Instituto Politécnico de Lisboa

Escola Superior de Educação

CONCEITO DE VOLUME:
UMA EXPERIÊNCIA
NO 6º ANO DE ESCOLARIDADE

Dissertação apresentada para obtenção do grau de Mestre em Educação Matemática na Educação Pré-Escolar e no 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico

Susana Cristina Cordeiro Serra

2010

Instituto Politécnico de Lisboa
Escola Superior de Educação

CONCEITO DE VOLUME:
UMA EXPERIÊNCIA
NO 6º ANO DE ESCOLARIDADE

Dissertação apresentada para obtenção do grau de Mestre em Educação Matemática na Educação Pré-Escolar e no 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico

Orientadora: Professora Doutora Maria de Lurdes Serrazina
Co-orientadora: Mestre Maria Cristina Loureiro

Susana Cristina Cordeiro Serra

2010

AGRADECIMENTOS

Finalizando este trabalho, que só foi possível com a coexistência de condições e apoios de diferentes pessoas e instituições, desejo expressar os meus mais sinceros agradecimentos a todos os que, de algum modo, contribuíram para a sua concretização:

- à Professora Maria de Lurdes Serrazina e à Professora Maria Cristina Loureiro pelas suas orientações, ensinamentos, sugestões e disponibilidade que sempre demonstraram;

- aos meus alunos, que participaram neste estudo pela adesão e empenho;

- à Direcção da Escola por permitirem o desenvolvimento deste estudo;

- à minha colega e amiga Rute pela sua amizade e apoio;

Finalmente ao Domingos e à Inês, que me souberam compreender, me deram apoio e carinho em todos os momentos. Mesmo, quando não fui, muitas vezes, uma boa companhia.

Obrigado pela vossa dedicação e compreensão.

RESUMO

Este estudo analisa o modo como se desenvolve a aprendizagem do conceito de volume nos alunos do 6º ano de escolaridade, no quadro de uma proposta pedagógica que dá ênfase a actividades que apelam à visualização e ao raciocínio espacial. O seu objectivo principal foi o de compreender as ideias que os alunos do 6.º ano têm sobre volume e perceber como se desenvolvem quando são envolvidos numa experiência de ensino, tendo por base uma cadeia de tarefas que apelam à visualização e ao raciocínio espacial.

O estudo seguiu uma metodologia de investigação qualitativa baseada em estudos de caso. A proposta pedagógica foi desenvolvida em quatro aulas; três de noventa minutos e uma de quarenta e cinco minutos, durante os 2º e 3º períodos do ano lectivo de 2009/2010.

A recolha de dados envolveu a realização de gravações áudio, em ambiente de sala de aula, dos alunos que constituíram os estudos de caso, registo de observações do desempenho dos alunos e os documentos produzidos por estes.

Os resultados mostram que, ao longo da proposta pedagógica, os alunos adquiriram estratégias de contagem que lhes permitiram criar estruturas, para compreender a organização dos paralelepípedos e desenvolver o conceito de volume.

ABSTRACT

This study examines how 6th graders' students develop the concept of volume in a learning experience context which emphasizes the visualization and spatial reasoning. The main objective of this study is to understand the ideas of 6th grade students about volume and see how they develop them when they are involved in a learning experience, based on a sequence of tasks that call for visualization and spatial reasoning.

The study followed a qualitative research methodology based on case studies. The learning experience was developed in four classes, three ninety minutes period and one forty-five minutes, during the 2nd and 3rd terms of the school year 2009/2010.

Data collection involved the use of audio recordings in the classroom environment, recording observations of student performance and the documents produced by them.

The results showed that, over the learning experience, students acquired counting strategies that allowed them to create structures for understanding the organization of cubes arrays and develop the concept of volume.

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE QUADROS

I - INTRODUÇÃO

1.1. Problema e Objectivos do Estudo

Convivemos no nosso quotidiano com grandezas e medidas em situações muito diversas. Muitas dessas medidas estão ligadas a três grandezas geométricas fundamentais: comprimento, área e volume. A compreensão e domínio dos conceitos relacionados com as grandezas e medidas são cada vez mais importantes para o desenvolvimento da tecnologia e da ciência, assim como para o mundo do trabalho. Na matemática escolar, o ensino das grandezas e medidas tem um lugar muito importante e está intimamente ligado ao ensino da Geometria.

De acordo com as orientações curriculares para o ensino da Matemática (NCTM, 2007; ME, 2001, 2007), o ensino da Geometria deve basear-se na experimentação e na manipulação, privilegiando a capacidade de visualização e raciocínio espacial como um dos aspectos a desenvolver. De acordo com Matos e Serrazina, "parece essencial que a geometria seja uma das formas privilegiadas de adquirir uma intuição e uma orientação espacial cruciais para o mundo moderno" (1996, p.265)

As *Normas e Princípios para a Matemática Escolar* (NCTM, 2007) referem que os alunos descobrem relações e desenvolvem o sentido espacial ao construírem, desenharem, medirem, visualizarem, compararem, transformarem e classificarem figuras geométricas. Discutir ideias, fazer conjecturas e testar hipóteses são actividades que devem preceder o desenvolvimento de questões mais formais. Assim, as definições tornam-se significativas, as relações entre figuras são compreendidas e os alunos preparam-se para usar estas ideias no desenvolvimento informal de conceitos.

A aprendizagem do conceito de volume é feita ao longo do Ensino Básico. No segundo ciclo os alunos deveriam desenvolver a "aptidão para calcular áreas (…) volumes de paralelepípedos, recorrendo ou não a fórmulas, em contexto de resolução de problemas." (ME, 2001). No entanto, grande parte dos meus alunos no 5º e 6ºano de escolaridade revelam falta de conhecimento e compreensão sobre o conceito de volume. Muitas vezes, este conceito é dado como adquirido pelos professores por ser considerado, por alguns, como algo mais intuitivo. Assim, é muitas vezes leccionado com base em definições, apoiadas pelo manual e rapidamente se passa ao cálculo do volume através da aplicação fórmula. Os alunos limitam-se a executar procedimentos, quase sempre memorizados, com que resolvem determinados tipos de problemas.

O que posso constatar, como professora do 2º ciclo do Ensino Básico, é que os alunos não compreendem o conceito, confundem as medidas que têm de usar e as fórmulas são, na maior parte casos, esquecidas pelos alunos pouco tempo depois de decoradas.

Assim, proponho-me realizar um trabalho de investigação com o objectivo principal de compreender as ideias que os alunos do 6.º ano têm sobre volume e perceber como estas podem ser desenvolvidas quando os alunos são envolvidos numa experiência de ensino, tendo por base uma cadeia de tarefas que apela à visualização e ao raciocínio espacial. Assim, orientei este estudo de acordo com os seguintes objectivos:

- Compreender o papel de tarefas que apelam à visualização e raciocínio espacial no desenvolvimento do conceito de volume.

- Compreender como é que os alunos fazem a transição dos casos particulares, apresentados nas tarefas para a generalização.

1.2. Pertinência do Estudo

A Matemática faz sentido às crianças e aos adultos, quando conseguem compreender as razões por detrás dos procedimentos. Creio que muito do insucesso da disciplina de Matemática nas nossas escolas do Ensino Básico, está relacionado com o facto de os alunos não compreenderem aquilo que lhes é pedido. São dadas regras a seguir, fórmulas a aplicar e raramente o professor leva o aluno a explorar e a compreender como se chega a determinada regra, ou qual a razão para se aplicar aquela fórmula na resolução de um problema ou tarefa. Battista e Clements (1996) atribuem as dificuldades, que os alunos apresentam no cálculo da medida de volume, à ênfase que é dada à fórmula e ao seu ensino, muitas vezes quando os alunos ainda não estão preparados para a compreender.

A ideia de desenvolver o conceito de volume associado à visualização e ao raciocínio espacial, surge de diversas leituras, sobre investigações em que o conceito de área é amplamente trabalhado com bons resultados, quando associado, às imagens que permitem esclarecer e simplificar a aprendizagem de conceitos geométricos. Neste âmbito, a visualização é também fundamental na construção e exploração de conceitos matemáticos como mostram os estudos de Battista e Clements (1996, 1998). Assim, parece-me pertinente desenvolver um estudo onde procuro compreender o desenvolvimento do conceito de volume, em alunos do Ensino Básico, bem como a evolução das suas estratégias na resolução de tarefas que apelam à visualização e ao raciocínio espacial.

1.3. Organização do Trabalho

Este estudo está organizado em seis capítulos que incluem esta apresentação: a fundamentação teórica, a metodologia, a análise de dados e as conclusões.

Neste primeiro capítulo, onde foram explicitados o problema e objectivos do estudo, a sua pertinência, bem como a organização do trabalho.

O segundo capítulo corresponde à revisão de literatura e encontra-se dividido em três subcapítulos: algumas investigações, investigação sobre o ensino e aprendizagem do conceito de volume; algumas ideias sobre a visualização no ensino e aprendizagem da Geometria e orientações curriculares sobre o ensino da Geometria.

O terceiro capítulo, corresponde à apresentação da metodologia da investigação onde apresento e justifico as opções tomadas.

No quarto capítulo é apresentada a proposta pedagógica implementada no âmbito deste estudo.

O quinto capítulo corresponde à análise dos dados relativos aos estudos de caso desta investigação. Primeiro é feita uma breve descrição de cada par de alunos, depois, para cada par, é analisado o trabalho realizado durante o desenvolvimento das tarefas propostas. Apresenta-se ainda a forma como as tarefas foram desenvolvidas na turma, onde estavam inseridos os pares de alunos alvo dos estudos de caso. O capítulo termina com uma reflexão pessoal sobre o estudo desenvolvido.

No sexto capítulo são apresentadas as conclusões do estudo, as perspectivas de desenvolvimento e algumas recomendações.

II - REVISÃO DE LITERATURA

2.1. Alguns resultados da investigação sobre o ensino e aprendizagem do conceito de volume.

Estudos sobre o volume e o conhecimento que os alunos possuem sobre este conceito têm sido realizados por autores como Battista (1999, 2003, 2007), Battista e Clements (1996,1998) e Reece e Kamii (2001), entre outros. Estes autores mostram que alunos do Ensino Básico, mesmo ao nível do 3º ciclo, possuem dificuldades em indicar o número de cubos ou unidades de medida que compõem um determinado sólido. Referem ainda que obter o número de cubos em sólidos rectangulares, permite o desenvolvimento da estrutura cognitiva necessária para compreender o modo como se determina o volume de um sólido. Sem um bom conhecimento da estrutura espacial destes sólidos, os alunos pensam na fórmula para o cálculo do volume como o produto de três números.

De acordo com Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999), "A investigação mostra que a utilização de instrumentos de medida e de fórmulas muito cedo pode conduzir a uma utilização sem a compreensão necessária à resolução de problemas que envolvam medidas" (p.61).

Reece e Kamii (2001) publicaram um estudo realizado com 257 crianças do 2º ao 5º ano, onde procuram compreender porque é que os alunos medem o volume incorrectamente. Neste estudo, os alunos são entrevistados individualmente para encontrar o nível no qual demostram raciocínio transitivo[1] e iteração da unidade[2] na medição do volume. São apresentadas as duas tarefas propostas aos alunos para definição do nível em que se encontravam. Na tarefa sobre raciocínio transitivo, os alunos foram questionados sobre se um recipiente grande e vazio, podia ser usado para comparar a quantidade de pipocas em duas embalagens muito diferentes uma da outra. Na tarefa sobre

[1] Raciocínio Transitivo no original "transitive reasoning", indicado como capacidade de deduzir uma terceira relação a partir de duas ou mais relações de igualdade ou desigualdade.
[2] Iteração da unidade no original "unit iteration", indicando capacidade de relacionar parte -todo dentro de cada todo.

iteração da unidade, os alunos foram questionados sobre, se um recipiente mais pequeno podia ser usado para comparar quantidades semelhantes de dois outros recipientes. As investigadoras apuraram que 51 dos alunos entrevistados demonstraram raciocínio transitivo no 3º ano, e que a maioria (56%) demonstraram iteração da unidade, no 4º ano. Concluiram ainda que as crianças medem incorrectamente porque não conseguem pensar na unidade como parte de um todo. Quando conseguem estabelecer a relação parte-todo, medem com mais precisão, porque percebem a unidade como uma de várias partes iguais que constroem um todo. Reece e Kamii (2001) referem que é ineficaz ensinar às crianças medidas de volume antes destas conseguirem estabelecer a relação parte-todo.

Num dos muitos estudos que realizou, Battista (1999), o investigador procurou analisar e compreender a construção do conhecimento dos alunos, em situações de contagem, de composições de cubos paralelepipédicas. Neste artigo, o autor descreve o trabalho desenvolvido por três pares de alunos, ao longo da realização de uma actividade, em que estes tinham de prever o número de cubos que preenchiam uma determinada caixa, desenhada e /ou a sua planificação, verificando de seguida as suas previsões. Ao longo deste estudo, o investigador explica e descreve como os processos de abstracção, reflexão, estruturação espacial e coordenação numa situação de interacção social a pares, podem potenciar aprendizagens significativas e eficazes. No final do estudo todos os alunos calculam correctamente o número de cubos que preenchem uma dada caixa. Muitos investigadores têm deixado claro que o desenvolvimento de conceitos, é muitas vezes confuso e irregular. Este estudo confirma a ideia de que as aprendizagens dependem, não só, das variadas experiências educativas que são proporcionadas aos alunos, como também, da capacidade destes em verificar de forma autónoma a validade dos seus modelos mentais.

Como resultado de várias investigações que realizaram, Battista e Clements (1996), classificaram as estratégias usadas pelos alunos quando procuram o número de cubos de um paralelepípedo (quadro 1). Estes autores referem, no entanto, que a evolução destas estratégias depende do ritmo e das experiências de aprendizagem de cada aluno. No seu processo de desenvolvimento, os alunos podem não passar por todas as estratégias, saltando alguma ou algumas delas.

Quadro 1 - Estratégias de contagem usadas pelos alunos (Adaptado de Battista e Clements 1996, p.263)

Estratégia	Descrição
A	Os alunos vêem o cubo como um conjunto de camadas.
B	Os alunos concebem o conjunto de cubos, no espaço, mas não usam as camadas para fazerem a contagem destes.
C	Os alunos concebem o conjunto de cubos como faces.
D	Os alunos usam a fórmula (CxLxA).
E	Outras (os alunos usam uma estratégia diferente das descritas de A a D).

Uma das preocupações nas investigações realizadas sobre esta temática, tem sido a identificação e compreensão dos erros dos alunos. Battista (2003) descreve os erros mais comuns e as dificuldades dos alunos quando trabalham com sólidos construídos com pequenos cubos. Por exemplo: alunos que demonstraram dificuldades em visualizar sólidos, não conseguem indicar o número de cubos que compõem uma dada construção; alunos que não compreendem os processos, que levam às fórmulas para o cálculo de áreas ou de volumes, aplicam-nas incorrectamente ou não são capazes de resolver novos problemas.

Battista (2003, p.122) afirma que para compreender o pensamento dos alunos, quando realizam contagens estruturadas de quadrados ou cubos, são essenciais quatro processos mentais: “formação e utilização de modelos mentais, estruturação espacial, localização de unidades, organização dos elementos de uma composição”. No primeiro processo, formação e utilização de modelos mentais, os indivíduos criam e usam recordações de experiências semelhantes ou imaginam representações mentais para visualizar, compreender e pensar sobre outras situações. No segundo processo, estruturação espacial, os indivíduos conseguem abstrair-se da forma dos objectos, identificando, relacionando e organizando as partes que as compõem. No terceiro processo, localização de unidades, os indivíduos conseguem localizar quadrados ou cubos em composições dadas, imaginando as suas posições no espaço. No quarto processo, organização dos elementos de uma composição, os indivíduos conseguem combinar unidades básicas (quadrados ou cubos) em linhas ou colunas e transformá-las em combinações mais elaboradas, que por sua vez, podem ser repetidas, formando outras ainda mais elaboradas. Partindo dos processos mentais apresentados, este autor descreve seis níveis de desenvolvimento para os processos de estruturação e contagem. Os alunos que se encontram no primeiro nível não conseguem visualizar as formas espacialmente e também não são capazes de organizar as unidades em composições mais elaboradas (colunas ou linhas, por exemplo). Quando se encontram no último nível, o sexto, os alunos já possuem modelos mentais estruturados que lhes permitem reflectir sobre as formas, mesmo quando não possuem quaisquer registos físicos das mesmas.

Owens e Outhred (2006) afirmam que pesquisas sobre volume, realizadas por Collins e Campbell, chegaram à conclusão de que grande parte dos alunos entre o 4º e o 6º ano, não usam a multiplicação para resolver problemas sobre contagem de cubos, no entanto conseguem resolvê-los correctamente. Para estes autores, os problemas referidos requerem o uso de diferentes capacidades: domínio das operações numéricas envolvidas e conhecimento da estrutura interna do sólido geométrico (cubo ou paralelepípedos).

Outros estudos sobre medida, focam principalmente o desenvolvimento de conceitos, e em particular, a importância dos alunos conhecerem as unidades de medida usadas para medir comprimentos, áreas ou volumes (Owens e Outhred, p.103).

Battista (2003) reforça a importância dos conceitos através dos estudos apresentados neste seu artigo. Este autor afirma que o objectivo único no ensino de conceitos, como o de área e de volume, deveria ser o de criar nos alunos modelos mentais, que lhes permitissem pensar sobre esses conceitos em diferentes situações de aprendizagem.

> "As tarefas, no ensino, devem incentivar e apoiar a construção, pelos alunos, de estratégias de contagem significativas (…) A construção de tais estratégias é facilitada, não dando fórmulas, mas incentivando os alunos a inventar, reflectir, testar e discutir as suas estratégias de contagem…"(p.135)[3]

Os alunos usam, de acordo com os modelos mentais que possuem, diferentes estratégias, quando tentam calcular o número de cubos num determinado sólido. Battista (2007) afirma que a verdadeira compreensão dos conceitos de área /volume implica compreensão:

> "(a) do que é a área/volume como atributo (ser capaz de compor e decompor áreas/volumes);
>
> (b) de como se mede área/volume (conhecer as unidades de volume);
>
> (c) de como usar processos numéricos para calcular área/volume de determinadas formas/sólidos;
>
> (d) de como estes processos são representados em linguagem matemática." (p.897)

Ao longo dos últimos anos, várias investigações procuraram descrever níveis de sofisticação do pensamento dos alunos quando tentam compreender e contar cubos em determinadas disposições organizadas. A mais completa e recente, Battista (2007, p.898) apresenta sete níveis de sofisticação, (quadro 2), pelos quais os alunos passam quando envolvidos em actividades que lhes permitem desenvolver estratégias de contagem e consciencializar a estrutura de paralelepípedo.

[3] No original: "Instructional tasks must encourage and support students' construction of personally meaningful enumeration strategies.(…) construction of such strategies is facilitated, not by giving them formulas, but by encouraging students to invent, reflect on, test, and discuss enumeration strategies…"(p.135)

Quadro 2 - Níveis de sofisticação (Adaptação de Battista, 2007, p.898)

Nível 1	**Ausência de processos, localização de unidades e organização dos elementos de uma composição.** Os alunos não conseguem organizar as unidades em composições espaciais e os seus modelos mentais são insuficientes para localizar todas as unidades que compõem uma estrutura de linhas e colunas ou de camadas. A razão está no facto de não conseguirem coordenar a informação espacial. A contagem dos elementos de uma composição parece feita ao acaso. O erro na dupla contagem é repetitivo.
Nível 2	**Inicio da utilização de processos, localização de unidades e organização dos elementos de uma composição.** Os alunos começam a organizar espacialmente estruturas de linhas e colunas ou de camadas a partir dos elementos que as compõem. Além disso, o desenvolvimento emergente dos processos de localização de unidades produz modelos mentais suficientes para que consigam reconhecer partes equivalentes da composição. Por exemplo, depois de contar os cubos visíveis num lado de uma construção, o aluno consegue inferir o número de cubos do lado oposto.
Nível 3	**Processo de localização de unidades suficientemente coordenado para eliminar o erro de contagem dupla.** O aluno consegue coordenar o processo de localização de unidades de uma vista singular (por exemplo, topo, lado) com um modelo mental suficiente para reconhecer a mesma unidade em vistas diferentes. Assim, fica capacitado para eliminar erros de contagem dupla. Porém, a coordenação ainda é insuficiente para construir um modelo mental capaz de localizar os cubos interiores.
Nível 4	**Utilização das componentes máximas da estrutura, mas insuficiente coordenação iterativa.** Os alunos estruturam as composições nas suas componentes máximas (linhas ou colunas para a área, camadas para o volume). No entanto, devido a insuficiente coordenação, não conseguem determinar totalmente a posição destes elementos, em vez disso estimam essas localizações.
Nível 5	**Utilização do processo de localização de unidades, de modo suficiente para localizar todas as unidades, mas com perda das componentes máximas empregues.** O modelo mental dos alunos permite-lhes localizar correctamente todos os quadrados ou cubos de uma disposição. Contudo, apesar de algumas vezes obterem respostas correctas, perdem com frequência o lugar dos elementos na contagem porque organizam ainda de modo ineficaz as composições. Além disso, as estratégias de estruturação e de contagem ainda não são generalizáveis e são inadequadas para estruturas maiores.

Nível 6	**Desenvolvimento completo e coordenação tanto do processo de localização de unidades como de organização dos elementos de uma composição.** Os modelos mentais interiorizados pelos alunos incorporam totalmente a estrutura de linhas e colunas ou de camadas, de modo que conseguem, com segurança, contar os elementos de uma estrutura e validar a contagem, sem o recurso a materiais ou a imagens das unidades que o compõem.
Nível 7	**Procedimentos numéricos ligados à estruturação espacial e Generalização.** A estruturação espacial e os esquemas de contagem dos alunos atingem um nível de abstracção que permite a sua validação e análise, capacitando os alunos para conseguirem explicar a ligação entre as estratégias de contagem e a estruturação espacial em que se basearam. A incorporação da estrutura de linhas e colunas, ou de camadas nos modelos mentais dos alunos, é suficientemente abstracta e geral, para ser aplicada a situações em que as unidades não são cubos (por exemplo, dois cubos ou um paralelepípedo que não seja um cubo).

2.2. Algumas ideias sobre a importância da Visualização no desenvolvimento de conceitos na aprendizagem da Geometria.

Projectar, observar e modificar mentalmente o espaço que nos rodeia são actividades que desenvolvemos com alguma frequência. Procuramos compreender o espaço em que vivemos, identificar a existência de objectos e figuras e as relações entre estes no espaço real. A necessidade de compreendermos o espaço que nos rodeia torna a geometria, um tema particularmente relevante e motivador. A capacidade de visualização é uma habilidade básica. Uma pessoa com dificuldades de visualização terá dificuldades em percepcionar correctamente as representações planas e espaciais de um objecto. "A geometria e a visualização espacial proporcionam meios de percepcionar o mundo físico e de interpretar, modificar e antecipar transformações relativamente aos objectos." (Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999, p.68)

A inclusão da visualização espacial no ensino não se limita aos primeiros anos. Percorre todos os níveis de ensino incluindo mesmo o ensino superior, como refere Veloso (1998). Este autor apresenta várias conclusões de uma reunião, entre investigadores e professores dos Estados Unidos, realizada com o objectivo de propor mudanças para o ensino da geometria nas instituições de ensino superior. Destaco algumas das propostas apresentadas pelo autor, como indicações para o futuro da geometria: o estudo dos conceitos e objectos geométricos privilegiando uma abordagem experimental e indutiva; o uso de diagramas e modelos concretos como auxílio na construção de conceitos geométricos; o incentivo ao pensamento e raciocínio visuais como modo de pensamento matemático e resolução de problemas. Concordo com este autor, porque estou convencida de que um ensino da geometria em que se utilizem métodos activos de construção e manipulação de modelos, em que sejam privilegiadas actividades explícitas para o desenvolvimento da visualização, tem como consequência o desenvolvimento da visualização espacial e do raciocínio espacial.

Para Clements (1992) a geometria escolar pode ser caracterizada pelo estudo de objectos espaciais, relações e transformações, que têm sido formalizadas e representadas por um sistema axiomático formal. Este autor considera que o raciocínio espacial é o conjunto de processos cognitivos através do qual representações mentais de objectos espaciais, relações e transformações são construídas e manipuladas. Clements (1998) refere ainda que as capacidades espaciais estão relacionadas com o desempenho matemático dos alunos.

Para Matos e Gordo (1993), a visualização espacial, permite facilitar a aprendizagem da geometria e ao mesmo tempo, é desenvolvida pelas experiências geométricas em sala de aula, inclui várias capacidades "…relacionadas com a forma como os alunos percepcionam o mundo que os rodeia, e com a sua capacidade de interpretar, modificar e antecipar transformações dos objectos". (p.13)

A visualização espacial pode ser definida como "a construção e a manipulação de representações mentais de objectos bi e tridimensionais e a percepção de um objecto a partir de diferentes perspectivas (…)" (NTCM, 2007, p. 44).

Para Clements (1998) a visualização espacial engloba a compreensão e realização de movimentos imaginados com objectos bi e tri dimensionais.

Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) referem que a visualização espacial surge como uma capacidade a desenvolver dentro da Geometria.

Ao analisarmos as definições dos diferentes autores podemos dar-lhes significados diversos ligados à Matemática e à educação. Podemos ainda relacionar ou entender o termo de formas diferenciadas ligando-o mais à mente (reconstrução mental) do indivíduo, à imagem de um objecto ou a um percurso entre as duas. A visualização espacial tem, assim, sido estudada de diversos pontos de vista. Um deles refere o seu reconhecimento como uma capacidade que interessa caracterizar e compreender.

A literatura apresenta diferentes categorizações de capacidades associadas à visualização espacial. DelGrande (1990, citado por Costa, 2000) apresenta sete capacidades de visualização espacial: Coordenação visual – motora (capacidade de coordenar a visão com os movimentos do corpo); Memória visual (capacidade de recordar objectos que já não estão à vista); Percepção figura fundo (capacidade de identificar uma componente específica numa determinada situação e que envolve a mudança de percepção de figuras contra fundos complexos); Constância perceptual (capacidade de reconhecer figuras geométricas em diversas posições, tamanhos, contextos e texturas); Percepção da posição no espaço (capacidade para distinguir figuras iguais mas colocadas com orientações diferentes); Percepção de relações espaciais (capacidade de ver e imaginar dois ou mais objectos em relação consigo próprios ou em relação connosco); Discriminação visual (capacidade para identificar semelhanças ou diferenças entre objectos).

Gordo (1994) afirma que a capacidade de visualização espacial permite imaginar um objecto representado numa gravura mesmo se for rodado, torcido, invertido, dobrado ou desdobrado e a orientação espacial permite detectar combinações de objectos, segundo um padrão, e manter as percepções face à mudança de orientação.

Uma outra perspectiva de categorização das capacidades visuais é apresentada por Bishop (1980, citado por Gordo 1994). Com o objectivo de esclarecer quais são e o que são capacidades espaciais, este autor distingue duas categorias de capacidades:

- Capacidade de interpretar informação figurativa: relacionada com a forma do material que funciona como estímulo, abarcando a compreensão de representações e de vocabulário espacial, usados em gráficos, cartas e diagramas de todos os tipos e no trabalho geométrico;

- Capacidade de processamento visual: relacionada não com a forma mas com o processo, que inclui a visualização e a translação de relações abstractas e informação não figurativa para termos visuais. Envolve igualmente a manipulação e transformação de representações e imagens visuais.

Para além das categorizações já apresentadas, Guay e McDaniel (1977, citados em Costa 2000) realizaram uma classificação com recurso a níveis.

Distinguem como capacidades espaciais de baixo nível, as que exigem a configuração de duas dimensões, mas nenhuma transformação mental, e como capacidades espaciais de alto nível, as que exigem a visualização de configurações tridimensionais e a manipulação mental dessas imagens.

Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) incluem sob a designação de visualização espacial “um conjunto de capacidades relacionadas com a forma como os alunos percepcionam o mundo à sua volta e como conseguem representar, interpretar, modificar e antecipar transformações, relativamente aos objectos que os rodeiam” (p.82).

Estes autores vêm reforçar a ideia de que capacidades de visualização não são inatas, poderão ser desenvolvidas, em contexto de sala de aula com actividades especialmente pensadas para esse efeito.

Para além dos estudos e autores referidos, que procuram explicitar as diversas capacidades envolvidas na visualização espacial, bem como níveis que estão inerentes à utilização dessas capacidades, têm sido realizados estudos sobre a ligação a aprendizagens matemáticas específicas. Num estudo sobre a construção da percepção visual 3D de cubos, realizado por Battista (1999), são feitas sugestões sobre como deve ser o ensino deste tema para que as aprendizagens sejam significativas:

- O professor tem que compreender que é natural que os alunos cometam erros e fiquem confusos, mas que faz parte do percurso de aprendizagem para que estes compreendam os conceitos envolvidos;

- Os professores devem compreender e conhecer as estratégias mais comuns, utilizadas pelos alunos na construção da percepção visual dos cubos 3D.

- Há a necessidade de os alunos repetirem e terem variadas experiências, para a construção deste conceito.

Estas recomendações estão ligadas principalmente a três factores: primeiro, as figuras 3D são muito complexas; segundo, uma estrutura para ser criada mentalmente, através da acção, deve ser repetida várias vezes para que na mente, se torne suficientemente estável para ser interiorizada; e, por último, uma estrutura, para passar a um nível superior de abstracção (nível de interiorização), terá de ser activada através de um estímulo diferente daquele que inicialmente foi construído. Deste modo, as aprendizagens dependerão não só das variadas experiências educativas que são proporcionadas aos alunos, como também da capacidade dos alunos verificarem de forma autónoma, a viabilidade dos seus modelos mentais.

Como a investigação tem vindo a evidenciar, os alunos usam diferentes estratégias quando tentam calcular, de acordo com os modelos mentais que possuem, o número de cubos num determinado sólido.

Estas referências são especialmente relevantes, dado que o estudo realizado se centra numa proposta pedagógica sobre volumes de paralelepípedos.

2.3. Orientações curriculares sobre o ensino de Volume.

Em relação aos objectivos de aprendizagem para o conceito de volume no 2º ciclo do Ensino Básico há orientações a destacar nos documentos nacionais oficiais: *Programa de Matemática do 2ºciclo* (ME; 1991), *Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências Essenciais* (ME, 2001) e *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME, 2007), assim como nos *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (NCTM, 2007). Estes documentos constituem as fontes para a realização deste capítulo.

O *Currículo Nacional* (ME, 2001, p.62) refere, entre outros, aspectos da competência matemática a desenvolver no domínio da geometria, das grandezas e da medida, ao longo de todos os ciclos:

- Aptidão para utilizar a visualização e o raciocínio espacial na análise de situações e na resolução de problemas em geometria e em outras áreas da matemática;
- A compreensão de conceitos de comprimento e perímetro, área, volume e amplitude, assim como a aptidão para utilizar conhecimentos sobre esses conceitos na resolução e formulação de problemas;
- A aptidão para efectuar medições e estimativas em situações diversas bem como a compreensão do sistema internacional de unidades;
- A aptidão para formular argumentos válidos recorrendo à visualização e ao raciocinio espacial, explicitando-os em linguagem corrente.

Mais especificamente no que se refere ao 2º ciclo encontramos como aspecto específico (no que respeita ao conceito de volume):

- “A aptidão para calcular áreas de rectângulos, triângulos e círculos, assim como volumes de paralelepípedos, recorrendo ou não a fórmulas, em contexto de resolução de problemas” (p.63).

Nos *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (NCTM, 2007) encontramos referências ao volume nas Normas para a Medida. Afirma-se que

"Ao longo da sua experiência escolar, sobretudo do pré-escolar ao 8º ano, os alunos deverão tornar-se hábeis na utilização de ferramentas, técnicas e fórmulas para determinar medidas (…)" (NCTM, 2007,p.48). Este documento refere ainda que os conceitos de medida deverão ser alargados e aprofundados ao longo dos anos de escolaridade. Importa ressaltar que estas normas sugerem, também, que os programas não devem repetir ano após ano o mesmo currículo referente à medida. Indicam ainda que "sempre que possível os alunos deverão compreender e desenvolver fórmulas, por meio de investigação (…)" (NCTM, 2007, p. 286).

No *Programa de Matemática do 2º ciclo* (ME, 1991) ,o Volume é proposto como conteúdo a desenvolver, no 5º ano, dentro da unidade de Geometria. Neste documento são apresentados como objectivos para o estudo do Volume do paralelepípedo, do cubo e das unidades de volume os seguintes:

- "Reconhecer que a medida do volume de um sólido depende da unidade escolhida.
- Descobrir experimentalmente as fórmulas dos volumes do paralelepípedo rectângulo e do cubo. "(p.14)

No *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME, 2007) o tópico Volume surge no 2º ciclo, apesar de se perceber a evolução do conceito ao longo dos três ciclos. Este estudo começa no 1º ciclo, mais ligado às medidas de capacidade e às unidades de medida. No 3º e 4º anos aparece como objectivo específico "determinar o volume do cubo de uma forma experimental" (p.25). No 2º ciclo, no tema Geometria, um dos tópicos a trabalhar é Volumes, com os objectivos específicos: "Relacionar as unidades de volume com as unidades de capacidade do sistema SI; resolver problemas que envolvam, volumes de cubos, paralelepípedos e cilindros" (p.39).

É de salientar que, tanto no *Programa de Matemática* 1991 como no de 2007, e também nas *Normas e Princípios para a Matemática Escolar*, o estudo da Geometria aparece ligado ao desenvolvimento de capacidades de visualização e raciocínio espacial. "Enquanto os alunos classificam, criam, desenham, modelam, traçam, medem e constroem, a sua capacidade de visualização das relações geométricas desenvolve-se" (NCTM, 2007,p.191). No *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME, 2007), o desenvolvimento do sentido espacial é um propósito principal de ensino e é contemplado nos Objectivos Gerais de Aprendizagem para a Geometria ao longo dos três ciclos.

Nos *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (NCTM, 2007) as capacidades de visualizar e raciocinar sobre as relações espaciais, surgem como fundamentais em geometria. São também claras quanto às dificuldades demonstradas pelos estudantes do básico

> "…alguns alunos poderão apresentar dificuldades na determinação da área total da superfície de figuras tridimensionais, a partir de representações bidimensionais, uma vez que não conseguem visualizar as faces escondidas da figura. É igualmente necessário que os alunos analisem, construam, componham e decomponham objectos bi e tridimensionais…"(p.280)

Ainda de acordo com os *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (NCTM; 2007) os alunos, entre o 3º e o 5º ano, deverão analisar as propriedades das formas bi e tridimensionais e as relações entre elas.

> "os alunos do 3º ao 5º ano deverão desenvolver estratégias para a determinação da área e do volume, com base em experiências concretas. Deverão medir vários prismas, recorrendo a (….) cubos, organizar a informação, procurar padrões e, por fim, proceder a generalizações. Estas experiências são essenciais para ajudarem os alunos a compreender a relação entre a medição de um objecto e a fórmula sucinta que produz a medida"(p.203)

Em suma, os alunos deverão desenvolver o seu sentido intuitivo por meio de actividades investigativas em que poderão compreender e desenvolver fórmulas e conhecer a sua plausibilidade. Esta compreensão não ocorrerá através da memorização.

III - METODOLOGIA

Neste capítulo é feita a descrição da metodologia utilizada neste estudo, referindo os procedimentos adoptados, nomeadamente o papel da investigadora, os participantes, a caracterização das tarefas, recolha e análise de dados.

3.1. Opções Metodológicas.

Este estudo procura compreender as ideias que os alunos do 6.º ano têm sobre volume e perceber como se desenvolvem, quando são envolvidos numa experiência de ensino, tendo por base uma cadeia de tarefas que apelam à visualização e ao raciocínio espacial. Assim, realizou-se a recolha de dados em ambiente de sala de aula numa turma de 6ºano. Atendendo à natureza do estudo optou-se por uma metodologia do tipo qualitativo. Tendo o estudo sido desenvolvido numa turma de que sou professora, esta é também uma investigação sobre a minha própria prática profissional.

Autores como Bogdan e Bilken (1994) e Ludke e André (1986) mencionam algumas características dos estudos de natureza qualitativa que se verificam no estudo realizado. Lüdke e André (1986) assinalam os estudos qualitativos como estudos naturalistas, onde os problemas são estudados no seu contexto natural, não sendo realizada nenhuma manipulação intencional por parte do investigador. O contacto estreito do investigador com a situação em análise justifica-se pelo facto dos fenómenos ocorrerem naturalmente e serem influenciados pelo seu contexto. A escolha de uma investigação de carácter qualitativo é frequentemente realizada quando o investigador pretende descrever ou obter uma explicação sobre determinado fenómeno educacional, especialmente se não tem controlo sobre o desenrolar dos acontecimentos. Cada vez mais, na investigação em Educação, encontramos estudos de cariz qualitativo, porque nesta área são frequentes estudos em ambientes naturalistas, como o são as salas de aula onde o professor é também o investigador.

Bogdan e Biklen (1994) referem cinco características fundamentais da investigação qualitativa: (1) a fonte directa de dados é o ambiente natural, sendo o principal instrumento de recolha o próprio investigador; (2) os dados recolhidos são descritivos; (3) o investigador interessa-se sobretudo pelo processo, relegando para segundo plano os resultados; (4) a análise dos dados é feita de uma forma indutiva; e (5) compreender o significado que os participantes atribuem às suas experiências, assume uma importância vital. Ainda, Bogdan e Taylor (1986) referem que o investigador deve estar envolvido no campo de acção dos investigados, pois para os autores citados, este método de investigação baseia-se principalmente em conversar, ouvir e permitir a expressão livre dos participantes.

3.1.1. Estudo de caso.

Autores como Lee, Yarger, Lincoln, Guba, Gravemeijer e Shulman (citados por Vale, 2000) aconselham para uma investigação em que o investigador pretende estudar o que o aluno pensa, o estudo de caso como metodologia de investigação. Ponte (2006) afirma que:

> "um estudo de caso pode ser caracterizado como um estudo de uma entidade bem definida como um programa, uma instituição, um sistema educativo, uma pessoa ou uma unidade social. Visa conhecer em profundidade o seu "como" e os seus "porquês" evidenciando a sua unidade e identidades próprias. È uma investigação que se assume particularista, isto é, debruça-se deliberadamente sobre uma situação especifica que se supõe ser única em muitos aspectos, procurando descobrir o que há nela de mais essencial e característico"(p.2)

Segundo Merriam (1988) " um estudo de caso é um estudo sobre um fenómeno específico tal como um programa, um acontecimento, uma pessoa, um processo, uma instituição ou um grupo social" (p.9). Para esta autora, um estudo de caso qualitativo caracteriza-se pelo seu carácter descritivo, indutivo, particular e a sua natureza heurística pode levar à compreensão do próprio estudo. Como já referi a investigação decorreu numa turma de 6º ano, pela necessidade de controlar a investigação optei por focar-me apenas em três pares de alunos, no seu ambiente natural, a sala de aula.

A escolha de pares de alunos, para estudo de caso, está relacionada com o facto de ser a dinâmica de trabalho regular na sala de aula e não ser desejável alterar este aspecto para a realização do estudo. Acredito que o desenvolvimento de actividade em pares estimula o trabalho colaborativo e a comunicação entre os alunos.

Para seleccionar os alunos que constituem os casos desta investigação os critérios seguidos foram os seguintes: terem autorização dos encarregados de educação e serem alunos assíduos e pontuais.

3.1.2. O professor como investigador.

Como referido, os participantes neste estudo são alunos de uma turma de 6ºano na qual sou professora de Matemática. As observações foram realizadas na sala de aula da turma.

Apesar de este grupo/turma ser meu pela primeira vez, consegui estabelecer com eles uma boa relação. Estávamos juntos catorze horas por semana, pois além das aulas de Matemática, também leccionei na turma outras disciplinas. Este facto favoreceu o estabelecimento de uma relação de empatia desde o início do ano lectivo. Esta turma foi formada com alunos de duas turmas de quinto ano, pelo que as relações interpessoais não eram as melhores. O espírito de grupo, isto é, as atitudes de cooperação e entreajuda não existiam, foi por isso desenvolvido, pelos professores da turma, um trabalho cooperativo no sentido de promover estas atitudes.

O facto do estudo ter sido realizado numa turma de que sou professora leva a que se trate também de uma investigação sobre a minha prática profissional:

> “desenhar e conduzir investigação torna-se um novo modo de reflectir sobre os alunos, a mudança e nós próprios (…) ao ser investigador dos processos/aprendizagem que acontecem na sua turma, gera conhecimento profissional” (Serrazina e Oliveira, 2002, p. 285).

A reflexão sobre a minha participação enquanto professora da turma e investigadora foi constante e decisiva ao longo de todo este trabalho. Segundo Ponte (2002) a investigação sobre a prática:

> "…pode contribuir fortemente para o desenvolvimento profissional dos professores implicados e o desenvolvimento organizacional das respectivas instituições, bem como gerar importante conhecimento sobre os processos educativos, útil para outros professores, para os educadores académicos e para a comunidade em geral. É um facto incontornável que os professores estão em situação privilegiada para fornecer uma visão de dentro da escola sobre as suas realidades e problemas" (p.13).

Matos e Carreira (1994) apresentam várias posturas que o investigador deve assumir no decorrer de uma investigação, a saber: i) instrumento fundamental na recolha de dados; ii) inquiridor; iii) ouvinte; iv) observador; v) explorador; vi) intérprete; vii) negociador; viii) avaliador; ix) comunicador-narrador. Esta multiplicidade de tarefas a desempenhar pelo investigador, acumuladas com as de professor podem trazer dificuldades, especialmente devido à proximidade relacional entre o investigador e o objecto de estudo. No entanto, esta proximidade pode ser também uma mais valia não só na recolha de dados, sua interpretação e descrição, como também no desenvolvimento da investigação. Para Eisenhart (citado por Ponte, 2006):

> "O investigador deve estar envolvido na actividade como um *insider* e ser capaz de reflectir sobre ela como um *outsider*. Conduzir a investigação é um acto de interpretação em dois níveis: as experiências dos participantes devem ser explicadas e interpretadas em termos das regras da sua cultura e relações sociais, e as experiências do investigador devem ser explicadas e interpretadas em termos do mesmo tipo de regras da comunidade intelectual em que ele ou ela trabalha"(p.15)

Segundo Bogdan e Bilken (1994), a investigação em educação pode tirar partido da relação de proximidade existente entre o investigador e o objecto de estudo.

3.1.3. Os participantes.

O presente estudo desenvolveu-se nos meses de Março e Abril de 2010, na escola onde eu leccionava. Numa reunião com a Directora do Agrupamento de Escolas e do estabelecimento de ensino onde o estudo decorreu, comuniquei a minha intenção de realizar uma investigação numa das minhas turmas de Matemática. A Directora deu parecer positivo ao desenvolvimento do mesmo. Assim, convoquei uma reunião de pais de modo a explicitar quais eram os objectivos do estudo. Referi ainda que a identificação da escola se limitaria à indicação do distrito onde esta se localiza e que os alunos não seriam identificados, pois os nomes a constar do estudo são fictícios. Foi pedida autorização para realizar gravação áudio dos alunos em sala de aula. Nem todos os encarregados de educação autorizaram a gravação.

3.1.4. A turma.

Os participantes são alunos de uma escola de Ensino Básico, do distrito de Lisboa. A turma que participa no estudo é constituída por 21 alunos (10 raparigas e 11 rapazes), com idades entre os 11 e 14 anos. Da turma fazem parte uma aluna com necessidades educativas especiais e três alunos a repetir o ano. Os alunos desta turma foram considerados pelo conselho de turma como perturbadores, com dificuldades de relacionamento entre si e pouco empenhados. Em todas as actas do conselho de turma o comportamento e aproveitamento desta turma foram considerados pouco satisfatórios.

A minha relação com os alunos na turma é cordial e tranquila, o que se traduz num bom clima de trabalho na sala de aula.

Por questões de ética, os objectivos e as actividades do estudo foram do total conhecimento dos participantes. O estudo foi autorizado pela direcção da escola e pelos encarregados de educação tendo sido garantido o anonimato dos alunos intervenientes através do uso de nomes fictícios.

3.1.5. Professora.

Não sendo principal objecto de estudo, é importante realçar alguns dados que considerei pertinentes no desenvolvimento deste estudo.

Sou professora contratada, fui colocada pela primeira vez na escola onde decorreu a recolha de dados. Assim, senti necessidade de me adaptar à realidade da escola e conhecer os meus alunos. Este processo decorreu durante o primeiro período e parte do segundo, pelo que a recolha de dados foi realizada durante parte do segundo e no terceiro períodos.

3.2. Recolha de dados.

Como investigadora/professora da turma fui única agente de recolha de dados na modalidade de observação participante. Os dados resultaram de observações do desempenho dos alunos nas realizações das tarefas propostas e da análise dos respectivos registos escritos. Foi também realizado o registo áudio dos diálogos entre os alunos de cada par e entre a professora e cada par de alunos.

Os dados recolhidos foram obtidos essencialmente no contexto de sala de aula. Através de duas técnicas: (1) documentos elaborados a partir da observação participante (diário de aula complementado com registos áudio); (2) documentos produzidos pelos alunos.

3.3. Análise de Dados.

Realizei a análise dos dados procurando relações entre os dados específicos constituídos pelos diferentes materiais obtidos, numa perspectiva indutiva, sem a finalidade de provar hipóteses previamente formuladas, mas sim com o objectivo de construir uma explicação.

A análise de dados decorreu em duas fases. A primeira ocorreu ao longo da recolha de dados, tendo feito uma primeira interpretação e análise dos dados recolhidos através das transcrições dos registos áudio e dos próprios registos escritos. A segunda fase ocorreu quando, tentando responder aos objectivos do estudo tive necessidade de fazer uma análise mais profunda dos dados recolhidos (gravações e documentos escritos). A descrição do que foi observado na sala de aula, as transcrições dos registos áudio e os documentos escritos produzidos pelos alunos permitiram compreender a evolução de cada aluno (estudado) e o desenvolvimento das concepções destes sobre o conceito de volume.

Das transcrições das aulas, foram destacados os episódios que pareceram ser mais importantes para o estudo. Estes foram sendo referidos caso a caso. As observações das aulas foram, essencialmente um complemento dos registos escritos e áudio produzidos pelos alunos durante a realização das tarefas.

Aos três pares de alunos que escolhi analisar, foram atribuídos nomes fictícios: Astrid e Gastão; Afonso e Bela; Martim e Alice. Como já foi referido, estes alunos foram seleccionados entre os 21 da turma por apresentarem baixos níveis de absentismo e os Encarregados de Educação terem autorizado a sua participação no estudo.

IV - PROPOSTA PEDAGÓGICA

Neste capítulo, apresento a proposta pedagógica que contextualiza este estudo, referindo os seus aspectos gerais, os seus objectivos, a planificação das tarefas propostas e a descrição da forma como esta proposta pedagógica foi operacionalizada.

4.1. Intenções da proposta pedagógica.

A proposta pedagógica desenvolvida no âmbito deste estudo baseia-se nas orientações de documentos como o *Currículo Nacional do Ensino Básico* (ME, 2001), os *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (NCTM, 2007) e na literatura relacionada com o tema destacando-se as investigações de Battista e Clements (1996,1998).

Para por em prática as orientações curriculares para o ensino da Geometria, seleccionei e concebi um conjunto de tarefas, dirigidas para a unidade, Volumes do programa de Matemática, que realizei durante o 2º e 3º períodos do ano lectivo de 2009/2010.

Foram apresentadas aos alunos um conjunto de quatro tarefas, com os objectivos de: compreender o papel de tarefas que apelam à visualização e raciocínio espacial no desenvolvimento do conceito de volume e compreender como é que os alunos fazem a transição dos casos particulares, apresentados nas tarefas para a generalização.

4.2. As tarefas

As tarefas propostas aos alunos têm carácter diverso, umas são investigações outras exercícios. Todas pretendem promover a exploração do conceito de volume em geral e, em particular, de paralelepípedos rectângulos, apelando ao uso da visualização e do raciocínio espacial. Ao longo das quatro tarefas procuro levar os alunos à descoberta de uma forma de calcular o volume, desenvolvendo progressivamente competências que lhes permitam obter o volume das figuras apresentadas e chegar à fórmula do cálculo do volume do paralelepípedo. Para Ponte, Brocado e Oliveira (2003) as tarefas de exploração e investigativas constituem uma forma poderosa de construir conhecimento matemático, ajudando a trazer para a sala de aula o espírito da actividade matemática genuína.

Neste estudo as tarefas propostas assumiram duas vertentes, umas procuraram proporcionar novas aprendizagens, enquanto outras permitiram consolidar e verificar os conhecimentos adquiridos. Tendo em conta a natureza das tarefas, umas foram pensadas para serem realizadas em aulas de 90 minutos e outras em aulas de 45 minutos.

Ao longo da implementação da proposta pedagógica, enquanto professora da turma, prestei o apoio necessário aos alunos, esclarecendo as dúvidas e incentivando a participação de todos os alunos. Na discussão das tarefas, moderei o confronto de ideias e levantei questões.

O desenvolvimento da proposta pedagógica teve em conta a planificação anual efectuada pelo grupo de professores da escola para o 6ºano de escolaridade, de acordo com o *Programa do 2º Ciclo do Ensino Básico* (ME, 1991), com o *Currículo Nacional do Ensino Básico* (ME, 2001) e o *Projecto Curricular de Turma* (PCT). O motivo pelo qual esta proposta de ensino decorreu numa turma de 6º ano, deve-se à especificidade da turma em que este estudo foi implementado. No decorrer do 5º ano de escolaridade não foi leccionada, com estes alunos, a unidade de Volumes estando este facto explicitado no PCT da turma. Enquanto professora de Matemática da turma fui informada do mesmo no início do ano lectivo e da necessidade de alterar a planificação desta turma de modo a incluir esta e outras unidades. Assim, optei por realizar esta investigação com a minha turma de Matemática. Na planificação de 6ºano da escola, antes da exploração do Volume do Cilindro (unidade do 6ºano) os alunos realizaram a proposta pedagógica aqui apresentada para a unidade *Volume do cubo e do paralelepípedo*.

A aplicação proposta decorreu nos meses de Março e Abril de 2010.

Quadro 3 - Calendarização da aplicação das tarefas em contexto sala de aula

Tarefas	Designação	Duração	Implementação
1	Quantos cubos 1?	90´	23 de Março
2	Quantos cubos 2?	45´	25 de Março
3	Caixas (1)	45´	22 de Abril
	Caixas (2)	45´	
4	Volumes (1)	45´	27 de Abril
	Volumes (2)	45´	

A introdução das tarefas foi feita do seguinte modo, em cada aula os enunciados de cada tarefa foram distribuídos aos alunos, iniciando-se a mesma com a sua leitura conjunta, sendo esclarecidas eventuais dúvidas. Foi sugerido aos alunos que começassem por explorar individualmente a tarefa registando as suas previsões ou soluções e depois as debatessem com o seu par. Enquanto os alunos desenvolviam o seu trabalho procurei circular pela sala dialogando com os alunos, estimulando a reflexão e incentivando a apresentação de argumentos que justificassem as suas respostas.

A implementação da tarefa decorreu em ambiente natural de sala de aula, isto é, não foi feita nenhuma alteração na disposição dos alunos na sala, tendo estes trabalhado a pares com os colegas que normalmente estão sentados ao seu lado. Foi comum, nesta turma, ao longo do ano lectivo, o desenvolvimento de actividades de natureza investigativa com recurso a material manipulável onde os alunos foram incentivados a debater e a justificar as suas previsões ou estratégias de resolução. Apesar disso, muitos dos alunos desta turma têm muita dificuldade em expor as suas ideias e estratégias, uns por timidez, outros por receio de errar.

Tarefa 1: “*Quantos Cubos 1?”* (anexo 1)

A tarefa “*Quantos cubos 1?”* foi traduzida e adaptada de Battista e Clements (1996). Surge com o objectivo de levar os alunos a: estimar volumes e desenvolver as capacidades de visualização e de raciocínio espacial.

Tarefa 2: “*Quantos Cubos 2?”* (anexo 2)

Esta tarefa foi pensada com o objectivo de: relacionar as medidas das arestas de um paralelepípedo com a medida do seu volume e desenvolver a visualização e o raciocínio espacial.

Tarefa 3: *“Caixas”* (1) e (2) (anexo 3)

Estas tarefas têm como objectivo continuar a desenvolver a capacidade de raciocínio e visualização espacial, bem como a compreensão do cálculo de volumes de paralelepípedos.

Tarefa 4: “*Volume*” (1) e (2) (anexo 4)

O objectivo principal destas tarefas é calcular volumes, apesar de continuar a pretender desenvolver a visualização e raciocínio espacial. Nestas tarefas encontram-se exercícios muito estruturados onde se procura observar como os alunos aplicam a fórmula para o cálculo do volume de um paralelepípedo.

V - ESTUDOS DE CASO

Neste capítulo serão analisados e discutidos os três casos seleccionados para este estudo. Será ainda feita uma análise do desempenho da turma durante a experiência de ensino. O capítulo termina com a apresentação de uma reflexão sobre o processo feita por mim como professora da turma e também como investigadora.

5.1. CASO 1 – Astrid e Gastão

5.1.1. O par

Astrid e Gastão, frequentam o 6ºano pela primeira vez. Astrid é extrovertida e conversadora, enquanto Gastão é tímido e muito calado.

Astrid tem 12 anos e no seu percurso escolar apresenta uma retenção no 1ºciclo do Ensino Básico. Terminou o 5ºano com nível 3 à disciplina de Matemática.

Gastão tem 11 anos, não tem retenções no seu percurso escolar. Terminou o 5ºano com nível 4 à disciplina de Matemática.

Este par mostra interesse e empenho no desenvolvimento das tarefas que lhes são propostas. Astrid é mais conversadora e Gastão mais atento e concentrado. São colegas de carteira em todas as disciplinas, relacionam-se bem e apresentam uma dinâmica de trabalho interessante. Gastão é melhor aluno, tem um bom raciocínio e facilidade na interpretação e resolução das tarefas que lhe são propostas. Astrid apresenta dificuldades na interpretação e concretização de tarefas em Matemática. No entanto, com a ajuda do seu colega consegue superar as suas dificuldades, chegando muitas vezes a ser ela a concluir as actividades em primeiro lugar.

5.1.2. Desenvolvimento da cadeia de tarefas

Tarefa 1

Na tarefa *"Quantos Cubos 1"* (anexo1) pretendia que os alunos estimassem volumes e desenvolvessem capacidades de visualização e de raciocínio espacial.

Os alunos estavam muito atentos à explicação e começaram rapidamente a realizar a previsão para a caixa A.

> *Gastão:* 8+8 dá 16 depois mais 4 dá 20 e depois mais 4 dá 24. Ouviste?
> *Astrid:* Mas eu acho que dá 16, eu acho que dá 16.

Quando peço ao par para explicar as suas previsões o Gastão aponta para a planificação da caixa A e conta 1 a 1, todos os quadrados que estão visíveis nas faces laterais da composição. Astrid explica que contou só os da base e o número de colunas, neste caso duas, multiplicando os dois números.

Depois constroem a caixa. O Gastão demonstra algumas dificuldades em realizar a planificação e construção da caixa no papel quadriculado assim como em colaborar com a Astrid. Verificam que são 16 os cubos que preenchem a estrutura que construíram e passam à previsão da caixa B.

> *Gastão:* 12 mais 12…
> *Astrid*: Eu acho que são 12
> *Astrid*: 1,2,3,4,5,6,7,8….16, ummm
> *Gastão:* 4???é 3 não é 4
> *Astrid:* Espera. Ah.. 12 x 6 …12x3. A minha conclusão é 48.

O par encontra alguma dificuldade em dialogar porque Gastão está a contar a frente da caixa e vê-a como se fosse constituída por camadas verticais umas a seguir às outras. Astrid conta o número de quadrados da base, na planificação e imagina camadas horizontais umas em cima das outras.
A forma como cada um visualiza o paralelepípedo influencia, a comunicação deste par. Um não consegue perceber a forma do outro ver a construção.

> *Susana:* Como é que pensaste nesta, para prever a caixa B? (…)
> *Gastão:* Contei estes (…) 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12. Depois vi que… Multipliquei 16 por 3. Porque são 3 colunas.
> *Susana:* Astrid pensaste também assim?
> *Astrid:* Sim.

Para a caixa C o par faz uma previsão inicial de 32. Quando questiono o par sobre como chegaram à previsão não sabem explicar. E ficam um pouco baralhados. Dou-lhes algum tempo para pensarem e volto a perguntar como chegaram ao valor de 32:

Astrid: Olhava para esta caixa que é igual a esta. [aponta para a caixa A]
Susana: Achas?
Gastão: Não. Porque aqui 4 [aponta para a caixa C] e aqui tem 2 [aponta para a lateral da caixa A]. 8. São 8 e depois [aponta para frente da caixa] e multiplica-se por 2.

Os dois focam-se muito nas imagens, mesmo quando não as percepcionam correctamente. Não conseguem identificar correctamente todas as unidades que compõem a figura.

Astrid: Acho que já sei setora. São 8 aqui nesta coluna, depois 8 aqui, 8 aqui e 8 aqui. [aponta para a frente da caixa e conta as filas de 8 atrás]
Susana - E isso dá… quantos?
Astrid: 8x4=24
Susana: Tu disseste …8 aqui, 8 aqui, 8 aqui e 8 aqui [apontei repetindo os gestos da aluna].. foi isso que tu disseste?
Astrid: Dá 40.
Susana: Dá 40? 8x4 são 40?
Astrid: Sim 40. 22+8 …40? Não!. Xi setora…

Devido aos erros sucessivos e às confusões de cálculo o par fica num impasse pelo que os questiono sobre o valor da previsão, como afirmam que é 40. Peço-lhe que construam a caixa para verificarem o valor.
Começam por conversar entre si sobre os dados que possuem para realizarem a construção. Concluem que sabem o valor da camada vertical, que é 8 e a partir dai fazem várias contagens.
Depois de resolverem as dificuldades com a passagem da caixa para planificação, constroem a caixa e verificam que o valor inicial de 32 estava correcto. Revejo todo o processo com o par e concluímos que ao tentarem explicar baralham-se e cometem um erro de cálculo.

*Astrid: P*odias ter dito que 8x4 era 32.
Gastão: Ah….pois não me lembro da tabuada.

A caixa D não levanta quaisquer questões ambos contam os quadrados da base (um a um) na planificação, concluem que são 15 e multiplicam pela altura, neste caso 2.

O par consegue, no fim desta actividade, identificar uma camada e depois de contar o número de cubos da mesma imagina-a sobreposta o número de vezes necessário para preencher a caixa. O facto de terem realizado previsões e depois feito a confirmação das mesmas construindo as caixas e enchendo-as com cubinhos ajuda-os a compreender e a corrigir os erros de contagem e de cálculo.

Este par, não avança mais rapidamente nas suas previsões porque não consegue realizar as multiplicações.

Tarefa 2

Na segunda parte da tarefa *"Quantos Cubos 2"* (anexo 2), pretendia-se que os alunos relacionassem as medidas das arestas de um paralelepípedo com a medida do seu volume.

Nas primeiras questões os alunos demonstram alguma dificuldade em indicar correctamente as dimensões das novas caixas e começam por calcular o número de cubos que as novas caixas teriam. Reforço, junto do par, a ideia que tem de indicar as medidas da nova caixa e não o número de cubos necessários para as preencher.

> *Astrid*: Olha aqui, tu tens 32 mas vai dar 36.
> *Gastão*: Não são 16 x2. Aqui tens 16 cubos é só fazer o dobro
> *Astrid*: Ah…ok já percebi.

Calcularam com rapidez o dobro de cubos da caixa A, multiplicaram o número de cubos da caixa A por dois e descobriram o número de cubos na nova caixa. No entanto, o facto de saberem o número de cubos da nova caixa não lhes facilitou a tarefa de indicarem as dimensões da nova caixa.

Depois de alguma discussão sobre as dimensões da caixa, os alunos desenham uma caixa que tem 8 de frente, 4 de lado e 2 de altura. Converso com o par e questiono-os tentando que corrijam as medidas da caixa que desenharam:

> *Susana*: Vocês dizem que a caixa vai ter o dobro dos cubinhos da caixa A, tem de ter 32 e desenham uma caixa que tem 64 cubinhos. Pensem lá como é que podem resolver isto. [silêncio]

*Astrid: T*emos que tirar 32. (…) Temos que cortar algumas partes da caixa. Fazer a caixa ficar mais pequena.
Astrid: 64-32 é 32, então espera…. Não. 4x2….

Concluem o exercício desenhando uma caixa com 4 de frente, 2 de profundidade e 4 de altura. No entanto os erros de cálculo voltam a prejudicar o desempenho do par na execução da tarefa.

Na segunda questão é pedido para desenharem uma caixa que leve 4 vezes mais cubos que a caixa A. Astrid e Gastão desenham uma das faces do cubo na folha de registo e tentam a partir dai inferir quais as dimensões da nova caixa. Conseguem depois de realizarem algumas tentativas desenhar uma caixa e indicar as dimensões adequadas. O par começa por calcular o quádruplo do número de cubos da caixa A, depois de alguma discussão e referências ao modo como resolveram a primeira questão, mudam de estratégia. Recorrem aos valores das dimensões da primeira caixa que tentaram desenhar na questão 1 cujo número total de cubos era 64.

A questão 3 não é de fácil compreensão para o par, que começa por indicar os valores das dimensões da caixa B. Depois de relermos a questão em conjunto, relembrando os valores da caixa original, o par consegue indicar as dimensões da nova caixa.

Concluem que as dimensões da nova caixa são 3 vezes maiores que as da caixa original, indicando as medidas 12,12 e 9.

Na questão 4, os alunos hesitam muito, pedi que relessem a questão e de seguida fui questionando o par, procurando que fossem indicando a forma como estavam a pensar, concluem que necessitam de 64 unidades de medida (cubos com 1cm de aresta) para construírem um cubo com 4 cm de aresta.

Novamente, o par revela pensar por camadas. Imagina o número de quadrados que preenchem uma base 4x4 e sobrepõem 4 vezes. Conseguem visualizar as estruturas em termos de camadas e encontrar a partir daqui os valores do número de cubos que preenchem a figura.

Este par relaciona o que foi sendo pedido em cada tarefa/questão e consegue avançar usando os conhecimentos e as estratégias que foram sendo, trabalhadas/ aplicadas, ao longo das tarefas.

Tarefa 3

Na tarefa *"Caixas"* e *"Caixas 2"* (anexo 3) pretendia continuar a desenvolver a capacidade de raciocínio e de visualização espacial e a compreensão da medida de volume.

Depois de terem recebido o enunciado da tarefa *"Caixas"*, o par, ouve a leitura do mesmo e fica durante algum tempo em silêncio observando a planificação e as unidades de medida.

Com a primeira unidade de medida não revelam quaisquer dúvidas. Apontam e contam o número de quadrados na base da figura na planificação, 16. Multiplicam este valor por 4, número de colunas contadas e obtêm 64.

Para a segunda unidade de medida, após algumas dúvidas iniciais com a altura da peça o par chega à conclusão que são 16.

O par imaginou o número de unidades necessárias para cobrir a base: 4, e depois foi sobrepondo camadas até encher a caixa. Foram apontando e adicionando sucessivamente 4,4,4,4.

Para a última unidade de medida o par volta a pensar por camadas.

Embora, inicialmente o Gastão tenha ficado baralhado, não conseguindo verificar que para perfazer a altura da caixa precisava de 2 camadas. Depois da intervenção da Astrid conseguiu relacionar com os exercícios anteriores e compreender. Relembram o modo como encheram as caixas na Tarefa 1 com cubos com 1 cm de aresta, e Astrid explica que está a imaginar encher a caixa com conjuntos de 8 cubos.

Na segunda parte da tarefa *"Caixas 2"* o par começa por desenhar uma das faces do cubo, fazendo uma grelha com 8 quadrados de lado. Calculam o número de cubos numa face e só depois desenham (tentam desenhar) um cubo. O par demonstrou alguma dificuldade em visualizar o cubo pedido. Imaginam um conjunto de camadas (na vertical), 8, e calculam por fim, o número de cubos total, multiplicando o número de cubos de uma camada por 8.

> *Gastão*: Então tem 64x8
> *Susana:* Astrid percebeste (…) desenha. Como é que tem de ser? Então? De quantos cubos precisas para fazer 1 placa?
> *Astrid:* 64

Na segunda questão, em que era pedido para obterem o número de cubos com 2 cm de aresta que poderia conter a figura construída em 1, o par foi muito claro e rápido. Na tarefa anterior uma das unidades de medida tinha 2 cubos de altura, logo a sua aresta é de 2. Observaram os registos da primeira parte da tarefa (*"Caixas"*) e depois desenharam a base da figura. De seguida, dividiram a base em quadrados com 2 de lado. Concluem que 16, é o valor de quadrados necessários para cobrir a base e multiplicam este valor por 4 (figura 1). A consulta e a relação que estabeleceram com a tarefa anterior permitiu-lhes, desenvolver um raciocínio mais rápido e correcto na resolução da segunda questão.

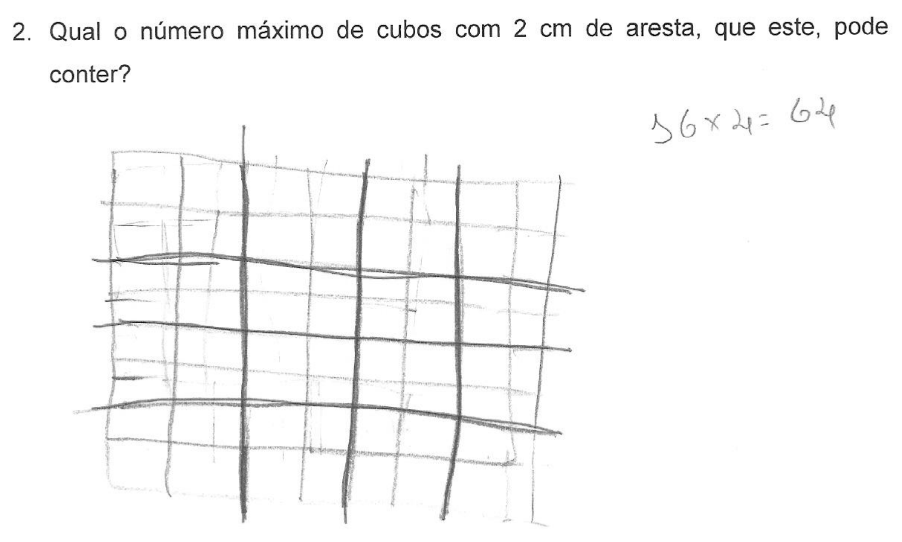


Figura 1- Registo da Astrid. Tarefa "*Caixas 2*"

Tarefa 4

Nas tarefas *"Volume"* e *"Volume 2"* (anexo 4) procuro observar como aplicam, ou se aplicam a fórmula para o cálculo do volume de um paralelepípedo.

Para encontrarem as respostas às questões da primeira parte da tarefa *"Volume"*, este par usa estratégias diferentes: Astrid conta unidade a unidade enquanto Gastão usa com mais frequência a multiplicação (multiplica lados e arestas).

Depois de lerem o enunciado em silêncio, Astrid responde rapidamente que a primeira figura tem 7 cubos. Gastão acompanha-a indicando que o volume da segunda figura é 14 centímetros cúbicos. Para encontrar o volume da terceira figura Astrid conta os cubos da imagem 1 a 1 enquanto Gastão explica como encontrou o valor de 28 para o volume:

> Gastão: Fiz esta aqui [aponta aresta do sólido da 3ª figura referente à largura] depois fiz 7x4.

No quarto sólido o par, conta correctamente o número de cubos da primeira camada. Confundem inicialmente as dimensões e usam o valor de cubos da primeira camada vertical multiplicando esse valor por 3, número de camadas horizontais. Depois de alguma discussão corrigem os valores na folha de registo usando o número de cubos da primeira camada horizontal, 28, e multiplicando-o por 3, número de camadas horizontais. Concluem que 84 é o valor do volume do sólido.

Para indicarem os volumes dos 3 últimos sólidos contaram o número de cubos da camada vertical e multiplicaram pelo número de cubos da largura. Sucessivamente, a Astrid indica 9; 9x2 e 9x3 quando questionada sobre o modo como encontrou os valores indicados nos seus registos.

Na tarefa *"Volume 2"*, reli com o par, uma segunda vez o enunciado para que expusessem o modo como foram resolvendo as questões. Realizaram as actividades propostas em silêncio e não fizeram comentários entre si. Assim questionei o par:

> *Susana*: Explica como é que fizeste aqui.
> *Astrid*: Contei os quadrados. (…) 9+9. Contei os da base e fiz mais 9

Susana: E na última?
Astrid: Contei todos e fiz vezes 3 ou 24+24+24
Susana: E dá a mesma coisa?
Astrid: É 72.
Gastão:Também fiz 24 vezes 3.

Para resolverem as questões 2 A, B e C os alunos mantiveram um raciocínio aditivo e pensamento por camadas. Sucessivamente Gastão explicita: 9x3; 4x2 que dá 8; 8x5 que dá 40 e 6x2 que dá12.

Gastão na resolução da questão 3 calcula a área de uma das faces do cubo e multiplica o valor obtido pela altura. Astrid usa a mesma estratégia.

Os dois alunos, realizam as previsões contando faces visíveis e contando 1 a 1 os cubos que as compõem. Vão progressivamente realizando multiplicação de dois dos lados da base das figuras e encontrando o valor de uma camada que sobrepõem sucessivamente. Mesmo na última tarefa continuam a sobrepor camadas. Não conseguindo visualizar a estrutura da figura como um todo.

5.1.3. Síntese

De uma forma geral, Astrid e Gastão realizaram com empenho e atenção todas as tarefas da sequência proposta neste trabalho, sendo manifesta a sua evolução à medida que as iam desenvolvendo.

A manipulação dos materiais (cubos) e as construções das caixas na primeira tarefa foram importantes para o desenvolvimento das estratégias que passaram a usar nas tarefas seguintes. Este par apresentou alguma dificuldade inicial, na visualização das figuras, tendo-a superado com o desenvolvimento das tarefas *"Quantos Cubos"* 1 e 2. Estas actividades permitiram-lhes um maior conhecimento da forma como o sólido, em si, está organizado. Gradualmente, começaram a estruturar o seu pensamento e deixaram de contar um a um. Estes alunos começaram a calcular o valor das placas (camadas), que vêem como bases ou faces dos paralelepípedos, e a imaginar umas em cima ou atrás das outras. Astrid e Gastão estabelecem com frequência relações entre as tarefas. Isto é, recorrem ao modo como responderam a uma questão anterior (com sucesso) para responderem às questões colocadas nas tarefas seguintes. Este par consegue no final da resolução de todas as tarefas, organizar as unidades que compõem os sólidos em camadas. Não chegam a generalizar, isto é, a concluir que estas formam um conjunto que corresponde a um determinado sólido tridimensional, onde podemos identificar medidas que nos permitem o cálculo do seu volume.

5.2. CASO 2 – Afonso e Bela

5.2.1. O par

Afonso e Bela frequentam no ano lectivo de 2009/2010 o sexto ano pela primeira vez.

Bela tem 12 anos, no seu percurso escolar apresenta 1 retenção no 1ºciclo do Ensino Básico. Terminou o 5ºano com nível 3 à disciplina de Matemática.

Afonso tem 11 anos, não tem retenções no seu percurso escolar. Terminou o 5ºano com nível 5 à disciplina de Matemática.

São colegas de carteira em todas as disciplinas e pertencem frequentemente, ao mesmo grupo de trabalho em Área de Projecto. Afonso é tímido, introvertido e só participa nas aulas quando tal lhe é pedido. Bela é mais extrovertida. O comportamento destabilizador de Bela é regulado pela calma e paciência do Afonso, conseguindo ambos apresentar um bom desempenho nas tarefas propostas nas aulas de Matemática.

5.2.2. Desenvolvimento da cadeia de tarefas

Tarefa 1

Com a tarefa *"Quantos Cubos 1"* (anexo1) pretendia que os alunos estimassem volumes e desenvolvessem capacidades de visualização e de raciocínio espacial.

Este par de alunos só falou quando directamente questionado. Os registos áudio, quando não estou presente, estão em branco.

O par usou sempre a multiplicação para chegar às suas previsões. Contaram o número de quadrados/cubos da base e multiplicaram pelo número de quadrados/cubos que indica a altura.

Quando questionados sobre como fizeram as previsões, Afonso responde que para a caixa A fizeram 8x2. Na caixa B, contaram os 12 quadrados visíveis na imagem de frente da caixa e multiplicaram por 4, o número de vezes que esta primeira camada vertical se repetia.

Para a caixa C, Bela explica como realizou a sua previsão, primeiro conta o número de quadrados visíveis na imagem da frente da caixa: 8. Depois aponta sucessivamente as quatro colunas laterais e indica que a previsão foi 32. Afonso reforça a estratégia do par indicando que contaram os quadrados da frente da caixa, 8 e depois multiplicaram por 4.

Quando questiono o par sobre a caixa D, Bela explica apontando para a caixa e indicando que contou o número de cubos da face lateral: 10 e continuou a contar mais 10, mais 10. Nos seus registos aparece 10x3= 30

Afonso apresenta uma estratégia diferente (figura 2). Explica como desenvolveu o seu raciocínio:

> *Afonso*: Eu pensei que era 6. [aponta para a parte frontal da caixa na planificação] …e depois 1,2,3, 4,5 {indica as linhas do fundo da caixa].

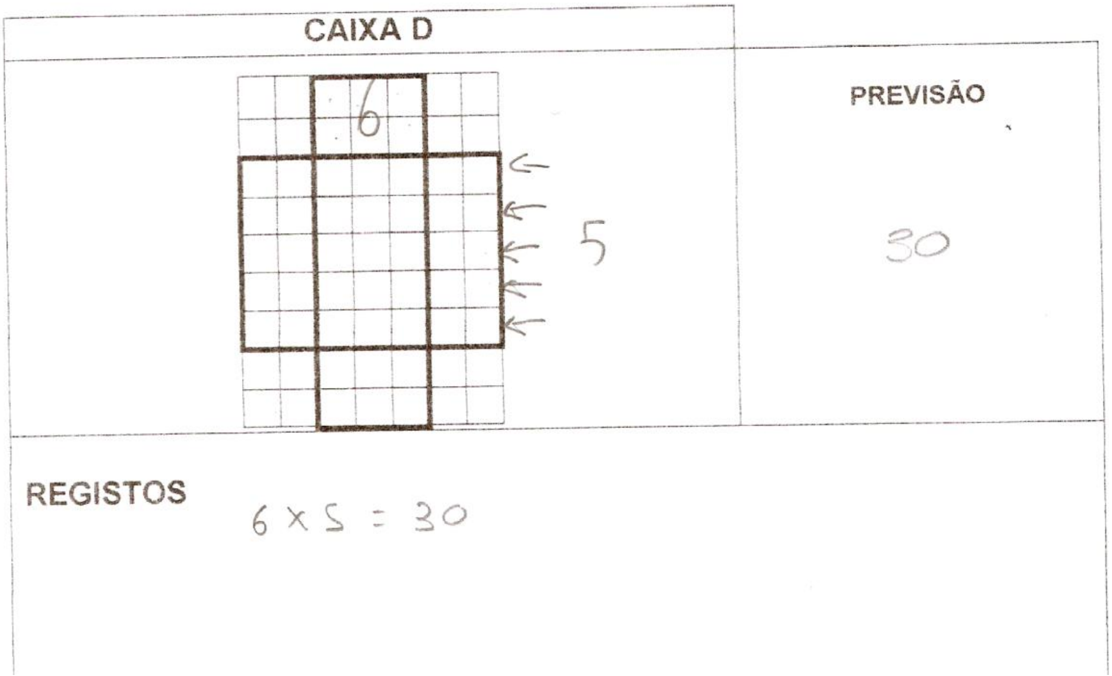


Figura 2 - Registos do Afonso. Tarefa *"Quantos Cubos?"*

Os alunos estruturam os modelos das caixas partindo, normalmente, da imagem da caixa. Calculam o número de cubos de uma face, camada vertical, e multiplicam-no pelo número de colunas que vêm em profundidade. Quando lhes é apresentada apenas a planificação, parecem inicialmente mais confusos mas, acabam por utilizar uma estratégia semelhante para calcular o número de cubos.

Tarefa 2

Com a tarefa *"Quantos Cubos 2"* (anexo 2), pretendia que os alunos relacionassem as medidas das arestas de um paralelepípedo com a medida do seu volume.

Este par, definiu rapidamente as dimensões das novas caixas pedidas nas questões 1 e 2. A Bela imaginou as caixas colocadas umas ao lado das outras. Afonso imaginou as caixas umas em cima das outras. As respostas deste par têm apresentações diferentes, enquanto o Afonso desenha as caixas fechadas, a Bela desenha ou tenta desenhar as planificações. Nem sempre consegue e revela alguma frustração por não conseguir representar correctamente aquilo em que está a pensar. No entanto, ambos conseguem indicar as dimensões das novas caixas. Na primeira questão, Afonso indica que a nova caixa terá as dimensões: 4 de altura, 4 de comprimento e 2 de largura. Para a segunda caixa Bela explica que as dimensões da nova caixa seriam: 8 de altura, 4 de comprimento e 2 de largura.

O par revelou alguma dificuldade em triplicar as dimensões da caixa B. Primeiro triplicaram o número de cubos. Indiquei ao par que era pedido as dimensões, não o número de cubos da nova caixa. Tentaram mas, só triplicaram 2 das dimensões.

> *Susana:* Puseram caixas umas ao lado das outras para triplicar as dimensões?
> *Afonso*: Não (…) fizemos 3 vezes cada…Fizemos por exemplo, na vez de ser só 4 fizemos … 3x4 e ficamos com os 12.
> *Susana*: E de profundidade também. Então e a altura não é uma das dimensões da caixa?
> *Bela*: É.

Susana: A caixa tem quantas dimensões?
Afonso: Tem 3.
Susana: Exactamente, tem 3. Então se triplicaram esta e triplicaram esta [aponto no esquema] triplicaram a frente e a profundidade…
Bela: Falta esta…12.
Afonso: Não 9.

Foi importante questionar os alunos para que completassem os seus raciocínios. Concluíram rapidamente o exercício completando-o correctamente. Usaram os seus conhecimentos numéricos para concluir esta tarefa, reproduziram o número de caixas tantas vezes quantas as indicadas. Revelaram ao mesmo tempo conhecimento da estrutura do paralelepípedo ao indicarem correctamente o valor das arestas das figuras.

Na questão 4, o par começa por reler o enunciado, procurando compreender o que é pedido. Afonso conclui que o cubo com 4 cm de aresta tem de ter "… 4 de altura, 4 de profundidade e 4 de comprimento".

Afonso e Bela chegam rapidamente aos valores das arestas do cubo mas, sentem alguma dificuldade em, a partir deste conhecimento, encontrar o número de cubos necessários para a construção. Bela é a primeira a fazer uma tentativa de desenhar o cubo pedido. No seu registo desenha uma das faces do cubo, composta por 16 quadrados e indica que são 16x4.

Os alunos conseguem visualizar os sólidos como um conjunto de camadas mas, também conseguem manipulá-los como um todo (conjunto de pequenos cubos) conseguindo enumerar as unidades que os compõem.

Tarefa 3

Com a tarefa *"Caixas"* e *"Caixas 2"* (anexo 3) queria continuar a desenvolver as capacidades de raciocínio e de visualização espacial e a compreensão da medida de volume.

Na primeira questão, da tarefa *"Caixas"*, este par calcula em primeiro lugar a área da base. Depois multiplica o valor por 4.

Continuam a pensar por camadas, para calcular o número de cubos unitários necessários para encher a caixa. Calculam o valor da base 16 e multiplicam pelo número de camadas 4, obtêm 64.

Para responder às questões 2 e 3 usam o número total de cubos unitários e dividem pelo número de cubos de cada unidade de medida, obtêm 16 e 8, respectivamente. Os alunos revelam que, além de conseguirem contar o número de cubos unitários necessários para encher a caixa, conseguem, usando diferentes unidades de medida, contar os elementos de uma estrutura e validar a contagem.

Na segunda parte da tarefa *"Caixas 2"*, os dois alunos desenham o cubo. Por analogia com as figuras que aparecem nas tarefas anteriores, desenham o cubo e em duas das suas faces fazem quadrículas e indicam o número de cubos de cada aresta (figura 3). Quando questiono o par sobre como chegaram ao valor de 512 cubos, explicam que multiplicaram os valores das arestas: 8x8x8, para calcular o número total de cubos unitários do cubo com 8 cm de aresta.

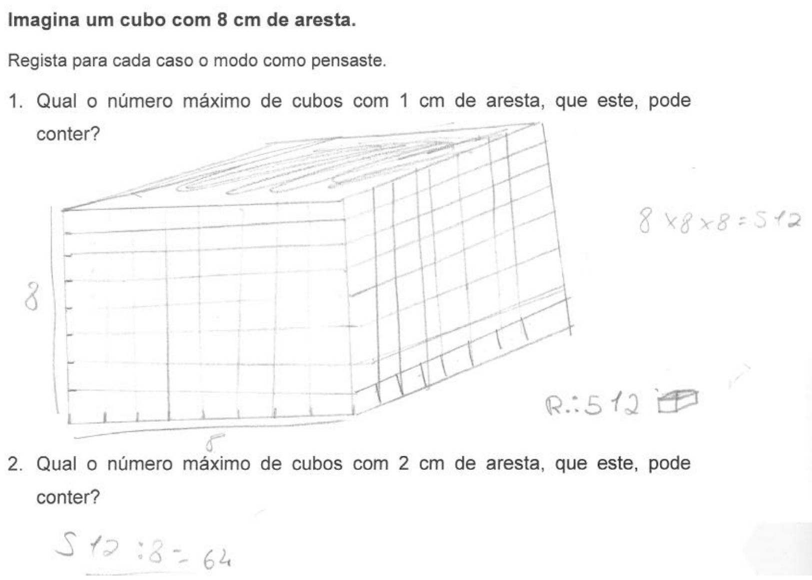


Figura 3 - Registos do Afonso. Tarefa *"Caixas 2"*

Este par já tinha na tarefa *”Quantos cubos 2* ”, referido a tridimensionalidade dos cubos, por isso, consegue com rapidez associar a esta tarefa os conhecimentos adquiridos ao longo das anteriores.

Este par, e, em especial o Afonso possui bom cálculo mental. Na segunda questão dividem o número total de cubos unitários pelos oito cubos que teria a unidade de medida para apresentarem o resultado.

> Susana: Como é que fizeram?
> Afonso: Então fizemos estes todos a dividir por 8. Porque é dois de aresta, 2 de aresta e 2 de aresta também.

Tarefa 4

Com a tarefa *“Volume”* e *“Volume 2”* (anexo 4) queria perceber como aplicam ou se aplicam a fórmula para o cálculo do volume de um paralelepípedo.

Afonso e Bela resolvem com rapidez as duas tarefas sobre volume, apesar de inicialmente Bela não relacionar o volume com o espaço ocupado pelas figuras.

> *Bela*: O que é que é o volume? Stora …o que é que é o volume?
> *Afonso*: Volume é o espaço que ocupa.
> *Afonso*: Já sei, já sei como é. O volume é o comprimento vezes a profundidade vezes a altura.

O par usou, no desenvolvimento da segunda parte da tarefa Volume, o raciocínio multiplicativo (Afonso) e a adição de camadas (Bela).

Quando peço ao par para explicar o modo como resolveram as questões colocadas na tarefa *“Volume”*, Bela diz que contou um a um. Em relação ao segundo pedido indica ter contado um a um, na primeira figura de volume 9; 9+9 na segunda e 9+9+9 na terceira. Afonso indica também ter contado um a um na primeira figura e nas seguintes ter multiplicado: 9x2 e 9x3.

Na tarefa *“Volume 2”*, quando questionei os alunos sobre como responderam à questão 1 afirmaram que contaram o número de cubos.

Na questão 2, também não revelam dificuldades, Bela contou o número de cubos da base (um a um) e multiplicou pelo número de cubos da altura, continua a pensar na base e em camadas sucessivas.

Afonso, usa raciocínio multiplicativo, percebeu e aplica a fórmula para o cálculo do volume dos sólidos. Quando questionado sobre o modo como pensou para resolver os exercícios, indica que multiplica o comprimento, profundidade e altura.

Na questão 3, Afonso realiza o cálculo usando a fórmula para o cálculo do volume do cubo, multiplica os valores indicados e chega ao resultado correcto. Por vezes demora mais tempo quando não consegue efectuar os cálculos de imediato.

> *Susana*: Aqui fizeste 5x2x4, fizeste pela mesma ordem ou trocaste a ordem? Altura, profundidade e frente?
>
> *Afonso:* Fiz de maneira que ficasse mais fácil de calcular
> *Susana*: Aqui 6x2x1- foi pela mesma razão?
> *Afonso:* Sim.

Na questão 3, Bela trabalhou mais isoladamente porque não conseguiu usar os valores das arestas. Sentia falta das imagens em que estavam sinalizados de alguma forma os cubos que preenchiam a figura. Disse-lhe a dada altura que tentasse imaginar os cubos dentro das figuras como apareciam nas tarefas anteriores. Pouco tempo depois a Bela respondeu o primeiro sólido tinha 9 cubos de base por isso tinha de multiplicar 9x3. Como não sabe quanto é 9x3 opta por realizar a soma 9+9+9. Para calcular os volumes das figuras seguintes usa a mesma estratégia, calcula a área da base e multiplica pela altura, como consegue fazer os cálculos deixa de realizar as adições sucessivas.

5.2.3. Síntese

Afonso e Bela mostraram-se alunos muito interessados e atentos. Ao longo da resolução das tarefas revelaram compreensão dos conceitos trabalhados.

Neste caso os alunos preferiram usar a imagem da caixa às planificações. Na tarefa 1, calculam o número de cubos de uma camada vertical e multiplicam-no pelo número de colunas que vêem em profundidade. A construção das caixas, neste caso serviu para confirmar as previsões, sempre correctas.

Os alunos conseguem visualizar os sólidos como um conjunto de camadas, conseguem manipulá-los como um todo contando as unidades que os compõem. Revelam ter adquirido conhecimento da estrutura dos sólidos trabalhados. Inicialmente, este par, revela preferir trabalhar a partir da imagem do sólido do que da planificação do mesmo. Conseguem, no decorrer das tarefas desenvolver a visualização do sólido a partir da sua planificação, não evidenciando qualquer dificuldade em resolver os exercícios da tarefa 4, que envolviam o cálculo do volume dos sólidos representados através das suas planificações.

Afonso e Bela, evidenciaram desde a primeira tarefa um bom raciocínio e cálculo mental bem desenvolvido (especialmente o Afonso). Revelam, na conclusão das actividades, ser capazes de visualizar com facilidade um sólido dado. Afonso, que já aplicava multiplicações sucessivas na resolução das tarefas iniciais, passa a usar (a partir da tarefa 3) a fórmula para o cálculo do volume. Bela, mantém alguma dificuldade no uso dos valores indicados nas arestas dos sólidos. Mas, consegue encontrar o volume de um paralelepípedo calculando a área da base e multiplicando o valor pela sua altura, deixando de fazer adições sucessivas.

5.3. CASO 3 – Martim e Alice

5.3.1. O par

Martim e Alice, são colegas de carteira na disciplina de Matemática. Ambos frequentam o 6ºano pela primeira vez e nenhum tem retenções ao longo do seu percurso escolar.

Alice e Martim têm 11 anos, terminaram o 5ºano com nível 4 à disciplina de Matemática.

São ambos considerados bons alunos apesar de muito conversadores. Este par desenvolve entre si um esquema de competição saudável. Possuem bom raciocínio e bom cálculo mental. Nas aulas de Matemática, tentam superar-se um ao outro procurando apresentar estratégias de resolução das actividades propostas, diferentes um do outro. São sempre os primeiros a acabar as tarefas.

5.3.2. Desenvolvimento da cadeia de tarefas

Tarefa 1

A tarefa *"Quantos Cubos 1"* (anexo1) foi planeada para que os alunos estimassem volumes e desenvolvessem capacidades de visualização e de raciocínio espacial.

Era pedido aos alunos que realizassem previsão do número de cubos necessários para preencher uma caixa. De seguida deveriam construir e encher a caixa com cubinhos de 1cm, verificando as suas previsões.

O par não compreendeu imediatamente como realizar a previsão. Não perceberam que as dimensões representadas na ficha de registo não eram à escala dos cubos. Alice coloca os cubos de madeira em cima do desenho, verifica que cabem exactamente 2 cubos. E faz essa previsão para a caixa A.

Como não compreenderam correctamente o que era pedido erram na previsão da caixa A. Depois de explicar novamente os objectivos da tarefa 1. O par recomeça o trabalho realizando novas previsões para a caixa A. Alice explica nos registos como pensaram: “ *fizemos uma base com 8 depois olhamos para as laterais e tivemos de acrescentar 8 assim 16*”.

Para a caixa B, fazem uma previsão de 48. Começam por contar a base, 16 e multiplicam por 3. Como explicita, Alice, nos seus registos. (figura 4).

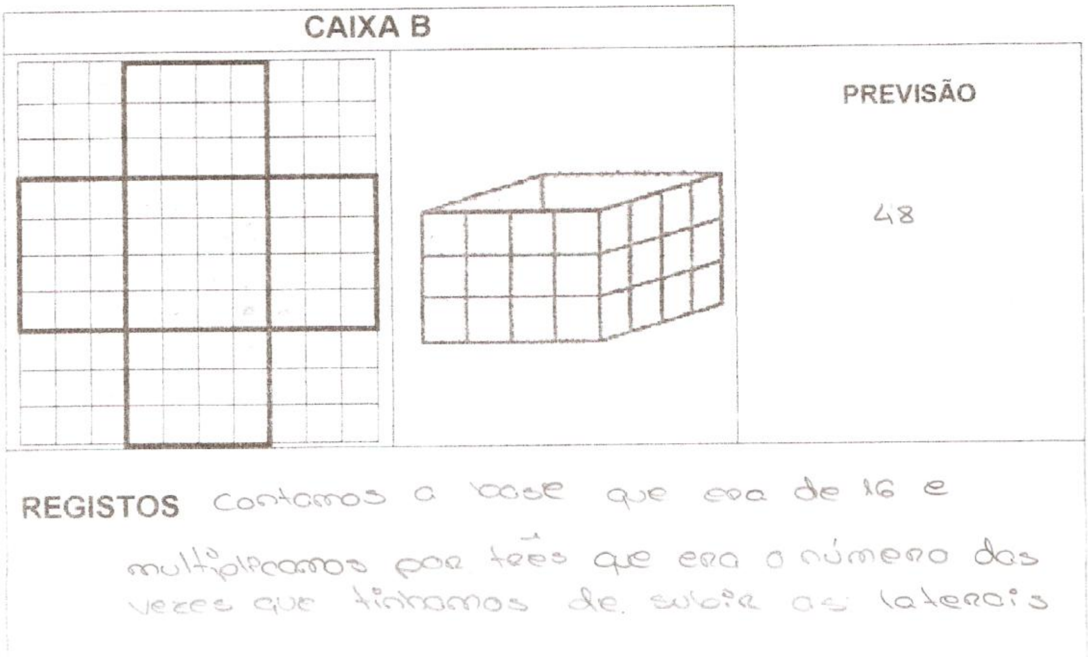


Figura 4 - Registos da Alice. Tarefa *"Quantos Cubos?"*

Depois de observar o desempenho deste par ao explicar as estratégias usadas para prever o número de cubos das caixas, ficou muito claro que possuem conhecimento da estrutura/composição unitária dos sólidos representados, paralelepípedos. Especialmente Martim, que imagina a caixa, em silêncio e depois indica o número de cubos que a preenchem.

Para a Caixa C Martim explica como realizou a previsão: “*Vi 4, vezes 4, deu 16 e somei as que tem de levar em cima.*”

A estratégia para prever o número de cubos da caixa D foi semelhante: “*Contei o fundo que são 15 e depois fiz vezes 2.”*

Alice, tem alguma dificuldade em expor as suas estratégias por isso, pedi que as escrevesse, (com mais pormenor) nos registos que apresento a seguir (figura 5).

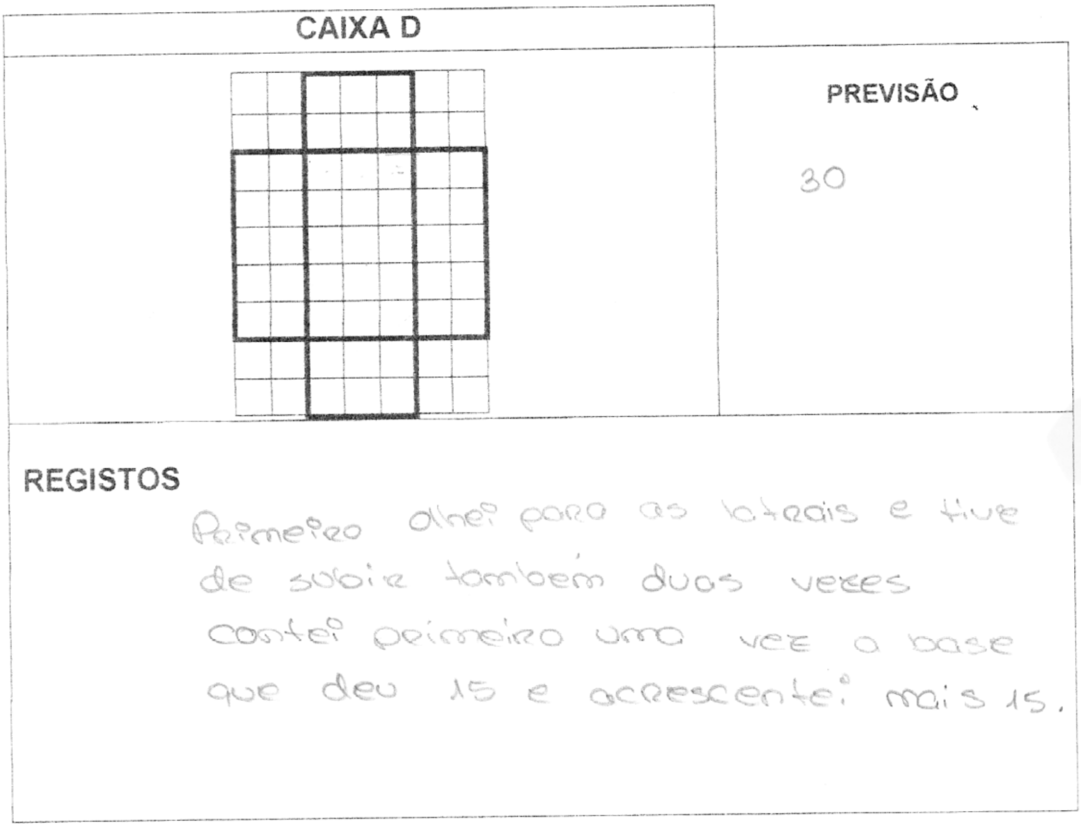


Figura 5 - Registos da Alice. Tarefa *"Quantos Cubos?"*

Quando observei o Martim a realizar as suas previsões verifiquei que ficava durante alguns segundos calado, a olhar para as caixas imagens e/ou planificações e quando regista a previsão o número é correcto. A interacção com a colega é mínima e quando lhe é pedida uma explicação a mesma é curta e explícita, sem recorrer ao uso da fórmula para o cálculo do volume (que inicialmente pensei que o aluno sabia de cor). Quando mais tarde perguntei ao aluno porque tinha aquela atitude, o que se estava a passar dentro da sua cabeça quando estava a fazer as previsões, Martim respondeu que estava a pensar, a pensar nos cubos dentro da caixa.

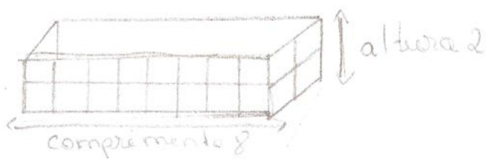
Tarefa 2

Na tarefa *“Quantos Cubos 2”* (anexo 2), pretendia que os alunos relacionassem as medidas das arestas de um paralelepípedo com a medida do seu volume. Por isso, pedi aos alunos que dobrassem ou quadruplicassem o número de cubos de uma caixa, indicassem as suas novas dimensões e que dadas as dimensões de uma caixa encontrassem o número de cubos necessários para a construir.

Este par encontra com facilidade as respostas às questões 1 e 2.

Martim imagina uma caixa ao lado da outra e indica o número total de cubos, 32. Alice não consegue perceber como Martim está a pensar e não concorda com o colega. Acabam por realizar registos diferentes mas, ambos indicam correctamente as dimensões das novas caixas.

1. Imagina uma caixa com o dobro dos cubos da caixa A. Quais seriam as dimensões desta nova caixa?
(indica as suas medidas ou desenha-a em papel quadriculado)



2. Constrói uma caixa que leve quatro vezes mais cubos que a caixa A. Desenha – a e indica as suas dimensões.

CAIXA A

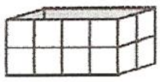


Figura 6 - Registos do Martim. Tarefa *"Quantos Cubos 2?"*

O Martim apresenta a imagem da caixa, desenhando caixas iguais umas ao lado das outras (figura 6). A Alice desenha cuidadosamente a planificação das caixas e aumenta a altura das mesmas (figura 7).

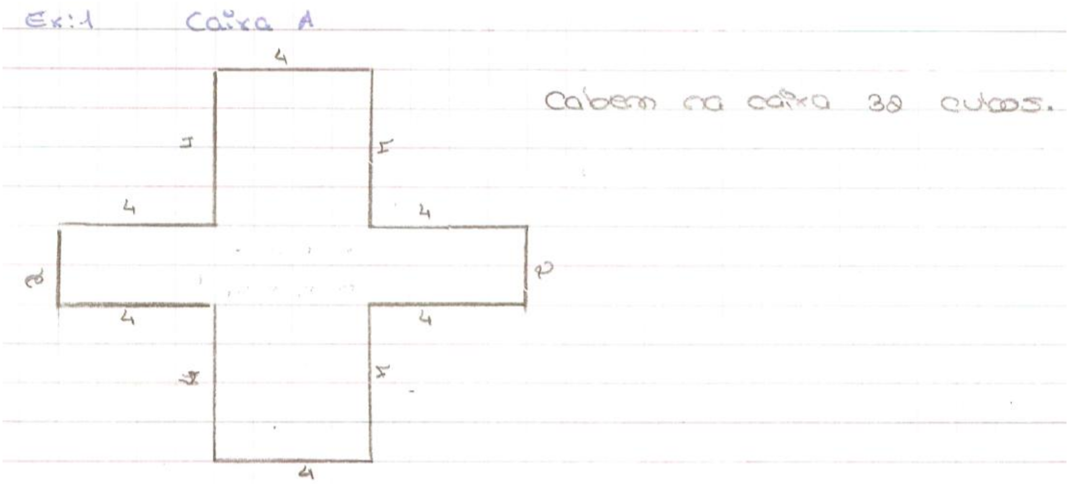


Figura 7 - Registos da Alice. Tarefa *"Quantos Cubos 2?"*

Quando iniciam a resolução da questão 3, os alunos compreendem o que é pedido, focam-se nas dimensões da caixa e calculam o número de cubos da nova caixa, sem estabelecer a relação pedida. Depois de observar os registos realizados coloco algumas questões ao par na tentativa de clarificar o modo como estavam a pensar e permitir-lhes uma nova resposta à questão.

> *Susana:* Como é que fizeste para chegar aos 432 cubos?
> *Martim:* Primeiro fiz a conta… fiz 4 x 12, porque é doze em todo o lado. 4x12 e depois… (…) e depois fiz vezes 9, 48 vezes 9 que me deu 432.
> *Susana:* Aqui pede: triplica as dimensões da caixa B. Se triplicares as dimensões da caixa B…
> *Martim:* 3x3 dá 9.
> *Susana:* E de frente?
> *Martim:* Então assim já é 12.
> *Susana:* …E de profundidade.
> *Martim:* 12.

Reli a questão 4, com o par. O Martim faz tudo de cabeça e não comunica muito. Foi necessário questionar o par, para que explicassem o seu raciocínio. Indicam que pensaram primeiro na base, concluindo que esta tinha 16 cubinhos, Alice indica que serão 16+16+16, Martim diz que não é vezes 3. Alice corrige os valores indicando que serão 16 vezes 4 e Martim concorda apresentado 64 como o número de cubos necessários.

Tarefa 3

Com a tarefa *"Caixas"* e *"Caixas 2"* (anexo 3) pretendia, continuar a desenvolver a compreensão da medida de volume e a capacidade de raciocínio e de visualização espacial. Na primeira parte da tarefa "Caixas" proponho uma actividade em que, dada a planificação de um cubo, é pedido que calculem o número de unidades de medida necessárias para o encher. Na segunda parte da tarefa *"Caixas 2",* é pedido que imaginem um cubo com 8 cm de aresta e que indiquem qual o número máximo de cubos com 1 cm e depois com 2 cm de aresta que este pode conter.

Martim e Alice, resolvem com rapidez as questões da tarefa "*Caixas*". Depois da leitura do enunciado da tarefa, fazem contagens em voz baixa. Tentam imaginar o cubo em 3 dimensões e fazem contagens em voz baixa sobre a planificação. Martim afirma que o número de unidades 1 que enchem a figura apresentada na planificação é 64. Depois indica que para saber a segunda têm de dividir por 4 (número de cubinhos que compõe a figura 2) e a terceira têm de dividir por 8 (número de cubinhos que compõe a figura 3).

Na segunda parte da tarefa, *"Caixas 2"*, as estratégias usadas são semelhantes às do par Afonso e Bela. Começam por desenhar uma das faces do cubo, onde indicam o número total de quadrados dessa face, indicam todas as arestas e os seus valores. Apresentam correctamente o número total de cubos.

> *Martim:* Oh setora… isto dá-me um resultado impossível! Dá-me 512 cubos.
> *Alice:* Diz lá o que é que estas a fazer?
> *Martim: E*ntão 8x8x8.
> *Alice:* 8x8x8 dá 512? [confirma o valor realizando o cálculo na máquina de calcular] Então é 512.

Na questão 2 a Alice e Martim deixam explícito nos seus registos (figura 8) o modo como pensaram.

2. Qual o número máximo de cubos com 2 cm de aresta, que este, pode conter?

R: Pode conter 64 cubos.

Contei primeiro quantos cabiam na base e depois multipliquei por 4, que deu 64.

Figura 8 - Registos da Alice. Tarefa *"Caixas 2"*

Tarefa 4

Na tarefa *"Volume"* e *"Volume 2"* (anexo 4) o objectivo principal é cálculo do volume de diferentes sólidos, com representações gráficas diversas (como imagens ou planificações). Queria compreender como aplicam, ou se aplicam, a fórmula para o cálculo do volume de um paralelepípedo, depois da resolução de um conjunto de tarefas construído, tendo como pilares o desenvolvimento do conceito de volume baseado na visualização e no raciocínio espacial.

Na tarefa *"Volume"*, o par, contou os cubinhos um a um, das três primeiras figuras para indicar o número total de cubos em cada caso. Na quarta figura multiplicaram o valor da camada que já conheciam por 4.

Na segunda parte da tarefa, *"Volume 2"*, o par usa contagens, adições sucessivas e multiplicação para calcular o volume dos sólidos. Martim conta os quadradinhos 1 a 1, no primeiro sólido mas indica que poderia ter feito 3x3, nas seguintes faz 9x2 e 9x3. Alice refere ter contado também um a um, indicando o valor 9 como resposta. Nos sólidos seguintes multiplica os valores da camada vertical 3x3 e depois pelo número de camadas que se sucedem: vezes 2 e vezes 3.

Na segunda parte tarefa, o par relê a questão 1 e em silêncio fazem contagens e encontram os valores correctos.

Na questão 2, contam o número de quadrados da base nas planificações e multiplicam pelo número de quadrados da altura. Indicando para A: 12 cubos 12x1; para B: 18 cubos 9x2 e para C: 72 cubos 24x3.

Na questão 3 o par usa a fórmula para o cálculo do volume dos sólidos, em todos os casos multiplicam os valores das três dimensões. Nos registos nem sempre aparecem as multiplicações sucessivas, questionei-os sobre o facto:

> *Susana:* Alice explica lá o que é que fizeste.
> *Alice:* Calculei a parte da frente, vezes a profundidade vezes a altura. Deu 27.
> *Susana:* E porque é que registas-te assim? [calcula a base: 9 e depois multiplica 9 por 3]
> *Alice:* Porque é mais fácil.
> *Susana:* Martim como é que fez a primeira.
> *Martim:* 3x3x3.

Os dois referem que realizam os cálculos da forma que para eles se mostra mais fácil.

5.3.3. Síntese

No caso da Alice e do Martim o desenvolvimento destas tarefas permitiu-lhes aprofundar os seus conhecimentos sobre o conceito de volume, desenvolvendo a visualização e o raciocínio espacial. Logo na resolução da tarefa 1, verificamos a facilidade com que são feitas as previsões e a realização rápida das construções. No entanto, verificou-se também um grande à vontade da Alice em desenhar planificações dos sólidos e do Martim na visualização dos mesmos enquanto imagens tridimensionais.

Começam por calcular o valor das camadas, que vêem como base dos paralelepípedos e imaginar umas em cima ou atrás das outras. Alice resolve quase todas as actividades propostas, usando este tipo de estratégia, enquanto Martim indica que prefere imaginar o número de cubos dentro da caixa, não conseguindo explicar como desenvolve esse processo.

Este par consegue no final da resolução de todas as tarefas, utilizar a fórmula para o cálculo do volume de um paralelepípedo nas actividades propostas na tarefa 4. Este par começa por apresentar um bom conhecimento da estrutura dos sólidos trabalhados e um raciocínio e cálculo bem desenvolvidos. Passam da organização das unidades que compõem os sólidos em camadas, para a generalização, isto é, conseguem na resolução das tarefas demonstrar que deixaram de necessitar da contagem sucessiva de camadas e que conseguem percepcionar o sólido de forma a ser apenas necessário conhecer o valor das arestas deste, para calcular o seu volume. No entanto, continuam a recorrer à visualização do sólido, imaginando cubinhos a preencher o espaço, ou a adições sucessivas, se estas estratégias se afigurarem como mais rápidas para a obtenção do resultado em determinado caso.

5.4. Síntese dos Casos

As quatro tarefas propostas envolveram os alunos numa actividade de descoberta, que os estimulou a explorar e desenvolver ideias matemáticas cada vez mais complexas. Permitiram a construção de estratégias de contagem e de cálculo, que levaram ao desenvolvimento de estruturas mentais necessárias para a compreensão da organização estrutural de um paralelepípedo, do cálculo do seu volume e de como se relacionam as dimensões do sólido com o seu volume.

Com a primeira tarefa pretendia-se exactamente isso, isto é, que a partir de imagens e planificações de caixas, os alunos, conseguissem prever correctamente o número de pequenos cubos que preencheriam a caixa. Os alunos começaram por recorrer ao modo como visualizavam o sólido em geral, e com o decorrer da tarefa, conseguiram conhecer a organização estrutural da construção. Na minha opinião, esta tarefa foi essencial para que os alunos fossem dependendo cada vez menos das pistas visuais e recorressem a um método mais abstracto de cálculo (fórmula de volume).

No primeiro caso, Astrid e Gastão, a manipulação dos cubos e as construções das caixas (da tarefa 1) foram essenciais para o desenvolvimento das estratégias que passaram a usar nas tarefas seguintes. Observou-se que o facto de verificarem as suas previsões lhes permitiu desenvolver estratégias para o cálculo do volume. Desenvolveram modelos mentais diferentes dos que tinham quando iniciaram a tarefa 1, deixam de contar um a um e passam a calcular o valor das camadas que compõem o sólido e a sobrepô-las, realizando adições sucessivas para encontrar o valor do volume do sólido. Este par consegue, no final da resolução de todas as tarefas, organizar as unidades que compõem os sólidos em camadas, mas não chegam a generalizar, isto é, não conseguem concluir que estas compõem um conjunto que forma um determinado sólido tridimensional, em que podemos identificar medidas que nos permitem o cálculo do seu volume.

Nos outros dois casos, o desenvolvimento da tarefa 1 revelou-se importante para os alunos perceberem que o modo como efectuavam as suas previsões lhes permitia calcular correctamente o volume do sólido. Alice, Martim e Afonso fazem as suas previsões encontrando o número de cubos de uma camada e multiplicando pelo número de camadas ou adicionando sucessivamente o valor encontrado.

Nos seus estudos Battista (2007) descrevem vários níveis de conhecimento (Quadro 2), pelos quais os alunos passam quando se envolvem na resolução de tarefas em que têm de enumerar quadrados ou cubos que compõem determinadas figuras. Assim, e de acordo com os níveis estabelecidos por estes investigadores, foi possível identificar nos alunos estudados a passagem do segundo nível, pois evidenciaram durante a aplicação da tarefa 1, serem capazes de estruturar espacialmente as figuras em termos de composição de unidades. Por exemplo, depois de contarem o número de cubos visíveis de um lado da estrutura conseguem inferir o número de cubos do lado oposto.

No primeiro caso, os alunos conseguem localizar correctamente todos os cubos num paralelepípedo. No entanto, erram quando tentam enumerar os cubos. As estratégias utilizadas não são generalizáveis e revelam-se inadequadas para sólidos com maiores dimensões.

No segundo e terceiro casos, os alunos ao longo do desenvolvimento das tarefas propostas, atingiram o nível 6 (dos descritos por Battista, já referenciados no Quadro 2), pois interiorizaram modelos mentais que incorporam a estrutura por camadas de modo a conseguirem indicar o número de cubos num paralelepípedo, sem materiais perceptivos ou concretos para as unidades das composições. Parecem conseguir, no final desta cadeia de tarefas reconhecer que os seus métodos para encontrar o volume de determinado sólido podem ser generalizados por meio de fórmulas, relacionar as dimensões de um sólido com o seu volume e utilizar diferentes unidades de medida (cubos unitários ou conjuntos de dois ou mais cubos) para encontrar o volume de um paralelepípedo.

5.5. A Turma

A turma, da qual fazem parte os três pares escolhidos para desenvolver o estudo, realizou todas as etapas da proposta pedagógica criada para o desenvolvimento do conceito de volume com foco na importância que a visualização e o raciocínio espacial apresentam no mesmo. Não sendo no entanto objecto deste estudo, mas parece-me relevante partilhar algumas considerações sobre o desenvolvimento do conceito de volume no grupo turma, pela qualidade do trabalho desenvolvido por estes alunos.

Este grupo mostrou entusiasmo, motivação e empenho no decorrer de todas as aulas em que se desenvolveram as tarefas. Apesar do carácter intuitivo das mesmas, ao nível do que pode ser trabalhado no 1º ciclo para o desenvolvimento deste conceito, os alunos centraram a sua atenção no desenvolvimento das actividades propostas de tal forma que os conflitos interpessoais diminuíram significativamente nas aulas de Matemática.

A interrupção lectiva da Páscoa, causou uma paragem na aplicação das tarefas da proposta pedagógica, porém, os alunos mantiveram o interesse e não foram necessárias aulas para recordar ou rever quaisquer das actividades anteriores. Não foram leccionados novos conteúdos ou realizadas fichas de avaliação durante o período de tempo em que se desenvolveu a proposta.

Nas aulas em que se desenvolveram as tarefas da proposta pedagógica não houve alteração da disposição dos alunos na sala, nem troca de pares. Os alunos da turma estavam informados sobre a realização do estudo e conheciam o motivo da atenção, dada aos três dos pares da turma, que foram objecto de maior atenção. As aulas decorreram num registo normal, isto é, nada foi alterado relativamente às rotinas habituais. Assim, começamos sempre por relembrar o que foi feito ou no caso de introdução de uma nova actividade explicar como vai decorrer a aula.

Na aula em que realizaram a tarefa 1, depois de distribuído o enunciado da tarefa, este foi lido e explicado à turma. Indiquei que, em primeiro lugar deviam realizar a previsão do número de cubos que cada caixa poderia conter e, em seguida, para cada uma das caixas, tinham de construir a caixa e depois, enchendo-a com cubinhos, verificar a validade ou correcção das previsões.

Depois de todos terem feito a primeira previsão foram distribuídos pelos pares sacos com materiais. Estes continham folhas de papel quadriculado, tesoura, fita-cola e cubos com 1 cm de aresta.

De um modo geral, os alunos conseguiram realizar a tarefa proposta. Apesar de apresentarem alguma dificuldade na construção das caixas e em alguns casos na realização da própria planificação no papel quadriculado. Verifiquei que, de um modo geral, os alunos realizavam previsões correctas nos casos das caixas A e B. Contavam o número de cubos que ocupariam a base e sobrepunham tantas camadas quantas as assinaladas na planificação. A maior parte dos alunos trabalhou sobre a planificação para realizar as previsões e as construções e não sobre a imagem da caixa. Esta estratégia revelou-se útil nas duas primeiras caixas. No entanto, na caixa C, onde só tinham a imagem da caixa, os alunos demonstraram mais dificuldades e foi maior o número de previsões erradas. Na caixa D, tinham apenas a planificação, voltaram a contar o número de quadrados da base e a adicionar sucessivamente até terem a caixa preenchida. Conseguiram realizar previsões correctas e construir a caixa sem dificuldade.

A aula, em que decorreu a aplicação da tarefa 2 foi de 45 minutos. Depois de distribuído o enunciado da tarefa, este foi lido e explicado à turma. Foram também informados que se algum par necessitasse, poderia recorrer ao saco com os materiais já disponibilizados na aula anterior, para a realização da tarefa1.

A turma encontrou com facilidade resposta aos primeiros pedidos da tarefa. De uma maneira geral, conseguem calcular rapidamente o número de cubos das novas caixas, recorrendo à relação entre os sólidos: *“Se a caixa A tem 16 cubos a nova caixa tem 32”*. Quando questionados sobre as suas estratégias, responderam que calcularam o dobro do valor. As dificuldades surgem quando têm de indicar as dimensões das caixas ou desenhá-las. Não conseguem visualizar a nova caixa. Ao indicarem as dimensões da nova caixa surgem dois tipos de resposta: alguns dos alunos duplicam ou quadruplicam as dimensões de todas as arestas da caixa, outros duplicam apenas uma das arestas e mantêm os valores das restantes. Os alunos que conseguem ter sucesso nesta tarefa referem que para calcular as dimensões das arestas da nova caixa primeiro *“imaginam uma caixa em cima da outra” ou “uma caixa A com outra igual ao lado”*. Apesar de ainda terem os cubos de madeira disponíveis nenhum dos pares os utilizou para realizar esta tarefa.

A tarefa 3 foi apresentada à turma depois da Interrupção lectiva da Páscoa. Optei por realizar as duas partes da tarefa numa aula de 90 minutos, tentando que todos os pares trabalhassem a parte 1 nos primeiros 45 minutos e a parte 2 nos 45 minutos seguintes da aula. Como habitualmente foi distribuído e lido o enunciado da tarefa e clarificadas algumas dúvidas.

A disposição de alguns alunos na sala foi alterada mas, os pares em estudo mantiveram-se nos mesmos lugares.

Como já foi referido para a tarefa “*Quantos Cubos?*” os alunos conseguem a partir da planificação imaginar a caixa e resolvem sem grandes dificuldades a primeira proposta da tarefa *“Caixas”*, com o cubo unitário. No entanto, continuam na sua maioria a chegar ao valor, contando os cubos que ocuparia a base e sobrepondo 4 camadas com o mesmo valor. Para resolver as questões com as figuras 2 e 3, da tarefa 3, recorrem a outras estratégias: uns usam o número de cubos que calcularam em 1 e dividem-no por 4 ou 8, obtendo o número de unidades de medida necessárias para encher a figura 4; outros imaginam as unidades de medida representadas pelas figuras 2 e 3 dentro da 4 (da tarefa 3). Começam por imaginar, o número de unidades de medida necessárias para cobrir o fundo, encontram o valor de uma camada e depois vão sobrepondo camadas. Na tarefa *“Caixas”*(2) a maior parte da turma sentiu algumas dificuldades. Não tinham nenhum suporte visual e por isso alguns alunos recorreram à tarefa 1 como suporte para imaginarem a caixa. Outros imaginam um cubo com 8 cm de aresta, tentam desenhar o cubo ou uma grelha em representação da base do cubo. A partir daqui seguem duas estratégias distintas. Alguns alunos, que são poucos, calculam a área da base e multiplicam o valor pela altura. Os outros encontram o número de cubos da base, sendo esta a primeira camada, e sobrepõe 7 camadas sucessivamente. Para resolverem o segundo exercício voltam a recorrer, em alguns casos, à primeira parte desta tarefa imaginando a unidade de medida, se é um cubo com 2 cm de aresta tem 8 cubos unitários e dividem o valor encontrado na questão por 8. No entanto, a maior parte da turma tenta imaginar a caixa e visualiza as unidades de medida dentro desta. Sendo que alguns continuam a verificar quantas unidades de medida são necessárias para cobrir a base e depois somam o valor de cada camada. Nalguns pares surge um erro relacionado com a contagem das camadas, pois inicialmente sobrepõem 8 e não 4.

À semelhança da tarefa anterior, na aula de 90 minutos, resolveram a tarefa 4. A primeira parte da tarefa, *Volume*, foi resolvida nos primeiros 45 minutos de aula e a segunda parte da tarefa, *Volume 2*, nos segundos 45 minutos da aula.

À distribuição do enunciado, seguiu-se a leitura do mesmo e o esclarecimento de dúvidas colocadas pelos alunos da turma.

A turma está à vontade na resolução desta tarefa. Alguns dos alunos continuam a contar cubo a cubo até chegarem ao resultado final. No entanto, outros começam a percepcionar estas figuras como objectos tridimensionais e multiplicam os valores de três das arestas para calcular o volume. Outros optam por calcular o valor da área da base (multiplicam lado x lado) e de seguida usam o resultado e multiplicam-no pela altura do sólido.

Alguns dos alunos da turma oscilam entre o cálculo do volume recorrendo ao produto das 3 dimensões da figura dada ou à adição de camadas sucessivas. Quando os questionei sobre esse facto responderam que fazem do modo que lhes parece mais fácil ou rápido, se a figura for *“pequena contamos tudo”* quando as dimensões aumentam recorrem à fórmula.

5.6. Reflexão sobre o desenvolvimento da Proposta Pedagógica

A fase deste estudo em que decorreu a aplicação da proposta pedagógica foi para mim, enquanto professora, a mais aliciante deixando-me a vontade de desenvolver outros trabalhos semelhantes. Sabia que quando se desenvolvem actividades de natureza investigativa, o desempenho dos alunos é menos controlado. Talvez, por isso, tivesse alguns receios iniciais sobre as atitudes, os comportamentos e a qualidade das aprendizagens dos alunos. Estes temores foram rapidamente ultrapassados ao fim da primeira aula em que resolveram a tarefa 1. A motivação da turma foi grande, tendo o desempenho dos alunos superado positivamente as minhas expectativas. O interesse dos alunos manteve-se elevado ao longo de todas as tarefas, não mostrando cansaço ou enfado. Estes mantiveram sempre um espírito persistente não desistindo de resolver as tarefas propostas.

A dualidade de papéis que o professor/ investigador desempenha dentro da sua sala de aula, no decorrer da aplicação de uma proposta pedagógica desta natureza, foi difícil de coordenar. Inicialmente tentei observar e registar o máximo dos alunos dos estudos de caso. O que se revelou tarefa quase impossível porque, apesar de revelarem alguma autonomia no desenvolvimento da tarefa, os outros alunos da turma requeriam atenção em determinados momentos. Assim decidi no fim da primeira aula que a investigadora desempenharia um papel secundário ao nível da atenção dispensada aos pares em sala de aula. Complementando as observações, dos 6 alunos em estudo, com os registos áudio e a análise dos documentos por eles produzidos. Outro dilema foi o de controlar, a minha directividade nas sugestões e questões feitas aos alunos permitindo-lhes mais espaço ou seja, procurando questioná-los para perceber como pensam sem orientar as suas ideias.

A aplicação desta proposta pedagógica surge do meu interesse, enquanto professora, pela dificuldade encontrada nos alunos ao nível do segundo ciclo em lidar com sólidos geométricos, visualizá-los e compreender as suas medidas, o que se reflecte em erros sistemáticos no cálculo do volume dos sólidos e enquanto investigadora pelo tema em si.

Com o desenvolvimento do conjunto de tarefas, que apresento neste estudo procuro guiar os alunos na descoberta da forma de calcular o volume de um sólido. Consigo perceber, ao longo do estudo, que a estrutura das tarefas é eficaz, levando os alunos a concluírem-nas e atingindo os objectivos propostos. No entanto, numa turma com um desenvolvimento cognitivo e desempenho matemático diferentes poderiam ter sido exploradas em menos tempo. Battista e Clements (1996), referem que a evolução das estratégias usadas pelos alunos quando procuram o número de cubos de um paralelepípedo depende do ritmo e das experiências de aprendizagem de cada aluno.

A fórmula para determinar o volume de um paralelepípedo é utilizada pelos alunos do segundo e do terceiro caso, na tarefa 4, para a resolução das questões. O facto de estes alunos terem conseguido, no final da resolução de um conjunto de tarefas que tinha como objectivo o desenvolvimento do conceito de volume, aplicarem a fórmula para o cálculo deste, revela que as tarefas permitiram a compreensão das medidas e da composição dos sólidos, promoveram um desenvolvimento de estratégias de cálculo que levaram à compreensão e aplicação desta fórmula de um modo natural pelos alunos.

As tarefas desta proposta pedagógica permitiram aos alunos desenvolverem estratégias de contagem e cálculo, assim como conhecimento da estrutura dos paralelepípedos. Battista (2003) indica a importância das previsões e verificações como essencial no desenvolvimento de modelos mentais dos sólidos e de estratégias de enumeração. Refere que, para desenvolver nos alunos o conceito de volume, são necessárias tarefas, que permitam reflexões sobre as estruturas que compõem os sólidos e evolução das estratégias de contagem. A sequência de tarefas, apresentada nesta proposta, tinha como objectivo desenvolver o conceito de volume, procurando desafiar os alunos de modo que ao longo delas sintam a necessidade e construam novos modelos/estratégias para calcular o volume dos sólidos.

Depois da análise dos desempenhos dos casos, da turma, e dos modelos mentais apresentados pelos alunos na altura da aplicação das tarefas, fico convicta, que estes conseguiram de forma muito satisfatória concluir as tarefas propostas. Além disso, revelaram compreender as relações entre os sólidos apresentados e criaram estratégias para encontrar o volume de determinado sólido.

Na prática cada grupo turma é diferente e apresenta necessidades diversas. O mais importante, quando procuramos desenvolver conceitos como o do volume, é compreender qual o nível de conhecimento que os alunos possuem, e partir daí, propondo tarefas que os levem a elaborar estruturas mentais que lhes permitam um nível de pensamento, cada vez mais abstracto e compreender o desenvolvimento que os alunos conseguem ter. O trabalho que realizei leva-me a concordar com Battista (2003) quando afirma que as tarefas para desenvolver o conceito de volume devem encorajar a construção individual de estratégias de contagem. Estas estratégias são facilitadas pelo professor, não apresentando fórmulas aos alunos à priori, encorajando-os a investigar, reflectir e analisar as suas decisões e estratégias de resolução em actividades de natureza análoga às que foram propostas.

VI - CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Neste capítulo faço uma síntese do estudo realizado numa turma de 6ºano de escolaridade, destacando os seus objectivos e a metodologia usada para o seu desenvolvimento. Depois, apresento as conclusões procurando clarificar os objectivos definidos no início do estudo. Apresento uma reflexão, identificando perspectivas de desenvolvimento. Por fim, faço algumas recomendações que me parecem pertinentes relativamente ao desenvolvimento do conceito de volume.

6.1. Síntese do estudo

O estudo aqui apresentado teve como principal objectivo compreender as ideias que os alunos do 6.º ano têm sobre volume e perceber como se desenvolvem quando são envolvidos numa experiência de ensino, baseada na resolução de uma cadeia de tarefas. O estudo foi orientado de acordo com os seguintes objectivos:

- Compreender o papel de tarefas que apelam à visualização e raciocínio espacial no desenvolvimento do conceito de volume.

- Compreender como é que os alunos fazem a transição dos casos particulares, apresentados nas tarefas, para a generalização.

O estudo foi desenvolvido numa turma do 6ºano, onde os alunos resolveram quatro tarefas, a pares, tendo sido seleccionados três pares de alunos para a realização de três estudos de caso.

A recolha de dados decorreu entre Março e Abril de 2010. Este intervalo de tempo incluiu a interrupção lectiva da Páscoa o que implicou um intervalo de três semanas no decorrer realização da proposta pedagógica.

Tendo em conta os objectivos deste estudo, optei por uma abordagem metodológica de natureza qualitativa, seguindo a modalidade de estudo de caso. Os instrumentos de recolha de dados incluíram a observação participante e também registos áudio dos diálogos dos alunos, bem como, documentos escritos realizados pelos alunos. A análise dos dados recolhidos foi feita em duas fases, uma primeira à medida que os dados iam sendo recolhidos e uma mais exaustiva no final. Esta análise, de carácter descritivo e interpretativo, procurou compreender o modo como os alunos desenvolveram o conceito de volume.

Partindo dessa análise, apresento as conclusões do estudo considerando os objectivos do mesmo.

6.2. Conclusões do Estudo

As observações e a análise de dados deste estudo são concordantes com as afirmações de Battista e Clements (1998), quando defendem que a experiência de encaixar objectos num determinado espaço é desafiante e contribui para a compreensão da medida do volume e da fórmula para o cálculo dessa medida. Ao longo da proposta pedagógica realizada, os alunos mostraram atenção e motivação no desenvolvimento das tarefas propostas. Aos alunos foi dada a oportunidade de apreender um conceito de um modo significativo, no qual participaram, raciocinando, compreendendo e construindo significados. Em oposição a um aprender mecânico e repetitivo, de fazer sem saber por que faz ou o que faz, com que me tenho deparado no ensino deste conceito.

Ao longo do desenvolvimento das tarefas os alunos tornaram-se cada vez mais conscientes da organização estrutural de um sólido de forma rectangular, e das formas como podiam calcular o seu volume. A visualização e o raciocínio espacial promoveram parte da organização das estruturas mentais que foram sendo desenvolvidas. Com a primeira tarefa pretendia-se que, a partir de imagens e planificações de caixas, os alunos conseguissem prever correctamente o número de pequenos cubos que preencheriam a caixa. Os alunos começaram por ter de recorrer ao modo como visualizavam o sólido em geral, e com o decorrer da tarefa conseguiram conhecer a organização estrutural da construção. Na minha opinião, esta tarefa foi essencial para que os alunos fossem dependendo cada vez menos das pistas visuais e fossem recorrendo a um método mais abstracto de cálculo (fórmula de volume).

O domínio de grandezas como a área ou o volume "requerem o domínio de conceitos de raciocínio numérico e espacial (…) A forma como as unidades encaixam espacialmente e o modo como podem ser contadas sistematicamente são exclusivas em cada aplicação do conceito" (Outhred e Mitchelmore, 2000, p.144). Para Battista e Clements (1996), estruturação espacial é entendida como a construção de unidades em composições, como colunas e camadas, tendo como objectivo a unificação das composições numa só figura. A forma como os alunos adquirem este conceito pode ser inferida a partir do modo como eles contam o número de cubos numa determinada figura. Na maior parte dos casos deste estudo os alunos parecem demonstrar ao contar os cubos de determinada caixa um pensamento por camadas.

Este estudo permitiu-me observar que os alunos, apesar de apresentarem algumas dificuldades iniciais na visualização das figuras, recorreram à estruturação do cubo ou das figuras das caixas em camadas. O desenvolvimento da tarefa *"Quantos Cubos"* 1 e 2 deu-lhes um maior conhecimento da forma como o sólido, em si, está organizado. Isto verificou-se quando foram capazes de usar a contagem unitária, por colunas, camadas ou recorrer à fórmula. Gradualmente parece terem deixado de ter necessidade de suportes visuais por os terem conseguido definir estrutural e mentalmente.

Vários estudos demonstram que os alunos, mesmo no 3ºciclo, têm dificuldade em encontrar o número de cubos que compõem um determinado sólido (Battista e Clements 1996, 1998). Alguns investigadores afirmam ainda que estas dificuldades devem-se ao facto de os alunos não compreenderem as relações entre as operações, multiplicação e adição, nem a forma como as estruturas tridimensionais são compostas (Outhred e Mitchelmore, 2000, Battista 2007). Neste estudo, as tarefas desenvolvidas ao longo da implementação da proposta pedagógica parece terem permitido aos alunos um conhecimento alargado da estrutura interna dos sólidos e o conhecimento da forma como podem calcular o volume dos mesmos.

Apesar de neste nível de ensino de acordo com os programas da disciplina de Matemática, os alunos terem já tido contacto com o conceito de volume nenhum deles recorreu, no inicio do estudo, ao uso da fórmula ou a qualquer outra estratégia que revelasse conhecimento desse conceito. Acredito que os resultados deste estudo vão de encontro a outros (Battista e Clements, 1996,1998, Battista 2003, Outrhed e Mitchelmore, 2000, Reece e Kamii, 2001) que indicam que os alunos devem desenvolver determinadas capacidades antes de serem capazes de utilizar e compreender a fórmula para o cálculo do volume.

Ao longo da proposta pedagógica, os alunos adquiriram estratégias de contagem que lhes permitiram criar estruturas para compreender a organização dos sólidos em estudo - paralelepípedos - e desenvolver o conceito de volume. Começaram por realizar contagens sucessivas das unidades que preenchiam o sólido. Depois, conseguiram visualizar o paralelepípedo como um conjunto de camadas e aqui encontramos dois tipos de estratégias. Quando nesta fase pedimos para calcularem o volume de um sólido: calculam a área da base e multiplicam o valor pela altura ou encontram (por contagem unitária) o número de cubos da base, vendo esta como uma camada (horizontal ou vertical) e sobrepõem sucessivamente camadas. Alguns alunos não conseguiram ultrapassar esta fase, outros demonstraram domínio do conceito conseguindo realizar o produto das três medidas do sólido e obtendo o valor do volume deste.

Para Battista (2007), a compreensão do conceito de volume implica o conhecimento: (a) de o que é o volume e de como se comporta (capacidade para construir e desconstruir a figura percebendo que o seu volume se mantém), (b) das medidas de volume e das suas unidades, (c) como processos numéricos podem ser usados para o cálculo de volumes, (d) como representar os processos matematicamente. À medida que eram resolvidas as diferentes tarefas, as estratégias utilizadas pelos alunos para determinar o volume de um cubo foram sofrendo alterações. Inicialmente, ao observar a turma verifiquei que o processo mais comum era a contagem unitária, mas passaram rapidamente para a contagem de colunas ou camadas dos sólidos. Nenhum deles optou por contar faces esquecendo-se dos cubos interiores. Nos seus estudos, Battista (2007) descreve vários níveis de conhecimento, pelos quais os alunos passam quando se envolvem na resolução de tarefas em que têm de contar quadrados ou cubos que compõem determinadas figuras. Assim, e de acordo com os níveis estabelecidos pelos investigadores citados, nos alunos estudados verificou-se que, quando se iniciou a aplicação das tarefas todos os alunos se encontravam no nível 2, sendo capazes de estruturar espacialmente as figuras em termos de composição de unidades. Por exemplo, depois de contarem o número de cubos visíveis de um lado da estrutura, conseguem inferir o número de cubos do lado oposto. Com a conclusão da aplicação das tarefas os alunos tinham interiorizado modelos mentais e incorporado a estrutura por camadas, de modo a conseguirem enumerar um arranjo sem materiais perceptivos ou concretos, para as unidades das composições. Parece-me poder afirmar que os alunos do segundo e terceiro casos atingiram o nível 6, tendo acontecido o mesmo a grande parte dos alunos da turma. Não foi possível tirar conclusões relativamente ao último nível desta escala, o nível 7, porque nunca foram usadas unidades de medida que não fossem cubos.

Ao longo da proposta pedagógica, as estratégias usadas pelos alunos modificaram-se. Os alunos começam por contar cubos um a um, passam progressivamente à contagem de uma camada (usando a cotagem um a um ou calculando a área) que relacionam com o sólido no seu todo usando um raciocínio aditivo (adicionam o número de cubos das várias camadas) ou multiplicativo (calculam a área da base e multiplicam pela altura) e por fim usam o produto das medidas de três arestas. O desenvolvimento dos alunos, durante a resolução das tarefas e os resultados apresentados explanam a evolução dos mesmos. Foi gratificante perceber que todo o processo foi motivador e entusiasmante para os alunos. A cada descoberta, cada resolução de determinada tarefa com sucesso pelos alunos, permitiu-me observar o entusiasmo e a vontade de fazer mais. Este estudo reforçou a minha convicção de que as aulas de carácter experimental, com recurso ou não à manipulação de materiais, são as que mais agradam aos alunos. A receptividade dos alunos à proposta foi boa, realizando atenta e empenhadamente todas as tarefas.

Em relação à minha prática, o desenvolvimento deste estudo foi para mim, uma experiência das mais importantes que já vivi em termos de desenvolvimento profissional. A realização deste trabalho suscitou o questionamento constante, assim como a tomada de decisões, procurando relacionar a literatura consultada, as orientações curriculares e o que seria mais indicado para levar os meus alunos a desenvolver, com compreensão, o conceito de volume. As dificuldades, em separar a professora da investigadora foram constantes. Os cuidados na relação com os alunos, especialmente com os alunos dos casos em estudo foram redobrados no sentido de não interferir com o desenvolvimento das suas actividades mesmo quando pediam a minha ajuda, procurando questionar no sentido de clarificar sem dar sugestões ou encaminhar as suas ideias para determinada resolução.

Tendo sido gratificante, para mim enquanto professora, a aplicação destas tarefas em sala de aula e notório o consequente desenvolvimento dos alunos, espero que este estudo sirva de incentivo para que muitos professores experimentem proporcionar aos seus alunos a oportunidade de apreender um conceito de um modo significativo.

6.3. Perspectivas de Desenvolvimento

Se voltasse a desenvolver este trabalho introduziria algumas alterações que penso serem importantes para conhecer melhor o desenvolvimento do conceito do volume nos alunos. Neste trabalho não planeei uma avaliação diagnóstica, porque parti do princípio que neste nível de ensino os alunos já teriam algum conhecimento do conceito de volume, especialmente relacionado com o sólido trabalhado, paralelepípedo ou o cubo (usado como unidade de medida). Esperava que os alunos revelassem um conhecimento intuitivo do conceito e do sólido. Hoje penso que teria sido importante conhecer o modo como os alunos respondiam a tarefas sobre o volume de paralelepípedos antes da proposta da primeira tarefa. Faria também algumas alterações nas tarefas. Na tarefa 2, reformularia as questões, recorrendo à sequência usada na tarefa 1, pediria que realizassem uma previsão das dimensões das novas caixas que depois construiriam. O recurso a materiais manipuláveis que permitiu verificar as previsões iniciais (tarefa 1), foi muito importante para grande parte dos alunos e permitiu a construção da imagem mental do paralelepípedo e da sua estrutura interior. Na tarefa 4 usaria outros exemplos de modo a que a contagem um a um, não fosse o modo mais fácil de resolver a questão.

Seria importante, para consolidar os conhecimentos adquiridos com o desenvolvimento desta proposta, continuar a aplicar tarefas que permitissem aos alunos calcular o volume de diferentes paralelepípedos, ou dado um volume pedir que indicassem diversos paralelepípedos. Relacionar os conhecimentos adquiridos com a construção do conceito de volume para paralelepípedos com construção do volume de outros sólidos.

Outra ligação possível de desenvolver seria com as unidades de medida, que foram introduzidas de modo muito simples. Por exemplo, criar tarefas onde o cálculo de volume permitisse estabelecer relações entre as unidades de medida. Por fim, considerar tarefas que relacionassem os conceitos de volume e de capacidade, desenvolvendo uma proposta que levasse à compreensão das conversões usadas nas medidas destas duas grandezas.

6.4. Recomendações

Com este trabalho pretendi compreender o papel de uma proposta pedagógica no desenvolvimento do conceito de volume, procurei ainda compreender como é que os alunos fazem a transição de casos particulares para a generalização. Este estudo partiu de recomendações tecidas em trabalhos de investigação anteriores e penso ter contribuído para aumentar a compreensão sobre como alunos do 6ºano, desenvolvem o conceito de volume quando são envolvidos numa experiência de ensino, tendo por base uma cadeia de tarefas que apelam à visualização e ao raciocínio espacial.

È fundamental continuar a realizar investigação sobre como os alunos desenvolvem conceitos matemáticos, especialmente o de volume. Seria importante desenvolver um estudo que envolvesse alunos do 1º e 2º ciclo, onde se procurasse compreender as estratégias que alunos de idades diferentes usam para calcular o volume de um cubo e como desenvolvem o conceito de volume. Ainda dentro do desenvolvimento do conceito de volume seria interessante verificar que estratégias utilizariam os alunos (depois da concretização da proposta pedagógica) para calcular o volume de sólidos que não rectangulares.

Enquanto professora, este trabalho resume uma experiência de ensino sobre volume, realizada na minha sala de aula. As recomendações que posso dar para a prática profissional de outros professores, além das já explanadas ao longo do estudo, estão relacionadas com a capacidade, que enquanto professores devemos cultivar a prática de aprender ao longo da vida. Sermos exigentes, questionar criticamente as orientações gerais da escola e dos manuais, conhecer os documentos curriculares que nos permitem a gestão flexível do currículo, atendendo às especificidades de cada escola e ao perfil dos alunos de cada turma.

Referências Bibliográficas

Abrantes, P., Serrazina, L. & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica.* Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.

Battista, M.T. & Clements, D.H. (1996). Students' understanding of three-dimensional rectangular arrays of cubes. *Journal for Research in Mathematics Education,* 27 (3), 258-292

Battista, M.T. & Clements, D.H. (1998). Finding the number of cubes in rectangular cube buildings. *Teaching Children Mathematics,* 4 (5), 258-264

Battista, M.T. (1999). Fifth Graders Enumeration of Cubes in 3D Arrays: Conceptual Progress in an Inquiry-Based Classroom. *Journal for Research in Mathematics Education, 30* (4), 417-448

Battista, M.T. (2003). Undestanding Students' Thinking about Area and Volume Measurment. In Clements, D.H. & Bright, G. (Ed.) *Learning and Teaching Measurment: 2003 Yearbook* (pp. 122-142). Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Battista, M.T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In Lester, F. (Ed.) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learnig* (pp. 843-908). Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Bogdan R. & Taylor, S. (1986). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación: La búsqueda de significados*. Buenos Aires: Editorial Paidós.

Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Caraça, Bento de Jesus (1989). *Conceitos fundamentais da Matemática*. Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora. (Edição original 1948).

Clements, D.; Battista, M. & Sarama, J. (1998). Development of Geometric and Measurment Ideas. In Lehrer, R. & Chazan, D. (Eds.) Designing *Learning Environments for Designing of Geometry and Space* (pp. 201-225). New York: Lawrence Erlbanm Associates

Clements, D.H. & Bright, G. (2003) *Learning and Teaching Measurment: 2003 Yearbook*. Reston, Va: National Council of Teacher of Mathematics

Clements, D. H. (1998). *Geometric and spatial thinking in young children.* Arlington: National Science Foundation.

Cohen, L. & Mannion, L. *Research methods in education*. London: Routledge

Costa, C. (2000) Visualização, veículo para a educação em geometria. Em 2/10/2010: www.spce.org.pt/sem/encontros/encontro2000.htm

Costa, C. (2005). *Modelo do pensamento visual-espacial: transformações geométricas no início da escolaridade*. Dissertação de Doutoramento não publicada. Lisboa: Universidade Nova de Lisboa: Faculdade de Ciência e Tecnologia.

Cunha, D. (2008). Investigações Geométricas: desde a formação do professor até à sala de aula de Matemática. Em 18-03-2010: http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/upload/336-1-A-GT8cunhata.pdf

Gabinete de Avaliação Educacional do Ministério da Educação (2004). *Pisa 2003 – Conceitos fundamentais em jogo na avaliação da literacia matemática*. Mem Martins: Editorial do Ministério da Educação.

Goetz, J. & LeCompte, M. (1988). *Etnografia e disenõ cualitativo en investigación educativa*. Madrid: Morata

Goldenberg, E.; Cuoco, A. & Mark, J. (1998). A Role for Geometry in General Education. In Lehrer, R. & Chazan, D. (Eds.) *Designing Learning Environments for Designing of Geometry and Space* (pp. 3-44). New York: Lawrence Erlbanm Associates

Gordo, M. F. (1993). *A visualização espacial e a aprendizagem da Matemática*. Tese de Mestrado, Universidade Nova de Lisboa: APM.

Gordo, M.F. (1994). A visualização espacial e a aprendizagem da Matemática: um estudo no 1º ciclo do Ensino Básico. *Quadrante*, 3 (1), 55 – 73.

Gordo, M. F. & Matos, J. (1993). Visualização espacial: algumas actividades. *Educação e Matemática.* 26, 13 – 17.

Hirstein, J. (1981). The Second National Assesment in Mathematics: Area and Volume. *The Mathematics Teacher, 74* (9), 704-708

Lehrer,R.; Jenkins, M. & Osana, H. (1998). Longitudinal Study of Children's Reasoning Abaut Space and Geometry. In Lehrer, R. e Chazan, D. (Eds.) Designing *Learning Environments for Designing of Geometry and Space* (pp. 137-167). New York: Lawrence Erlbanm Associates

Lüdke, M. & André, M. (1996). *Pesquisa em Educação: abordagens qualitativas.* S.Paulo: EPU

Maria, A., Brito, B. Brito, F. & Figueiredo, V. (1952). *Colecção Educador: Resumo de Geometria para as Escolas Primárias*. Lisboa: Papelaria Fernandes

Matos, J. & Carreira, S. (1994) Estudos de caso em Educação Matemática, Problemas Actuais. *Quadrante*, 3 (1),19-52.

Matos, J. & Gordo M. (1993) Visualização espacial: algumas actividades. *Educação e Matemática*, 26,13-17.

Matos, J., & Serrazina, L. (1996). *Didactica da Matemática.* Lisboa: Universidade Aberta.

ME (1991). *Programa de Matemática do 2º ciclo. Vol. II* Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.

ME (1991). *Programa do 1º ciclo do Ensino Básico*. Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.

ME (2001). *Curriculo Nacional do Ensino Básico- Competências Essenciais.* Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação, Direcção-Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular.

Merriam, S. (1988). *Case study research in education*: A qualitative approach. San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Mertens, D. (1998). *Researh methods in education and psychology. Integrating diversity with quantitative and qualitative aproaches*. London: Sage Publications

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar.* Lisboa: Associação de Professores de Matemática (Tradução de NCTM (2000), Principles and Standards for School Mathematics).

Outhread, L. & Mitchelmore. M. (2000). Young Children's Intuitive Understanding of Rectangular Area Measurement. *Journal for Research in Mathematics Education, 31* (2), 144-167

Owens, K. & Outhred, L. (2006) The Complexity of Learning Geometry and Measurment. In A. Gutiérrez & P. Boero. (eds.) *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education*. (pp. 83-115) Rotterdam: Sense Publishers

Palhares, Pedro. (2004). *Elementos de Matemática para Professores do Ensino Básico* (2ª ed.). Lisboa: Lidel.

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. Em GTI (Coord.) *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5-28). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema, 25*, 105-132 Em 27-07-2010: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/06-Ponte%20(Estudo%20caso).pdf

Reece, C. S. & Kamii, C. (2001). *The meaurment of volume: why do young children measure incurractely?* School Science and Mathematics. Em 06–12-2009: http://findarticles.com/p/articles/mi_qa3667/is_200111/ai_n9009076/?tag=content;col1

Serrazina, L. & Oliveira, I. (2002). O professor como investigador: Leitura crítica de investigações em educação matemática. Em GTI (Coord.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 283-308). Lisboa: APM.

Vale, I. (2000). *Didáctica da Matemática e Formação Inicial de Professores num Contexto de Resolução de Problemas e de Materiais Manipuláveis.* Tese de doutoramento, Universidade de Aveiro.

Veloso, E. (1998) *Geometria: Temas actuais*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional

Verne, B., Roberta, C., & James, S. (1993). *How to Teach perimeter, area and volume* (3ª ed.). Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Walter, M. (1970). *Boxes, Squares and other Things. A teachers guide for a unit in informal geometry.* Reston, Va: National Council of Teacher of Mathematics.

Yin, R. (2003). *Case study research: Design and methods* (3ª edição). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

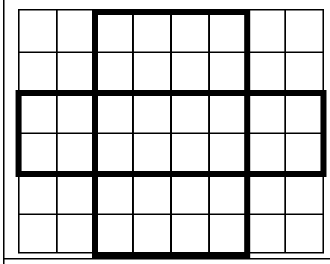
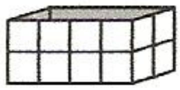
ANEXOS

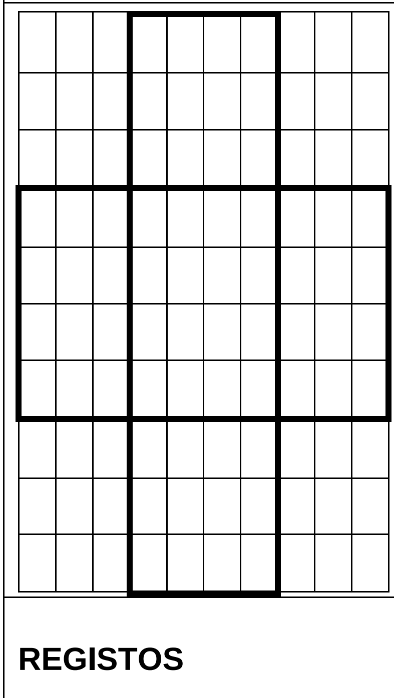
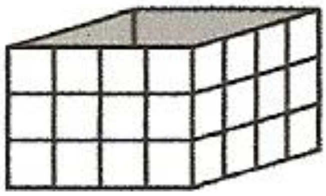
Anexo 1

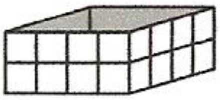
Tarefa 1 – “*Quantos Cubos 1?*”

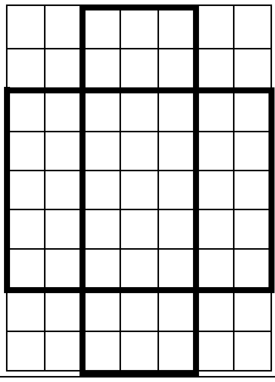
<u>Quantos Cubos</u> (1)

1. **Quantos cubos cabem em cada caixa?**
   Observa a planificação da caixa e ou a sua imagem. Faz uma previsão de quantos cubos são necessários para encher a caixa.
   Depois usa os cubos e constrói a caixa verificando a tua previsão.
   Regista em cada caso o modo como pensaste.

CAIXA A		
		**PREVISÃO**
REGISTOS		

CAIXA B		
		**PREVISÃO**
REGISTOS		

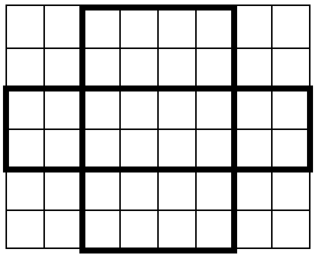
CAIXA C	
	PREVISÃO
REGISTOS	

CAIXA D	
	PREVISÃO
REGISTOS	

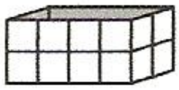
Anexo 2

Tarefa 2 – “*Quantos Cubos 2?”*

<u>Quantos Cubos</u> (2)



CAIXA A

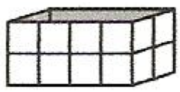


Lê as questões com atenção.
Regista em cada uma o modo como pensaste.

1. Imagina uma caixa com o dobro dos cubos da caixa A. Quais seriam as dimensões desta nova caixa?
   (indica as suas medidas ou desenha-a em papel quadriculado)

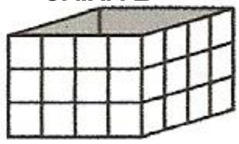
2. Constrói uma caixa que leve quatro vezes mais cubos que a caixa A.
   Desenha – a e indica as suas dimensões.

CAIXA A



3. Triplica as dimensões da caixa B. Relaciona o tamanho da nova caixa com o da caixa original (caixa B). Explica o teu raciocínio.

CAIXA B



4. Considera como unidade de medida 1 cubo com 1 cm de aresta.
   De quantas unidades de medida necessitas, para construíres um cubo com 4 cm de aresta?

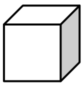
   Explica o teu raciocínio.

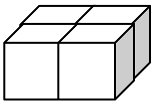
Anexo 3

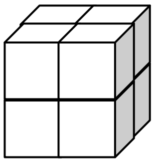
Tarefa 3 – "*Caixas*" e *"Caixas 2"*

Caixas

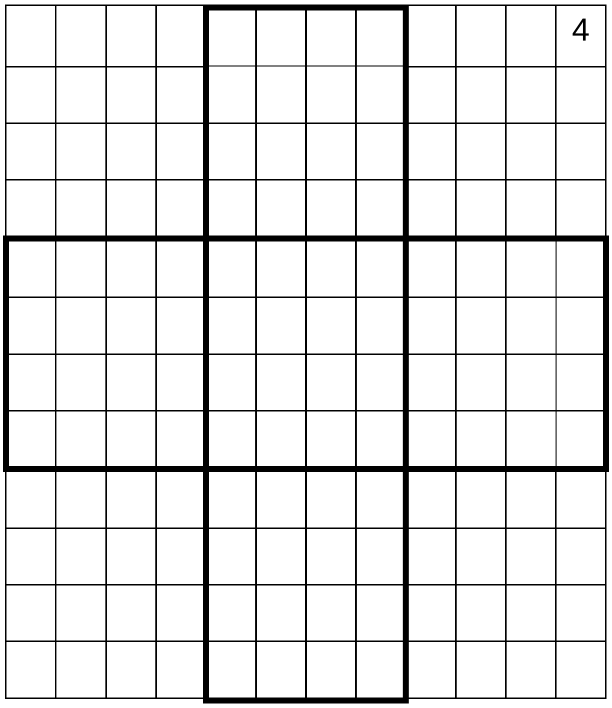
Observa as figuras seguintes:


1

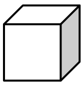
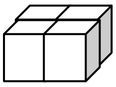
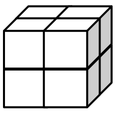

2


3

As figuras 1, 2 e 3 vão ser consideradas unidades de medida.
A figura 4 representa a planificação de uma caixa.



Usando uma de cada vez, indica quantas unidades de medida são necessárias para encher a caixa (faz o registo na tabela)

	Número de unidades necessárias para encher a caixa da figura 4
1 	
2 	
3 	

Caixas (2)

Imagina um cubo com 8 cm de aresta.

Regista para cada caso o modo como pensaste.

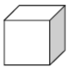
1. Qual o número máximo de cubos com 1 cm de aresta, que este, pode conter?

2. Qual o número máximo de cubos com 2 cm de aresta, que este, pode conter?

Anexo 4

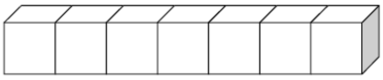
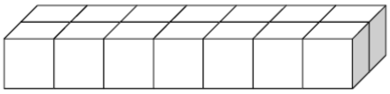
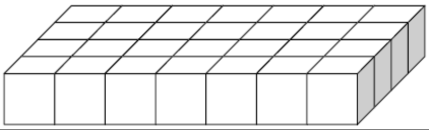
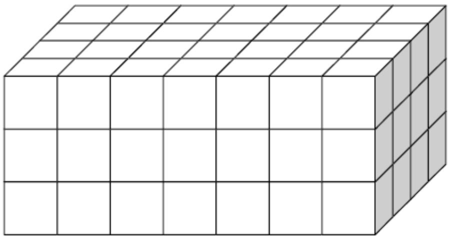
Tarefa 4 – "*Volume*" e "*Volume 2*"

<u>Volume</u>

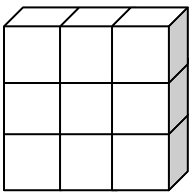


Este cubo tem 1 cm de aresta. O seu volume é 1cm^3.

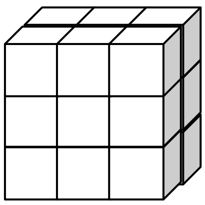
As figuras seguintes foram construidas a partir da mesma unidade.
Calcula o volume de cada uma delas.

	Esta figura tem ____ cubos. Então o seu volume é ____ cm^3
	Existem ___ linhas de cubos. Cada linha tem ___ cubos. O volume deste sólido é ____ cm^3
	Adicionando mais duas linhas de cubos formamos 1 camada de cubos. O volume deste sólido é ____ cm^3
	Cada camada de cubos tem o volume de ____ cm^3 Este sólido tem ___ camadas. O volume deste sólido é _______ cm^3

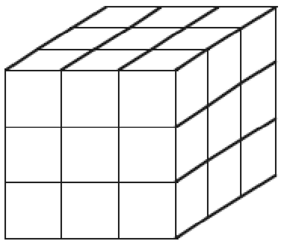
Determina o volume (V) de cada um dos sólidos seguintes sabendo que se mantem como unidade de medida o cubo com 1 cm de aresta.



V = _____ cm^3



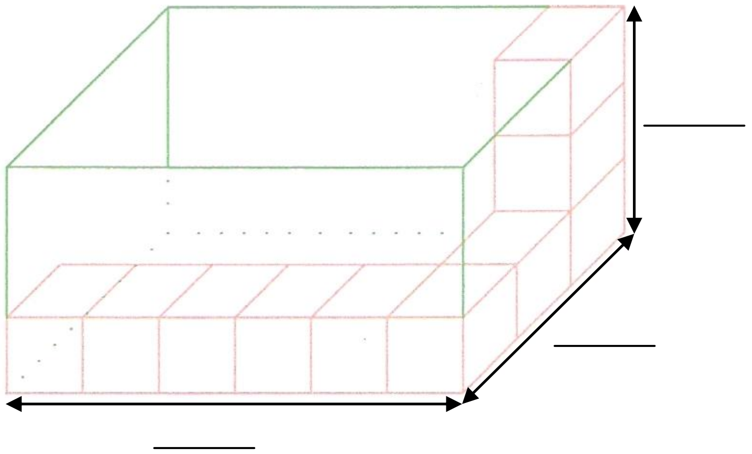
V = _____ cm^3

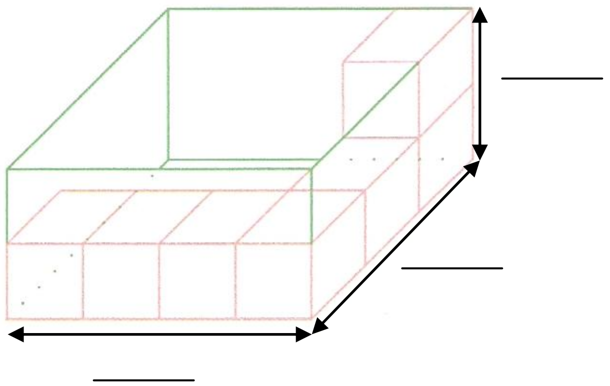


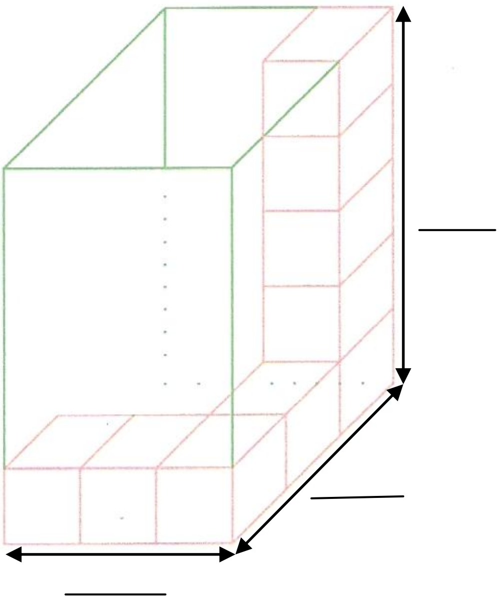
V = _____ cm^3

Volume (2)

1.Observa os sólidos seguintes:



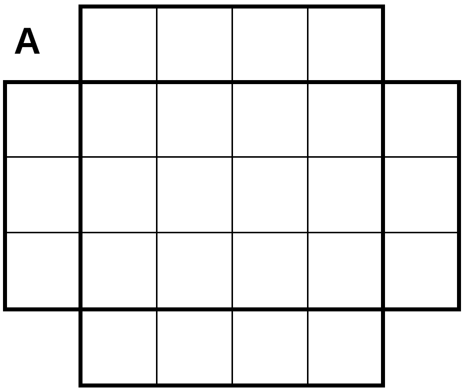




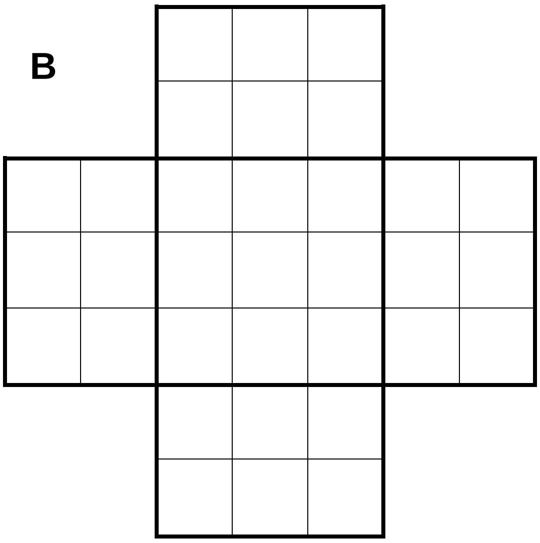
Indica a medida de cada uma das suas arestas, sabendo que foram construídos com cubinhos com 1 cm de aresta.

2.Observa as seguintes planificações de caixas.

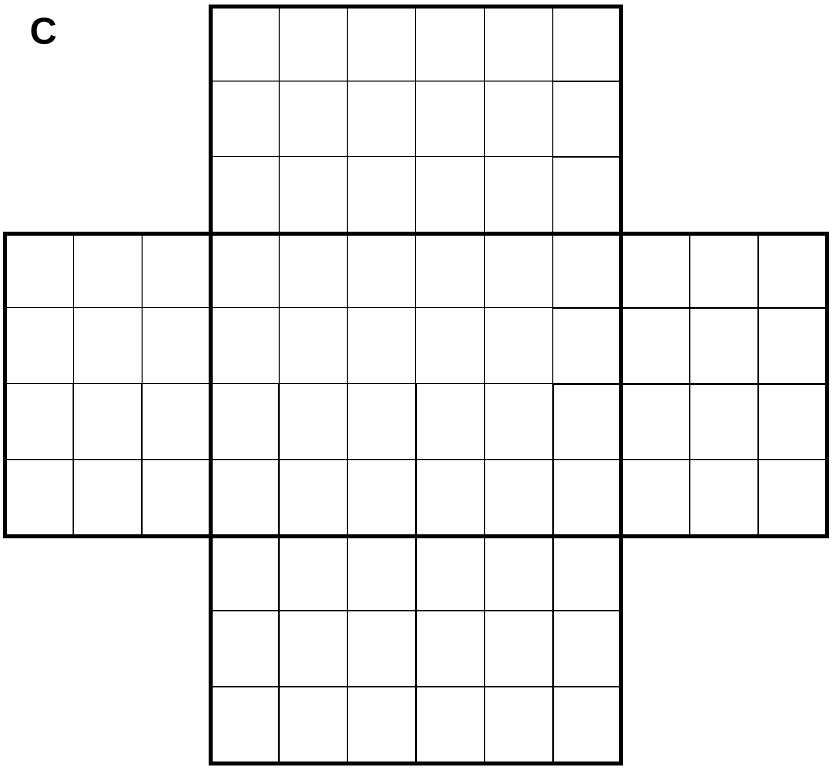
A



B

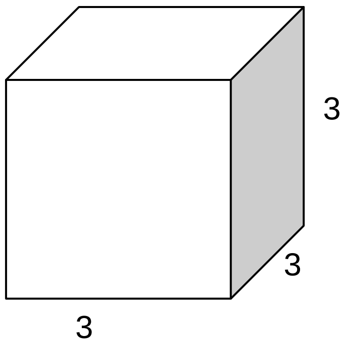


C

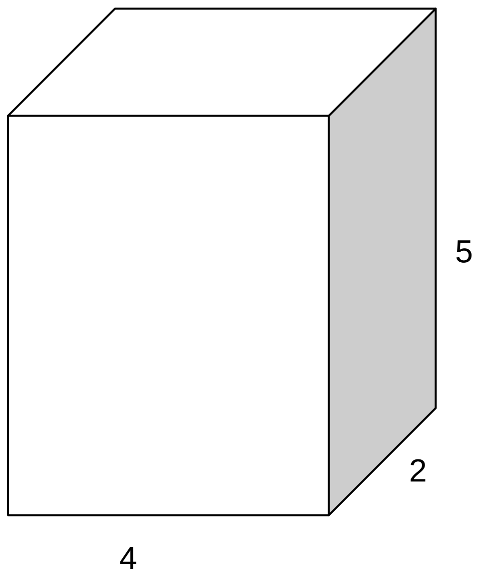


Indica o volume da cada caixa, sabendo que as quadrículas têm 1 cm de lado.

3. Calcula o volume de cada um dos sólidos.



Registos



Registos

Registos