

INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DE LISBOA

Departamento de Engenharia Eletrotécnica de Energia e Automação



Controlo de um motor DC através de lógica *fuzzy*

Francisco de Matos Joaquim

(Licenciado em Engenharia Eletrotécnica)

**Dissertação para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia
Eletrotécnica – Ramo de Automação e Eletrónica Industrial**

Orientadores:

Professor Pedro Miguel Neves da Fonte

Professora Rita Marcos Fontes Murta Pereira

Júri:

Presidente:

Professor Hiren Canacsinh

Vogais:

Professor Ricardo Jorge Ferreira Luís

Professor Pedro Miguel Neves da Fonte

12/2023

RESUMO

Nesta dissertação sintetiza-se um controlador baseado em lógica *fuzzy* e um controlador PID, aplicado a um motor DC de excitação separada. É feito o estado de arte do controlo da velocidade do motor em estudo e da teoria de conjuntos clássicos e a teoria de conjuntos *fuzzy*, nomeadamente a descrição de um sistema de inferência *fuzzy*, e com a ajuda da modelização do motor DC, é desenvolvido um modelo de simulação onde é possível fazer o controlo da velocidade de rotação do motor através da regulação da corrente de excitação para a resposta do sistema face a uma variação de carga.

Com a sintetização do controlador PID através da utilização do método de ajuste de parâmetros Ziegler-Nichols, e do controlador baseado em lógica *fuzzy*, com recurso a uma Tabela de regras e uma Tabela de funções linguísticas, é possível simular o controlo do motor DC através da regulação da corrente de excitação.

PALAVRAS-CHAVE

Controlo baseado em lógica *fuzzy*, Motor DC de excitação separada, controlo PID

ABSTRACT

This dissertation synthesizes a controller based on fuzzy logic and a PID controller, applied to a separately excited DC machine. It is done the state of the art of speed control of the machine under study and the classical set theory and the fuzzy set theory are presented, namely the description of a fuzzy inference system, and with the help of the modelling of the DC motor, a simulation model where it is possible to control the motor rotation speed by regulating the excitation current for the system's response to a load variation.

With the synthesis of the PID controller using the Ziegler-Nichols parameter adjustment method, and the controller based on fuzzy logic, using a table of rules and a table of linguistic functions, it is possible to simulate the control of the DC motor through regulating the field current.

KEYWORDS

Fuzzy logic control, separately excited DC Motor, PID control

LISTA DE SÍMBOLOS

\tilde{A}	Conjunto <i>fuzzy</i>
\bar{B}	Complemento de B
$f(\tilde{A})$	Função de um conjunto fuzzy \tilde{A}
\inf	Ínfimo (maior limite inferior)
$[i]^T$	Transposta de $[i]$
P_n	Propriedades de membros de um subconjunto
R^n	Espaço euclidiano n-dimensional
$R(x, y)$	Subconjunto do produto cartesiano
S	Conjunto universal
\sup	Supremo (menor limite superior)
\underline{s}_1	Limite inferior
\bar{s}_1	Limite superior
$X_A(x)$	Função característica de um conjunto/subconjunto
$\mu_{\tilde{A}}(x)$	grau de pertença de x em \tilde{A}
$ $	Tal que
\neq	Diferente de

\times	Produto cartesiano entre conjuntos
\forall	Para todos os valores pertencentes a um conjunto/subconjunto
\emptyset	Conjunto/subconjunto vazio
$\bar{\emptyset}$	Subconjunto universal
Δ	Variação de um valor
\in	Pertence a um conjunto/subconjunto
\notin	Não pertence a um conjunto/subconjunto
\wedge	Logical "AND"
\vee	Logical "OR"
\cap	Interseção de dois conjuntos
\cup	União de dois conjuntos
\subset	Subconjunto estritamente próprio
\subseteq	Subconjunto de um conjunto/subconjunto ou igual a conjunto/subconjunto
\circ	Composição entre duas relações
\mathbb{R}	Conjunto de números reais

LISTA DE VARIÁVEIS

FEM

Força eletromotriz [V]

I_a	Corrente da armadura [A]
I_{exc}	Corrente de excitação [A]
J	Momento de inercia [$Kg \cdot m^2$]
k_a	Constante da armadura
K_D	Ganho derivativo do PID
K_I	Ganho integral do PID
K_P	Ganho proporcional do PID
K_{dw}	Coefficiente de atrito dinâmico
K_e	Coefficiente de atrito estático
L_{dr}	Indutância eixo-d do rotor [H]
L_{ds}	Indutância eixo-d do estator [H]
L_{qr}	Indutância eixo-q do rotor [H]
L_{qs}	Indutância eixo-q do estator [H]
M_d	Indutância mútua de eixo-d [H]
M_q	Indutância mútua de eixo-q [H]
P	Potência [W]
p	Par de pólos
P_{Cu}	Potência, perdas no cobre [W]
P_{NOM}	Potência nominal [W]
R_a	Resistência da armadura [Ω]
R_{dr}	Resistência eixo-d do rotor [Ω]
R_{ds}	Resistência eixo-d do estator [Ω]
R_{qr}	Resistência eixo-q do rotor [Ω]

R_{qs}	Resistência eixo-q do estator [Ω]
T	Binário [N.m]
T_e	Binário eletromagnético [N.m]
U_a	Tensão da armadura [V]
u_{dr}	Tensão eixo-d do rotor [V]
u_{ds}	Tensão eixo-d do estator [V]
u_{qr}	Tensão eixo-q do rotor [V]
u_{qs}	Tensão eixo-q do estator [V]
τ_A	Constante de tempo
τ_M	Constante de tempo
φ	Fluxo magnético [Wb]
ω	Velocidade de rotação [RPM]

ABREVIATURAS

AC – Corrente alternada

DC – Corrente contínua

FLC – Controlador de lógica *fuzzy*

IoT – Internet of Things

NN – Rede Neuronal

PID – Proporcional Integral

TS – Takagi-Sugeno

ÍNDICE

Capítulo 1 - Introdução.....	1
1.1 – Motivação do trabalho	2
1.2 – Objetivos.....	2
1.3 – Enquadramento do trabalho	3
1.4 – Estrutura da tese.....	3
Capítulo 2 - Estado de arte	4
2. - Métodos existentes para controlo da velocidade da motor DC	4
2.1 – Controlo PID e Rede Neuronal Artificial.....	4
2.2 – Controlador baseado em lógica <i>fuzzy</i> com combinação de controlo da tensão da armadura e controlo da corrente de campo	4
2.3 – Controlador baseado em lógica <i>fuzzy</i> com e sem PID	6
Capítulo 3 – Teoria dos Conjuntos Clássicos e Teoria dos Conjuntos <i>fuzzy</i>	8
3. - Introdução	8
3.1 – Conceitos Fundamentais da teoria dos conjuntos	8
3.2 – Teoria dos conjuntos <i>fuzzy</i>	12
3.3 – Relações <i>fuzzy</i> e relações clássicas	34
3.4 – Introdução à teoria da lógica <i>fuzzy</i>	40
3.5 – Sistema de inferência <i>fuzzy</i>	57
3.6 – Conclusões	63
Capítulo 4 – Controlo de velocidade do Motor DC	65
4. - Introdução	65
4.1 – Modelo da Máquina DC.....	70
4.2 – Descrição dos controladores	72
4.3 – Conclusões	75
Capítulo 5 - Implementação em software de simulação	Error! Bookmark not defined.
5. - Introdução	77
5.1 – Modelo do motor DC controlado com controlador baseado em lógica <i>fuzzy</i>	77
5.2 – Modelo do motor DC controlado com controlador PID	83

5.3 – Conclusões	88
Capítulo 6 - Conclusões	89
6. - Perspetivas de desenvolvimento futuro	89
Capítulo 7 - Bibliografia	91

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 3.1 – Exemplo de um conjunto clássico.	12
Figura 3.2 – Exemplo de um conjunto <i>fuzzy</i>	13
Figura 3.3(a) – Exemplo de funções de pertença triangulares.	14
Figura 3.4 – Diversos tipos de funções de pertença.	15
Figura 3.5 – Exemplo das funções de pertença Gaussiana.	16
Figura 3.6 – Representação dos subconjuntos <i>fuzzy</i> A e B.	21
Figura 3.7 – Igualdade dos subconjuntos <i>fuzzy</i> A e B.	21
Figura 3.8 – Interseção dos subconjuntos <i>fuzzy</i> A e B.	22
Figura 3.9 – União dos subconjuntos <i>fuzzy</i> A e B.	22
Figura 3.10 – Complemento do subconjunto <i>fuzzy</i> A.	23
Figura 3.11 – Estrutura de um sistema com duas entradas e uma saída.	26
Figura 3.12 – Um intervalo de confiança no caso bidimensional.	29
Figura 3.13 – Representação do mapeamento do exemplo g.1)	37
Figura 3.14 – Função de pertença triangular.	48
Figura 3.15 – Função de pertença trapezoidal.	48
Figura 3.16 – União da função de pertença triangular e trapezoidal.	48
Figura 3.17 – Princípio da pertença máxima.	49
Figura 3.18 – Método do centróide.	50
Figura 3.19 – Método da média ponderada.	52
Figura 3.20 – Método da pertença média-máxima.	53
Figura 3.21 – Exemplo conjunto <i>fuzzy</i> 1	54
Figura 3.22 – Exemplo conjunto <i>fuzzy</i> 2	54
Figura 3.23 – Exemplo conjunto <i>fuzzy</i> 3	54
Figura 3.24 – Método do centro de maior área.	56
Figura 3.25 – Sistema de inferência <i>fuzzy</i>	58
Figura 4.1 – Caraterística magnética do motor.	67
Figura 4.2 – Caraterística de Velocidade (velocidade em função da corrente).	68
Figura 4.3 – Caraterística de Binário.	69
Figura 4.4 – Caraterística Mecânica.	70
Figura 4.5 – Diagrama de blocos do sistema em malha fechada com controlo PID	74
Figura 5.1 – Modelo em Simulink do controlo da velocidade através da corrente de excitação com recurso a um controlador de lógica <i>fuzzy</i>	77

Figura 5.2 – Função de pertinência de entrada, <i>Erro</i>	80
Figura 5.3 – Função de pertinência de entrada, $\Delta erro$	80
Figura 5.4 – Função de pertinência de saída do controlador de lógica fuzzy.....	80
Figura 5.5(a) – Controlo da velocidade com controlo fuzzy para 1200 RPM.....	81
Figura 5.5(b) – Controlo da velocidade com controlo fuzzy para 1200 RPM.....	81
Figura 5.6(a) – Controlo da velocidade com controlo fuzzy para 1500 RPM.....	82
Figura 5.6(b) – Controlo da velocidade com controlo fuzzy para 1500 RPM.....	82
Figura 5.7(a) – Controlo da velocidade com controlo fuzzy para 1800 RPM.....	83
Figura 5.7(b) – Controlo da velocidade com controlo fuzzy para 1800 RPM.....	83
Figura 5.8 – Simulação em Simulink do controlo da velocidade através da corrente de excitação com recurso a um controlador PID..	84
Figura 5.9(a) – Controlo da velocidade com controlo PID para 1200 RPM.	85
Figura 5.9(b) – Controlo da velocidade com controlo PID para 1200 RPM.	85
Figura 5.10(a) – Controlo da velocidade com controlo PID para 1500 RPM.	86
Figura 5.10(b) – Controlo da velocidade com controlo PID para 1500 RPM.	86
Figura 5.11(a) – Controlo da velocidade com controlo PID para 1800 RPM.	87
Figura 5.11(b) – Controlo da velocidade com controlo PID para 1800 RPM.	87

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 3.1 – Propriedades das operações dos conjuntos clássicos	11
Tabela 3.2 - Propriedades das Operações dos Conjuntos <i>fuzzy</i>	24
Tabela 3.3 – Propriedades das operações dos conjuntos <i>fuzzy</i>	32
Tabela 3.4 – Aritmética básica de intervalos.....	33
Tabela 3.5 – Tabela da verdade do processo.	42
Tabela 3.6 – Funções lógicas de duas variáveis.....	45
Tabela 3.7 – Isomorfismos entre a Teoria Clássica dos Conjuntos, Álgebra Booleana e Lógica Clássica.	47
Tabela 4.1 – Parâmetros da chapa de características do motor DC com excitação separada. .	65
Tabela 4.2 – Parâmetros elétricos do motor DC com excitação separada.	65
Tabela 4.3 – Parâmetros mecânicos do motor DC com excitação separada.....	66
Tabela 5.1 – Regras linguísticas simplificada da velocidade.	78
Tabela 5.2 – Regras linguísticas aplicadas na simulação	78
Tabela 5.3 – Valores dos ganhos do controlador PID.....	83
Tabela 5.4 – Vantagens e desvantagens do controlo <i>fuzzy</i>	87
Tabela 5.5 – Vantagens e desvantagens do controlo PID.....	87

Capítulo 1 - INTRODUÇÃO

Ao longo do tempo, foram propostos diversos sistemas de controle que proporcionam o melhor desempenho dos motores em diferentes condições. Por exemplo, controladores lineares são um tipo de sistema de controle que estabelece uma relação linear entre os estados desejados e os atuais do motor. Os controladores lineares são amplamente utilizados na indústria devido à sua simplicidade e bom desempenho; no entanto, os sistemas reais são não lineares e uma abordagem que utilize controle linear pode não ser suficiente para obter o melhor desempenho, porque a dinâmica do modelo é altamente não linear ou porque há sempre incertezas. Por outro lado, os controladores não lineares podem melhorar a estabilidade de sistemas dinâmicos, mas geralmente possuem estruturas mais complexas, de forma que a implementação prática é mais complexa do que a implementação de controladores lineares. Entre os controladores não lineares estão aqueles que utilizam o modelo da dinâmica do sistema (sistemas de controle baseados em modelos matemáticos) que possuem alto desempenho desde que os parâmetros físicos do modelo sejam bem conhecidos. Porém, quando existem diferenças significativas entre os parâmetros conhecidos e os reais, os sistemas de controle baseados em modelos podem funcionar inadequadamente. Mesmo que esses controladores estejam dimensionados de acordo com o modelo, o seu desempenho operacional pode ser afetado pela presença de incertezas paramétricas ou de dinâmicas não modeladas [1].

Existem três métodos de regulação da velocidade do motor DC de excitação separada. São eles, a regulação de velocidade através da tensão da armadura, regulação de velocidade através da variação da corrente de excitação e regulação da velocidade através da variação do valor da resistência externa adicionada em série com o enrolamento da armadura [2]. Diferentes controladores podem ser usados para controlar a velocidade de um motor DC, tais como o controlador PID, o FLC (controlador baseado em lógica *fuzzy*), entre outros. O que torna atrativo a utilização da lógica *fuzzy* é a sua simplicidade de implementação, o seu custo baixo e a possibilidade de projetar o controlador sem conhecer o modelo matemático exato do processo, bastando compreender de forma aprofundada, o comportamento do sistema [3].

1.1 – Motivação do trabalho

No laboratório de máquinas elétricas do ISEL, existe um motor DC que aciona um alternador. A variação de velocidade do motor DC é feita pela corrente de excitação e deste modo variar a velocidade do motor e consequentemente variar a frequência do alternador.

Com a obtenção da característica magnética do motor DC, nota-se que a relação entre a corrente de excitação e a velocidade não é linear, se se optasse por utilizar um controlador PID, seria necessário criar um sistema complexo no qual os parâmetros do controlador (P - Proporcional, I - Integral e D - Derivativo) se ajustassem automaticamente para responder às variações nas características do sistema. Essa abordagem seria complicada e talvez não fosse eficaz o suficiente para garantir um controlo preciso.

Portanto, é nesse contexto que o controlo baseado em lógica *fuzzy* se torna uma escolha mais adequada. O controlo baseado em lógica *fuzzy* permite lidar com sistemas não lineares e variáveis, como o descrito, de uma maneira mais flexível. Em vez de depender de parâmetros fixos, o controlo baseado em lógica *fuzzy* utiliza conjuntos *fuzzy* e regras de inferência para mapear entradas imprecisas em saídas controladas de forma adaptativa. Isso torna o controlo baseado em lógica *fuzzy* capaz de lidar com a complexidade e a variabilidade do sistema, fornecendo uma solução mais robusta para o controlo da corrente de excitação e, consequentemente, para a velocidade e a tensão de saída do alternador no laboratório.

1.2 – Objetivos

Com este trabalho pretende-se controlar a velocidade de um motor DC de excitação separada usando o método de controlo da corrente de excitação e para isso projetou-se um controlador baseado em lógica *fuzzy*.

Os objetivos específicos desta dissertação são:

- Descrever a modelação matemática de sistemas *fuzzy*.
- Sintetizar um controlador *fuzzy* para controlo da velocidade de um motor DC através da corrente de excitação.

- Sintetizar um controlador PID para comparação com o controlador fuzzy.
- Simular o sistema com recurso ao software Matlab/Simulink.

1.3 – Enquadramento do trabalho

Este trabalho enquadra-se no curso de mestrado em Engenharia Eletrotécnica, envolvendo conceitos interdisciplinares e abrangendo as temáticas de acionamentos eletromecânicos, sistemas de controlo e sistemas inteligentes.

1.4 – Estrutura da tese

Esta dissertação está dividida em seis capítulos:

Capítulo 1: É feita uma apresentação do tema da dissertação, do controlador baseado em lógica *fuzzy*, é descrita a motivação, objetivos e organização desta dissertação.

Capítulo 2: Neste capítulo é descrito o estado de arte, em que são descritos os métodos existentes para controlo da velocidade do motor DC, o seu modelo matemático e a resposta comportamental. É também apresentada uma comparação entre os diferentes métodos de controlo por forma a identificar a técnica mais adequada à implementação.

Capítulo 3: Neste capítulo é descrita a formulação matemática referentes à teoria dos conjuntos clássicos e à teoria dos conjuntos *fuzzy*.

Capítulo 4: É apresentado o modelo da máquina DC e a descrição dos controladores.

Capítulo 5: É apresentado o modelo em Matlab/Simulink e as simulações realizadas. É feita comparações entre ambos os controladores em termos de resposta.

Capítulo 6: Apresenta-se as conclusões do trabalho e faz-se a perspetiva de trabalhos futuros.

Capítulo 2 - ESTADO DE ARTE

2. - Métodos existentes para controlo da velocidade da motor DC

2.1 – Controlo PID e Rede Neuronal Artificial

Em [4] é feita uma comparação entre um controlador PID e uma rede neuronal artificial (*Neural Network* – NN). É apresentado um estudo sobre a capacidade de aproximação de funções através de NN, para o controlo da velocidade de um motor DC. Os parâmetros da NN foram ajustados para que a resposta do modelo seja igual à do motor DC. De seguida, foi definido o diagrama de blocos do sistema em malha fechada com o controlo PID, bem como os parâmetros do controlador. Como resultado, o PID desenvolvido cumpre os critérios dos indicadores de desempenho do motor. Depois, repete-se a definição dos parâmetros para a NN. O modelo da NN é treinado com a ajuda do algoritmo de retropropagação, que serve para minimizar os erros de saída.

Após a análise de resultados apresentada conclui-se que, com a utilização da NN não existe necessidade de conhecer os parâmetros do modelo ao projetar o controlo do sistema, caso os conjuntos de dados de entrada e de saída do modelo estiverem disponíveis através de medições ou simulações. Neste caso, o controlo com recurso às NN apresenta melhores resultados do que o controlador PID.

2.2 – Controlador baseado em lógica *fuzzy* com combinação de controlo da tensão da armadura e controlo da corrente de campo

Em [2] o objetivo consiste no controlo da velocidade de um motor de excitação separada usando um método de controlo que combina os métodos de controlo através da variação da tensão da armadura e o método de controlo através da variação da corrente de excitação de

forma simultânea, num motor DC de excitação separada, usando lógica *fuzzy*. A velocidade do motor DC de excitação separada pode variar desde zero até à velocidade nominal, através da variação da tensão da armadura na região de binário constante, isto é, na zona de funcionamento linear. Na região de potência constante, o fluxo de campo deve ser reduzido para atingir uma velocidade acima da velocidade nominal. De seguida, foi sintetizado o controlador FLC com algoritmo de inferência Mamdani e funções de pertinência triangulares, uma vez que estes são mais rápidos e facilmente embebidos num microcontrolador.

Nos resultados apresentados, observa-se que o método de controlo combinado tem resposta mais rápida que o método de controlo por variação da tensão da armadura e da corrente de excitação feitos de forma separada.

As respostas do motor para a velocidade nominal mostram que o método de controlo através da variação da corrente de excitação apresenta uma sobrelevação maior que o método de controlo combinado, mas estabiliza mais rapidamente do que quando é usado o método de controlo combinado. Para uma velocidade superior à velocidade nominal usou-se o método de controlo através da variação da corrente de excitação e o método de controlo combinado, mantendo a tensão aos terminais da armadura no seu valor nominal e diminuindo a corrente de excitação na região de potência constante. Pôde-se observar que o método de controlo através da variação da corrente de excitação apresenta uma resposta com melhor tempo de estabelecimento, menor tempo de atraso, tempo de subida mais rápido e tempo de pico menor, do que o método de controlo combinado.

De acordo com [5], alterando o valor da resistência externa em série com o enrolamento da armadura é um método de controlo de velocidade, sendo este equivalente ao método de controlo de velocidade por variação da tensão da armadura. A diferença entre ambos reside no facto de que o controlo de velocidade por variação da resistência externa em série com o enrolamento do rotor, tem maiores perdas por dissipação. O que não acontece no caso de variar a tensão de alimentação. Logo, o controlo de velocidade por variação da resistência externa em série com o enrolamento do rotor é menos eficiente que o controlo de velocidade por variação da tensão da armadura.

Ao aumentar o valor da resistência externa em série com o enrolamento da armadura, diminui a velocidade do motor. O método de controlo da resistência externa em série com o

enrolamento da armadura, portanto, é adequado para operar o motor a uma velocidade inferior à sua velocidade nominal, fornecendo o mesmo binário.

As desvantagens deste método de controlo de velocidade são as seguintes [5]:

- Perda de potência considerável na resistência externa em série com o enrolamento da armadura.
- Perda na eficiência do motor.
- Má regulação de velocidade para os motores shunt e compostos.

Como a corrente de excitação é uma fração muito pequena da corrente total de entrada de um motor, a potência dissipada pela resistência externa é relativamente pequena. Portanto, o método de controlo através da variação da corrente de excitação é economicamente melhor que o método de controlo através da variação da resistência externa adicionada.

A adição de uma resistência em série com o enrolamento de campo faz com que a corrente de excitação e, portanto, o fluxo no motor diminua. Como a velocidade do motor é inversamente proporcional ao seu fluxo, uma diminuição no fluxo resulta num aumento de velocidade. Assim, o método de controlo através da variação da corrente de excitação faz com que o motor opere a uma velocidade superior à sua velocidade nominal.

Este método de controlo de velocidade não é, portanto, satisfatório para motores compostos, porque qualquer diminuição no fluxo produzido pelo enrolamento de campo é compensada por um aumento no fluxo produzido pelo enrolamento de campo série devido a um aumento na corrente de armadura.

2.3 – Controlador baseado em lógica *fuzzy* com e sem PID

Em [6] projeta-se e simula-se um FLC e um FLC com PID, para o controlo da velocidade e faz-se a comparação dos resultados.

Para controlar a velocidade do motor, a tensão dos terminais do motor é alterada continuamente. Após definir a função transferência do motor DC e introduzir os parâmetros do motor, foi projetado o controlador PID com as seguintes indicações para melhorar a

resposta do sistema: usa-se o ganho proporcional para diminuir o tempo de subida, usa-se o ganho derivativo para ter menos sobrelevação e tempo de estabelecimento e, para manter o menor possível erro possível, usa-se o ganho integral.

Os controladores PID podem ser ajustados de diferentes maneiras, por exemplo, ajuste manual, ajuste aplicando o método de Ziegler-Nichols, métodos analíticos, por otimização ou auto ajuste. Usando as regras de controlo *fuzzy* são ajustados os parâmetros PID, que constituem um controlador PID *fuzzy* auto-ajustado.

Nos resultados apresentados observa-se que o FLC com PID melhorou vários aspetos da resposta do sistema. Tais como, o tempo de subida e tempo de pico, tendo reduzido o tempo de resposta. Comparativamente, o controlador PID melhorou os mesmos aspetos, mas de forma menos significativa, o que permite concluir que o FLC com PID é melhor que o controlador PID convencional.

CAPÍTULO 3 – TEORIA DOS CONJUNTOS CLÁSSICOS E TEORIA DOS CONJUNTOS FUZZY

3. - Introdução

Neste capítulo a abordagem à teoria dos conjuntos clássicos baseia-se em [1] por forma a permitir a sua análise de uma forma acessível e universal.

3.1 – Conceitos Fundamentais da teoria dos conjuntos

Seja S um conjunto não vazio, chamado conjunto *universal*, que consiste em todos os possíveis elementos de interesse num determinado contexto. Cada um desses elementos é chamado de *membro*, ou *elemento*, de S . Uma união de vários membros (finitos ou infinitos) de S é denominado *subconjunto* de S .

Para indicar que um membro s de S pertence a um subconjunto S de S , diz-se: $s \in S$

Se s não é membro de S , diz-se: $s \notin S$

Para indicar que S é um subconjunto de S , diz-se: $S \subset S$

Normalmente, esta notação implica que S é um subconjunto estritamente próprio de S , no sentido em que existe no mínimo um membro, $x \in S$ mas $x \notin S$.

Se for um dos dois seguintes: $S \subset S$ ou $S = S$, diz-se: $S \subseteq S$.

Um subconjunto vazio é denotado por “ \emptyset ”. Um subconjunto de certos membros que têm propriedades P_1, \dots, P_n , será denotado por uma letra maiúscula, digamos A , como:

$$A = \{a \mid a \text{ tem propriedades } P_1, \dots, P_n\}$$

Um conjunto de universos importante e frequentemente usado é o espaço euclidiano n -dimensional R^n . Um subconjunto $A \subseteq R^n$, é considerado convexo se:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in A; \quad \text{e } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in A$$

Isto implica, para qualquer $\lambda \in [0,1]$:

$$\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y} \in A \tag{3.1}$$

Sejam A e B dois subconjuntos. Se cada membro de A também é membro de B , ou seja, se

$a \in A$, implica $a \in B$, então A é um *subconjunto* de B . Assim diz-se: $A \subset B$.

Se $A \subset B$ e $B \subset A$ são verdade, então eles são *iguais*, resultando $A = B$.

Se $A \subset B$ ou $A = B$, então $A \subseteq B$. Portanto, $A \subset B$ é equivalente a $A \subseteq B$ e $A \neq B$. A *diferença* dos dois subconjuntos A e B define-se em (3.2):

$$A - B = \{c \mid c \in A \text{ e } c \notin B\} \tag{3.2}$$

Em particular, se $A = \mathbf{S}$ é o conjunto universal, então $\mathbf{S} - B$ chama-se *complemento* de B , e denotado por \bar{B} , define-se em (3.3):

$$\bar{B} = \mathbf{S} - B \tag{3.3}$$

Tendo por norma as relações apresentadas em (3.4):

$$\bar{\bar{B}} = B, \quad \bar{\bar{\mathbf{S}}} = \emptyset \quad \text{e} \quad \bar{\emptyset} = \mathbf{S} \tag{3.4}$$

Seja $r \in R$ um número real e A um subconjunto de R . Então, a *multiplicação* de r por A define-se em (3.5):

$$r A = \{r a \mid a \in A\} \tag{3.5}$$

A *união* dos dois subconjuntos, A e B define-se em (3.6):

$$A \cup B = B \cup A = \{c \mid c \in A \text{ ou } c \in B\}$$

Assim, tem-se sempre as condições indicadas em (3.7):

$$\overline{\overline{B}} = B, \quad A \cup \emptyset = A \quad \text{e} \quad A \cup \overline{A} = S \quad (3.7)$$

A *interseção* de dois subconjuntos A e B define-se em (3.8):

$$A \cap B = B \cap A = \{c \mid c \in A \text{ e } c \in B\} \quad (3.8)$$

Sendo usual as relações apresentadas em (3.9):

$$A \cap S = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset \quad \text{e} \quad A \cap \overline{A} = \emptyset \quad (3.9)$$

Dois subconjuntos A e B dizem-se *disjuntos* se: $A \cap B = \emptyset$

A análise à teoria dos conjuntos clássicos descrita pode ser apresentada de uma forma resumida na Tabela 3.1:

Tabela 3.1 – Propriedades das operações dos conjuntos clássicos

Propriedade involutiva	$\bar{\bar{A}} = A$
Propriedade comutativa	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
Propriedade associativa	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Propriedade distributiva	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$ $A \cup (\bar{A} \cap B) = A \cup B$ $A \cap (\bar{A} \cup B) = A \cap B$
Lei de DeMorgan	$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
Lei do meio excluído	$A \cup \bar{A} = U$
Lei da contradição	$A \cap \bar{A} = \emptyset$
Propriedade da idempotência	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$

Para os conjuntos também é possível existirem funções. Considerando dois conjuntos A e B pertencentes a \mathbf{S} , e se $A \subset B$, então A é um subconjunto de B .

Para qualquer conjunto A , a função característica de A define-se por (3.10):

$$\mathbf{X}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases} \quad (3.10)$$

E exemplifica-se na Figura 3.1:

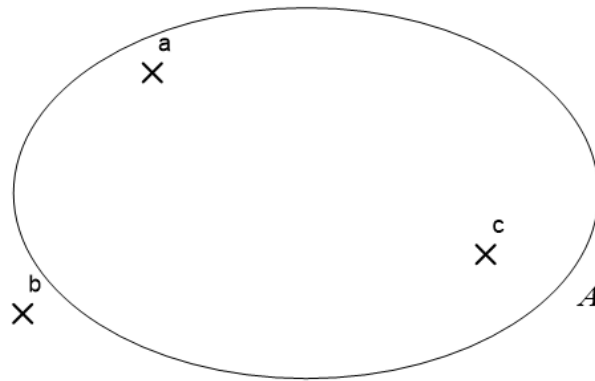


Figura 3.1 – Exemplo de um conjunto clássico.

3.2 – Teoria dos conjuntos *fuzzy*

Definição de conjunto *fuzzy*

Se X é um conjunto de elementos designados por x , então um conjunto *fuzzy* \tilde{A} em X , é um conjunto de pares ordenados tais que:

$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) | x \in X\}$, onde $\mu_{\tilde{A}}(x)$ é o grau de pertença de x em \tilde{A} .

Os conjuntos *fuzzy* podem ser representados de três formas:

- Conjuntos de pares ordenados $(x; \mu_{\tilde{A}}(x))$;
- Apenas $\mu_{\tilde{A}}(x)$;
- Somatório ou integral, consoante seja um domínio discreto ou contínuo:

$$\tilde{A} = \left\{ \sum_i \frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{x_i} \right\} \quad \tilde{A} = \left\{ \int \frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{x_i} \right\}$$

Os conjuntos *fuzzy* apresentam uma função característica diferente dos conjuntos clássicos. Deixam de ter fronteira bem definidas, tal como se exemplifica na Figura 3.2:

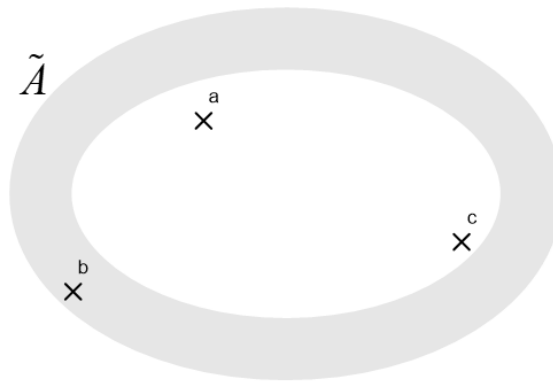


Figura 3.2 – Exemplo de um conjunto *fuzzy*.

Para exemplificar um conjunto *fuzzy* através de um gráfico com a função de pertinência, é necessário regressar aos conceitos fundamentais da teoria dos conjuntos clássicos onde se define a função característica X_A de um conjunto A definida em (3.10):

Na teoria dos conjuntos clássicos um elemento pertence ou não pertence a um conjunto. Nos conjuntos *fuzzy*, os elementos podem existir de uma forma parcial, em que existe um grau de pertinência ao conjunto.

No caso de existir um elemento apenas como membro parcial do conjunto, tem-se de generalizar esta função característica que descreve o grau de pertinência deste elemento no conjunto.

Para se perceber melhor o conceito de pertinência parcial do conjunto, apresenta-se os exemplos a) e b):

Exemplo a) - Seja S o conjunto dos valores de temperatura existentes para uma sala a uma dada hora, tal que:

$$S_f = \{s \in S \mid s \text{ é ser quente}\}$$

Então S_f é um subconjunto *fuzzy* de S porque a propriedade “quente” não é bem definida e não é possível medir precisamente. Como exemplo: não é claro se 20°C, de temperatura, pertence a este conjunto S_f .

Para descrever o conceito tem-se as Figuras 3.3(a) e 3.3(b). Para a Figura 3.3(a), usando o senso comum, diz-se que só é considerado absolutamente quente quando a temperatura é superior a 30°C e considerando que é absolutamente frio quando a temperatura é inferior a 0°C. Entretanto, os demais valores são considerados como morno, porque não é quente nem frio, dependendo do seu valor. Por exemplo, o valor de 27.5°C é considerado “quente” com um grau de pertença igual a 0.25 e ao mesmo tempo considerado “morno” com um grau de pertença igual a 0.25. Assim, de acordo com a Figura 3.3(a), não é possível excluir nem incluir completamente qualquer um dos casos do conjunto.

O gráfico da Figura 3.3(a) estabelece uma medida matemática para a temperatura para a sala e possibilita a definição da pertença parcial de qualquer temperatura relativa ao subconjunto S_f . Este gráfico da Figura 3.3(a) que representa a generalização da função característica X_{S_f} e que se usa para concluir se a temperatura pertence ou não ao subconjunto S_f , denomina-se função de pertença associada ao subconjunto S_f .

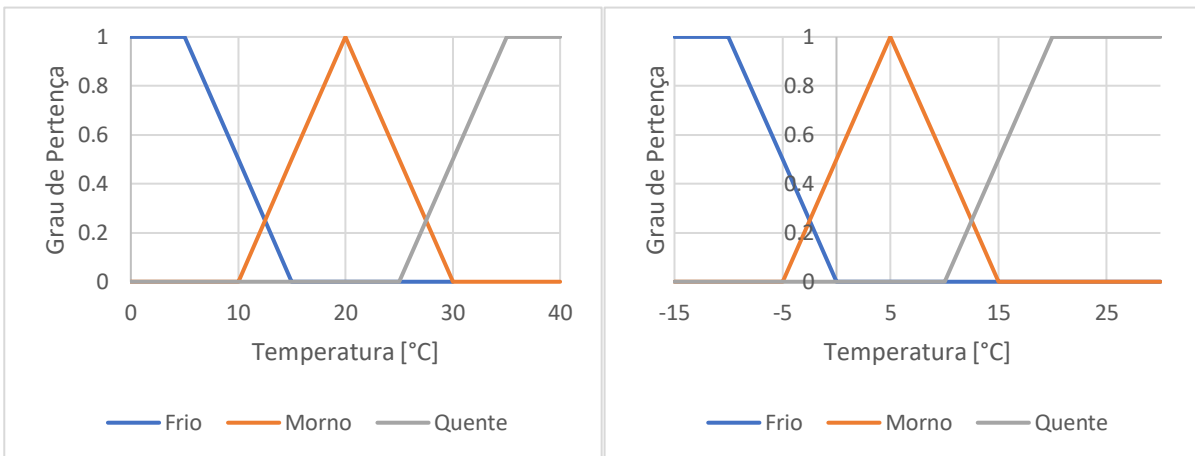


Figura 3.3(a) – Exemplo de funções de pertença triangulares e semi-trapezoidais.

Figura 3.3(b) – Outro exemplo de funções de pertença triangulares e semi-trapezoidais.

Estas funções de pertença podem ser definidas como: triangulares, gaussianas, trapezoidais, entre outras. Diferentes tipos de funções de pertença são apresentados na Figura 3.4.

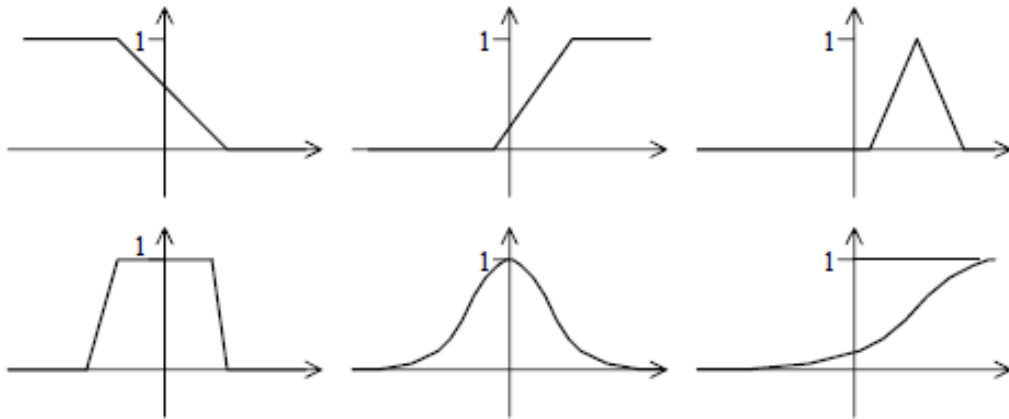


Figura 3.4 – Diversos tipos de funções de pertinência.

As funções de pertinência mais utilizadas são as triangulares e as trapezoidais uma vez que têm forma analítica que contribui para a eficiência computacional e para uma fácil análise. Isto deve-se à simplicidade desta função, muitas vezes permitindo a previsão e cálculo de uma saída do sistema de lógica *fuzzy*.

Não existe nenhuma regra nem critério para selecionar uma função de pertinência para um subconjunto *fuzzy* particular. Em geral, uma função de pertinência correta e adequada, é determinada pelo conhecimento, experiência e pela necessidade de aplicação particular desse problema. Como por exemplo:

Seja **S** o conjunto dos valores de temperatura existentes para uma sala num país frio.

O gráfico da Figura 3.3(b) para este exemplo pode ser completamente diferente do anterior, dependendo do tipo do problema a resolver. Mas por norma, nos países frios as pessoas associam “quente” a um valor de temperatura menor, visto que, estão habituadas a temperaturas mais baixas. Assim, exemplifica-se graficamente esta situação na Figura 3.3(b).

Supõe-se que a função de pertinência do subconjunto S_f , a Figura 3.3(a), é escolhida e fixada. Assim, este subconjunto S_f , juntamente com a função de pertinência usada, que denota-se por $\mu_{S_f}(s)$ com $s \in S_f$, e denomina-se um subconjunto *fuzzy* do conjunto universal **S**.

Exemplo b) - Seja **S** o conjunto de todos os números reais positivos (contínuo).

$$S_p = \{s \in \mathcal{S} \mid s \text{ é idade em torno de } 50 \text{ anos}\}$$

Então S_f é um subconjunto *fuzzy* de \mathcal{S} porque a propriedade “em torno de” não é bem definida e não é possível medir precisamente. Como exemplo, na Figura 3.6 não é claro se 100 anos pertence a este conjunto S_f .

O gráfico da Figura 3.6 possibilita a definição da pertinência parcial de qualquer idade relativa ao subconjunto S_f . Este gráfico que representa a generalização da função característica χ_{S_f} e é usado para concluir se a idade pertence ou não ao subconjunto S_f .

Assim, na Figura 3.6 exemplifica-se graficamente esta situação:

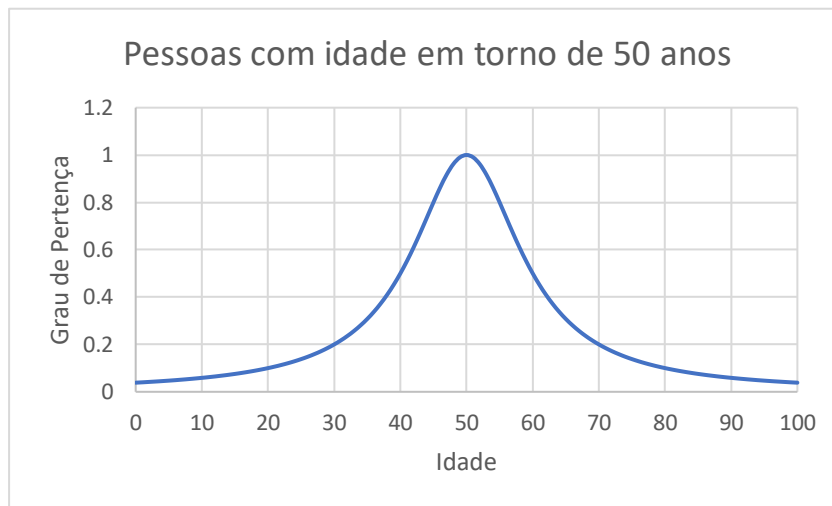


Figura 3.5 – Exemplo das funções de pertinência Gaussiana.

O subconjunto *fuzzy* consiste, portanto, em dois componentes:

- Um subconjunto;
- Função pertinência associada ao subconjunto.

Diferencia-se da teoria clássica dos conjuntos onde todos os conjuntos e subconjuntos partilham a mesma e única função de pertinência [1].

Para simplificar, e se não confundir, chamar-se-à a um subconjunto *fuzzy*, conjunto *fuzzy* tendo em conta que é um subconjunto de um conjunto universal e tem uma função de pertinência pré-definida associada.

Outra distinção entre a teoria clássica dos conjuntos e a teoria de conjuntos *fuzzy* é que um membro de um conjunto *fuzzy* pode assumir dois ou mais valores de pertença, mesmo que entrem em conflito.

Utiliza-se o exemplo da Figura 3.3(a) para exemplificar esta última afirmação. Com as funções de pertença para definir quente, morno e frio, como se pode observar, existe um conflito de valores entre 10°C a 15°C ou 25°C a 30°C, na interceção das funções de pertença temos o mesmo valor de pertença para descrever dois estados, neste caso 12.5°C é considerado frio e morno ao mesmo tempo e isto é algo que a matemática clássica não aceita. Este tipo de descrição vaga e simultânea de um conjunto *fuzzy* é aceitável na lógica *fuzzy*, que por si é muito útil em resolver problemas reais. O uso de funções de pertença simultâneas, como as anteriores, não causa nenhum problema lógico nem matemático, assumindo que é tomada a abordagem correta.

Funções de pertença

A “*fuzziness*”, ou imprecisão, num conjunto *fuzzy* é caracterizada pelas suas funções de pertença. Classifica o elemento no conjunto, seja ele discreto ou contínuo. As funções de pertença também podem ser formadas por representações gráficas. As representações gráficas podem incluir diferentes formas. Existem certas restrições em relação às formas usadas. As regras formadas para representar a “*fuzziness*” numa aplicação também são *fuzzy*.

Uma função de pertença é definida por três propriedades:

- Núcleo (*Core*)
- Suporte (*Support*)
- Limite (*Boundary*)

Se a região do universo é caracterizada pela pertença total, 1, no conjunto \tilde{A} , então isso corresponde ao núcleo da função de pertença *fuzzy* em \tilde{A} . Os elementos cujo valor de pertença é 1, são os elementos do núcleo, $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$.

Se a região do universo é caracterizada pela pertença diferente de zero no conjunto \tilde{A} , isto define o suporte de uma função de pertença para o conjunto *fuzzy*. O suporte contém os elementos cujo valor de pertença é maior que zero, $\mu_{\tilde{A}}(x) > 0$.

Se a região do universo conter uma pertença diferente de zero, mas não uma pertença completa, isto define o limite de uma pertença. Assim, define o limite de uma função de pertença para um conjunto *fuzzy*. O limite contém os elementos cujo valor de pertença se encontra entre zero e um, $0 < \mu_{\tilde{A}}(x) < 1$.

Definição de variáveis linguísticas

Para definir as variáveis linguísticas para utilização no sistema, usam-se caracterizações linguísticas, ou seja, palavras e/ou expressões, de modo a facilitar o processo, porque estas são mais abrangentes do que utilizar caracterizações numéricas.

De acordo com [7], as variáveis linguísticas são variáveis cujos valores são palavras em linguagem natural representadas em conjuntos *fuzzy*. Com a teoria dos conjuntos *fuzzy* é possível desenvolver-se a modelização de situações complexas e imprecisas. Com o conceito de variáveis linguísticas, problemas imprecisos e complexos passam a ser manipuláveis. Permite trabalhar com variáveis menos precisas, permitem estimativas numéricas de termos da linguagem natural, evitam a falsa precisão que as estimativas numéricas podem fornecer e permitem que sejam determinadas estimativas mais razoáveis, mesmo com a escassez de dados.

Uma variável linguística é caracterizada por:

- Nome da variável;
- Conjunto dos termos possíveis da variável;
- Universo de discurso da variável (valor que a função assume no domínio do problema);
- Regras sintáticas para gerar os termos da variável;

- Regras semânticas para se associar a cada termo um determinado subconjunto *fuzzy*;

Para exemplificar esta caracterização utiliza-se o exemplo a) e b), sendo os conjuntos *fuzzy* representados no exemplo a) por (3.11), (3.12) e (3.13).

Nome da variável: **Temperatura**

$$\tilde{A}(\text{frio}) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 5 \\ -0.1x + 1, & 5 < x \leq 15 \\ 0, & 15 < x \leq 40 \end{cases} \quad (3.11)$$

Conjunto dos termos possíveis da variável: **quente, frio, morno**

$$\tilde{A}(\text{morno}) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 10 \\ 0.1x - 1, & 10 < x \leq 20 \\ -0.1x + 1, & 20 < x \leq 30 \\ 0, & 30 < x \leq 40 \end{cases} \quad (3.12)$$

Universo de discurso da variável: **[0°,40°]**

$$\tilde{A}(\text{quente}) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 25 \\ 0.1x - 1, & 25 < x \leq 35 \\ 1, & 35 < x \leq 40 \end{cases} \quad (3.13)$$

No caso do exemplo b), o conjunto *fuzzy* representado é por (3.14).

Nome da variável: **Idade**

Conjunto dos termos possíveis da variável: **cerca de, longe de.**

$$\tilde{A}(\text{torno de 50}) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x - 50}{10}\right)^2} \quad (3.14)$$

Universo de discurso da variável:
[0,100]

Propriedades dos conjuntos *fuzzy* discretos

Para demonstrar as propriedades destes conjuntos discretos apresenta-se o seguinte exemplo c), com recurso a representação através do somatório:

Exemplo c) - Sendo \tilde{A} um tipo de casa confortável para quatro pessoas e \tilde{B} um tipo de casa grande, sendo o denominador o número de pessoas:

$$\tilde{A} = \left\{ \frac{0.2}{1} + \frac{0.5}{2} + \frac{0.8}{3} + \frac{1}{4} + \frac{0.7}{5} + \frac{0.3}{6} + \frac{0}{7} + \frac{0}{8} \right\}$$

$$\tilde{B} = \left\{ \frac{0}{1} + \frac{0}{2} + \frac{0.2}{3} + \frac{0.4}{4} + \frac{0.6}{5} + \frac{0.8}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right\}$$

A interseção de ambas as funções apresenta-se na equação (3.15):

$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \min \left\{ \frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{x_i}, \frac{\mu_{\tilde{B}}(x)}{x_i} \right\}, x_i \in X \quad (3.15)$$

Sendo o resultado da interseção apresentado na equação (3.16):

$$\tilde{C} = \tilde{A} \cap \tilde{B} \left\{ \frac{0}{1} + \frac{0}{2} + \frac{0.2}{3} + \frac{0.4}{4} + \frac{0.6}{5} + \frac{0.3}{6} + \frac{0}{7} + \frac{0}{8} \right\} \quad (3.16)$$

A união de ambas as funções apresenta-se na equação (3.17):

$$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \max \left\{ \frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{x_i}, \frac{\mu_{\tilde{B}}(x)}{x_i} \right\}, x_i \in X \quad (3.17)$$

Sendo o resultado da união o seguinte:

$$\tilde{C} = \tilde{A} \cup \tilde{B} \left\{ \frac{0.2}{1} + \frac{0.5}{2} + \frac{0.8}{3} + \frac{1}{4} + \frac{0.7}{5} + \frac{0.8}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right\}$$

O complemento apresenta-se na equação (3.18):

$$\overline{\mu_{\tilde{B}}}(x_i) = 1 - \mu_{\tilde{B}}(x_i), x_i \in X \quad (3.18)$$

Sendo o resultado do complemento apresentado na equação (3.19):

$$\tilde{B} = \left\{ \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{0.8}{3} + \frac{0.6}{4} + \frac{0.4}{5} + \frac{0.2}{6} + \frac{0}{7} + \frac{0}{8} \right\} \quad (3.19)$$

Propriedades dos conjuntos *fuzzy* contínuos

Para demonstrar as propriedades, ou operações lógicas, destes conjuntos contínuos, utiliza-se o exemplo a):

Sendo \tilde{A} o subconjunto *fuzzy* da temperatura “Frio” e \tilde{B} o subconjunto *fuzzy* da temperatura “Morno”, com recurso à representação por somatório e representa-se na Figura 3.6:

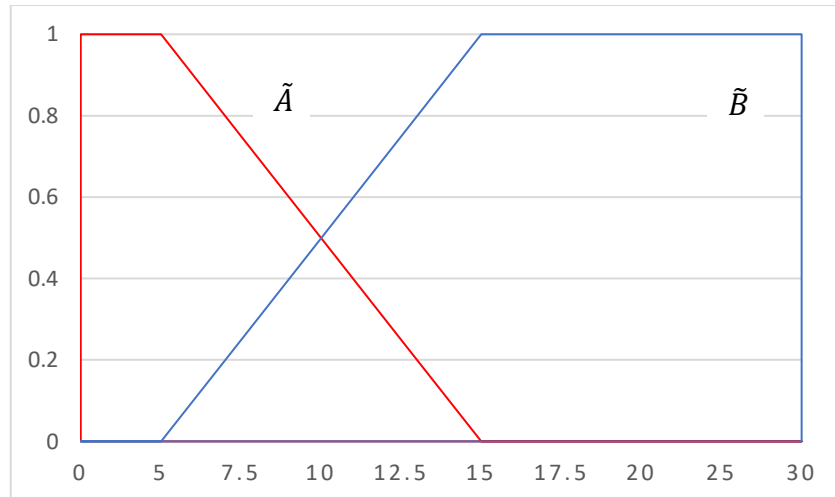


Figura 3.6 – Representação dos subconjuntos *fuzzy* \tilde{A} e \tilde{B} .

A igualdade de ambos os subconjuntos *fuzzy* define-se na equação (3.20) e apresenta-se na Figura 3.7:

$$\tilde{A} = \tilde{B} \leftrightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x_i), \forall x \in X \quad (3.20)$$

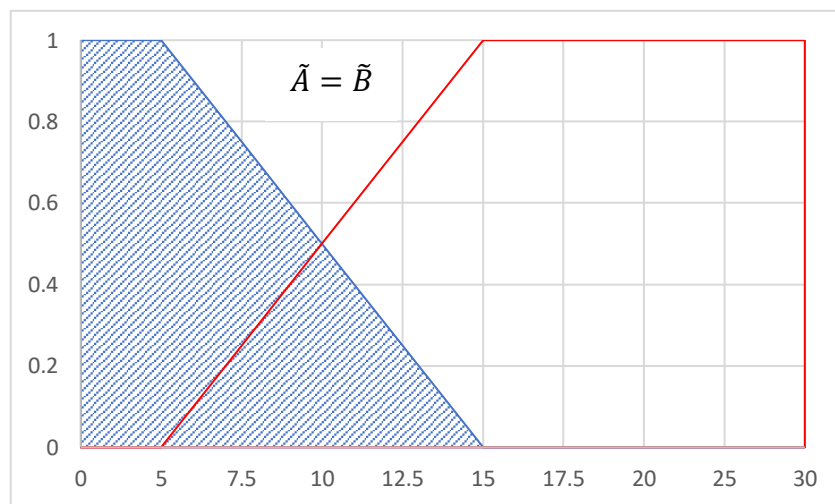


Figura 3.7 – Igualdade dos subconjuntos *fuzzy* \tilde{A} e \tilde{B} .

A interseção de ambos os subconjuntos *fuzzy* define-se na equação (3.21) e apresenta-se na Figura 3.8:

$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(x) \quad (3.21)$$

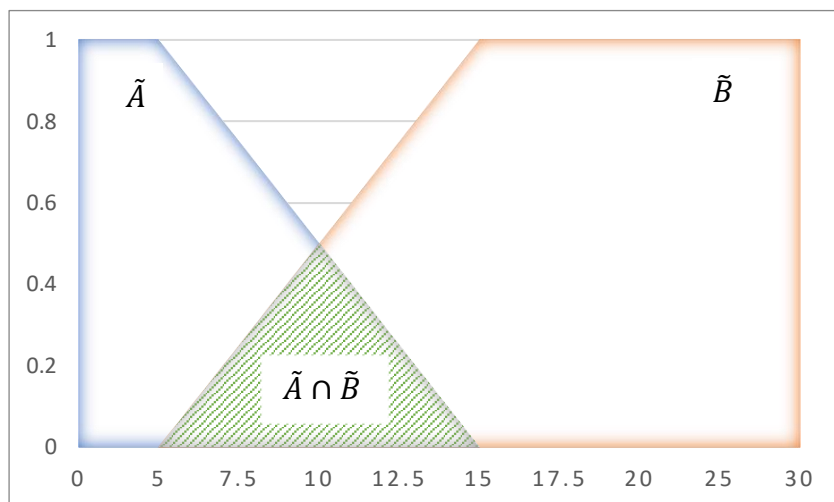


Figura 3.8 – Interseção dos subconjuntos *fuzzy* \tilde{A} e \tilde{B} .

A união de ambos os subconjuntos *fuzzy* define-se na equação (3.22) e apresenta-se na Figura 3.9:

$$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \vee \mu_{\tilde{B}}(x) \quad (3.22)$$

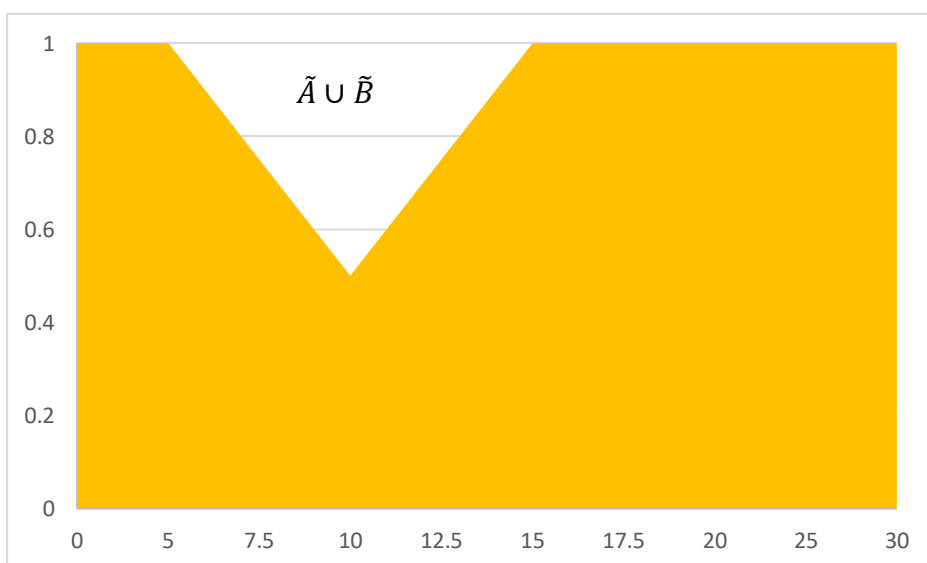


Figura 3.9 – União dos subconjuntos *fuzzy* \tilde{A} e \tilde{B} .

O complemento do subconjunto \tilde{A} define-se na equação (3.23) e apresenta-se na Figura 3.10:

$$\overline{\mu_{\tilde{A}}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x) \quad (3.23)$$

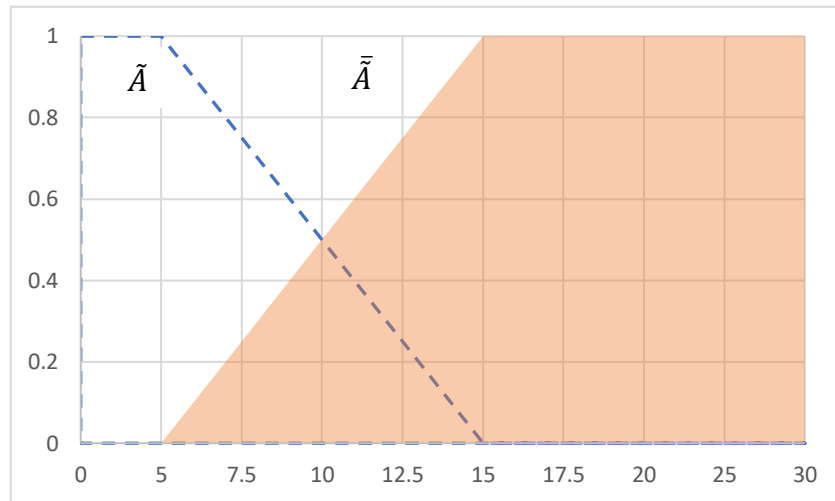


Figura 3.10 – Complemento do subconjunto *fuzzy* \tilde{A} .

Esta operação corresponde à operação lógica “NOT”.

A análise à teoria dos conjuntos *fuzzy* pode ser apresentada de uma forma resumida na Tabela 3.2:

Tabela 3.2 - Propriedades das Operações dos Conjuntos *fuzzy*.

Propriedade Comutativa	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
Propriedade Associativa	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Propriedade Distributiva	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$ $A \cup (\bar{A} \cap B) = A \cup B$ $A \cap (\bar{A} \cup B) = A \cap B$
Propriedades exclusivas dos conjuntos <i>fuzzy</i>	$\bar{A} \cup \bar{\bar{A}} \neq X$ $\bar{A} \cap \bar{\bar{A}} \neq \emptyset$

Operações Aritméticas nos conjuntos *fuzzy*

Princípio da extensão

Em qualquer sistema, incluindo os sistemas de controlo, diferentes variáveis são interligadas entre si com fórmulas algébricas e equações. Estas relações podem refletir leis físicas ou uma estrutura de sistema. Por exemplo, sabe-se que a tensão numa resistência está interligada à corrente com a equação (3.24) e está interligada à potência com a equação (3.25). Quer-se saber como é que as informações sobre a tensão, expressas como um conjunto *fuzzy*, podem ser usadas para obter um modelo para a potência e a corrente.

$$U = R \times I \quad (3.24)$$

$$P = \frac{U^2}{R} \quad (3.25)$$

O princípio da extensão subdivide-se em dois princípios, sendo o primeiro princípio definido da seguinte forma:

1º Princípio da extensão: Supõe-se que f é uma função de X para Y ($f: X \rightarrow Y$) e \tilde{A} é um conjunto *fuzzy* em X , definido da seguinte forma:

$$\tilde{A} = \frac{\tilde{A}(x_1)}{x_1} + \frac{\tilde{A}(x_2)}{x_2} + \frac{\tilde{A}(x_3)}{x_3} + \dots + \frac{\tilde{A}(x_n)}{x_n}$$

A imagem do conjunto *fuzzy* \tilde{A} mapeada pode ser expressa como um conjunto *fuzzy*:

$$\tilde{B} = f(\tilde{A}) = \frac{\tilde{A}(x_1)}{y_1} + \frac{\tilde{A}(x_2)}{y_2} + \frac{\tilde{A}(x_3)}{y_3} + \dots + \frac{\tilde{A}(x_n)}{y_n}$$

Esta definição existe porque é esperado que a “Fuzziness” (imprecisão), incorporada no segundo universo (Y) seja igual à do primeiro universo (X). Usa-se o operador supremo, “sup” porque a função f pode mapear diferentes elementos do universo X em um elemento do universo Y . Inicialmente encontra-se os elementos em $f(\tilde{A})$, usando-se uma dada função e de seguida, calcula-se a gradação, ou seja, escolhe-se o valor mais alto entre os valores possíveis de acordo com a equação (3.26).

$$[f(\tilde{A})]_{y_i} = \max\{\tilde{A}(x_i)\}, i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (3.26)$$

Para se perceber melhor este princípio, apresenta-se o seguinte exemplo d):

Exemplo d) - Seja o universo $X = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ então:

$$\tilde{A} = \left\{ \frac{0.6}{-4}, \frac{1}{-3}, \frac{0.4}{-2}, \frac{0.45}{-1}, \frac{0.75}{0}, \frac{0.81}{1}, \frac{0.34}{2}, \frac{1}{3}, \frac{0.17}{4} \right\}; \text{ e } y = f(x) = x^2$$

Encontrar os elementos de $f(\tilde{A})$: $f(-4) = 16 = f(4)$; $f(-3) = 9 = f(3)$; $f(-2) = 4 = f(2)$; $f(-1) = 1 = f(1)$; $f(0) = 0 = f(0)$

Portanto $\{0,1,4,9,16\}$ são os elementos em $f(\tilde{A})$. De seguida procede-se à escolha do valor mais alto entre os pares de elementos:

$$[f(\tilde{A})]_0 = \max\{\tilde{A}(0)\} = \max\{0.75\} = 0.75$$

$$[f(\tilde{A})]_1 = \max\{\tilde{A}(-1), \tilde{A}(1)\} = \max\{0.45, 0.81\} = 0.81$$

$$[f(\tilde{A})]_4 = \max\{\tilde{A}(-2), \tilde{A}(2)\} = \max\{0.4, 0.34\} = 0.4$$

$$[f(\tilde{A})]_9 = \max\{\tilde{A}(-3), \tilde{A}(3)\} = \max\{1, 1\} = 1$$

$$[f(\tilde{A})]_{16} = \max\{\tilde{A}(-4), \tilde{A}(4)\} = \max\{0.6, 0.17\} = 0.6$$

Então:

$$\tilde{B} = f(\tilde{A}) = \left\{ \frac{0.75}{0}, \frac{0.81}{1}, \frac{0.4}{4}, \frac{1}{9}, \frac{0.6}{16} \right\}$$

Utiliza-se este princípio nesta situação devido ao fato de existir uma única entrada e uma única saída, também denominado por sistema *SISO* (*single-input-single-output*).

No caso de existir mais do que uma entrada, exemplificada na Figura 3.11, é preciso uma forma mais generalizada do princípio da extensão, e apresenta-se como o segundo princípio da extensão e define-se da seguinte forma:

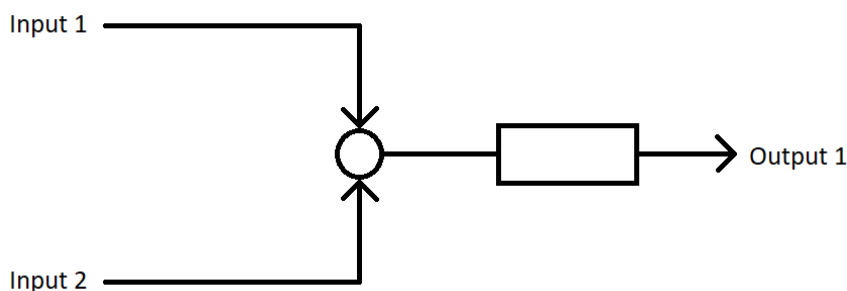


Figura 3.11 – Estrutura de um sistema com duas entradas e uma saída.

2º Princípio da extensão: Sejam $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{A}_3, \dots, \tilde{A}_n$ conjuntos *fuzzy* em $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ respetivamente. Se $X = X_1 \times X_2 \times X_3 \times \dots \times X_n$ e $f: X \rightarrow Y, y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ então o princípio da extensão permite mapear conjuntos de *fuzzy* em X para Y da seguinte forma:

$$\tilde{B} = \frac{\tilde{A}(x_1)}{y_1} + \frac{\tilde{A}(x_2)}{y} + \frac{\tilde{A}(x_3)}{y_3} + \dots + \frac{\tilde{A}(x_n)}{y_n}, \text{ onde } \tilde{B} \text{ é a imagem do conjunto fuzzy em } Y.$$

Inicialmente encontra-se os elementos em $f(\tilde{A}_i)$, usando-se uma função dada e de seguida, calcular a gradação, ou seja, escolher o valor mais alto entre os possíveis com a equação (3.27).

$$[f(\tilde{A}_i)]_{y_i} = \max[\min\{\tilde{A}_1(x_i), \tilde{A}_2(x_i), \dots, \tilde{A}_n(x_i)\}], i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (3.27)$$

Para se perceber melhor este princípio, apresenta-se o seguinte exemplo e):

Exemplo e) – Encontrar $f(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2)$, onde:

$$\tilde{A}_1 = \frac{0.5}{-1} + \frac{0.1}{0} + \frac{0.9}{1}, \tilde{A}_2 = \frac{0.4}{-2} + \frac{1}{2} \text{ e } f: X_1 \times X_2 \rightarrow Y, \quad y = f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2$$

- $f(-1, -2) = (-1)^2 + (-2) = -1$
- $f(-1, 2) = (-1)^2 + 2 = 3$
- $f(0, -2) = 0^2 + (-2) = -2$
- $f(0, 2) = 0^2 + 2 = 2$
- $f(1, -2) = 1^2 + (-2) = -1$
- $f(1, 2) = 1^2 + 2 = 3$

Assim, os elementos em $\tilde{B} = f(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2)$ são $\{-2, -1, 2, 3\}$. A gradação calcula-se com a equação (3.28):

$$[f(\tilde{B})]_{y_i} = \max[\min\{\tilde{A}_1(x_i), \tilde{A}_2(x_i)\}] \quad (3.28)$$

$$[f(\tilde{B})]_{-2} = \max[\min\{\tilde{A}_1(0), \tilde{A}_2(-2)\}] = \max[\min\{0.1, 0.4\}] = 0.1$$

$$[f(\tilde{B})]_{-1} = \max[\min\{\tilde{A}_1(-1), \tilde{A}_2(-2)\}, \min\{\tilde{A}_1(1), \tilde{A}_2(-2)\}] \\ = \max[\min\{0.5, 0.4\}, \min\{0.9, 0.4\}] = \max[0.4, 0.4] = 0.4$$

$$[f(\tilde{B})]_2 = \max[\min\{\tilde{A}_1(0), \tilde{A}_2(2)\}] = \max[\min\{0.1, 1\}] = 0.1$$

$$[f(\tilde{B})]_3 = \max[\min\{\tilde{A}_1(-1), \tilde{A}_2(2)\}, \min\{\tilde{A}_1(1), \tilde{A}_2(2)\}] = \max[\min\{0.5, 1\}, \min\{0.9, 1\}] \\ = \max[0.5, 0.9] = 0.9$$

O princípio da extensão resolve dois problemas:

- Como obter um modelo *fuzzy* para uma variável conhecendo o modelo *fuzzy* para outra variável e a relação funcional entre eles.
- Como calcular a saída de um sistema *fuzzy* através de uma regra. Conhecendo a estrutura do sistema, que contém blocos algébricos e lógicos, e as entradas são *fuzzy*, com base neste princípio é possível determinar as saídas do sistema.

Apesar destes princípios da extensão não serem aplicados nesta dissertação, considerou-se importante mencioná-los devido a utilidade que tem na obtenção de modelos *fuzzy*.

Conceitos Fundamentais da aritmética de intervalos nos conjuntos *fuzzy* contínuos

O problema da aritmética de intervalos consiste na situação que deriva da incerteza do valor s de um conjunto. Assume-se, no entanto, que a informação sobre o valor incerto de s fornece um intervalo aceitável: $\underline{s} \leq s \leq \bar{s}$, onde $[\underline{s}, \bar{s}] \subset \mathbb{R}$, denomina-se de *intervalo de confiança* sobre os valores de s .

No caso de um intervalo bidimensional, o seu intervalo de confiança, tem uma forma retangular, denomina-se por *região de confiança*, e é apresentada na Figura (3.13). .

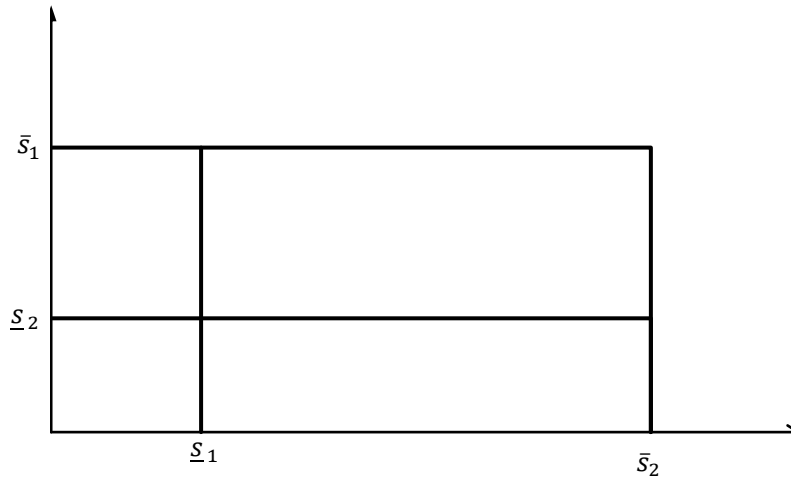


Figura 3.12 – Um intervalo de confiança no caso bidimensional.

Um intervalo de confiança, é um intervalo de valores, limitado acima e abaixo da média da estatística. O intervalo de confiança refere-se à probabilidade de um parâmetro estar ente um conjunto de valores. Os intervalos de confiança medem o grau de incerteza ou certeza num método de amostragem.

Apresentam-se, de seguida, as regras das operações entre intervalos de confiança. Estas regras são importantes e úteis no que diz respeito a aplicações de engenharia relacionadas com intervalos como modelagem robusta, estabilidade robusta e controlo robusto.

Igualdade:

Dois intervalos $[\underline{s}_1, \bar{s}_1]$ e $[\underline{s}_2, \bar{s}_2]$ são iguais se e só se $\underline{s}_1 = \bar{s}_1$ e $\underline{s}_2 = \bar{s}_2$

Interseção:

A *interseção* de dois intervalos $[\underline{s}_1, \bar{s}_1]$ e $[\underline{s}_2, \bar{s}_2]$ define-se pela equação (3.29)

$$[\underline{s}_1, \bar{s}_1] \cap [\underline{s}_2, \bar{s}_2] = [\max\{\underline{s}_1, \underline{s}_2\}, \min\{\bar{s}_1, \bar{s}_2\}] \quad (3.29)$$

e,

$$[\underline{s}_1, \bar{s}_1] \cap [\underline{s}_2, \bar{s}_2] = \emptyset, \text{ se e só se } \underline{s}_1 > \bar{s}_2 \text{ ou } \underline{s}_2 > \bar{s}_1$$

União:

A *união* de dois intervalos $[\underline{s}_1, \bar{s}_1]$ e $[\underline{s}_2, \bar{s}_2]$ define-se pela equação (3.30):

$$[\underline{s}_1, \bar{s}_1] \cup [\underline{s}_2, \bar{s}_2] = [\min\{\underline{s}_1, \underline{s}_2\}, \max\{\bar{s}_1, \bar{s}_2\}] \quad (3.30)$$

Desde que $[\underline{s}_1, \bar{s}_1] \cap [\underline{s}_2, \bar{s}_2] \neq \emptyset$, caso contrário, é indefinido porque o resultado não é um intervalo.

Desigualdade:

O intervalo $[\underline{s}_1, \bar{s}_1]$ diz-se *menor* ou, respetivamente, *maior* do que o intervalo $[\underline{s}_2, \bar{s}_2]$, e denota-se por:

$$[\underline{s}_1, \bar{s}_1] < [\underline{s}_2, \bar{s}_2] \text{ ou, respetivamente, } [\underline{s}_1, \bar{s}_1] > [\underline{s}_2, \bar{s}_2],$$

se e só se $\bar{s}_1 < \underline{s}_2$ ou, respetivamente, $\underline{s}_1 > \bar{s}_2$. Caso contrário não é possível compará-los.

Inclusão:

Diz-se que o intervalo $[\underline{s}_1, \bar{s}_1]$ está incluído em $[\underline{s}_2, \bar{s}_2]$, sendo dado por (3.31):

$$[\underline{s}_1, \bar{s}_1] \subseteq [\underline{s}_2, \bar{s}_2], \quad (3.31)$$

Se e só se $\underline{s}_2 \leq \underline{s}_1$ e $\bar{s}_1 \leq \bar{s}_2$. Isto equivale a dizer-se que o intervalo $[\underline{s}_1, \bar{s}_1]$ é um *subconjunto* ou um *subintervalo* de $[\underline{s}_2, \bar{s}_2]$.

Largura:

A *largura* de um intervalo $[\underline{s}, \bar{s}]$ define-se por (3.32):

$$w\{[\underline{s}, \bar{s}]\} = \bar{s} - \underline{s} \quad (3.32)$$

Assim, um singleton $s = [s, s]$ tem uma largura de valor “zero”: $w\{s\} = w\{[s, s]\} = 0$, para qualquer que seja $s \in R$.

Valor Absoluto:

O *valor absoluto* de um intervalo $[\underline{s}, \bar{s}]$ define-se por (3.33):

$$|[\underline{s}, \bar{s}]| = \max\{ |s|, |\bar{s}| \}. \quad (3.33)$$

Assim, o valor absoluto de um singleton $s = [s, s]$ é o seu valor absoluto caracteriza-se por:

$$|[s, s]| = |s|, \text{ para qualquer que seja } s \in R.$$

Ponto Médio (média):

O *ponto médio*, ou a *média*, de um intervalo $[\underline{s}, \bar{s}]$ define-se por (3.34):

$$m\{[\underline{s}, \bar{s}]\} = \frac{1}{2}(\underline{s} + \bar{s}). \quad (3.34)$$

Simetria:

O intervalo $[\underline{s}, \bar{s}]$ diz-se *simétrico* se e só se: $\underline{s} = -\bar{s}$ ou $m\{[\underline{s}, \bar{s}]\} = 0$

Para exemplificar estas regras é utilizado o exemplo f) com a Tabela 3.3:

Exemplo f) – Para três intervalos, $S_1 = [-1,0]$, $S_2 = [-1,2]$, $S_3 = [2,10]$ tem-se:

Tabela 3.3 – Propriedades das operações dos conjuntos *fuzzy*.

Interseção	$S_1 \cap S_2 = [-1,0] \cap [-1,2] = [-1,0]$ $S_1 \cap S_3 = [-1,0] \cap [2,10] = \emptyset$ $S_2 \cap S_3 = [-1,2] \cap [2,10] = [2,2] = 2$
União	$S_1 \cup S_2 = [-1,0] \cup [-1,2] = [-1,2]$ $S_1 \cup S_3 = [-1,0] \cup [2,10] = \textit{indefinido}$ $S_2 \cup S_3 = [-1,2] \cup [2,10] = [-1,10]$
Desigualdade	$S_1 = [-1,0] < [2,10] = S_3$
Inclusão	$S_1 = [-1,0] \subset [-1,2] = S_2$
Largura	$w\{S_1\} = w\{[-1,0]\} = 0 - (-1) = 1$ $w\{S_2\} = w\{[-1,2]\} = 2 - (-1) = 3$ $w\{S_3\} = w\{[2,10]\} = 10 - 2 = 8$
Valor Absoluto	$ S_1 = [-1,0] = \max\{ -1 , 0 \} = 1$ $ S_2 = [-1,2] = \max\{ -1 , 2 \} = 2$ $ S_3 = [2,10] = \max\{ 2 , 10 \} = 10$
Ponto Médio	$m\{S_1\} = m\{[-1,0]\} = \frac{1}{2}(-1 + 0) = -\frac{1}{2}$ $m\{S_2\} = m\{[-1,2]\} = \frac{1}{2}(-1 + 2) = \frac{1}{2}$ $m\{S_3\} = m\{[2,10]\} = \frac{1}{2}(2 + 10) = 6$

Aritmética básica de intervalos

Sejam $[\underline{s}, \bar{s}]$, $[\underline{s}_1, \bar{s}_1]$, $[\underline{s}_2, \bar{s}_2]$ intervalos. A aritmética básica de intervalos define-se na Tabela 3.4:

Tabela 3.4 – Aritmética básica de intervalos.

Adição	$[\underline{s}_1, \bar{s}_1] + [\underline{s}_2, \bar{s}_2] = [\underline{s}_1 + \underline{s}_2, \bar{s}_1 + \bar{s}_2]$
Subtração	$[\underline{s}_1, \bar{s}_1] - [\underline{s}_2, \bar{s}_2] = [\underline{s}_1 - \bar{s}_2, \bar{s}_1 - \underline{s}_2]$
Recíproca	Se $0 \notin [\underline{s}, \bar{s}]$ então $[\underline{s}, \bar{s}]^{-1} = \left[\frac{1}{\bar{s}}, \frac{1}{\underline{s}} \right]$ Se $0 \in [\underline{s}, \bar{s}]$ então $[\underline{s}, \bar{s}]^{-1}$ é indefinido
Multiplicação	$[\underline{s}_1, \bar{s}_1] \cdot [\underline{s}_2, \bar{s}_2] = [\underline{p}, \bar{p}]$, onde: $\underline{p} = \min\{\underline{s}_1\underline{s}_2, \underline{s}_1\bar{s}_2, \bar{s}_1\underline{s}_2, \bar{s}_1\bar{s}_2\}$ $\bar{p} = \max\{\underline{s}_1\underline{s}_2, \underline{s}_1\bar{s}_2, \bar{s}_1\underline{s}_2, \bar{s}_1\bar{s}_2\}$
Divisão	$[\underline{s}_1, \bar{s}_1] / [\underline{s}_2, \bar{s}_2] = [\underline{s}_1, \bar{s}_1] \cdot [\underline{s}_2, \bar{s}_2]^{-1}$ desde que $0 \notin [\underline{s}_2, \bar{s}_2]$

Com esta aritmética pretende-se obter um intervalo como resultado de uma operação tal que o intervalo resultante contém todas as soluções possíveis. Assim, todas estas regras de operação definem-se de forma conservativa pois pretende-se tornar o intervalo resultante tão grande quanto necessário para evitar perder qualquer solução verdadeira.

3.3 – Relações *fuzzy* e relações clássicas

Introdução

Uma relação é fundamental em todos os campos da engenharia, ciência e matemática. As relações estão envolvidas na lógica, raciocínio aproximado, classificação, sistemas baseados em regras, reconhecimento de padrões e controle. As relações representam o mapeamento dos conjuntos. No caso da relação clássica, existem apenas dois graus de relacionamento entre os elementos de conjuntos numa relação clássica, ou seja, “completamente relacionados” e “não relacionados”. Contudo, as relações *fuzzy* possuem um número infinito de relações entre os extremos de completamente relacionados e não relacionados entre os elementos de dois ou mais conjuntos a considerar. Uma relação clássica representa a presença ou ausência de associação, interação ou interconetividade entre os elementos de dois ou mais conjuntos. Os graus de associação podem ser representados por graus de pertença numa relação *fuzzy* da mesma forma que os graus de pertença do conjunto são representados nos conjuntos *fuzzy* [8].

Produto cartesiano da relação

Uma sequência ordenada de n elementos chama-se n -tupla. A sequência ordenada é na forma de: a_1, a_2, \dots, a_n . Uma sequência não-ordenada é uma coleção de n -elementos sem restrições na ordem. A n -tupla chama-se par ordenado quando $n = 2$. Para os conjuntos clássicos A_1, A_2, \dots, A_n , o conjunto de n -tuplas a_1, a_2, \dots, a_n , onde $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n$, chama-se o produto cartesiano de A_1, A_2, \dots, A_n . O produto cartesiano denota-se por: $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$. No produto cartesiano, o primeiro elemento em cada par, é um membro de x e o segundo elemento, é membro de y , assim tem-se:

$$x \times y = \{(x, y) \mid x \in X \text{ e } y \in Y\}, \text{ se } x \neq y \text{ então } x \times y \neq y \times x.$$

Se todos os A_n são idênticos e iguais a A , então o produto cartesiado de A_1, A_2, \dots, A_n torna-se A^n .

Para melhor compreensão do produto cartesiano da relação, apresenta-se o seguinte exemplo g):

Exemplo g) – Os elementos de dois conjuntos A e B são os seguintes:

$$A = \{2,4,6,8\} \text{ e } B = \{3,7,8,9\}.$$

Qual é o produto cartesiano entre os dois conjuntos $A \times B$, $B \times A$, $A \times A$, $B \times B$?

- $A \times B = \{(2,3), (2,7), (2,8), (2,9),$
 $(4,3), (4,7), (4,8), (4,9),$
 $(6,3), (6,7), (6,8), (6,9),$
 $(8,3), (8,7), (8,8), (8,9)\}$
- $B \times A = \{(3,2), (3,4), (3,6), (3,8),$
 $(7,2), (7,4), (7,6), (7,8),$
 $(8,2), (8,4), (8,6), (8,8),$
 $(9,2), (9,4), (9,6), (9,8)\}$
- $A \times A = A^2 = \{(2,2), (2,4), (2,6), (2,8),$
 $(4,2), (4,4), (4,6), (4,8),$
 $(6,2), (6,4), (6,6), (6,8),$
 $(8,2), (8,4), (8,6), (8,8)\}$
- $B \times B = B^2 = \{(3,3), (3,7), (3,8), (3,9),$
 $(7,3), (7,7), (7,8), (7,9),$
 $(8,3), (8,7), (8,8), (8,9),$
 $(9,3), (9,7), (9,8), (9,9)\}$

Relações clássicas

A relação entre conjuntos clássicos x_1, x_2, \dots, x_n e y_1, y_2, \dots, y_n é um subconjunto do produto cartesiano, esta relação denota-se por R ou por $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$.

No caso do par ordenado, a relação é um subconjunto do produto cartesiano $A_1 \times A_2$. Este subconjunto do produto cartesiano completo chama-se relação binária de A_1 para A_2 .

O peso do relacionamento entre os pares ordenados dos elementos em cada universo, mede-se pela função característica denotada por X , onde um valor de unidade está associado a um relacionamento completo e um valor zero está associado a nenhum relacionamento, escreve-se da seguinte forma:

$$R(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x, y) \in X \times Y \\ 0 & \text{se } (x, y) \notin X \times Y \end{cases}$$

Quando o universo ou o conjunto são finitos, uma matriz chamada matriz de relação pode, convenientemente, representar a relação. Uma matriz bidimensional representa a relação binária.

Para se perceber melhor o conceito de relações clássicas, utiliza-se o exemplo g.1):

Exemplo g.1) – Utilizando $A \times B$, determinado no exemplo g). Define-se a seguinte relação:

$$R = \{(a, b) \mid a = b - 1; (a, b) \in A \times B\}$$

Deste produto cartesiano descobre-se quais parcelas correspondem, de facto, à relação:

- $A \times B = \{(2,3), (2,7), (2,8), (2,9),$
 $(4,3), (4,7), (4,8), (4,9),$
 $(6,3), (6,7), (6,8), (6,9),$
 $(8,3), (8,7), (8,8), (8,9)\}$

Assim tem-se:

$$R = \{(2,3), (6,7), (8,9)\}$$

É possível representar R em forma matricial:

$$R = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Também é possível fazer a representação do mapeamento da seguinte forma:

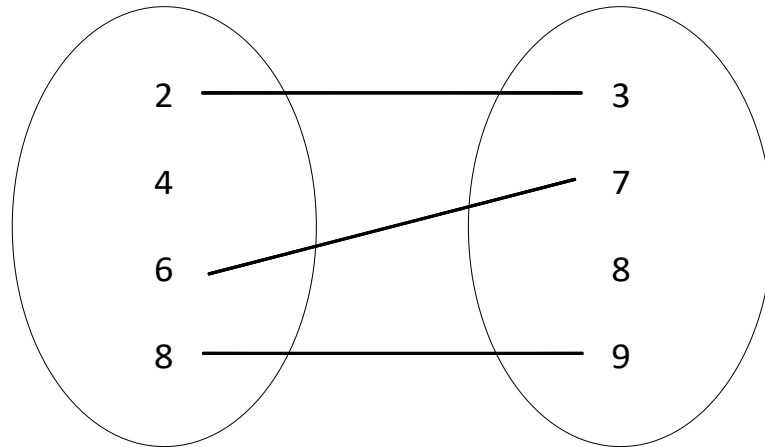


Figura 3.13 – Representação do mapeamento do exemplo g.1)

Operações em relações clássicas

Sejam R e S , duas relações separadas em $A \times B$, definidas sobre dois conjuntos clássicos $a \in A$ e $b \in B$.

Apresenta-se as operações com relações clássicas:

União:

$$R(a, b) \cup S(a, b) = \max(R(a, b) \cup S(a, b))$$

Interseção:

$$R(a, b) \cap S(a, b) = \min(R(a, b) \cup S(a, b))$$

Complemento:

$$\bar{R}(a, b) = 1 - R(a, b)$$

Contenção:

R é um subconjunto de S quando todos os elementos de R são menores ou iguais que S .

$$R \subset S \text{ se } R(a, b) \leq S(a, b)$$

Utilizando o exemplo g), apresenta-se o exemplo g.2) para entender as operações:

Exemplo g.2) – Considera-se os dois conjuntos clássicos $R = \{2,4,6,8\}$ e $S = \{3,7,8,9\}$, onde

$R = \{(a,b) \mid a = b - 1\}$ e $S = \{(a,b) \mid b = a\}$. Através destas relações obtém-se:

$R = \{(2,3), (6,7), (8,9)\}$ e $S = \{(8,8)\}$. De seguida, representa-se na forma matricial:

$$R = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \text{ e } S = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

a) Encontrar a união das duas matrizes $R(a,b) \cup S(a,b)$:

$$R \cup S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Encontrar a interseção das duas matrizes $R(a,b) \cap S(a,b)$:

$$R \cap S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c) Encontrar o complemento da matriz R , \bar{R} :

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Propriedades das relações

As propriedades de comutatividade, associatividade, distributividade, involução e idempotência, conforme discutido no capítulo 3.1, para os conjuntos clássicos, também são válidas para relações clássicas.

Composição de duas relações clássicas

A composição entre duas relações é definida por:

$$R \circ S$$

Considera-se os seguintes conjuntos universais:

$$A = \{a_1, a_2, a_3\}$$

$$B = \{b_1, b_2, b_3\}$$

$$C = \{c_1, c_2, c_3\}$$

As relações R e S são formadas, escolhendo apenas três dos nove elementos possíveis, da seguinte forma:

$$R = A \times B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_3), (a_2, b_1)\},$$

$$S = B \times C = \{(b_1, c_2), (b_1, c_3), (b_2, b_1)\},$$

Comparando as relações R e S , deve existir um elemento entre R e S comum, como por exemplo, se pode ver na primeira parcela de ambos, b_1 é comum. Na segunda parcela, não existe nenhum elemento em comum, portanto não entra na composição das relações. Na terceira parcela, b_2 é comum às duas relações.

Tem-se como resultado final o seguinte:

$$R \circ S = \{(a_1, c_2), (a_2, c_3)\}$$

Apresenta-se a composição na forma matricial:

$$R \circ S = \begin{array}{ccc} & c_1 & c_2 & c_3 \\ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Existem dois tipos de operações a realizar nas composições:

- a) Composição Max-Min

Dadas duas matrizes de relação R e S , a composição max-min define-se como:

$$T = R \circ S$$

$$T(a, c) = \max\{\min\{R(a, b), S(b, c)\}\}$$

O máximo pode ser representado pela união, \vee , e o mínimo pode ser representado pela interseção, \wedge .

$$X_T(a, c) = \bigvee_{b \in B} [X_R(a, b) \wedge X_S(b, c)]$$

b) Composição Max-produto

Dadas duas matrizes de relação R e S , a composição max-min define-se como:

$$T = R \circ S$$

$$X_T(a, c) = T(a, c) = \bigvee_{b \in B} [X_R(a, b) \cdot X_S(b, c)]$$

3.4 – Introdução à teoria da lógica *fuzzy*

A lógica *fuzzy* refere-se a um estudo de métodos e princípios baseados na razão humana, assim, a lógica *fuzzy* é uma lógica como qualquer outra.

A *lógica clássica* lida com as proposições, como as conclusões ou decisões, que são *verdadeiras* ou *falsas*. Cada proposição tem um oposto, assim esta lógica clássica lida com combinações de *variáveis* que representam proposições. Cada variável representa uma hipotética proposição, qualquer combinação delas eventualmente assume um valor binário, *verdadeiro* ou *falso*, mas nunca assume valores diferentes de estes, ou seja, não poder ser verdadeiro e falso ao mesmo tempo.

O conteúdo principal da lógica clássica é o estudo das regras que permitem novas variáveis lógicas sejam produzidas como *funções* de certas variáveis existentes.

Supondo que n variáveis lógicas, $x_1 \dots, x_n$, são dadas, diz-se:

x_1 é verdadeiro

x_2 é falso

...

x_n é falso

Então uma nova variável lógica de saída, y , pode definir-se como consequência das entradas que são função de x_1, \dots, x_n , que tem um valor binário particular. Exemplifica-se uma regra seguidamente:

Regra: SE x_1 é VERDADEIRO e x_2 é FALSO e ... e x_n é FALSO, então y é FALSO.

Como apenas um e um único valor binário é assumido por uma função lógica de um número finito de variáveis lógicas, a lógica clássica chama-se lógica de dois-valores.

O pressuposto fundamental no qual a lógica clássica se baseia é que qualquer proposição é sempre verdadeira ou falsa. Atualmente, é aceite que as proposições são parcialmente verdadeiras e parcialmente falsas. Para descrever estes valores binários parciais com novas regras, de maneira a generalizar a lógica de dois-valores, propôs-se e desenvolveu-se a lógica de multi-valor. É comum neste tipo de lógica existir a introdução do valor “nenhum” entre o “verdadeiro” e o “falso” e nota-se que esta lógica de três-valores é bem-sucedida tanto lógica quanto matematicamente.

Desta forma é possível interpretar a função característica generalizada

$$y = X_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

Como

$$y = \begin{cases} \text{verdadeiro}, & \text{se } x \text{ for verdadeiro} \\ \text{falso}, & \text{se } x \text{ for falso} \end{cases}$$

Sendo este último, uma função de pertença *fuzzy*.

Teoria da Lógica clássica - Conceitos Fundamentais

Considera-se o seguinte exemplo típico de um processo numa fábrica, em que uma máquina é operada por uma consola composta por uma fechadura e um interruptor “ON-OFF”. Define-se a situação da fechadura com uma variável linguística, denominada “ F ”, a situação do interruptor define-se por “ I ”, e por final, o processo define-se por “ P ”, assim tem-se:

$$F = \begin{cases} 1, & \text{se a consola está desbloqueada} \\ 0, & \text{se a consola está bloqueada} \end{cases}$$

$$I = \begin{cases} 1, & \text{se o interruptor está ligado} \\ 0, & \text{se o interruptor está desligado} \end{cases}$$

$$P = \begin{cases} 1, & \text{se o processo está em execução} \\ 0, & \text{se o processo está em encerramento} \end{cases}$$

Usa-se os dígitos “0” e “1” para representar os dois estados lógicos das variáveis. *F*, *I* e *R* são funções lógicas, assim, apenas podem assumir um destes dois valores lógicos, “0” ou “1”.

Após definir as variáveis lógicas e as suas funções, estabelece-se uma *Tabela da verdade*, com o uso desta Tabela é possível definir o valor lógico de uma proposição, ou seja, saber quando a afirmação é verdadeira ou falsa e as relações entre as variáveis. Para este exemplo, tem-se a Tabela da verdade definida por Tabela (3.5).

Tabela 3.5 – Tabela da verdade do processo.

Entradas			Saídas
<i>F</i>	<i>I</i>	<i>P</i>	<i>P</i>
0	0	0	0
0	0	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Na Tabela 3.5 é importante destacar que o processo “*P*” é uma entrada, ou seja, o seu estado atual, bem como uma saída, ou seja, o resultado do estado, onde o seu estado atual pode

afetar o estado futuro. Por exemplo, se $F = 0$, onde a consola está bloqueada ou o interruptor está desligado, então o processo mantém o seu estado atual, independentemente do estado do interruptor. Para interpretar a Tabela da verdade tem-se que fazer a análise linha a linha. Como exemplo, considera-se a linha “6”:

SE a fechadura está bloqueada

E o interruptor está ligado

E o processo está em execução

ENTÃO o processo vai continuar em execução.

Em geral, uma regra pode ter qualquer número de entradas e saídas como por exemplo:

SE (entrada 1) E (entrada 2) E ... E (entrada n)

ENTÃO (saída 1) E (saída 2) E ... E (saída m)

Sendo a entrada a premissa e a saída a consequência de cada regra *fuzzy*.

A partir deste exemplo, é possível verificar que uma cadeia lógica clássica consiste em várias entradas de dois valores, várias regras e várias saídas de dois valores.

Funções lógicas da lógica de dois-valores

Considerem-se n variáveis lógicas, x_1, \dots, x_n . Estas variáveis podem ter 2^n combinações diferentes de valores de verdade. Portanto, existe um total de 2^{2^n} funções lógicas possíveis que definem estas variáveis. As funções lógicas $2^{2^2} = 16$ encontram-se na Tabela 3.6, onde as variáveis lógicas resultantes são denotadas por y_1, \dots, y_{16} . As funções lógicas de uma ou duas variáveis são geralmente denominadas *operações lógicas*.

É possível observar na Tabela 3.6 que o número de funções lógicas de n variáveis cresce rapidamente face ao incremento de valores de n . Contudo, sabe-se que as funções lógicas apresentadas na Tabela 3.6, e aquelas criadas a partir destas funções lógicas, podem ser

obtidas a partir de um conjunto limitado de funções lógicas primárias. Dois conjuntos de funções lógicas primárias são:

- Negação, função “AND” e função “OR”;
- Negação e as duas implicações.

Usando qualquer conjunto de funções lógicas primárias, pode-se formar quaisquer outras funções lógicas por meio de expressões algébricas apropriadas, chamadas *fórmulas lógicas*.

Por exemplo, usando o primeiro conjunto de funções lógicas primárias, negação, função “AND”, e função “OR”, as fórmulas lógicas definem-se recursivamente:

1. Os valores de verdade 0 e 1 são fórmulas lógicas.
2. Se x é uma variável lógica, então x e \bar{x} são ambas fórmulas lógicas.
3. Se x_1 e x_2 são fórmulas lógicas, então $x_1 \wedge x_2$ e $x_1 \vee x_2$ são ambas fórmulas lógicas.
4. As únicas fórmulas lógicas são aquelas definidas pelos pontos 1, 2 e 3.

Assim, todas as fórmulas lógicas deste tipo definem uma função lógica ao compô-la através das três funções lógicas primárias. Para definir uma função única, a ordem de composição deve ser especificada como por exemplo, com parênteses,

$$(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_3) \wedge (x_2 \vee x_3)$$

este exemplo define uma função lógica única de três variáveis. Quando duas fórmulas lógicas a e b são equivalentes, normalmente escreve-se $a = b$. Por exemplo,

$$(\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_3) \vee (x_2 \wedge x_3) = (\bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (x_3 \wedge \bar{x}_1) \vee (x_1 \wedge x_2).$$

Esta equivalência pode ser verificada ao avaliar as duas fórmulas para todas as oito combinações de valores de verdade das variáveis lógicas x_1, x_2 e x_3 .

Tabela 3.6 – Funções lógicas de duas variáveis.

x_1	x_2	Função	Símbolo
y_1	0 0 0 0	Zero	0
y_2	0 0 0 1	"NOR" (NOT + OR)	$x_1 \bar{\vee} x_2$
y_3	0 0 1 0	Desigualdade	$x_1 \leftarrow x_2$
y_4	0 0 1 1	Negação	\bar{x}_2
y_5	0 1 0 0	Desigualdade	$x_1 \rightarrow x_2$
y_6	0 1 0 1	Negação	\bar{x}_1
y_7	0 1 1 0	Não-equivalência	$x_1 \not\leftrightarrow x_2$
y_8	0 1 1 1	"NAND" (NOT + AND)	$x_1 \bar{\wedge} x_2$
y_9	1 0 0 0	"AND"	$x_1 \wedge x_2$
y_{10}	1 0 0 1	Equivalência	$x_1 \leftrightarrow x_2$
y_{11}	1 0 1 0	Identidade	x_1
y_{12}	1 0 1 1	Implicação	$x_1 \Leftarrow x_2$
y_{13}	1 1 0 0	Identidade	x_2
y_{14}	1 1 0 1	Implicação	$x_1 \Rightarrow x_2$
y_{15}	1 1 1 0	"OR"	$x_1 \vee x_2$
y_{16}	1 1 1 1	Unidade	1

Álgebra Booleana

Uma álgebra da lógica de dois valores é a álgebra Booleana, nesta álgebra existem apenas três operações lógicas: negação \neg , “and” \wedge e “or” \vee . Para facilitar as operações algébricas é comum usar-se os símbolos: $-$, \cdot e $+$.

Uma fórmula algébrica booleana pode ser completamente descrita através de uma Tabela de verdade, onde todas as variáveis que existem na fórmula são listadas como entradas e o valor de toda a fórmula é a saída. Por outro lado, podem-se escrever fórmulas algébricas booleanas para qualquer Tabela verdade. Como exemplo, usando a Tabela 3.6, na primeira, terceira, quarta e quinta fila pode-se escrever em álgebra booleana como

$$P_{saída} = (\bar{F} \cdot \bar{I} \cdot \bar{P}) + (F \cdot \bar{I} \cdot \bar{P}) + (F \cdot \bar{I} \cdot P) + (\bar{F} \cdot I \cdot \bar{P})$$

Que é o mesmo que a seguinte fórmula lógica

$$P_{saída} = (\bar{F} \wedge \bar{I} \wedge \bar{P}) \vee (F \wedge \bar{I} \wedge \bar{P}) \vee (F \wedge \bar{I} \wedge P) \vee (\bar{F} \wedge I \wedge \bar{P})$$

E obtém-se o mesmo resultado $P_{saída} = 0$.

$$P_{saída} = (\bar{1} \cdot \bar{1} \cdot \bar{0}) + (1 \cdot \bar{1} \cdot \bar{0}) + (1 \cdot \bar{1} \cdot 0) + (\bar{1} \cdot 1 \cdot \bar{0})$$

$$= (0 \cdot 0 \cdot 1) + (1 \cdot 0 \cdot 1) + (1 \cdot 0 \cdot 0) + (0 \cdot 1 \cdot 1)$$

$$= 0 + 0 + 0 + 0$$

$$= 0$$

Na Tabela 3.7 apresentam-se os isomorfismos entre a teoria clássica dos conjuntos, álgebra booleana e lógica clássica.

Tabela 3.7 – Isomorfismos entre a Teoria Clássica dos Conjuntos, Álgebra Booleana e Lógica Clássica.

Teoria Conjuntos Clássicos	Álgebra Booleana	Lógica dois-valores
U	+	V
\cap	\cdot	\wedge
–	–	–
S	1	1
\emptyset	0	0
\subset	<	\Rightarrow
=	=	\Leftrightarrow

Fuzzificação

A fuzzificação é um conceito importante na teoria da lógica fuzzy. A fuzzificação é o processo onde as quantidades clássicas são convertidas em valores fuzzy.

Ao identificar algumas das incertezas presentes nos valores clássicos, formamos os valores *fuzzy*. A conversão de valores *fuzzy* é representada pelas funções de pertença.

Numa aplicação prática, como em indústrias, na medição de tensão, corrente ou temperatura, pode haver um erro insignificante. Este erro insignificante provoca imprecisão nos dados e esta imprecisão pode ser representada pelas funções de pertença. Assim, a fuzzificação é realizada e o processo de fuzzificação pode envolver a atribuição de valores de pertença para as quantidades clássicas fornecidas [8].

Desfuzzificação

A desfuzzificação é a conversão de valores *fuzzy* para valores clássicos. Os resultados *fuzzy* gerados não podem ser usados diretamente nas aplicações, portanto, é necessário converter as quantidades *fuzzy* em quantidades clássicas. Para isto usa-se o processo de desfuzzificação. A desfuzzificação tem a capacidade de reduzir uma quantidade *fuzzy* a uma quantidade clássica de valor único ou como um conjunto.

A saída de um processo *fuzzy* pode ser a união de duas ou mais funções de pertença *fuzzy*. Para explicar isto, considera-se uma saída *fuzzy*, formada por duas partes, sendo uma parte triangular (Fig. 3.14) e outra trapezoidal (Fig. 3.15), sendo a união dessas duas formas apresentada na (Fig. 16).

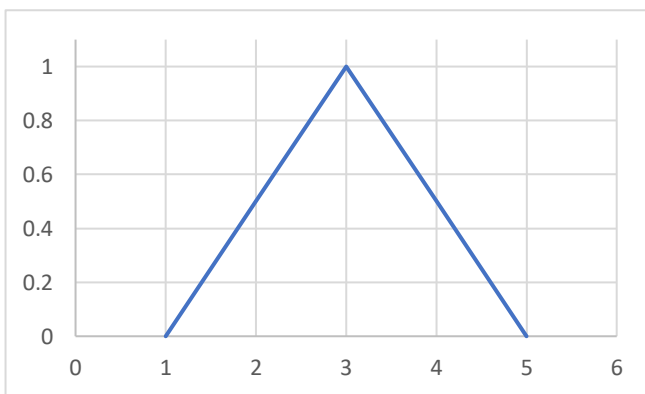


Figura 3.14 – Função de pertença triangular.

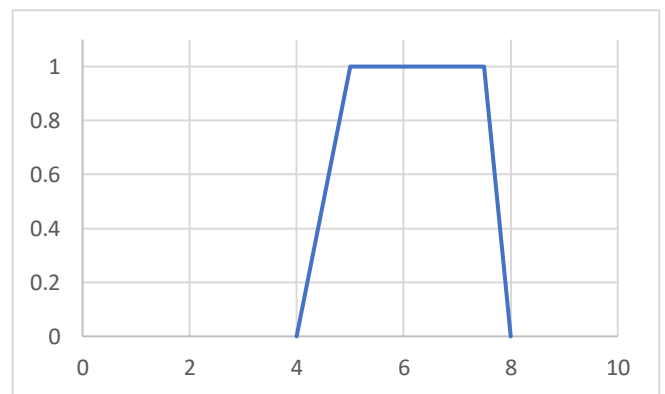


Figura 3.15 – Função de pertença trapezoidal.

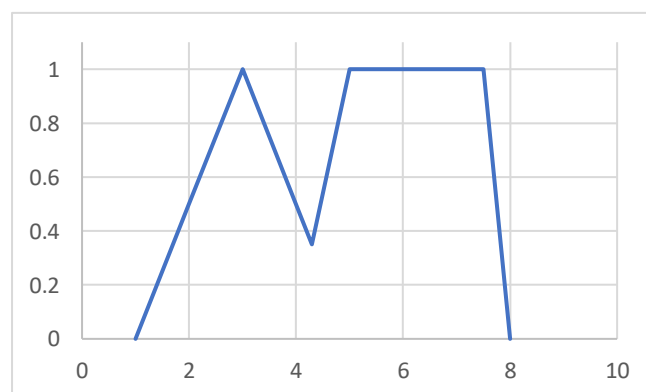


Figura 3.16 – União da função de pertença triangular e trapezoidal.

Existem sete métodos usados para desfuzzificar as funções de saída *fuzzy*:

- Princípio da pertença máxima;
- Método da centróide;
- Método da média ponderada;
- Pertença média-máxima;
- Centro das somas;
- Centro de maior área;
- Primeiro dos máximos (último dos máximos).

Descrevem-se seguidamente cada um dos métodos apresentados:

1. Princípio da pertença máxima

Este método é dado pela expressão (3.35), sendo x^* o valor desfuzzificado:

$$\mu_{\bar{A}}(x^*) \geq \mu_{\bar{A}}(x) \text{ para todo } x \in X \quad (3.35)$$

Deste método obtém-se o valor de pertença máxima. A Figura 3.18 representa este princípio graficamente.

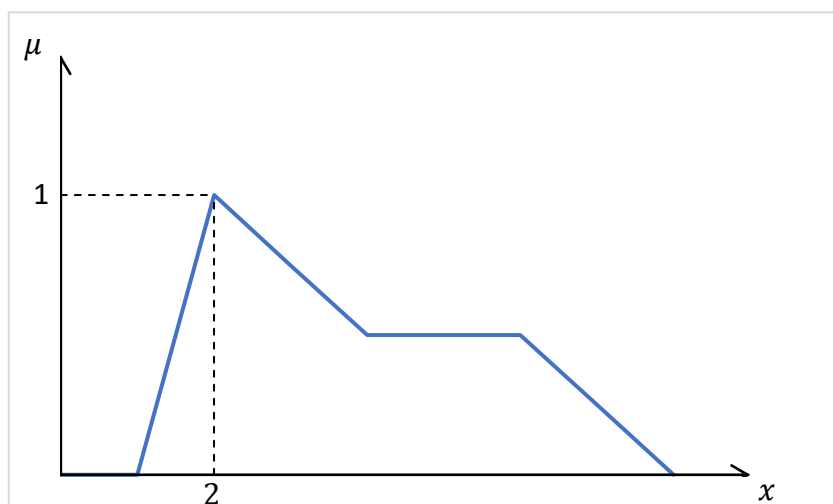


Figura 3.17 – Princípio da pertença máxima.

Para converter o valor *fuzzy* para o valor clássico, ou seja, desfuzzificar, obtém-se o valor de pertença máximo no eixo das ordenadas e o valor clássico no eixo das abcissas, assim resulta: $x^* = 2$. O valor “2” é o valor desfuzzificado ou convertido.

2. Método da centróide

Também conhecido como centro de massa ou centro da área, é definido pela expressão algébrica (3.33):

$$x^* = \frac{\int \mu_{\bar{A}}(x) x dx}{\int \mu_{\bar{A}}(x) dx} \quad (3.36)$$

A Figura 3.18 representa este método graficamente.

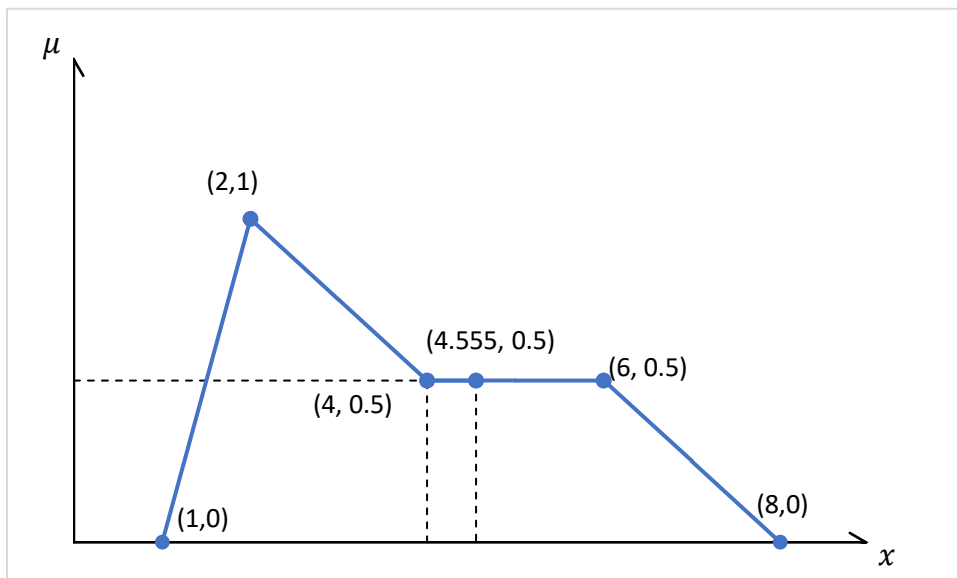


Figura 3.18 – Método do centróide.

Com recurso à Figura 3.18 exemplifica-se o método da centróide.

Para utilizar (3.36), divide-se o gráfico em vários segmentos de retas. Para ajudar na análise, denominam-se os pontos marcados no gráfico, respetivamente, $a = (1,0)$, $b = (2,1)$, $c = (4,0.5)$, $d = (6,0.5)$ e $e = (8,0)$.

De seguida, procede-se ao cálculo das equações das retas, ab , bc , cd e de , utilizando a expressão (3.37):

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (3.37)$$

E aplicando (3.37) a cada segmento de reta, obtém-se:

$$ab = \frac{y - 0}{x - 1} = \frac{1 - 0}{2 - 1} \Leftrightarrow \frac{y}{x - 1} = 1 \Leftrightarrow y = x - 1, \quad x \in [1,2] \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} bc &= \frac{y - 1}{x - 2} = \frac{0.5 - 1}{4 - 2} \Leftrightarrow \frac{y - 1}{x - 2} = -0.25 \Leftrightarrow y - 1 = -0.25(x - 2) \Leftrightarrow y \\ &= -0.25x + 1.5, \quad x \in [2,4] \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$cd = 0.5, \quad x \in [4,6] \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} de &= \frac{y - 0.5}{x - 6} = \frac{0 - 0.5}{8 - 6} \Leftrightarrow y - 1 = -0.25(x - 6) \Leftrightarrow y \\ &= -0.25(x - 6) + 1 \Leftrightarrow y = -0.25x + 2.5, \quad x \in [6,8] \end{aligned} \quad (3.41)$$

Aplicando os cálculos (3.38-3.40) a (3.36), obtém-se o valor desfuzzificado de 4.55:

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{\int_1^2 (x - 1) x dx + \int_2^4 (-0.25x + 1.5) x dx + \int_4^6 0.5 x dx + \int_6^8 (-0.25x + 2.5) x dx}{\int_1^2 (x - 1) dx + \int_2^4 (-0.25x + 1.5) dx + \int_4^6 0.5 dx + \int_6^8 (-0.25x + 2.5) dx} \\ x^* &= \frac{0.833 + 4.333 + 5 + 10.333}{0.5 + 1.5 + 1 + 1.5} = 4.55 \end{aligned}$$

3. Método da média ponderada

Este método não pode ser usado para funções de pertinência de saída assimétrica.

Define-se pela expressão algébrica (3.42), sendo \bar{x} o valor do centro de cada conjunto:

$$x^* = \frac{\sum \mu_{\bar{A}}(\bar{x}) \cdot \bar{x}}{\sum \mu_{\bar{A}}(\bar{x})} \quad (3.42)$$

Na Figura 3.19 são exemplificados dois conjuntos *fuzzy* onde, o primeiro conjunto *fuzzy* (azul) tem um centro de valor "a" e o segundo conjunto *fuzzy* (laranja) tem um centro de valor "b".

Para o primeiro conjunto *fuzzy*, o valor de pertença máximo é 0.5 e para o segundo conjunto *fuzzy*, o valor de pertença máximo é 0.8.

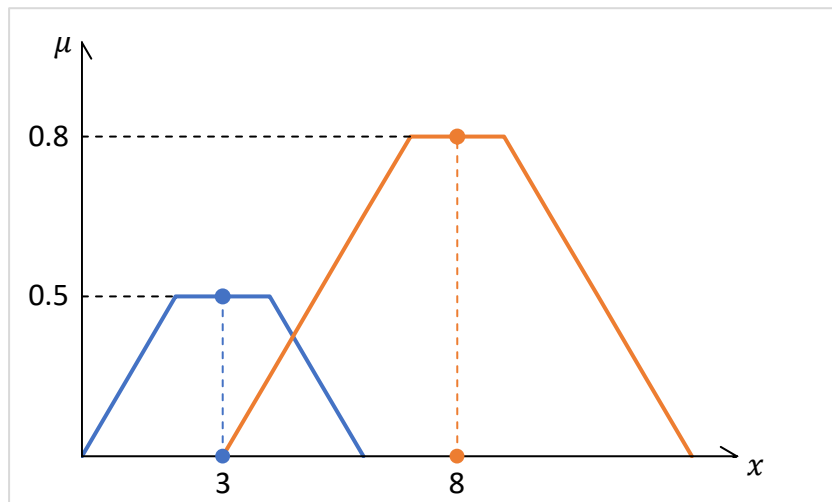


Figura 3.19 – Método da média ponderada.

Substituindo em (3.43) os valores apresentados, obtém-se o valor desfuzzificado 6.077:

$$x^* = \frac{0.5 \times 3 + 0.8 \times 8}{0.5 + 0.8} = 6.077 \quad (3.43)$$

4. Pertença média-máxima

Também conhecido como o meio do máximo e como o nome indica, usa-se para encontrar o meio dos máximos da função de pertinência, sendo dado pela expressão (3.44).

$$x^* = \frac{a + b}{2} \quad (3.44)$$

Para exemplificar utiliza-se a Figura 3.20, que apresenta um conjunto *fuzzy* como resultado da união entre três outros conjuntos *fuzzy*. Tal como referido anteriormente, este método apenas é aplicável em funções de pertinência de saída simétricas.

Onde a e b é o intervalo da função de pertinência onde o valor é o máximo. No gráfico da Figura 3.20 estes valores são definidos como $a = 5$ e $b = 8$.

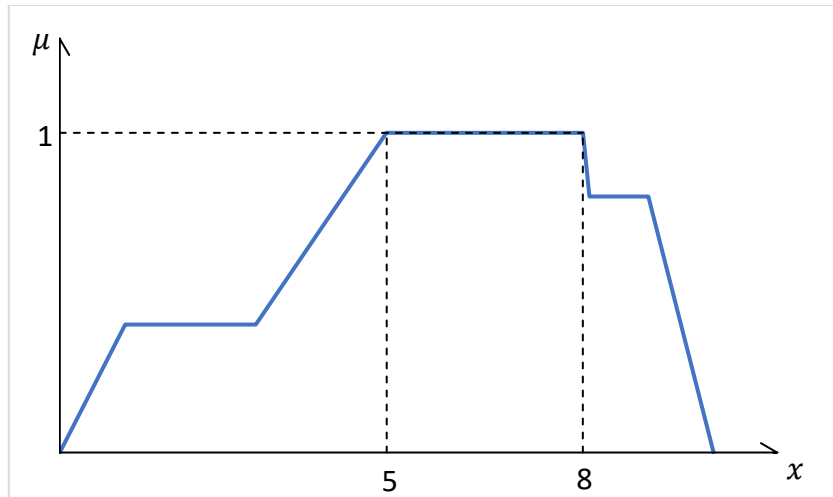


Figura 3.20 – Método da pertinência média-máxima.

Aplicando os valores de a e b , em (3.44), obtém-se o valor desfuzzificado 6.5:

$$x^* = \frac{a + b}{2} = \frac{5 + 8}{2} = 6.5 \tag{3.45}$$

5. Centro de somas

Este método envolve a soma algébrica de conjuntos *fuzzy* de saída individuais, representados por \tilde{c}_1 , \tilde{c}_2 e \tilde{c}_3 em vez da união deles.

Para exemplificar este método, apresentam-se graficamente três Figuras (3.21), (3.22) e (3.23), onde cada uma é composta por um conjunto *fuzzy* diferente.

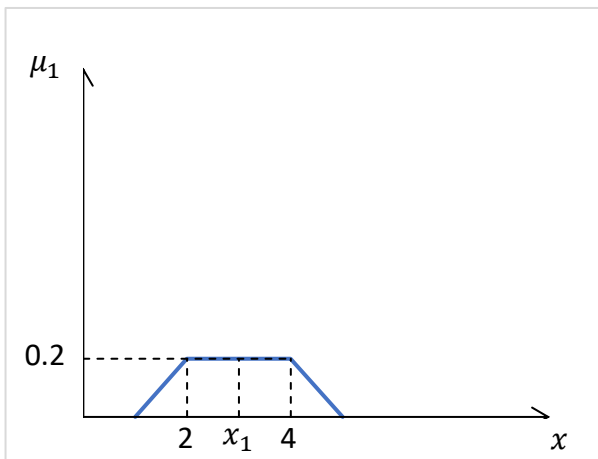


Figura 3.21 – Exemplo conjunto *fuzzy* 1

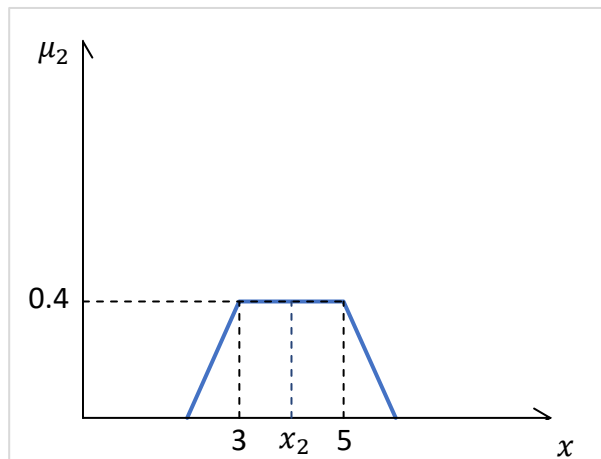


Figura 3.22 – Exemplo conjunto *fuzzy* 2

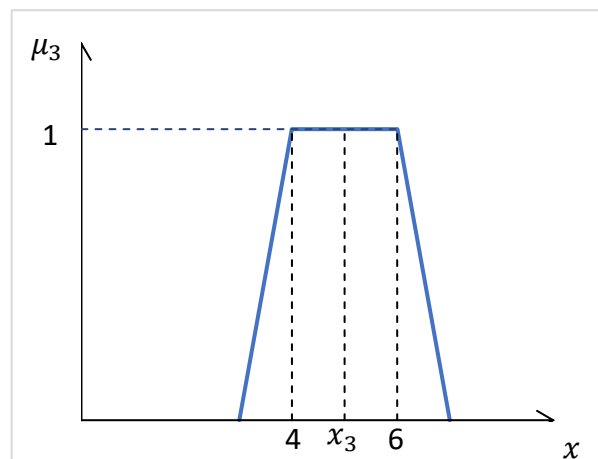


Figura 3.23 – Exemplo conjunto *fuzzy* 3

Neste método têm de se encontrar dois valores, a área e o centro geométrico da região a estudar. Nota-se que o centro geométrico da Figura 3.21 é $x_1 = 2$, da Figura 3.22 o centro geométrico é $x_2 = 4$ e por fim, o centro geométrico da Figura 3.23 é $x_3 = 5$.

A expressão que permite obter o valor desfuzzificado define-se por (3.46):

$$x^* = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot A_{\tilde{c}_i}}{\sum_{i=1}^n A_{\tilde{c}_i}} \quad (3.46)$$

A área de um trapézóide define-se por (3.47):

$$A = \frac{(B + b)}{2} \times h \quad (3.47)$$

Aplicando (3.44) às Figuras 3.21, 3.22 e 3.23, obtém-se as seguintes áreas:

$$A_1 = \frac{(B_1 + b_1)}{2} \times h_1 = \frac{(4 + 2)}{2} \times 0.2 = 0.6 \quad (3.48)$$

$$A_2 = \frac{(B_2 + b_2)}{2} \times h_2 = \frac{(4 + 2)}{2} \times 0.4 = 1.2 \quad (3.49)$$

$$A_3 = \frac{(B_3 + b_3)}{2} \times h_3 = \frac{(4 + 2)}{2} \times 1 = 3 \quad (3.50)$$

Aplicando os valores, obtém-se o valor desfuzzificado, na expressão (3.46), de 4.5:

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot A_{\tilde{c}i}}{\sum_{i=1}^n A_{\tilde{c}i}} = \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{(3 \times 0.6) + (4 \times 1.2) + (5 \times 3)}{0.6 + 1.2 + 3} \\ &= 4.5 \end{aligned} \quad (3.51)$$

6. Centro de maior área

Se o conjunto *fuzzy* tiver duas ou mais sub-regiões convexas, então a região convexa com a maior área pode ser usada para calcular o valor desfuzzificado, sendo este valor o centro dessa área maior.

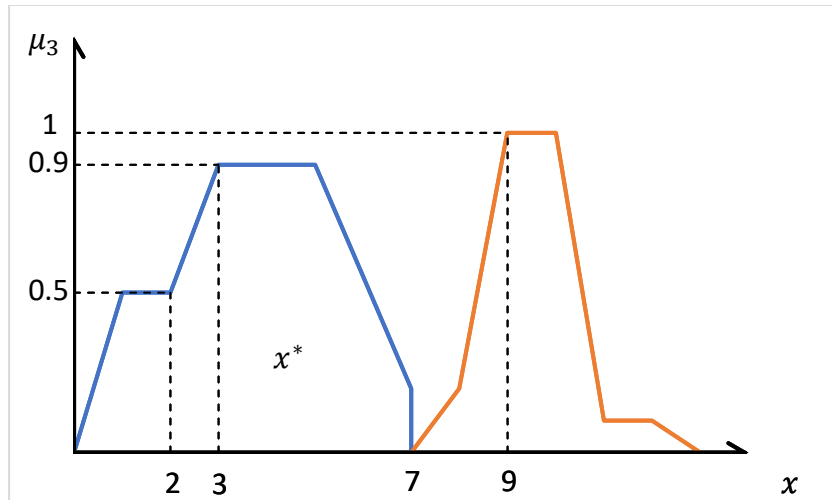


Figura 3.24 – Método do centro de maior área.

A equação que define o valor desfuzzificado é dada por (3.52):

$$x^* = \frac{\int \mu_{\tilde{A}}(x) x dx}{\int \mu_{\tilde{A}}(x) dx} \quad (3.52)$$

Este método utiliza uma equação semelhante à equação do método da centróide.

7. Primeiro dos máximos (último dos máximos)

Neste método, usa-se a saída de todos os conjuntos *fuzzy* de saída individual, \tilde{c}_k , para determinar o menor valor, com grau de pertinência maximizado.

Seja a maior altura na união representada por $hgt(\tilde{c}_k)$, é dada por (3.53):

$$hgt(\tilde{c}_k) = \sup_{z \in Z} \mu_{\tilde{c}_k}(z) \quad (3.53)$$

Para o primeiro dos máximos, o valor desfuzzificado é dado por (3.54):

$$x^* = \inf_{z \in Z} \{z \in Z \mid \mu_{\tilde{c}_k}(z) = hgt(\tilde{c}_k)\} \quad (3.54)$$

Para o último dos máximos, o valor desfuzzificado é dado por (3.55):

$$x^* = \sup_{z \in Z} \{z \in Z \mid \mu_{\tilde{c}_k} = \text{hgt}(\tilde{c}_k)\} \quad (3.55)$$

O “inf” denota ínfimo (maior limite inferior) e o “sup” denota supremo (menor limite superior).

Utiliza-se a Figura 3.21 e a Figura 3.24 para exemplificar este método.

Para o ínfimo, na Figura 3.21, a função de pertença tem a primeira maximização de pertença em $x^* = 5$, portanto este é o valor desfuzzificado. Na Figura 3.24, a primeira maximização de pertença é em $x^* = 9$.

Para o supremo, na Figura 3.20, a função de pertença tem a última maximização de pertença em $x^* = 8$. Na Figura 3.24, a última maximização de pertença é em $x^* = 10$.

3.5 – Sistema de inferência *fuzzy*

Os sistemas de inferência *fuzzy* (FISs) são, também, conhecidos como sistemas baseados em regras *fuzzy*, modelo *fuzzy*, sistema especialista *fuzzy* e memória associativa *fuzzy*. Esta é uma unidade principal de um sistema de lógica *fuzzy*. A tomada de decisão é uma parte importante em todo o sistema. A FIS formula regras adequadas e com base nas regras a decisão é tomada. Isto é baseado principalmente nos conceitos da teoria dos conjuntos *fuzzy*, regras *fuzzy*, e raciocínio *fuzzy*. O FIS usa as regras “IF... THEN ...” e os conectores presentes na declaração das regra são “OR” ou “AND” para definir as regras de decisão necessárias. O FIS básico pode receber entradas *fuzzy* ou entradas clássicas, mas as saídas que produz são quase sempre conjuntos *fuzzy*. Quando o FIS é usado como controlador, é necessário ter uma saída clássica. Portanto, neste caso, o método de defuzzificação é adotado para extrair um valor clássico que melhor represente um conjunto *fuzzy*.

Construção e funcionamento de um sistema de inferência

O sistema de inferência *fuzzy* (FIS) consiste numa interface de fuzzificação, uma base de regras, uma base de dados, uma unidade de decisão e, finalmente, uma interface de

desfuzzificação. Um FIS com cinco blocos funcionais encontra-se descrito na Figura 3.25. A função de cada bloco é a seguinte:

- uma *base de regras* contendo um número de regras *fuzzy* IF-THEN;
- um *banco de dados* que define as funções de pertença dos conjuntos *fuzzy* usados nas regras *fuzzy*;
- uma *unidade de decisão* que realiza as operações de inferência sobre as regras;
- uma *interface de fuzzificação* que transforma as entradas clássicas em graus de correspondência com valores linguísticos;
- uma *interface de defuzzificação* que transforma os resultados *fuzzy* numa saída clássica.

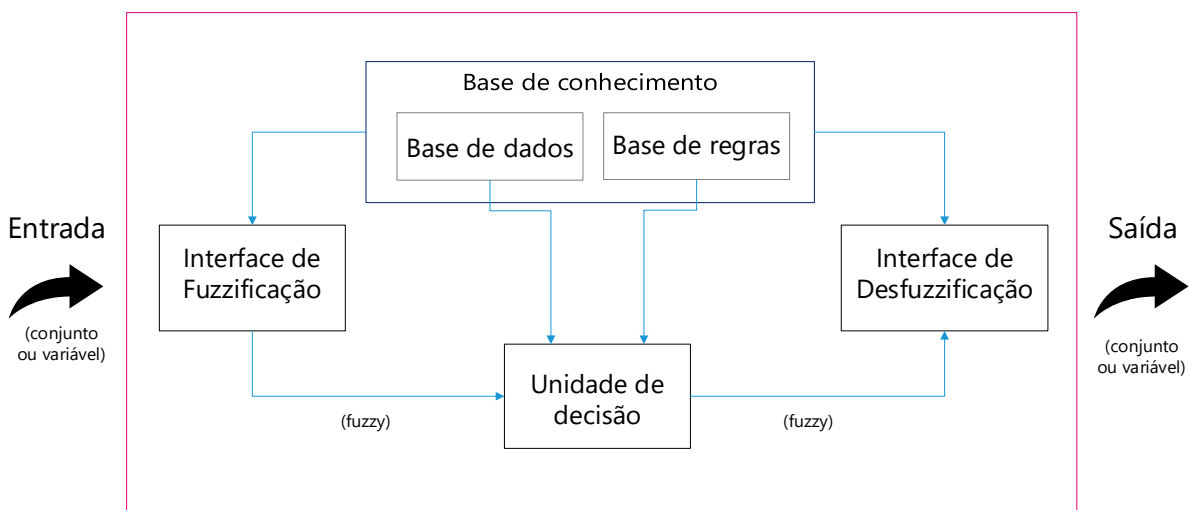


Figura 3.25 – Sistema de inferência *fuzzy*

Na Figura 3.25 a unidade de decisão corresponde ao sistema de inferência. O funcionamento do FIS é o seguinte: a entrada clássica é convertida numa variável *fuzzy* usando o método de fuzzificação. Após a fuzzificação, a base de regras é formada. A base de regras e o banco de dados são referidos conjuntamente como base de conhecimento. A defuzzificação é usada para converter o valor *fuzzy* num valor apto para ser implementado num determinado sistema correspondendo à saída. As etapas do raciocínio *fuzzy*, i.e, operações de inferência sobre regras *fuzzy* IF-THEN, realizadas pelo FIS são:

- Comparar as variáveis de entrada com as funções de pertença, na parte antecedente, para obter os valores de pertença de cada definição linguística. Esta etapa é frequentemente chamada de fuzzificação.
- Combinar os valores de pertença, na parte da premissa, para obter o peso de cada regra.
- Gerir os consequentes qualificados (*fuzzy* ou clássico) ou cada regra dependendo do peso.
- Agregar os consequentes qualificados para produzir uma saída clássica. Esta etapa é chamada de desfuzzificação.

Métodos de inferência *fuzzy*

Existem dois métodos de inferência *fuzzy* conhecidos: o método de inferência Mamdani, introduzido por Mamdani e Assilian [7], e o método de Sugeno, também conhecido como Takagi-Sugeno (TS), que foi apresentado por Sugeno em 1985. A principal distinção entre estes dois métodos reside na forma como eles calculam a saída com base nas regras *fuzzy*. Nos sistemas *fuzzy* Mamdani, a consequência das regras é descrita usando conjuntos *fuzzy*, enquanto nos sistemas *fuzzy* TS, as regras empregam funções lineares das variáveis de entrada [7].

O método de Mamdani foi um dos primeiros métodos de inferência usando a teoria dos conjuntos *fuzzy* a ser implementado num sistema de controlo. Foi proposto por Mamdani para controlo de uma combinação de uma máquina a vapor e uma caldeira, sintetizando um conjunto de regras de controlo linguísticas obtidas a partir do conhecimento de operadores humanos experientes [7]. O trabalho de Mamdani foi baseado no artigo de Zadeh sobre algoritmos *fuzzy* para sistemas complexos e processos de decisão [9].

Em geral, os sistemas do tipo Sugeno podem ser usados para modelar qualquer sistema de inferência em que as funções de pertença de saída sejam lineares ou constantes.

Para calcular a saída das regras de acordo com as entradas, devem ser seguidas seis etapas [8]:

- Determinar um conjunto de regras *fuzzy*;
- Fuzzificar as entradas usando as funções de pertença de entrada;
- Combinar as entradas fuzzificadas de acordo com as regras *fuzzy* e peso das regras;
- Encontrar a consequência da regra combinando o peso da regra e a função de pertença de saída;
- Combinar as consequências para obter uma agregação das funções de pertença de saída que foram ativadas;
- Desfuzzificar a agregação das funções de pertença de saída que foram ativadas.

Comparação entre o método de inferência de Mamdani e o método de inferência de Sugeno

A principal diferença entre o método de inferência de Mamdani e o método de inferência de Sugeno, consiste nas funções de pertença de saída, sendo que neste último, são lineares ou constantes. Além disso, a diferença está, também, na consequência das suas regras *fuzzy* e, portanto, os procedimentos de agregação e desfuzzificação diferem. Outra diferença entre os dois métodos está no consequente das regras *fuzzy*. Os sistemas *fuzzy* Mamdani usam conjuntos fuzzy como consequente da regra, enquanto os sistemas *fuzzy* TS utilizam funções lineares de variáveis de entrada como consequente da regra.

O número de conjuntos *fuzzy* de entrada e regras *fuzzy* necessários para os sistemas *fuzzy* com método de inferência de Sugeno dependem do número e das localizações dos extremos das funções a serem consideradas. No método de inferência Sugeno, um grande número de regras *fuzzy* deve ser utilizado para aproximar funções periódicas ou altamente oscilatórias. A configuração mínima dos sistemas fuzzy TS pode ser simplificada, resultando numa

dimensão menor do que a dos sistemas fuzzy que utilizam o método de inferência Mamdani, desde que sejam empregues conjuntos fuzzy de entrada que não sejam trapezoidais ou triangulares [10].

Os controladores baseados em métodos de inferência Sugeno, geralmente têm parâmetros mais ajustáveis no conseqüente da regra e o número de parâmetros cresce exponencialmente com o aumento do número de variáveis de entrada.

Apresentam-se na Tabela 3.8 e Tabela 3.9 as vantagens e desvantagens de cada um dos métodos mencionados.

Tabela 3.8 – Vantagens do método de inferência de Mamdani e Sugeno [10]

Método de inferência Mamdani	Método de inferência Sugeno
<ul style="list-style-type: none"> • Poder expressivo; • Fácil formalização e interpretabilidade; • Resultados razoáveis com estrutura relativamente simples; • Natureza intuitiva e interpretável da base de regras; • É amplamente utilizado em particular para aplicação de apoio à decisão; • Pode ser usado para sistemas MISO e MIMO*; • A saída pode ser fuzzy ou clássica. 	<ul style="list-style-type: none"> • Melhor tempo de processamento, pois a média ponderada substitui o demorado processo de desfuzzificação; • Eficiência e precisão computacional • Mais robusto quando na presença de dados de entrada ruidosos, como dados de sensores; • Os conseqüentes das regras podem ter tantos parâmetros por regra quanto valores de entrada, permitindo mais flexibilidade no design; • Adequado para análise funcional devido à estrutura contínua da função de saída (as mesmas entradas não originam saídas substancialmente diferentes).

*MISO: Multiple Input Single Output; MIMO: Multiple Input Multiple Output

Tabela 3.9 – Desvantagens do método de inferência de Mamdani e Sugeno [10]

Desvantagens do método de inferência de Mamdani	Desvantagens do método de inferência de Sugeno
<ul style="list-style-type: none"> • Área de design utilizada é maior pelo facto de ser necessário usar mais unidades para encontrar as saídas <i>fuzzy</i>; • Maior complexidade e computação do seu dimensionamento; • Execução mais lenta; • Deve-se usar o método de inferência de Sugeno, caso o sistema seja linear. 	<ul style="list-style-type: none"> • Usar Look-up tables pode levar a uma redução na precisão da implementação; • Deve-se usar o método de inferência de Mamdani, caso o sistema seja não-linear; • Só pode ser usado para sistemas MISO.

Constituição de regras *fuzzy*

As regras *fuzzy* são constituídas por declarações linguísticas que descrevem a forma como o FIS deve tomar uma decisão sobre a classificação de uma entrada ou o controlo de uma saída.

As regras *fuzzy* são sempre escritas da seguinte forma:

Se (entrada 1 é função de pertença 1) E/Ou (entrada 2 é função de pertença 2) E/Ou ... Então (saída n é função de pertença de saída n).

Por exemplo:

Se a temperatura for baixa e a humidade for baixa, então a sala está fria.

Têm que ser determinadas funções de pertença que definam baixa temperatura (entrada 1), baixa humidade (entrada 2) e uma sala fria (saída 1). Este processo de selecionar uma entrada como temperatura e processá-la através de uma função de pertença para determinar a temperatura “baixa” é chamado de fuzzificação.

Consequentes das regras

O consequente de uma regra *fuzzy* calcula-se usando duas etapas:

1. Calcular o peso da regra combinando as entradas fuzzificadas usando o processo de combinação *fuzzy* indicado no capítulo 3.5.2.2, com recurso a operadores lógicos.
2. Recortar a área da função de pertença de saída ativada de acordo com o peso da regra.

3.6 – Conclusões

Neste capítulo, começa-se por explorar a teoria clássica dos conjuntos, estabelecendo as bases para a compreensão dos limites bem definidos dos conjuntos clássicos. No entanto, descobrem-se as limitações da teoria clássica dos conjuntos no tratamento de problemas do mundo real, onde prevalece a incerteza e a imprecisão.

Isto conduz ao domínio da teoria dos conjuntos *fuzzy*, que permite modelar e manipular informações vagas e imprecisas. Os conjuntos *fuzzy* substituem as funções de pertença clássicas por graus de pertença, que fornecem uma representação mais flexível dos dados. Isto permite criar variáveis linguísticas e regras linguísticas para os sistemas de inferência *fuzzy*.

Em seguida, exploram-se as relações *fuzzy* e as relações clássicas, enfatizando como as relações *fuzzy* descrevem a imprecisão, associando cada elemento a um grau de pertença. Esta noção de graus de pertença é crucial na definição das regras que regem o sistema *fuzzy*.

A introdução à teoria da lógica *fuzzy* fornece uma estrutura para raciocínio com informações imprecisas, onde, em vez de decisões binárias verdadeiro/falso, tomam-se decisões com base em graus de pertença.

Finalmente, no subcapítulo 3.5, descreve-se o sistema *fuzzy* composto por conjuntos *fuzzy*, variáveis linguísticas, funções de pertença, regras *fuzzy* e um mecanismo de inferência. Este sistema foi projetado para imitar processos de tomada de decisão semelhantes aos humanos, tornando-o particularmente adequado para tarefas como controlar a velocidade de um motor

DC, onde o controlo preciso pode ser um desafio devido a vários fatores, como as incertezas do sistema.

Em suma, com a exploração da teoria clássica dos conjuntos, da teoria dos conjuntos *fuzzy*, das relações *fuzzy* e da teoria da lógica *fuzzy* obtém-se o conhecimento e as ferramentas necessárias para construir um controlador baseado em lógica *fuzzy*. Ao combinar estes princípios, é possível criar um sistema de controlo que se adapta à natureza imprecisa dos cenários do mundo real, garantindo que o motor DC funciona de forma eficiente, mesmo face à incerteza.

Face à análise realizada verifica-se que a teoria dos conjuntos fuzzy é adequada ao controlo de velocidade do motor DC através da corrente de excitação devido às não linearidades existentes. No próximo capítulo a teoria dos conjuntos fuzzy é aplicada ao controlo de velocidade de um motor DC.

CAPÍTULO 4 – CONTROLO DE VELOCIDADE DO MOTOR DC

4. - Introdução

A máquina em estudo, é um motor DC com excitação separada, cujos parâmetros se apresentam na Tabela 4.1. Através do ensaio de desaceleração e do ensaio da separação das perdas, são obtidos os parâmetros elétricos, apresentados na Tabela 4.2 e são obtidos os parâmetros mecânicos, apresentados na Tabela 4.3:

Tabela 4.1 – Parâmetros da chapa de características do motor DC com excitação separada.

Tensão nominal [V]	Corrente nominal [A]	Potência nominal [kW]	Velocidade [RPM]	Corrente de Excitação [A]	Binário [N.m]
220	63	12.5	1200	0.9	99.47
220	63	12.5	2000	0.35	59.68

Tabela 4.2 – Parâmetros elétricos do motor DC com excitação separada.

Resistência da armadura [Ω]	0.42
Indutância da armadura [H]	0.004095
Resistência de excitação [Ω]	226
Indutância de excitação [H]	6.068

Tabela 4.3 - Parâmetros mecânicos do motor DC com excitação separada

Coeficiente de atrito dinâmico	0.0024
Momento de inercia [$Kg.m^2$]	0.109

A velocidade do motor DC pode ser ajustada ou controlada facilmente permitindo uma fácil controlabilidade e alto desempenho.

Existem três métodos de controle da velocidade do motor DC excitado separadamente; controle de velocidade através da variação da tensão da armadura, controle da velocidade através da variação do fluxo magnético e controle da velocidade através da variação da resistência da armadura.

Matematicamente esta relação é dada pela equação (4.1):

$$\omega = \frac{U_a - R_a \cdot I_a}{k_a \varphi} \quad (4.1)$$

Onde U_a é a tensão da armadura, I_a é a corrente da armadura, R_a é a resistência da armadura, k_a é a constante da armadura, φ é o fluxo magnético e ω a velocidade angular do rotor.

Podem ser usados diferentes controladores para controlar a velocidade de um motor DC, sendo exemplo o controlador PID, controlador baseado em lógica *fuzzy*; ou a combinação entre eles.

A característica magnética da máquina, características de velocidade, de binário e a característica mecânica são apresentadas nas Figuras 4.1, 4.2, 4.3 e 4.4, respetivamente:

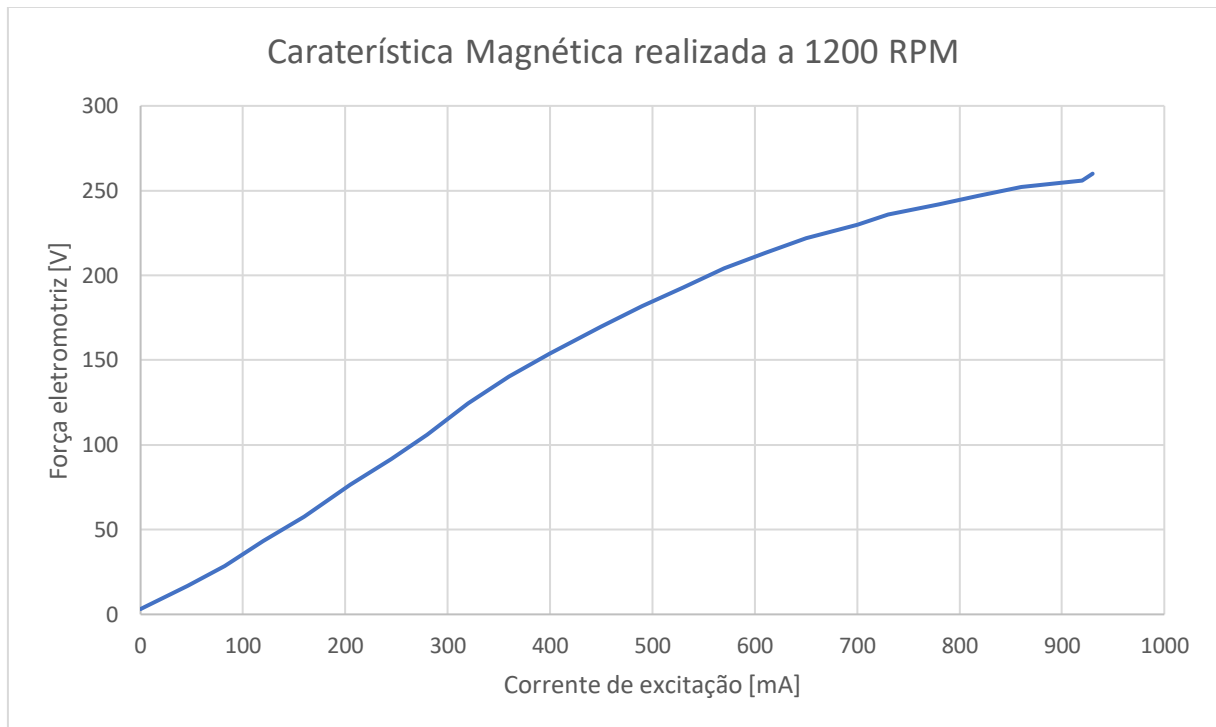


Figura 4.1 – Caraterística magnética do motor DC.

Podemos separar as caraterísticas magnética em três troços considerados lineares de forma a simplificar o gráfico e facilitar a utilização dos valores:

- [0,400] mA
 - $y = 0.3841x - 0.5985$ [V]
-]400,650] A
 - $y = 0.2728x + 46.913$ [V]
-]650,950] A
 - $y = 0.128x + 140.93$ [V]

Sabendo a característica magnética é possível traçar teoricamente a característica de velocidade, a característica de binário e a característica mecânica

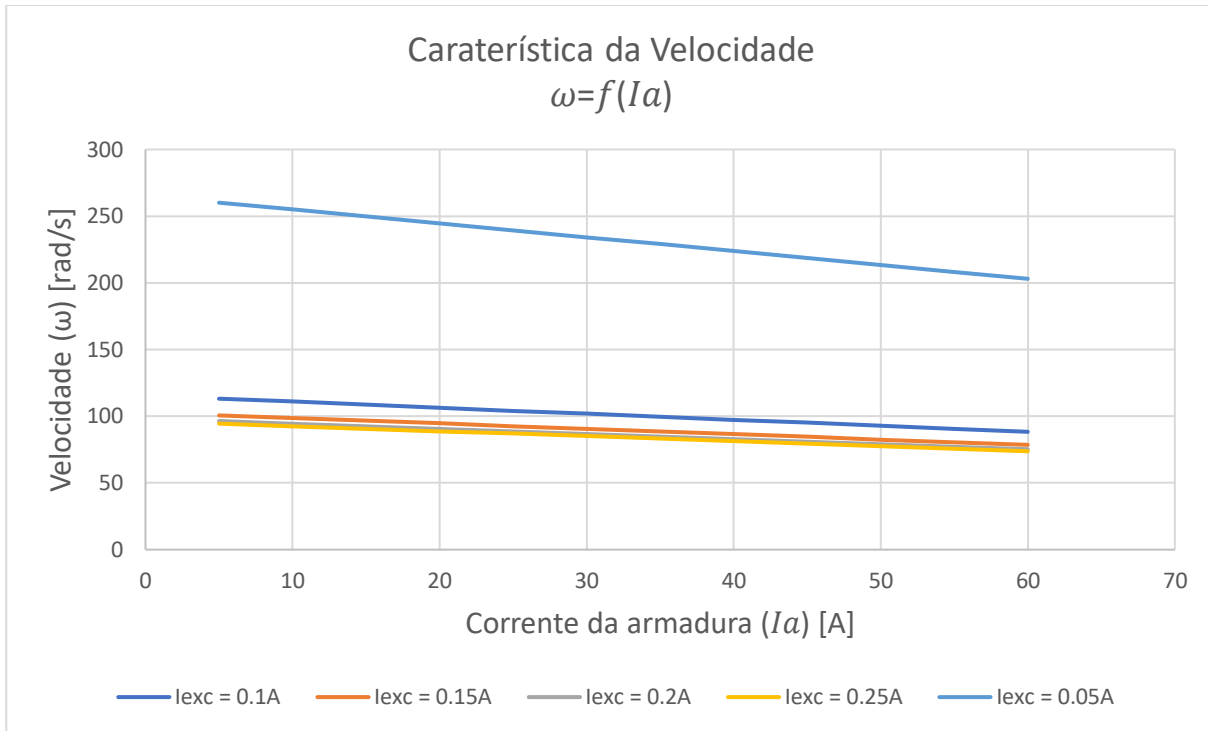


Figura 4.2 – Caraterística de velocidade do motor DC.

Considerando o mesmo valor de corrente, a velocidade não é proporcional à corrente de excitação. Conforme se pode observar na Figura 4.2 à medida que a corrente de excitação diminui, a velocidade aumenta, verificando-se graficamente que as retas não são paralelas entre si. Isto porque, quando se entra na zona de saturação, iguais incrementos na corrente de excitação não conduzem a iguais incrementos na velocidade. Quando diminui a corrente de excitação, diminui-se o fluxo e por este fato, diminui o binário eletromagnético, conforme pode ser comprovado através da expressão (4.2):

$$T_e = k_a \phi i_a \quad (4.2)$$

Na zona linear da característica de velocidade, a distância entre as curvas de velocidade é sempre igual, mas conforme se evolui para a zona de saturação, esta distância entre as curvas começa a ser menor porque ao aumentar a corrente de excitação, a velocidade não varia muito, observando-se que o declive das retas não é o mesmo. Com o valor de corrente de excitação baixo, a velocidade é elevada. Na zona de saturação mesmo que se aumente a corrente de excitação, a diferença de velocidade começa a ser menor porque o fluxo é quase constante.

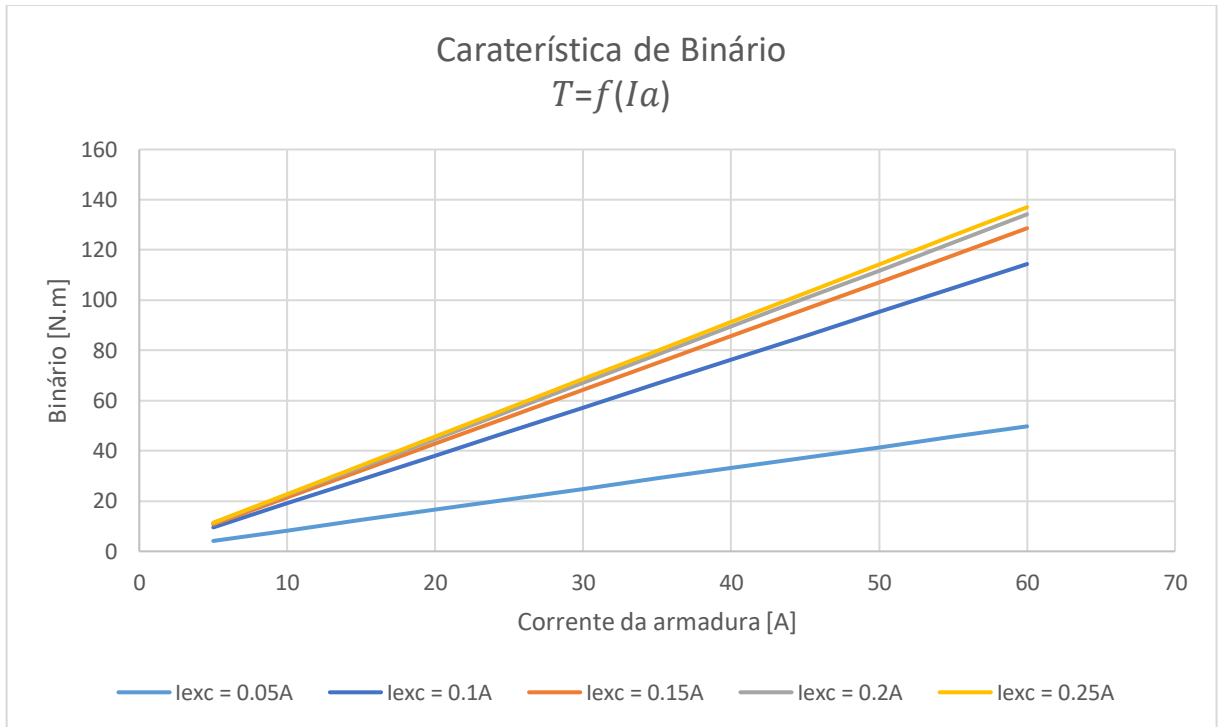


Figura 4.3 – Caraterística de binário do motor DC.

A relação entre o binário e a corrente de excitação é diretamente proporcional, o que significa que quando a corrente de excitação varia, o binário também varia em conformidade. É importante notar que o binário não se mantém constante em situações de variação da corrente de excitação.

Além disso, observa-se que a relação entre o fluxo e a velocidade da máquina é inversamente proporcional. Em outras palavras, à medida que o fluxo diminui, a velocidade da máquina aumenta.

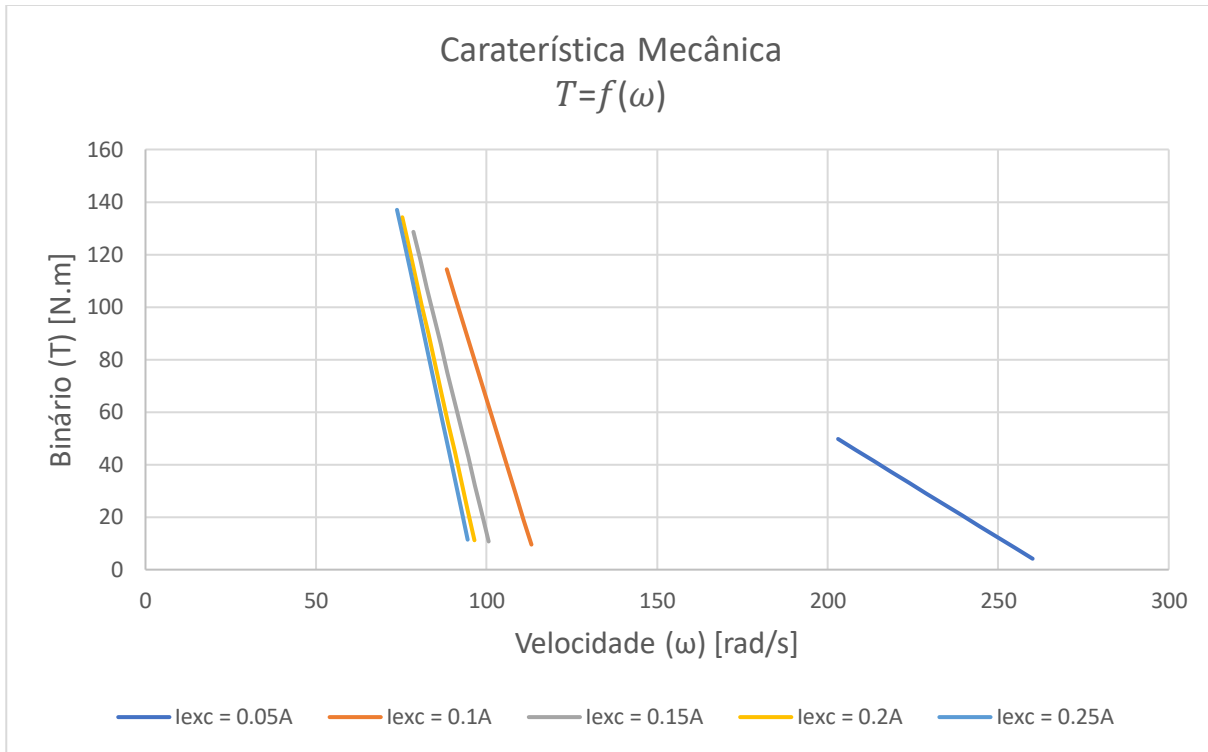


Figura 4.4 – Caraterística mecânica do motor DC.

Observa-se que a máquina pode ser caracterizada através de duas zonas de funcionamento, considerando a zona de saturação e outro considerando a zona linear. Por este motivo é utilizado um controlador baseado em lógica *fuzzy*, para facilitar o controlo na zona linear e não linear.

4.1 – Modelo da Máquina DC

O modelo matemático no domínio do tempo representativo do motor DC define-se de forma compacta em (4.3) de acordo com [11]

$$[u] = \left\{ [R] + [L] \frac{d}{dt} + \omega [G] \right\} [i] \quad (4.3)$$

Correspondendo à expressão (4.4), onde a corrente de excitação é representada pelo i_{ds} :

$$\begin{bmatrix} u_{ds} \\ u_{qs} \\ u_{dr} \\ u_{qr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{ds} + L_{ds} \frac{d}{dt} & 0 & M_d \frac{d}{dt} & 0 \\ 0 & R_{qs} + L_{qs} \frac{d}{dt} & 0 & M_q \frac{d}{dt} \\ M_d \frac{d}{dt} & -M_q \cdot \omega_n & R_{dr} + L_{dr} \frac{d}{dt} & -L_{qr} \cdot \omega_n \\ M_d \cdot \omega_n & M_q \frac{d}{dt} & L_{dr} \cdot \omega_n & R_{qr} + L_{qr} \frac{d}{dt} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{ds} \\ i_{qs} \\ i_{dr} \\ i_{qr} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Na expressão matricial (4.4), u_{ds} refere-se ao circuito do estator e u_{qr} é o circuito do rotor, o restante das linhas da matriz não são consideradas.

Sendo o binário eletromagnético dado por (4.5):

$$T_e = p[i]^T[G][i] = [i_{ds} \quad i_{qs} \quad i_{dr} \quad i_{qr}] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -M_q & 0 & -L_{qr} \\ M_d & 0 & L_{dr} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{ds} \\ i_{qs} \\ i_{dr} \\ i_{qr} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

E a equação mecânica definida em (4.6):

$$J \frac{d\omega}{dt} + K_{dw} + K_e + T_c = T_e \quad (4.6)$$

A simulação foi implementada no Matlab/Simulink, utilizando as equações do motor no domínio da frequência, definidas em (4.7):

$$U_a - E_a = \left(\frac{\frac{1}{R_a}}{1 + \frac{L_a}{R_a} s} \cdot k_a \varphi - T_c \right) \left(\frac{\frac{1}{K_D}}{1 + \frac{J}{K_D} s} \right) \quad (4.7)$$

Onde:

$$E_a = k_a \varphi \omega$$

Sendo ω em rad/s.

Despreza-se a reação magnética do induzido e considerou-se a saturação magnética representada através da característica magnética. Desprezou-se o coeficiente de atrito turbulento e o coeficiente de atrito estático.

4.2 – Descrição dos controladores

Introdução

Os controladores convencionais denominados controladores clássicos, proporcional-integral-derivativo (PID) são os controladores mais conhecidos e amplamente usados nas indústrias modernas.

De um modo geral, os controladores PID têm a vantagem de serem simples, confiáveis e eficazes uma vez que têm menos custos e são fáceis de operar.

Além disso, os controladores PID têm um bom desempenho no seguimento do valor de referência e estabilidade garantida [2].

Controlador de lógica *fuzzy*

Depois de definidas as variáveis de entrada estas são pré-processadas, ou seja, preparam-se os valores destas variáveis para o controlador, de seguida, convertem-se os valores das variáveis de entrada em valores linguísticos. Este processo denomina-se fuzziificação.

As vantagens e desvantagens da linguagem utilizada na síntese de um controlador *fuzzy*, apresentam-se na Tabela 4.4.

Tabela 4.4 – Vantagens e desvantagens da linguagem utilizada para a lógica *fuzzy*.

Vantagens	Desvantagens
<ul style="list-style-type: none">• Não necessita de matemática complexa;• Utilização de linguagem natural;• Fácil implementação;• Produz resultados precisos;	<ul style="list-style-type: none">• Tem de se compreender o problema;• Tem de se ser capaz de definir o problema;• Tem de se saber avaliar os resultados;

Controladores clássicos PID

Os controladores lineares são amplamente utilizados na indústria devido à sua simplicidade e bom desempenho; no entanto, todos os sistemas do mundo real são não lineares e uma abordagem de controlo linear pode não ser suficiente para obter o melhor desempenho, porque a dinâmica do modelo é altamente não linear ou porque sempre há incertezas. Por outro lado, controladores não lineares podem melhorar a estabilidade de sistemas dinâmicos, mas geralmente possuem estruturas mais complexas, de forma que a implementação prática é mais desafiadora do que a de controladores lineares. Entre os controladores não lineares estão aqueles que utilizam o modelo da dinâmica do sistema (sistemas de controlo baseados em modelos) que possuem alto desempenho desde que os parâmetros físicos do modelo sejam bem conhecidos. Porém, quando existem diferenças significativas entre os parâmetros conhecidos e os reais, os sistemas de controlo baseados em modelos podem funcionar inadequadamente. Mesmo que esses controladores atendam a esse recurso, o seu desempenho operacional pode ser afetado pela presença de incertezas paramétricas ou dinâmicas não modeladas.

No controlador PID convencional existe uma dificuldade em conhecer o valor dos parâmetros e obter boas características adequadas.

O diagrama de blocos do sistema em malha fechada com controlo PID encontra-se na Figura 4.6, onde $r(t)$ é a referência da entrada (*setpoint*), $y(t)$ é a saída do sistema, $e(t) = r(t) - y(t)$, é o erro entre a referência e a saída e $u(t)$ é a ação de controlo (saída do controlador) que é usada como entrada para o sistema.

No domínio do tempo define-se $u(t)$ do controlador PID de acordo com a equação (4.7).

$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau + K_D \frac{d}{dt} e(t) \quad (4.7)$$

Os três ganhos de controle, K_P , K_I e K_D são constantes a ser determinadas no dimensionamento para o desempenho do rastreamento do valor de referência e consideração de estabilidade.

Na Figura 4.6 é apresentada uma configuração possível para um controle em que se utilizam os três ganhos de controle.

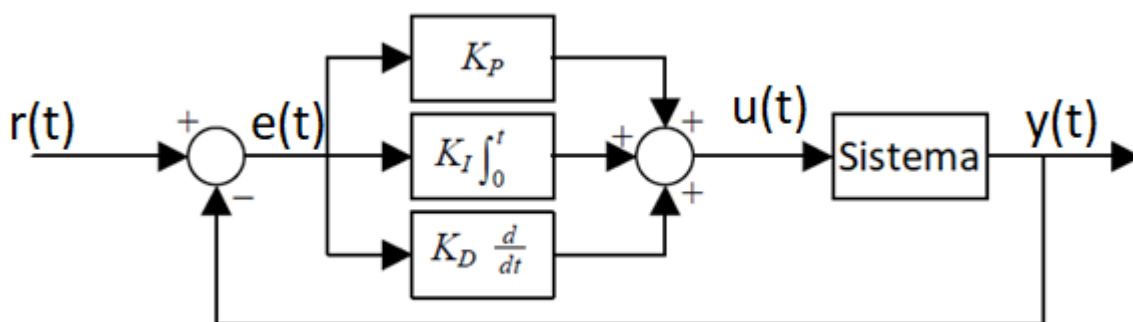


Figura 4.5 – Diagrama de blocos do sistema em malha fechada com controle PID

Método de ajuste de parâmetros Ziegler-Nichols

O método de ajuste de parâmetros Ziegler-Nichols é uma abordagem heurística popular para ajustar os parâmetros de um controlador proporcional-integral-derivativo (PID) num sistema de controle. Este método foi desenvolvido por John G. Ziegler e Nathaniel B. Nichols na década de 1940 e é conhecido pela sua simplicidade e eficácia no controle.

O método Ziegler-Nichols envolve uma série de etapas para determinar os valores ideais de K_P , K_I e K_D do controlador PID. Esses parâmetros são essenciais para controlar sistemas onde quer-se manter um ponto de ajuste desejado enquanto se minimiza a sobrelevação, o tempo de estabelecimento e o erro estático.

Aqui está uma explicação passo a passo de como funciona o método de ajuste Ziegler-Nichols [12]:

1. Configuração inicial:
 - a. Definem-se todos os parâmetros do controlador PID para zero: $K_P = 0$, $K_I = 0$ e $K_D = 0$.
2. Controlo somente proporcional:
 - a. Aumenta-se o K_P gradualmente até que o sistema comece a oscilar continuamente com amplitude constante. Após estar com amplitude constante, aumentam-se os parâmetros K_I e K_D de modo a aproximar ao máximo à resposta pretendida.
3. Ajuste dos parâmetros:
 - a. Ajustar os parâmetros conforme necessário para alcançar o desempenho pretendido do sistema de controlo.

Embora o método de ajuste de parâmetros Ziegler-Nichols apresente um ponto de partida útil para sintetizar o controlador PID, em muitas aplicações, a eficácia pode variar dependendo das características e requisitos específicos do sistema de controlo. A escolha do método de ajuste deve ser feita cuidadosamente, levando em consideração a natureza do sistema, s critérios de desempenho e a estabilidade.

4.3 – Conclusões

Com as equações do comportamento do motor DC é possível modelizar o mesmo e com esse conhecimento, é possível iniciar o estudo de ambos os controladores baseados em lógica *fuzzy* e controladores PID. O controlador PID, conhecido pela sua simplicidade e robustez, oferece controlo preciso através de componentes proporcionais, integrais e derivativos. Por outro lado, o controlador baseado em lógica *fuzzy* introduz um nível de adaptabilidade e tomada de decisão, tornando-o especialmente apto no tratamento de sistemas com dinâmicas complexas e não lineares.

Sabendo as suas vantagens e desvantagens, permite fazer escolhas para abordar adequadamente a aplicação específica de controlo da velocidade do motor DC.

Pode-se usar o método de ajuste de parâmetro Ziegler-Nichols para ajustar os ganhos do controlador PID. Ao aplicar o método Ziegler-Nichols, podemos atingir o equilíbrio entre estabilidade e capacidade de resposta, garantindo que nosso sistema de controle atenda aos requisitos de controle de um motor DC.

Capítulo 5 - SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL

5. - Introdução

Para a simulação computacional do sistema, foi utilizado a linguagem de programação do software Matlab, Simulink versão 2016a.

5.1 – Modelo do motor DC com controlador baseado em lógica *fuzzy*.

Apresenta-se o modelo do sistema incluindo o controlador baseado em lógica *fuzzy* para controlo da velocidade, através da corrente de excitação, do motor DC com a ajuda de um controlador baseado em lógica *fuzzy*.

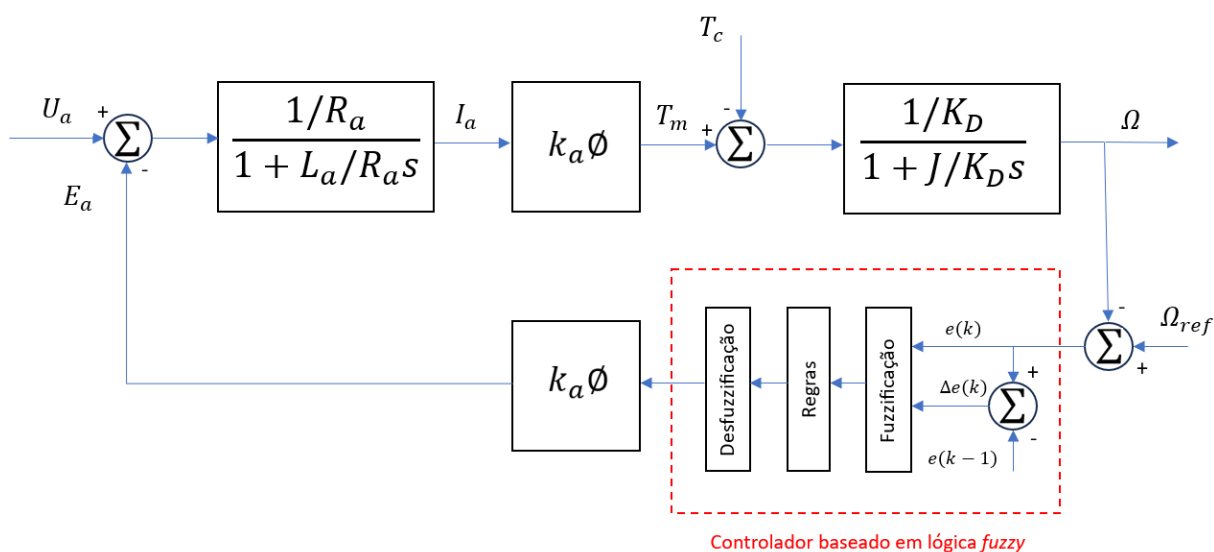


Figura 5.1 – Modelo em Simulink do controlo da velocidade através da corrente de excitação com recurso a um controlador de lógica *fuzzy*.

Os valores utilizados para a simulação foram obtidos através de ensaios no laboratório de máquinas elétricas e sendo o método de desfuzzificação utilizado o método da centroide.

Apresenta-se na Tabela 5.1, as regras linguísticas simplificadas a aplicar no controlo baseado em lógica *fuzzy*, e na Tabela 5.2, apresentam-se as regras linguísticas utilizadas na simulação.

Tabela 5.1 – Regras linguísticas simplificada da velocidade.

$Erro > 0$	$\Delta erro < 0$	$\Delta if < 0$
$Erro > 0$	$\Delta erro > 0$	$\Delta if < 0$
$Erro > 0$	$\Delta erro = 0$	$\Delta if < 0$
$Erro < 0$	$\Delta erro < 0$	$\Delta if > 0$
$Erro < 0$	$\Delta erro > 0$	$\Delta if > 0$
$Erro < 0$	$\Delta erro = 0$	$\Delta if > 0$
$Erro = 0$	$\Delta erro < 0$	$\Delta if > 0$
$Erro = 0$	$\Delta erro > 0$	$\Delta if < 0$
$Erro = 0$	$\Delta erro = 0$	$\Delta if = 0$

Esta tabela de regras linguísticas simplificada rege-se pelas seguintes circunstâncias:

- Caso a velocidade atual esteja abaixo do valor de referência, é necessário diminuir a corrente de excitação, de modo a aumentar a velocidade.
- Caso a velocidade atual esteja acima do valor de referência, é necessário aumentar a corrente de excitação, de modo a diminuir a velocidade.
- Caso a velocidade atual seja igual à velocidade de referência, não se varia a corrente de excitação.

Tabela 5.2 – Regras linguísticas aplicadas na simulação

$e/\Delta e$	NEG--	NEG-	NEG	ZERO	POS	POS+	POS++
NEG--	POS++	POS++	POS+	POS+	POS	ZERO	ZERO
NEG-	POS++	POS++	POS+	POS	POS	ZERO	NEG
NEG	POS+	POS+	POS+	POS	ZERO	NEG	NEG
ZERO	POS+	POS+	POS	ZERO	NEG	NEG-	NEG-
POS	POS	POS	ZERO	NEG	NEG-	NEG-	NEG-
POS+	POS	ZERO	NEG	NEG-	NEG-	NEG-	NEG--
POS++	ZERO	ZERO	NEG-	NEG-	NEG-	NEG--	NEG--

Utilizando a tabela de regras simplificadas, cria-se a tabela de regras linguísticas a aplicar na simulação. Esta cria-se com experiência e conhecimento do sistema, até obter o resultado pretendido.

Com todos os parâmetros obtidos, são criadas as funções de pertinência e as regras linguísticas a aplicar no controlador baseado em lógica *fuzzy*. Apresenta-se nas Figuras 5.8 e 5.9, as funções de pertinência e na Figura 5.10, a função de pertinência de saída.

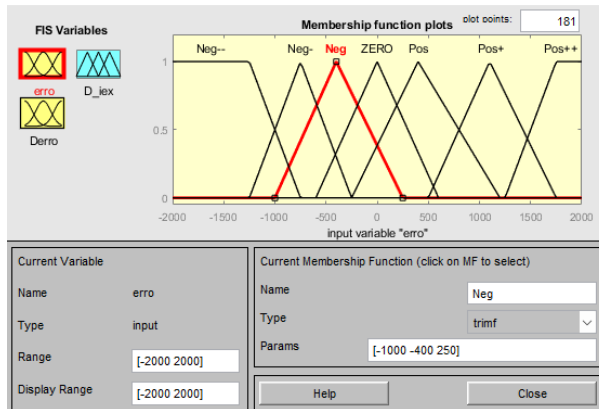


Figura 5.2 – Função de pertinência de entrada, *Erro*

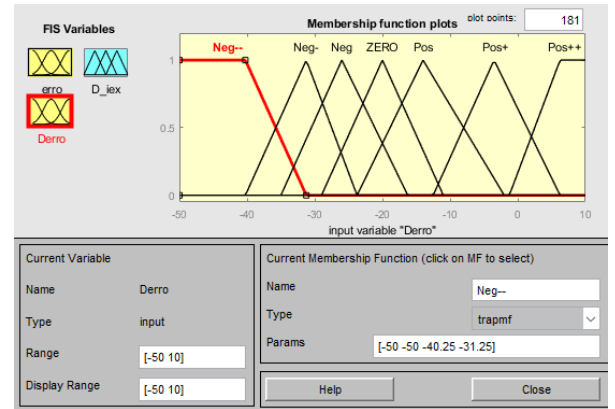


Figura 5.3 – Função de pertinência de entrada, Δ *erro*

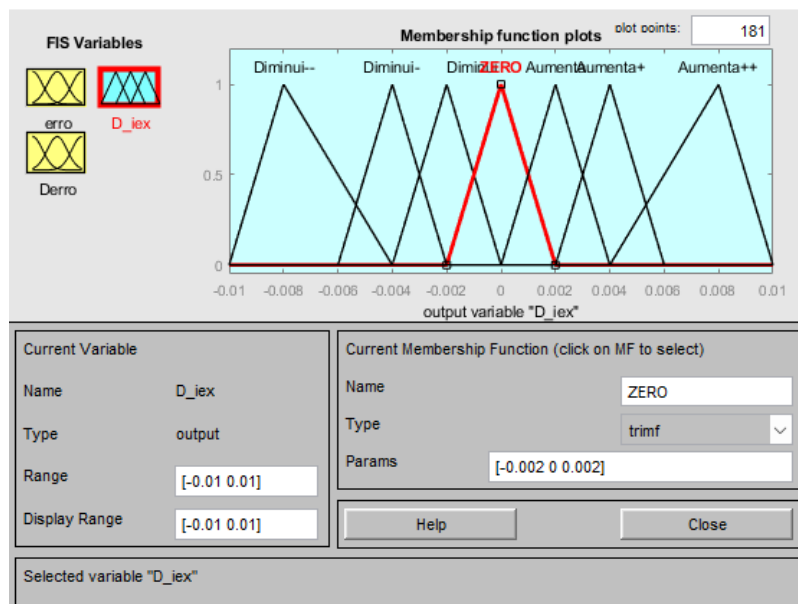


Figura 5.4 – Função de pertinência de saída do controlador de lógica *fuzzy*

Determina-se o binário de carga a introduzir no sistema com a equação (5.1):

$$T [N.m] = \frac{P_{NOM} [W]}{\omega [rad/s]} \quad (5.1)$$

Ao aplicar estas funções de pertinência e as regras linguísticas ao controlador baseado em lógica *fuzzy*, realizado a uma velocidade de referência de 1200 RPM, apresenta-se a Figura 5.5(a) e a Figura 5.5(b), o binário de carga, onde se aplica-se 99.47 N.m, de acordo com a equação (5.1), e o valor da corrente de excitação, que permite o controlo da velocidade, respetivamente:

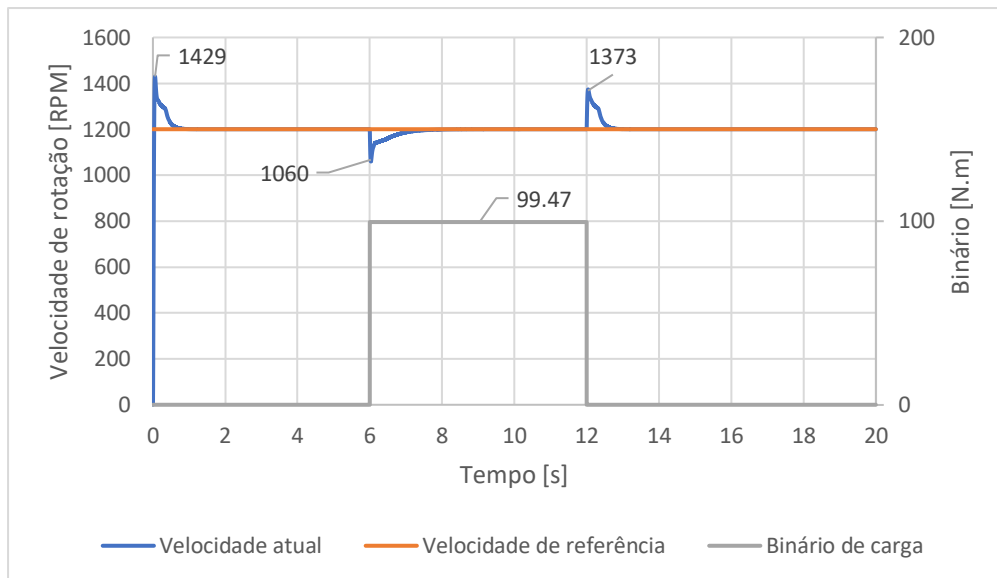


Figura 5.5(a) – Controlo da velocidade com controlo *fuzzy* para 1200 RPM com o binário de carga.

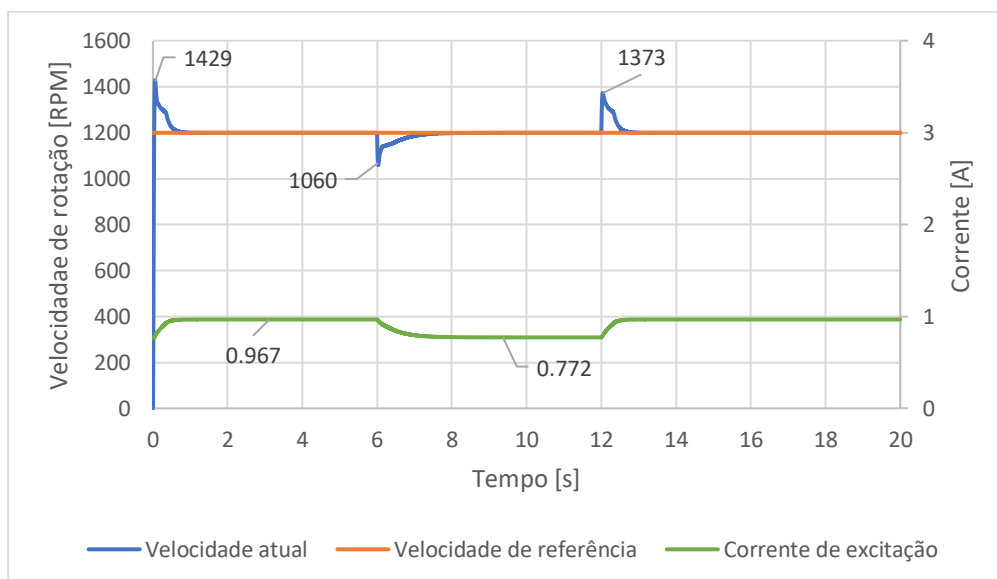


Figura 5.5(b) – Controlo da velocidade com controlo *fuzzy* para 1200 RPM com a corrente de excitação.

Observa-se que a sobrelevação inicial é de 19%, isto é o transitório de arranque e a resposta estabiliza em menos de um segundo. Após a introdução do binário de carga, a resposta estabiliza aproximadamente dois segundos depois.

Com uma velocidade de referência de 1500 RPM, apresenta-se na Figura 5.6(a) e na Figura 5.6(b), o binário de carga, onde se aplica-se 79.58 N.m, de acordo com a equação (5.1), e o valor da corrente de excitação, que permite o controlo da velocidade, respetivamente:

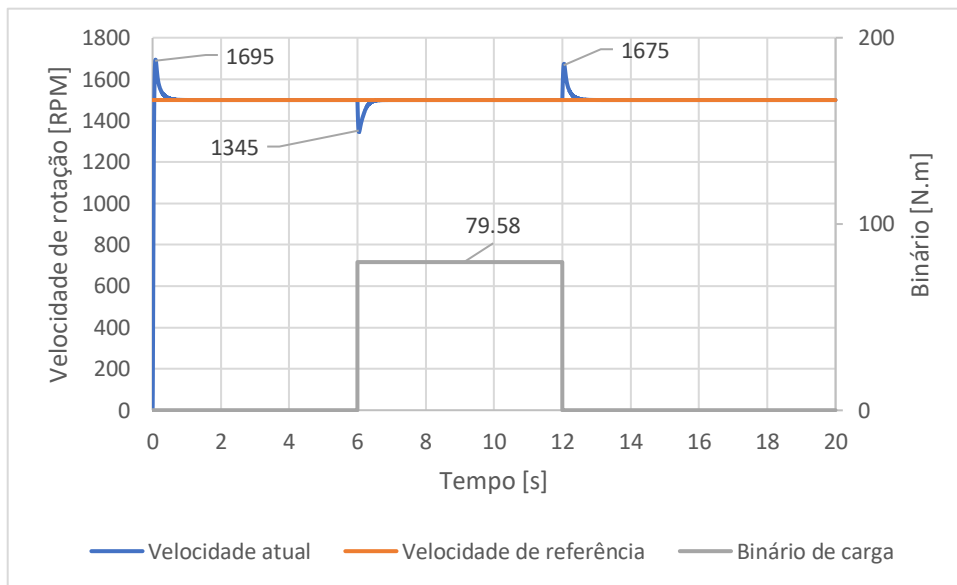


Figura 5.6(a) – Controlo da velocidade com controlo *fuzzy* para 1500 RPM com o binário de carga.

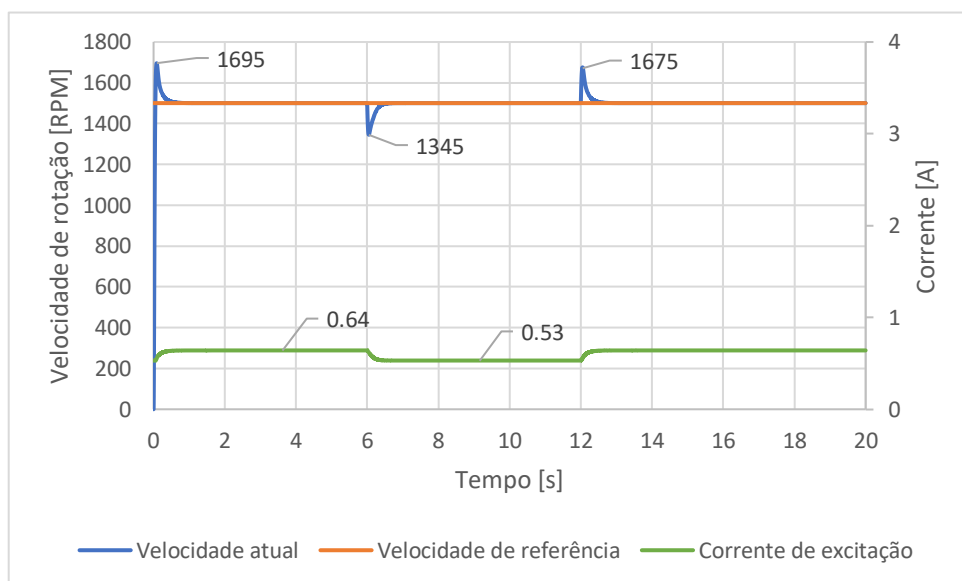


Figura 5.6(b) – Controlo da velocidade com controlo *fuzzy* para 1500 RPM com a corrente de excitação.

Observa-se que a sobrelevação inicial é de 13% e a resposta estabiliza em, aproximadamente, um segundo. Após a introdução do binário de carga, a resposta estabiliza aproximadamente um segundo depois.

Com uma velocidade de referência de 1800 RPM, apresenta-se na Figura 5.7(a) e na Figura 5.7(b), o binário de carga, onde se aplica-se 66.31 N.m, de acordo com a equação (5.1), e o valor da corrente de excitação, que permite o controlo da velocidade, respetivamente:

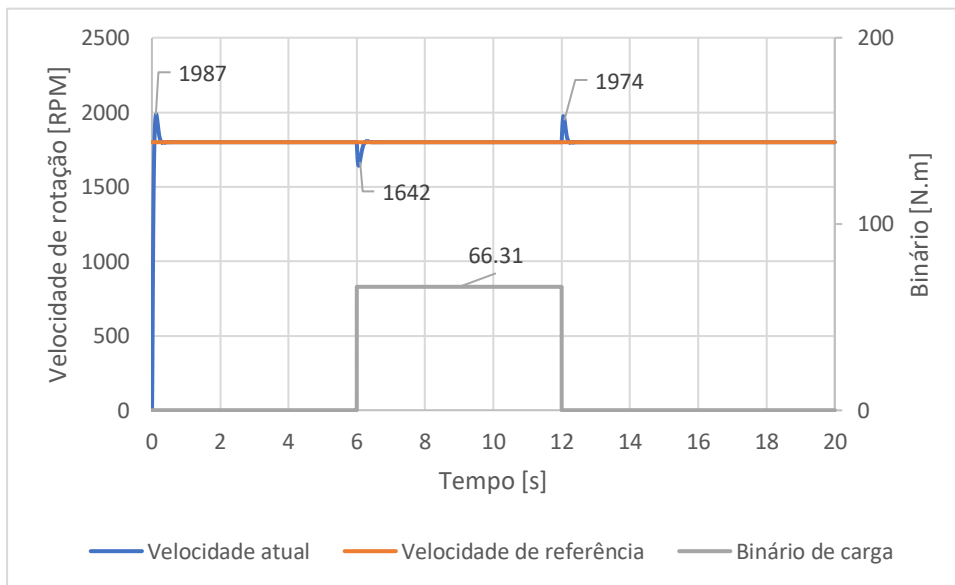


Figura 5.7(a) – Controlo da velocidade com controlo *fuzzy* para 1800 RPM com o binário de carga.

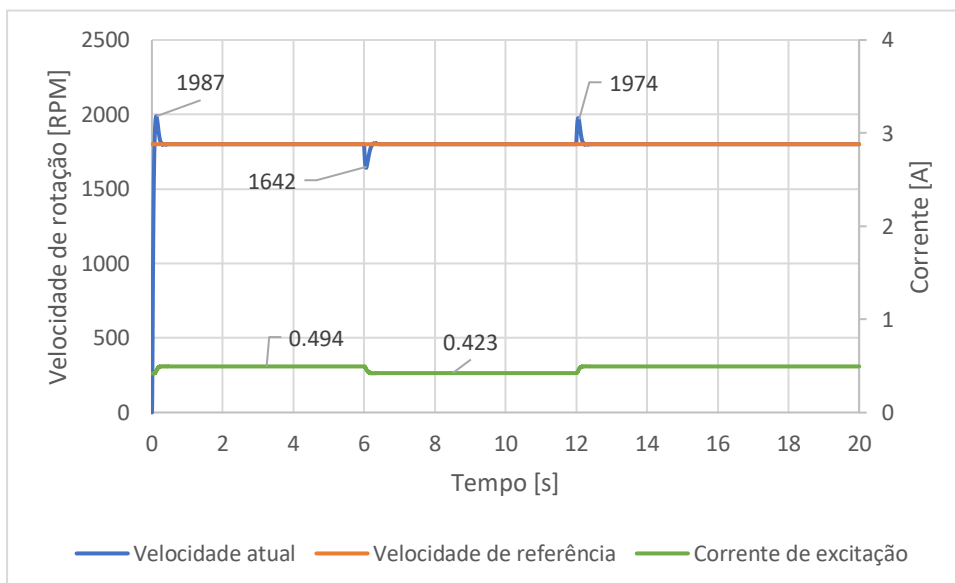


Figura 5.7(b) – Controlo da velocidade com controlo *fuzzy* para 1800 RPM com a corrente de excitação.

Observa-se que a sobrelevação inicial é a mais baixa, aproximadamente, 10% e onde a resposta estabiliza mais rápido, em menos de um segundo. Após a introdução do binário de carga, a resposta estabiliza aproximadamente 0.25 segundos depois.

5.2 – Modelo do motor DC controlado com controlador PID

Apresenta-se a simulação do controlo da velocidade, em RPM, através da corrente de excitação, do motor DC com a ajuda de um controlador PID, na Figura 5.8.

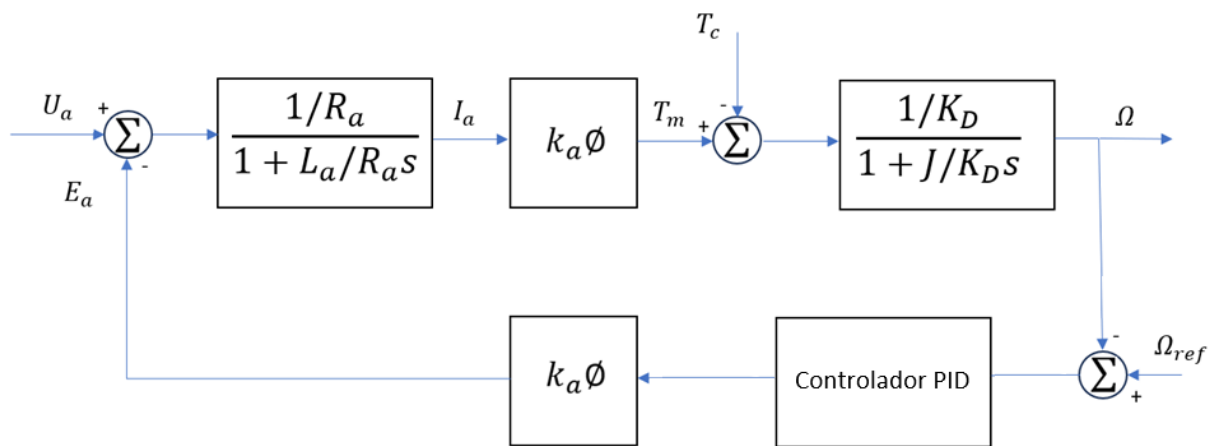


Figura 5.8 – Simulação em Simulink do controlo da velocidade através da corrente de excitação com recurso a um controlador PID.

Para determinação dos valores K_P, K_I, K_D , utiliza-se o método de ajuste de parâmetros Ziegler-Nichols, apresentados na Tabela 5.3:

Tabela 5.3 – Valores dos ganhos do controlador PID

K_P	K_I	K_D
24	25	3

Com uma velocidade de referência de 1200 RPM, apresenta-se na Figura 5.9(a) e na Figura 5.9(b), o binário de carga, onde se aplica-se 99.47 N.m, de acordo com a equação (5.1), e o valor da corrente de excitação, que permite o controlo da velocidade, respetivamente:

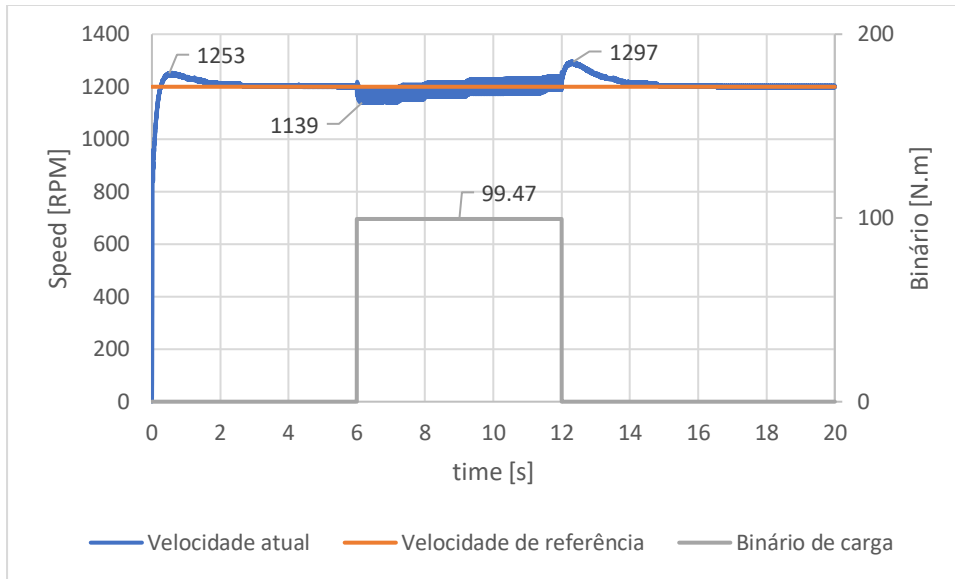


Figura 5.9(a) – Controlo da velocidade com controlo PID para 1200 RPM com o binário de carga.

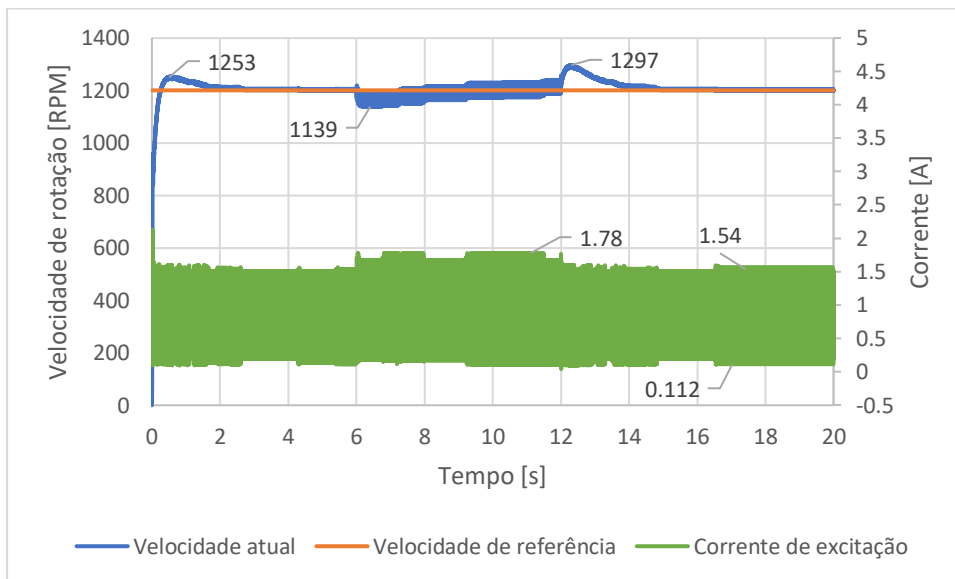


Figura 5.9(b) – Controlo da velocidade com controlo PID para 1200 RPM com a corrente de excitação.

Observa-se uma sobrelevação inicial de 4.2% e a resposta estabiliza em três segundos, apresentando oscilações entre 1200 RPM e 1206 RPM e a corrente de excitação varia entre 0.112 A e 1.54 A. Após a introdução do binário de carga, a resposta estabiliza em três segundos e a corrente de excitação varia entre 0.112 A e 1.78 A.

Com uma velocidade de referência de 1500 RPM, apresenta-se na Figura 5.10(a) e na Figura 5.10(b), o binário de carga, onde se aplica-se 79.58 N.m, de acordo com a equação (5.1), e o valor da corrente de excitação, que permite o controlo da velocidade, respetivamente:

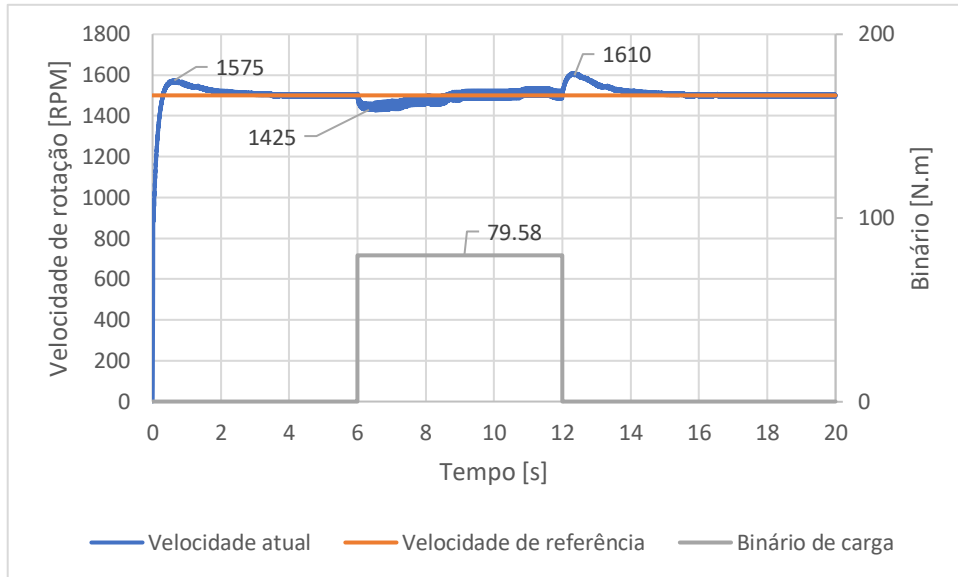


Figura 5.10(a) – Controlo da velocidade com controlo PID para 1500 RPM com o binário de carga.

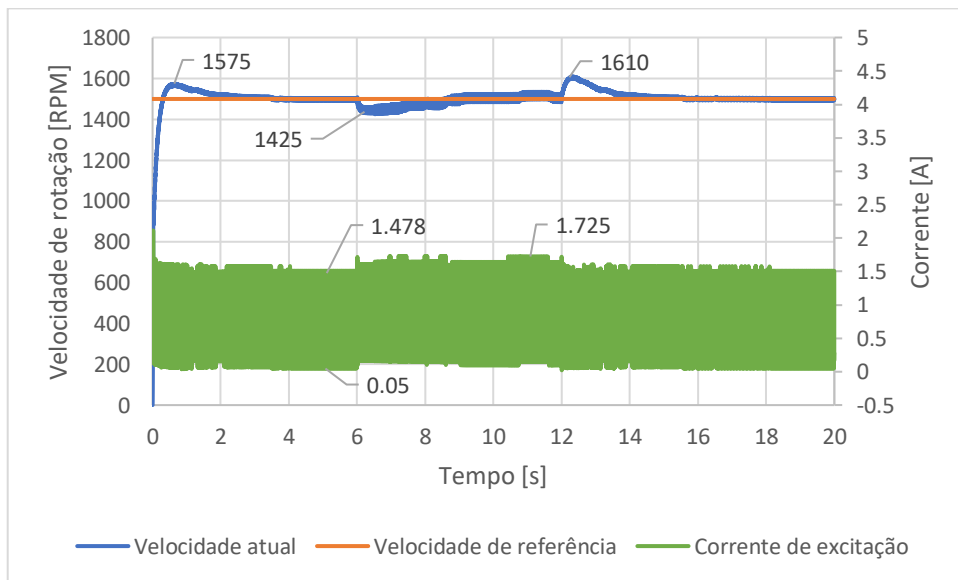


Figura 5.10(b) – Controlo da velocidade com controlo PID para 1500 RPM com a corrente de excitação.

Observa-se uma sobrelevação inicial de 5% e a resposta estabiliza em menos de três segundos, apresentando oscilações entre 1501 RPM e 1514 RPM e a corrente de excitação varia entre 0.05 A e 1.478 A. Após a introdução do binário de carga, a resposta estabiliza em três segundos e a corrente de excitação varia entre 0.05 A e 1.725 A.

Com uma velocidade de referência de 1800 RPM, apresenta-se na Figura 5.11(a) e na Figura 5.11(b), o binário de carga, onde se aplica-se 66.31 N.m, de acordo com a equação (5.1), e o valor da corrente de excitação, que permite o controlo da velocidade, respetivamente:

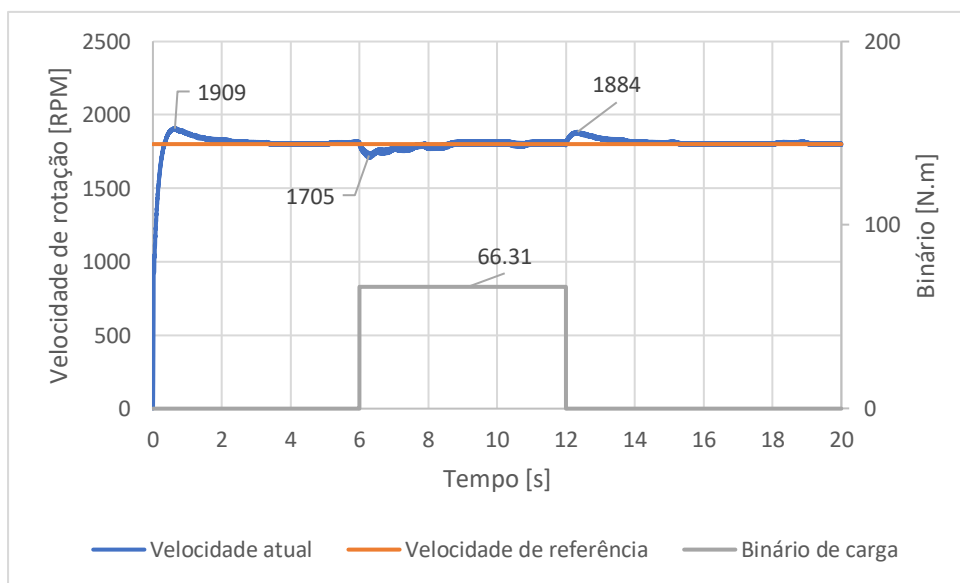


Figura 5.11(a) – Controlo da velocidade com controlo PID para 1800 RPM com o binário de carga.

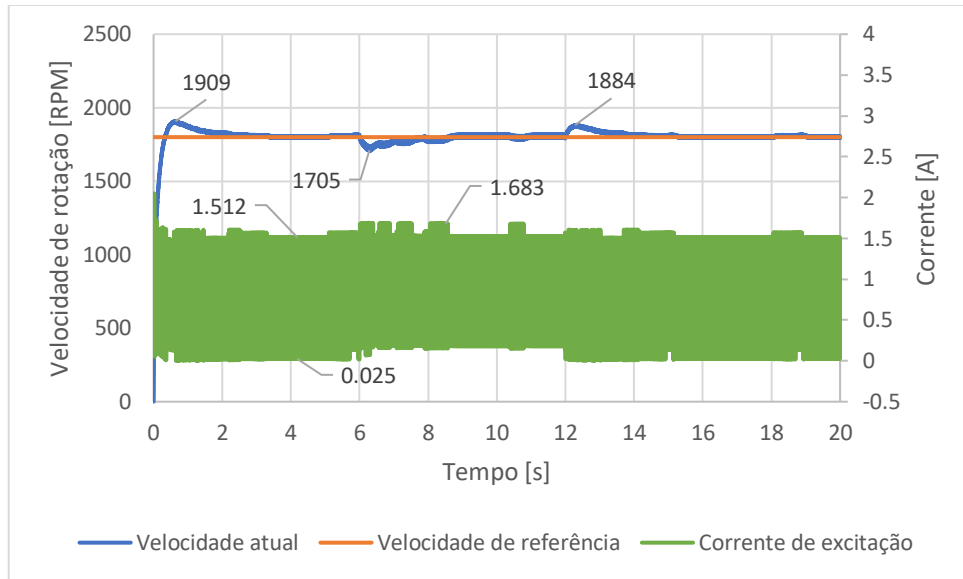


Figura 5.11(b) – Controle da velocidade com controle PID para 1800 RPM com a corrente de excitação.

Observa-se uma sobrelevação inicial de, cerca de, 0.47% e a resposta estabiliza em quatro segundos, apresentando oscilações entre 1794 RPM e 1808 RPM e a corrente de excitação varia entre 0.025 A e 1.512 A. Após a introdução do binário de carga, a resposta estabiliza em três segundos e a corrente de excitação varia entre 0.025 A e 1.683 A.

5.3 – Conclusões

Comparando as três simulações do controlo PID com o controlo *fuzzy*, apresentam-se as vantagens e desvantagens de cada controlo na Tabela 5.4 e Tabela 5.5, respetivamente:

Tabela 5.4 – Vantagens e desvantagens do controlo PID.

Vantagens	Desvantagens
<ul style="list-style-type: none">• Sobrelevação inicial menor;	<ul style="list-style-type: none">• Sobrelevação inicial ainda presente;• Leva mais tempo a atingir a estabilidade;• Oscilações persistentes.

Tabela 5.5 – Vantagens e desvantagens do controlo *fuzzy*.

Vantagens	Desvantagens
<ul style="list-style-type: none">• Resposta rápida na fase do transitório;• Rápida adaptação a mudanças de carga.	<ul style="list-style-type: none">• Sobrelevação inicial maior.

Capítulo 6 - CONCLUSÕES

Em resumo, explorou-se o controlo da velocidade do motor DC através da teoria clássica dos conjuntos, da flexibilidade da teoria dos conjuntos *fuzzy*, da importância das relações *fuzzy* e das relações clássicas e do poder da teoria da lógica *fuzzy*. Também aprofundou-se na aplicação prática desses conceitos através do desenvolvimento de um Sistema de Inferência Fuzzy (FIS) para controlar a velocidade do motor DC. São utilizadas funções de pertinência triangulares devido à sua eficiência e simplicidade computacional e a utilização de um maior número de regras melhora a eficiência do controlador.

Além disso, explorou-se a modelização do motor DC, bem-sucedida, as escolhas entre controladores baseado em lógica *fuzzy* e o controlador PID e a abordagem de ajuste de parâmetros através do método Ziegler-Nichols.

Foi possível:

- Criar um sistema de controlo que se adapta à natureza imprecisa dos cenários do mundo real, garantindo que o motor DC funciona de forma eficiente.
- Modelizar o motor DC para poder-se realizar a simulação.
- Utilizar o método de ajuste de parâmetros de Ziegler-Nichols para obtenção dos parâmetros para o controlo PID
- Utilizar o método de inferência Mamdani para criar um sistema de inferência *fuzzy* a utilizar no controlador baseado em lógica *fuzzy*.

Com base nestes pontos mencionados, a velocidade do motor DC com excitação separada foi controlada com sucesso usando um controlador baseado em lógica *fuzzy* no Matlab/Simulink.

Na simulação confirma-se que o desempenho do controlador baseado em lógica *fuzzy* é melhor do que o controlador PID, pois, apesar do overshoot inicial, não apresenta oscilações na regulação da velocidade e consegue atingir a resposta pretendida mais rapidamente. A escolha entre controladores de lógica *fuzzy* e controladores PID deve ser baseada nos requisitos e nas características específicas do sistema em questão, e neste caso, comprova-se que o controlo de lógica *fuzzy* deve ser escolhido em vez do controlo PID.

A lógica *fuzzy* permite inúmeras possibilidades de controlo de motores, e estando apenas a considerar este domínio de aplicação. Com o desenvolvimento de novas técnicas e equipamentos, pode-se usar esse conhecimento para resolver problemas de controlo mais complexos.

6. - Perspetivas de desenvolvimento futuro

O âmbito dos controladores baseados em lógica *fuzzy* para controlar a velocidade dos motores DC apresenta vários caminhos promissores para pesquisa, desenvolvimento e aplicação. Aqui estão algumas possíveis direções futuras para o uso de controladores baseados em lógica *fuzzy* no controlo da velocidade dos motores DC:

- Sistemas de controlo híbridos: A combinação do controlo *fuzzy* com outras técnicas de controlo, como redes neurais ou controlo PID, pode levar a sistemas de controlo híbridos que oferecem melhor desempenho.
- Eficiência Energética: Com uma ênfase crescente na eficiência energética e na sustentabilidade, os controladores baseados em lógica *fuzzy* podem ser usados para desenvolver estratégias de controlo que minimizem o consumo de energia, mantendo ou melhorando o desempenho do motor. Isto é particularmente importante em aplicações onde a conservação de energia é uma prioridade.
- Integração IoT: A integração de sistemas de controlo de motores DC com o IoT, permite a monitorização, diagnóstico e controlo remotos. Os controladores baseados em lógica *fuzzy* podem desempenhar um papel na optimização da operação do motor com base nos dados obtidos.

CAPÍTULO 7 - BIBLIOGRAFIA

- [1] G. Chen and T. T. Pham, *Introduction to Fuzzy Sets, Fuzzy Logic, and Fuzzy Control Systems*. CRC Press, 2000. doi: 10.1201/9781420039818.
- [2] A. A. Sadiq, G. A. Bakare, E. C. Anene, and H. B. Mamman, "A Fuzzy-Based Speed Control of DC Motor Using Combined Armature Voltage and Field Current," *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 46, no. 20, pp. 387–392, 2013, doi: 10.3182/20130902-3-CN-3020.00146.
- [3] K. Prahlad and K. Nirmal, "Speed control of separately excited DC motor using self-tuned fuzzy PID controller," National Institute of Technology Rourkela, 2011.
- [4] E. Buzi and P. Marango, "A Comparison of conventional and nonconventional methods of DC motor speed control," *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 46, no. 8, pp. 50–53, 2013, doi: 10.3182/20130606-3-XK-4037.00054.
- [5] B. S. Guru, H. R. Hiziro@, and N. Y. Oxford, "Electric Machinery and Transformers Third Edition," 2001. [Online]. Available: <http://www.oup-usd.org>
- [6] D. Somwanshi, M. Bundele, G. Kumar, and G. Parashar, "Comparison of Fuzzy-PID and PID Controller for Speed Control of DC Motor using LabVIEW," *Procedia Comput Sci*, vol. 152, pp. 252–260, 2019, doi: 10.1016/j.procs.2019.05.019.
- [7] E. H. Mamdani and S. Assilian, "An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller," *Int J Man Mach Stud*, vol. 7, no. 1, pp. 1–13, Jan. 1975, doi: 10.1016/S0020-7373(75)80002-2.
- [8] S. N. Sivanandam, S. Sumathi, and S. N. Deepa, *Introduction to Fuzzy Logic using MATLAB*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2007. doi: 10.1007/978-3-540-35781-0.
- [9] L. A. Zadeh, "Outline of a New Approach to the Analysis of Complex Systems and Decision Processes," *IEEE Trans Syst Man Cybern*, vol. SMC-3, no. 1, pp. 28–44, 1973, doi: 10.1109/TSMC.1973.5408575.
- [10] A. Hamam and N. D. Georganas, "A comparison of Mamdani and Sugeno fuzzy inference systems for evaluating the quality of experience of Hapto-Audio-Visual applications," in *2008 IEEE International Workshop on Haptic Audio visual Environments and Games*, IEEE, Oct. 2008, pp. 87–92. doi: 10.1109/HAVE.2008.4685304.
- [11] I. Boldea and A. Nasar, *Electric Machine Dynamics*. Macmillan Publishing Company, 1986.
- [12] Katsuhiko. Ogata, *Modern control engineering*. Prentice-Hall, 2010.

Anexo A – PROGRAMA DE INICIALIZAÇÃO DE PARÂMETROS DO MODELO DE SIMULAÇÃO NUMÉRICA

```
clc;
clear;

fuzzy('F_Joaquim_Fuzzy.fis');

Wref1 = 1800;

if(Wref1==1200)
    Tcarga=99.47;
end
if(Wref1==1500)
    Tcarga=79.58;

end
if(Wref1==1800)
    Tcarga=66.31;
end
load('iex.mat');
load('kafi.mat');

% Export data to Excel
combinedData = [time, Wrpm, Wref, Tref, Iexc];
xlswrite('dados.xlsx', combinedData);
```