3$)?
- Qual o resultado da aplicação da sequência binária “0101” ($m_7 \ m_6 \ m_5 \ m_3$)?
- Considere que durante a transmissão dos bits correspondentes à alínea anterior erra o bit m_3 e p_4 . Quais os bits descodificados?
- Recebendo a sequência de bits aos níveis lógicos “1110101”, qual a sequência de bits de informação após correção?

31. (capítulo 12.8) Uma transmissão binária polar tem débito binário de 40 kbit/s e BER de 10^{-5} .

- Calcule, em média, de quanto em quanto tempo é cometido um erro;
- Se esta transmissão passar a ser protegida com um código de correção de erros Hamming $H(15,11)$, mantendo o débito binário dos bits da informação, qual o débito binário no canal?
- Qual o aumento da amplitude do sinal transmitido, de modo que se mantenha a energia por bit?
- Qual a BER deste sistema (após correção)?
- De quanto em quanto tempo é cometido um erro?
- Supondo que mantém a amplitude do sinal transmitido inalterada em relação à alínea a), qual a nova BER ?
- De quanto em quanto tempo é cometido um erro no sistema?
- Qual o resultado da aplicação da sequência de bits ao nível lógico
- “01010011011” a um código de correção $H(15,11)$

$$\begin{array}{cccccccccccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ m_{15} & m_{14} & m_{13} & m_{12} & m_{11} & m_{10} & m_9 & m_7 & m_6 & m_5 & m_3 \end{array}$$

a um código de correção $H(15,11)$?

- Quais os bits descodificados se for recebida a sequência binária com os níveis lógicos

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ m_{15} & m_{14} & m_{13} & m_{12} & m_{11} & m_{10} & m_9 & p_8 & m_7 & m_6 & m_5 & p_4 & m_3 & p_2 & p_1 \end{array}$$

32. (capítulo 12.9) Para um código CRC com polinómio gerador $g(x) = x^2 + 1$.

- Pretende-se codificar os bits ao nível lógico “1001”. Quais os bits enviados?
- São recebidos os bits ao nível lógico “100011”. Verifique se existem erros.
- Qual a razão do código?
- Qual o comprimento máximo das rajadas de erros capaz de ser sempre detetada?
- Qual a relação de rajadas de erros não detetadas?

33. (capítulo 12.10) Considere um código IP *checksum* tendo como bits de informação a sequência hexadecimal 75A38B0CFFEE em sub-blocos de quatro dígitos hexadecimais.

- Qual a razão do código?
- Qual o *checksum*?
- Recebem-se os bits 75A38B0CFF60FF60. Existem erros?

Soluções (não incluem respostas teóricas nem figuras):

1. a) $f_s = 20$ kHz;
- b) Valores de quantificação [-5 0 5 10] V
Valores de decisão [-2,5 2,5 7,5] V;
- c) $SNR_{dB} = 13,8$ dB
2. a) $f_s = 10$ kHz; b)
- b) Valores de quantificação [-0,75 -0,25 0,25 0,75] V
Valores de decisão [-0,5 0 0,5] V;
- c) $SNR_{dB} = 12,04$ dB; d) $SNR_q = 2,04$ dB;
- e) $SNR_{dB} = 12,04$ dB.
3. a) $P = 3,25$ W; b) $\sigma_q^2 = 103$ μ W. Sim, não se leva em conta “alguma” saturação;
c) $SNR_{dB} = 45$ dB; d) $R_b = 32$ kbit/s.
- 4.
- a) Valores de quantificação [-0,375 -0,125 0,125 0,375] V
Valores de decisão [-0,25 0 0,25] V;
Código 00 01 10 11
- b) 4;
- c)

n	código	$e_p[n]$	$m_p[n]$	$m_q[n]$
0	00	-0,375	0	-0,375
1	10	0,125	-0,375	-0,25
2	01	-0,125	-0,25	-0,375
3	11	0,375	-0,375	0

5. a) $SNR_{dB} = 43,9$ dB; b) $SNR_{dB} = 32,14$ dB; c) $f' = 1$ kHz;
 d) Aumento de 5,72 dB;
 e) A aparência entre amostras consecutivas;
 f) Aumento de 42 kbit/s; g) Aumento do número de bit/amostra;
 h) Aumento de 6 kbit/s.
6. a) $R = 10$ bit/amostra; b) $R_b = 300$ kbit/s;
 c) $G_p = 6,1$ dB $SNR_{dB} = 44,1$ dB;
 d) Valores de quantificação [-0,25 0 0,25 0,5] V
 Valores de decisão [-0,125 0,125 0,375] V.
7. a) $P = \sigma_m^2 = 0,33(3)$ W; b) $SNR_q = 42,14$ dB; c) $SNR_{dB} = 49,35$ dB;
 d) $V_1 = 0,44$ V; e) $SNR_q = 44,08$ dB.
8. a) $SNR_{dB} = 49,92$ dB; b) $f = 1666,6(6)$ Hz; c) Aumento de 0 dB;
 d) Aumento de 5,72 dB; e) 1,25 dB; f) $V_1 = 0,87$ V;
 g) Aumento de 0,76 dB e $V_1 = 0,92$ V;
9. a) $\Delta_q = 0,156$ V;
 b) $V = 5$ V;
 c) $V_1 = 5$ V; d) Não depende do preditor; e) $r[1] = 0,88$.
10. a) $\Delta_q = 0,25$ V; b) $m_{max} = 4$ V; c) $G_p = 6,02$ dB; d) $R = 4$ bit/amostra.
11. a) $P = 2$ W; b) $a_1 = 0,867$; c) $a_1 = 0,53$.
- 12.

n	$b[n]$	$\Delta[n]$	$e_p[n]$	$m_p[n]$	$m_q[n]$
-1	-1	1			0,5
0	1	0,5	0,5	0,5	1
1	-1	0,25	-0,25	1	0,75
2	1	0,125	0,125	0,75	0,875
3	1	0,1875	0,1875	0,875	1,0625

13. a) Tem erros; b) Não tem erros; c) Tem erros.
14. a) 0 + + 0 + + + 0 ; b) $c[n] = "11010111"$.
15. a) 1,375 ms; b) 174,4; c) 40 μ s; d) 1,475 ms; e) 2,95 ms; f) 55 dB.
16. a) UNRZ; b) Não; c) Não.
17. a) $R_b = 1$ Gbit/s; b) $E_b = 32$ nJ; c) $A = 5,66$ V.
18. a) Figura 9.5; $c(t) = 100$ V, $\lambda_{ot} = 0$ V; b) $y_0 = -30$ mV, $y_1 = 30$ mV; $\sigma_n^2 = 100$ μ W;
 c) $BER = 1,35 \times 10^{-3}$;
 d) $y_0 = -3$ mV, $y_1 = 3$ mV, $\sigma_n^2 = 10^{-6}$ W, $BER = 1,35 \times 10^{-3}$.
19. a) $y_0 = 0$ V, $y_1 = 12,9$ mV, $\sigma_n^2 = 10^{-6}$;
 b) Figura 9.5 ; $c(t) = 154,9$ V, $\lambda_{ot} = 6,45$ mV;
 c) $BER = 5,4 \times 10^{-11}$.
20. a) $R_b = 2,2$ kbit/s; b) $c(t)$ bit ao nível lógico "1" Manchester com amplitude 46,9 V, $\lambda_{ot} = 10,66$ mV;
 c) $y_0 = -42,64$ mV, $y_1 = 63,96$ mV; d) $BER = 8,2 \times 10^{-5}$; e) $T_e = 5,5$ s
21. a) $E_b = A^2 T_b$; b) $c(t) = \sqrt{R_b}$; c) $y_1 = \sqrt{E_b}$; $y_0 = 0$;
 d) $BER = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{4N_0}} \right)$
 e) A BER não seria alterada. Sim, pois diminuiria a energia por bit sem alterar a BER .
22. a) $R_s = 13,3(3)$ kbaud; b) $c(t) = 115,47$ V; c) $\sigma_n^2 = 1$ μ W;
 d) $\lambda = 0$ V, $\pm 8,66$ mV, $\pm 17,32$ mV, $\pm 25,98$ mV; e) $BER = 4,35 \times 10^{-6}$.
23. a) $R_b = 12$ Mbit/s; b) $E_b = 224$ nJ ; c) $\rho = 6$ bit/s/Hz ; d) $C = 18788925,39$ bit/s;

24. a) $R_b' = 8$ kbit/s; b) $BER = 4,17 \times 10^{-8}$; c) $10 \log_{10}(E_b/N_0) = 11,6$ dB;
 d) $T_e = 2,4 \times 10^{10}$ s (7,6 séculos); e) “111000”; f) “11”.
25. a) $R_c = 9/16$; b) sim; sim; bit $m_{31} = “1”$;
 c) sim; não; os bits (m_{31} e m_{13}) ou (m_{11} e m_{33}) estão errados.
26. a) $c_0 = [0\ 0\ 0\ 0]$, $c_1 = [0\ 1\ 1\ 1]$, $c_2 = [0\ 1\ 0]$, $c_3 = [1\ 1\ 0\ 1]$.
 b) É linear ; c) 0 ; 3 ; 2, 3. d) $d_{min} = 2$, $t = 0$, $l = 1$. e) Descodifica c_3 .
 f) Deteta erros e pode corrigir para c_2 .
27. a) Sim. b) 0; 3; 3; 6. c) $d_{min} = 3$; d) $l = 2$, $t = 1$; e) $R_c = 2/6$.
28. a) $BER = 2,87 \times 10^{-7}$ b) $R_b' = 5,71$ kbit/s;
 c) $BER' = 5,98 \times 10^{-13}$; d) $BER' = 5,55 \times 10^{-8}$.
29. a) $l = 4$; $t = 2$.
30. a) “1010010” ($m_7\ m_6\ m_5\ p_4\ m_3\ p_2\ p_1$); b) “0101101”;
 a) “1100” ($m_7\ m_6\ m_5\ m_3$); d) “1011” ($m_7\ m_6\ m_5\ m_3$).
31. a) $T_e = 2,5$ s; b) $R_b = 54,545$ kbit/s; c) Aumento de 1,168;
 d) $BER' = 2,1 \times 10^{-9}$; e) $T_e' = 11904$ s (3 horas e 1100 s);
 f) $BER' = 3,6 \times 10^{-7}$; g) $T_e' = 70$ s; h) “010100111010110”.
 i) Síndrome = “1011”; m_{11} errado “01010011011”;
32. a) “100111”; b) $r(x) = “01”$. Existem erros;
 c) $R_c = 4/6$ d) 2, ordem de $g(x)$; e) $BEDR = 0,25$.
33. a) $R_c = 3/4$; b) FF60. c) Soma igual a 008E. Existem erros.

Exercícios propostos em ambiente de programação**Modulação por codificação de impulsos****Parte 1 – PCM Uniforme (capítulo 2)****Funções a desenvolver:**

1. Uma função que crie um sinal sinusoidal e que tenha como entradas:

- A amplitude, frequência e fase inicial do sinal a gerar.
- A frequência de amostragem.
- O tempo (em segundos) do sinal a gerar.

Nota: Compare os resultados com o do exercício resolvido 2.

.....

2. Uma função que crie as tabelas de quantificação uniforme e que tenha como entradas:

- O número de bits de codificação por amostra.
- O valor máximo de quantificação.
- O tipo de quantificador (*midtread* ou *midrise*).

E tenha como saídas:

- Os valores de quantificação e decisão.

Nota: Compare os resultados com os do exercício resolvido 1.

.....

3. Uma função que implemente um codificador PCM e que tenha como entradas:

- Uma amostra (e apenas uma) do sinal a codificar.
- O número de bits de codificação por amostra.
- Os valores de decisão do quantificador a utilizar.

E tenha como saída:

- O código PCM em binário.

.....

4. Uma função que implemente um decodificador PCM e que tenha como entradas:

- O código PCM em binário de uma amostra.
- Os valores de quantificação do quantificador a utilizar.

.....

E tenha como saída:

- A amostra quantificada.

5. Uma função que calcule a SNR_{dB} de quantificação real e que tenha como entradas:

- O sinal original.
- O sinal quantificado.

Problemas

Os exercícios 1 a 3 devem ser realizados com base no mesmo programa principal, alterando apenas as condições de simulação.

Nota: Nos exercícios 2 e 3 não utilize um ciclo para obter os valores. Simule separadamente cada parâmetro e utilize, por exemplo, uma folha de cálculo para obter um quadro e o respetivo gráfico.

1. Produza 1 segundo de um sinal sinusoidal com amplitude 1 V, frequência 1327 Hz, amostrado a 8 kHz. Codifique e decodifique o sinal em PCM com três bits de codificação por amostra e com quantificadores uniformes *midrise* e *midtread*.

- a) Visualize o código transmitido e o sinal decodificado para as oito primeiras amostras. Qual o ruído de quantificação?

Nota: para o quantificador *midrise*, compare o resultado com o do exercício 2.

- b) Para o sinal completo (1 segundo), produza os gráficos do sinal original e do sinal decodificado. Determine o valor da relação sinal-ruído teórica e compare com o valor real (em decibéis).
- c) Produza o gráfico do ruído de quantificação. Compare com o valor teórico.
- d) Produza o gráfico do sinal original (no eixo das abcissas) em função do sinal quantificado (não interligue os pontos). O que é que este gráfico representa?

2. Repita o problema 1 b), com um quantificador *midrise* e *midtread* e seis bits por amostra. Utilize um sinal de fala como entrada.

- a) Em termos do ruído de quantificação, quais são as principais diferenças entre os dois quantificadores?
- b) Produza o histograma do ruído de quantificação, com uma resolução de 100 pontos. Este gráfico explica a diferença de resultados entre os valores da SNR_{dB} teórica e real?

3. Codifique e decodifique um sinal de fala normalizado ($m_{max} = 1$ V) em PCM, com quantificação uniforme, com um quantificador *midrise*, e com um número de bits por amostra $R = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Oiça o sinal original e os sinais decodificados. Produza um gráfico com os valores da SNR_{dB} teórica e real em função do número de bits por amostra (coloque o número de bits no eixo das abcissas e os valores da SNR_{dB} no eixo das ordenadas). Comente.

Parte 2 – PCM Não Uniforme (capítulo 3)

Crie um programa principal a partir do programa principal correspondente à Parte 1

4. Comprima um sinal de fala por uma não linearidade *companding* Lei-A ($A = 87,56$).

- a) Produza os histogramas do sinal original e do sinal comprimido e compare-os (ver figura 3.3). Quais são as principais diferenças e o que é que estas diferenças significam?
- b) Produza o gráfico do sinal comprimido em função do sinal original (não interligue os pontos). O que é que este gráfico representa?
- c) A partir de tabelas de quantificação uniforme *midrise* de três bits, produza as respectivas tabelas em PCM *companding*. Comente os resultados.

Nota: compare os resultados com os do exercício resolvido 5.

5. Com as tabelas obtidas em 4 c), implemente um sistema PCM *companding* com três bits de codificação por amostra e um quantificador *midrise* e determine o valor da SNR_{dB} real e teórica. Produza o gráfico do sinal original em função do sinal quantificado (não interligue os pontos). Compare com o obtido para PCM uniforme e tire conclusões.

6. Implemente um sistema PCM *companding* com oito bits de codificação por amostra e um quantificador *midrise* e determine o valor da SNR_{dB} real e teórica. Implemente de duas formas e compare os resultados:

- Criando tabelas de quantificação não uniformes.
- Através do sistema representado na figura 3.3.

7. Para um codificador PCM *companding* Lei-A com oito bits por amostra, mantenha a tabela de quantificação e varie a potência (varie a amplitude multiplicando o sinal por exemplo por 0,1 e 0,5, mas mantenha inalterado o valor máximo de quantificação $V = 1V$) de uma senoide e calcule a relação sinal-ruído. Compare com o obtido para PCM uniforme e tire conclusões.

8. Produza o histograma de uma senoide com uma resolução de 100 pontos e calcule os valores ótimos de quantificação (algoritmo Max-Lloyd) para três bits por amostra. Tire conclusões. Repita para um sinal de fala. Repita para um sinal com distribuição uniforme entre -1 e 1.

9. Produza o gráfico do sinal original em relação ao sinal decodificado (não interligue os pontos). Compare com o obtido para PCM uniforme e *companding* e tire conclusões.

10. Codifique e decodifique uma senoide com um quantificador ótimo, com oito bits por amostra. Compare os resultados obtidos com os obtidos em PCM uniforme e *companding*. Comente os resultados nomeadamente listando pela ordem do melhor para o pior. Repita para um sinal de fala. Repita para um sinal com distribuição uniforme entre -1 e 1.

Parte 3 - Codificação preditiva (capítulo 4)

Crie um programa principal a partir do programa principal correspondente à Parte 1

11. Para um sinal sinusoidal (*seno*, $f_s = 8$ kHz, frequência 513 Hz e amplitude 1 V),
- Calcule a autocorrelação normalizada do sinal de entrada para um atraso de uma amostra. Compare com o valor teórico (ver exercício 8).
 - Calcule o ganho de predição assumindo um preditor unitário e o valor máximo de quantificação a partir do valor da autocorrelação (ver exercício 8).
 - Repita as alíneas a) e b) para uma frequência inferior e outra superior à indicada. Tire conclusões.
 - Codifique e decodifique o sinal (*seno* ($f_{ase} = -\pi/2$)), frequência 513 Hz e amplitude 1 V) em DPCM com preditor unitário, com dois bits por amostra e um quantificador *midtread*, com V_1 calculado como na alínea anterior, e verifique o valor da SNR_{dB} real e teórica.
- Nota1: Deve implementar as funções que realizem um codificador DPCM e um decodificador DPCM.
- Nota2: Verifique as oito primeiras amostras comparando-as com o exercício 8.
- Para 4 bits/amostra e um sinal de fala, verifique a relação sinal-ruído e produza um gráfico do ruído de quantificação. Tire conclusões sobre a saturação de declive e ruído granular.
 - Repita a alínea anterior para um quantificador *midrise*.
 - Tendo como sinal de entrada uma senoide, utilize um quantificador *midrise* com o passo de quantificação dado pela equação (2.5). Produza um gráfico do ruído de quantificação e verifique a saturação de declive e a relação sinal-ruído e compare com a situação na alínea d).
 - Repita a alínea g) com um preditor adaptado.

- i) Repita a alínea g) com coeficiente de predição zero. Qual o método de codificação que está a utilizar?
- j) Compare os resultados obtidos nas alíneas g) a i).

Tenha em atenção as seguintes funções do Python/Octave/MATLAB:

audioread – lê ficheiros tipo *wav*

audiowrite – grava ficheiros tipo *wav*

sound – toca um sinal

soundsc – normaliza e toca um sinal

quantiz – quantifica e codifica um sinal

compand – comprime ou descomprime

de2bi – converte de decimal para binário

bi2de – converte de binário para decimal

plot – cria um gráfico com um sinal

grid – desenha grelha num gráfico

hist – cria histograma

lloyds – cria tabelas de quantificação com o algoritmo Max-Lloyd

rand – produz um sinal com distribuição uniforme entre zero e um

snr – calcula a relação sinal-ruído em decibéis

Transmissão num Canal AWGN

(capítulos 8 a 11)

Funções a desenvolver:

1. Uma função que gera o código de linha Manchester e tenha como entradas:

- A sequência binária a codificar.
 - A amplitude A do código de linha.
 - O número T_b de pontos de simulação por símbolo (par e maior ou igual a 4) (assume-se $f_s = 1$ Hz, como no Anexo 11).
-

2. Uma função que implemente um canal AWGN. Esta função devolve o código de linha com ruído e tem como entradas:

- O código de linha sem ruído.
 - A potência do ruído em dBW.
 - A atenuação em decibéis.
-

3. Uma função que implemente um recetor ótimo para um código de linha binário com ruído. Esta função devolve a sequência binária descodificada e tem como entradas:

- O código de linha com ruído.
 - O símbolo ao nível lógico “1” a utilizar como vetor de base, $c(t)$, no filtro adaptado.
 - O valor do limiar de decisão λ .
-

4. Uma função que gera o código de linha UNRZ e tenha como entradas:

- A sequência binária a codificar.
 - A amplitude A do código de linha.
 - O número T_b de pontos de simulação por símbolo.
-

5. Uma função que gera o código de linha PAM – 2B1Q e que tenha como entradas:

- A sequência binária a codificar.
- A distância entre símbolos a .
- O número τ_s de pontos de simulação por símbolo.

.....

6. Uma função que implemente um recetor ótimo para o código de linha PAM – 2B1Q.

Esta função devolve a sequência binária descodificada com entradas:

- O código de linha com ruído.
- A distância entre símbolos a .
- O número τ_s de pontos de simulação por símbolo.

.....

Problemas

Deve ser implementado um e apenas um programa principal por cada código de linha.

Os exercícios devem ser realizados alterando apenas as condições de simulação.

1. Simule um sistema de transmissão digital. O sistema converte uma sequência binária num código de linha Manchester, UNRZ ou 2B1Q, simula um canal AWGN atenuando e adicionando ruído branco e gaussiano ao sinal e descodifica a sequência com recetor ótimo normado. Utiliza como gerador de bits de informação uma senoide de frequência 513 Hz e amplitude 1 V codificada em DPCM com quatro bits por amostra. É transmitida uma amostra de cada vez por toda a cadeia transmissor–canal–recetor.

O sistema tem como entradas (e valor de referência):

- O número de bits a simular (128 kbit);
- A amplitude A , do código de linha (1 V) em binário, ou a distância entre símbolos a (1 V) em 2B1Q;
- O número T_b (ou τ_s), de pontos de simulação por símbolo (4 pontos);
- A potência do ruído no canal de comunicação (0 dBW);
- A atenuação no canal de comunicação (0 dB).

e tem como saídas:

- A *BER* teórica (Anexo 11) e real.

Nota 1: Tenha em conta o número de bits transmitidos na escolha do limite mínimo da *BER*.

2. Verifique que a *BER* não depende da amplitude do sinal de base com que está a realizar o produto interno para os códigos Manchester e UNRZ.

3. Produza uma tabela e um gráfico dos resultados e comente a evolução da *BER* nas situações seguintes:

- a) Variando A (ou a).
- b) Variando T_b (ou τ_s).
- c) Variando a potência do ruído no canal.
- d) Variando a atenuação no canal.

Nota 2: Para valores “elevados” da *BER* em 2B1Q, justifique porque é que o valor teórico é mais baixo que o valor real.

4. Compare os códigos de linha Manchester e UNRZ nas seguintes situações:

- a) Para a mesma amplitude.
- b) Para a mesma distância entre símbolos.
- c) Para a mesma energia média por bit.

5. Para Manchester e UNRZ varie λ (Anexo 9, equações (A.9.2) e (A.11.5)).

6. Produza o gráfico da *BER* em função da relação E_b/N_0 (ver figuras 11.1 e 11.2) para os três métodos em conjunto e compare-os. Sugere-se impor diversos valores de E_b/N_0 em decibéis, mantendo o número T_b (ou τ_s) de pontos de simulação por símbolo de 4 pontos e a potência do ruído no canal de comunicação de 0 dBW, e calculando A (ou a).

Tenha em atenção as seguintes funções do Python/Octave/MATLAB:

bin2gray – converte um número decimal de modo a seguir o código Gray

erfc – função complementar do erro

Onex – gera uma matriz com todos os elementos a um

rand – produz um sinal com distribuição gaussiana com média zero e variância um

Codificação de controlo de erros

(capítulo 13)

Funções a desenvolver:

1. Uma função que implemente um codificador de repetição com entradas:

- A sequência binária a codificar.
 - O número de repetições.
-

2. Uma função que implemente um decodificador de repetição com entradas:

- A sequência binária a decodificar.
 - O número de repetições.
-

3. Uma função que implemente um codificador Hamming $H(7,4)$ com entrada:

- 4 (e apenas 4) bits a codificar.
-

4. Uma função que implemente um decodificador Hamming $H(7,4)$ com entrada:

- A palavra de código (e apenas uma) a decodificar.
-

5. Uma função que implemente um codificador por código de bit de paridade par com entrada:

- A sequência binária a codificar.
-

6. Uma função que implemente um decodificador por código de bit de paridade par com entrada:

- A sequência binária a decodificar.
 - Se houve ou não deteção de erros.
-

Problema

Pretende-se simular um sistema de controlo de erros num canal digital. O sistema deve codificar uma sequência binária, sujeitar a sequência resultante a erros e decodificar corrigindo os erros. Realize programas principais diferentes para o código de repetição, código de Hamming e de paridade. O sistema deverá:

- Utilizar como gerador de bits um codificador DPCM;
- Introduzir erros utilizando *Transmissor Manchester – Canal – Recetor*.

Como referência utilize:

- Número de bits de codificação por amostra (4 bits/amostra);
- Número de bits de informação a simular (128 kbit);
- Amplitude do sinal de código de linha, A (1 V);
- Número de pontos de simulação, T_b , por bit (4 pontos);
- Potência do ruído no canal de comunicação (0 dBW);
- Atenuação no canal de comunicação (0 dB).

Utilize como *BER* de referência o valor obtido com estes parâmetros.

Determine a *BER* real e teórica nas seguintes situações:

1. Para um código de repetições de três, codifique quatro bits de cada vez e avalie o codificador para diversos valores da probabilidade de erro (altere por exemplo a amplitude do sinal de código de linha) e compare os valores obtidos com os valores teóricos.
2. Avalie o codificador para diversos valores de repetições e compare os valores obtidos com os valores teóricos.
3. Para um código Hamming H(7,4), avalie o codificador para diversos valores da probabilidade de erro (altere, por exemplo, a amplitude do sinal de código de linha) e compare os valores obtidos com os valores teóricos.

4. Compare os resultados com os obtidos com os diversos códigos, nomeadamente o compromisso entre a BER após correção e a razão de código. Suporte-se num gráfico equivalente ao da figura 12.10, tendo como valor de BER o valor de referência.

5. Para um código de paridade, avalie o codificador para diversos valores da probabilidade de erro (altere por exemplo a amplitude do sinal de código de linha) e compare os valores obtidos com os valores teóricos. Compare a probabilidade de repetição real e teórica. Compare a razão do código com a relação entre os bits de informação e os bits transmitidos com retransmissão.

Nota: Dado que utiliza valores elevados da BER não deve desprezar o termo $(1 - BER)^{n-j}$ da equação (12.5) nas fórmulas teóricas, sendo j o número de bits errados:

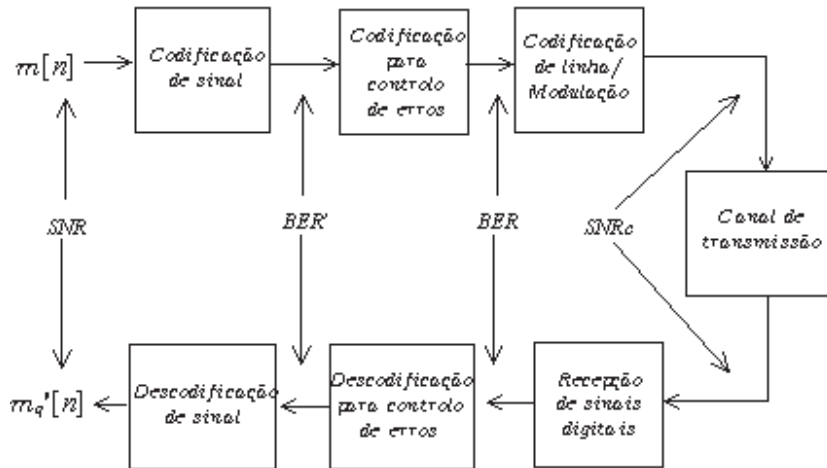
$$R(n): \quad BER' = C_{\frac{n+1}{2}}^n BER^{\frac{n+1}{2}} (1 - BER)^{\frac{n-1}{2}} \quad H(7,4): \quad BER' = 9BER^2(1 - BER)^5$$

Tenha em atenção as seguintes funções do Python/Octave/MATLAB:

nchoosek – cálculo de combinações

Projeto de Comunicação Digital de Sinais

Objetivo: Pretende-se implementar e testar um simulador de sistema de comunicação digital, representado no diagrama de blocos seguinte:



Especificações do sistema

Sinal de entrada

- Sinusoide especificada pelo utilizador;
- Em alternativa sinal de fala em formato *wav*.

Codificador/Descodificador de sinal

- Codificar DPCM;
- Número de bits de codificação por amostra especificado pelo utilizador;
- Coefficiente de predição especificado pelo utilizador ou calculado automaticamente;
- Valor máximo de quantificação especificado pelo utilizador ou calculado automaticamente.

Código de linha

- Código de linha Manchester;
- Distância entre símbolos especificado pelo utilizador;
- Número de pontos de simulação, T_b , por bit, especificado pelo utilizador.

Canal

- Canal com ruído aditivo branco e gaussiano (AWGN);
- Potência do ruído no canal especificada pelo utilizador;
- Atenuação definida pelo utilizador.

Recepção de sinais digitais

- Recetor ótimo com detetor de máxima verosimilhança.

Codificação de controlo de erros

- Código de Hamming H(7,4), apenas na situação de codificação de quatro bits por amostra. Inibição do código especificada pelo utilizador.

Medidas de qualidade

Para o sinal a transmitir (sinusoide ou fala) – SNR_{dB} ;

Para a cadeia binária – BER (antes e após correção);

Comparar valores teóricos com valores obtidos na simulação.

Situação de referência

Sinal sinusoidal (*seno*, $f_s = 8$ kHz, frequência 920 Hz e amplitude 1 V);

Codificador de sinal com preditor adaptado e quatro bits de quantificação por amostra;

Codificador de linha Manchester, amplitude 1 V e quatro pontos de simulação;

Potência do ruído no canal de -10000 dBW (≈ 0 W) ou 0 dBW,

conforme o que se está a testar;

Atenuação no canal de 0 dB.

Sem código de controlo de erros.

Situações a simular

Com base na situação de referência e alterando apenas um dos parâmetros em cada ponto, avalie as seguintes situações:

Codificador/Descodificador de sinal:

1. Variar o número de bits de codificação por amostra;
2. Variar o coeficiente de predição. Testar o valor zero, um, ótimo e a sua vizinhança;
3. Verificar o impacto do coeficiente de predição no impacto dos erros do canal.

Código de linha:

4. Variar a energia por bit;
 - Variar a amplitude;
 - Variar o número de pontos de simulação por símbolo.
5. Variar a potência do ruído no canal;
6. Variar a atenuação no canal.

Codificador de controlo de erros:

7. Verificar o efeito do código de Hamming H(7,4) através da diminuição da BER após correção e o efeito na SNR_{dB} , para diversos valores de potência de ruído no canal;
8. Para um sinal de fala, verificar a SNR_{dB} sem ruído no canal, com ruído no canal e com correção de erros. Oiça os sinais.

Lista de Acrónimos

2B1Q – 2 binary 1 quaternary

ADM – Adaptive Delta Modulation

ADPCM – Adaptive Differential Pulse Code Modulation

ADSL – Asymmetric Digital Subscriber Line

AMI – Alternate Mark Inversion

AQB – Adaptive quantization with backward estimation

AQF – Adaptive quantization with forward estimation

ARQ – Automatic repeat request

ASCII – American Code for Information Interchange

AWGN – Additive White Gaussian Noise

BCC – Block (sum) check character

BER – Bit Error Rate

BEDR – Burst Error Detection Rate

bit – binary digit

BNRZ – Bipolar no Return-to-Zero

BNZS – Bipolar with N Zero Substitution

CD – Compact Disc

CRC – Cyclic redundancy check

DC – Direct current (corrente contínua)

DECT – Digital Enhanced Cordless Telecommunications

DM – Delta Modulation

DPCM – Differential Pulse Code Modulation

erfc – complementary error function

FEC – Forward error correction

GSM – Global System for Mobile Communications (originalmente: Group special mobile)

IoT – Internet of Things (*Internet* das Coisas)

IP – Internet protocol
ISDN – Integrated Services Digital Network
ISI – Intersymbol Interference
ISO – International Organization for Standardization
ITU-T – International Telecommunication Union-Telecommunication
MAP – Máximo *a posteriori*
MLT-3 – Multi-Level Transition
MV – Máxima Verosimilhança
NRZI – No Return-to-Zero Inverted
NRZ(M) – No return-to-Zero - Mark
NRZ(S) – No return-to-Zero - Space
OSI – Open Systems Interconnection
PAM – Pulse Amplitude Modulation
PCM – Pulse Code Modulation
PNRZ – Polar no Return to Zero
POTS – Plain old telephone service
PRZ – Polar Return to Zero
RAM – Random Access Memory
RDIS – Rede Digital Integrada de Serviços
RZ – Return to zero
SER – Symbol error rate
S&H – Sampling & Hold
SMS – Short Message Service
SNR – Signal to Noise Ratio
SPL – Sound Pressure Level
TCP – Transmission control protocol
TDT – Televisão Digital Terrestre
UDP – User Datagram Protocol
UNRZ – Unipolar no Return-to-Zero
USB – Universal Serial Bus

Bibliografia

- A. Bruce Carlson, Paul B. Crilly, Janet C. Rutledge, “*Communications Systems* 4th ed., McGraw-Hill, 2002.
- F. Halsall, “*Data Communication, Computer Networks and Open Systems*”, 4th ed., Addison-Wesley, 1996.
- F. Halsall, “*Computer Network and the Internet*”, 5th ed., Addison-Wesley, 2005.
- S. S. Husain, A. Prasad, A. Kunz, J. Song, A. Buckley, E. Pateromichelakis, “*End-to-End Mobile Communications: Evolution to 5G*”, McGraw Hill Professional, 2021.
- ITU-T Recommendation G.711, “*Pulse Code Modulation (PCM) of Voice Frequencies*”, 1988.
- ITU-T “*Recommendation G.726, 40, 32, 24, 16 kbit/s Adaptive Differential Pulse Code Modulation (ADPCM)*”, 1990.
- H. Nyquist, “*Certain Factors Affecting Telegraph Speed*”, Bell System Technical Journal, 1924.
- S. Haykin, Michel Moher, “*Communication Systems*”, 5th ed., Willey, 2009.
- S. Haykin, Michel Moher, “*Communication Systems*”, International Students Version, 5th ed., Willey, 2009.
- H. P. Hsu, “*Comunicação Analógica e Digital*”, 2nd ed., Bookman, Coleção Schaum, 2006.
- N. S. Jayant, P. Noll, “*Digital Coding of Waveforms, Principles and Applications to Speech and Video*”, Prentice-Hall Signal Processing Series, 1970.
- N. S. Jayant, “*Digital Coding of Waveforms: PCM, DPCM, and DM Quantizers*”, Proc. IEEE, pp. 611-632, 1974.
- B. P. Lahti, “*Sistemas de Comunicação*”, Editora Guanabara, 1968.
- Y. Lai, “*Implementation of Adaptive Differential Pulse-Code Modulation (ADPCM) Transcoder with the DSP16 Digital Signal Processor*”, AT&T Appl. Note, 1988.
- S. P. Lloyd, “*Least squares quantization in PCM*”, Bell Telephone Laboratories Paper, 1957, republicado em IEEE Transactions on Information Theory 28 (2): 129-136, 1982.
- J. L. LoCicero, B. P. Patel, Chapter 6 of Mobile Communication Handbook (J. Gibson) - “*Line Coding*”, Chapman & Hall/CRCnetBASE, 1999.
- J. Max, “*Quantizing for Minimum Distortion*”, IRE Trans. Inform. Theory, vol. IT-6, pp. 7-12, march, 1960.

- M. Schwartz, “*Information Transmission Modulation and Noise*”, 4th ed., Mc Graw Hill, 1990.
- C. E. Shannon, “*A Mathematical Theory of Communication*”, Reprinted with corrections from The Bell System Technical Journal, Vol. 27, pp. 379–423, 623-656, July, October 1948.
- C. E. Shannon, “*Communication in the presence of noise*”, Proc. IRE, vol. 37, pp. 10-21, January. 1949.
- B. Sklar, “*Digital Communications – Fundamentals and Applications*”, 2nd ed., Prentice Hall, 2001.

