

INSTITUTO POLITÉCNICO DE LISBOA
INSTITUTO SUPERIOR DE CONTABILIDADE
E ADMINISTRAÇÃO DE LISBOA



ISCAL

RANKINGS BASEADOS NAS
EFICIÊNCIAS OTIMISTA E
PESSIMISTA DA DEA

APLICAÇÃO AO SETOR BANCÁRIO

Catarina Alexandra Rosa Elias

VERSÃO DEFINITIVA

Lisboa, dezembro de 2020

INSTITUTO POLITÉCNICO DE LISBOA
INSTITUTO SUPERIOR DE CONTABILIDADE E
ADMINISTRAÇÃO DE LISBOA

RANKINGS BASEADOS NAS
EFICIÊNCIAS OTIMISTA E
PESSIMISTA DA DEA

APLICAÇÃO AO SETOR BANCÁRIO

Catarina Alexandra Rosa Elias

Projeto de dissertação submetido ao Instituto Superior de Contabilidade e Administração de Lisboa para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Contabilidade e Gestão das Instituições Financeiras, realizado sob a orientação científica do Professor Doutor José Manuel de Oliveira Pires, Professor-Coordenador, da área científica de Matemática.

Constituição do Júri:

Presidente: Doutora Ana Maria de Sotomayor

Arguente: Doutora Ana Maria Duarte Paias

Vogal: Doutor José Manuel Oliveira Pires

Lisboa, dezembro de 2020

Declaro ser a autora desta dissertação, que constitui um trabalho original e inédito, que nunca foi submetido (no seu todo ou qualquer das suas partes) a outra instituição de ensino superior para a obtenção de um grau académico ou outra habilitação. Atesto ainda que todas as citações estão devidamente identificadas. Mais acrescento que tenho consciência de que o plágio – a utilização de elementos alheios sem referência do autor – constitui uma grave falta de ética, que poderá resultar na anulação da presente dissertação.

Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus avós, Lília e António, por terem estado sempre ao meu lado e me incentivarem a lutar sempre por algo melhor.

*“When you are grateful, fear disappears
and abundance appears.”*

- Tony Robbins

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço aos meus avós, por todos os conselhos reflexo da experiência de tantos anos de vida que me ajudam diariamente a lidar com a vida pessoal e profissional.

Em segundo lugar, quero agradecer aos meus pais que sempre se esforçaram para me dar um bom futuro e por acreditarem sempre em mim e nas minhas capacidades, tal como à minha irmã pela força transmitida ao longo deste percurso académico.

Agradeço aos meus tios (padrinhos) e aos meus primos, por todo o carinho, apoio e incentivo ao longo de todos estes anos e pelo constante interesse em, diariamente, fazer de mim uma pessoa melhor.

Aos meus amigos, por estarem sempre presentes e demonstrarem a sua disponibilidade em ajudar-me no que fosse preciso.

Ao meu namorado e à família dele por todo o carinho e compreensão nos dias mais difíceis e pelo apoio e incentivo constante.

Agradeço ao meu cãopanheiro, o Stitch, que sem ter noção, por estar diariamente ao meu lado e pelo seu amor tão puro e verdadeiro, me deu e dá diariamente imensa força em todos os desafios da minha vida e este não foi exceção.

Por fim, mas não menos importante, muito pelo contrário, quero agradecer ao meu orientador, o Professor José Oliveira Pires, por toda a paciência, dedicação, incentivo e disponibilidade. Sem toda a ajuda e motivação que me foi dada não teria conseguido terminar esta grande etapa da minha vida. Para além de um excelente profissional, é um ser humano incrível, sempre pronto a ajudar seja em que situação for e eu, sem querer, tive a oportunidade de partilhar este caminho com ele. Sinto-me muito grata. Obrigada.

Muito obrigada a todos que, direta ou indiretamente, me ajudaram em todo este percurso e que estejam presentes nos próximos desafios da minha vida!

Resumo

Na sua forma tradicional, a metodologia Data Envelopment Analysis (DEA) permite avaliar a eficiência de um conjunto de entidades, usualmente denominadas de DMUs (*Decision Making Units*), segundo um ponto de vista otimista. Uma outra forma de avaliar tal eficiência é usar um ponto de vista pessimista. Estes dois pontos de vista correspondem a pontos de vista extremos, pelo que o uso isolado de cada um deles conduz a avaliações enviesadas e pouco realistas, assim como a classificação de várias DMUs como eficientes ou ineficientes. Contudo, quando usados conjuntamente, permitem obter avaliações mais realistas e estabelecer um *ranking*, em termos de *performance* entre as DMUs em avaliação.

Este trabalho tem por objetivo apresentar um estudo sobre a obtenção de *rankings* baseados no uso conjunto daqueles dois pontos de vista e aplicá-lo a um caso prático, mais especificamente a um conjunto de 19 instituições bancárias que operavam em Portugal no ano de 2018.

Palavras-chave: DEA; DMUs; Eficiência; *Ranking*.

Abstract

In its traditional form the methodology known as DEA allows for appraising the efficiency of a group of entities usually named as DMUs, from an optimistic perspective. Another way of assessing this efficiency is using a pessimistic point of view. These two perspectives are extreme, so that the individual use of them may lead to an unrealistic and biased appraisal, which in turn, could misclassify the DMUs in efficient or inefficient. However, when used together, they allow to obtain much more realistic appraisals and also to establish a ranking of performance between DMUs being assessed.

The objective of this paper is to present a study on obtaining rankings based in the use of both DMUs perspectives together and its application in one practical case, specifically on a group of 19 bank institutions operating in Portugal in 2018.

Keywords: DEA; DMUs; Efficiency; Ranking

Índice

Índice	viii
Índice de Tabelas.....	x
Índice de Figuras.....	xi
Lista de Abreviaturas.....	xii
1. Introdução	1
2. Eficiência otimista e eficiência pessimista na DEA	3
2.1 Introdução.....	3
2.2 Modelos clássicos ou modelos de eficiência otimista.....	4
2.2.1 Modelos orientados para <i>inputs</i>	5
2.2.2 Modelos orientados para <i>outputs</i>	10
2.3 Modelos de eficiência pessimista	14
2.3.1 Modelos orientados para <i>inputs</i>	14
2.3.2 Modelos orientados para <i>outputs</i>	18
2.4 Eficiência otimista <i>versus</i> eficiência pessimista	21
3. Rankings baseados nos pontos de vista otimista e pessimista	24
3.1 Introdução.....	24
3.2 Modelos de Entani, Maeda e Tanaka (2002)	25
3.3 Modelos de Wang, Chin e Yang (2007)	29
3.4 Modelos de Azizi e Wang (2013).....	30
3.5 Abordagem de Shen, Zang, Liu e Yang (2016).....	38
4. Estudo de um caso prático	42
4.1 Introdução.....	42
4.2 Seleção dos dados e dos modelos.....	42
4.3 Resultados e respetiva análise	45
5. Conclusões.....	54

Referências bibliográficas	56
APÊNDICE 1 - Determinação do <i>ranking</i> usando a abordagem de arrependimento máximo proposta por Wang, Greatbanks e Yang (2005)	58

Índice de Tabelas

Tabela 2.1 – Dados para 10 DMUs com dois <i>inputs</i> e um <i>output</i>	21
Tabela 3.1 – Dados para 6 DMUs com dois <i>inputs</i> e um <i>output</i>	33
Tabela 3.2 – Resultados obtidos para 6 DMUs do exemplo 3.1.....	34
Tabela 4.1 – Dados referentes aos <i>inputs</i> e aos <i>outputs</i>	44
Tabela 4.2 – Resultados obtidos pelos modelos selecionados.....	46
Tabela 4.3 – <i>Rankings</i> obtidos pelos modelos selecionados.....	49

Índice de Figuras

Figura 2.1 – Fronteiras de eficiência e ineficiência para as 10 DMUs do exemplo 2.1.....	22
Figura 5.1 – Gráfico dos <i>rankings</i> obtidos pela média geométrica, modelo de Azizi e Wang (2013) e abordagens CDI-I e CDI-II de Shen <i>et al.</i> (2016).....	50
Figura 5.2 – Gráfico dos <i>rankings</i> obtidos pela média geométrica, modelo Azizi e Wang (2013) e abordagem CDI-II de Shen <i>et al.</i> (2016).....	51
Figura 5.3 – Gráfico dos <i>rankings</i> obtidos pela média geométrica e modelo Azizi e Wang (2013).....	52
Figura 5.4 – Gráfico dos <i>rankings</i> obtidos pela média geométrica e abordagem CDI-II de Shen <i>et al.</i> (2016).....	53

Lista de Abreviaturas

APB – Associação Portuguesa de Bancos

BCC – Banker, Charnes e Cooper

CCR – Charnes, Cooper e Rhodes

CPLEX – *Optimization Programming Studio Academic Research 12.5*

CRS – *Constant Returns to Scale*

DEA – *Data Envelopment Analysis*

DMUs – *Decision Making Units*

MRA – *Minimax Regret Approach*

OPL – *Optimization Programming Language*

SNC – Sistema de Normalização Contabilística

VRS – *Variable Returns to Scale*

1. Introdução

A presente dissertação destina-se a apresentar um estudo sobre o cálculo da eficiência relativa de um conjunto de organizações através da metodologia DEA (*Data Envelopment Analysis*) usando dois pontos de vista distintos, o otimista e o pessimista, e salientar as vantagens que se obtêm quando a eficiência é calculada usando conjuntamente esses dois pontos de vista, nomeadamente a de permitir estabelecer *rankings* entre as organizações consideradas eficientes do ponto de vista otimista.

A metodologia DEA tem por objetivo a avaliação do desempenho organizacional. Mais precisamente, destina-se a avaliar a eficiência relativa de um conjunto de entidades independentes e homogêneas que utilizam múltiplos recursos (*inputs*) para produzir múltiplos produtos (*outputs*). Essas entidades podem ser da mais diversa natureza (empresarial, governamental e social) e são, por isso, normalmente designadas de DMUs (*Decision Making Units*)

Desde que foi introduzida por Charnes, Cooper e Rhodes (1978), a metodologia DEA tem sido objeto de grande desenvolvimento como mostram os milhares de artigos publicados sobre este tema. Em Emrouznejad e Yang (2018), num trabalho de pesquisa e análise sobre os primeiros 40 anos de literatura académica da DEA, entre 1978 e 2016, refere-se que nesse período foram publicados 10300 artigos sobre o tema. Neste artigo, menciona-se ainda que o maior crescimento ocorreu a partir do ano 2004 com uma média de publicação de 680 artigos por ano e com uma tendência, nos últimos quatro anos desse período, de cerca de 1000 artigos por ano. Um outro estudo, relativo ao período de 1978 a 2010, onde é feita a distinção entre publicações puramente metodológicas e publicação com aplicações ao mundo real, foi apresentado por Lui, Lu, Lu e Lin (2013). Estes autores referem que cerca de 60% dos artigos publicados incluem uma aplicação real e que, a partir de 2002, o número acumulado de artigos com aplicações reais superou o número acumulado de artigos puramente metodológicos que dominaram os primeiros 20 anos de existência da DEA.

Na forma tradicional da DEA, cada DMU escolhe o conjunto de pesos não negativos que permite determinar a sua eficiência sob a condição de que esses pesos, quando aplicados a cada uma das DMUs, não permitem que as mesmas obtenham um índice de eficiência superior a 1. Por outras palavras, cada DMU escolhe o conjunto de pesos que lhe é mais favorável, pelo que a eficiência é obtida a partir de um ponto de vista otimista.

A flexibilidade de cada DMU poder escolher os pesos que lhe são mais favoráveis revela-se uma vantagem da DEA na identificação das DMUs que são não eficientes. Por outro lado, tal flexibilidade permite que várias DMUs sejam classificadas como eficientes. Em muitas situações, para além da classificação das DMUs em eficientes e não eficientes, o decisor está mais interessado em obter um *ranking* completo das DMUs em avaliação, como se refere em Alder *et al.* (2002). Para obter tal *ranking*, várias classes de modelos e métodos têm sido propostas (ver, por exemplo, Aldamak e Zolfaghari (2017)). Uma dessas classes recorre à eficiência obtida a partir de um ponto de vista pessimista e é designada como a da fronteira ineficiente.

Na eficiência obtida a partir de um ponto de vista pessimista, cada DMU escolhe um conjunto de pesos que lhe é mais desfavorável, isto é, um conjunto de pesos que permite determinar a sua eficiência sob a condição de que quando aplicados a cada uma das DMUs não permitem que as mesmas obtenham um índice de eficiência inferior a 1.

As eficiências otimista e pessimista correspondem a dois pontos de vista extremos pelo que quando usadas separadamente conduzem a uma avaliação enviesada. Contudo, o uso conjunto dos dois tipos de eficiência permite não só obter um *ranking* das DMUs, mas também uma avaliação mais realista da sua *performance*.

Para além deste capítulo de introdução, esta dissertação contempla mais quatro capítulos. O capítulo 2, em que é apresentado um estudo sobre eficiência otimista e eficiência pessimista, com ênfase nos modelos que permitem obter os índices para esses dois tipos de eficiência. Neste capítulo, são também apontadas as diferenças entre as eficiências otimista e pessimista, assim como as vantagens que advêm da utilização conjunta desses dois tipos de eficiência. O capítulo 3, em que são apresentados alguns modelos e métodos que usam os dois tipos de eficiência para estabelecer *rankings* entre as DMUs em avaliação. O capítulo 4, em que são usados alguns dos modelos e métodos descritos nos capítulos 2 e 3 para avaliar a *performance* e estabelecer um *ranking* para 19 instituições bancárias que operavam em Portugal no ano de 2018. Neste capítulo, para além de se apresentarem os resultados obtidos é também feita uma análise a esses resultados. Finalmente, o capítulo 5, onde são apresentadas algumas conclusões sobre o trabalho desenvolvido.

2. Eficiência otimista e eficiência pessimista na DEA

2.1 Introdução

A metodologia DEA tem por objetivo avaliar a eficiência relativa de um conjunto de entidades homogêneas e independentes (DMUs) que usam o mesmo tipo de *inputs* para produzir o mesmo tipo de *outputs*. Essa eficiência é calculada usando rácios entre a soma ponderada dos *outputs* e a soma ponderada dos *inputs*. Os *inputs* e *outputs* usados pelas DMUs a avaliar podem também usar diferentes unidades de medida. Trata-se de uma técnica não paramétrica baseada na programação matemática, mais concretamente na programação linear, constituindo assim uma importante aplicação da mesma.

A principal ideia da DEA é identificar a fronteira de produção (empírica), sobre a qual as DMUs são consideradas eficientes, e de seguida comparar as DMUs que não estão nessa fronteira com DMUs que estão para estimar o seu índice de eficiência (Shen, Zhang, Liu & Yang, 2016). Para além de estabelecer um índice de eficiência para cada DMU e de permitir diferenciar as DMUs eficientes das não eficientes, permite ainda, para estas últimas, determinar as DMUs que são referência para que as mesmas se tornem eficientes.

Tradicionalmente, a DEA calcula a eficiência relativa de cada DMU de um ponto de vista otimista, isto é, cada DMU escolhe um conjunto de pesos mais favoráveis que permitem maximizar a sua eficiência. A eficiência medida desta forma é designada de melhor eficiência relativa ou eficiência otimista. Os modelos que permitem determinar este tipo de eficiência possibilitam também determinar uma fronteira de eficiência, em que as DMUs que estão nessa fronteira são consideradas eficientes ou eficientes otimistas, enquanto as que não estão são consideradas não eficientes ou não eficientes otimistas. Do ponto de vista otimista, é usualmente entendido que DMUs que são eficientes têm melhor *performance* do que as não eficientes.

No contexto da DEA, a eficiência relativa de um conjunto de DMUs pode também ser medida do ponto de vista pessimista, isto é, cada DMU escolhe um conjunto de pesos mais desfavoráveis que permitem minimizar a sua eficiência. A eficiência medida desta maneira é referida como a pior eficiência ou eficiência pessimista. Os modelos que permitem determinar este tipo de eficiência possibilitam também determinar uma fronteira de ineficiência ou anti-fronteira, em que as DMUs que estão nessa fronteira são consideradas ineficientes ou ineficientes pessimistas enquanto as que não estão são consideradas não

ineficientes ou não ineficientes pessimistas. Do ponto de vista pessimista, é usualmente entendido que DMUs que são ineficientes têm pior *performance* do que as não ineficientes.

As eficiências otimista e pessimista podem ser vistas como duas medidas de eficiência realizadas em escalas diferentes. A medida de eficiência otimista como uma medida na escala de 0 a 1 e a medida de eficiência pessimista como uma medida na escala de maior ou igual a 1. Deste modo, estas duas medidas não são comparáveis e qualquer avaliação que considere apenas uma delas resulta numa avaliação enviesada. Contudo, quando usadas conjuntamente, permitem obter informação importante para diferenciar as DMUs com igual índice de eficiência obtido do ponto de vista otimista.

Neste capítulo, apresentam-se os modelos clássicos ou modelos otimistas da DEA e os modelos pessimistas baseados nos modelos clássicos. Assim, na secção 2.2, são apresentados os modelos clássicos CCR e BCC propostos por Charnes, Cooper e Rhodes (1978) e por Banker, Charnes e Cooper (1984), respetivamente. Na secção 2.3, apresentam-se os modelos pessimistas baseados nos modelos clássicos. Na secção 2.4, ilustram-se, através de um exemplo, as diferenças entre as eficiências otimista e pessimista e as vantagens que se conseguem quando os dois tipos de eficiência são considerados conjuntamente, nomeadamente para discriminar DMUs que não é possível discriminar quando se utiliza apenas um ponto de vista.

2.2 Modelos clássicos ou modelos de eficiência otimista

O primeiro modelo, com o qual se iniciou formalmente a metodologia DEA, foi proposto por Charnes, Cooper e Rhodes (1978) e daí designado de modelo CCR. Este modelo contempla retornos constantes de escala, isto é, qualquer variação nos *inputs* produz uma variação proporcional nos *outputs*, pelo que é também designado por modelo CRS (*Constant Returns to Scale*). Mais tarde, Banker, Cooper e Charnes (1984) propuseram uma extensão do modelo CCR que contempla retornos variáveis de escala, isto é, uma variação nos *inputs* produz uma variação maior ou menor do que o proporcional nos *outputs*, permitindo que DMUs com baixos valores de *inputs* tenham retornos crescentes de escala e DMUs com altos valores de *inputs* tenham retornos decrescentes de escala. Tal modelo é designado na literatura por modelo BCC ou, ainda, por modelo VRS (*Variable Returns to Scale*). Estes dois modelos são conhecidos na literatura da DEA por modelos clássicos ou modelos tradicionais desta metodologia e calculam a eficiência de um ponto de vista otimista, sendo por isso modelos de eficiência otimista.

Cada um destes modelos pode ser orientado para *inputs* ou para *outputs*. No primeiro caso, a eficiência é atingida minimizando os *inputs* e mantendo um determinado nível de *outputs*. No segundo, a eficiência é atingida maximizando os *outputs* sem aumentar o nível de *inputs*. A seleção dos modelos quanto à sua orientação depende, em geral, do controlo que o decisor tem sobre os *inputs* e *outputs* e do contexto económico.

Para descrever matematicamente os modelos de eficiência otimista, e também pessimista, considere-se que existem n DMUs homogéneas que se pretendem avaliar e que cada DMU utiliza m *inputs* para produzir s *outputs*. Mais especificamente, cada DMU _{j} ($j=1,\dots,n$) utiliza a quantidade X_{ij} do *input* i ($i=1,\dots,m$) para produzir a quantidade Y_{rj} do *output* r ($r=1,\dots,s$). Assume-se, ainda, que $X_{ij} \geq 0$, $Y_{rj} \geq 0$, ($i=1,\dots,m$; $r=1,\dots,s$; $j=1,\dots,n$), e que para cada DMU existe, pelo menos, um *input* e um *output* com valores positivos. Para além dos dados descritos anteriormente, considerem-se as variáveis de decisão, não negativas, v_i ($i=1,\dots,m$) e u_r ($r=1,\dots,s$) que representam os pesos associados aos *inputs* e aos *outputs*, respetivamente.

2.2.1 Modelos orientados para *inputs*

Como se referiu anteriormente, nos modelos orientados para *inputs* pretende-se minimizar os *inputs* mantendo um determinado nível de *outputs*, pelo que a eficiência é atingida através da redução dos *inputs*. Na forma fracionária, o modelo CCR orientado para *inputs*, que permite medir a eficiência relativa da DMU _{k} ($k \in \{1,\dots,n\}$), é dado pelo seguinte modelo de programação linear fracionária:

$$\max \theta_k = \frac{\sum_{r=1}^s Y_{rk} u_r}{\sum_{i=1}^m X_{ik} v_i} \quad (2.1a)$$

$$s. a. \quad \frac{\sum_{r=1}^s Y_{rj} u_r}{\sum_{i=1}^m X_{ij} v_i} \leq 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.1b)$$

$$v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (2.1c)$$

$$u_r \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (2.1d)$$

Neste modelo, o valor da eficiência da DMU_k, θ_k^* , é obtido através da maximização do quociente entre a soma ponderada dos *outputs* e a soma ponderada dos *inputs* dessa DMU sujeito a que tal quociente é inferior ou igual a 1 para cada uma das DMUs, incluindo a DMU em avaliação. Então, a DMU_k ($k \in \{1, \dots, n\}$) em avaliação escolhe o conjunto de pesos (não negativos) associados aos *inputs* e aos *outputs* da forma que lhe for mais favorável, desde que quando aplicados a cada uma das DMUs não permite obter um quociente superior a 1. A eficiência é então medida de um ponto de vista otimista e o seu valor é sempre inferior ou igual a 1.

Como já foi referido, o modelo (2.1) é um modelo de programação linear fracionária que admite um número infinito de soluções ótimas, uma vez que se (u^*, v^*) é solução ótima então $(\alpha u^*, \alpha v^*)$ é também solução ótima, para todo $\alpha > 0$, como se refere, por exemplo, em Cooper, Seiford e Zhu (2011). Contudo, através da transformação de Charnes e Cooper (1962) para problemas de programação fracionária, é possível selecionar uma dessas soluções e obter um modelo de programação linear equivalente. Assim, igualando a 1 o denominador da função objetivo (2.1a), obtém-se o seguinte modelo de programação linear:

$$\max \theta_k = \sum_{r=1}^s Y_{rk} u_r \quad (2.2a)$$

$$s. a. \quad \sum_{i=1}^m X_{ik} v_i = 1 \quad (2.2b)$$

$$\sum_{r=1}^s Y_{rj} u_r - \sum_{i=1}^m X_{ij} v_i \leq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.2c)$$

$$v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (2.2d)$$

$$u_r \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (2.2e)$$

Este modelo é conhecido como modelo CCR, orientado para *inputs*, na forma dos multiplicadores, cuja solução ótima fornece os pesos (não negativos) associados aos *inputs* e aos *outputs*, os quais permitem obter o valor da eficiência para a DMU_k, dado pelo correspondente valor ótimo, θ_k^* .

O modelo (2.2) permite determinar o índice de eficiência assim como o contributo de cada *input* e de cada *output* para a formação desse índice. Mais informação relevante pode ser obtida através do correspondente modelo dual. Considerando a variável real δ_k^* associada à restrição (2.2b) e as variáveis não negativas λ_j ($j = 1, \dots, n$) associadas às n restrições (2.2c), tal modelo é dado por:

$$\delta_k^* = \min \delta_k \quad (2.3a)$$

$$s. a. \sum_{j=1}^n X_{ij} \lambda_j \leq X_{ik} \delta_k \quad i = 1, \dots, m \quad (2.3b)$$

$$\sum_{j=1}^n Y_{rj} \lambda_j \geq Y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (2.3c)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.3d)$$

$$\delta_k \in \mathbb{R} \quad (2.3e)$$

O modelo (2.3) é designado na literatura da DEA por modelo CCR, orientado para *inputs*, na forma do envelope. Da teoria da dualidade sabe-se que o valor da solução ótima deste modelo é igual ao valor da solução ótima do modelo (2.2), isto é, $\theta_k^* = \delta_k^*$. Então δ_k^* fornece o índice de eficiência da DMU_k e indica, no caso de essa DMU ser não eficiente, o valor pelo qual os seus *inputs* devem ser multiplicados de modo a que a mesma se torne eficiente, provocando assim uma redução no valor dos seus *inputs*. As restrições (2.3b) garantem que essa redução não ultrapassa a fronteira definida pelas DMUs eficientes, enquanto as restrições (2.3c) garantem que tal redução não implica uma redução nos *outputs* da DMU_k, isto é, da DMU em avaliação. As restrições (2.3d) e (2.3e) indicam a natureza das variáveis.

Se $\theta_k^* = 1$ e os pesos são positivos, ou equivalentemente, através das condições de complementaridade, $\delta_k^* = 1$ e todas as variáveis de desvio nas restrições (2.3b) e (2.3c) são iguais a zero, a DMU_k é considerada eficiente ou eficiente otimista; caso contrário é considerada não eficiente ou não eficiente otimista e será tanto mais não eficiente quanto menor for o valor de θ_k^* ou δ_k^* .

Na solução ótima do modelo (2.3), os valores de λ_j^* permitem ainda obter informação quanto ao conjunto das DMUs que são referência para que uma DMU_k não eficiente se torne eficiente. Tal conjunto, normalmente designado por R_k , é chamado de conjunto de referência da DMU_k e é constituído pelas DMUs correspondentes aos valores positivos de λ_j^* , isto é,

$$R_k = \{j : \lambda_j^* > 0\} \quad (2.4)$$

O conjunto de referência pode ser constituído por uma ou mais DMUs. Quando é constituído por mais do que uma DMU, a comparação dos valores de λ_j^* permite identificar a importância das correspondentes DMUs para que a DMU_k se torne eficiente. Assim, uma DMU_j será tanto mais importante para que uma DMU_k não eficiente se torne eficiente quanto maior for o valor de λ_j^* . Claramente que no caso de uma DMU_k ser eficiente tem-se $R_k = \{k\}$.

Para além da informação descrita anteriormente, a forma do envelope permite ainda determinar facilmente o intervalo de variação para o índice de eficiência, isto é, permite determinar que $\delta_k^* \in]0, 1]$, como se mostra em Cooper *et al.* (2007).

O conjunto das soluções admissíveis do modelo do envelope define o conjunto de possibilidades de produção, isto é, o conjunto $T = \{y : x \text{ pode produzir } y\}$. Neste caso, considerando o modelo CCR orientado para *inputs*, tal conjunto é dado por

$$T_{CCR-I} = \left\{ (X, Y) : X \geq \sum_{j=1}^n X_j \lambda_j, Y \leq \sum_{j=1}^n Y_j \lambda_j, \lambda_j \geq 0 (j = 1, \dots, n) \right\} \quad (2.5)$$

em que (X, Y) representa uma atividade, isto é, um par de vetores de *inputs* $X \in \mathbb{R}^m$ e *outputs* $Y \in \mathbb{R}^s$ admissíveis, e em que $X_j = [X_{1j} \ X_{2j} \ \dots \ X_{mj}]^T$ e $Y_j = [Y_{1j} \ Y_{2j} \ \dots \ Y_{sj}]^T$ representam os vetores de *inputs* e *outputs* da DMU_j.

O modelo BCC orientado para *inputs* que considera retornos variáveis de escala, substitui o axioma da proporcionalidade pelo axioma da convexidade. A forma do envelope desse modelo é obtida da correspondente forma do modelo CCR por inclusão da restrição

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \quad (2.6)$$

que conjuntamente com $\lambda_j \geq 0$ ($j=1, \dots, n$) definem a condição de convexidade. Neste caso, o conjunto de possibilidades de produção é dado por

$$T_{BCC-I} = \left\{ (X, Y): X \geq \sum_{j=1}^n X_j \lambda_j, Y \leq \sum_{j=1}^n Y_j \lambda_j, \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0 (j=1, \dots, n) \right\} \quad (2.7)$$

A inclusão da restrição (2.6) na forma do envelope do modelo CCR orientado para *inputs* corresponde a adicionar uma variável real na função objetivo (2.2a) e no primeiro membro das restrições (2.2c) na forma dos multiplicadores deste modelo. Designando essa variável por u^k , a forma dos multiplicadores do modelo BCC orientado para *inputs*, obtém-se da correspondente forma do modelo CCR orientado para *inputs* substituindo a função objetivo (2.2a) por

$$\max \theta_k = \sum_{r=1}^s Y_{rk} u_r + u^k \quad (2.2a')$$

e as restrições (2.2c) por

$$\sum_{r=1}^s Y_{rj} u_r - \sum_{i=1}^m X_{ij} v_i + u^k \leq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.2c')$$

Claramente que a forma fracionária do modelo BCC orientado para *inputs* é obtida da mesma forma do correspondente modelo CCR substituindo a função objetivo (2.1a) por

$$\max \theta_k = \frac{\sum_{r=1}^s Y_{rk} u_r + u^k}{\sum_{i=1}^m X_{ik} v_i} \quad (2.1a')$$

e as restrições (2.1b) por

$$\frac{\sum_{r=1}^s Y_{rj} u_r + u^k}{\sum_{i=1}^m X_{ij} v_i} \leq 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.1b')$$

Nestas duas últimas formas do modelo BCC deve ainda ser incluída a restrição que indica a natureza da variável u^k , isto é, a restrição

$$u^k \in \mathbb{R} \quad (2.8)$$

A variável u^{k*} , que pode assumir um valor positivo, negativo ou nulo, indica o tipo de retorno de escala em que a DMU_k opera. Assim, se $u^{k*} > 0$, então a referida DMU_k opera sob retorno crescente de escala; se $u^{k*} < 0$, então a DMU_k opera sob retorno decrescente de escala; por fim, se $u^{k*} = 0$, então a DMU_k opera sob retorno constante de escala.

2.2.2 Modelos orientados para *outputs*

Nos modelos orientados para *outputs*, o objetivo é maximizar os *outputs* sem que isso implique qualquer aumento no nível dos *inputs*. Na forma fracionária, o modelo CCR orientado para *outputs* é dado pelo seguinte modelo:

$$\min \rho_k = \frac{\sum_{i=1}^m X_{ik} v_i}{\sum_{r=1}^s Y_{rk} u_r} \quad (2.9a)$$

$$s. a. \quad \frac{\sum_{i=1}^m X_{ij} v_i}{\sum_{r=1}^s Y_{rj} u_r} \geq 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.9b)$$

$$v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (2.9c)$$

$$u_r \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (2.9d)$$

Neste modelo, o objetivo é determinar os pesos (não negativos) associados aos *inputs* e aos *outputs* que minimizam o quociente entre a soma ponderada dos *inputs* e a soma ponderada dos *outputs*, sujeito à condição de que quando aplicados a cada uma das DMUs esse quociente é superior ou igual a 1 para cada uma das DMUs, incluindo a DMU em avaliação. Note-se que neste caso, por via dessa condição, expressa em (2.9b), o valor de ρ_k^* é sempre maior ou igual a 1.

Recorrendo novamente à transformação proposta por Charnes e Cooper (1962), o modelo anterior pode ser linearizado, à semelhança do que foi feito para a versão orientada para *inputs*. Assim, igualando a 1 o denominador da função objetivo (2.9a), o modelo anterior pode ser transformado no seguinte modelo de programação linear:

$$\min \rho_k = \sum_{i=1}^m X_{ik} v_i \quad (2.10a)$$

$$s. a. \quad \sum_{r=1}^s Y_{rk} u_r = 1 \quad (2.10b)$$

$$\sum_{i=1}^m X_{ij} v_i - \sum_{r=1}^s Y_{rj} u_r \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.10c)$$

$$v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (2.10d)$$

$$u_r \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (2.10e)$$

Este modelo é conhecido por modelo CCR orientado para *outputs* na forma dos multiplicadores. Associando a variável real π_k à restrição (2.10b) e as variáveis não negativas μ_j ($j = 1, \dots, n$) às n restrições (2.10c) deste modelo, obtém-se o correspondente modelo dual, dado por:

$$\pi_k^* = \max \pi_k \quad (2.11a)$$

$$s. a. \quad \sum_{j=1}^n X_{ij} \mu_j \leq X_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad (2.11b)$$

$$\sum_{j=1}^n Y_{rj} \mu_j \geq Y_{rk} \pi_k \quad r = 1, \dots, s \quad (2.11c)$$

$$\mu_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.11d)$$

$$\pi_k \in \mathbb{R} \quad (2.11e)$$

O modelo (2.11) é designado por forma do envelope do modelo CCR orientado para *outputs*. Neste modelo, π_k^* indica o valor pelo qual os *outputs* de uma DMU_k não eficiente, devem ser multiplicados por forma a que essa DMU se torne eficiente, produzindo, assim, um aumento no valor dos *outputs*. As restrições (2.11b) garantem, respetivamente, que tal aumento não produz qualquer aumento no valor dos *inputs*, enquanto as restrições (2.11c) garantem que esse aumento não ultrapassa a fronteira de eficiência, definida pelas DMUs eficientes.

Atendendo a este caso, tem-se $\pi_k^* \geq 1$, ou equivalentemente $\rho_k^* \geq 1$, uma vez que da teoria da dualidade tem-se $\pi_k^* = \rho_k^*$, o índice de eficiência otimista é dado por $1/\pi_k^*$, ou equivalentemente, por $1/\rho_k^*$, garantindo-se que esse índice pertence ao intervalo]0,1], isto é, a eficiência otimista é medida numa escala de 0 a 1. Se $\pi_k^* = 1$ e todas as variáveis de desvio nas restrições (2.11b) e (2.11c) são iguais a zero, ou equivalentemente, através das condições de complementaridade forte, $\rho_k^* = 1$ com os correspondentes pesos positivos, a DMU_k é considerada eficiente ou eficiente otimista; caso contrário é considerada não eficiente ou não eficiente otimista e será tanto mais não eficiente quanto maior for o valor de π_k^* ou ρ_k^* .

Ainda relativamente à solução ótima do modelo (2.11), os valores de μ_j^* permitem obter o mesmo tipo de informação fornecido pelos valores de λ_j^* na versão orientada para *inputs*, isto é, permitem determinar as $DMUs$ que são referência para que uma DMU_k não eficiente se torne eficiente e, conseqüentemente, determinar o conjunto de referência da DMU_k .

Similarmente ao que acontece na versão orientada para *inputs*, a forma do envelope do modelo BCC orientado para *outputs* é obtida da correspondente forma do modelo CCR orientado para *outputs*, introduzindo a restrição

$$\sum_{j=1}^n \mu_j = 1 \quad (2.12)$$

A introdução desta restrição equivale a adicionar uma variável real na função objetivo (2.10a) e no primeiro membro das restrições (2.10c) na forma dos multiplicadores do modelo CCR orientado para *outputs*. Designando agora essa variável por v^k , a forma dos multiplicadores do modelo BCC orientado para *outputs*, obtém-se da correspondente forma do modelo CCR orientado para *outputs* substituindo a função objetivo (2.10a) por

$$\min \rho_k = \sum_{i=1}^m X_{ik} v_i + v^k \quad (2.10a')$$

e as restrições (2.10c) por

$$\sum_{i=1}^m X_{ij} v_i - \sum_{r=1}^s Y_{rj} u_r + v^k \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.10c')$$

Por fim, a forma fracionária do modelo BCC orientado para *outputs* é obtida da correspondente forma do modelo CCR orientado para *outputs*, substituindo a função objetivo (2.9a) por

$$\min \rho_k = \frac{\sum_{i=1}^m X_{ik} v_i + v^k}{\sum_{r=1}^s Y_{rk} u_r} \quad (2.9a')$$

e as restrições (2.9b) por

$$\frac{\sum_{i=1}^m X_{ij} v_i + v^k}{\sum_{r=1}^s Y_{rj} u_r} \geq 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.9 b')$$

Nestes dois últimos modelos deve ainda ser incluída a restrição

$$v^k \in \mathbb{R} \quad (2.13)$$

que indica a natureza da variável v^k .

O valor desta variável na solução ótima, v^{k*} , fornece o mesmo tipo de informação que a variável u^{k*} na versão orientada para *inputs*, isto é, indica o tipo de retorno de escala em que a DMU_k opera. Contudo, neste caso, se $v^{k*} > 0$, então a DMU_k opera sob retorno decrescente de escala; se $v^{k*} < 0$ então a DMU_k opera sob retorno crescente de escala; por fim, se $v^{k*} = 0$ então a DMU_k opera sob retorno constante de escala.

Também nesta versão, e de modo idêntico ao que foi feito na versão orientada para *inputs*, o conjunto das soluções admissíveis de cada um dos modelos CCR e BCC, na forma do envelope, permite definir o conjunto de possibilidades de produção considerando cada um daqueles modelos.

Relativamente ao modelo CCR, tem-se que o índice de eficiência fornecido pela versão orientada para *outputs* é o mesmo que o fornecido pela versão orientada para *inputs*, apesar de as soluções ótimas dessas versões serem diferentes, quer na forma dos multiplicadores quer na forma do envelope, como se mostra em Cooper, Seiford e Tone (2007). Estes autores mostram ainda como obter a solução ótima de uma das versões conhecida a solução ótima da outra versão, tanto na forma dos multiplicadores como na forma do

envelope. Note-se que esta igualdade de índices se verifica quando a eficiência para ambas as versões é medida na mesma escala, usualmente de 0 a 1. Se na versão orientada para *inputs* for usada a escala de 0 a 1 e na versão orientada para *outputs* for usada a escala maior ou igual a 1, esses índices serão obviamente inversos um do outro.

2.3 Modelos de eficiência pessimista

Como se referiu anteriormente, os modelos clássicos medem a eficiência relativa de um conjunto de DMUs procurando o conjunto de pesos mais favoráveis para cada DMU, isto é, usando um ponto de vista otimista. A eficiência obtida desta forma é a melhor eficiência relativa ou eficiência otimista. Uma outra forma de medir tal eficiência é, contrariamente ao que acontece com os modelos otimistas, procurar o conjunto de pesos menos favoráveis, ou mais desfavoráveis, para cada DMU, isto é, usando um ponto de vista pessimista. Neste caso, a eficiência obtida é chamada de pior eficiência relativa ou eficiência pessimista. Nesta secção apresentam-se os modelos de eficiência pessimista baseados nos modelos clássicos, apresentados na secção anterior.

2.3.1 Modelos orientados para *inputs*

Yamada, Matsui e Sugiyama (1994), num artigo escrito em japonês, foram os primeiros a propor uma forma pessimista de avaliar DMUs, que designaram de DEA invertida (IDEA), como se refere, por exemplo, em Aldamak e Zolfaghari (2017). O conceito subjacente à IDEA é o de inverter o modelo CCR e, no caso da versão orientada para *inputs*, maximizar o quociente entre a soma ponderada dos *inputs* e a soma ponderada dos *outputs* sujeito à condição de que um tal quociente é sempre menor ou igual a 1 para cada uma das DMUs em avaliação. Assim, com base na forma fracionária do modelo CCR orientado para *inputs*, apresentado anteriormente, tem-se o seguinte modelo fracionário de avaliação pessimista:

$$\max \varphi_k = \frac{\sum_{i=1}^m X_{ik} v_i}{\sum_{r=1}^s Y_{rk} u_r} \quad (2.13a)$$

$$s. a. \quad \frac{\sum_{i=1}^m X_{ij} v_i}{\sum_{r=1}^s Y_{rj} u_r} \leq 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.13b)$$

$$v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (2.13c)$$

$$u_r \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (2.13d)$$

À semelhança do que acontece com o modelo CCR, este modelo pode também ser transformado no seguinte modelo de programação linear, através da transformação proposta por Charnes e Cooper (1962):

$$\max \varphi_k = \sum_{i=1}^m X_{ik} v_i \quad (2.14a)$$

$$s. a. \sum_{r=1}^s Y_{rk} u_r = 1 \quad (2.14b)$$

$$\sum_{i=1}^m X_{ij} v_i - \sum_{r=1}^s Y_{rj} u_r \leq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.14c)$$

$$v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (2.14d)$$

$$u_r \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (2.14e)$$

Como se refere, por exemplo, em Wang, Chin e Yang (2007), a medida da eficiência, sendo uma medida relativa, pode ser calculada em diferentes escalas. O modelo clássico CCR orientado para *inputs* mede a eficiência otimista de uma DMU por maximização na escala de menor ou igual a 1. Se, considerando a mesma orientação, a eficiência de uma DMU é medida por minimização numa escala de maior ou igual a 1 então obtém-se a eficiência pessimista.

Neste contexto, a eficiência pessimista de uma DMU_k pode também ser obtida, de modo equivalente, através do seguinte modelo baseado no modelo CCR orientado para *inputs*, proposto por Parkan e Wang (2000) e que será, ao longo deste trabalho, denotado por forma fracionária do modelo CCR invertido orientado para *inputs*.

$$\min \varphi_k = \frac{\sum_{r=1}^s Y_{rk} u_r}{\sum_{i=1}^m X_{ik} v_i} \quad (2.15a)$$

$$s. a. \quad \varphi_j = \frac{\sum_{r=1}^s Y_{rj} u_r}{\sum_{i=1}^m X_{ij} v_i} \geq 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.15b)$$

$$v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (2.15c)$$

$$u_r \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (2.15d)$$

Neste modelo, a eficiência da DMU_k é obtida através da minimização do quociente entre a soma ponderada dos *outputs* e a soma ponderada dos *inputs* dessa DMU sujeito a que tal quociente é não inferior a 1. A eficiência é então medida numa escala de maior ou igual a 1, isto é, o seu valor é sempre maior ou igual a 1.

Usando novamente a transformação de Charnes e Cooper (1962), o modelo anterior pode ser transformado no seguinte modelo de programação linear, que constitui a forma dos multiplicadores do modelo CCR invertido orientado para *inputs*.

$$\min \varphi_k = \sum_{r=1}^s Y_{rk} u_r \quad (2.16a)$$

$$s. a. \quad \sum_{i=1}^m X_{ik} v_i = 1 \quad (2.16b)$$

$$\sum_{r=1}^s Y_{rj} u_r - \sum_{i=1}^m X_{ij} v_i \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.16c)$$

$$v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (2.16d)$$

$$u_r \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (2.16e)$$

Se existe um conjunto de pesos positivos que permitem obter $\varphi_k^* = 1$, então a DMU_k é considerada eficiente ou eficiente pessimista; caso contrário, é considerada não eficiente ou não eficiente pessimista. Obviamente que ser não eficiente do ponto de vista pessimista não significa necessariamente que seja eficiente do ponto de vista otimista.

Associando a variável ψ_k à restrição (2.16b) e as variáveis λ_j ($j = 1, \dots, n$) às restrições (2.16c) do modelo anterior obtém-se o modelo dual do modelo anterior, dado por:

$$\psi_k^* = \max \psi_k \quad (2.17a)$$

$$s. a. \sum_{j=1}^n X_{ij} \lambda_j \geq X_{ik} \psi_k \quad i = 1, \dots, m \quad (2.17b)$$

$$\sum_{j=1}^n Y_{rj} \lambda_j \leq Y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (2.17c)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.17d)$$

$$\psi_k \in \mathbb{R} \quad (2.17e)$$

O modelo anterior constitui a forma do envelope do modelo CCR invertido orientado para *inputs*. Recorrendo novamente à teoria da dualidade sabe-se que o valor da solução ótima deste modelo é igual ao valor da solução ótima do modelo (2.16), isto é, $\psi_k^* = \phi_k^*$. Então ψ_k^* é o índice de eficiência pessimista e indica o valor pelo qual os *inputs* de uma DMU não ineficiente devem ser multiplicados de modo a que esta se torne ineficiente, originando assim um aumento no valor dos seus *inputs*, uma vez que $\psi_k^* > 1$. As restrições (2.17b) garantem que esse aumento não ultrapassa a fronteira definida pelas DMUs ineficientes. Por sua vez, as restrições (2.17c) garantem que tal aumento não implica um aumento do nível dos *outputs* para a DMU_k em avaliação. As restrições (2.17d) e (2.17e) indicam a natureza das variáveis.

Através das condições de complementaridade, se $\psi_k^* = 1$ e todas as variáveis de desvio nas restrições (2.17b) e (2.17c) são iguais a zero, a DMU_k é considerada ineficiente ou ineficiente pessimista; caso contrário é considerada não ineficiente ou não ineficiente pessimista.

O conjunto das soluções admissíveis do modelo (2.17) define o conjunto de possibilidades de anti-produção que, recorrendo à notação usada para o caso dos modelos de eficiência otimista, é dado por

$$T_{CCRI-I} = \left\{ (\mathbf{X}, \mathbf{Y}): \sum_{j=1}^n \mathbf{X}_j \lambda_j \geq \mathbf{X}, \sum_{j=1}^n \mathbf{Y}_j \lambda_j \geq \mathbf{Y}, \lambda_j \geq 0 \ (j = 1, \dots, n) \right\} \quad (2.18)$$

À semelhança do que acontece no caso da eficiência otimista, o modelo BCC invertido orientado para *inputs*, na forma do envelope, é obtido da correspondente forma do modelo CCR invertido por inclusão da restrição

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \quad (2.19)$$

Neste caso, o conjunto de possibilidades de anti-produção é dado por

$$T_{BCCI-I} = \left\{ (\mathbf{X}, \mathbf{Y}): \sum_{j=1}^n \mathbf{X}_j \lambda_j \geq \mathbf{X}, \sum_{j=1}^n \mathbf{Y}_j \lambda_j \geq \mathbf{Y}, \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0 \ (j = 1, \dots, n) \right\} \quad (2.20)$$

A forma dos multiplicadores e a forma fracionária do modelo BBC invertido orientado para *inputs*, são obtidas das correspondentes formas do modelo CCR invertido orientado para *inputs* de modo idêntico ao que foi feito no caso da eficiência otimista.

Contrariamente ao que acontece com os modelos otimistas, que permitem obter uma fronteira de eficiência, os modelos pessimistas permitem obter uma fronteira de ineficiência ou de anti-eficiência. Enquanto a fronteira de eficiência é construída pelas DMUs que refletem a melhor prática, a fronteira de ineficiência é construída pelas DMUs que refletem a pior prática. A diferença entre estes dois tipos de fronteira é ilustrada, através de um exemplo, na próxima secção.

Tanto quanto se conhece da literatura da DEA, o modelo BCC invertido tem sido muito pouco usado na metodologia DEA. Shen, Zhang, Liu e Wang (2016) afirmam que é mais fiável usar o modelo CCR invertido do que o modelo BCC invertido, argumentando que a verdadeira fronteira de eficiência é côncava enquanto a fronteira estimada pelo modelo BCC é convexa e que este facto pode fazer com que DMUs com valores extremos de *inputs* estejam próximas da fronteira de anti-eficiência independentemente de estarem próximas, ou não, da verdadeira fronteira.

2.3.2 Modelos orientados para *outputs*

A versão orientada para *outputs* dos modelos clássicos invertidos pode também facilmente ser obtida a partir dos modelos clássicos orientados para *outputs*, à semelhança do que foi feito na subsecção anterior para obtenção da versão orientada para *inputs*. Assim, com base na forma fracionária do modelo CCR orientado para *outputs*, tem-se o seguinte modelo de eficiência pessimista, denotado por forma fracionária do modelo CCR invertido orientado para *outputs*:

$$\max \quad \phi_k = \frac{\sum_{i=1}^m X_{ik} v_i}{\sum_{r=1}^s Y_{rk} u_r} \quad (2.21a)$$

$$s. a. \quad \phi_j = \frac{\sum_{i=1}^m X_{ij} v_i}{\sum_{r=1}^s Y_{rj} u_r} \leq 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.21b)$$

$$v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (2.21c)$$

$$u_r \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (2.21d)$$

Usando novamente a transformação de Charnes e Cooper (1962), o modelo anterior pode ser transformado no seguinte modelo de programação linear, designado por forma dos multiplicadores do modelo CCR invertido orientado para *outputs*:

$$\max \quad \phi_k = \sum_{i=1}^m X_{ik} v_i \quad (2.22a)$$

$$s. a. \quad \sum_{r=1}^s Y_{rk} u_r = 1 \quad (2.22b)$$

$$\sum_{r=1}^s Y_{rj} u_r - \sum_{i=1}^m X_{ij} v_i \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.22c)$$

$$v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (2.22d)$$

$$u_r \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (2.22e)$$

Associando a variável τ_k à primeira restrição e as variáveis μ_j ($j = 1, \dots, n$) às segundas restrições obtém-se o modelo dual do modelo anterior, que constitui a forma do envelope do modelo CCR invertido orientado para *outputs*, dada por:

$$\tau_k^* = \min \tau_k \quad (2.23a)$$

$$s. a. \quad \sum_{j=1}^n X_{ij} \mu_j \geq X_{ik} \tau_k \quad i = 1, \dots, m \quad (2.23b)$$

$$\sum_{j=1}^n Y_{rj} \mu_j \leq Y_{rk} \tau_k \quad r = 1, \dots, s \quad (2.23c)$$

$$\mu_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.23d)$$

$$\pi_k \in \mathbb{R} \quad (2.23e)$$

Neste modelo, τ_k^* que, como se sabe da dualidade, é igual a ϕ_k^* , permite obter o índice de eficiência pessimista e indica o valor pelo qual os *outputs* de uma DMU_k não ineficiente devem ser multiplicados de modo a que esta se torne ineficiente, originando assim uma redução no valor dos seus *outputs*, uma vez que $\tau_k^* \leq 1$. As restrições (2.23b) garantem que essa redução não implica uma redução nos *inputs* da DMU_k. Por sua vez, as restrições (2.23c) garantem que tal redução não ultrapassa a fronteira de ineficiência. As restrições (2.23d) e (2.23e) indicam a natureza das variáveis.

Atendendo a que neste caso se tem $\tau_k^* \leq 1$, ou equivalentemente $\phi_k^* \leq 1$, o índice de eficiência pessimista é dado por $1/\tau_k^*$, ou equivalentemente, por $1/\phi_k^*$, garantindo-se que esse índice pertence ao intervalo $[1, +\infty[$, isto é, a eficiência pessimista é medida numa escala de maior ou igual a 1. Se $\tau_k^* = 1$ e todas as variáveis de desvio nas restrições (2.23b) e (2.23c) são iguais a zero, ou equivalentemente, através das condições de complementaridade forte, se $\phi_k^* = 1$ com os correspondentes pesos positivos, a DMU_k é considerada ineficiente ou ineficiente pessimista; caso contrário é considerada não ineficiente ou não ineficiente pessimista e será tanto mais não ineficiente quanto maior for o valor de τ_k^* ou ϕ_k^* .

O conjunto das soluções admissíveis deste último modelo permite definir o conjunto de possibilidades de anti-produção considerando o modelo CCR invertido orientado para *outputs*. Para o modelo BCC invertido orientado para *outputs*, esse conjunto assim como a forma do envelope são obtidos por inclusão da restrição

$$\sum_{j=1}^n \mu_j = 1 \quad (2.24)$$

As restantes formas do modelo BCC invertido com orientação para *outputs*, isto é, a forma dos multiplicadores e a forma fracionária, são obtidas das correspondentes formas do modelo CCR com a mesma orientação à semelhança do que foi feito para a versão orientada para *inputs* e também para os modelos otimistas, quer para a versão orientada para *inputs* quer para a versão orientada para *outputs*.

À semelhança do que acontece com a eficiência otimista, os índices de eficiência pessimista obtidos pelas versões orientadas para *inputs* e para *outputs* do modelo CCR invertido são iguais, quando medidos na mesma escala, usualmente na escala de maior ou igual a 1. Quando medidos em escalas diferentes, usualmente na escala de maior ou igual a 1 para a versão orientada para *inputs* e na escala de 0 a 1 na versão orientada para *outputs*, esses índices são inversos um do outro.

2.4 Eficiência otimista *versus* eficiência pessimista

Para ilustrar a diferença entre fronteira eficiente e fronteira ineficiente ou anti-eficiente assim como entre DMUs eficientes, não eficientes, ineficientes e não ineficientes, considere-se o exemplo que se segue.

Exemplo 2.1 Suponha-se que existem 10 DMUs que se pretendem avaliar e que cada uma delas utiliza dois *inputs* para produzir um *output*. Os dados relativos aos *inputs* e ao *output* de cada uma das DMUs, identificadas na coluna 1 da tabela 2.1, são apresentados nas colunas 2, 3 e 4 dessa tabela, onde os *outputs* são todos normalizados para o valor de um, por uma questão de simplicidade. Nas colunas 5 e 6 da tabela apresentam-se os valores das eficiências otimista e pessimista, respetivamente, para cada uma das DMUs, obtidos a partir do modelo CCR e CCR invertido, com orientação para *inputs*.

Tabela 2.1 – Dados para 10 DMUs com dois *inputs* e um *output*

DMU	<i>Input</i> 1	<i>Input</i> 2	<i>Output</i>	Eficiência otimista	Eficiência pessimista
A	1	7	1	1	1
B	2	4	1	1	1,6875
C	4	2	1	1	1,6111
D	7	1	1	1	1
E	6	5	1	0,5454	1
F	3	7	1	0,625	1
G	2	6	1	0,8333	1,1667
H	4	5	1	0,6667	1,1739
I	4	3	1	0,8571	1,5263
J	6	3	1	0,6667	1,0741

Fonte: Elaboração própria

Da observação dos resultados, verifica-se que existem quatro DMUs avaliadas como eficientes, ou eficientes otimistas, que são as DMUs A, B, C e D. Estas DMUs formam a

fronteira de eficiência ABCD como se pode verificar na figura 2.1. A *performance* destas quatro DMUs é considerada melhor do que a das outras seis que são classificadas como não eficientes do ponto de vista otimista. Note-se que não é possível estabelecer um *ranking*, em termos de superioridade de *performance*, para as DMUs eficientes assim como para as DMUs H e J. Tem-se então:

$$DMU_A \sim DMU_B \sim DMU_C \sim DMU_D \succ DMU_I \succ DMU_G \succ DMU_H \sim DMU_J \succ DMU_F \succ DMU_E,$$

onde o símbolo “~” significa “indiferente a” e o símbolo “>” significa “superior a”.

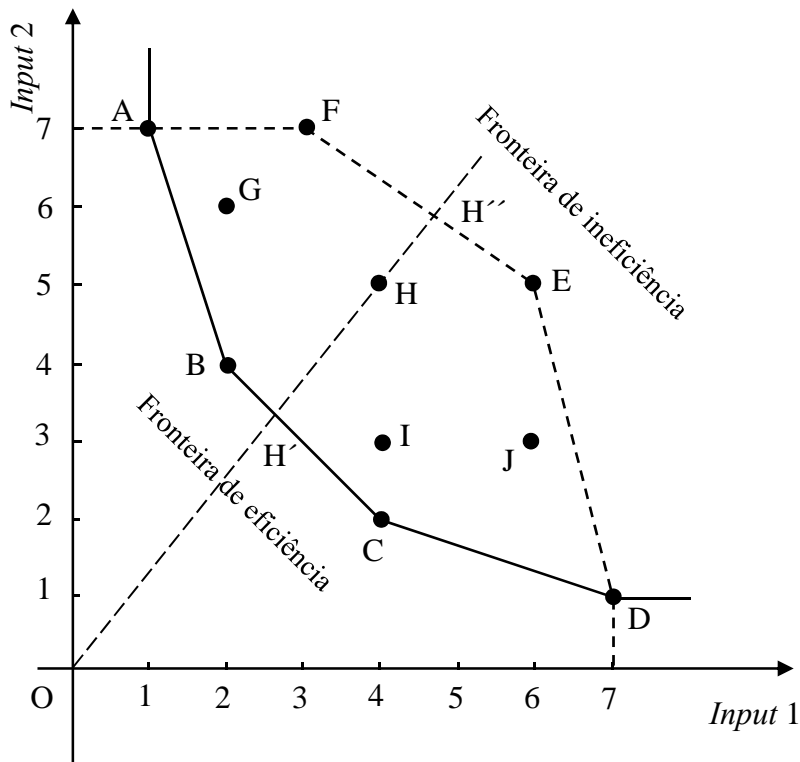


Figura 2.1 – Fronteiras de eficiência e ineficiência para as 10 DMUs do exemplo 2.1

Fonte: Adaptado de Wang, Chin e Yang (2007)

Do ponto de vista pessimista, verifica-se que existem quatro DMUs avaliadas como ineficientes pessimistas que são as DMUs A, F, E e D. Estas DMUs formam a fronteira de ineficiência (ou anti-eficiência) AFED como se pode observar também na figura 2.1. A *performance* destas DMUs é considerada pior do que a das restantes seis. Note-se que, neste caso, não é possível estabelecer um *ranking*, em termos de superioridade de *performance*, para as DMUs ineficientes, sendo-o, no entanto, possível para as restantes. Assim, tem-se:

$$DMU_B \succ DMU_C \succ DMU_I \succ DMU_H \succ DMU_G \succ DMU_J \succ DMU_A \sim DMU_D \sim DMU_E \sim DMU_F.$$

Uma DMU que não esteja na fronteira de eficiência nem na fronteira de ineficiência pode ser avaliada comparando-a com DMUs, reais ou não reais, situadas na fronteira de eficiência ou na fronteira de anti-eficiência. Por exemplo, a DMU H pode ser avaliada medindo a distância de H a H' ou de H a H'' usando a medida radial OH'/OH ou OH''/OH , respectivamente. No primeiro caso obtém-se o valor da eficiência otimista para a DMU H (0,6667) que indica o valor pelo qual os seus *inputs* devem ser multiplicados (reduzidos) para que se torne eficiente, isto é, para obter os *inputs* de H'. No segundo caso, obtém-se o valor da eficiência pessimista para essa DMU (1,1739) e indica o valor pelo qual os seus *inputs* devem ser multiplicados (aumentados) para que se torne ineficiente, isto é, para obter os *inputs* de H''.

As avaliações baseadas em pontos de vista diferentes podem conduzir a resultados diferentes e até contraditórios, como é o caso das DMUs A e D. Quando estas DMUs são avaliadas do ponto de vista otimista, são classificadas como eficientes otimistas, o que significa que a sua *performance* é melhor do que a de qualquer outra não eficiente. Contudo, quando são avaliadas do ponto de vista pessimista, são classificadas como ineficientes pessimistas, o que significa que a sua *performance* é pior do que a de qualquer outra não ineficiente. Portanto, qualquer avaliação realizada considerando apenas um ponto de vista é aparentemente irrealista e não convincente, como se refere em Wang, Chin e Yang (2007).

Da observação da tabela 2.2 e da figura 2.1 verifica-se que em relação às DMUs A, B, C e D, que estão na fronteira de eficiência, A e D podem ser consideradas piores, em termos de *performance*, do que as DMUs B e C uma vez que também estão na fronteira de ineficiência. Relativamente a estas duas últimas, verifica-se que a DMU B tem pior índice de ineficiência do que a DMU C o que significa que está mais afastada da fronteira de ineficiência e por isso tem melhor *performance*. Identicamente, para as DMUs H e J, verifica-se que têm o mesmo índice de eficiência otimista e que a DMU H tem maior índice de ineficiência do que a DMU J, o que significa que esta última está mais próxima da fronteira de ineficiência do que a primeira e, deste modo, pode considerar-se que a DMU H tem melhor *performance*.

A análise realizada anteriormente mostra que, considerando conjuntamente os dois pontos de vista, pode obter-se mais informação e aumentar o poder de discriminação entre as várias DMUs. Deste modo, alguns modelos e métodos para obter *rankings* baseados nas eficiências otimista e pessimista têm sido propostos na literatura. Um estudo sobre esses modelos e métodos será apresentado no próximo capítulo.

3. *Rankings* baseados nos pontos de vista otimista e pessimista

3.1 Introdução

Na metodologia DEA clássica, cada DMU tem a flexibilidade de selecionar os pesos que lhe são mais favoráveis de modo a obter o máximo índice de eficiência. Esta flexibilidade é uma vantagem, pois revela-se importante na identificação das DMUs não eficientes. Contudo, tal flexibilidade é também uma desvantagem por permitir a existência de várias DMUs classificadas como eficientes, reduzindo assim o poder de discriminação dos modelos clássicos, ou otimistas, da DEA. Esta desvantagem ocorre com frequência nomeadamente quando o número de DMUs é relativamente reduzido em relação ao número de *inputs* e *outputs*. Para a contornar, Cooper, Seiford e Tone (2007) sugerem que

$$n \geq \max \{m \times s, 3(m + s)\},$$

onde n é o número de DMUs, m e s são o número de *inputs* e de *outputs*, respetivamente.

Note-se que idênticas vantagem e desvantagem ocorrem em relação aos modelos baseados no ponto de vista pessimista. Neste caso, cada DMU tem a flexibilidade de selecionar os pesos que lhe são mais desfavoráveis, pelo que a mesma se revela importante na identificação das DMUs não ineficientes. Contudo, neste caso, essa flexibilidade permite um fraco poder de discriminação das DMUs ineficientes.

A falta de poder de discriminação dos modelos clássicos, ou otimistas, da DEA tem levado ao desenvolvimento de vários métodos e modelos de *ranking* de DMUs baseados em diferentes abordagens e técnicas. Adler, Friedman e Sinuany-Stern (2002) apresentam uma revisão dos métodos de *ranking* onde classificam esses métodos em seis categorias. Mais tarde, Aldamak e Zolfaghari (2017) apresentam também uma revisão desses métodos onde incluem mais quatro categorias, para além das seis apresentadas por Alder *et al.* (2002), classificando assim esses métodos em dez categorias. Uma dessas quatro categorias é designada como a da fronteira ineficiente e refere-se a métodos que utilizam ambos os pontos de vista, otimista e pessimista, para de seguida estabelecer um *ranking* entre as DMUs em avaliação.

As medidas de eficiência otimista e pessimista, apresentadas no capítulo anterior, quando analisadas separadamente são incomparáveis, uma vez que são medidas realizadas em diferentes escalas. Além disso, estas medidas correspondem a pontos de vista extremos,

pelo que qualquer avaliação baseada apenas em uma destas duas medidas conduz a uma avaliação enviesada.

De modo a obter-se uma avaliação global deve ter-se em consideração ambos os pontos de vista, otimista e pessimista. Nesse sentido, alguns trabalhos têm sido desenvolvidos por forma a integrar os dois tipos de eficiência. Tanto quanto se sabe, Doyle, Green e Cook (1995) e Entani, Maeda e Tanaka (2002) foram os primeiros a proporem um par de modelos, com estrutura similar, para obter a eficiência otimista e a eficiência pessimista que de seguida são utilizadas para construir um intervalo de eficiência para cada DMU. Wang, Chin e Yang (2007) estabelecem o *ranking* entre as várias DMUs calculando a média geométrica dos índices de eficiência otimista e pessimista. Azizi e Wang (2013) propuseram um par de modelos para determinar a eficiência otimista e pessimista que depois são usadas para obtenção dos intervalos de eficiência. Para estabelecer um *ranking* entre as DMUs, os autores recorrem ao método de arrependimento minimax, proposto por Wang, Greatbanks e Yang (2005), para ordenação desses intervalos. Shen, Zang, Liu e Yang (2016) apresentaram três abordagens intuitivas baseadas nas distâncias a ambas as fronteiras, eficiente e anti-eficiente, definindo para cada abordagem um indicador para agregar os valores das eficiências otimista e pessimista obtidos pelos modelos CCR e CCR invertido com orientação para *inputs*. Na realidade estes autores apresentam duas abordagens, uma vez que a terceira abordagem consiste em calcular a média geométrica proposta por Wang, Chin e Yang (2007).

Neste capítulo apresenta-se um estudo sobre os métodos e modelos referidos anteriormente com exceção dos modelos propostos por Doyle, Green e Cook (1995) por serem similares aos apresentados por Entani, Maeda e Tanaka (2002). Assim, na secção 3.2, apresentam-se os modelos propostos por Entani, Maeda e Tanaka (2002). Na secção 3.3, apresenta-se o método proposto por Wang, Chin e Yang (2007), enquanto na secção 3.4 são apresentados os modelos propostos por Azizi e Wang (2013). Finalmente, na secção 3.5, é apresentada a abordagem proposta por Shen, Zang, Liu e Yang (2016).

3.2 Modelos de Entani, Maeda e Tanaka (2002)

Para obter um intervalo de eficiência para cada DMU, Entani, Maeda e Tanaka (2002) propuseram um par de modelos que permitem determinar o limite superior e o limite inferior para aquele intervalo. Para a DMU_k, esse par de modelos é dado por:

$$\max / \min \theta_k = \frac{\sum_{r=1}^s Y_{rk} u_r / \sum_{i=1}^m X_{ik} v_i}{\max_j \left\{ \sum_{r=1}^s Y_{rj} u_r / \sum_{i=1}^m X_{ij} v_i \right\}} \quad (3.1a)$$

$$s. a. \quad v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.1b)$$

$$u_r \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.1c)$$

Assim, o limite superior do intervalo de eficiência para a DMU_k é então obtido através do modelo:

$$\max \theta_k^U = \sum_{r=1}^s Y_{rk} u_r / \sum_{i=1}^m X_{ik} v_i \quad (3.2a)$$

$$s. a. \quad \max_j \left\{ \sum_{r=1}^s Y_{rj} u_r / \sum_{i=1}^m X_{ij} v_i \right\} = 1 \quad (3.2b)$$

$$v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.2c)$$

$$u_r \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.2d)$$

Como se refere em Entani *et al.* (2002), o modelo anterior tem um conjunto de soluções admissíveis mais restrito do que o do modelo CCR orientado para *inputs*. No entanto, como os autores mostram, o valor da solução ótima é o mesmo em ambos os modelos, pelo que o limite superior do intervalo de eficiência pode ser obtido usando o modelo CCR orientado para *inputs*.

O limite inferior do intervalo de eficiência para a DMU_k é obtido através do seguinte modelo:

$$\min \theta_k^L = \sum_{r=1}^s Y_{rk} u_r / \sum_{i=1}^m X_{ik} v_i \quad (3.3a)$$

$$s. a. \quad \max_j \left\{ \sum_{r=1}^s Y_{rj} u_r / \sum_{i=1}^m X_{ij} v_i \right\} = 1 \quad (3.3b)$$

$$v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.3c)$$

$$u_r \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.3d)$$

Este modelo não pode ser transformado num modelo de programação linear. Assumindo que, para cada DMU eficiente do ponto de vista otimista, se verifica

$$\sum_{r=1}^s Y_{rj} u_r / \sum_{i=1}^m X_{ij} v_i = 1 \quad (3.4)$$

Entani *et al.* (2002) dividiram o modelo anterior em p submodelos de otimização ($j = J_1, \dots, J_p$) onde p é o número de DMUs eficientes do ponto de vista otimista e J_1, \dots, J_p são as DMUs que são eficientes otimistas.

$$\min \theta_{kj}^L = \sum_{r=1}^s Y_{rk} u_r / \sum_{i=1}^m X_{ik} v_i \quad (3.5a)$$

$$s. a. \quad \sum_{r=1}^s Y_{rj} u_r / \sum_{i=1}^m X_{ij} v_i = 1 \quad (3.5b)$$

$$v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.5c)$$

$$u_r \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.5d)$$

Este modelo pode, através da transformação de Charnes e Cooper (1962), ser transformado no seguinte modelo equivalente de programação linear

$$\min \theta_{kj}^L = \sum_{r=1}^s Y_{rk} u_r \quad (3.6a)$$

$$s. a. \quad \sum_{i=1}^m X_{ik} v_i = 1 \quad (3.6b)$$

$$\sum_{r=1}^s Y_{rj} u_r - \sum_{i=1}^m X_{ij} v_i = 0 \quad (3.6c)$$

$$v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.6d)$$

$$u_r \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.6e)$$

Seja θ_{kj}^{L*} o valor ótimo do modelo anterior. Obviamente que $\theta_{kj}^{L*} = 1$ quando $j = k$. Então o limite inferior para a eficiência da DMU_k é determinado por:

$$\theta_k^{L*} = 1 \wedge \min_{j \neq k} \{ \theta_{kj}^{L*} \} \quad (3.7)$$

onde $a \wedge b = \min\{a, b\}$. Designando por θ_k^{U*} o valor ótimo do modelo que permite obter o limite superior da eficiência, o intervalo de eficiência é então dado por $[\theta_k^{L*}, \theta_k^{U*}]$.

Os modelos propostos por Entani *et al.* (2002) apresentam algumas desvantagens como se refere, por exemplo, em Azizi (2014). Uma delas refere-se ao facto do modelo (3.6), que permite determinar o limite inferior do intervalo de eficiência, ter apenas duas restrições, o que leva a que apenas um peso associado a um *input* e outro associado a um *output* são diferentes de zero. Então apenas um *input* e um *output* são usados, sendo todos os outros ignorados, no cálculo do limite inferior de eficiência, isto é, no cálculo da eficiência pessimista. Outra deve-se ao facto de tais modelos identificarem apenas uma DMU ineficiente, aquela com mais baixo limite inferior, não permitindo determinar todas as DMUs ineficientes e, conseqüentemente, a fronteira de ineficiência. Uma outra desvantagem tem a ver com o facto de assumir que

$$\sum_{r=1}^s Y_{rj} u_r / \sum_{i=1}^m X_{ij} v_i = 1$$

não garante necessariamente que

$$\max_j \left\{ \sum_{r=1}^s Y_{rj} u_r / \sum_{i=1}^m X_{ij} v_i \right\} = 1 ,$$

como se pode ver no exemplo apresentado em Wang e Yang (2007). Em consequência, os modelos (3.5) e (3.6) podem não ser equivalentes ao modelo (3.3). Então a abordagem proposta por Entani *et al.* (2002) não permite medir razoavelmente a pior eficiência nem obter a fronteira de ineficiência.

A abordagem realizada por Entani *et al.* (2002) e as deficiências apontadas a esta abordagem, apresentadas anteriormente, foram feitas considerando modelos orientados para *inputs*. No entanto, com as devidas adaptações, esta abordagem pode ser feita considerando modelos orientados para *outputs*. Também para esta versão, idênticas deficiências podem ser observadas como se mostra em Azizi (2014). Neste caso, o limite superior é obtido pelo modelo pessimista, que pode ser obtido através do modelo de eficiência pessimista CCR invertido orientado para *outputs*. Por sua vez, o limite inferior é obtido a partir do modelo de eficiência otimista, de modo idêntico ao descrito anteriormente para a versão orientada para *inputs*. Então, na versão orientada para *outputs*, o modelo de Entani *et al.* (2002) mede a eficiência otimista considerando apenas um *input* e um *output*. Também, nesta versão, não é capaz de identificar todas as DMUs assim como a fronteira de eficiência.

3.3 Modelos de Wang, Chin e Yang (2007)

A abordagem proposta por Wang, Chin e Yang (2007) consiste em calcular os índices de eficiência otimista e pessimista através dos modelos CCR e CCR invertido, orientados para *inputs*, apresentados nas seções 2.2 e 2.3, respetivamente, e de seguida integrar estes dois tipos de eficiência numa medida de eficiência obtida pela média geométrica desses dois índices.

Teoricamente, as medidas de eficiência otimista e pessimista podem formar um intervalo, como os autores referem. Para tal, a medida de eficiência pessimista deve ser ajustada. Sendo φ_j^* a eficiência pessimista da DMU_j obtida pelo modelo (2.16) e designando por α ($0 < \alpha \leq 1$) o coeficiente de ajustamento, a eficiência pessimista ajustada para essa DMU_j, $\tilde{\varphi}_j^*$, é dada por

$$\tilde{\varphi}_j^* = \alpha \varphi_j^* \quad j = 1, \dots, n$$

a qual deve satisfazer a condição

$$\tilde{\varphi}_j^* = \alpha \varphi_j^* \leq \theta_j^* \quad j = 1, \dots, n$$

isto é,

$$\alpha \leq \min_{j=1, \dots, n} \{ \theta_j^* / \varphi_j^* \}$$

em que θ_j^* é a eficiência otimista da DMU_j, obtida pelo modelo CCR orientado para *inputs*.

Portanto, o intervalo de eficiência, para cada DMU_j, pode ser dado por $[\alpha \varphi_j^*, \theta_j^*]$, com $j = 1, \dots, n$. A média geométrica dos intervalos anteriores é dada por

$$\sqrt{\alpha \varphi_j^* \theta_j^*} = \sqrt{\alpha} \sqrt{\varphi_j^* \theta_j^*} \quad j = 1, \dots, n$$

Deste modo, os autores definem

$$\phi_j^* = \sqrt{\varphi_j^* \theta_j^*} \quad j = 1, \dots, n \quad (3.8)$$

como a eficiência de DMU_j dada pela média geométrica das eficiências otimista e pessimista obtidas para essa DMU. Note-se que uma DMU será tanto melhor, em termos de *performance*, quanto maior for o valor da eficiência geométrica.

Como os autores referem, a comparação de intervalos de números muitas vezes resume-se à comparação dos seus pontos médios. O ponto médio de cada um dos intervalos determinados anteriormente é dado por $(\alpha\varphi_j^* + \theta_j^*)/2$, com $j=1, \dots, n$, pelo que o *ranking* entre todas as DMUs será afetado pelo valor de α . Usando a média geométrica, não só os *rankings* não serão afetados pelo valor de α como também não se torna necessário calcular este valor. Isto é, os *rankings* são determinados de forma mais simples usando apenas a média geométrica das eficiências otimista e pessimista.

A média geométrica permite obter um índice de eficiência global para cada DMU, o que se revela uma vantagem sobre a abordagem proposta por Entani *et al.* (2002), assim como outras baseadas na obtenção de um intervalo de eficiência, que permitem estabelecer um *ranking*, mas não permitem obter um índice de eficiência global integrando os dois tipos de eficiência.

Note-se que, sob retornos constantes de escala, o valor da média geométrica para a versão orientada para *outputs* é igual ao da versão orientada para *inputs*. Basta recordar que os valores das eficiências otimistas obtidas por estas duas versões do modelo CCR são iguais, o mesmo acontecendo para os valores da eficiência pessimista.

3.4 Modelos de Azizi e Wang (2013)

Azizi e Wang (2013) propuseram um par de modelos para a obtenção de um intervalo de eficiência. Para que as eficiências otimista e pessimista possam formar um intervalo de eficiência, os autores começam por ajustar a eficiência pessimista. Designando novamente por α o coeficiente de ajustamento, com $0 < \alpha \leq 1$, a eficiência pessimista ajustada pode ser escrita como

$$\tilde{\varphi}_j^* = \alpha\varphi_j^* \quad j = 1, \dots, n$$

satisfazendo a condição

$$\tilde{\varphi}_j^* = \alpha\varphi_j^* \leq \theta_j^* \quad j = 1, \dots, n$$

ou

$$\alpha \leq \min_{j=1, \dots, n} \{ \theta_j^* / \varphi_j^* \}.$$

Seja $\theta_{\min}^* = \min_{j=1, \dots, n} \{ \theta_j^* \}$ e $\varphi_{\max}^* = \max_{j=1, \dots, n} \{ \varphi_j^* \}$. Então existe

$$\min_{j=1,\dots,n} \left\{ \theta_j^* / \varphi_j^* \right\} \geq \frac{\min_{j=1,\dots,n} \left\{ \theta_j^* \right\}}{\max_{j=1,\dots,n} \left\{ \varphi_j^* \right\}} = \frac{\theta_{\min}^*}{\varphi_{\max}^*}$$

Fazendo $\alpha = \frac{\theta_{\min}^*}{\varphi_{\max}^*}$ os autores garantem que $0 < \alpha \leq \min_{j=1,\dots,n} \left\{ \theta_j^* / \varphi_j^* \right\}$. Uma vez que o valor de α é diferente de zero, a *performance* global de uma DMU pode então ser medida no intervalo $[\alpha, 1]$. Para este propósito, os autores propuseram o seguinte par de modelos:

$$\max / \min \quad \varphi_k = \frac{\sum_{r=1}^s Y_{rk} u_r}{\sum_{i=1}^m X_{ik} v_i} \quad (3.9a)$$

$$s. a. \quad \alpha \leq \frac{\sum_{r=1}^s Y_{rj} u_r}{\sum_{i=1}^m X_{ij} v_i} \leq 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.9b)$$

$$v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.9c)$$

$$u_r \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.9d)$$

Através da transformação de Charnes e Cooper (1962), o par de modelos anteriores pode ser transformado no seguinte par de modelos em programação linear:

$$\max / \min \quad \varphi_k = \sum_{r=1}^s Y_{rk} u_r \quad (3.10a)$$

$$s. a. \quad \sum_{i=1}^m X_{ik} v_i = 1 \quad (3.10b)$$

$$\sum_{r=1}^s Y_{rj} u_r - \sum_{i=1}^m (\alpha X_{ij}) v_i \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.10c)$$

$$\sum_{r=1}^s Y_{rj} u_r - \sum_{i=1}^m X_{ij} v_i \leq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.10d)$$

$$v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.10e)$$

$$u_r \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.10f)$$

Sejam φ_k^{U*} e φ_k^{L*} o valor máximo e o valor mínimo da função objetivo (3.10a), respetivamente. Estes valores formam o intervalo de eficiência $[\varphi_k^{L*}, \varphi_k^{U*}]$ que inclui a eficiência otimista e a eficiência pessimista da DMU_k. Usando o par de modelos anterior para cada uma das DMUs é possível obter o intervalo de eficiência para as n DMUs, o qual permitirá obter um *ranking* dessas DMUs como se verá mais à frente.

Antes, apresentam-se as definições que os autores estabeleceram relativamente ao intervalo $[\varphi_k^{L*}, \varphi_k^{U*}]$. Assim, a DMU_k é chamada eficiente ou eficiente otimista se, e só se, $\varphi_k^{U*} = 1$; caso contrário é chamada não eficiente. A DMU_k é chamada ineficiente ou ineficiente pessimista se, e só se, $\varphi_k^{L*} = \alpha$; caso contrário é chamada não ineficiente. A DMU_k é chamada indeterminada se, e só se, não é eficiente nem ineficiente. A DMU_k é chamada não especificada se, e só se, é simultaneamente eficiente e ineficiente.

Após a obtenção do intervalo de eficiência para cada DMU, Azizi e Wang (2013) propõem a abordagem de arrependimento minimax, conhecida na literatura por MRA (*Minimax Regret Approach*) para estabelecer um *ranking* entre as diversas DMUs. No contexto da DEA, esta abordagem, que é apresentada de seguida, foi proposta por Wang, Greatbanks e Yang (2005).

Seja $A_i = [a_i^L, a_i^U] = \langle m(A_i), w(A_i) \rangle$ ($i = 1, \dots, n$) o conjunto dos intervalos de eficiência de n DMUs onde $m(A_i) = \frac{1}{2}(a_i^U + a_i^L)$ e $w(A_i) = \frac{1}{2}(a_i^U - a_i^L)$ são os pontos médios do intervalo e da sua amplitude, respetivamente. A perda máxima de eficiência (também chamada máximo arrependimento) de cada intervalo de eficiência A_i é definida como

$$\begin{aligned} R(A_i) &= \max \left[\max_{j \neq i} (a_j^U) - a_i^L, 0 \right] \\ &= \max \left[\max_{j \neq i} \{m(A_j) + w(A_j)\} - (m(A_i) - w(A_i)), 0 \right], \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

O intervalo com menor valor para a perda máxima de eficiência é o intervalo selecionado com o melhor ou o mais desejável intervalo.

Uma vez que os valores da perda máxima de eficiência são obtidos de acordo com a máxima eficiência entre todos os outros intervalos de eficiência, apenas podem ser usados para obter o intervalo de eficiência mais desejável de entre todos os intervalos de eficiência,

não podendo ser usados para diretamente estabelecer um *ranking* para todos os intervalos de eficiência. Para se conseguir obter um tal *ranking* usando a perda máxima de eficiência, os autores propõem um procedimento integrando os seguintes passos:

Passo 1: Calcular a perda máxima de eficiência de cada intervalo de eficiência e escolher o mais desejável intervalo de eficiência, o que tem o mais baixo valor da perda máxima de eficiência. Suponha-se que A_{i_1} é selecionado, com $1 \leq i_1 \leq n$.

Passo 2: Eliminar A_{i_1} de futuras considerações, recalculando a perda máxima de eficiência de cada intervalo de eficiência e determinar o mais desejável dos restantes $n-1$ intervalos de eficiência. Suponha-se que A_{i_2} é selecionado, com $1 \leq i_2 \leq n$ e $i_2 \neq i_1$.

Passo 3: Eliminar A_{i_2} de futuras considerações, recalculando a perda máxima de eficiência de cada intervalo de eficiência e determinar um intervalo de eficiência mais desejável A_{i_3} dos restantes $n-2$ intervalos de eficiência.

Passo 4: Repetir o processo até que apenas reste um intervalo de eficiência A_{i_n} . O *ranking* final é dado por $A_{i_1} \succ A_{i_2} \succ \dots \succ A_{i_n}$, onde o símbolo “ \succ ” significa “é superior a”.

Para ilustrar como a abordagem proposta por Azizi e Wang (2013) funciona, nomeadamente o método do arrependimento máximo (MRA), observe-se o exemplo 3.1.

Exemplo 3.1 Considere-se que existem seis DMUs com dois *inputs* e um *output* cujos valores estão apresentados na tabela 3.1 e em que os *outputs* estão todos normalizados a 1. Pretende-se estabelecer um *ranking* entre essas DMUs, usando a abordagem proposta por Azizi e Wang (2013).

Tabela 3.1 – Dados para 6 DMUs com dois *inputs* e um *output*

DMU	<i>Input</i> 1	<i>Input</i> 2	<i>Output</i>
A	2	4	1
B	4	2	1
C	7	1	1
D	6	7	1
E	4	5	1
F	6	3	1

Fonte: Elaboração própria

Na tabela 3.2, na primeira coluna identificam-se as DMUs, nas segunda e quarta colunas apresentam-se os valores da eficiência otimista e pessimista, respectivamente, obtidos através dos modelos CCR e CCR invertido orientado para *inputs*; nas terceira e quinta colunas apresentam-se os correspondentes *rankings* estabelecidos a partir da eficiência otimista e pessimista, respectivamente; na sexta coluna apresentam-se os intervalos de eficiência obtidos através do par de modelos (3.10) proposto por Azizi e Wang (2013); por fim, na última coluna apresentam-se os *rankings* obtidos por aplicação da abordagem MRA àqueles intervalos, cujos cálculos são apresentados a seguir à tabela 3.2.

Tabela 3.2 – Resultados obtidos para 6 DMUs do exemplo 3.1

DMUs	Eficiência Otimista	<i>Ranking</i>	Eficiência pessimista	<i>Ranking</i>	Intervalo de eficiência	<i>Ranking</i>
A	1	1	1,75	1	[0,4854; 1]	1
B	1	1	1,653846	2	[0,4362; 1]	2
C	1	1	1	5	[0,2637; 1]	3
D	0,461538	5	1	5	[0,2637; 0,4615]	6
E	0,666667	4	1,4	3	[0,3722; 0,6667]	4
F	0,666667	4	1,102564	4	[0,2908; 0,6667]	5

Fonte: Elaboração própria

Para obter o intervalo de eficiência para cada DMU, através do par de modelos (3.10), começou-se por determinar o valor de α . De acordo com os resultados da eficiência otimista e pessimista constantes da tabela 3.2 tem-se:

$$\alpha = \frac{\theta_{\min}^*}{\varphi_{\max}^*} = \frac{0,461538}{1,75} = 0,263736.$$

Relativamente aos intervalos de eficiência obtidos, tem-se que as DMUs A e B são eficientes (otimistas), D é ineficiente (pessimista), C é não especificada, enquanto E e F são indeterminadas.

Usando a abordagem do arrependimento máximo para ordenação dos intervalos de eficiência, o *ranking* é obtido como se segue.

A perda máxima de eficiência para cada uma das seis DMUs é dada por:

$$R(\text{DMU}_A) = \max[\max(1; 1; 0,4615; 0,6667; 0,6667) - 0,4854; 0] = 0,5146, \leftarrow$$

$$R(\text{DMU}_B) = \max[\max(1; 1; 0,4615; 0,6667; 0,6667) - 0,4362; 0] = 0,5638,$$

$$R(DMU_C) = \max[\max(1; 1; 0,4615; 0,6667; 0,6667) - 0,2637; 0] = 0,7363,$$

$$R(DMU_D) = \max[\max(1; 1; 1; 0,6667; 0,6667) - 0,2637; 0] = 0,7363,$$

$$R(DMU_E) = \max[\max(1; 1; 1; 0,4615; 0,6667) - 0,3722; 0] = 0,6278,$$

$$R(DMU_F) = \max[\max(1; 1; 1; 0,4615; 0,6667) - 0,2908; 0] = 0,7092.$$

A DMU_A é a que tem menor valor para a perda máxima de eficiência. Então a DMU_A é classificada como a melhor DMU e eliminada de futuras considerações. De seguida recalcula-se a perda máxima de eficiência para as restantes cinco DMUs.

$$R(DMU_B) = \max[\max(1; 0,4615; 0,6667; 0,6667) - 0,4362; 0] = 0,5638, \quad \Leftarrow$$

$$R(DMU_C) = \max[\max(1; 0,4615; 0,6667; 0,6667) - 0,2637; 0] = 0,7363,$$

$$R(DMU_D) = \max[\max(1; 0,6667; 0,6667) - 0,2637; 0] = 0,7363,$$

$$R(DMU_E) = \max[\max(1; 0,4615; 0,6667) - 0,3722; 0] = 0,6278,$$

$$R(DMU_F) = \max[\max(1; 0,4615; 0,6667) - 0,2908; 0] = 0,7092.$$

De entre as cinco DMUs anteriores, a DMU_B é a que tem menor valor para perda máxima de eficiência. Então a DMU_B é classificada como a melhor entre as cinco DMUs e eliminada de futuras considerações. De seguida, recalcula-se a perda máxima de eficiência para as restantes quatro DMUs, dada por:

$$R(DMU_C) = \max[\max(0,4615; 0,6667; 0,6667) - 0,2637; 0] = 0,4029, \quad \Leftarrow$$

$$R(DMU_D) = \max[\max(1; 0,6667; 0,6667) - 0,2637; 0] = 0,7363,$$

$$R(DMU_E) = \max[\max(1; 0,4615; 0,6667) - 0,3722; 0] = 0,6278,$$

$$R(DMU_F) = \max[\max(1; 0,4615; 0,6667) - 0,2908; 0] = 0,7092.$$

De entre as quatro DMUs anteriores, a DMU_C é a que tem menor valor para perda máxima de eficiência. Então a DMU_C é classificada como a melhor entre as quatro DMUs e eliminada de futuras considerações. De seguida, recalcula-se a perda máxima de eficiência para as restantes três DMUs, dada por:

$$R(DMU_D) = \max[\max(0,6667; 0,6667) - 0,2637; 0] = 0,4029,$$

$$R(DMU_E) = \max[\max(0,4615; 0,6667) - 0,3722; 0] = 0,2945, \quad \Leftarrow$$

$$R(DMU_F) = \max[\max(0,4615; 0,6667) - 0,2908; 0] = 0,3759.$$

De entre as três DMUs anteriores, a DMU_E é a que tem menor valor para perda máxima de eficiência. Então a DMU_E é classificada como a melhor entre as três DMUs e eliminada de

futuras considerações. De seguida, recalcula-se a perda máxima de eficiência para as restantes duas DMUs, dada por:

$$R(\text{DMU}_D) = \max[\max(0,6667) - 0,2637; 0] = 0,4029,$$

$$R(\text{DMU}_F) = \max[\max(0,4615) - 0,2908; 0] = 0,1708. \quad \Leftarrow$$

Entre estas duas DMUs, a DMU_F é a que tem menor valor para a perda máxima de eficiência sendo por isso classificada de melhor do que a DMU_D . Como resta apenas uma DMU, o processo termina, obtendo-se o seguinte *ranking* para todas as DMUs:

$$\text{DMU}_A \succ \text{DMU}_B \succ \text{DMU}_C \succ \text{DMU}_E \succ \text{DMU}_F \succ \text{DMU}_D.$$

onde o símbolo “ \succ ” significa “é superior a”, como já foi referido antes.

No contexto da DEA, outras abordagens podem ser usadas para estabelecer *ranking* de intervalos de eficiência, tal como o *RC index* usado por Wang e Luo (2006), o critério de Hurwicz usado por Wang e Yang (2007) e o *A-index* usado por Azizi (2011).

A abordagem acabada de descrever para a versão orientada para *inputs* com base no modelo CCR pode facilmente ser adaptada para a versão orientada para *outputs* com base no mesmo modelo, como se pode observar em Azizi (2014). Neste caso, o autor considera o valor ρ_j^* fornecido pelo modelo CCR orientado para *outputs*, que como se sabe é maior ou igual a 1, como valor de eficiência otimista e, identicamente, o valor ϕ_j^* fornecido pelo modelo CCR invertido, que como se sabe é menor ou igual a 1, como valor de eficiência pessimista. Por outras palavras, considera a eficiência otimista medida numa escala maior ou igual a 1 e a eficiência pessimista medida numa escala menor ou igual a 1. Neste contexto, o coeficiente de ajustamento é obtido ajustando o valor ρ_j^* que permite obter a eficiência otimista. Contudo, é fácil verificar que o mesmo coeficiente de ajustamento pode ser obtido quando se considera $1/\rho_j^*$ e $1/\phi_j^*$ para valores das eficiências otimista e pessimista, respetivamente, isto é, quando a eficiência otimista é medida na escala de menor ou igual a 1 e a eficiência pessimista é medida na escala de maior ou igual a 1. Neste caso, ajusta-se o valor da eficiência pessimista, como acontece na versão orientada para *inputs*.

Designando por β o coeficiente de ajustamento, com $0 < \beta \leq 1$, e considerando a eficiência otimista na escala maior ou igual a 1, a eficiência otimista ajustada pode ser escrita como

$$\tilde{\rho}_j^* = \beta \rho_j^* \quad j = 1, \dots, n$$

satisfazendo a condição

$$\tilde{\rho}_j^* = \beta \rho_j^* \leq \phi_j^* \quad j = 1, \dots, n$$

ou

$$\beta \leq \min_{j=1, \dots, n} \{ \phi_j^* / \rho_j^* \}.$$

Seja $\phi_{\min}^* = \min_{j=1, \dots, n} \{ \phi_j^* \}$ e $\rho_{\max}^* = \max_{j=1, \dots, n} \{ \rho_j^* \}$. Então existe

$$\min_{j=1, \dots, n} \{ \phi_j^* / \rho_j^* \} \geq \frac{\min_{j=1, \dots, n} \{ \phi_j^* \}}{\max_{j=1, \dots, n} \{ \rho_j^* \}} = \frac{\phi_{\min}^*}{\rho_{\max}^*}$$

Fazendo $\beta = \frac{\phi_{\min}^*}{\rho_{\max}^*}$ os autores garantem que $0 < \beta \leq \min_{j=1, \dots, n} \{ \phi_j^* / \rho_j^* \}$. Uma vez que o valor de β é diferente de zero, a *performance* global de uma DMU pode então ser medida no intervalo $[\beta, 1]$.

Para a versão orientada para *outputs*, Azizi (2014) propõe então o seguinte par de modelos:

$$\max / \min \quad \phi_k = \frac{\sum_{i=1}^m X_{ik} v_i}{\sum_{r=1}^s Y_{rk} u_r} \quad (3.11a)$$

$$s. a. \quad \beta \leq \frac{\sum_{i=1}^m X_{ij} v_i}{\sum_{r=1}^s Y_{rj} u_r} \leq 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.11b)$$

$$v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.11c)$$

$$u_r \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.11d)$$

Através da transformação de Charnes e Cooper (1962), o par de modelos anteriores pode ser transformado no seguinte par de modelos em programação linear:

$$\max / \min \quad \phi_k = \sum_{i=1}^m X_{ik} v_i \quad (3.12a)$$

$$s. a. \quad \sum_{i=1}^m Y_{rk} u_r = 1 \quad (3.12b)$$

$$\sum_{r=1}^s (\beta Y_{rj}) u_r - \sum_{i=1}^m X_{ij} v_i \leq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.12c)$$

$$\sum_{r=1}^s Y_{rj} u_r - \sum_{i=1}^m X_{ij} v_i \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.12d)$$

$$v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.12e)$$

$$u_r \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.12f)$$

Designando por ϕ_k^{U*} e ϕ_k^{L*} o valor máximo e o valor mínimo da função objetivo nos modelos anteriores, obtém-se o intervalo de eficiência $[\phi_k^{L*}, \phi_k^{U*}]$ para a DMU_k na versão orientada para *outputs*, que inclui a eficiência otimista e a eficiência pessimista da DMU_k. Usando o par de modelos anteriores para cada uma das DMUs é possível obter o intervalo de eficiência para as n DMUs, o qual permitirá obter um *ranking* dessas DMUs.

Relativamente a este intervalo de eficiência, tem-se que a DMU_k é chamada ineficiente ou ineficiente pessimista se, e só se, $\phi_k^{U*} = 1$; caso contrário é chamada não ineficiente ou não ineficiente pessimista. A mesma DMU_k é chamada eficiente ou eficiente otimista se, e só se, $\phi_k^{L*} = \beta$; caso contrário é chamada não eficiente ou não eficiente otimista.

3.5 Abordagem de Shen, Zang, Liu e Yang (2016)

Para aumentar o poder de discriminação na DEA, Shen *et al.* (2016) apresentaram três abordagens intuitivas baseadas nas distâncias a ambas as fronteiras, eficiente e anti-eficiente. Para tal definiram três indicadores DEA compostos, um para cada abordagem, para agregar os valores das eficiências otimista e pessimista obtidos pelos modelos CCR e CCR invertido com orientação para *inputs*.

Na primeira abordagem, denominada CDI-I, designando por h_b^* o valor da eficiência otimista e por h_w^* o valor da eficiência pessimista para a DMU_k, isto é, fazendo $h_b^* = \theta_k^*$ e $h_w^* = \varphi_k^*$, os autores definem o indicador composto

$$h_l^* = h_b^* + h_w^* \varepsilon \quad (3.13)$$

onde ε é um infinitesimal não Arquimediano. Considerando ser mais importante estar mais perto da fronteira de eficiência do que estar mais afastado da fronteira de anti-

eficiência, este indicador pode ser usado para obter o *ranking* das DMUs de forma lexicográfica, isto é, em primeiro lugar compara o primeiro termo (h_b^*) e usa o segundo termo (h_w^*) para discriminar as DMUs que têm igual valor fornecido pelo primeiro termo. Por exemplo, para avaliar a *performance* de DMU₁ e DMU₂, começa-se por comparar h_{1b}^* e h_{2b}^* . Se $h_{1b}^* > h_{2b}^*$ então a DMU₁ tem melhor *performance* que a DMU₂. Se $h_{1b}^* = h_{2b}^*$, então usa-se h_w^* para comparar DMU₁ e DMU₂; se $h_{1w}^* > h_{2w}^*$ então a DMU₁ tem melhor *performance* que a DMU₂. Nesta abordagem a eficiência otimista tem uma importância dominante relativamente à eficiência pessimista.

Considerando que pode não ser uma boa ideia usar diretamente $h_b^* + h_w^*$ devido a ter-se intervalos de variação diferentes, uma vez que h_b^* varia em $]0,1]$ e h_w^* varia em $[1, +\infty[$, os autores propõem que o último termo tenha a mesma orientação de h_b^* , isto é, o maior é melhor. Deste modo, apresentam uma segunda abordagem, denominada de CDI-II, onde os valores das duas eficiências são tratados de forma mais igualitária definindo o indicador composto

$$h_{II}^* = [h_b^* + (1 - 1/h_w^*)] / 2 \quad (3.14)$$

Essencialmente, este indicador é a média aritmética dos valores das eficiências otimista e pessimista. Se uma DMU_k está na fronteira anti-eficiente, então $h_w^* = 1$ e $h_{II}^* = h_b^* / 2 \leq 1/2$. Se a DMU_k está em ambas as fronteiras, eficiente e anti-eficiente, então $h_b^* = h_w^* = 1$ e, conseqüentemente, $h_{II}^* = 1/2$. Se a DMU_k está na fronteira de eficiência, então $h_{II}^* > 1/2$. Também nesta segunda abordagem, a eficiência otimista tem mais importância do que a eficiência pessimista.

Para ter regras mais iguais para as duas distâncias, os autores apresentam uma terceira abordagem, denominada CDI-III, onde definem o indicador composto

$$h_{III}^* = [h_b^* h_w^*]^{1/2} \quad (3.15)$$

Como os autores referem, neste indicador os valores das eficiências otimista e pessimista podem ser compensados de modo mais equivalente, uma vez que o índice não se altera quando h_b^* aumenta e h_w^* diminui, na mesma percentagem, respetivamente. Note-se que este indicador é exatamente o valor dado pela média geométrica proposta por Wang, Chin

e Yang (2007), pelo que a novidade das abordagens propostas por Shen *et al.* (2016) reside apenas nas duas anteriores, nomeadamente na segunda.

Para as DMUs que estão em ambas as fronteiras, os autores calculam a super-ineficiência ou super-anti-eficiência das mesmas para obter informação auxiliar que depois é usada para discriminar essas DMUs. O modelo de super-ineficiência baseado no modelo CCR invertido com orientação para *inputs*, na forma dos multiplicadores, que permite obter a super-ineficiência de uma DMU_k, é dado por:

$$h_w^{SI*} = \min \varphi_k = \sum_{r=1}^s Y_{rk} u_r \quad (3.16a)$$

$$s. a. \quad \sum_{i=1}^m X_{ik} v_i = 1 \quad (3.16b)$$

$$\sum_{r=1}^s Y_{rj} u_r - \sum_{i=1}^m X_{ij} v_i \geq 0 \quad j = 1, \dots, n; j \neq k \quad (3.16c)$$

$$v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.16d)$$

$$u_r \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.16e)$$

Este modelo difere do modelo CCR invertido pelo facto da DMU em avaliação, a DMU_k, ser excluída do conjunto de referência das DMUs ineficientes, sendo por isso baseado na fronteira de ineficiência formada pelas restantes DMUs ineficientes. Essa exclusão é descrita nas restrições (3.16c).

A correspondente forma do envelope do modelo anterior é dada por:

$$h_w^{SI*} = \max \psi_k^{SI} \quad (3.17a)$$

$$s. a. \quad \sum_{j=1; j \neq k}^n X_{ij} \lambda_j \geq X_{ik} \psi_k^{SI} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.17b)$$

$$\sum_{j=1; j \neq k}^n Y_{rj} \lambda_j \leq Y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (3.17c)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n; j \neq k; \quad (3.17d)$$

$$\theta^{SI} \in \mathbb{R} \quad (3.17e)$$

Nesta forma, a exclusão da DMU em avaliação da fronteira de ineficiência corresponde a excluí-la do primeiro membro das restrições relativas aos *inputs* e aos *outputs* do modelo CCR invertido na forma do envelope, isto é, das restrições (3.17b) e (3.17c), respetivamente.

De referir que, usando a super-ineficiência, uma DMU terá maior *performance* quanto maior for o valor da super-ineficiência.

4. Estudo de um caso prático

4.1 Introdução

Nos capítulos 2 e 3 foi apresentado um estudo sobre modelos de eficiência otimista e de eficiência pessimista e sobre modelos para obtenção de *rankings* baseados nestes dois tipos de eficiência. Este capítulo tem por objetivo aplicar alguns desses modelos a uma situação real, mais precisamente à avaliação e obtenção de *rankings* de 19 instituições bancárias que operavam em Portugal no ano de 2018.

Assim, na secção 4.2, apresentam-se os dados relativos aos *inputs* e *outputs* e descreve-se o modo como foi feita a recolha desses dados assim como a seleção dos modelos utilizados nesta aplicação prática. Posteriormente, na secção 4.3, são apresentados os resultados obtidos, bem como a respetiva análise.

4.2 Seleção dos dados e dos modelos

Para este estudo, foram utilizados dados contabilísticos das instituições bancárias que operavam em Portugal no ano de 2018, retirados do boletim estatístico anual nº 54 da Associação Portuguesa de Bancos (APB), que é a principal entidade representativa do setor bancário em Portugal.

Desse boletim estatístico constam 29 instituições bancárias, onde é apresentada a informação sobre cada uma delas, a nível individual, através de uma ficha técnica com as respetivas demonstrações financeiras individuais (Balanço, Demonstração dos Resultados, Demonstração do Rendimento Integral, Demonstração das Alterações nos Capitais Próprios e Demonstração dos Fluxos de Caixa sempre que disponíveis).

Não foi efetuada qualquer diferenciação entre bancos comerciais e bancos de investimento, pelo que, no presente estudo, ambos os tipos de bancos foram considerados. No entanto, foram apenas selecionadas 19 instituições bancárias, uma vez que existem instituições que apresentam valores nulos e/ou não possuem balcões físicos e que, por isso, foram excluídas por não incluírem dados relativos a *inputs* e/ou *outputs* significativamente relevantes para o estudo em causa.

A seleção dos *inputs* (recursos) foi baseada no facto de refletirem os recursos necessários para a obtenção dos *outputs* (produtos) que, por sua vez, refletem o resultado das decisões

tomadas. Assim, foram selecionados três *inputs* e três *outputs*. Os *inputs* selecionados foram os seguintes:

- *Input 1* - Número de funcionários;
- *Input 2* - Depósitos (em milhares de euros);
- *Input 3* - Capital Próprio (em milhares de euros).

O número de funcionários revela-se importante ser considerado, pois indica o número de pessoas efetivas ao serviço que influencia diretamente a gestão de cada instituição bancária e, conseqüentemente, o resultado da mesma. Quando aos depósitos, segundo o Sistema de Normalização Contabilista (SNC), são a principal fonte de financiamento dos bancos, tornando-se assim um recurso essencial para o normal funcionamento da instituição. O capital próprio, também designado de património líquido, corresponde ao ativo deduzido do passivo, isto é, à diferença entre o que as instituições possuem e o que devem a terceiros, que representa recursos importantes para o desempenho das próprias instituições.

Para os *outputs*, foram selecionados os seguintes:

- *Output 1* - Empréstimos (em milhares de euros);
- *Output 2* - Resultado Líquido (em milhares de euros);
- *Output 3* - Margem financeira (em milhares de euros).

Os empréstimos concedidos pelas instituições bancárias, que representam o crédito a clientes, constituem um dos principais *outputs* no processo de produção de uma instituição. Por sua vez, o resultado líquido ou total, diz respeito ao lucro ou ao prejuízo de uma dada instituição num determinado período de tempo, ou seja, corresponde ao volume de negócios, deduzido dos custos operacionais, acrescido dos resultados financeiros e extraordinários, após dedução de impostos incidentes. Por último, a margem financeira é um conceito bastante utilizado na análise dos bancos, uma vez que resulta da diferença entre os juros cobrados pelos créditos concedidos (empréstimos) e os juros pagos aos aforradores pelos montantes que estes confiam aos bancos (depósitos).

A informação referente aos *inputs* e aos *outputs* selecionados para cada instituição bancária é apresentada na tabela 4.1, onde, da esquerda para a direita, nas duas primeiras colunas são identificadas as instituições bancárias (DMUs) em avaliação, nas três colunas que se seguem são apresentados os valores para os *inputs* e, por fim, as três últimas colunas correspondem aos valores dos *outputs*.

Tabela 4.1 – Dados referentes aos *inputs* e aos *outputs* (valores em milhares de euros).

	Instituições Bancárias	Número de funcionários	Depósitos	Capital Próprio	Empréstimos	Resultado Líquido	Margem Financeira
01	Banco BIC Português	1.447	6.764.803	519.440	4.697.087	42.457	134.466
02	Banco Comercial Português	6.925	45.174.003	5.591.163	33.033.068	59.267	778.905
03	Banco ActivoBank	141	1.323.200	99.637	1.209.296	5.905	2.809
04	Banco de Investimento Global.	235	1.837.235	344.537	39.973	20.059	21.419
05	Banco Finantia	156	462.165	313.582	377.595	28.198	19.485
06	Banco Invest	254	646.602	109.487	314.699	13.746	20.412
07	Banco Carregosa	96	253.929	36.318	115.971	1.147	5.625
08	Caixa Central de Crédito Agrícola Mútuo	3.651	9.029.731	316.806	2.269.337	13.998	48.812
09	Caixa Económica Montepio Geral	3.566	15.464.447	1.577.986	11.684.667	2.019	234.526
10	Caixa Geral de Depósitos	7.962	58.390.171	7.366.506	43.346.007	337.798	813.089
11	Caixa - Banco de Investimento.	125	275.602	361.453	11.054	23.909	17.242
12	BEST - Banco Eletrónico de Serviço Total	129	566.204	75.556	542.752	3.564	6.584
13	Banco BPI	4.977	26.370.230	3.048.617	22.148.808	914.311	431.641
14	Banco Santander Totta	6.436	41.082.257	3.404.774	36.010.952	475.535	850.030
15	Banco Bilbao Vizcaya Argentaria (Portugal)	383	3.792.556	274.526	3.071.144	19.730	40.760
16	Bankinter	775	5.914.318	31.417	5.652.189	32.967	65.044
17	BNP Paribas	2.519	968.025	53.368	280.961	9.116	6.907
18	Caixa Económica da Misericórdia de Angra do Heroísmo	127	393.338	25.537	237.184	2.839	6.861
19	Novo Banco dos Açores	80	502.496	39.159	462.669	3.764	7.075

Fonte: Elaboração própria.

De referir que o número de DMUs (19) e de *inputs* (3) e *outputs* (3), considerados neste estudo prático, satisfazem a relação sugerida por Cooper, Seiford e Tone (2007) e apresentada na secção 3.1, destinada a evitar que várias DMUs sejam classificadas como eficientes. De facto, verifica-se

$$19 \geq \max \{3 \times 3, 3(3 + 3)\} = \max \{9, 18\} = 18.$$

Para este estudo empírico, foram selecionados os modelos CCR e CCR invertido para obtenção da eficiência otimista e da eficiência pessimista, respetivamente. Para obtenção de *rankings* baseados nestes dois tipos de eficiência, foram selecionados o modelo da média geométrica proposto por Wang, Chin e Yang (2007), o modelo proposto por Azizi e Wang (2013) e os dois primeiros indicadores da abordagem proposta por Shen, Zang, Liu e Yang (2016), uma vez que o terceiro indicador consiste no cálculo da média geométrica. O modelo de Entani *et al.* (2002) não foi usado devido às suas deficiências, apontadas no capítulo 3. Em todos os modelos optou-se pela orientação para *inputs* em que a eficiência é atingida à custa da redução dos recursos utilizados pelas instituições bancárias.

4.3 Resultados e respetiva análise

Na presente secção, são apresentados os resultados obtidos pelos modelos e dados selecionados, referidos na secção anterior. Para a obtenção dos resultados foram utilizados os *softwares* MaxDEA (versão gratuita) para obter a eficiência otimista, o módulo de programação linear assim como o módulo OPL (*Optimization Programming Language*) do pacote CPLEX *Optimization Programming Studio Academic Research 12.5*, para obter a eficiência pessimista, os intervalos do modelo proposto por Azizi e Wang (2013) e a super-ineficiência proposta em Shen *et al.* (2016). Recorde-se que os valores da média geométrica e da abordagem proposta por Shen *et al.* (2016) são obtidos através da eficiência otimista e da eficiência pessimista.

Na tabela 4.2 apresentam-se os resultados obtidos usando os modelos selecionados. Nessa tabela, da esquerda para a direita, nas 2 primeiras colunas identificam-se as instituições bancárias em análise; na terceira e quarta colunas, são apresentados os valores da eficiência otimista e da eficiência pessimista obtidos pelos modelos CCR e CCR invertido, respetivamente; na quinta coluna são apresentados os valores da média geométrica; na sexta coluna apresentam-se os intervalos de eficiência para cada DMU obtidos pelos modelos Azizi e Wang (2013). Na sétima e oitava colunas são apresentados os valores, para cada DMU, referentes às abordagens CDI-I e CDI-II propostas em Shen *et al.* (2016).

Tabela 4.2 – Resultados obtidos pelos modelos selecionados

	Instituições Bancárias	Eficiência Otimista	Eficiência Pessimista	Média Geométrica	Azizi e Wang (2013)	CDI-I (Shen <i>et al.</i> , 2016)	CDI-II (Shen <i>et al.</i> , 2016)
01	Banco BIC Português	0,99632	2,17294	1,471375	[0,2828 ; 0,9923]	0,99632+ 2,17294e	0,768057
02	Banco Comercial Português	0,851903	1	0,922986	[0,1302 ; 0,8337]	0,851903+1e	0,425952
03	Banco ActivoBank	1	1	1	[0,1302 ; 0,911]	1+1e (0,300899) ^(a)	0,5 (0,300899) ^(a)
04	Banco de Investimento Global.	0,685061	1	0,827684	[0,1302 ; 0,4672]	0,685061+1e	0,342531
05	Banco Finantia	1	1,337825	1,156644	[0,1751 ; 1]	1+1,337825e	0,626259
06	Banco Invest	1	2,337813	1,528991	[0,3126 ; 1]	1+2,3378135e	0,786125
07	Banco Carregosa	0,783742	1	0,885292	[0,1302 ; 0,7835]	0,783742+1e	0,391871
08	Caixa Central de Crédito Agrícola Mútuo	0,366942	1	0,605757	[0,1302 ; 0,364]	0,366942+1e	0,183471
09	Caixa Económica Montepio Geral	0,832666	1	0,912505	[0,1302 ; 0,8317]	0,832666+1e	0,416333
10	Caixa Geral de Depósitos	0,854533	1,237705	1,028426	[0,1619 ; 0,8207]	0,8854533+1, 237705e	0,523293
11	Caixa - Banco de Investimento.	1	1	1	[0,1302 ; 1]	1+1e (0,263597) ^(a)	0,5 (0,263597) ^(a)
12	BEST - Banco Eletrónico de Serviço Total	1	1,123913	1,060148	[0,1493 ; 0,9736]	1+1,123913e	0,555126
13	Banco BPI	1	2,30237	1,517356	[0,2997 ; 1]	1+2,30237e	0,782832
14	Banco Santander Totta	1	2,819173	1,679039	[0,3669 ; 1]	1+2,819173e	0,822643
15	Banco Bilbao Vizcaya Argentaria (Portugal)	1	1,644903	1,282538	[0,2141 ; 0,8753]	1+1,644903e	0,696031
16	Bankinter	1	2,365502	1,538019	[0,31 ; 1]	1+2,365502e	0,788628
17	BNP Paribas	0,520492	1	0,721451	[0,1302 ; 0,5205]	0,520492+1e	0,260246
18	Caixa Económica da Misericórdia de Angra do Heroísmo	0,944187	2,418062	1,510994	[0,3147 ; 0,9384]	0,944187+ 2,418062e	0,765316
19	Novo Banco dos Açores	0,979004	2,074675	1,425172	[0,27 ; 0,9777]	0,979004+ 2,074675e	0,7485

(a) O valor entre parêntesis indica a super-ineficiência como informação auxiliar

Fonte: Elaboração própria

Para obter o intervalo de eficiência para cada DMU, através do par de modelos (3.10) proposto por Azizi e Wang (2013), começou-se por determinar o valor de α . De acordo com os resultados da eficiência otimista e pessimista apresentados na tabela 4.2 tem-se

$$\alpha = \frac{\theta_{\min}^*}{\varphi_{\max}^*} = \frac{0,366942}{2,819173} = 0,130159.$$

Da observação da tabela 4.2, verifica-se que, usando o modelo da eficiência otimista CCR orientado para *inputs*, existem nove instituições a operar de modo eficiente, ou seja, em que o valor da eficiência é igual a 1, que são as instituições 03 (Banco ActivoBank), 05 (Banco Finantia), 06 (Banco Invest), 11 (Caixa - Banco de Investimento), 12 (BEST - Banco Eletrónico de Serviço Total), 13 (Banco BPI), 14 (Banco Santander Totta), 15 (Banco Bilbao Vizcaya Argentaria) e 16 (Bankinter). Todas as restantes instituições obtiveram um índice de eficiência otimista inferior a 1 e, por conseguinte, operam de modo não eficiente.

Por outro lado, usando o modelo de eficiência pessimista, ou de ineficiência, CCR invertido orientado para *inputs*, verifica-se que existem oito instituições a operar de modo ineficiente, isto é, que obtiveram um índice igual a 1, que são as instituições 02 (Banco Comercial Português), 03 (Banco ActivoBank), 04 (Banco de Investimento Global), 07 (Banco Carregosa), 08 (Caixa Central - Caixa Central de Crédito Agrícola Mútuo), 09 (Caixa Económica Montepio Geral, caixa económica bancária), 11 (Caixa - Banco de Investimento) e 17 (BNP Paribas). Todas as restantes instituições obtiveram um valor de ineficiência superior a 1, sendo por isso não ineficientes.

Da análise anterior, verifica-se que existem duas instituições que são simultaneamente eficientes e ineficientes, que são as instituições 03 (Banco ActivoBank) e 11 (Caixa – Banco de Investimento).

Note-se que, como se mencionou antes, os modelos clássicos de eficiência otimista e de eficiência pessimista não permitem diferenciar as instituições eficientes e as instituições ineficientes, respetivamente, não permitindo estabelecer um *ranking*, em termos de superioridade de *performance*, entre as instituições em avaliação. No entanto, este problema é quase resolvido ou resolvido quando aplicamos modelos para obtenção de *rankings* baseados naqueles modelos como é o caso da média geométrica, dos modelos de Azizi e Wang (2013) e da abordagem de Shen *et al.* (2016) apresentados no capítulo 3.

Os resultados obtidos pelo modelo da média geométrica mostram que este modelo apenas não consegue diferenciar duas instituições, a 03 (Banco ActivoBank) e a 11 (Caixa – Banco

de Investimento) que, como já se referiu, são simultaneamente eficientes e ineficientes. O mesmo acontece com as abordagens CDI-I e CDI-II de Shen *et al.* (2016), em que os valores entre parêntesis relativos àquelas duas instituições indicam a super-ineficiência a ser usada como informação adicional para diferenciar aquelas DMUs nos *rankings* que serão apresentados mais à frente. Nestas circunstâncias, como se referiu anteriormente, uma DMU terá maior *performance* quanto maior for o valor da super-ineficiência.

Para obter um *ranking* a partir da eficiência dada na forma de intervalo, como é o caso da eficiência dada pelos modelos de Azizi e Wang (2013) é usual recorrer-se a um processo de ordenação dos intervalos. Neste caso prático utilizou-se a abordagem de arrependimento minimax (MRA), proposta por Wang, Greatbanks e Yang (2005) e descrita no capítulo anterior. Os cálculos relativos a esta abordagem e que permitem obter os *rankings* apresentados na coluna 6 da tabela 4.3. são apresentados no apêndice 1. Nessa tabela são também apresentados os *rankings* obtidos pelos outros modelos/abordagens selecionados, incluindo os modelos clássicos de eficiência otimista e pessimista. Ainda, nessa tabela, o valor 1 refere-se às instituições bancárias com maior *performance* e o valor 19 refere-se às instituições bancárias com menor *performance*.

Da observação da tabela 4.3, verifica-se que os *rankings* fornecidos pelos modelos clássicos, quer relativos à eficiência otimista quer relativos à eficiência pessimista, permitem constatar que existem várias instituições com o mesmo valor de *ranking*, em correspondência com o que já foi referido acerca dos resultados de eficiência obtidos por esses modelos e apresentados na tabela 4.2, não sendo por isso possível estabelecer um *ranking*, em termos de superioridade de *performance*, para todas as instituições bancárias, usando aqueles modelos.

Contudo, usando os modelos/abordagens baseados nesses modelos clássicos para obtenção de *rankings* verifica-se que é possível estabelecer um *ranking*, em termos de superioridade de *performance*, para todas ou quase todas as instituições. Relativamente à média geométrica, verifica-se que esta abordagem permite obter um tal *ranking* para todas as instituições com exceção das instituições 03 (Banco ActivoBank) e 11 (Caixa – Banco de Investimento), que são as instituições que estão em ambas as fronteiras, de eficiência e ineficiência.

Tabela 4.3 – *Rankings* obtidos pelos modelos selecionados

	Bancos	Eficiência Otimista	Eficiência Pessimista	Média Geométrica	Azizi e Wang (2013)	CDI-I (Shen <i>et al.</i>, 2016)	CDI-II (Shen <i>et al.</i>, 2016)
01	Banco BIC Português	10	6	6	6	10	5
02	Banco Comercial Português	14	12	14	14	14	14
03	Banco ActivoBank	1	12	12	13	8	12
04	Banco de Investimento Global.	17	12	17	18	17	17
05	Banco Finantia	1	9	9	9	6	9
06	Banco Invest	1	4	3	3	3	3
07	Banco Carregosa	16	12	16	16	16	16
08	Caixa Central de Crédito Agrícola Mútuo	19	12	19	19	19	19
09	Caixa Económica Montepio Geral	15	12	15	15	15	15
10	Caixa Geral de Depósitos	13	10	11	10	13	11
11	Caixa - Banco de Investimento.	1	12	12	11	9	13
12	BEST - Banco Eletrónico de Serviço Total	1	11	10	12	7	10
13	Banco BPI	1	5	4	5	4	4
14	Banco Santander Totta	1	1	1	1	1	1
15	Banco Bilbao Vizcaya Argentaria (Portugal)	1	8	8	8	5	8
16	Bankinter	1	3	2	4	2	2
17	BNP Paribas	18	12	18	17	18	18
18	Caixa Económica da Misericórdia de Angra do Heroísmo	12	2	5	2	12	6
19	Novo Banco dos Açores	11	7	7	7	11	7

Fonte: Elaboração própria.

Estas duas instituições são também as únicas que não são discriminadas pelas abordagens CDI-I e CDI-II de Shen *et al.* (2016). Contudo, usando os valores obtidos pelo modelo de super-ineficiência proposto pelos autores, verifica-se que a instituição 03 (Banco ActivoBank) tem *performance* superior à da instituição 11 (Caixa – Banco de Investimento). Deste modo obtém-se um *ranking*, em termos de superioridade de *performance*, para todas as instituições.

No que respeita aos modelos propostos por Azizi e Wang (2013) e à abordagem de arrendimento minimax (MRA) verifica-se que, neste caso, se obtém um *ranking*, em termos de superioridade de *performance*, para todas as instituições bancárias, isto é um *ranking* completo. As abordagens CDI-I e CDI-II de Shen *et al.* (2016) também permitem, neste caso, obter um tal *ranking*, mas apenas depois de usar a informação fornecida pela super-ineficiência.

Para facilitar a comparação dos *rankings* obtidos pelos quatro modelos/abordagens, considere-se o gráfico relativo à tabela 4.3, apresentado na figura 5.1.

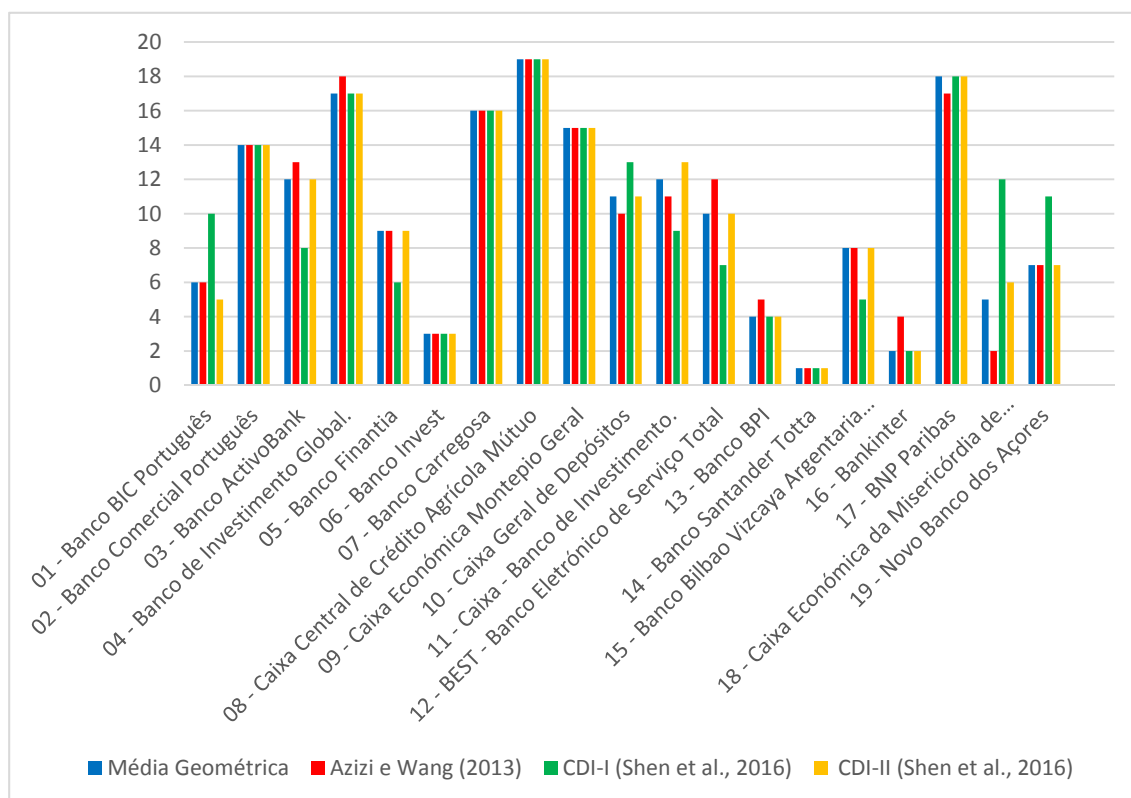


Figura 5.1 – Gráfico dos *rankings* obtidos pela média geométrica, modelo de Azizi e Wang (2013) e abordagens CDI-I e CDI-II de Shen *et al.* (2016)

Fonte: Elaboração própria

Da observação do gráfico da figura 5.1, verifica-se que existem seis instituições que obtiveram a mesma posição nos *rankings* fornecidos por todos os modelos/abordagens, que são as instituições 14 (Banco Santander Totta), 06 (Banco Invest), 02 (Banco Comercial Português), 09 (Caixa Económica Montepio Geral), 07 (Banco Carregosa) e 08 (Caixa Central de Crédito Agrícola Mútuo), que obtiveram as posições 1, 3, 14, 15, 16 e 19, respetivamente. Existem três instituições com a diferença de 1 entre os *rankings*, uma com a diferença de 2, três com a diferença de 3, duas com a diferença de 4, três com a diferença de 5 e uma com a diferença de 10. Note-se que as maiores diferenças, nomeadamente as diferenças de 5 e 10 são devidas aos *rankings* fornecidos pela abordagem CDI-I de Shen *et al.* (2016).

Excluindo esta abordagem da análise, isto é, comparando os *rankings* fornecidos pela média geométrica, pelo modelo de Azizi e Wang (2013) e pela abordagem CDI-II de Shen *et al.* (2013) verifica-se que existem mais instituições com o mesmo *ranking* e que as diferenças entre os *rankings* são consideravelmente menores como se pode observar através do gráfico apresentado na figura 5.2.

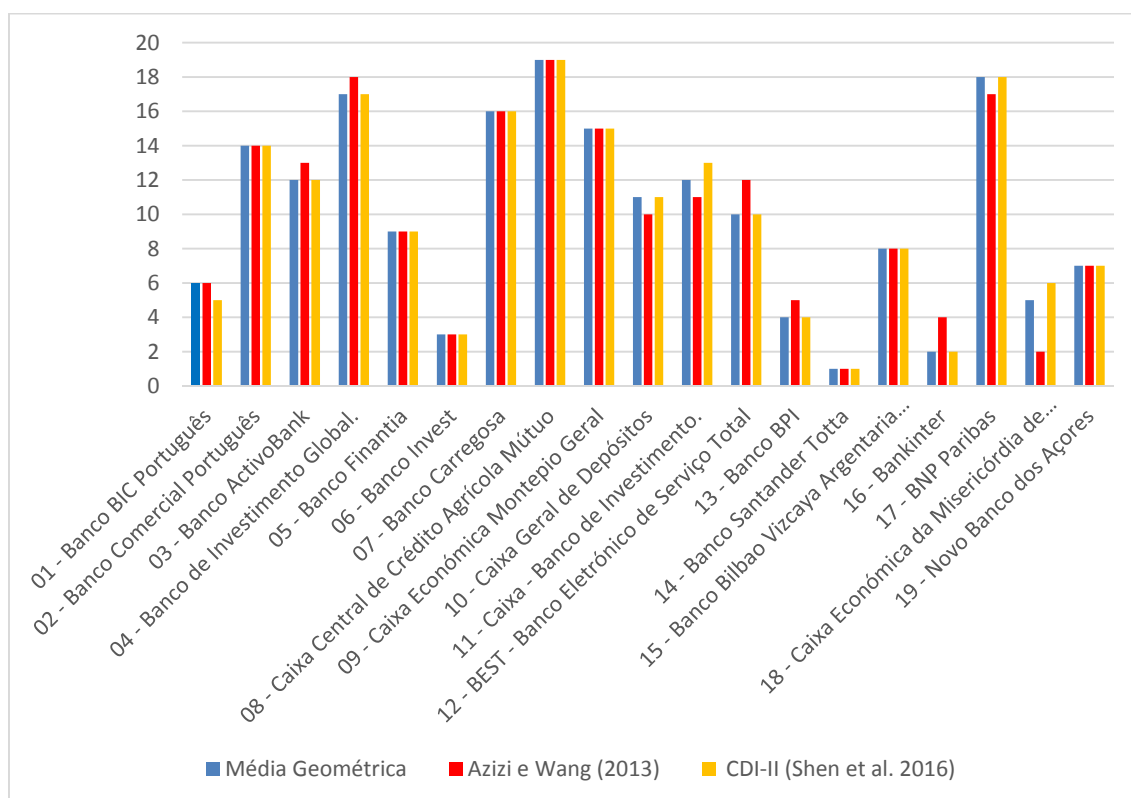


Figura 5.2 – Gráfico dos *rankings* obtidos pela média geométrica, modelo Azizi e Wang (2013) e abordagem CDI-II de Shen *et al.* (2016)

Fonte: Elaboração própria

De facto, da observação desse gráfico, verifica-se que existem nove instituições que ocupam a mesma posição nos três *rankings*, seis que apresentam a diferença de 1 nos *rankings*, três com uma diferença de 2 e uma com diferença de 4. Constatação similar ocorre quando se comparam os *rankings* fornecidos pela média geométrica e pelo modelo de Azizi e Wang (2013), como se pode observar através do gráfico apresentado na figura 5.3.

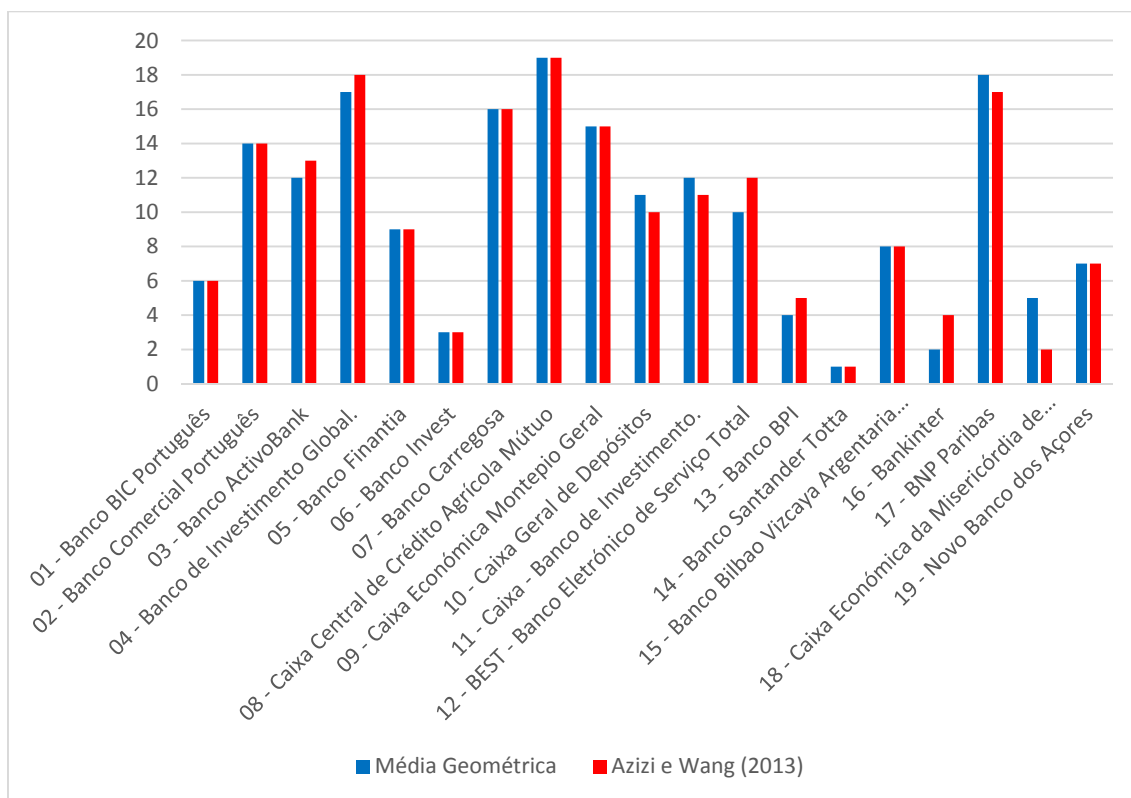


Figura 5.3 – Gráfico dos *rankings* obtidos pela média geométrica e modelo Azizi e Wang (2013)

Fonte: Elaboração própria.

Neste caso, existem dez instituições que ocupam a mesma posição no *ranking*, seis que apresentam a diferença de 1 nos *rankings*, duas com uma diferença de 2 e uma com diferença de 3.

Finalmente, comparando os *rankings* fornecidos pela média geométrica e pela abordagem CDI-II de Shen *et al.* (2016), o número de instituições que ocupam a mesma posição nos dois *rankings* aumenta para dezasseis, existindo apenas três instituições com a diferença de 1 nesses *rankings*, como pode facilmente ser observado através do gráfico apresentado na figura 5.3.

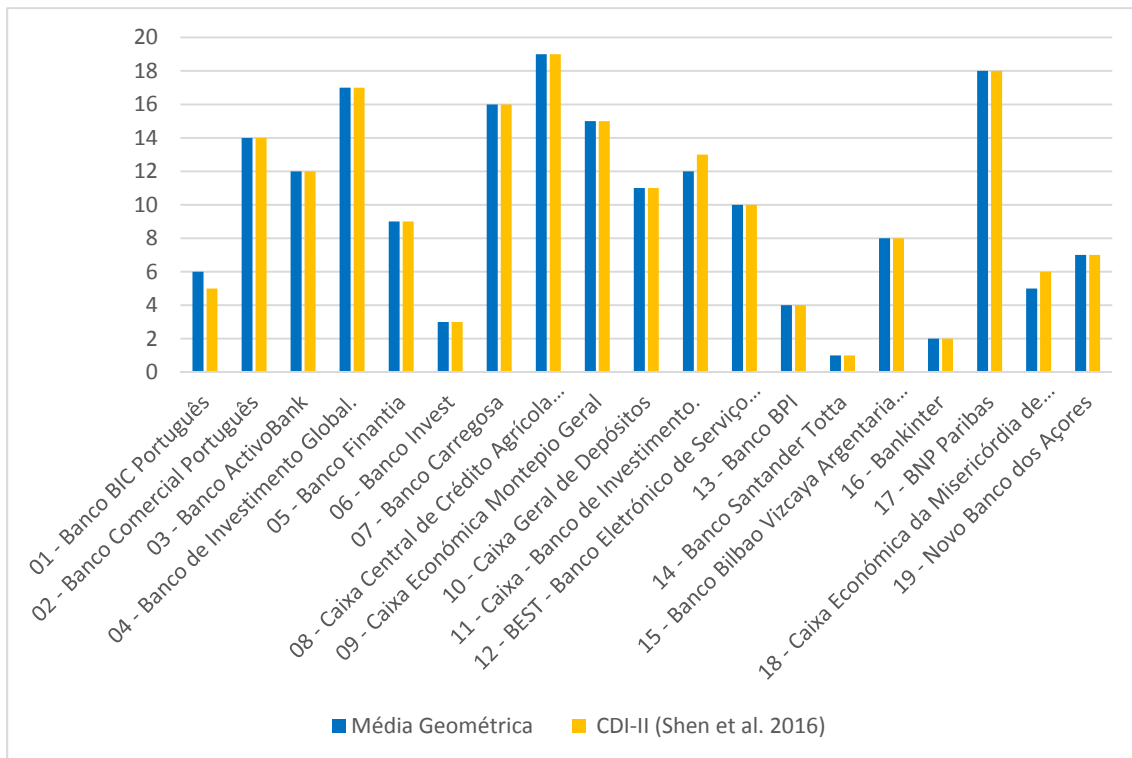


Figura 5.4 – Gráfico dos *rankings* obtidos pela média geométrica e abordagem CDI-II de Shen *et al.* (2016)

Fonte: Elaboração própria

A terminar esta análise aos resultados obtidos, de referir que o modelo de Azizi e Wang (2013) foi o que apresentou maior poder de discriminação e, conseqüentemente, o que permitiu estabelecer um *ranking*, em termos de superioridade de *performance*, entre todas as instituições bancárias em avaliação. Este *ranking* completo também foi possível obter com as abordagens CDI-I e CDI-II de Shen *et al.* (2016) e com o recurso à informação dada pelo modelo de super-ineficiência. Sem essa informação, aquelas abordagens, assim como o método da média geométrica, não conseguiram discriminar as duas instituições bancárias que são simultaneamente eficientes e ineficientes.

5. Conclusões

Neste trabalho foi apresentado um estudo, no âmbito da metodologia DEA, sobre o cálculo da eficiência relativa de um conjunto de DMUs homogêneas a partir de dois pontos de vista, otimista e pessimista, designadas de eficiência otimista e eficiência pessimista, respetivamente. Este estudo inclui o uso destes dois tipos de eficiência para a obtenção de *rankings* entre as diversas DMUs.

A eficiência otimista, obtida através dos modelos clássicos da DEA, permite que um número considerável de DMUs sejam classificadas como eficientes, apresentando assim um fraco poder de discriminação e não permitindo, conseqüentemente, estabelecer um *ranking*, em termos de superioridade de *performance*, entre as diversas DMUs. Idêntica desvantagem ocorre com os modelos de eficiência pessimista baseados nos modelos clássicos da DEA, por permitirem que várias DMUs sejam classificadas como ineficientes. Além disso, estes dois pontos de vista extremos, quando usados isoladamente, conduzem a uma avaliação enviesada e pouco realista, como se verificou ao longo deste estudo.

No entanto, como se pôde constatar, quando usadas conjuntamente, estes dois tipos de eficiência permitem uma avaliação mais realista assim como um maior poder de discriminação entre as DMUs e, conseqüentemente, estabelecer um *ranking*, em termos de superioridade de *performance*, entre todas, ou quase todas, as DMUs em avaliação. Tal acontece quando se usam abordagens mais ou menos intuitivas baseadas naqueles dois tipos de eficiência, apresentadas no capítulo 3.

De forma a ter uma ideia mais precisa dos modelos/abordagens apresentados neste estudo e das suas diferenças, os mesmos foram aplicados para a avaliação e obtenção de *rankings* de 19 instituições bancárias que operavam em Portugal no ano de 2018. Os resultados obtidos identificaram nove instituições classificadas como eficientes, usando o modelo de eficiência otimista CCR, e oito instituições classificadas como ineficientes, através do modelo de eficiência pessimista CCR invertido. Estes resultados mostram que quando aqueles modelos são usados isoladamente, existe um número considerável de instituições que os mesmos não conseguem discriminar, não sendo por isso possível estabelecer um *ranking* completo, isto é, um *ranking* em termos de superioridade de *performance*, entre todas as instituições em avaliação.

No entanto, usando as abordagens da média geométrica, proposta por Wang, Chin e Yang (2007), de Azizi e Wang (2013) e CDI-I e CDI-II, propostas por Shen *et al.* (2016), foi possível discriminar todas, ou quase todas, as instituições e, conseqüentemente, estabelecer um *ranking*, em termos de superioridade de *performance*, para todas, ou quase todas, as instituições. A abordagem de Azizi e Wang (2013) permitiu estabelecer esse *ranking* para todas as instituições enquanto as restantes não permitiram discriminar as duas instituições classificadas simultaneamente como eficientes e ineficientes. Contudo, as abordagens CDI-I e CDI-II de Shen *et al.* (2016) permitem obter tal *ranking* quando complementadas com a informação fornecida pelo modelo de super-ineficiência, proposto pelos autores, para aquelas duas instituições.

Da análise dos resultados, conclui-se ainda que a abordagem CDI-I de Shen *et al.* (2016) que, como vimos no capítulo 3, é aquela que usa os dois tipos de eficiência de uma forma mais intuitiva, apresenta resultados mais desfasados em comparação com os resultados obtidos pelas outras abordagens.

Referências bibliográficas

- Adler, N., Friedman, L., & Sinuany-Stern, Z. (2002). Review of ranking methods in the data envelopment analysis context. *European journal of operational research*, 140(2), 249-265.
- Aldamak, A.; Zolfaghari, S. (2017). Review of efficiency ranking methods in data envelopment analysis. *Measurement*, 106, 161-172.
- Aldamak, A.; Zolfaghari, S. (2017). Review of efficiency ranking methods in data envelopment analysis. *Measurement*, 106, 161-172.
- Associação Portuguesa de Bancos (2019). Boletim Estatístico N°54, 2018 Anual. Disponível em: https://www.apb.pt/content/files/BoletimEstatistico_n54_2018.pdf, consultado a 20 de setembro de 2019.
- Azizi, H. (2011). The interval efficiency based on the optimistic and pessimistic points of view. *Applied Mathematical Modelling*, 35, 2384-2393.
- Azizi, H. (2014). DEA efficiency analysis: A DEA approach with double frontiers. *International Journal of Systems Science*, 45(11), 2289–2300.
- Azizi, H.; Wang, Y. (2013). Improved DEA models for measuring interval efficiencies of decision-making units. *Measurement*, 46, 1325-1332.
- Banker, R. D., Charnes, A., & Cooper, W. W. (1984). Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. *Management science*, 30(9).
- Charnes, A., & Cooper, W. W. (1962). Programming with linear fractional functional. *Naval Research Logistics (NRL)*, 9.
- Comissão de Normalização Contabilista (2013). Sistema de Normalização Contabilística. Disponível em: <http://www.cnc.min-financas.pt/snc.html>, consultado a 20 de setembro de 2019.
- Cooper, W. W., Seiford, L. M., & Tone, K. (2007). Data envelopment analysis: A comprehensive text with models, applications, references and DEA – Solver software. *New York: Springer Science + Business Media*.

- Cooper, W. W., Seiford, L. M., & Zhu, J. (2011). Handbook on data envelopment analysis. *Springer Science & Business Media*, 164.
- Doyle, J.R.; Green, R.H.; Cook, W.D. (1995). Upper and lower bound evaluation of multiattribute objects: Comparison models using linear programming. *Organizational Behavior and Human Decis Process*, 64, 261-273.
- Emrouznejad, A., & Yang, G. (2018). A survey and analysis of the first 40 years of scholarly literature in DEA: 1978-2016. *Socio-Economic Planning Sciences*, 61, 4-8.
- Entani, T.; Maeda, Y.; Tanaka, H. (2002). Dual models of interval DEA and its extension to interval data. *European Journal of Operational Research*, 136, 32-45.
- Liu, J. S., Lu, W., Lu, Y. Y., & Lin, B. J. (2013). Data envelopment analysis 1978-2010: a citation-based literature survey. *Omega - The International Journal of Management Science*, 41, 3-15.
- Parkan, C.; Wang, Y. M. (2000). Worst Efficiency Analysis Based on Inefficient Production Frontier, *Working Paper*, Department of Management Sciences, City University of Hong Kong.
- Shen, W.; Zhang, D.; Liu, W.; Yang, G. (2016). Increasing discrimination of DEA evaluation by utilizing distances to anti-efficient frontiers. *Computers & Operations Research*, 75, 163-173.
- Wang, Y.; Chin, K.; Yang, J. (2007). Measuring the performances of decision-making units geometric average efficiency. *Journal of the Operational Research Society*, 58, 929-937.
- Wang, Y.; Greatbanks, R.; Yang, J. (2005). Interval efficiency assessment using data envelopment analysis. *Fuzzy Sets and Systems*, 153, 347-370.
- Wang, Y.; Luo, Y. (2006). DEA efficiency assessment using ideal and anti-ideal decision making units. *Applied Mathematics and Computation*, 173, 902-915.
- Wang, Y.; Yang, J. (2007). Measuring the performances of decisions-making units using interval efficiencies. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 198, 253-267.
- Yamada, Y.; Matui, T.; Sugiyama, M. (1994). New analysis of efficiency based on DEA. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 37(2), 158-167. (In Japanese).

APÊNDICE 1 - Determinação do *ranking* usando a abordagem de arrependimento máximo proposta por Wang, Greatbanks e Yang (2005)

		Mínimo 0,633058	Nº <i>Ranking</i> 1			Mínimo 0,685266	Nº <i>Ranking</i> 2		
a_i^L	a_j^U	$\max_{j \neq i}(a_j^U)$	$\max[\max_{j \neq i}(a_j^U) - a_i^L, 0]$	a_i^L	a_j^U	$\max_{j \neq i}(a_j^U)$	$\max[\max_{j \neq i}(a_j^U) - a_i^L, 0]$		
1	0,282829	0,992272	1,000000	0,717171	1	0,282829	0,992272	1,000000	0,717171
2	0,130159	0,833735	1,000000	0,869841	2	0,130159	0,833735	1,000000	0,869841
3	0,130159	0,910979	1,000000	0,869841	3	0,130159	0,910979	1,000000	0,869841
4	0,130159	0,467157	1,000000	0,869841	4	0,130159	0,467157	1,000000	0,869841
5	0,175139	1,000000	1,000000	0,824861	5	0,175139	1,000000	1,000000	0,824861
6	0,312562	1,000000	1,000000	0,687438	6	0,312562	1,000000	1,000000	0,687438
7	0,130159	0,783546	1,000000	0,869841	7	0,130159	0,783546	1,000000	0,869841
8	0,130159	0,364024	1,000000	0,869841	8	0,130159	0,364024	1,000000	0,869841
9	0,130159	0,831738	1,000000	0,869841	9	0,130159	0,831738	1,000000	0,869841
10	0,161868	0,820688	1,000000	0,838132	10	0,161868	0,820688	1,000000	0,838132
11	0,130159	1,000000	1,000000	0,869841	11	0,130159	1,000000	1,000000	0,869841
12	0,149259	0,973582	1,000000	0,850741	12	0,149259	0,973582	1,000000	0,850741
13	0,299675	1,000000	1,000000	0,700325	13	0,299675	1,000000	1,000000	0,700325
14	0,366942	1,000000	1,000000	0,633058	15	0,214100	0,875267	1,000000	0,785900
15	0,214100	0,875267	1,000000	0,785900	16	0,310022	1,000000	1,000000	0,689978
16	0,310022	1,000000	1,000000	0,689978	17	0,130159	0,520492	1,000000	0,869841
17	0,130159	0,520492	1,000000	0,869841	18	0,314734	0,938377	1,000000	0,685266
18	0,314734	0,938377	1,000000	0,685266	19	0,270039	0,977700	1,000000	0,729961
19	0,270039	0,977700	1,000000	0,729961					

		Mínimo 0,687438	Nº <i>Ranking</i> 3			Mínimo 0,689978	Nº <i>Ranking</i> 4		
a_i^L	a_j^U	$\max_{j \neq i}(a_j^U)$	$\max[\max_{j \neq i}(a_j^U) - a_i^L, 0]$	a_i^L	a_j^U	$\max_{j \neq i}(a_j^U)$	$\max[\max_{j \neq i}(a_j^U) - a_i^L, 0]$		
1	0,282829	0,992272	1,000000	0,717171	1	0,282829	0,992272	1,000000	0,717171
2	0,130159	0,833735	1,000000	0,869841	2	0,130159	0,833735	1,000000	0,869841
3	0,130159	0,910979	1,000000	0,869841	3	0,130159	0,910979	1,000000	0,869841
4	0,130159	0,467157	1,000000	0,869841	4	0,130159	0,467157	1,000000	0,869841
5	0,175139	1,000000	1,000000	0,824861	5	0,175139	1,000000	1,000000	0,824861
6	0,312562	1,000000	1,000000	0,687438	7	0,130159	0,783546	1,000000	0,869841
7	0,130159	0,783546	1,000000	0,869841	8	0,130159	0,364024	1,000000	0,869841
8	0,130159	0,364024	1,000000	0,869841	9	0,130159	0,831738	1,000000	0,869841
9	0,130159	0,831738	1,000000	0,869841	10	0,161868	0,820688	1,000000	0,838132
10	0,161868	0,820688	1,000000	0,838132	11	0,130159	1,000000	1,000000	0,869841
11	0,130159	1,000000	1,000000	0,869841	12	0,149259	0,973582	1,000000	0,850741
12	0,149259	0,973582	1,000000	0,850741	13	0,299675	1,000000	1,000000	0,700325
13	0,299675	1,000000	1,000000	0,700325	15	0,214100	0,875267	1,000000	0,785900
15	0,214100	0,875267	1,000000	0,785900	16	0,310022	1,000000	1,000000	0,689978
16	0,310022	1,000000	1,000000	0,689978	17	0,130159	0,520492	1,000000	0,869841
17	0,130159	0,520492	1,000000	0,869841	19	0,270039	0,977700	1,000000	0,869841

	a_i^L	a_j^U	Mínimo 0,700325	Nº Ranking 5
	a_i^L	a_j^U	$\max_{j \neq i}(a_j^U)$	$\max[\max_{j \neq i}(a_j^U) - a_i^L, 0]$
1	0,282829	0,992272	1,000000	0,717171
2	0,130159	0,833735	1,000000	0,869841
3	0,130159	0,910979	1,000000	0,869841
4	0,130159	0,467157	1,000000	0,869841
5	0,175139	1,000000	1,000000	0,824861
7	0,130159	0,783546	1,000000	0,869841
8	0,130159	0,364024	1,000000	0,869841
9	0,130159	0,831738	1,000000	0,869841
10	0,161868	0,820688	1,000000	0,838132
11	0,130159	1,000000	1,000000	0,869841
12	0,149259	0,973582	1,000000	0,850741
13	0,299675	1,000000	1,000000	0,700325
15	0,214100	0,875267	1,000000	0,785900
17	0,130159	0,520492	1,000000	0,869841
19	0,270039	0,977700	1,000000	0,729961

	a_i^L	a_j^U	Mínimo 0,717171	Nº Ranking 6
	a_i^L	a_j^U	$\max_{j \neq i}(a_j^U)$	$\max[\max_{j \neq i}(a_j^U) - a_i^L, 0]$
1	0,282829	0,992272	1,000000	0,717171
2	0,130159	0,833735	1,000000	0,869841
3	0,130159	0,910979	1,000000	0,869841
4	0,130159	0,467157	1,000000	0,869841
5	0,175139	1,000000	1,000000	0,824861
7	0,130159	0,783546	1,000000	0,869841
8	0,130159	0,364024	1,000000	0,869841
9	0,130159	0,831738	1,000000	0,869841
10	0,161868	0,820688	1,000000	0,838132
11	0,130159	1,000000	1,000000	0,869841
12	0,149259	0,973582	1,000000	0,850741
15	0,214100	0,875267	1,000000	0,785900
17	0,130159	0,520492	1,000000	0,869841
19	0,270039	0,977700	1,000000	0,729961

	a_i^L	a_j^U	Mínimo 0,729961	Nº Ranking 7
	a_i^L	a_j^U	$\max_{j \neq i}(a_j^U)$	$\max[\max_{j \neq i}(a_j^U) - a_i^L, 0]$
2	0,130159	0,833735	1,000000	0,869841
3	0,130159	0,910979	1,000000	0,869841
4	0,130159	0,467157	1,000000	0,869841
5	0,175139	1,000000	1,000000	0,824861
7	0,130159	0,783546	1,000000	0,869841
8	0,130159	0,364024	1,000000	0,869841
9	0,130159	0,831738	1,000000	0,869841
10	0,161868	0,820688	1,000000	0,838132
11	0,130159	1,000000	1,000000	0,869841
12	0,149259	0,973582	1,000000	0,850741
15	0,214100	0,875267	1,000000	0,785900
17	0,130159	0,520492	1,000000	0,869841
19	0,270039	0,977700	1,000000	0,729961

	a_i^L	a_j^U	Mínimo 0,785900	Nº Ranking 8
	a_i^L	a_j^U	$\max_{j \neq i}(a_j^U)$	$\max[\max_{j \neq i}(a_j^U) - a_i^L, 0]$
2	0,130159	0,833735	1,000000	0,869841
3	0,130159	0,910979	1,000000	0,869841
4	0,130159	0,467157	1,000000	0,869841
5	0,175139	1,000000	1,000000	0,824861
7	0,130159	0,783546	1,000000	0,869841
8	0,130159	0,364024	1,000000	0,869841
9	0,130159	0,831738	1,000000	0,869841
10	0,161868	0,820688	1,000000	0,838132
11	0,130159	1,000000	1,000000	0,869841
12	0,149259	0,973582	1,000000	0,850741
15	0,214100	0,875267	1,000000	0,785900
17	0,130159	0,520492	1,000000	0,869841

			Mínimo 0,824861	Nº Ranking 9
	a_i^L	a_j^U	$\max_{j \neq i}(a_j^U)$	$\max[\max_{j \neq i}(a_j^U) - a_i^L, 0]$
2	0,130159	0,833735	1,000000	0,869841
3	0,130159	0,910979	1,000000	0,869841
4	0,130159	0,467157	1,000000	0,869841
5	0,175139	1,000000	1,000000	0,824861
7	0,130159	0,783546	1,000000	0,869841
8	0,130159	0,364024	1,000000	0,869841
9	0,130159	0,831738	1,000000	0,869841
10	0,161868	0,820688	1,000000	0,838132
11	0,130159	1,000000	1,000000	0,869841
12	0,149259	0,973582	1,000000	0,850741
17	0,130159	0,520492	1,000000	0,869841

			Mínimo 0,838132	Nº Ranking 10
	a_i^L	a_j^U	$\max_{j \neq i}(a_j^U)$	$\max[\max_{j \neq i}(a_j^U) - a_i^L, 0]$
2	0,130159	0,833735	1,000000	0,869841
3	0,130159	0,910979	1,000000	0,869841
4	0,130159	0,467157	1,000000	0,869841
7	0,130159	0,783546	1,000000	0,869841
8	0,130159	0,364024	1,000000	0,869841
9	0,130159	0,831738	1,000000	0,869841
10	0,161868	0,820688	1,000000	0,838132
11	0,130159	1,000000	0,973582	0,843423
12	0,149259	0,973582	1,000000	0,850741
17	0,130159	0,520492	1,000000	0,869841

			Mínimo 0,843423	Nº Ranking 11
	a_i^L	a_j^U	$\max_{j \neq i}(a_j^U)$	$\max[\max_{j \neq i}(a_j^U) - a_i^L, 0]$
2	0,130159	0,833735	1,000000	0,869841
3	0,130159	0,910979	1,000000	0,869841
4	0,130159	0,467157	1,000000	0,869841
7	0,130159	0,783546	1,000000	0,869841
8	0,130159	0,364024	1,000000	0,869841
9	0,130159	0,831738	1,000000	0,869841
11	0,130159	1,000000	0,973582	0,843423
12	0,149259	0,973582	1,000000	0,850741
17	0,130159	0,520492	1,000000	0,869841

			Mínimo 0,761720	Nº Ranking 12
	a_i^L	a_j^U	$\max_{j \neq i}(a_j^U)$	$\max[\max_{j \neq i}(a_j^U) - a_i^L, 0]$
2	0,130159	0,833735	0,973582	0,843423
3	0,130159	0,910979	0,973582	0,843423
4	0,130159	0,467157	0,973582	0,843423
7	0,130159	0,783546	0,973582	0,843423
8	0,130159	0,364024	0,973582	0,843423
9	0,130159	0,831738	0,973582	0,843423
12	0,149259	0,973582	0,910979	0,761720
17	0,130159	0,520492	0,973582	0,843423

			Mínimo 0,703576	Nº Ranking 13
	a_i^L	a_j^U	$\max_{j \neq i}(a_j^U)$	$\max[\max_{j \neq i}(a_j^U) - a_i^L, 0]$
2	0,130159	0,833735	0,910979	0,780819
3	0,130159	0,910979	0,833735	0,703576
4	0,130159	0,467157	0,910979	0,780819
7	0,130159	0,783546	0,910979	0,780819
8	0,130159	0,364024	0,910979	0,780819
9	0,130159	0,831738	0,910979	0,780819
17	0,130159	0,520492	0,910979	0,780819

			Mínimo 0,701579	Nº Ranking 14
	a_i^L	a_j^U	$\max_{j \neq i}(a_j^U)$	$\max[\max_{j \neq i}(a_j^U) - a_i^L, 0]$
2	0,130159	0,833735	0,831738	0,701579
4	0,130159	0,467157	0,833735	0,703576
7	0,130159	0,783546	0,833735	0,703576
8	0,130159	0,364024	0,833735	0,703576
9	0,130159	0,831738	0,833735	0,703576
17	0,130159	0,520492	0,833735	0,703576

			Mínimo	Nº Ranking
			0,653387	15
a_i^L	a_j^U	$\max_{j \neq i}(a_j^U)$	$\max[\max_{j \neq i}(a_j^U) - a_i^L, 0]$	
4	0,130159	0,467157	0,831738	0,701579
7	0,130159	0,783546	0,831738	0,701579
8	0,130159	0,364024	0,831738	0,701579
9	0,130159	0,831738	0,783546	0,653387
17	0,130159	0,520492	0,831738	0,701579

			Mínimo	Nº Ranking
			0,390333	16
a_i^L	a_j^U	$\max_{j \neq i}(a_j^U)$	$\max[\max_{j \neq i}(a_j^U) - a_i^L, 0]$	
4	0,130159	0,467157	0,783546	0,653387
7	0,130159	0,783546	0,520492	0,390333
8	0,130159	0,364024	0,783546	0,653387
17	0,130159	0,520492	0,783546	0,653387

			Mínimo	Nº Ranking
			0,336997	17
a_i^L	a_j^U	$\max_{j \neq i}(a_j^U)$	$\max[\max_{j \neq i}(a_j^U) - a_i^L, 0]$	
4	0,130159	0,467157	0,520492	0,390333
8	0,130159	0,364024	0,520492	0,390333
17	0,130159	0,520492	0,467157	0,336997

			Mínimo	Nº Ranking
			0,233865	18
a_i^L	a_j^U	$\max_{j \neq i}(a_j^U)$	$\max[\max_{j \neq i}(a_j^U) - a_i^L, 0]$	
4	0,130159	0,467157	0,364024	0,233865
8	0,130159	0,364024	0,467157	0,336997

			Mínimo	Nº Ranking
				19
a_i^L	a_j^U	$\max_{j \neq i}(a_j^U)$	$\max[\max_{j \neq i}(a_j^U) - a_i^L, 0]$	
8	0,130159	0,364024		