

DESENVOLVIMENTO DO ENSINO/APRENDIZAGEM DA DIVISÃO COM COMPREENSÃO. UM ESTUDO COM O 4º ANO DE ESCOLARIDADE.

Rita Cruz*

Maria de Lurdes Serrazina **

Escola Superior de Educação de Lisboa

*ritacruz74@gmail.com, **lurdess@eselx.ipl.pt

Resumo

Na perspetiva atual sobre o ensino/aprendizagem das operações aritméticas básicas e o desenvolvimento das competências de cálculo, ser competente em Matemática exige equilíbrio entre o conhecimento de factos, a compreensão de conceitos e o domínio de procedimentos. O estudo baseia-se nesta perspetiva. Teve como objetivo perceber o que é que alunos do 4º ano já sabiam sobre a divisão e como desenvolver o seu ensino/aprendizagem com compreensão e incentivar a utilização de estratégias mais sofisticadas. Como resultado, verificou-se que embora inicialmente a estratégia de divisão mais utilizada fossem os procedimentos de construção, a preferida acabou por ser os algoritmos alternativos. Sobre as ideias fundamentais da divisão, aquela em que os alunos revelaram algum domínio foi na identificação desta operação em situações de partilha e de medida. Mostraram dificuldade na identificação da relação entre situações de medida e partilha, na utilização do modelo retangular, da relação inversa entre a multiplicação e divisão e na compreensão do papel do resto. Verificou-se que o cálculo mental esteve presente em quase todas as estratégias desenvolvidas e quase sempre associado à estimativa e tentativa e erro. Sobre a contribuição das interações entre alunos e com o professor, apurou-se que fizeram surgir oportunidades adicionais de aprendizagem sobre aspetos fundamentais da divisão, contribuindo para o desenvolvimento de estratégias mais sofisticadas.

Palavras-chave: ideias fundamentais da divisão, sentido do número, estratégias de cálculo, interações, compreensão.

INTRODUÇÃO

O ensino/aprendizagem das operações aritméticas básicas tem estado associado aos algoritmos tradicionais, através do treino de procedimentos e a sua posterior aplicação a qualquer situação. Devido aos problemas que têm sido associados a esta abordagem

educativa, investigação realizada na Psicologia e Didática da Matemática tem-se debruçado sobre este tema. Anghileri, Beishuizen e van Putten (2002) identificaram diferenças em currículos escolares relativas às abordagens sugeridas ao ensino/aprendizagem do cálculo escrito que relacionaram com piores resultados dos alunos ingleses em testes internacionais de aritmética em relação aos alunos de países como a Holanda. Rocha e Menino (2009), baseando-se num estudo de Anghileri (2001), também sobre os currículos ingleses e holandeses, explicam diferenças entre as duas abordagens. Verificaram que em Inglaterra, contar é visto como uma atividade mecânica, cuja utilização no cálculo é considerada “primitiva”, enquanto que na perspetiva holandesa é com base na contagem que é promovida a reinvenção de estratégias informais de cálculo. O valor de posição, na perspetiva inglesa, é um aspeto muito importante, base de vários métodos escritos de cálculo, em particular dos algoritmos tradicionais. Na perspetiva holandesa não há referência explícita ao valor de posição, defende-se uma abordagem ao desenvolvimento de estratégias de cálculo escrito que mantêm a utilização dos números e não de dígitos. Como afirmam Rocha e Menino (2009) referindo ainda a Anghileri (2001), em vários países como a Inglaterra, embora se recomende a não introdução precoce dos algoritmos, continua a exigir-se o domínio dos algoritmos tradicionais. Uma abordagem diferente, como referem Rocha e Menino (2009), é a que dá ênfase ao desenvolvimento do sentido do número e das operações, valorizando o espaço para os alunos desenvolverem as suas estratégias de cálculo informais, o cálculo mental, as relações numéricas e o cálculo numérico de representação horizontal. Estes autores salientam estudos que defendem que os alunos podem atuar como verdadeiros matemáticos e reinventar procedimentos e algoritmos e que esta atividade contribui para melhorar a compreensão matemática.

Assim surge uma nova perspetiva sobre o ensino/aprendizagem das operações aritméticas básicas e do desenvolvimento das competências de cálculo e da Matemática em geral. Neste sentido, McIntosh et al. (1992) referem que o objetivo principal do ensino/aprendizagem da Matemática na escolaridade obrigatória deverá ser a aquisição do sentido de número requerido por todos os adultos independentemente da sua ocupação. Definem sentido de número como:

A compreensão geral de um indivíduo sobre os números e as operações juntamente com a capacidade e predisposição para usar essa compreensão de uma forma flexível para fazer juízos matemáticos e para desenvolver estratégias úteis na manipulação dos números e os métodos de cálculo como um meio de comunicação, processamento e tratamento de informação. (McIntosh et al., 1992, p.3)

Também documentos internacionais de referência como Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2008) defendem que ser competente na Matemática exige equilíbrio entre o conhecimento de factos, a compreensão de conceitos e o domínio de procedimentos. Em Portugal, pelo contrário, com o Programa de Matemática para o Ensino Básico em vigor (MEC, 2013), assistimos a uma desvalorização dos aspetos da compreensão no ensino/aprendizagem das operações aritméticas em detrimento de uma ênfase na memorização e mecanização de procedimentos.

DESENVOLVIMENTO DO ENSINO/APRENDIZAGEM DA DIVISÃO COM COMPREENSÃO

O estudo realizado pela primeira autora baseia-se numa perspectiva de ensino/aprendizagem das operações aritméticas com compreensão. Para a sua elaboração foram sintetizadas ideias de alguns investigadores (por exemplo, Fosnot & Dolk, 2001; Rocha, Rodrigues & Menino, 2007 e Mendes, 2012) sobre aspetos da divisão. São identificadas como grandes ideias da divisão com o sentido dado por Fosnot e Dolk (2001, em referência a Schifer e Fosnot, 1993) de “ideias organizadoras centrais da Matemática – princípios que definem a ordem matemática” (p.10), consideradas fundamentais para o seu ensino/aprendizagem com compreensão porque são essenciais para a Matemática e porque correspondem a grandes saltos de desenvolvimento no raciocínio dos alunos.

Sentidos da divisão

Sobre os sentidos da divisão explicam Fosnot e Dolk (2001) que, no sentido de medida, encontramos situações em que o tamanho do grupo está especificado no problema e temos que determinar o número de grupos. No sentido de partilha encontramos situações que envolvem descobrir que quantidade está no grupo quando o número de grupos é conhecido. Relativamente ao sentido de razão, Rocha et al. (2007) referem situações que envolvem a determinação de uma razão. Explicam que os alunos devem perceber que dividir não está unicamente associado à situação de partilhar igualmente. Identificam os problemas com o sentido de razão como os que envolvem situações mais complexas e que só posteriormente devem ser apresentados aos alunos.

Relação entre situações de partilha e medida

Fosnot e Dolk (2001) consideram, tal como Rocha et al. (2007), que a distinção entre contextos de partilha e de medida é crítica. Isto porque de forma geral os alunos inicialmente são influenciados pelas características específicas dos seus contextos e resolvem os dois tipos de situação de forma diferente, o que dificulta a compreensão de que ambas as situações são de divisão.

O resto

Relativamente ao resto, Fosnot e Dolk (2001) referem que na vida real muitos problemas que envolvem divisão possuem resto, ao qual temos de dar sentido tendo em conta o contexto e, por isso, os alunos devem contactar com várias situações em que o contexto afeta o resto de forma diferente. Afirmam que alunos que habitualmente resolvam estes problemas encontram formas de matematicamente pensar sobre a sua vida, não desenvolvem procedimentos que não lhes façam sentido e conseguem tratar o resto em função do contexto. Rocha et al. (2007) encaram o resto como uma dificuldade acrescida da divisão.

Ligação entre a divisão e a multiplicação

Como explicam Nunes, Campos, Magina e Bryant (2005) conceptualmente a divisão e a multiplicação referem-se ao mesmo tipo de raciocínio, o multiplicativo, que se caracteriza por envolver duas variáveis numa relação constante. Fosnot e Dolk (2001) referem que as

situações multiplicativas podem ser resolvidas tanto pela divisão como pela multiplicação e que a construção do raciocínio multiplicativo fornece uma ferramenta poderosa que pode ser utilizada no desenvolvimento de estratégias de multiplicação ou divisão e, desta forma, compreender as relações parte/todo.

Mendes (2013), referindo Treffers e Buys (2008), considera importante a abordagem da divisão através da sua relação com a multiplicação, podendo a divisão surgir informalmente como inversa desta operação. Também Greer (2012) explica que a relação inversa entre multiplicação e divisão tem implicações significativas no cálculo eficiente e flexível e na verificação da compreensão conceptual dos alunos.

O modelo retangular

Jacob e Mulligan (2014) destacam o facto de o modelo retangular permitir a visualização simultânea das três quantidades envolvidas nas situações de multiplicação e de divisão com números inteiros: o todo, o número de grupos iguais e a quantidade em cada grupo. Consideram que o modelo retangular pode ser utilizado para auxiliar os alunos a estruturar a compreensão da multiplicação e divisão, nomeadamente na compreensão e coordenação das quantidades envolvidas, na compreensão da relação entre a multiplicação e divisão e da comutatividade da multiplicação e na compreensão da ligação destas operações a uma variedade de situações e representações.

Rocha et al. (2007), em referência a Treffers e Buys (2001), afirmam o recurso à disposição retangular como demonstração clara da divisão e multiplicação como operações inversas. Outro aspeto que salientam é a sua capacidade de atenuar as diferenças entre problemas de medida e partilha.

Estratégias dos alunos

Ferreira (2005) afirma que uma excessiva valorização de processos formais não favorece o desenvolvimento do sentido da divisão e das capacidades de raciocínio matemático. Salienta a importância da partilha de processos entre os alunos, visto que tendem a apropriar-se de ideias e procedimentos uns dos outros quando veem neles significado e quando os ajudam a progredir para um nível superior de cálculo.

Fosnot e Dolk (2001) referem que o refinamento e a melhoria da eficácia das estratégias desenvolvidas pelos alunos podem ser encaminhados pela criação de potenciais constrangimentos nos contextos e pela discussão das estratégias informais. Mencionam que, por tentador que seja o encorajamento de todos os alunos na utilização de estratégias eficientes, eles necessitam de tempo para explorá-las e compreendê-las por si próprios. Afirmam ainda que o desenvolvimento da aprendizagem é complexo. Estratégias, grandes ideias e modelos são aspetos que necessitam ser desenvolvidos pois eles afetam-se mutuamente.

Como explica Mendes (2013) grande parte das investigações sobre as estratégias dos alunos na resolução de tarefas de divisão caracterizam os procedimentos informais associados a esta operação. A tabela I pretende caracterizar de forma breve estratégias de divisão. As categorias presentes na tabela resultam do cruzamento do enquadramento teórico e dos dados

ATAS DO IV ENCONTRO DE MESTRADOS EM EDUCAÇÃO E ENSINO
DA ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO DE LISBOA

provenientes do material recolhido durante o estudo. As estratégias estão organizadas com uma lógica crescente de formalidade.

Tabela I

Tabela de análise das estratégias de divisão utilizadas pelos alunos. (Adaptado de Hartnett, 2007; Monteiro, Loureiro, Nunes & Gonçalves, 2007; Ambrose et al. referido por Mendes 2012; Anghileri, Beishuizen & van Putten, 2002; Fosnot & Dolk,

Categoria	Procedimentos
Usar um grupo de cada vez	Subtração
Procedimentos de construção (aditivos + multiplicativos)	Adição sucessiva
	Adição por saltos
	Subtração
	Dobro
	Multiplicação por múltiplos de 10
	Usa pequenos múltiplos do divisor
	Usa grandes múltiplos do divisor
	Usa estimativa
	Usa tentativa/erro
Baseada no modelo retangular	
Usa quocientes conhecidos	
Usa a relação inversa entre a multiplicação e a divisão	Usa estimativa
	Usa tentativa/erro
	Usa múltiplos de 10
Algoritmos alternativos	Não usa decomposição do dividendo
	Usa decomposição do dividendo
	Regista cálculos intermédios
	Não usa decomposição do divisor
	Usa estimativa
	Usa tentativa/erro
	Usa produtos conhecidos

Desenvolvimento de estratégias de divisão mais eficientes

Fosnot e Dolk (2001) consideram que um objetivo de aprendizagem deve ser o desenvolvimento de estratégias de divisão mais eficientes, mas julgam impossível ter todos os alunos a utilizar a mesma estratégia, obtendo o mesmo conhecimento, ao mesmo tempo.

O contributo do cálculo mental

Hartnet (2007) constatou haver discussão sobre o que constitui uma estratégia de cálculo mental. Verificou que as primeiras definições defendidas por Trafton (1978), Sowder (1988) e Threlfall (2002), referido por Hartnet (2007), descreve estratégias como uma sequência construída de transformações relativa a um problema de números para chegar a uma solução em oposição a só saber a solução, contar ou fazer uma representação mental de um método de “papel e lápis”. Buys (2001) define cálculo mental como “o cálculo hábil e flexível baseado em relações conhecidas entre os números e em características dos números” (p.121). Explica que a aritmética mental é caracterizada por:

- trabalho com números e não com algarismos/dígitos;
- utilização das propriedades elementares do cálculo como a comutativa, distributiva, relações inversas e combinações destas propriedades;
- bom conhecimento sobre os números e factos numéricos;
- possibilidade de recorrer a registos escritos intermédios, mas realizada sobretudo, mentalmente. (Buys, 2001, p.122)

McIntosh et al (1997) afirmam que o objetivo das estratégias mentais é tornar cálculos que não conseguimos realizar em cálculos que conseguimos realizar, utilizando relações entre números e operações. Esclarecem que a utilização de estratégias mentais envolve e justapõe-se com o cálculo mental, a estimação e o sentido de número.

O contributo do ambiente da sala de aula

Como afirmam Stein, Engle, Smith e Hughes (2008) as discussões matemáticas são fundamentais para um efetivo ensino da Matemática. Para Wood (1999) evidências demonstram que a discussão na sala de aula é importante no desenvolvimento das conceções matemáticas dos alunos e que o processo de contradição e resolução é central à transformação do pensamento.

Yackel e Cobb (1996) explicam que surgem oportunidades de aprendizagem adicionais quando os alunos tentam dar sentido às explicações dadas por outros, quando comparam as soluções e fazem julgamentos sobre semelhanças e diferenças. Além disso, explicando e justificando diferentes soluções, o professor e os alunos conseguem estabelecer significados partilhados. Apuraram, no seguimento das ideias de Lampert (1990) e Voight (1985) que o papel do professor é facilitar discussões matemáticas, ao mesmo tempo que pode legitimar ou sancionar aspetos da atividade matemática dos alunos. Verificaram que estas discussões contribuem para o próprio desenvolvimento da compreensão do professor sobre a atividade matemática e sobre o desenvolvimento conceptual dos alunos.

Os algoritmos

O papel dos algoritmos no ensino/aprendizagem das operações aritméticas, incluindo a divisão, não é presentemente consensual. Durante muito tempo estes ocuparam um papel

central neste domínio. Brocardo, Serrazina e Kraemer (2003) defendem que a introdução precoce dos algoritmos, não dando aos alunos a oportunidade para desenvolver o sentido do número e de pensar criticamente sobre o sentido das operações, leva ao não desenvolvimento de outras estratégias de cálculo. Reconhecem algumas potencialidades, entre elas a sua generalidade, sendo as mesmas regras de cálculo válidas para quaisquer números e a sua eficácia, dado que um algoritmo pode sempre conduzir a uma resposta certa desde que corretamente utilizadas as suas regras.

Fuson (2003) explica que cada algoritmo tem vantagens e desvantagens, sendo alguns mais passíveis de serem compreendidos e que a compreensão pode ser aumentada pela utilização de materiais manipuláveis ou desenhos que ajudem a perceber os significados dos números, notações e passos do algoritmo. Na sua opinião, esta compreensão não é contrária ao desenvolvimento da fluência de cálculo, é fundamental para ela. Considera que as decisões que podem ser tomadas na sala de aula sobre a fluência de cálculo dizem respeito, em parte, aos algoritmos trabalhados e são também a base para a escolha desses algoritmos.

Monteiro, Loureiro, Nunes e Gonçalves (2007) afirmam que a reflexão sobre algoritmos se torna mais complexa na divisão. Explicam que se deve a uma contextualização de cálculos que é mais complexa, o sentido da operação mais difícil e os cálculos envolvidos também mais difíceis. Consideram que as decisões de ensinar algum algoritmo, quando e qual ensinar se tornam mais polémicas e afirmam que é essencial que os professores conheçam melhor os algoritmos da divisão. Como explicam Kamii e Dominick (1997), investigadores como Narode, Board e Davenport (1993), Kamii (1994) e McNeal (1995) opõem-se ao ensino de qualquer tipo de algoritmo visto considerarem que são prejudiciais ao desenvolvimento do raciocínio numérico.

Metodologia

O estudo realizado teve como objetivo perceber o que os alunos de uma turma de 4º ano já haviam aprendido sobre a divisão e como desenvolver o ensino/aprendizagem da divisão com compreensão e incentivar a utilização de estratégias mais sofisticadas em problemas de divisão.

Para tal, procurou-se responder às seguintes questões: (1) Quais as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de problemas de divisão? (2) Que compreensão evidenciam sobre as ideias fundamentais relacionadas com a operação da divisão? Que dificuldades revelam? (3) Que papel pode ter o desenvolvimento do cálculo mental? (4) Será que as interações entre professor e alunos e entre alunos contribuem para a compreensão dos aspetos fundamentais sobre a divisão e para o desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas mais sofisticadas?

A investigação enquadra-se no paradigma interpretativo, desenvolvida através de uma metodologia do tipo qualitativo, no formato de estudo de caso. Para a recolha de dados foi organizada uma sequência de 7 tarefas (problemas de divisão), desenvolvidas numa sala de aula de 4º ano em 2015/2016. As tarefas foram sequenciadas tendo em consideração os diferentes aspetos fundamentais da divisão que abordavam.

Foram selecionados 4 alunos. Um dos critérios de seleção foi o resultado obtido num teste diagnóstico com o objetivo de identificar as estratégias utilizadas na resolução de situações de divisão. O agrupamento dos alunos tomou em consideração a proximidade entre o tipo de cálculos desenvolvidos nestas estratégias. Outro critério foram algumas características pessoais relativamente a aspetos como a utilização do cálculo escrito e do cálculo mental, a flexibilidade na utilização de diferentes tipos de estratégias de cálculo, a atitude perante situações novas, a capacidade de comunicação matemática e a organização do trabalho realizado. Outro critério foi o desempenho escolar em Matemática. Foram selecionados alunos com um desempenho ao nível do Bom ou Muito Bom. A partir dos pares selecionados desenvolveram-se dois estudos de caso.

Utilizaram-se diferentes técnicas de recolha de dados: teste diagnóstico, observação direta participante, notas de campo, gravações áudio das interações dos alunos dos casos, gravações em vídeo das interações em grande grupo, registos de trabalho dos alunos dos casos e análise documental. A investigadora (primeira autora) participou como professora titular da turma.

Foram salvaguardadas as questões éticas de informação, autorização e anonimato dos participantes.

A análise dos dados foi realizada utilizando técnicas da análise de conteúdo. Foram criadas categorias a partir das questões de investigação e dos contributos teóricos (tabela 1).

APRESENTAÇÃO DE RESULTADOS

Apresentando uma síntese relativamente aos aspetos observados no caso do par Andreia/Ricardo, relativamente às estratégias de divisão, a tabela 2 sintetiza as utilizadas na solução de problemas do teste diagnóstico.

A tabela 2 demonstra que os alunos utilizaram estratégias semelhantes para a resolução do problema 1, do tipo procedimento de construção utilizando a adição e multiplicação. Verifica-se que ambos utilizaram a estimativa e tentativa e erro.

Para a resolução do problema 2, desenvolveram estratégias diferentes, sendo a estratégia de Ricardo mais sofisticada porque se baseia principalmente no uso da multiplicação, o que diminui o número de cálculos necessários para chegar à resposta e também origina que no próprio cálculo esteja a contabilização do número de vezes que utiliza o divisor.

A tabela 3 sintetiza o tipo de estratégias utilizadas pelos alunos na resolução das tarefas realizadas em par.

ATAS DO IV ENCONTRO DE MESTRADOS EM EDUCAÇÃO E ENSINO
DA ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO DE LISBOA

Tabela 3

Tabela síntese das estratégias utilizadas para a resolução das tarefas pelos alunos Andreia e Ricardo/

Estratégias		Tarefas								
		T1	T2	T3	T4		T5		T6	T7
					4.1	4.2	5.1	5.2		
Procedimentos de construção (aditivos + multiplicativos)	Adição					X		X		
	Dobro					X		X		
	Multiplicação por múltiplos de 10					X		X		
	Usa pequenos múltiplos do divisor					X		X		
	Usa grandes múltiplos do divisor					X		X		
	Usa estimativa							X		
	Usa tentativa e erro							X		
Usa o modelo retangular						X				
Usa quocientes conhecidos			X							
Usa a relação entre a multiplicação e a divisão	Multiplica o divisor por outro número									
	Usa estimativa									
	Usa tentativa e erro									
	Usa múltiplos de 10									
	Usa produtos conhecidos									
Algoritmos alternativos	Não usa decomposição do dividendo	X	X							X
	Usa decomposição do dividendo			X	X		X		X	
	Regista cálculos intermédios	X	X	X	X		X		X	X
	Não usa decomposição do divisor	X	X	X	X		X		X	X
	Usa estimativa	X	X				X			X
	Usa tentativa e erro	X	X	X						X
Usa produtos conhecidos	X	X	X	X				X		

Observando a tabela 3, verificamos que os alunos passaram a utilizar principalmente algoritmos alternativos. A prevalência da utilização de um algoritmo é visível dado ser utilizado em sete dos nove problemas trabalhados.

Verifica-se que em cinco problemas, os alunos utilizaram a estimativa aliada à tentativa e erro. No que respeita à compreensão e/ou dificuldades relativamente a ideias fundamentais da divisão, verifica-se sobre os sentidos da divisão, que os alunos já associam tanto as situações de medida como de partilha diretamente a esta operação (tabela 4).

Tabela 4

Tabela síntese do desempenho dos alunos Andreia e Ricardo relativamente à identificação do sentido da divisão presente nos problemas resolvidos a pares

Tarefa	T1	T2	T3	T4		T5		T6	T7
				4.1	4.2	5.1	5.2		
Sentido da divisão	medida	partilha	partilha	partilha	medida	medida	partilha	medida	medida
Associam diretamente à divisão	X	X	X	X	X	X		X	X

ATAS DO IV ENCONTRO DE MESTRADOS EM EDUCAÇÃO E ENSINO
DA ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO DE LISBOA

Relativamente à ligação entre situações de partilha e de medida decorrentes da mesma relação parte/todo, a partir dos resultados obtidos na tarefa 4 e 5 apura-se que os alunos têm dificuldade em estabelecer esta ligação.

Verificou-se na tarefa 4 que a utilização de modelos retangulares ajudou os alunos a estabelecer alguma relação entre os problemas resolvidos e no desenvolvimento de uma estratégia válida para a resolução do segundo problema da tarefa.

Na tarefa 5, não houve nenhum reflexo da descoberta realizada na tarefa 4 com os modelos retangulares sobre a relação entre os dois problemas, embora, no segundo problema, os alunos tenham desenvolvido a estratégia elaborada a partir da observação destes modelos e utilizada na resolução do segundo problema da tarefa 4.

Relativamente à relação inversa entre a divisão e a multiplicação, verificou-se que os alunos utilizaram a multiplicação unicamente em estratégias de construção do dividendo, o que pode não corresponder a uma utilização explícita da multiplicação como operação inversa. Na resolução da tarefa 3, os alunos mostraram dificuldade em aplicar conhecimentos já trabalhados anteriormente relativos à relação inversa entre a multiplicação e a divisão, nomeadamente sobre as relações entre as partes e o todo nestas operações que lhes permitiriam o desenvolvimento de estratégias mais sofisticadas.

Relativamente ao resto, demonstraram refletir sobre o seu papel na situação do problema e sobre a sua influência na resposta, embora nem sempre tenham conseguido fazê-lo de forma correta.

Sobre a utilização do cálculo mental podemos concluir que foi utilizado em cálculos realizados na maioria dos problemas resolvidos.

Tabela 5|

Tabela síntese das diferentes situações de utilização do cálculo mental pelos alunos Andreia e Ricardo

Tarefa	T1	T2	T3	T4		T5		T6	T7
				4.1	4.2	5.1	5.2		
Cálculo intermédio num algoritmo	X	X	X	X		X		X	X
Cálculo direto de respostas			X		X				
Cálculo por aproximação		X					X		
Relacionado com o uso da estimativa e tentativa e erro	X	X				X	X		X

Pela análise da tabela 5, podemos verificar que o papel do cálculo mental na resolução dos problemas não foi sempre o mesmo, dependendo do tipo de estratégia desenvolvida pelos alunos, mas também tendo em conta a ordem de grandeza dos números envolvidos nos cálculos. Verifica-se também que na maioria dos casos o cálculo mental foi utilizado em ligação com o uso da estimativa e da tentativa e erro.

Relativamente à contribuição das interações entre os alunos do par para a compreensão dos aspetos fundamentais sobre a divisão e para o desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas mais sofisticadas verificou-se que as interações entre o par se relacionaram fundamentalmente com aspetos da elaboração e desenvolvimento das estratégias de resolução e dos cálculos realizados. Não existiram interações explícitas sobre aspetos fundamentais da divisão. Surgiram principalmente da necessidade de compreensão da tarefa a realizar, da exposição de ideias para elaborar uma estratégia comum, da explicitação dos cálculos realizados, da identificação de erros nos cálculos, da ajuda na realização de um determinado cálculo. Estas interações permitiram aos alunos o desenvolvimento de estratégias de resolução que na maioria das tarefas realizadas levaram a uma resposta correta. Também permitiram a troca de ideias entre o par sobre estratégias de cálculo mais sofisticadas desenvolvidas por um dos alunos ou a colaboração de um dos alunos para o desenvolvimento, pelo outro colega, de uma estratégia mais sofisticada. A identificação de erros cometidos por um dos alunos do par ou por colegas obrigou à reformulação de ideias ou à revisão de cálculos pelo outro, feita em todos os casos com a ajuda do colega.

As interações entre mim (investigadora/primeira autora) e o par ocorreram quase exclusivamente por minha iniciativa e durante as interações em grande grupo. Surgiram principalmente da minha necessidade, como professora /investigadora, de pedir aos alunos para explicitarem aspetos das suas estratégias que não tinham sido explicados pelos mesmos, de conduzir e instigar a discussão entre eles sobre as estratégias ou sobre os aspetos fundamentais da divisão, de pedir a clarificação das ideias apresentadas, de sistematizar e validar as ideias apresentadas por eles e de colocar questões que levassem à reflexão sobre determinada ideia.

Da análise das interações entre alunos em grande grupo verifica-se que partiram da explicitação das estratégias desenvolvidas pelo par e que levaram à explicação e justificação das ideias e dos cálculos realizados, à explicitação de semelhanças e diferenças entre estratégias realizadas, à validação das ideias e cálculos apresentados, à identificação de erros e apresentação de propostas de resolução dos mesmos, e à explicitação de estratégias mais sofisticadas.

Na discussão das estratégias apresentadas pelo par surgiram questões colocadas por colegas e por mim que levaram ao debate em redor de aspetos fundamentais sobre a divisão.

CONCLUSÕES

Relativamente às primeiras estratégias dos alunos na resolução de problemas de divisão, os dados recolhidos vão de encontro ao que afirmam Fosnot e Dolk (2001) ao indicarem que estas são aditivas, partindo do grupo para o todo e envolvem contar várias vezes ou tentativa

e erro. No entanto, os conhecimentos sobre cálculo já desenvolvidos pelos alunos, nomeadamente ao nível da multiplicação, permitiram que estes refinassem a sua estratégia, utilizando a multiplicação, confirmando também a afirmação ainda de Fosnot e Dolk (2001) de que a construção do raciocínio multiplicativo fornece aos alunos uma ferramenta poderosa que podem utilizar no desenvolvimento de estratégias de divisão.

Na experiência de ensino realizada, após terem trabalhado na sala de aula situações de divisão com divisores com 2 algarismos utilizando algoritmos alternativos, verificou-se que passou a ser a estratégia mais utilizada. Este facto parece confirmar a afirmação de Brocardo, Serrazina e Kraemer (2003) de que a introdução precoce dos algoritmos tem como consequência o não desenvolvimento de outras estratégias de cálculo.

Relativamente às ideias fundamentais sobre a divisão abordadas nas tarefas, verificou-se que a única ideia sobre a qual demonstraram algum domínio foi na identificação da operação da divisão com os sentidos de partilha e de medida. No entanto, nas tarefas 4 e 5 em que foram realizados dois problemas, um com o sentido de medida e outro com o sentido de partilha baseados na mesma relação parte/todo, demonstraram dificuldade em fazer esta identificação. Os alunos não conseguiram verificar a ligação existente entre os dois problemas. Este facto confirma a ideia de Fosnot e Dolk (2001) sobre a dificuldade que os alunos têm na compreensão da relação entre situações de partilha e de medida.

Com a utilização do modelo retangular, os alunos conseguiram estabelecer uma relação entre as situações dos problemas da tarefa 4 e com os modelos dados, o que os ajudou a desenvolver uma estratégia de resolução para o segundo problema. Sem esta ajuda, teriam resolvido o problema de forma incorreta, o que confirma a afirmação de Jacob e Mulligan (2014) ao considerarem que o modelo retangular pode ser utilizado para auxiliar os alunos a estruturar a compreensão da divisão, nomeadamente na compreensão da ligação desta operação a uma variedade de situações e representações.

Sobre a relação inversa entre a divisão e a multiplicação, verifiquei que os alunos não aplicaram conhecimentos já trabalhados anteriormente sobre este assunto que lhes permitiriam desenvolver estratégias de resolução mais sofisticadas, situação que vai de encontro ao afirmado por Robinson e LeFevre (2012) de que a compreensão e a utilização da relação inversa entre a divisão e a multiplicação desenvolvem-se relativamente devagar.

Em relação ao resto, os resultados estão de acordo com o que afirmam Rocha et al. (2007), de que se trata de uma dificuldade acrescida no estudo da divisão. Os alunos mostraram considerar e refletir sobre o papel do resto nas situações apresentadas embora na tarefa onde o resto influenciava a resposta, não tenham conseguido chegar a uma resposta final correta.

O cálculo mental esteve presente nas resoluções de quase todos os problemas. Na maioria das situações, o cálculo mental foi utilizado associado à estimativa e à tentativa e erro, o que vem confirmar uma ideia de McIntosh et al (1997) de que cálculo mental, estimação e sentido de número têm uma relação muito forte e são difíceis de individualizar.

Relativamente à contribuição das interações entre professor e alunos e entre alunos para a compreensão dos aspetos fundamentais sobre a divisão e para o desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas mais sofisticadas verificou-se, tal como afirmaram Yackel e Cobb (1996), que surgem oportunidades de aprendizagem adicionais quando as crianças tentam dar sentido às explicações dadas por outros, quando comparam as soluções de outros com as suas e fazem julgamentos sobre semelhanças e diferenças. Estas oportunidades de aprendizagem surgiram tanto nas interações entre o par, como nas de grande grupo. No entanto, as interações sobre aspetos fundamentais da divisão ocorreram exclusivamente nas discussões em grande grupo.

As conclusões referentes às interações entre mim e os alunos reafirmam as ideias de Yackel e Cobb (1996), no seguimento das ideias de Lampert (1990) e Voight (1985), de que o papel do professor é facilitar discussões matemáticas, ao mesmo tempo que age como um participante que pode legitimar ou sancionar certos aspetos da atividade matemática dos alunos e que estas discussões contribuem para o próprio desenvolvimento da compreensão do professor sobre a atividade matemática e sobre o desenvolvimento conceptual dos seus alunos.

Pensa-se que este estudo pode levar os professores do Ensino Básico a refletir sobre a forma como desenvolvem o ensino/aprendizagem das operações aritméticas, sobre qual o seu papel e o dos alunos neste processo e sobre o tipo de situações de aprendizagem que devem desenvolver.

REFERÊNCIAS

- Anghileri, J., Beishuizen, M. & van Putten, K. (2002). From informal strategies to structured procedures: Mind the gap! *Educational Studies in Mathematics*, 49(2), 149-170
- Brocardo, J., Serrazina, L. & Kraemer, JM. (2003). Algoritmos e sentido do número. *Educação e Matemática*, 75, 11-15.
- Buys, K. (2001). Mental arithmetic. In M. Van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Children Learn Mathematics: A Learning-Teaching Trajectory with Intermediate Attainment Targets for Calculation with Whole Numbers in Primary School* (pp. 121-146). Netherlands: Freudenthal Institute, Utrecht University.
- Ferreira, E. (2005). Um percurso na aprendizagem do conceito de divisão no 1º Ciclo. In GTI – Grupo de trabalho e investigação (Org.), *O professor e o desenvolvimento curricular*. (pp 113-138). Lisboa: APM.
- Fosnot, C. & Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work: constructing multiplication and division*. Portsmouth: Heinemann.
- Fuson, K. C. (2003). Toward computational fluency in multidigit multiplication and division. *Teaching Children Mathematics*, 9(6), 300-305.

ATAS DO IV ENCONTRO DE MESTRADOS EM EDUCAÇÃO E ENSINO
DA ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO DE LISBOA

- Hartnett, J. (2007). Categorisation of mental computation strategies to support teaching and to encourage classroom dialogue. In J. Watson, & K. Beswick (Ed.), *Mathematics: Essential Research, Essential Practice. Proceedings of the thirtieth annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*. (MERGA-30). 1, pp. 345-352. Hobart: MERGA.
- Jacob, L. & Mulligan, J. (2014). Using arrays to build multiplicative thinking in the early years. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 19(1), 35-40.
- Kamii, C., Dominick, A. (1997). To teach or not to teach algorithms. *Journal of mathematical behaviour*. 16(1). 56-61.
- McIntosh, A., Reys, B. & Reys, R. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, 12 (3), 2-8.
- Mendes, F. (2013). A aprendizagem da divisão: um olhar sobre os procedimentos usados pelos alunos. *Da investigação às práticas*, 3(2), 5-30.
- Mendes, F. (2012). *A aprendizagem da multiplicação numa perspectiva de desenvolvimento de sentido de número: um estudo com alunos do 1º ciclo*. Tese de Doutoramento. Universidade de Lisboa: Instituto de Educação, Lisboa.
- Monteiro, A., Loureiro, C., Nunes, F. & Gonçalves, H. (2007). *Multiplicação e divisão (tarefas-1)*. Programa de Formação Contínua para professores do 1º e 2º Ciclo. Lisboa: Escola Superior de Educação de Lisboa.
- Ministério da Educação e Ciência (2013). *Programa e metas curriculares de matemática - Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência. Consultado em <http://www.dge.mec.pt>
- NCTM (2008). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: APM.
- Nunes, T., Campos, T., Magina, S. & Bryant, P. (2005). As estruturas multiplicativas: avaliando e promovendo o desenvolvimento dos conceitos de multiplicação e divisão em sala de aula. In T. Nunes, T. Campos, S. Magina, P. Bryant (Eds) *Educação Matemática: Números e operações – Volume 1* (pp 83-117). São Paulo: Cortez Editora.
- Rocha, I. & Menino, H. (2009) – Desenvolvimento do sentido de número na multiplicação. Um estudo de caso com crianças de 7/8 anos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 12 (1), 103-134.

ATAS DO IV ENCONTRO DE MESTRADOS EM EDUCAÇÃO E ENSINO
DA ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO DE LISBOA

- Rocha, I., Rodrigues, M. & Menino, H. (2007) – A divisão no contexto do sentido do número. In *Desenvolvendo o sentido do número. Perspetivas e exigências curriculares*, volume II. (pp. 19-22). Lisboa: APM.
- Robinson, K. & LeFevre, J. (2012). The inverse relation between multiplication and division: concepts, procedures, and a cognitive framework. *Educational studies in mathematics*, 79, 409-428.
- Stein, M., Engle, R., Smith, M. & Hughes, E. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical thinking and learning*, 10, 310-340.
- Wood, T. (1999). Creating a context for argument in mathematics class. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30 (2), 171-191.
- Yackel, E. & Cobb, P. (1996). Normas socio matemáticas, argumentação e autonomia em matemática (tradução). *Journal for Research in Mathematics Education*, 27 (4), 458-477.