



INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DE LISBOA

Departamento de Engenharia Civil

ISEL



Análise da estrutura de um edifício em betão armado usando um método dos elementos finitos

**Aplicação do Método dos Elementos Finitos a Problemas Tridimensionais
de Elasticidade Linear usando o freeFEM++**

WILSON NASCIMENTO VARELA SILVA

Licenciatura em Engenharia Civil

**Dissertação para obtenção do grau de Mestre
em Engenharia Civil**

Orientadores:

Mestre, José Alberto Rodrigues, Professor (ISEL)

Mestre, António de Sousa Gorgulho, Professor (ISEL)

Juri:

Presidente:

Mestre, Cristina Ferreira Xavier Brito Machado, Professora (ISEL)

Vogais:

Doutor, Paulo Xavier Candeias, Professor (ISEL)

Mestre, José Alberto Rodrigues, Professor (ISEL)

Mestre, António de Sousa Gorgulho, Professor (ISEL)

Fevereiro de 2012

Análise da estrutura de um edifício em betão armado usando um método dos elementos finitos

Resumo

Pretende-se, utilizando o Modelo da Elasticidade Linear em freeFEM++, determinar os esforços e deslocamentos de um edifício alto submetido apenas à acção do peso próprio da estrutura e, efectuar estudos comparativos dos resultados obtidos com o SAP2000.

O trabalho inicia-se com a introdução da teoria da elasticidade linear, onde são feitas as deduções das Equações de Compatibilidade, Equilíbrio e as Leis Constitutivas, de modo a resolver numericamente o problema de Elasticidade Linear mencionado.

O método de elementos finitos será implementado em freeFEM++ com auxílio do GMSH que é uma poderosa ferramenta com capacidade de gerar automaticamente malhas tridimensionais de elementos finitos e com relativa facilidade de pré e pós-processamento.

Palavras-Chave: freeFEM++, GMSH, SAP2000, Método de elementos finitos, discretização, estrutura.

Analysis of a structure of a reinforced concrete building using a finite element method

Abstract

It is intended, using the Model of Linear Elasticity in freeFEM++, to calculate the stresses and displacements of a building subjected only to the action of his self-weight and make comparisons of results obtained with SAP2000.

The work begins with the introduction of the Linear Elasticity Theory, where we deduce the Equations of Compatibility, Equilibrium and Constitutive Laws, with the purpose to solve numerically the mentioned problem of Linear Elasticity.

The finite element method will be implemented in freeFEM++ with the aid of GMSH which is a powerful tool with the ability to automatically generate three-dimensional finite element meshes and relatively easy pre and post processing.

Keywords: freeFEM++, GMSH, SAP2000, Finite Elements Methods, discretization, structure.

Agradecimentos

O meu agradecimento aos orientadores Professores Mestre José Alberto Rodrigues e Eng.º Mestre António de Sousa Gorgulho pela orientação, motivação e interesse demonstrado ao longo deste trabalho.

A todos os meus amigos que contribuíram para o apoio no desenvolvimento desta dissertação.

Aos meus tios e primos pela ajuda e compreensão ao longo deste curso.

À Érica Andrade, pelo amor, pela paciência e apoio que tanto demonstrou.

Finalmente, aos meus pais e irmãos pelo amor, amizade, compreensão e apoio dados durante toda a minha vida.

Índice

1	Introdução	1
1.1	Enquadramento do tema	1
1.2	Objectivos	1
1.3	Organização da Dissertação / Metodologia	1
2	Teoria da Elasticidade Linear	3
2.1	Introdução	3
2.1.1	Importância da Teoria da Elasticidade em Engenharia Civil	4
2.2	Equações de compatibilidade	5
2.3	Equações de equilíbrio	7
2.4	Relações constitutivas	9
2.5	Modelo de Reissner-Mindlin - Lajes espessas	12
2.5.1	Limitações do modelo de Kirchhoff	12
2.5.2	Condições de Compatibilidade	13
2.5.3	Condições de Equilíbrio	14
2.5.4	Relações Constitutivas	15
2.6	Importância da análise dos momentos flectores	16
3	Princípio dos Trabalhos Virtuais e Formulação Fraca	17
3.1	Formulação Fraca	17
3.2	Princípio dos Trabalhos Virtuais	20
4	Implementação do Método de Elementos Finitos	21
4.1	Introdução	21
4.2	Elementos Finitos e Funções de Forma	21
4.3	Implementação do Método de Elementos Finitos	26
4.4	Implementação em freeFEM++	27
4.4.1	Definição do problema elástico	27
4.4.2	Construção da malha - GMSH	28
4.4.3	Definição de Constantes, do Material e Forças Actuantes	31
4.4.4	Definição do Espaço das Soluções Admissíveis	31
4.4.5	Definição de Macros e Variáveis	32
4.4.6	Resolução do Problema	32
4.4.7	Deslocamentos, Tensões e Momentos Flectores	33
4.4.8	Tratamento e Impressão de Resultados	33
4.4.9	Resultados	35

5	Análise dos diferentes casos	37
5.1	Introdução	37
5.2	Análise de uma laje fungiforme apoiada em 4 pilares nos 4 cantos - 1 piso	38
5.2.1	Apresentação do modelo	38
5.2.2	Construção da Malha e Resultados em freeFEM++	38
5.2.3	Construção da Malha e Resultados em SAP2000	42
5.2.4	Comparação de Resultados	45
5.3	Análise de uma laje num sistema porticado de 4 pilares - 1 piso	46
5.3.1	Apresentação do modelo	46
5.3.2	Construção da Malha e Resultados em freeFEM++	46
5.3.3	Construção da Malha e Resultados em SAP2000	50
5.3.4	Comparação de Resultados	53
5.4	Análise de lajes fungiformes apoiadas em pilares - 3 pisos	54
5.4.1	Apresentação do modelo	54
5.4.2	Construção da Malha e Resultados em freeFEM++	54
5.4.3	Construção da Malha e Resultados em SAP2000	58
5.4.4	Comparação de Resultados	61
5.5	Análise de lajes num sistema porticado - 3 pisos	62
5.5.1	Apresentação do modelo	62
5.5.2	Construção da Malha e Resultados em freeFEM++	62
5.5.3	Construção da Malha e Resultados em SAP2000	66
5.5.4	Comparação de Resultados	69
5.6	Análise de lajes fungiformes apoiadas em pilares - 9 pisos	69
5.6.1	Apresentação do modelo	69
5.6.2	Construção da Malha e Resultados em freeFEM++	70
5.6.3	Construção da Malha e Resultados em SAP2000	74
5.6.4	Comparação de Resultados	77
5.7	Análise de lajes num sistema porticado - 9 pisos	77
5.7.1	Apresentação do modelo	77
5.7.2	Construção da Malha e Resultados em freeFEM++	78
5.7.3	Construção da Malha e Resultados em SAP2000	82
5.7.4	Comparação de Resultados	85
6	Conclusão	87
6.1	Conclusões	87
6.2	Desenvolvimentos futuros	88
7	Bibliografia	89
8	Anexos	91

Lista de Figuras

2.1	Variáveis e equações fundamentais da Mecânica Estrutural [Oliveira, Castro e Gomes, 2009].	3
2.2	Aproximação de uma lei constitutiva não linear (solos) através de leis elásticas lineares com diferentes módulos de elasticidade [Oliveira, Castro e Gomes, 2009].	4
2.3	Cálculos à rotura. Utilização de técnicas iterativas correspondentes a sucessivos cálculos não lineares [Oliveira, Castro e Gomes, 2009].	5
2.4	Paralelepípedo infinitesimal Ω [Joaquim Sabino, 2010]	5
2.5	Projectão no eixo X_1OX_2 [Joaquim Sabino, 2010]	5
2.6	Componentes das tensões num paralelepípedo infinitesimal [Oliveira, Castro e Gomes, 2009].	7
2.7	Projectão segundo o eixo X_2OX_3	7
2.8	Projectão segundo o eixo X_1OX_2	7
2.9	<i>Lei de Hooke</i> [Joaquim Sabino, 2010].	9
2.10	<i>Lei de Hooke</i> para as deformações lineares	9
4.1	Coordenadas de volume em um tetraedro [Fernando Ribeiro, 2004].	22
4.2	Tetraedro linear [Fernando Ribeiro, 2004].	22
4.3	Tetraedro linear.	23
4.4	Modelo 3D.	28
4.5	Dimensões das peças estruturais	29
4.6	Coordenadas dos pontos base da estrutura	29
4.7	Criação de linhas	29
4.8	Definição de superfícies	30
4.9	Definição de volumes	30
4.10	Definição de condições de fronteira	30
4.11	Malha tridimensional da estrutura indicada em 4.4.1	31
4.12	Resultados alfanuméricos do freeFEM++	34
4.13	Valores dos deslocamentos dos pontos nodais	35
4.14	Malha da estrutura deformada	35
4.15	Momento flector segundo o eixo xx	36
4.16	Momento flector segundo o eixo yy	36
5.1	Representação do modelo de cálculo utilizado.	38
5.2	Malha discretizada, GMSH.	39
5.3	Malha deformada, GMSH.	39
5.4	Deformada da estrutura com deslocamentos à escala 1:1000, pós-processamento em GMSH	40
5.5	Momentos flectores segundo o eixo x , pós-processamento em GMSH	40
5.6	Momentos flectores segundo o eixo y , pós-processamento em GMSH	41
5.7	Distribuição de <i>momentos torsores</i> , pós-processamento em GMSH.	41
5.8	Malha discretizada, SAP2000.	42

5.9	Malha deformada, SAP2000.	42
5.10	Distribuição dos vectores deslocamento na direcção vertical, SAP2000.	43
5.11	Momentos flectores segundo o eixo x , SAP2000.	43
5.12	Momentos flectores segundo o eixo y , SAP2000.	44
5.13	Momentos torsores segundo o eixo xy , SAP2000.	44
5.14	Representação do modelo de cálculo utilizado.	46
5.15	Malha discretizada, GMSH.	47
5.16	Malha deformada, GMSH.	47
5.17	Deformada da estrutura com deslocamentos à escala 1:1000, pós-processamento em GMSH	48
5.18	Momentos flectores segundo o eixo x , pós-processamento em GMSH	48
5.19	Momentos flectores segundo o eixo y , pós-processamento em GMSH	49
5.20	Distribuição de <i>momentos torsores</i> , pós-processamento em GMSH.	49
5.21	Malha discretizada, SAP2000.	50
5.22	Malha deformada, SAP2000.	50
5.23	Distribuição dos vectores deslocamento na direcção vertical, SAP2000.	51
5.24	Momentos flectores segundo o eixo x , SAP2000.	51
5.25	Momentos flectores segundo o eixo y , SAP2000.	52
5.26	Momentos torsores segundo o eixo xy , SAP2000.	52
5.27	Representação do modelo de cálculo utilizado.	54
5.28	Malha discretizada, GMSH.	55
5.29	Malha deformada, GMSH.	55
5.30	Deformada da estrutura com deslocamentos à escala 1:250, pós-processamento em GMSH	56
5.31	Momentos flectores segundo o eixo x , pós-processamento em GMSH	56
5.32	Momentos flectores segundo o eixo y , pós-processamento em GMSH	57
5.33	Distribuição de <i>momentos torsores</i> , pós-processamento em GMSH.	57
5.34	Malha discretizada, SAP2000.	58
5.35	Malha deformada, SAP2000.	58
5.36	Distribuição dos vectores deslocamento na direcção vertical, SAP2000.	59
5.37	Momentos flectores mínimos segundo o eixo x (piso 2), SAP2000.	59
5.38	Momentos flectores máximos segundo o eixo x (piso 3), SAP2000.	59
5.39	Momentos flectores mínimos segundo o eixo y (piso 2), SAP2000.	60
5.40	Momentos flectores máximos segundo o eixo y (piso 3), SAP2000.	60
5.41	Momentos torsores segundo o eixo xy , SAP2000.	60
5.42	Representação do modelo de cálculo utilizado.	62
5.43	Malha discretizada, GMSH.	63
5.44	Malha deformada, GMSH.	63
5.45	Deformada da estrutura com deslocamentos à escala 1:250, pós-processamento em GMSH	64
5.46	Momentos flectores segundo o eixo x , pós-processamento em GMSH	64
5.47	Momentos flectores segundo o eixo y , pós-processamento em GMSH	65
5.48	Distribuição de <i>momentos torsores</i> , pós-processamento em GMSH.	65
5.49	Malha discretizada, SAP2000.	66
5.50	Malha deformada, SAP2000.	66
5.51	Distribuição dos vectores deslocamento na direcção vertical, SAP2000.	67
5.52	Momentos flectores mínimos segundo o eixo x (piso 1), SAP2000.	67
5.53	Momentos flectores máximos segundo o eixo x (piso 3), SAP2000.	67
5.54	Momentos flectores mínimos segundo o eixo y (piso 1), SAP2000.	68
5.55	Momentos flectores máximos segundo o eixo y (piso 3), SAP2000.	68

5.56	Momentos torsores segundo o eixo xy (piso 2), SAP2000.	68
5.57	Representação do modelo de cálculo utilizado.	70
5.58	Malha discretizada, GMSH.	71
5.59	Malha deformada, GMSH.	71
5.60	Deformada da estrutura com deslocamentos à escala 1:250, pós-processamento em GMSH	72
5.61	Momentos flectores segundo o eixo x , pós-processamento em GMSH	72
5.62	Momentos flectores segundo o eixo y , pós-processamento em GMSH	73
5.63	Distribuição de <i>momentos torsores</i> , pós-processamento em GMSH.	73
5.64	Malha discretizada, SAP2000.	74
5.65	Malha deformada, SAP2000.	74
5.66	Distribuição dos vectores deslocamento na direcção vertical, SAP2000.	75
5.67	Momentos flectores mínimos segundo o eixo x (piso 2), SAP2000.	75
5.68	Momentos flectores máximos segundo o eixo x (piso 9), SAP2000.	75
5.69	Momentos flectores mínimos segundo o eixo y (piso 2), SAP2000.	76
5.70	Momentos flectores máximos segundo o eixo y (piso 9), SAP2000.	76
5.71	Momentos torsores segundo o eixo xy , SAP2000.	76
5.72	Representação do modelo de cálculo utilizado.	78
5.73	Malha discretizada, GMSH.	79
5.74	Malha deformada, GMSH.	79
5.75	Deformada da estrutura com deslocamentos à escala 1:250, pós-processamento em GMSH	80
5.76	Momentos flectores segundo o eixo x , pós-processamento em GMSH	80
5.77	Momentos flectores segundo o eixo y , pós-processamento em GMSH	81
5.78	Distribuição de <i>momentos torsores</i> , pós-processamento em GMSH.	81
5.79	Malha discretizada, SAP2000.	82
5.80	Malha deformada, SAP2000.	82
5.81	Distribuição dos vectores deslocamento na direcção vertical, SAP2000.	83
5.82	Momentos flectores segundo o eixo x (piso 8), SAP2000.	83
5.83	Momentos flectores segundo o eixo x (piso 9), SAP2000.	83
5.84	Momentos flectores segundo o eixo y (piso 8), SAP2000.	84
5.85	Momentos flectores segundo o eixo y (piso 9), SAP2000.	84
5.86	Momentos torsores segundo o eixo xy (piso 8), SAP2000.	84

Lista de Tabelas

5.1	Tabela comparativa de resultados - 1 ^o modelo.	45
5.2	Tabela comparativa de resultados - 2 ^o modelo.	53
5.3	Tabela comparativa de resultados - 3 ^o modelo	61
5.4	Tabela comparativa de resultados - 4 ^o modelo	69
5.5	Tabela comparativa de resultados - 5 ^o modelo	77
5.6	Tabela comparativa de resultados - 6 ^o modelo	85

Capítulo 1

Introdução

1.1 Enquadramento do tema

Hoje em dia, com a sobrelotação do espaço urbano e o elevado custo do terreno de construção nestas áreas, o homem sentiu a necessidade de maximizar a taxa de ocupação dos terrenos das grandes cidades, de modo a resolver os problemas decorrentes do crescimento demográfico e da ocupação. Nestas situações, a construção de edifícios altos tornou-se prática comum como forma de solucionar os problemas acima mencionados.

Os edifícios altos têm vindo a ganhar cada vez maior relevância na área de engenharia de estruturas devido à sua instabilidade estrutural, ou seja, quanto mais crescer em altura, maior é a sua susceptibilidade em relação às acções impostas.

O tema da dissertação encontra-se inserido na área de Estruturas, e é uma particularização da questão mais geral da análise de esforços e deslocamentos de um edifício alto às acções a que o mesmo possa estar sujeito.

1.2 Objectivos

Este trabalho de dissertação tem como principal objectivo a implementação de um modelo de elementos finitos de equilíbrio para a análise dos esforços e deslocamentos em pórticos tridimensionais de vários pisos sujeitos unicamente à acção do peso próprio.

Deste modo, a análise é feita utilizando um programa de implementação do MEF (freeFEM++). Pretende-se efectuar a comparação dos resultados obtidos após obtenção dos resultados será feita a comparação dos resultados com o programa de cálculo automático SAP2000, de forma a validar os resultados obtidos com o freeFEM++.

1.3 Organização da Dissertação / Metodologia

O capítulo 1 abrange o tema da dissertação, bem como os objectivos e a síntese dos restantes capítulos. O segundo capítulo contempla as equações fundamentais da teoria da elasticidade linear, nomeadamente as de compatibilidade, equilíbrio e relações constitutivas. Será desenvolvida, no 3º capítulo, a *formulação fraca* do problema de elasticidade através de dois métodos distintos. No capítulo 4 introduz-se o método dos elementos finitos e faz-se a implementação prática do problema de elasticidade em freeFEM++. O 5º capítulo ficou reservado ao estudo de vários casos distintos. O 6º e último capítulo inclui as conclusões sobre o trabalho. Seguem a Bibliografia e Anexos, respectivamente.

Em termos metodológicos, será feita a seguinte abordagem para o desenvolvimento e apresentação do trabalho :

1. *Modelo físico* genérico;
2. *Modelo matemático* genérico;
3. Implementação em *freeFEM++*;
4. Resultados em *freeFEM++*;
5. Implementação em *SAP2000*;
6. Resultados em *SAP2000*;
7. Comparação dos resultados;
8. Conclusões sobre os resultados;

Capítulo 2

Teoria da Elasticidade Linear

2.1 Introdução

Geralmente, o cálculo estrutural é feito tendo em consideração o campo de deslocamentos, tensões e extensões que se desenvolvem nas estruturas quando sujeitas a determinadas solicitações. A Mecânica Estrutural estabelece as equações diferenciais a que devem satisfazer os campos de deslocamentos, extensões e tensões que se instalam numa estrutura qualquer quando submetida a solicitações exteriores. Na abordagem da Mecânica, as diversas variáveis envolvidas na análise de uma estrutura, nomeadamente, forças, tensões, deformações e deslocamentos, são correlacionadas em cada ponto e em cada instante, por equações de equilíbrio entre forças e tensões, equações de compatibilidade entre deformações e deslocamentos e por equações constitutivas que correlacionam tensões e deformações, como se esquematiza na figura 2.1.

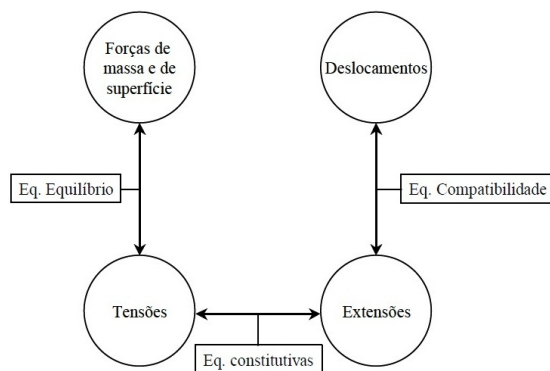


Figura 2.1: Variáveis e equações fundamentais da Mecânica Estrutural [Oliveira, Castro e Gomes, 2009].

Na Mecânica Estrutural, a modelação do comportamento de uma estrutura baseia-se na resolução destas equações fundamentais, sendo adoptadas, na prática, diversos tipos de hipóteses simplificativas, nomeadamente:

- i) nas equações de equilíbrio (considerando, conforme a geometria das peças, equilíbrios de peça linear, de placa, de laje, de casca, tridimensional, etc.; considerando, conforme existam, ou não, forças de inércia e amortecimento, equilíbrios dinâmicos ou estáticos);

- ii) nas equações de compatibilidade (considerando a hipótese de linearidade geométrica ou a hipótese de comportamento geometricamente não-linear, conforme existam, ou não, grandes deslocamentos);
- iii) nas equações constitutivas (considerando a hipótese de isotropia, ortotropia ou anisotropia; considerando materiais de comportamento linear ou não linear; considerando a hipótese de rotura com patamar de cedência ou considerando enfraquecimento; considerando viscoelasticidade sem maturação ou com maturação; considerando ou não a existência de dano; considerando as hipóteses da fractura elástica linear ou não linear, etc.)

Para o desenvolvimento deste trabalho de dissertação, considerou-se que o material é isotrópico, e que são válidas as hipóteses da linearidade física e da linearidade geométrica.

A linearidade física consiste em adoptar uma relação linear entre as tensões e as deformações, ou seja, um comportamento elástico linear.

Na linearidade geométrica assume-se que as deformações são muito pequenas face à menor dimensão da peça, deste modo, a deformada é semelhante à configuração inicial.

2.1.1 Importância da Teoria da Elasticidade em Engenharia Civil

A mecânica estrutural, mais concretamente, o cálculo de estruturas de engenharia é baseado geralmente na hipótese do comportamento elástico-linear, envolvendo as seguintes razões:

- As estruturas são geralmente projectadas de forma a que a resposta às solicitações impostas pelas cargas de serviço seja elástica linear (tensão máxima em termos de resistência significativamente superior à tensão aplicada);
- No caso de solos - estruturas com comportamento não linear - utilizam-se sucessivos cálculos lineares com diferentes módulos de elasticidade (fig. 2.2);
- Utilização de processos iterativos correspondes a sucessivas soluções elásticas lineares em estudos que envolvam roturas (fig. 2.3).
- Por fim, no caso de cálculos diferidos, a resposta final é obtida a partir da resposta elástica instantânea (p.e, utilização de coeficientes de fluência).

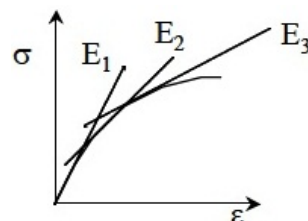


Figura 2.2: Aproximação de uma lei constitutiva não linear (solos) através de leis elásticas lineares com diferentes módulos de elasticidade [Oliveira, Castro e Gomes, 2009].

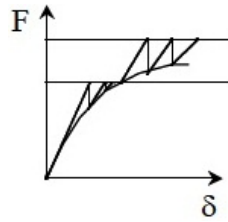


Figura 2.3: Cálculos à rotura. Utilização de técnicas iterativas correspondentes a sucessivos cálculos não lineares [Oliveira, Castro e Gomes, 2009].

2.2 Equações de compatibilidade

Consideremos um paralelepípedo infinitesimal Ω submetido a um campo de deslocamentos $\vec{u} = u(u, v, w)$.

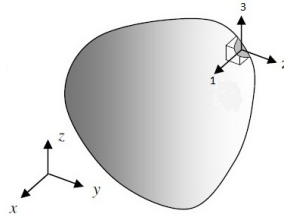
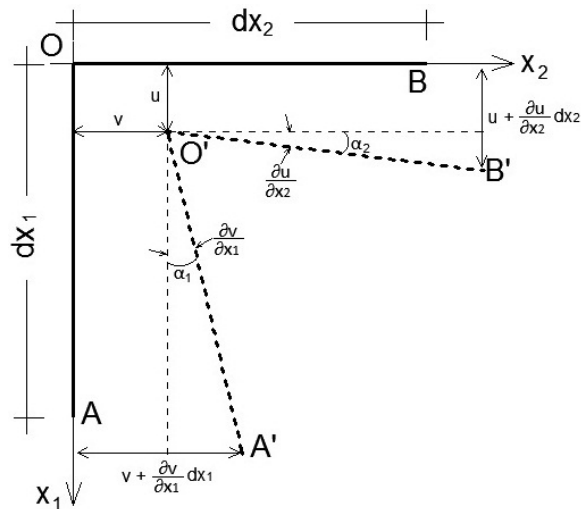


Figura 2.4: Paralelepípedo infinitesimal Ω [Joaquim Sabino, 2010]

A sua projecção no plano X_1OX_2 pode ser representada da seguinte forma:



Consideremos u e v duas componentes de deslocamento entre O e O' . Assim sendo, as extremidades A e B ocupam as posições A' e B' que por conseguinte têm as seguintes coordenadas:

$$A' = \begin{cases} dx_1 + u + \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 \\ v + \frac{\partial v}{\partial x_1} dx_1 \end{cases} ; B' = \begin{cases} u + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 \\ dx_2 + v + \frac{\partial v}{\partial x_2} dx_2 \end{cases}$$

A deformação linear ou extensão, ε_{11} , segundo a direcção x_1 define-se pela variação relativa de

comprimento $OA = dx_1$

$$\varepsilon_{11} = \frac{(A'_{x_1} - O'_{x_1}) - dx_1}{dx_1} = \frac{\left[\left(dx_1 + u + \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 \right) - u \right] - dx_1}{dx_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1}$$

Da mesma forma, ε_{22} , extensão segundo a direcção a y , define-se pela variação relativa de comprimento $OB = dx_2$

$$\varepsilon_{22} = \frac{(B'_{x_2} - O'_{x_2}) - dx_2}{dx_2} = \frac{\left[\left(dx_2 + v + \frac{\partial v}{\partial x_2} dx_2 \right) - v \right] - dx_2}{dx_2} = \frac{\partial v}{\partial x_2}$$

Consideremos agora a variação do ângulo formado pelas arestas OA e OB . Esta variação de ângulo designa-se por deformação angular ou distorção no plano x_1x_2 e representa-se por γ_{12} .

De a cordo com a figura 2.5, podemos verificar que:

$$\begin{aligned} \gamma_{12} &\simeq \tan(\alpha_1) + \tan(\alpha_2) \simeq \frac{\frac{\partial v}{\partial x_1} \cdot dx_1}{\partial x_1} + \frac{\frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot dx_2}{\partial x_2} = \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \end{aligned}$$

Analogamente, podemos obter as expressões das deformações que envolvem o eixo X_3 . *No finaltemos, em resumo*

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x_1}; \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial v}{\partial x_2}; \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial w}{\partial x_3}$$

$$\gamma_{12} = \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1}; \quad \gamma_{23} = \frac{\partial v}{\partial x_3} + \frac{\partial w}{\partial x_2}; \quad \gamma_{13} = \frac{\partial u}{\partial x_3} + \frac{\partial w}{\partial x_1}$$

O estado de deformação em cada ponto é caracterizado por um tensor simétrico de segunda ordem, ε :

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \varepsilon_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Tendo em conta que $\gamma_{ij} = 2 \cdot \varepsilon_{ij}$, podemos escrever a *equação de compatibilidade* na sua notação indicial, ou seja,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.2)$$

2.3 Equações de equilíbrio

Consideremos um dado ponto da superfície de um corpo, representado por um paralelepípedo infinitesimal (figura 2.6), onde actua uma força conhecida de componentes $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$:

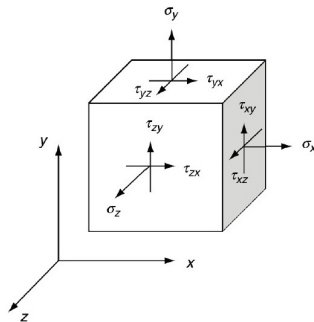


Figura 2.6: Componentes das tensões num paralelepípedo infinitesimal [Oliveira, Castro e Gomes, 2009].

Tendo em conta a força mássica γ aplicada na direcção x_2 , podemos visualizar as projecções do paralelepípedo infinitesimal nos seguintes planos:

- X_2OX_3 :

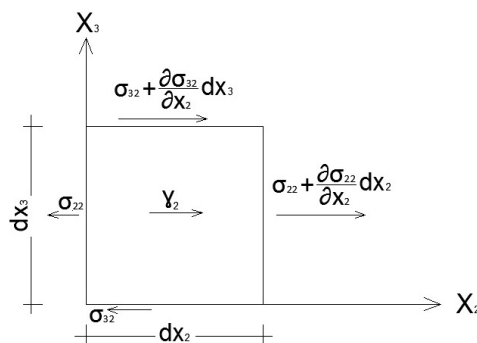


Figura 2.7: Projecção segundo o eixo X_2OX_3

- X_1OX_2 :

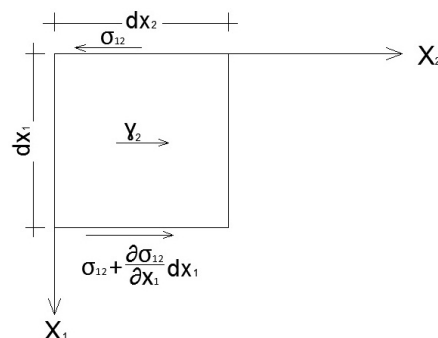


Figura 2.8: Projecção segundo o eixo X_1OX_2

Assim sendo, a equação de equilíbrio segundo a direcção x_2 é dada pelo somatório das forças volúmicas segundo a mesma direcção, ou seja:

$$\begin{aligned}
\Sigma F_{x_2} = 0 &\iff -\sigma_{22} \cdot dx_1 \cdot dx_3 + \left(\sigma_{22} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} \cdot dx_2 \right) \cdot dx_1 \cdot dx_3 \\
&\quad -\sigma_{32} \cdot dx_1 \cdot dx_2 + \left(\sigma_{32} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} \cdot dx_3 \right) \cdot dx_1 \cdot dx_2 \\
&\quad -\sigma_{12} \cdot dx_2 \cdot dx_3 + \left(\sigma_{12} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} \cdot dx_1 \right) \cdot dx_2 \cdot dx_3 \\
&\quad + \gamma_{x_2} dx_1 \cdot dx_2 \cdot dx_3 = 0 \\
&\iff \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \gamma_2 = 0
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\Sigma F_{x_2} = 0 \iff \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + \gamma_2 = 0$$

De forma análoga, podemos escrever as equações de equilíbrio na forma desenvolvida, segundo as restantes direcções (x_1 e x_3):

$$\begin{aligned}
\Sigma F_{x_1} = 0 &\iff \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + \gamma_1 = 0 \\
\Sigma F_{x_3} = 0 &\iff \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \gamma_3 = 0
\end{aligned}$$

Desta forma, é possível representar as equações de equilíbrio também na sua notação indicial, ou seja:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \gamma_j = 0 \tag{2.3}$$

Para haver equilíbrio estático, é indispensável que as tensões instaladas satisfaçam a condição apresentada na equação 2.3. Esta condição ainda pode ser escrita na forma mais simples, com o auxílio do *operador divergência*, permitindo assim, a obtenção da denominada *formulação forte* do problema elástico, ou seja:

$$-\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = \gamma_j \text{ ou ainda } -\nabla \sigma_{ij} = \gamma_j \tag{2.4}$$

2.4 Relações constitutivas

As relações constitutivas estabelecem a lei que relaciona os campos de tensão e de deformação. Esta lei, denominada por *Lei de Hooke*, foi formulada em 1678 pelo cientista inglês Robert Hooke. Consiste basicamente na consideração de que uma mola possui uma constante elástica k . Esta constante é obedecida até um certo limite, onde a deformação da mola em questão se torna permanente. Dentro do limite onde a *lei de Hooke* é válida, a mola pode ser comprimida ou alongada, retornando a uma mesma posição de equilíbrio.

Para o estado mais elementar de tensão, ou seja, quando aplicada numa peça com comportamento unidimensional como é o caso da figura 2.9, esta lei expressa-se pela relação:

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x \text{ ou } \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad (2.5)$$

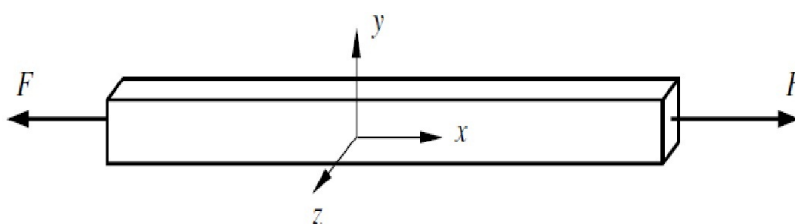


Figura 2.9: *Lei de Hooke* [Joaquim Sabino, 2010].

Para o caso unidimensional, a *lei de Poisson* diz-nos que:

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \cdot \varepsilon_x = -\frac{\nu}{E} \cdot \sigma_x \quad (2.6)$$

Sendo ν o *coeficiente de Poisson* característico do material.

Para o caso geral tridimensional de estado de tensão, considerando uma faceta de um paralelepípedo infinitesimal submetida a um campo de tensões, a *lei de Hooke* para as deformações lineares obtém-se do seguinte modo:

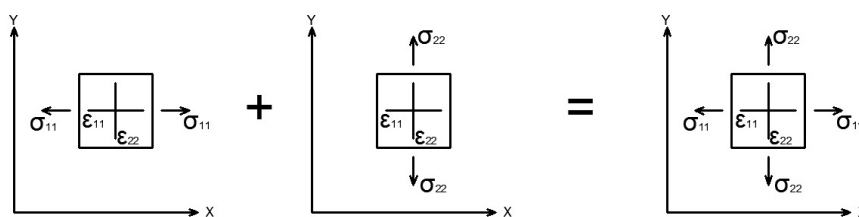


Figura 2.10: *Lei de Hooke* para as deformações lineares

Na primeira parcela da figura anterior verifica-se que é aplicada uma tensão segundo a direcção xx , logo as extensões calculam-se da forma,

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} \text{ e } \varepsilon_{22} = -\frac{\nu}{E} \cdot \sigma_{11} \quad (2.7)$$

Já na segunda parcela é aplicada uma tensão segundo a direcção yy , pelo que as extensões nas duas direcções perpendiculares podem ser determinadas de acordo com as expressões,

$$\varepsilon_{11} = -\frac{\nu}{E} \cdot \sigma_{22} \text{ e } \varepsilon_{22} = \frac{\sigma_{22}}{E} \quad (2.8)$$

Somando as duas parcelas da figura de acordo com as equações (2.7) e (2.8), teremos que,

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E} (\sigma_{11} - \nu \sigma_{22}) \quad (2.9)$$

De acordo com o princípio da sobreposição de efeitos, verifica-se que a *lei de Hooke* para o caso tridimensional pode ser escrita da seguinte forma,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \nu (\sigma_{22} + \sigma_{33})] \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E} [\sigma_{22} - \nu (\sigma_{11} + \sigma_{33})] \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{E} [\sigma_{33} - \nu (\sigma_{11} + \sigma_{22})] \end{aligned}$$

As deformações distorcionais são determinadas de acordo com as expressões $\gamma_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\mu}$; $\gamma_{23} = \frac{\sigma_{23}}{\mu}$; $\gamma_{31} = \frac{\sigma_{31}}{\mu}$ em que μ é o módulo de elasticidade ao corte – ou transversal – que está relacionado com o módulo de elasticidade longitudinal E e com o coeficiente de Poisson ν pela expressão, também conhecido por *Módulo de Distorção*:

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.10)$$

Matricialmente, é possível escrever o tensor das tensões na seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

O cientista inglês estendeu a sua lei, que passou a denominar-se de *lei de Hooke Generalizada* onde relaciona as tensões e as deformações da forma,

$$\sigma_{ij} = C_{ij,rs} \cdot \varepsilon_{rs} \quad (2.12)$$

$C_{ij,rs}$ é denominado por tensor de rigidez ou das propriedades elásticas, sendo que para um material elástico e isotrópico o tensor de rigidez poderá ser obtido através da expressão:

$$C_{ij,rs} = \lambda \cdot \delta_{ij} \cdot \delta_{rs} + \mu (\delta_{ir} \cdot \delta_{js} + \delta_{is} \cdot \delta_{jr}) \quad (2.13)$$

Sendo:

δ_{rs} – delta de Kronecker;

μ e λ – constantes de Lamé.

A *lei de Hooke* para um material elástico e isotrópico pode ser apresentada substituindo a equação 2.13 em 2.12, ou seja:

$$\sigma_{ij} = \lambda \cdot \delta_{ij} \cdot \delta_{rs} \cdot \varepsilon_{rs} + \mu (\varepsilon_{rs} \cdot \delta_{ir} \cdot \delta_{js} + \varepsilon_{rs} \cdot \delta_{is} \cdot \delta_{jr}) \iff \sigma_{ij} = \lambda \cdot \delta_{ij} \cdot \varepsilon_{kk} + 2\mu \cdot \varepsilon_{ij} \quad (2.14)$$

Sendo que a notação δ_{ij} , mais conhecida por *delta de Kronecker*, é definida por:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Relativamente ao termo ε_{kk} é obtido através da determinação do primeiro invariante do tensor de deformações, ou seja, $\varepsilon_{kk} = I = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$.

Assim sendo, considerando as três direções ortogonais, a *lei de Hooke* generalizada pode ser escrita na forma

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \lambda \cdot \varepsilon_{kk} + 2\mu \cdot \varepsilon_{11} \\ \sigma_{22} = \lambda \cdot \varepsilon_{kk} + 2\mu \cdot \varepsilon_{22} \\ \sigma_{33} = \lambda \cdot \varepsilon_{kk} + 2\mu \cdot \varepsilon_{33} \\ \tau_{12} = 2\mu \cdot \varepsilon_{12} = \mu \cdot \gamma_{12} \\ \tau_{13} = 2\mu \cdot \varepsilon_{13} = \mu \cdot \gamma_{13} \\ \tau_{23} = 2\mu \cdot \varepsilon_{23} = \mu \cdot \gamma_{23} \end{cases}$$

Baseando nas constantes de Lamé,

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{e} \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (2.15)$$

podemos reescrever a *lei Generalizada de Hooke*, ou seja:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} = \frac{E}{(1+\nu)} \left(\frac{\nu}{(1-2\nu)} \cdot \varepsilon_{kk} + \varepsilon_{11} \right) \\ \sigma_{22} = \frac{E}{(1+\nu)} \left(\frac{\nu}{(1-2\nu)} \cdot \varepsilon_{kk} + \varepsilon_{22} \right) \\ \sigma_{33} = \frac{E}{(1+\nu)} \left(\frac{\nu}{(1-2\nu)} \cdot \varepsilon_{kk} + \varepsilon_{33} \right) \\ \tau_{12} = \frac{E}{(1+\nu)} \cdot \varepsilon_{12} = \frac{E}{2(1+\nu)} \cdot \gamma_{12} \\ \tau_{13} = \frac{E}{(1+\nu)} \cdot \varepsilon_{13} = \frac{E}{2(1+\nu)} \cdot \gamma_{13} \\ \tau_{23} = \frac{E}{(1+\nu)} \cdot \varepsilon_{23} = \frac{E}{2(1+\nu)} \cdot \gamma_{23} \end{array} \right.$$

A equação constitutiva pode ser representada na sua forma matricial, em função de ε e da constante de elasticidade D:

$$\sigma_{ij} = D_{ij,rs} \cdot \varepsilon_{rs} \iff$$

Ou seja:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

A relação constitutiva também poderá ser apresentada em função das constantes de Lamé, assim sendo:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \lambda + 2\mu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

2.5 Modelo de Reissner-Mindlin - Lajes espessas

2.5.1 Limitações do modelo de Kirchhoff

A *teoria de Kirchhoff*, conhecida pela teoria clássica de lajes finas, despreza o efeito da deformação devido ao esforço transversal. Pretende-se ter em conta, para a elaboração deste trabalho de dissertação, a deformação por esforço transversal. Assim sendo é utilizado o *modelo de*

Reissner-Mindlin uma vez que permite esta contabilização, que por sua vez é bastante utilizada em análises de lajes espessas.

Tem-se assistido, ultimamente, a um desenvolvimento desses modelos (Kirchhoff e Reissner-Mindlin), no sentido de se aumentar o grau de precisão dos resultados mas, ainda assim, esses modelos são os mais utilizados na análise de lajes.

2.5.2 Condições de Compatibilidade

O domínio V de uma laje pode ser escrita na forma:

$$V = \left\{ (x, y, z) \in R^3 : z \in \left[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2} \right], (x, y) \in \Omega \subset R^2 \right\}$$

sendo que Ω e τ correspondem ao plano médio e espessura da laje, respectivamente.

A teoria de Reissner-Mindlin assume que as superfícies normais à superfície média da laje ($z = 0$) antes da deformação, permanecem rectas após a deformação, mas não necessariamente normais a essa superfície.

O campo de deslocamentos segundo Reissner-Mindlin é obtido tendo em conta três grandezas cinemáticas $\theta_x, \theta_y, \theta_z$, ou seja, $\theta_x(x, y)$ e $\theta_y(x, y)$ são consideradas rotações nos planos (x, z) e (y, z) das normais à superfície média da laje no ponto (x, y) . Mantendo-se aquelas normais rectas após a deformação, escreve-se que:

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &= z\theta_x(x, y); \\ u_y(x, y, z) &= z\theta_y(x, y). \end{aligned}$$

Por outro lado, considera-se que os deslocamentos transversais não variam ao longo da espessura da laje. Logo,

$$u_z(x, y, z) = w(x, y). \quad (2.18)$$

A caracterização do estado de deformação da laje é feita, considerando que as deformações são independentes, sendo três curvaturas (χ_{xx}, χ_{yy} e χ_{xy}) e duas distorções (γ_x e γ_y), obtidas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \chi_{xx} &= \frac{\varepsilon_{xx}}{z} = \frac{\partial\theta_x}{\partial x}; \\ \chi_{yy} &= \frac{\varepsilon_{yy}}{z} = \frac{\partial\theta_y}{\partial y}; \\ \chi_{xy} &= \frac{\varepsilon_{xy}}{z} = \frac{\partial\theta_x}{\partial y} + \frac{\partial\theta_y}{\partial x}; \\ \gamma_x &= \gamma_{xz} = \theta_x + \frac{\partial w}{\partial x}; \\ \gamma_y &= \gamma_{yz} = \theta_y + \frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned}$$

Essas igualdades podem ser acopladas e escritas matricialmente, por:

$$\begin{bmatrix} \chi_{xx} \\ \chi_{yy} \\ \chi_{xy} \\ \gamma_x \\ \gamma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{\partial}{\partial y} & \cdot \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \cdot \\ 1 & \cdot & \frac{\partial}{\partial x} \\ \cdot & 1 & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ w \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

2.5.3 Condições de Equilíbrio

Segundo Reissner-Mindlin, os esforços independentes que caracterizam o estado de tensão na laje correspondem a três momentos (M_{xx} , M_{yy} e M_{xy}) e a dois esforços transversos (V_x e V_y). Relativamente aos momentos flectores, estes definem-se da seguinte forma,

$$M_{xx} = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} z \sigma_{xx} dz \quad (2.20)$$

$$M_{yy} = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} z \sigma_{yy} dz \quad (2.21)$$

$$M_{xy} = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} z \sigma_{xy} dz \quad (2.22)$$

e os esforços transversos são dados por:

$$V_x = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \sigma_{xz} dz \quad (2.23)$$

$$V_y = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \sigma_{yz} dz \quad (2.24)$$

Integrando na espessura da laje as condições de equilíbrio no domínio pré-multiplicadas pelo valor da coordenada z , tem-se que:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} z (\sigma_{xx,x} + \sigma_{xy,y} + \sigma_{xz,z} + \gamma_x) dz &= 0; \\ \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} z (\sigma_{yy,y} + \sigma_{yx,x} + \sigma_{yz,z} + \gamma_y) dz &= 0; \\ \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} z (\sigma_{zz,z} + \sigma_{zx,x} + \sigma_{zy,y} + \gamma_z) dz &= 0. \end{aligned}$$

Desenvolvendo as três igualdades anteriores e tendo em conta as definições dadas pelos momentos flectores e esforços transversos, obtém-se as condições de equilíbrio da laje. Estas podem ser escritas matricialmente na forma:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & -1 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \\ V_x \\ V_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\tau}{2} & 0 & \frac{\tau}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\tau}{2} & 0 & \frac{\tau}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{xz}^+ \\ \sigma_{yz}^+ \\ \sigma_{xz}^- \\ \sigma_{yz}^- \\ \sigma_{zz}^+ \\ \sigma_{zz}^- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{m}_x \\ \bar{m}_y \\ \bar{v} \end{bmatrix} = 0 \quad (2.25)$$

onde,

$$\bar{m}_x = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} z \gamma_x dz, \quad \bar{m}_y = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} z \gamma_y dz, \quad \bar{v} = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \gamma_z dz$$

2.5.4 Relações Constitutivas

A teoria de Reissner-Mindlin considera que as relações constitutivas em regime elástico pode ser escrita na forma:

$$\begin{bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \\ V_x \\ V_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_f & \nu D_f & 0 & 0 & 0 \\ \nu D_f & D_f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mu \tau^3}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k^2 \mu \tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k^2 \mu \tau \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \chi_{xx} \\ \chi_{yy} \\ \chi_{xy} \\ \gamma_x \\ \gamma_y \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

com,

μ - Módulo de distorção;

$$D_f = \frac{E \tau^3}{12(1 - \nu^2)}$$

A relação entre os esforços transversos e a distorção deveria ser dada pela expressão:

$$V_x = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \sigma_{xz} dz = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \mu \gamma_x dz = \mu \tau \gamma_x \quad (2.27)$$

Porém, a teoria de Reissner-Mindlin pressupõe a consideração de um coeficiente minorativo na rigidez de corte, k^2 . Este *factor de corte* tem como finalidade a consideração da não uniformidade na distribuição das tensões tangenciais na espessura da laje. Segundo Reissner, o factor de corte $k^2 = 5/6$, enquanto que Mindlin defende que $k^2 = \pi^2/12$ [Castro, 1996, 279].

As relações constitutivas (eq. 2.26) também podem ser representadas na sua forma inversa, sendo:

$$\begin{bmatrix} \chi_{xx} \\ \chi_{yy} \\ \chi_{xy} \\ \gamma_x \\ \gamma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12}{E\tau^3} & -\nu\frac{12}{E\tau^3} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu\frac{12}{E\tau^3} & \frac{12}{E\tau^3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{24(1+\nu)}{E\tau^3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k^2\mu\tau} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k^2\mu\tau} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \\ V_x \\ V_y \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

2.6 Importância da análise dos momentos flectores

A mecânica estrutural preocupa-se em garantir níveis estáveis de segurança de uma estrutura de engenharia. Para esse efeito é necessária a determinação de esforços instalados na estrutura provocados pelas forças actuantes.

Geralmente, o esforço determinante numa estrutura de engenharia é o momento flector que, além de ser mais importante que a determinação dos deslocamentos, possibilita numa laje de betão armado o cálculo da quantidade de armaduras necessárias para absorverem os esforços causados por uma solitação.

Capítulo 3

Princípio dos Trabalhos Virtuais e Formulação Fraca

De forma a que seja possível a aplicação do MEF, torna-se necessário o desenvolvimento da equação de equilíbrio deduzida no capítulo 2.3.

O desenvolvimento da equação de equilíbrio com objectivo de obter a *formulação fraca do problema* pode ser feito de duas formas, ou seja, por *aplicação directa* ou ainda utilizando o *Princípio dos Trabalhos Virtuais* (PTV).

Nesta secção vamos apresentar os dois desenvolvimentos mas ao longo deste trabalho de dissertação será utilizada a formulação utilizando o PTV.

3.1 Formulação Fraca

Consideremos os *tensores de tensão e deformação* para o caso tridimensional:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{12} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{12} & \varepsilon_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{13} & \gamma_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Tendo em conta a *lei de Hooke* apresentada na secção 2.4:

$$\sigma_{ij} = \lambda \cdot \delta_{ij} \cdot \varepsilon_{kk} + 2\mu \cdot \varepsilon_{ij} \quad (3.2)$$

Considerando $\vec{u} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, o vector de deslocamentos $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, é possível representar as matrizes $\underline{\varepsilon}$ e $\underline{\sigma}$, nas formas:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial z} \right) & \frac{\partial u_1}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

e

$$\sigma = \begin{bmatrix} \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u_1}{\partial x} & \mu \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) & \mu \left(\frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) & \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u_2}{\partial y} & \mu \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial z} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) & \mu \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial z} \right) & \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u_3}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Partindo da equação de equilíbrio $-\nabla \sigma_{ij} = \gamma_j$ na sua forma indicial, pretende-se chegar à mesma equação na forma matricial (ou desenvolvida). Assim substituindo o tensor de tensões na equação de equilíbrio, obtemos:

$$-\nabla \cdot \begin{bmatrix} \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u_1}{\partial x} & \mu \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) & \mu \left(\frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) & \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u_2}{\partial y} & \mu \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial z} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) & \mu \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial z} \right) & \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u_3}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

$$- \begin{bmatrix} \lambda \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) \\ \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) + \lambda \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u_2}{\partial y} + \mu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial z} \right) \\ \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial z} \right) + \lambda \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial u_3}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Consideremos v uma função fixa no conjunto de funções admissíveis. Multiplicamos ambos os membros da equação 3.6 por v :

$$-v_i \begin{bmatrix} \lambda \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) \\ \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) + \lambda \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u_2}{\partial y} + \mu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial z} \right) \\ \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial z} \right) + \lambda \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial u_3}{\partial z} \end{bmatrix} = v_i \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

E, integrando em Ω e aplicando o *Teorema de Green* e , obtemos:

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) \frac{\partial v_1}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial v_1}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \frac{\partial v_1}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) \frac{\partial v_1}{\partial z} + \\ & \mu \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \frac{\partial v_2}{\partial x} + \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) \frac{\partial v_2}{\partial y} + 2\mu \frac{\partial u_2}{\partial y} \frac{\partial v_2}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial z} \right) \frac{\partial v_2}{\partial z} + \\ & \mu \left(\frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) \frac{\partial v_3}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial z} \right) \frac{\partial v_3}{\partial y} + \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) \frac{\partial v_3}{\partial z} + 2\mu \frac{\partial u_3}{\partial z} \frac{\partial v_3}{\partial z} dV \\ & = \iiint_{\Omega} \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \gamma_3 v_3 dV \end{aligned} \quad (3.8)$$

Apresenta-se seguidamente a igualdade que juntamente com as condições de fronteira se obtém a designada *formulação fraca do problema*:

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \frac{\partial v_3}{\partial z} \right) + \\ & \mu \left[\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial v_3}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial v_2}{\partial z} + \frac{\partial v_3}{\partial y} \right) \right] \\ & = \iiint_{\Omega} \vec{\gamma} \cdot \vec{v} dV \end{aligned} \quad (3.9)$$

Tendo em conta que:

$$\begin{aligned} \varepsilon(u) : \varepsilon(v) = & \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \frac{\partial v_3}{\partial z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial v_3}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial v_2}{\partial z} + \frac{\partial v_3}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Temos:

$$\begin{aligned}
& \iiint_{\Omega} \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \frac{\partial v_3}{\partial z} \right) + \\
& 2\mu \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial v_3}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial v_2}{\partial z} + \frac{\partial v_3}{\partial y} \right) \right] \\
& = \iiint_{\Omega} \vec{\gamma} \cdot \vec{v} dV
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Podemos desta forma escrever a *formulação fraca* do problema na sua forma simplificada, ou seja:

$$\iiint_{\Omega} \lambda \nabla \vec{u} \cdot \nabla \vec{v} + 2\mu \cdot \varepsilon(\vec{u}) : \varepsilon(\vec{v}) dV = \iiint_{\Omega} \vec{\gamma} \cdot \vec{v} dV \tag{3.12}$$

3.2 Princípio dos Trabalhos Virtuais

Nesta secção vamos demonstrar que também é possível a obtenção da *formulação fraca* (3.12) através do *princípio dos trabalhos virtuais (PTV)* tendo em conta a *formulação forte* estabelecida (eq. 2.4) e as *condições de fronteira*. Segundo este princípio, é condição necessária e suficiente que a soma dos trabalhos virtuais de todas as forças actuantes sobre o corpo seja nula para que um dado corpo esteja em equilíbrio, ou seja: ”o trabalho das forças interiores deve ser igual ao trabalho das forças exteriores”.

$$W^{int} = W^{ext} \tag{3.13}$$

Tendo em conta que o W^{int} e o W^{ext} podem ser escritas na forma $\iiint_V \delta \varepsilon \sigma dV$ e $\iiint_V \delta u X_m dV + \iint_S \delta u S_m dS$, respectivamente, que as forças mássicas representam-se por X_m e por S_m as forças de superfície num elemento finito de volume V delimitado por um conjunto de faces de superfície total S , sujeito a um campo de deformações $\delta \varepsilon$ e a um campo de tensões σ (definido em todos os pontos do interior e da fronteira do elemento finito), podemos então escrever a equação integral correspondente ao *princípio dos deslocamentos virtuais* para o problema da elasticidade linear associado à *formulação forte* e *condições de fronteira*, constituindo assim a *formulação fraca* que nos permite fazer uma implementação directa do problema elástico, ou seja:

$$\underbrace{\iiint_V \delta \varepsilon \sigma dV}_{W^{int}} = \underbrace{\iiint_V \delta u X_m dV + \iint_S \delta u S_m dS}_{W^{ext}} \tag{3.14}$$

Capítulo 4

Implementação do Método de Elementos Finitos

4.1 Introdução

Para o dimensionamento das estruturas de engenharia civil é imprescindível a determinação da solução mais próxima quanto possível da realidade. Deste modo, o *Método de Elementos Finitos (MEF)* é, actualmente, o método mais utilizado com o objectivo de se alcançar uma solução mais aproximada e satisfatória, quer economicamente, quer na verificação de pré-requisitos funcionais e regulamentares. A sua implementação pressupõe o conhecimento do modelo físico a formular que por sua vez permitirá a criação de um modelo matemático passível de resolução numérica. O princípio do *MEF* consiste em discretizar o problema contínuo dado com infinitos graus de liberdade para obter um sistema de equações discretas com apenas um número finito de incógnitas, associados aos pontos nodais, que podem ser resolvidos recorrendo a um computador.

Este método permite determinar o campo de deslocamentos, distribuição das extensões e das tensões instaladas em estruturas quando submetidas a solicitações exteriores, através de equações diferenciais a que devem satisfazer os mesmos campos de deslocamentos, extensões e tensões. Para a implementação do *MEF* e posterior determinação destas variáveis, há que conhecer o método no seu todo e a relação existente com a Teoria da Elasticidade Linear. Deste modo, obtém-se as tensões internas de um corpo submetido a forças externas, por aplicação das *Equações de Equilíbrio*, as extensões através dos deslocamentos dos pontos nodais da estrutura, utilizando as *Equações de Compatibilidade* e finalmente com as *Relações Constitutivas* é possível relacionar as tensões instaladas com as extensões, permitindo assim, por aplicação do *MEF*, a resolução do problema elástico.

4.2 Elementos Finitos e Funções de Forma

O primeiro passo na formulação de elementos finitos é a discretização da estrutura, através da sua divisão num número finito de formas simples chamados *Elementos*. Estes elementos podem, em casos bidimensionais, ter formas rectangulares ou triangulares e, em casos tridimensionais, formas de um paralelepípedo ou de um tetraedro.

Uma malha de elementos finitos bem definida, apresenta de uma maneira geral melhores resultados, sendo que uma má discretização pode conduzir aos denominados *erros de discretização*. Admite-se, no entanto, que os elementos encontram-se ligados num número discreto de *pontos nodais* (ou nós) situados na sua fronteira. Desta forma, cada ponto nodal tem associado o seu campo de deslocamentos que serão as principais incógnitas a determinar, pelo que para casos

tridimensionais consideram-se 3 graus de liberdade por nó para a formulação do problema em estudo.

Define-se, seguidamente, para cada grau de liberdade uma função N_i que corresponde à função de interpolação em que a principal característica consiste no facto de a função assumir o valor unitário no nó respectivo e nulo nos restantes nós.

Assim, para o caso tridimensional, o elemento em estudo será o tetraedro. Os parâmetros ou as coordenadas naturais usados no tetraedro são coordenadas de volume do elemento. Em coordenadas de volume, cada ponto fica determinado por suas coordenadas $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ (fig. 4.1).

Designando por Δ o volume do tetraedro e por $\Delta P_{i,j,k}$ o volume do tetraedro formado pelo ponto P e os vértices i, j, k do tetraedro, as coordenadas de volume são definidas de modo que:

$$\xi_1 = \frac{\Delta P_{2,3,4}}{\Delta}; \quad \xi_2 = \frac{\Delta P_{1,3,4}}{\Delta}; \quad \xi_3 = \frac{\Delta P_{1,2,4}}{\Delta}; \quad \xi_4 = \frac{\Delta P_{1,2,3}}{\Delta}. \quad (4.1)$$

Possibilitando, assim, que seja verificada a seguinte relação:

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 = 1 \quad (4.2)$$

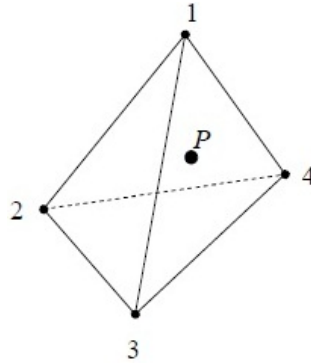


Figura 4.1: Coordenadas de volume em um tetraedro [Fernando Ribeiro, 2004].

Utilizando polinómios de grau 1 ($p = 1$), podemos verificar que as funções de interpolação do tetraedro linear de 4 nós são:

$$N_i = \xi_i \quad (i = 1, \dots, 4) \quad (4.3)$$

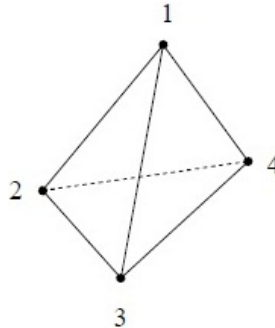


Figura 4.2: Tetraedro linear [Fernando Ribeiro, 2004].

Para $p = 2$ o tetraedro resultante é constituído por 10 nós (fig. 4.3), e as funções de interpolação são iguais a:

$$\begin{aligned}
N_i &= \xi_i(2\xi_1 - 1) & (i = 1, \dots, 4) \\
N_6 &= 4\xi_1\xi_3 \\
N_7 &= 4\xi_1\xi_4 \\
N_8 &= 4\xi_2\xi_3 \\
N_9 &= 4\xi_3\xi_4 \\
N_{10} &= 4\xi_2\xi_4
\end{aligned} \tag{4.4}$$

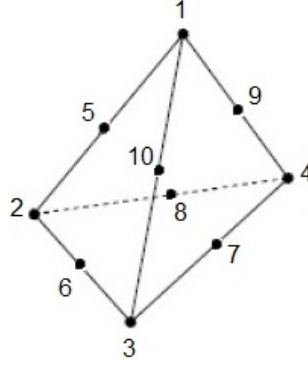


Figura 4.3: Tetraedro linear, $p=2$.

Tendo em conta que apenas 3 coordenadas paramétricas são linearmente independentes, a matriz jacobiana da transformação de coordenadas é igual a:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \xi_1} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi_1} & \frac{\partial y}{\partial \xi_1} & \frac{\partial z}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi_2} & \frac{\partial y}{\partial \xi_2} & \frac{\partial z}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi_3} & \frac{\partial y}{\partial \xi_3} & \frac{\partial z}{\partial \xi_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}; & \quad J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi_1} & \frac{\partial y}{\partial \xi_1} & \frac{\partial z}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi_2} & \frac{\partial y}{\partial \xi_2} & \frac{\partial z}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi_3} & \frac{\partial y}{\partial \xi_3} & \frac{\partial z}{\partial \xi_3} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

No caso dos tetraedros de faces planas, a geometria é representada pelas seguintes equações:

$$x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 \tag{4.5}$$

$$y = \xi_1 y_1 + \xi_2 y_2 + \xi_3 y_3 + \xi_4 y_4 \tag{4.6}$$

$$z = \xi_1 z_1 + \xi_2 z_2 + \xi_3 z_3 + \xi_4 z_4 \tag{4.7}$$

Sendo $N1 = \xi_1$, $N2 = \xi_2$, $N3 = \xi_3$ e $N4 = \xi_4$ a expressão das funções de forma polinomiais de grau 1 do tetraedro.

Uma vez que a coordenada de volume ξ_4 é linearmente dependente de ξ_1 , ξ_2 e ξ_3 , as derivadas parciais de x , y e z em relação às coordenadas de volume ξ_1 , ξ_2 e ξ_3 são:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi_1} = x_1 - x_4; \quad \frac{\partial x}{\partial \xi_2} = x_2 - x_4; \quad \frac{\partial x}{\partial \xi_3} = x_3 - x_4 \tag{4.8}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi_1} = y_1 - y_4; \quad \frac{\partial y}{\partial \xi_2} = y_2 - y_4; \quad \frac{\partial y}{\partial \xi_3} = y_3 - y_4 \tag{4.9}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \xi_1} = z_1 - z_4; \quad \frac{\partial z}{\partial \xi_2} = z_2 - z_4; \quad \frac{\partial z}{\partial \xi_3} = z_3 - z_4 \tag{4.10}$$

Conseqüentemente, a matriz Jacobiana escreve-se na forma:

$$J = \begin{bmatrix} x_1 - x_4 & y_1 - y_4 & z_1 - z_4 \\ x_2 - x_4 & y_2 - y_4 & z_2 - z_4 \\ x_3 - x_4 & y_3 - y_4 & z_3 - z_4 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

E o *jacobiano*, determinante da matriz jacobiana:

$$\begin{aligned} \det J &= (x_1 - x_4)(y_2 - y_4)(z_3 - z_4) + (x_2 - x_4)(y_3 - y_4)(z_1 - z_4) + \\ & (x_3 - x_4)(y_1 - y_4)(z_2 - z_4) - (x_3 - x_4)(y_2 - y_4)(z_1 - z_4) + \\ & (x_1 - x_4)(y_3 - y_4)(z_2 - z_4) + (x_2 - x_4)(y_1 - y_4)(z_3 - z_4) \\ &= 6\Delta \end{aligned} \quad (4.12)$$

Depois de serem definidas as *funções de interpolação* ou *funções de forma* N_i que definem, de forma aproximada, o campo de deslocamentos em cada elemento a partir do valor dos deslocamentos dos pontos nodais u^{e_i} , vamos estudar a equação que traduz a *aproximação fundamental do Método de Elementos Finitos*:

$$u = N_i u^{e_i} \quad (4.13)$$

Sendo:

u - O campo de deslocamentos;

N_i - Matriz das funções de forma dos tetraedros (função do número de nós do elemento finito);

u^{e_i} - Vector deslocamento do ponto nodal i .

No caso geral tridimensional, o vector deslocamentos é constituído por três componentes, representando-se por:

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Partindo das relações deformações-deslocamentos pode-se verificar que as funções interpoladoras N_i permitem também determinar de forma aproximada o estado de deformação em qualquer ponto dum elemento finito a partir do valor dos deslocamentos dos pontos nodais.

As relações deformações-deslocamentos, a verificar em cada ponto do interior dum sólido, podem ser escritas em notação indicial, segundo a hipótese dos pequenos deslocamentos (ver eq. 2.2).

Assim sendo, tendo em conta ainda a eq. 2.2, é possível escrever a equação de compatibilidade para o caso tridimensional na sua forma tensorial, ou seja:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\ \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Sendo que:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\ \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

A segunda e terceira parcelas da equação 4.16 correspondem ao operador diferencial L e ao vector de deslocamentos u , respectivamente. Deste modo podemos escrever ε na seguinte forma:

$$\varepsilon = Lu \quad (4.17)$$

Substituindo u , pela equação que traduz a *aproximação fundamental do MEF* (fig. 4.13), temos que:

$$\varepsilon = LN u^e = B u^e \quad (4.18)$$

onde $B = LN$ é uma matriz constituída por derivadas das funções interpoladoras N_i em ordem às coordenadas gerais.

Para o caso tridimensional, representa-se a matriz B resultante da multiplicação do operador diferencial L com a matriz N :

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc|c|ccc} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \dots & N_{10} & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_{10} & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots & 0 & 0 & N_{10} \end{array} \right] \quad (4.19)$$

logo,

$$B = \left[\begin{array}{ccc|ccc|c|ccc} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial N_{10}}{\partial x_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_{10}}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x_3} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_3} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial N_{10}}{\partial x_3} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x_3} & \frac{\partial x_3}{\partial N_1} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_3} & \frac{\partial x_3}{\partial N_2} & \dots & 0 & \frac{\partial N_{10}}{\partial x_3} & \frac{\partial x_3}{\partial N_{10}} \\ \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial x_2}{\partial N_1} & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial x_2}{\partial N_2} & \dots & \frac{\partial N_{10}}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial x_2}{\partial N_{10}} \\ \frac{\partial x_3}{\partial N_1} & \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial x_3}{\partial N_2} & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & 0 & \dots & \frac{\partial x_3}{\partial N_{10}} & \frac{\partial N_{10}}{\partial x_1} & \frac{\partial x_3}{\partial N_{10}} \\ \frac{\partial x_2}{\partial x_2} & \frac{\partial x_1}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial x_2}{\partial x_2} & \frac{\partial x_1}{\partial x_1} & 0 & \dots & \frac{\partial x_2}{\partial x_2} & \frac{\partial x_1}{\partial x_1} & 0 \end{array} \right] \quad (4.20)$$

Contudo, é possível representar a equação 4.18 na sua forma desenvolvida, apresentando o seguinte aspecto:

$$\left[\begin{array}{c} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc|c|ccc} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial N_{10}}{\partial x_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_{10}}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x_3} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_3} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial N_{10}}{\partial x_3} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x_3} & \frac{\partial x_3}{\partial N_1} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_3} & \frac{\partial x_3}{\partial N_2} & \dots & 0 & \frac{\partial N_{10}}{\partial x_3} & \frac{\partial x_3}{\partial N_{10}} \\ \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial x_2}{\partial N_1} & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial x_2}{\partial N_2} & \dots & \frac{\partial N_{10}}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial x_2}{\partial N_{10}} \\ \frac{\partial x_3}{\partial N_1} & \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial x_3}{\partial N_2} & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & 0 & \dots & \frac{\partial x_3}{\partial N_{10}} & \frac{\partial N_{10}}{\partial x_1} & \frac{\partial x_3}{\partial N_{10}} \\ \frac{\partial x_2}{\partial x_2} & \frac{\partial x_1}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial x_2}{\partial x_2} & \frac{\partial x_1}{\partial x_1} & 0 & \dots & \frac{\partial x_2}{\partial x_2} & \frac{\partial x_1}{\partial x_1} & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} u_1^{e1} \\ u_2^{e1} \\ u_3^{e1} \\ \dots \\ u_1^{e2} \\ u_2^{e2} \\ u_3^{e2} \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ u_1^{e10} \\ u_2^{e10} \\ u_3^{e10} \end{array} \right] \quad (4.21)$$

4.3 Implementação do Método de Elementos Finitos

Para a implementação do método de elementos finitos torna-se necessária a obtenção de um sistema matricial para a resolução do problema elástico. Como tal, tendo em conta a *Equação Constitutiva*, $\sigma = \underline{D}\varepsilon = \underline{D}\underline{B}u^e$ e $\delta u = \delta u^e$ e as equações 3.14 e 4.18 tem-se que:

$$\begin{aligned} \iiint_V \underline{B}\delta u^e \underline{D}\underline{B}u^e dV &= \iiint_V \underline{N}\delta u^e X dV + \iint_S \underline{N}\delta u^e S dS \quad \Leftrightarrow \\ \delta u^e \iiint_V \underline{B}\underline{D}\underline{B}u^e dV &= \delta u^e \left(\iiint_V \underline{N}^T X dV + \iint_S \underline{N}^T S dS \right) \quad \Leftrightarrow \quad (4.22) \\ \iiint_V \underline{B}\underline{D}\underline{B}u^e dV &= \iiint_V \underline{N}^T X dV + \iint_S \underline{N}^T S dS \end{aligned}$$

Sendo então equivalente à seguinte equação:

$$\underline{K}^e \underline{u}^e = \underline{F}^e \quad (4.23)$$

em que \underline{u}^e corresponde aos deslocamentos nodais do elemento, sendo a matriz de rigidez elementar \underline{K}^e e as forças equivalentes \underline{F}^e , dadas por:

$$\underline{K}^e = \iiint_V \underline{B} \underline{D} \underline{B} dV \quad (4.24)$$

$$\underline{F}^e = \iiint_V \underline{N}^T X dV + \iint_S \underline{N}^T S dS \quad (4.25)$$

Onde:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

e com \underline{B} e \underline{N} tal como em 4.2.

4.4 Implementação em freeFEM++

Nesta secção vamos estudar um problema tridimensional de uma laje apoiada num pilar centrado para a demonstração do programa freeFEM++, dos comandos utilizados, e ainda da linguagem utilizada para modelação do problema em estudo.

4.4.1 Definição do problema elástico

O modelo em estudo é constituído por uma laje com espessura de 0,20m, um pilar com altura de 3 m (fig. 4.4), sendo a sua secção transversal, $A = 0,20 \times 0,20m^2$. Considera-se como acção unicamente o *peso próprio* da estrutura.

Constituição do material:

- Betão: C20 / 25
- Módulo de elasticidade (E) = $30 \times 10^6 kPa$
- Coeficiente de Poisson (ν) = 0,20
- Peso específico = 25 kN/m^3

Definição do modelo:

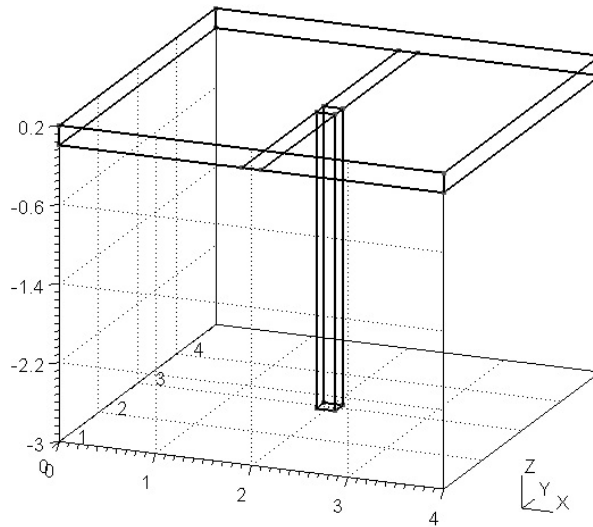


Figura 4.4: Modelo 3D.

4.4.2 Construção da malha - GMSH

O GMSH é uma aplicação que gera automaticamente malhas tridimensionais em elementos finitos, com relativa facilidade de pré e pós-processamento. Esta aplicação foi desenvolvida com o objectivo de ser uma ferramenta simples para resolução de problemas académicos e com capacidade avançada de visualização.

A linguagem script do GMSH permite que toda a geometria seja bem definida, sendo que a sua criação depende da definição de uma sucessão de pontos, linhas, superfícies e volumes. A malha de elementos finitos envolve um subconjunto de espaços tridimensionais constituído por elementos de várias formas geométricas (linhas, triângulos, quadrados, tetraedros, prismas, hexaedros e triângulos), arranjados de tal forma que se duas destas se interceptam, eles formam uma faceta, um bordo ou um nó.

A discretização dos elementos é uma etapa muito importante na utilização do MEF, pois é ela que determina a qualidade final dos resultados: uma discretização mal feita pode comprometer todo o resultado final, gerando uma resposta com erros significativos.

A utilização do software GMSH para geração de malhas de elementos finitos nos modelos traz melhorias na qualidade da malha, apresentando um resultado mais próximo do real. Outro aspecto muito importante é a possibilidade de poder alterar a geometria dos elementos, o que torna o programa mais genérico, capaz de resolver problemas práticos de diferentes geometrias. Por outro lado, o GMSH apresenta boa compatibilidade com o freeFEM++, ou seja, o *output* da malha gerada pode ser guardada com extensão compatível para posterior input em freeFEM++ com vista à determinação do problema.

Assim, a malha de elementos finitos foi desenvolvida com o auxílio da aplicação GMSH para definição da região onde é desenvolvido o problema elástico.

Para a definição da geometria da estrutura e da malha do problema referido em 4.4.1, recorreu-se a um ficheiro de texto onde os elementos geométricos foram definidos através de *scripts* de linguagem do GMSH.

Seguidamente vamos exemplificar a criação da geometria da estrutura, tendo em conta alguns pontos considerados relevantes:

1. Definição do eixo cartesiano: adoptou-se como origem de eixo $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$;
2. Dimensões das peças estruturais: Para cada elemento estrutural definem-se as dimensões dependendo da configuração geométrica pretendida.

```

:::
ht = .2; // altura topo
hb = 3.; // altura base
lt = 4.; // comprimento topo
lb = .2; // comprimento base
wt = 4; // largura topo
wb = .2; // largura base
:::

```

Figura 4.5: Dimensões das peças estruturais

3. Definição de pontos: Tendo em conta as dimensões definidas acima, registam-se as coordenadas de cada ponto da estrutura.

```

:::
Point(1) = { x0      , y0      , z0, lc } ;
Point(2) = { x0 + lb , y0      , z0, lc } ;
Point(3) = { x0 + lb+lb , y0      , z0, lc } ;
Point(4) = { x0 + lt  , y0      , z0, lc } ;
Point(5) = { x0 + lb  , wlb     , z0, lc } ;
Point(6) = { x0 + lb+lb , wlb     , z0, lc } ;
:::

```

Figura 4.6: Coordenadas dos pontos base da estrutura

4. Definição de linhas: As linhas são criadas com objectivo de unir os pontos anteriormente definidos por forma a que no final se tenha a geometria da estrutura que se quer conceber.

```

:::
Line(1) = {1 , 2};
Line(2) = {2 , 3};
Line(3) = {3 , 4};
Line(4) = {5 , 6};
Line(5) = {7 , 8};
Line(6) = {9 ,10};
Line(7) = {10,11};
Line(8) = {11,12};
:::

```

Figura 4.7: Criação de linhas

5. Definição de superfícies: Englobam um conjunto de linhas que formam uma superfície fechada, obtendo assim uma região plana. Definidas as superfícies já se torna possível a criação de malhas bidimensionais através do comando MESH 2D da aplicação.

```
...
Line Loop (1001) = {1,10,11,12,-6,-9};
Plane Surface (101) = {1001};

Line Loop (1002) = {2,13,-4,-10};
Plane Surface (102) = {1002};
//superf. horizontais base
Line Loop (1005) = {17,20,-18,-19};
Plane Surface (105) = {1005};

//superf. horizontais topo
Line Loop (1006) = {21,24,-22,-23};
Plane Surface (106) = {1006};
...
```

Figura 4.8: Definição de superfícies

6. Definição de volumes: A superfície volúmica apenas pode ser criada depois de serem definidas todas as superfícies planas, formando assim um elemento fechado.

```
...
Surface Loop (2001) = {101,102,103,104,105,106,107,108,109,110,111,112,113,114};
Volume (201) = {2001};
...
```

Figura 4.9: Definição de volumes

7. Condições de fronteira: A sua introdução no ficheiro de texto permite posteriormente a imposição das condições de fronteira, facilitando a inserção de condições de apoio ou cargas na estrutura.

```
...
Physical Surface (3001) = {105};
Physical Surface (3002) = {106};
```

Figura 4.10: Definição de condições de fronteira

8. Geração da malha 3D: A malha de elementos finitos tridimensional poderá então ser gerada utilizando o comando MESH 3D. A seguir, de forma a ser possível a sua leitura em freeFEM++, a malha será guardada num novo tipo de ficheiro *Medit INRIA Mesh* (com extensão *.mesh) que servirá de input da malha em freeFEM++.

Veja-se a estrutura depois de gerada a malha 3D em GMSH(fig. 4.11):

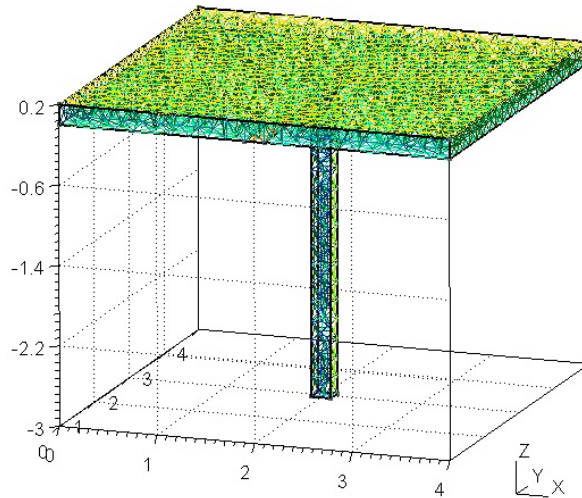


Figura 4.11: Malha tridimensional da estrutura indicada em 4.4.1

4.4.3 Definição de Constantes, do Material e Forças Actuantes

O material da estrutura modelada (constituída por betão C 20/25) é caracterizada pelas constantes *módulo de elasticidade* (E) e *coeficiente de Poisson* ν . Estes valores, introduzidos através das designadas *constantes de Lamé*, são definidos em freeFem++ como μ e λ . Ainda nesta secção do programa é definido o peso próprio da estrutura.

```
// CONSTANTES DO MATERIAL-----
real    E = 30e6,                               //Módulo de Elasticidade [kN/m^2]
        H = .20,                                 //Altura da laje
        poisson = 0.20,                          //Coeficiente de Poisson
        mu = E/(2*(1+poisson)),
        lambda = E*poisson/((1+poisson)*(1-2*poisson)), //mu e lambda, coeficientes de Lamé [kN/m^2]
        D=E*H^3/(12*(1-poisson^2));             //Constante de Elasticidade [kN/m^2]
func    g = -25.;                               //Força Mássica
```

4.4.4 Definição do Espaço das Soluções Admissíveis

É necessário que seja estabelecido o grau p do polinómio na implementação do *MEF*, tendo em conta a definição das *funções de forma* na secção 4.2. Com a discretização do *MEF* é gerado um conjunto de *funções de forma* que constitui um *espaço vectorial* de *funções polinomiais*. Normalmente, o *MEF* é aplicado utilizando polinómios de grau $p = 1$ ou $p = 2$. A sua aplicação em freeFEM++ é bastante fácil, escrevendo o seguinte comando:

```
fespace [nome do espaço]([nome da malha], Pn);
```

Sendo $n = 1$ ou $n = 2$.

Após definir o grau dos polinómios, definem-se seguidamente as variáveis a ser utilizadas no programa, através da seguinte forma:

```
// DEFINIÇÃO DOS ESPAÇOS-----
fespace Vh(Th, [P2,P2,P2]), Vh1(Th,P2), Vh2(Th,P2); // Def. do Espaço Vh a partir de Th com elem. P2
Vh [u1,u2,u3], [v1,v2,v3]; // Definição variáveis válidas no espaço Vh
Vh1 Sx, Sy, Sz, Sxy, Sxz, Syz; // Definição variáveis válidas no espaço Vh1
Vh2 Mx, My, Mxy; // Definição variáveis válidas no espaço Vh2
```

4.4.5 Definição de Macros e Variáveis

As macros são definidas em freeFEM++ com a finalidade de converter uma função genérica num determinado operador.

Exemplificando:

Verifica-se que uma *macro* é constituída por três partes, comando (*macro*), operador (ex. $div(u1,u2,u3)$) e função. Esta conversão visa transformar o vector $(u1,u2,u3)$ no escalar $dx(u1)+dy(u2)+dz(u3)$

```
// INTRODUÇÃO DAS MACROS
real sqrt2=sqrt(2.);
macro epsilon(u1,u2,u3)
[dx(u1),dy(u2),dz(u3),(dz(u2)+dy(u3))/sqrt2,(dz(u1)+dx(u3))/sqrt2,(dy(u1)+dx(u2))/sqrt2] // EOM
// Pretende-se obter o sqrt2: epsilon:epsilon
macro div(u1,u2,u3) ( dx(u1)+dy(u2)+dz(u3) ) // EOM // divergente do vector (u1,u2,u3)
```

4.4.6 Resolução do Problema

A resolução de problemas numéricos poderá ser feito através de vários métodos diferentes. Assim, tendo em conta que para esta dissertação utiliza-se o freeFEM++ para a resolução numérica do problema, será utilizado ao longo deste trabalho somente o *método iterativo do gradiente conjugado*, representado por *CG*:

```
// RESOLUÇÃO DO PROBLEMA (Implementação da formulação fraca, eq. 3.12)
solve Lamé([u1,u2,u3],[v1,v2,v3], solver=CG)= // CG = Método do Gradiente Conjugado
int3d(Th)( lambda*div(u1,u2,u3)*div(v1,v2,v3)
+ 2.*mu*(epsilon(u1,u2,u3)*epsilon(v1,v2,v3))
-int3d(Th)(g*v3) // integral para integração das forças mássicas em Th
+ on(3001,u3=0,u2=0,u1=0); // condições de Dirichlet na base do pilar
```

A implementação das equações em freeFEM++ pressupõe que o segundo membro da equação seja nulo. Desta forma a equação 3.12 foi implementada, passando a ter o seguinte aspecto:

$$\iiint_{\Omega} \lambda \nabla \vec{u} \cdot \nabla \vec{v} + 2\mu \cdot \varepsilon(\vec{u}) : \varepsilon(\vec{v}) dV - \iiint_{\Omega} \vec{\gamma} \cdot \vec{v} dV = 0 \quad (4.27)$$

4.4.7 Deslocamentos, Tensões e Momentos Flectores

O desenvolvimento da equação 3.12 corresponde à resolução numérica do problema em termos de *deslocamentos*. Assim, tendo em conta que a nossa análise visa estudar também os *momentos flectores* e as *tensões* instaladas nas estruturas, torna-se necessário o cálculo dessas grandezas através das seguintes expressões:

```
// DESLOCAMENTOS
real    dmax= u3[].max, dmin= u3[].min,          // definição de um valor real, deformações máximas
        coef=abs(1/dmin);                       // factor de escala em função dos deslocamentos máximos
        mesh3 Thm= movemesh3(Th, transfo=[x+u1,y+u2,z+u3*coef]); // Construção da malha deformada
plot (Thm,wait=1);
plot ([u1,u2,u3], ps="lame3d.eps", coef=coef); // Plot da malha deformada

// TENSÕES
Sx = lambda*(dx(u1)+dy(u2)+dz(u3)) + 2*mu*dx(u1); // Calculo das Tensões em xx
Sy = lambda*(dx(u1)+dy(u2)+dz(u3)) + 2*mu*dy(u2); // Calculo das Tensões em yy
Sz = lambda*(dx(u1)+dy(u2)+dz(u3)) + 2*mu*dz(u3); // Calculo das Tensões em zy
Sxy = mu*(dy(u1) + dx(u2));
Sxz = mu*(dz(u1) + dx(u3));
Syz = mu*(dz(u2) + dz(u2)); // Valores máximos positivos das tensões
plot(Sx,wait=1); // Plot das Tensões em xx
plot(Sy,wait=1); // Plot das Tensões em yy

// MOMENTOS NA LAJE (Segundo Reissner-Mindlin, eq. 2.26)
Mx = D*(dxx(u3)+poisson*dyy(u3)); // Calculo dos Momentos Flectores em x
My = D*(dyy(u3)+poisson*dxx(u3)); // Calculo dos Momentos Flectores em y
Mxy = D*(1-poisson)*dxy(u3); // Calculo dos Momentos Flectores em xy
plot (Mx, wait=true,cmm ="Mx laje",fill=1,value=true,ps="Mxlaje.eps",coef=coef);
// Plot dos Momentos Flectores
plot (My, wait=true,cmm ="My laje",fill=1,value=true,ps="Mylaje.eps",coef=coef);
// Plot dos Momentos Flectores
plot (Mxy, wait=true,cmm ="Mxy laje",fill=1,value=true,ps="Mxylaje.eps",coef=coef);
// Plot dos Momentos Flectores
real    MxM=Mx[].max, Mxm=Mx[].min, // Definição de reais Momento máximo e mínimo
        MyM=My[].max, Mym=My[].min, // Definição de reais Momento máximo e mínimo
        MxyM=Mxy[].max, Mxym=Mxy[].min; // Definição de reais Momento máximo e mínimo
```

4.4.8 Tratamento e Impressão de Resultados

A visualização de resultados em freeFEM++ pode ser feita de duas formas, graficamente ou através da visualização alfanumérica. Para isso, são dadas instruções em função do tipo de visualização que se pretende.

É possível a visualização gráfica através da instrução *plot* (`plot (...)` permite output do ficheiro de imagem - extensão *.ps) ou através do *ofstream file* (`ofstream file (...)` onde são guardados registos de coordenadas dos vértices dos tetraedros e dos seus respectivos *deslocamentos* - extensão *.pos). Relativamente à visualização alfanumérica (`cout << " " << endl;`), esta é utilizada para impressão de valores extremos de variáveis a analisar (*momentos flectores* e *deslocamentos*).

Vejamos agora exemplo de algumas visualizações gráficas e alfanuméricas:

```
//Exemplos de plots
plot ([u1,u2,u3], ps="lame3d.eps", coef=coef); // Plot da malha deformada
plot(Sx,wait=1); // Plot das Tensões em xx
plot (Mx, wait=true,cmm ="Mx laje",fill=1,value=true,ps="Mxlaje.eps",coef=coef);
// Plot dos Momentos Flectores

// RESULTADOS E OUTPUTS
cout
    << " max deslocamento = " << dmax << endl //deslocamento máximo
    << " Momentos na Laje: " << endl
    << " Mx max=" << MxM << ", Mx min=" << Mxm << endl //momento máximo em xx
    << " My max=" << MyM << ", My min=" << Mym << endl //momento máximo em yy
    << " Mxy max=" << MxyM << ", Mxy min=" << Mxym << endl; //momento máximo em xy

ofstream file("deslocamentos.pos");
// Registo das coordenadas dos vértices dos tetraedros
for (int i=0; i< Th.nt; i++) {
    file<<"VS(";
    for (int j=0; j <3; j++)
        file << Th[i][j].x <<","<< Th[i][j].y <<","<< Th[i][j].z<<",";
    file << Th[i][3].x <<","<< Th[i][3].y <<","<< Th[i][3].z;
    file<<"){"<<endl;

// Registo das coordenadas em cada vértice
for (int j=0; j <3; j++)
    file << u1( Th[i][j].x , Th[i][j].y , Th[i][j].z )<< ","
        << u2( Th[i][j].x , Th[i][j].y , Th[i][j].z )<< ","
        << u3( Th[i][j].x , Th[i][j].y , Th[i][j].z )<< ","<<endl;
file << u1( Th[i][3].x , Th[i][3].y , Th[i][3].z )<< ","
    << u2( Th[i][3].x , Th[i][3].y , Th[i][3].z )<< ","
    << u3( Th[i][3].x , Th[i][3].y , Th[i][3].z )<<"}<<endl;
```

Assim sendo, podemos visualizar os resultados no quadro auxiliar do compilador:



```
max deslocamento = -0.00107429
Momentos na Laje:
Mx max=9.60405, Mx min=-23.0692
My max=11.1944, My min=-21.1253
Mxy max=4.40534, Mxy min=-9.50723
```

Figura 4.12: Resultados alfanuméricos do freeFEM++

4.4.9 Resultados

Deslocamentos e deformada da estrutura:

Na figura 4.12 é visível que o deslocamento máximo vertical (d_{max}) da estrutura é igual a -0.00111 m. Conforme vimos em 4.4.8, os resultados gráficos podem ser visualizados através do registo de valores das coordenadas dos tetraedros e dos seus respectivos deslocamentos num *ofstream file*.

Assim, utiliza-se novamente o GMSH, desta vez para o pós-processamento de resultados (leitura e representação gráfica dos valores registados no *ofstream file*) que se encontram ilustrados na figura 4.13 onde os valores dos deslocamentos ao longo da estrutura se encontram distribuídos de forma bi-simétrica:

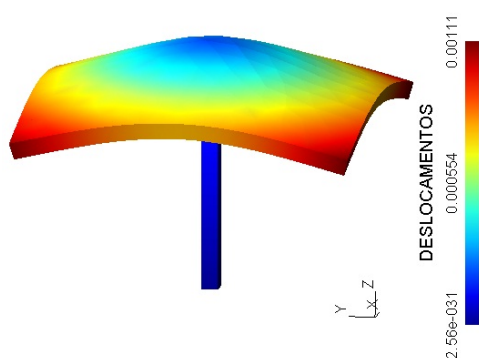


Figura 4.13: Valores dos deslocamentos dos pontos nodais

Os deslocamentos dos pontos nodais originam uma deformada que por sua vez também é bi-simétrica. Vejamos agora a figura 4.14, onde a deformada da laje na zona do pilar é praticamente nula quando comparada com a deformada dos cantos da laje ($d_{max} = -0.00111$ m).

Assim, temos que:

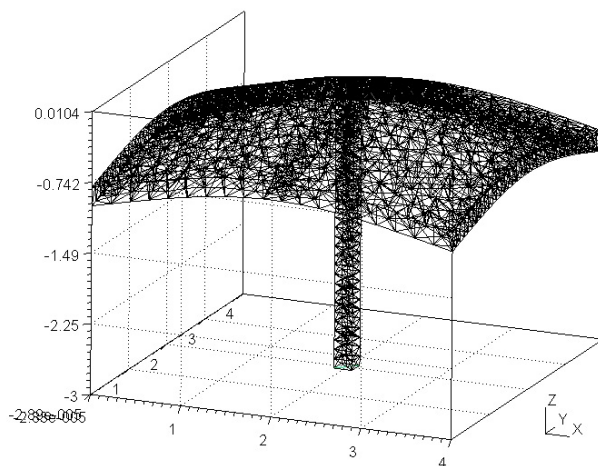


Figura 4.14: Malha da estrutura deformada

Momentos flectores:

Da mesma forma que os deslocamentos e a deformada, os momentos flectores apresentam também valores simétricos. Os valores do momento máximo positivo segundo xx e yy são praticamente da mesma ordem de grandeza, $M_x \max=4.07$ e $M_y \max=4.58$ kNm/m. O mesmo sucede com o momento máximo negativo, ou seja: $M_x \min=-18.47$ e $M_y \min=-18.30$ kNm/m.

Da análise dos momentos flectores, verifica-se que na zona do apoio (zona do pilar), os momentos flectores apresentam valores negativos, conforme seria de esperar. Por sua vez, os bordos das lajes apresentam valores positivos, acompanhando assim a deformada da estrutura.

Seguidamente, são representados os gráficos dos momentos flectores segundo as duas direcções:

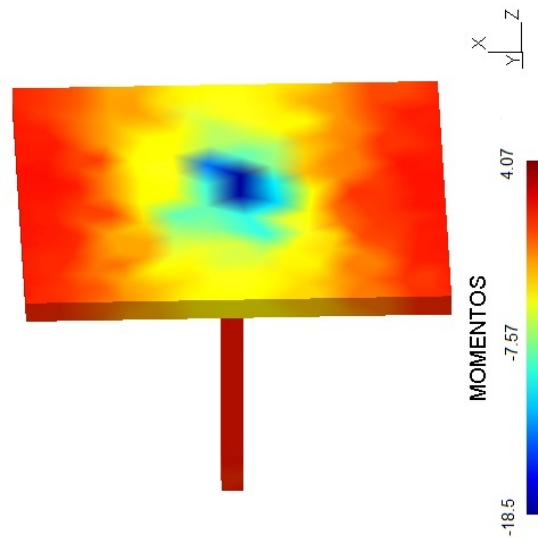


Figura 4.15: Momento flector segundo o eixo xx

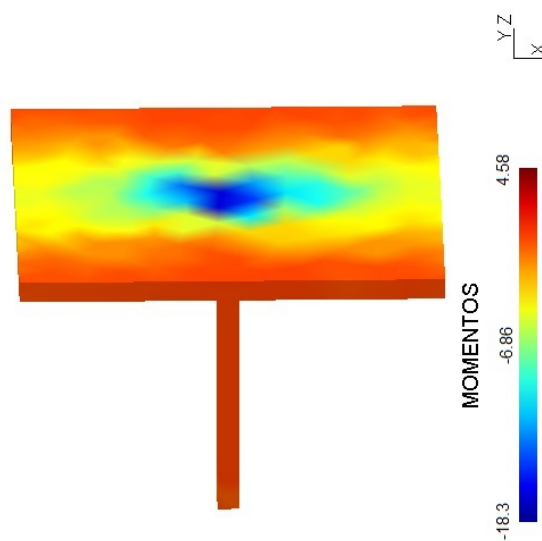


Figura 4.16: Momento flector segundo o eixo yy

Capítulo 5

Análise dos diferentes casos

5.1 Introdução

A análise em freeFEM++ dos diferentes modelos estruturais, sendo o objectivo principal deste trabalho de dissertação, será efectuada tendo em vista o cálculo dos deslocamentos e dos momentos flectores. Estes valores serão comparados com os resultados obtidos através do programa de cálculo estrutural SAP2000. Todos os modelos serão analisados tendo em conta unicamente a acção do *peso próprio* da estrutura.

Os modelos em análise são constituídos sempre pelo mesmo material, o betão armado. Assim, o tipo de betão utilizado em ambos os programas será o mesmo para que haja semelhança nos resultados entre o freeFEM++ e o SAP2000. Como tal, as *constantes de Lamé*, o *peso específico* e o *coeficiente de Poisson* terão os mesmos valores.

Com isto, pretende-se que os modelos utilizados em ambos os programas tenham um comportamento idêntico de forma a que o resultado final seja praticamente o mesmo, apesar de os dois programas utilizarem modelos diferentes, sendo que o SAP2000 utiliza os modelos de Kirchoff ou Reissner-Mindlin e no freeFEM++ foi implementado um modelo de elasticidade linear 3D. O método de cálculo estrutural para todos os modelos é idêntico em *freeFEM++*, variando apenas na geometria da estrutura definida em GMSH, onde são definidos os diferentes modelos e onde é discretizada a estrutura de elementos finitos para posterior *input* da malha em *freeFEM++*.

A sobreposição de efeitos nos modelos de cálculo automático, para o caso de edifícios altos, conduzem ao denominado efeito de encurtamento dos pilares, fenómeno este que na prática não se sucede devido ao método construtivo geralmente utilizado. Apesar de este efeito ser facilmente eliminado em SAP2000 (considerando o factor multiplicativo para a secção do pilar igual a 10), em freeFEM++ essa opção não será explorada, como tal, todos os modelos serão estudados tendo em conta a deformabilidade dos pilares.

No caso dos modelos com viga, será tida em conta a multiplicação do factor de inércia em SAP2000, determinado através do *Teorema de Steiner*, a fim de simular o comportamento real da viga.

Neste capítulo vamos estudar seis (6) modelos diferentes, sendo que no primeiro modelo será analisada uma laje fungiforme apoiada em 4 pilares, no segundo modelo será feita a análise de uma laje num sistema porticado de 4 pilares, no terceiro modelo serão analisadas lajes fungiformes numa estrutura de 3 pisos, no quarto modelo serão analisadas lajes num sistema porticado de 3 pisos, no quinto modelo serão analisadas lajes fungiformes numa estrutura de 9 pisos e, por fim, o último modelo servirá para análise de lajes de uma estrutura porticada de 9 pisos.

5.2 Análise de uma laje fungiforme apoiada em 4 pilares nos 4 cantos - 1 piso

5.2.1 Apresentação do modelo

O primeiro caso a ser estudado é uma laje fungiforme apoiada em 4 pilares, com vãos de 4 metros e altura de 20 cm. Os pilares que servirão de apoio às lajes são constituídos por uma secção de $A = 0,20 \times 0,20m^2$ e por uma altura de 2.9 metros. O material utilizado é o betão C20 / 25, com um *módulo de elasticidade* $E = 30 \times 10^6kPa$ e um *coeficiente de Poisson* $\nu = 0,16$.

Considera-se como acção o peso próprio instalado na estrutura, para um peso específico de $25kN/m^3$.

Seguidamente é ilustrado o modelo de cálculo utilizado em freeFEM++ e no SAP2000 (fig. 5.1).

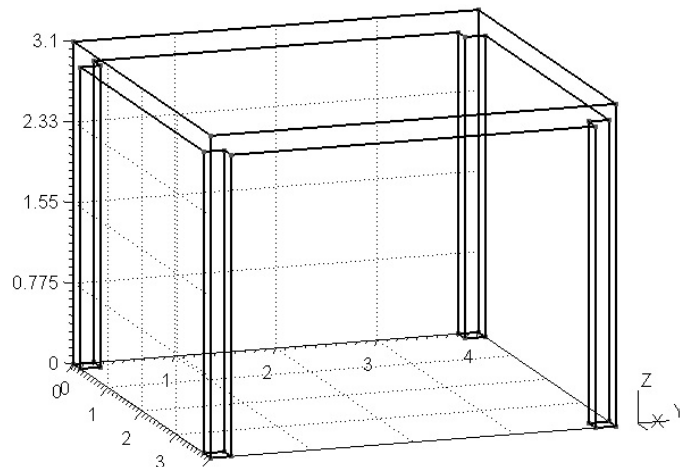


Figura 5.1: Representação do modelo de cálculo utilizado.

5.2.2 Construção da Malha e Resultados em freeFEM++

A geometria da estrutura foi concebida de uma forma faseada em GMSH, tendo sido criados em primeira instância os pilares e seguidamente foi assente a laje nos pilares de forma a ter no final o modelo desejado (fig. 5.1). A discretização da estrutura em elementos finitos (tetraedros) é gerada automaticamente pela mesma aplicação que por sua vez permite guardar a malha da mesma estrutura num ficheiro formato *Medit INRIA* com extensão **.mesh* de forma a ser possível a inserção da malha em freeFEM++.

A estrutura discretizada em GMSH (fig. 5.2) contém um total de 1423 elementos (tetraedros).

As *condições de fronteira* foram implementadas nas bases dos pilares de forma a impedir os deslocamentos em todas as direcções ($u_1=0$, $u_2=0$ e $u_3=0$).

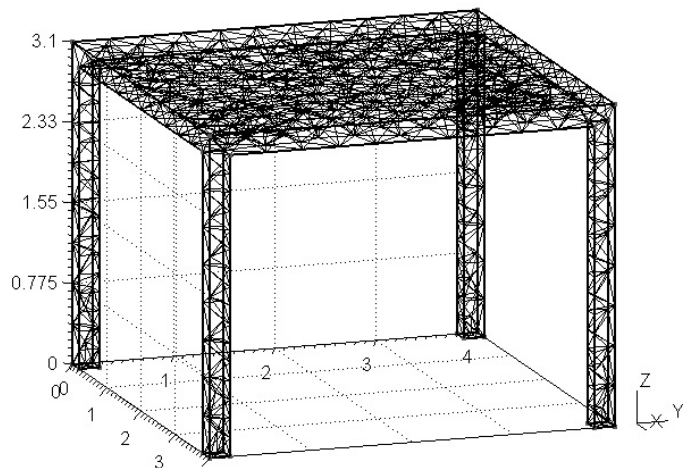


Figura 5.2: Malha discretizada, GMSH.

Após a resolução numérica do problema elástico 3D, em freeFEM++, obtemos o campo dos deslocamentos, permitindo deste modo a criação da malha deformada (fig. 5.3). Assim, obteve-se o valor máximo dos deslocamentos verticais de $0,00108m$.

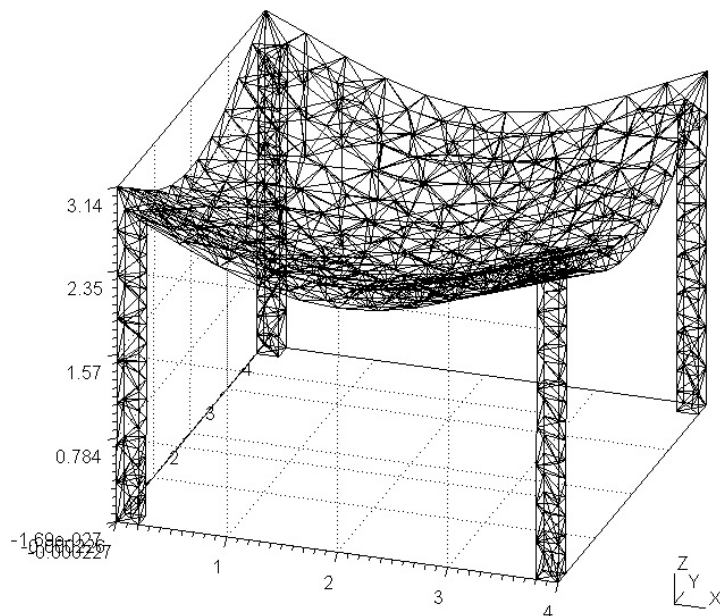


Figura 5.3: Malha deformada, GMSH.

Veja-se a fig. 5.4 com a representação do campo de deslocamentos ao longo de toda a estrutura, onde é possível verificar que as maiores deformações ocorrem a meio vão da laje (0,00108m) e a deformada geral da estrutura tem um comportamento que seria de esperar:

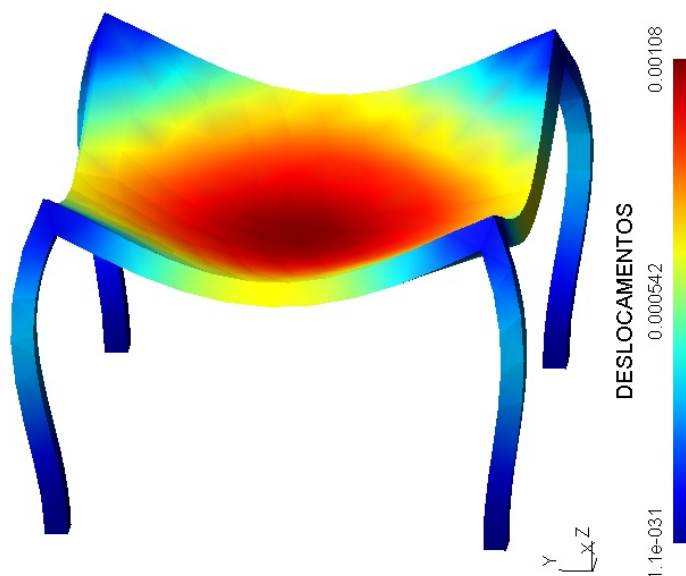


Figura 5.4: Deformada da estrutura com deslocamentos à escala 1:1000, pós-processamento em GMSH

Seguem os resultados do cálculo dos momentos flectores segundo as direcções x , y e xy , sendo espectável a existência de resultados bi-simétricos dada a simetria da estrutura.

Para os *momentos flectores* na direcção x (fig. 5.5), apresenta-se a seguinte distribuição, com $m_{x,max}^- = -4,56 \text{ kNm/m}$ (obtido no canto da laje) e um $m_{x,max}^+ = 9,3 \text{ kNm/m}$ (medido a meio vão do bordo da laje).

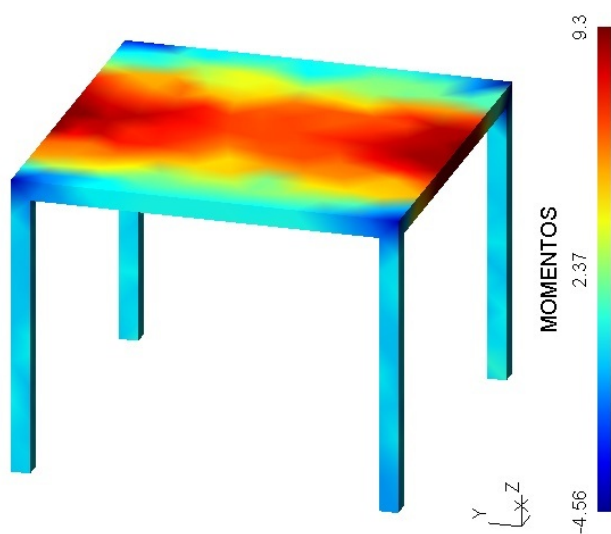


Figura 5.5: Momentos flectores segundo o eixo x , pós-processamento em GMSH

No caso dos *momentos flectores* na direcção y (fig. 5.6), apresenta-se a seguinte distribuição, com $m_{y,max}^- = -4.56 \text{ kNm/m}$ (obtido no canto da laje) e um $m_{y,max}^+ = 9.3 \text{ kNm/m}$ (medido a meio vão do bordo da laje).

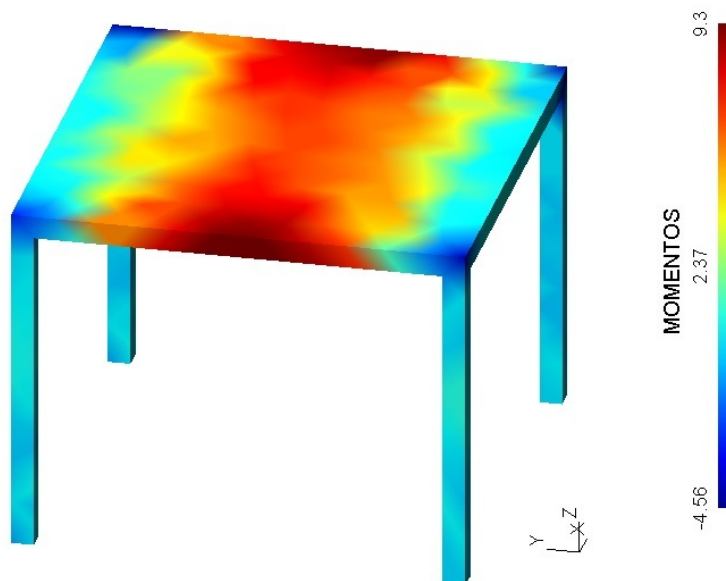


Figura 5.6: Momentos flectores segundo o eixo y , pós-processamento em GMSH

Os *momentos torsores* na direcção xy também apresentam simetria nos seus resultados, sendo o $m_{xy,max}^- = -3,2 \text{ kNm/m}$ e o $m_{xy,max}^+ = 3,2 \text{ kNm/m}$ (obtidos nos cantos da laje).

Veja-se a distribuição dos *momento torsores* na estrutura:

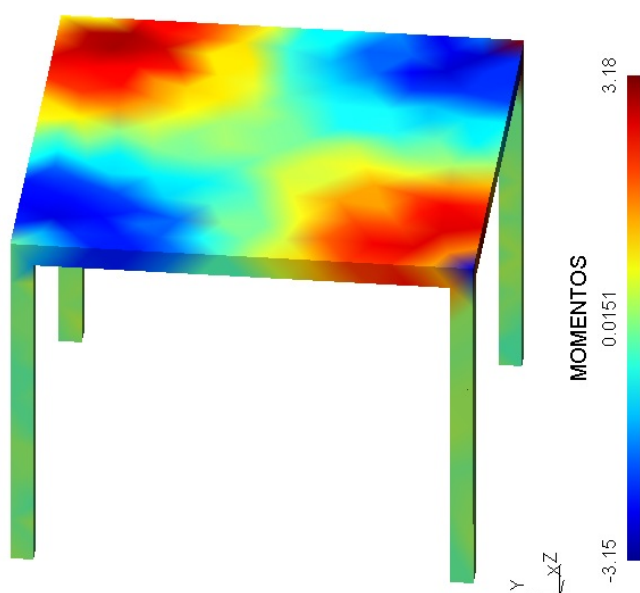


Figura 5.7: Distribuição de *momentos torsores*, pós-processamento em GMSH.

5.2.3 Construção da Malha e Resultados em SAP2000

Em SAP2000 a geometria da estrutura é concebida por etapas. Inicialmente definem-se as *grid lines* que não são nada mais que linhas espaçadas entre si de acordo com as dimensões das peças estruturais pretendidas. Seguidamente, são definidas sobre as linhas as peças estruturais (pilares e lajes), o tipo de material, a área da secção de cada elemento estrutural, a acção pretendida para análise, a discretização da estrutura e finalmente é feita a análise final através do cálculo da estrutura. Quanto à malha é definida apenas para o elemento de laje, onde podemos dividir de acordo com a discretização pretendida, tendo para este caso 40 divisões para cada um dos eixos x e y , apresentando um total de 1600 elementos.

Relativamente às condições de fronteira, foram colocados apoios fixos nas bases dos pilares, restringindo os deslocamentos nas 3 direcções x , y e z .

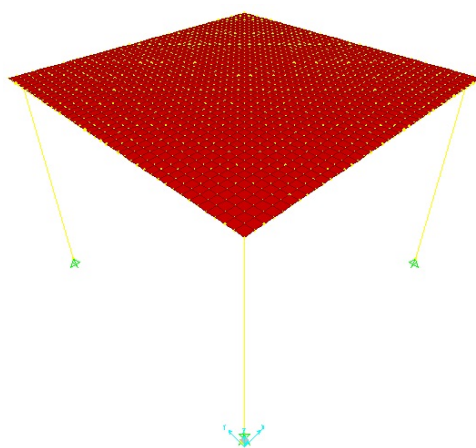


Figura 5.8: Malha discretizada, SAP2000.

Uma vez concluída a resolução do problema, é possível obter os vectores deslocamento, e assim construir a malha deformada (fig. 5.9). Obteve-se desta forma o valor máximo dos deslocamentos verticais, de 0,00115 m.

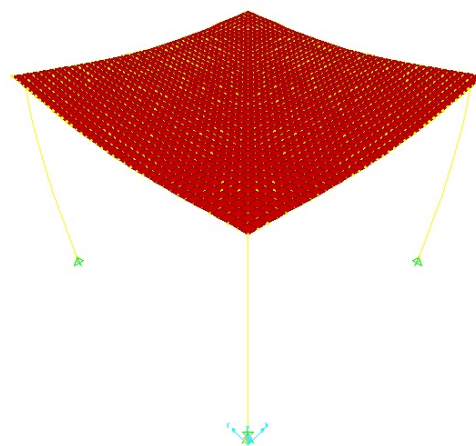


Figura 5.9: Malha deformada, SAP2000.

Veamos de seguida a distribuição dos vectores deslocamento na direcção vertical:

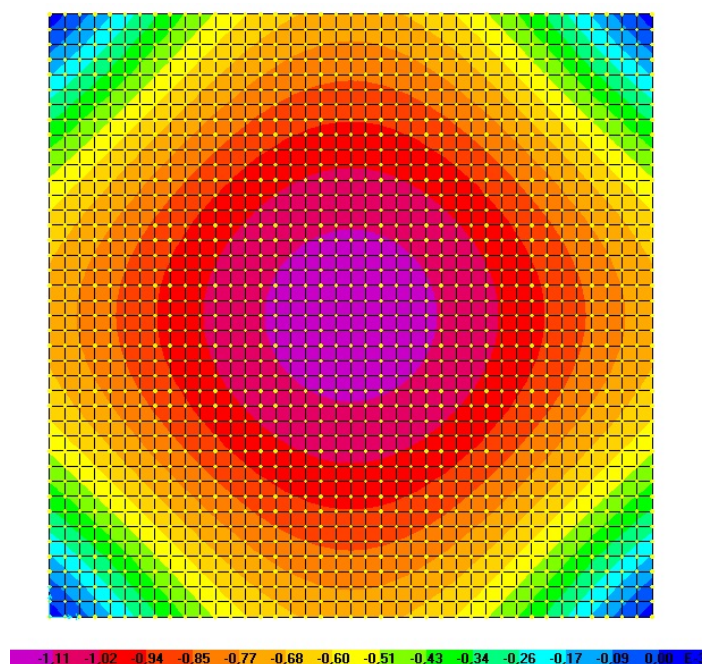


Figura 5.10: Distribuição dos vectores deslocamento na direcção vertical, SAP2000.

Relativamente aos resultados obtidos através da adaptação do modelo de laje de Reissner-Mindlin ao presente caso tridimensional, obteve-se para os momentos flectores na direcção x (fig. 5.11), a seguinte distribuição, com um $m_{x,max}^- = -4,3 \text{ kNm/m}$ (obtido no canto da laje) e $m_{x,max}^+ = 9,8 \text{ kNm/m}$ (medido a meio vão do bordo da laje).

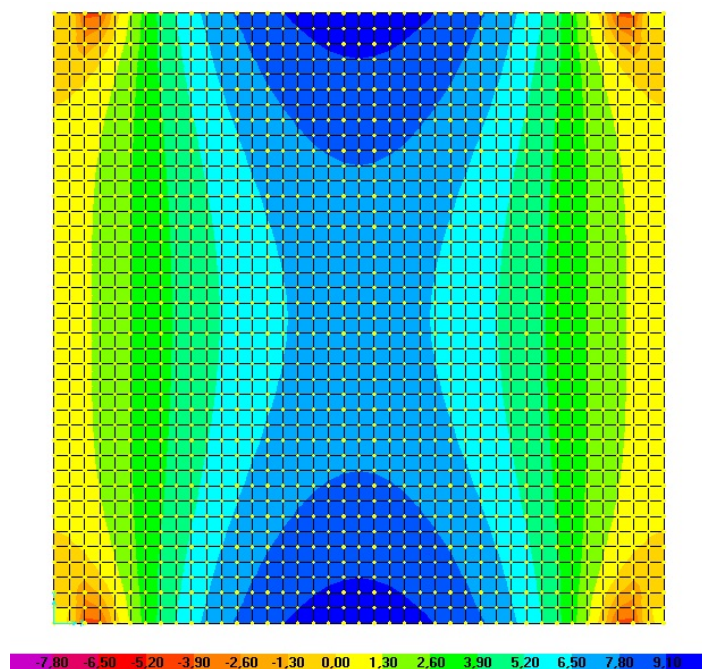


Figura 5.11: Momentos flectores segundo o eixo x , SAP2000.

No caso dos *momentos flectores* na direcção y (fig. 5.12), apresenta-se a seguinte distribuição, com $m_{y,max}^- = -4,3 \text{ kNm/m}$ (obtido no canto da laje) e um $m_{y,max}^+ = 9,8 \text{ kNm/m}$ (medido a meio vão do bordo da laje).

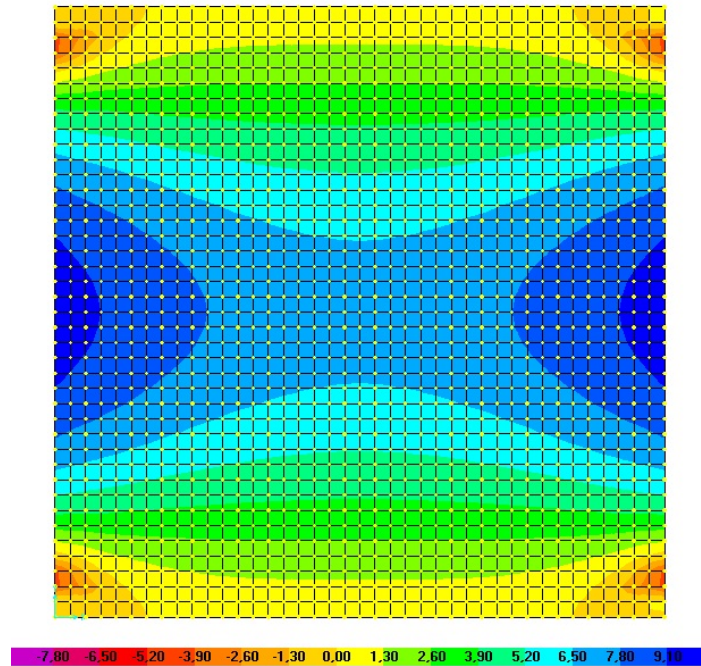


Figura 5.12: Momentos flectores segundo o eixo y , SAP2000.

Quanto aos *momentos torsores*, registam-se valores de $m_{xy,max}^- = -3,1 \text{ kNm/m}$ e um $m_{xy,max}^+ = 3,1 \text{ kNm/m}$ (obtidos nos cantos da laje).

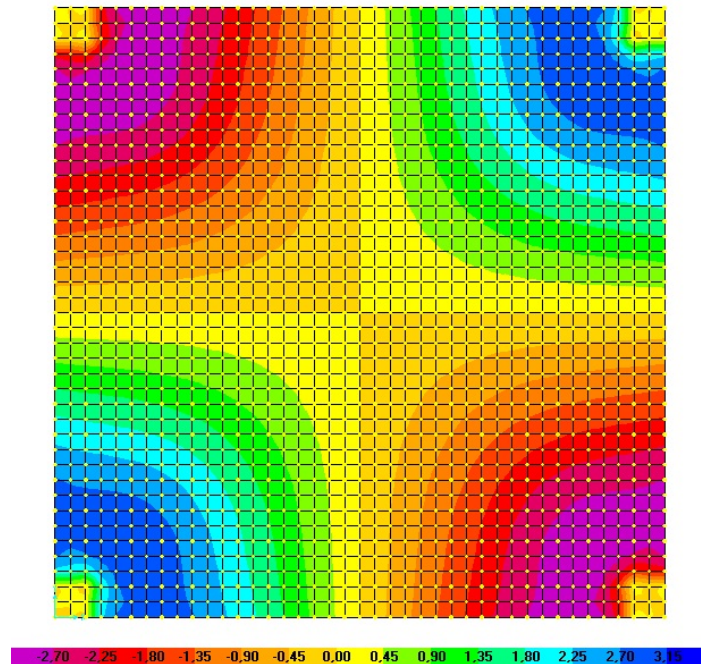


Figura 5.13: Momentos torsores segundo o eixo xy , SAP2000.

5.2.4 Comparação de Resultados

Esta secção ficou reservada para a comparação dos resultados obtidos entre as diferentes ferramentas de cálculo estrutural. Esta comparação será feita tendo em conta a determinação do erro relativo que servirá para avaliação dos resultados obtidos com o freeFEM++ em relação ao SAP2000. Assim, o erro relativo será calculado através da seguinte expressão:

$$erro(\%) = \frac{\Delta}{X} \times 100 \quad (5.1)$$

Sendo $\Delta = |X - x|$ - módulo da diferença entre o valor exacto e o valor aproximado;

X - Valor obtido pelo SAP2000;

x - Valor obtido pelo freeFEM++, usando o modelo elástico 3D.

Na tabela seguinte encontram representados os resultados do cálculo efectuado tanto em freeFEM++ como no SAP2000:

	freeFEM++	SAP2000	erro (%)
$u_3 \max (-)$	0,00108	0,00115	6,1
$m_x^+ \max$	9,3	9,8	5,1
$m_x^- \max$	-4,56	-4,3	6,0
$m_y^+ \max$	9,3	9,8	5,1
$m_y^- \max$	-4,56	-4,3	6,0
$m_{xy}^+ \max$	3,2	3,1	3,2
$m_{xy}^- \max$	-3,2	-3,1	3,2
Tempo (s)	12,5	9	-

Tabela 5.1: Tabela comparativa de resultados - 1º modelo.

Analisando a tabela 5.1, é possível constatar que os valores obtidos com o freeFEM++ podem ser considerados válidos quando comparados com os resultados obtidos com o SAP2000, uma vez que os erros máximos determinados foram inferiores a 20%. Em termos de deslocamentos, o erro resultante foi de 6,1%, enquanto que os momentos flectores máximos segundo as direcções x e y atingiram valores na ordem dos 5,1%, os momentos flectores mínimos segundo as direcções x e y apresentam um erro de 6,0% e por fim os momentos torsores em xy , sendo o parâmetro com menor percentagem de erro, atingiram 3,2%.

5.3 Análise de uma laje num sistema porticado de 4 pilares - 1 piso

5.3.1 Apresentação do modelo

O segundo caso a ser estudado baseia-se no primeiro caso tridimensional, e serve de base aos casos seguintes, sendo que para este foram implementadas vigas que servirão de apoio às lajes com vista à obtenção de uma laje apoiada num pórtico tridimensional simples.

De uma maneira geral, esta estrutura é constituída por uma laje, com vãos de 4 metros e altura de 20 cm, apoiada em 4 vigas que por sua vez irão apoiar-se nos 4 pilares dos cantos com alturas de 2.7 metros. Os pilares e vigas são constituídos por uma secção de $A = 0,20 \times 0,20m^2$ e $A = 0,20 \times 0,40m^2$, respectivamente. O material utilizado é o betão C20 / 25, com um *módulo de elasticidade* $E = 30 \times 10^6 kPa$ e um *coeficiente de Poisson* $\nu = 0,16$.

Seguidamente é ilustrado o modelo de cálculo utilizado em freeFEM++ e no SAP2000 (fig. 5.14).

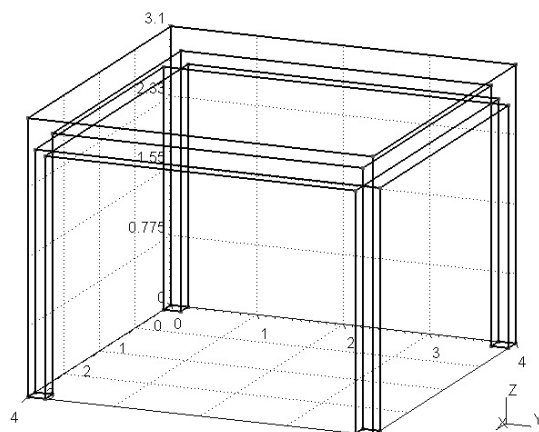


Figura 5.14: Representação do modelo de cálculo utilizado.

5.3.2 Construção da Malha e Resultados em freeFEM++

Uma vez que este caso é baseado no primeiro, a construção da geometria desta estrutura foi também faseada em GMSH, tendo sido criados em primeira instância os pilares, vigas e por fim foi assente a laje sobre as vigas de forma a ter no final o modelo desejado (fig. 5.14). A discretização da estrutura em elementos finitos (tetraedros) é gerada automaticamente pela mesma aplicação que por sua vez permite guardar a malha da mesma estrutura num ficheiro formato *Medit INRIA* com extensão **.mesh* de forma a ser possível a inserção da malha em freeFEM++. A estrutura discretizada em GMSH (fig. 5.15) contém um total de 1218 elementos (tetraedros).

As *condições de fronteira* foram implementadas nas bases dos pilares de forma a impedir os deslocamentos em todas as direcções ($u_1=0$, $u_2=0$ e $u_3=0$).

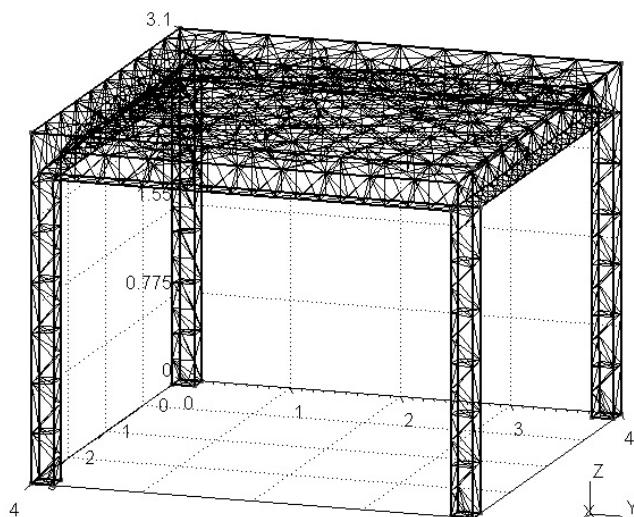


Figura 5.15: Malha discretizada, GMSH.

Após a resolução numérica do problema elástico 3D, em freeFEM++, obtemos o campo dos deslocamentos, permitindo deste modo a criação da malha deformada fig. 5.16. Assim, obteve-se o valor máximo dos deslocamentos verticais de $0,000638m$.

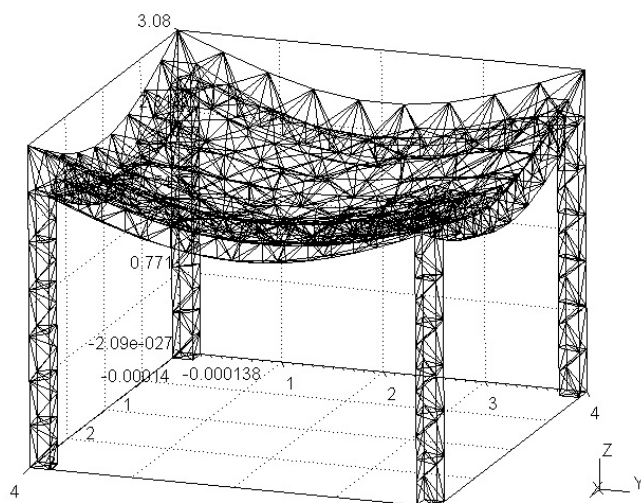


Figura 5.16: Malha deformada, GMSH.

Veja-se o campo de deslocamentos ao longo de toda a estrutura:

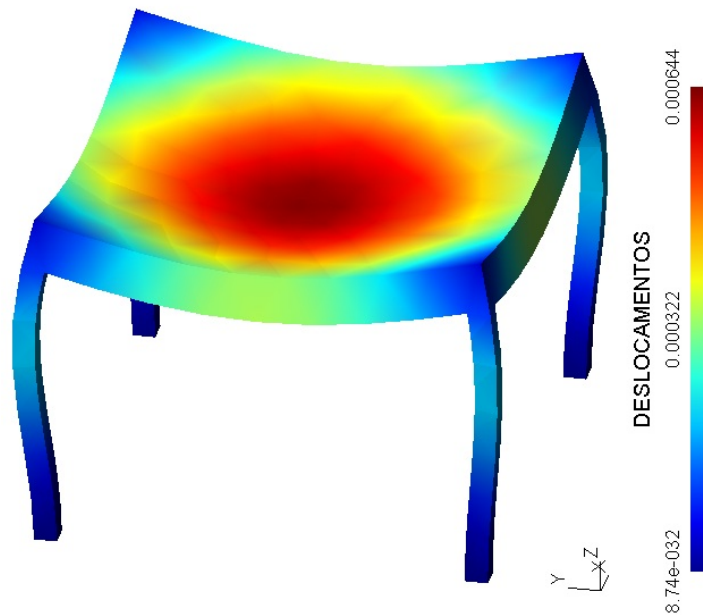


Figura 5.17: Deformada da estrutura com deslocamentos à escala 1:1000, pós-processamento em GMSH

Seguem os resultados do cálculo dos momentos flectores segundo as direcções x , y e xy , sendo espectável a existência de resultados bi-simétricos dada a simetria da estrutura.

Para os *momentos flectores* da laje na direcção x (fig. 5.5), apresenta-se a seguinte distribuição, com $m_{x,min} = 0,082 \text{ kNm/m}$ (medido no canto da laje) e um $m_{x,max} = 4,60 \text{ kNm/m}$ (obtido no centro da laje).

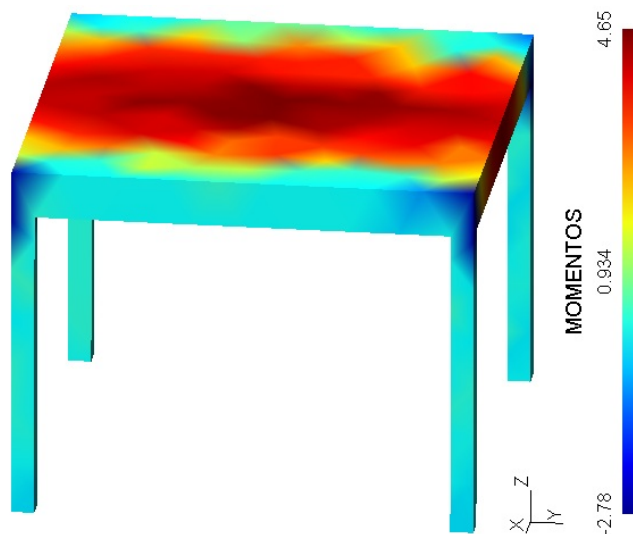


Figura 5.18: Momentos flectores segundo o eixo x , pós-processamento em GMSH

No caso dos *momentos flectores* na direcção y da laje (fig. 5.6), apresenta-se a seguinte distribuição, com $m_{y,min} = 0,082 \text{ kNm/m}$ (medido no canto da laje) e um $m_{y,max} = 4,60 \text{ kNm/m}$ (obtido no centro da laje).

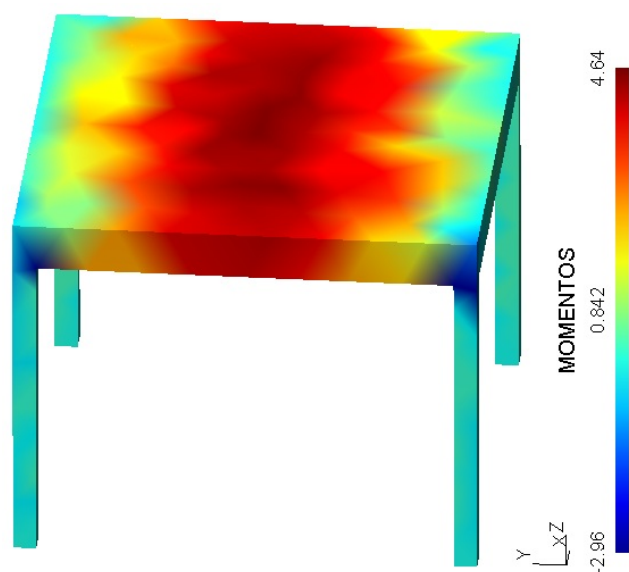


Figura 5.19: Momentos flectores segundo o eixo y , pós-processamento em GMSH

Os *momentos torsores* na direcção xy da laje também apresentam simetria nos seus resultados, sendo o $m_{xy,max}^- = -0,056 \text{ kNm/m}$ e o $m_{xy,max}^+ = 0,056 \text{ kNm/m}$ (obtidos nos cantos da laje).

Veja-se a distribuição dos *momento torsores* na estrutura:

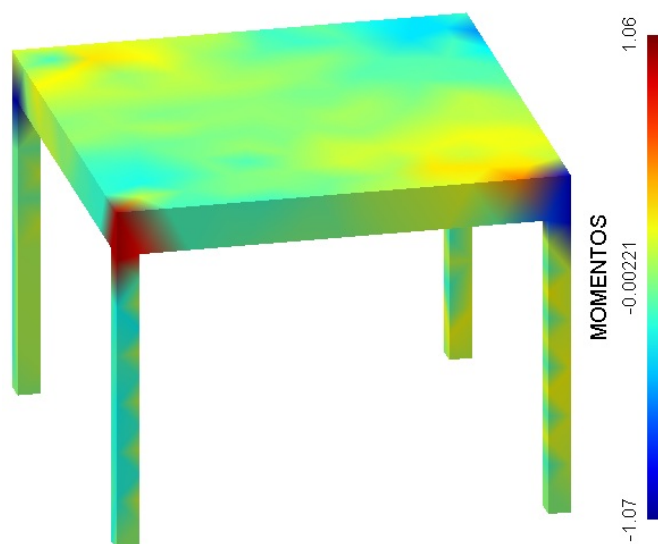


Figura 5.20: Distribuição de *momentos torsores*, pós-processamento em GMSH.

5.3.3 Construção da Malha e Resultados em SAP2000

Em SAP2000 a geometria da estrutura é semelhante à geometria do modelo anterior, com a diferença deste possuir vigas onde apoiam as lajes. Assim, definem-se da mesma forma as peças estruturais (pilares, vigas e lajes), o tipo de material, a área da secção de cada elemento estrutural, a acção pretendida para análise, a discretização da estrutura e por fim é feita a análise final através do cálculo da estrutura. Quanto à malha é definida apenas para o elemento de laje, onde podemos dividir de acordo com a discretização pretendida, neste caso, assemelhando o máximo possível, em termos de número de elementos, da malha gerada em GMSH. As condições de fronteira também foram instaladas nas bases dos pilares, simulando apoios fixos que restringem os deslocamentos nas 3 direcções x, y e z.

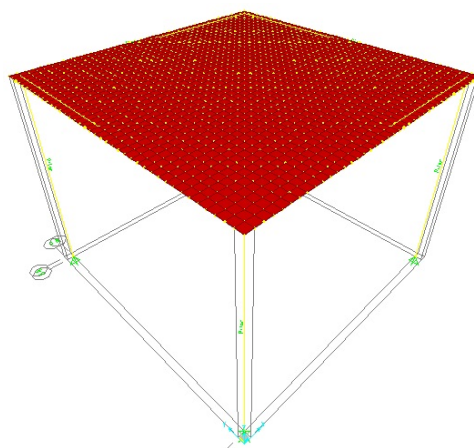


Figura 5.21: Malha discretizada, SAP2000.

Uma vez concluída a resolução do problema, é possível obter os vectores deslocamento, e assim construir a malha deformada (fig. 5.22). Obteve-se desta forma o valor máximo dos deslocamentos verticais, de 0,00066 m.

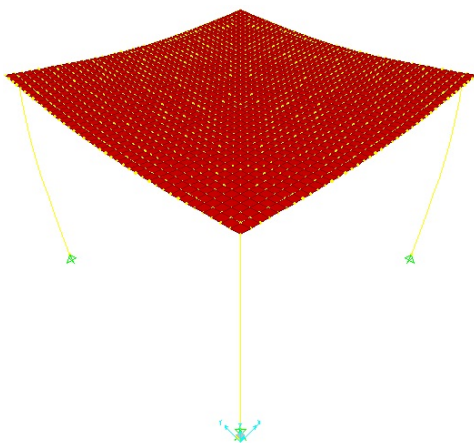


Figura 5.22: Malha deformada, SAP2000.

Veamos de seguida a distribuição dos vectores deslocamento na direcção vertical:

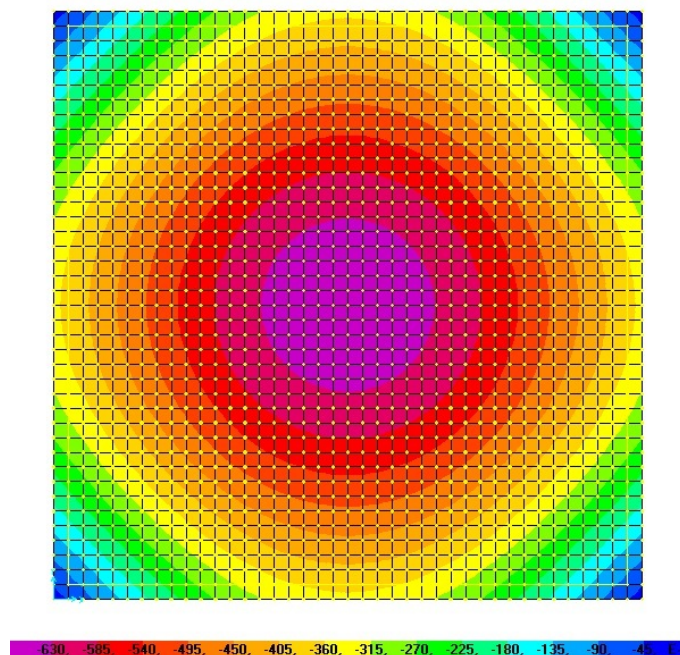


Figura 5.23: Distribuição dos vectores deslocamento na direcção vertical, SAP2000.

Relativamente aos resultados obtidos através da adaptação do modelo de laje de Reissner-Mindlin ao presente caso tridimensional, obteve-se para os momentos flectores na direcção x (fig. 5.11), a seguinte distribuição, com um $m_{x,min} = 0,18 \text{ kNm/m}$ (medido no canto da laje) e $m_{x,max} = 4,7 \text{ kNm/m}$ (obtido no centro da laje).

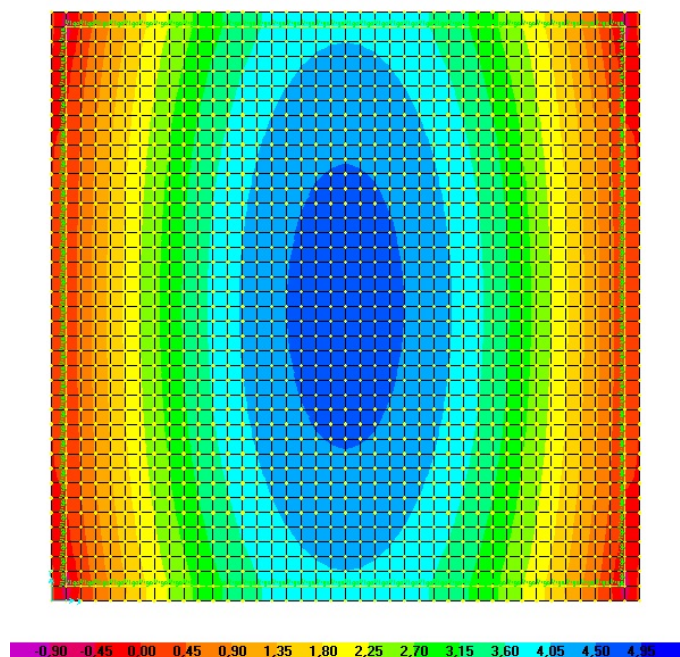


Figura 5.24: Momentos flectores segundo o eixo x , SAP2000.

No caso dos *momentos flectores* na direcção y (fig. 5.12), apresenta-se a seguinte distribuição, com $m_{y,min} = 0,18 \text{ kNm/m}$ (medido no canto da laje) e um $m_{y,max}^+ = 4,7 \text{ kNm/m}$ (obtido no centro da laje).

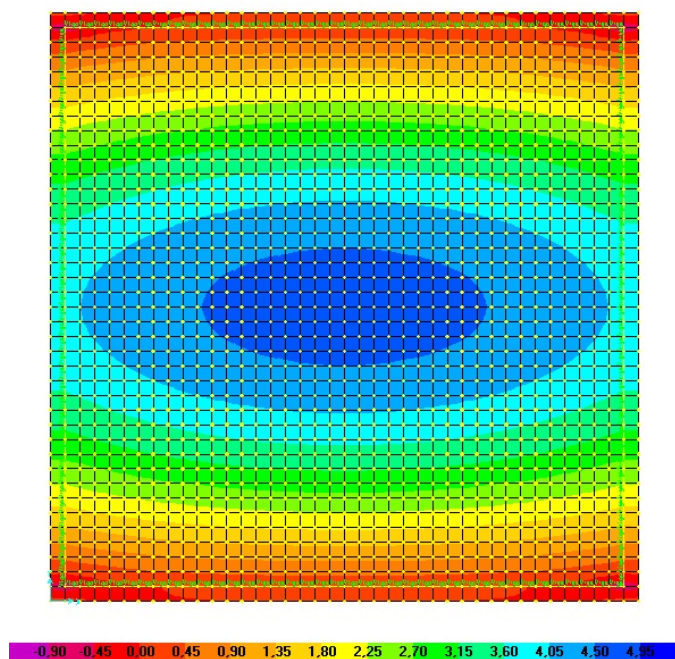


Figura 5.25: Momentos flectores segundo o eixo y , SAP2000.

Quanto aos *momentos torsores*, registam-se valores de $m_{xy,max}^- = -0,06 \text{ kNm/m}$ e um $m_{xy,max}^+ = 0,06 \text{ kNm/m}$ (obtidos nos cantos da laje).

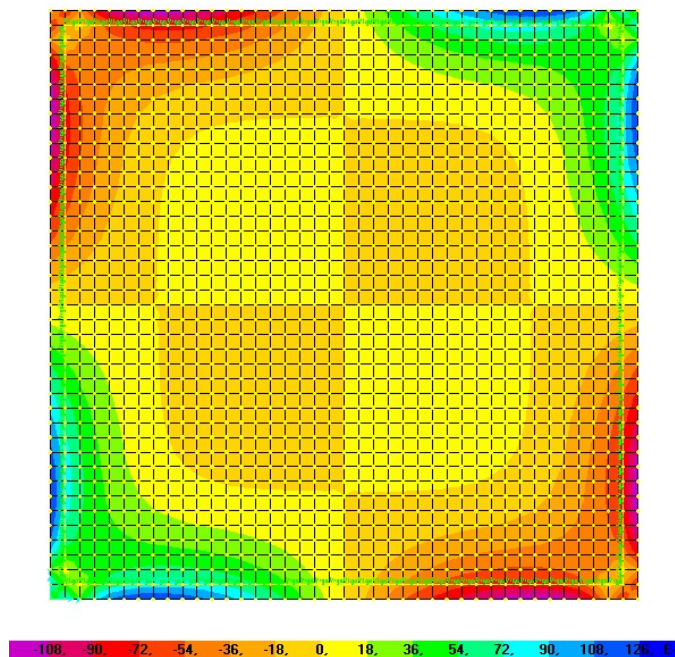


Figura 5.26: Momentos torsores segundo o eixo xy , SAP2000.

5.3.4 Comparação de Resultados

Esta secção ficou reservada para a comparação dos resultados obtidos entre as diferentes ferramentas de cálculo estrutural. Esta comparação será feita tendo em conta a determinação do erro relativo, conforme vimos em 5.2.4, que servirá para avaliação dos resultados obtidos com o freeFEM++ em relação ao SAP2000.

Na tabela seguinte encontram representados os resultados do cálculo efectuado tanto em freeFEM++ como no SAP2000:

	freeFEM++	SAP2000	erro (%)
$u_3 \max(-)$	0,000638	0,00066	3,3
$m_x^+ \max$	4,60	4,7	2,1
$m_x \min$	0,082	0,18	54,4
$m_y^+ \max$	4,60	4,7	2,1
$m_y \min$	0,082	0,18	54,4
$m_{xy}^+ \max$	0,056	0,06	6,7
$m_{xy}^- \min$	-0,056	-0,06	6,7
Tempo (s)	8	8	-

Tabela 5.2: Tabela comparativa de resultados - 2º modelo.

Quanto à leitura da tabela 5.2, pode dizer-se que o modelo construído em *freeFEM++* alcançou os resultados esperados ao nível dos deslocamentos com erros inferiores a 4%. Os *momentos flectores* máximos determinados segundo as duas direcções (x e y) (obtidos no centro da laje), e os momentos torsores segundo xy apresentam erros na ordem de 2,1% e 6,7%, respectivamente. O mesmo não acontece no caso dos *momentos flectores* mínimos segundo as direcções x e y (medidos no canto da laje). Apesar do modelo ter sido construído com particular atenção à qualidade da malha de elementos finitos, quando se trata de comparar *momentos flectores* mínimos, segundo as direcções x e y , os resultados disparam para erros na ordem de 54,4%.

5.4 Análise de lajes fungiformes apoiadas em pilares - 3 pisos

5.4.1 Apresentação do modelo

O modelo que se segue envolve um acréscimo na complexidade do modelo concebido em 5.2, aumentando deste modo o número de pisos para 3. A geometria da estrutura terá a mesma configuração, a discretização em elementos finitos também será feita através do mesmo método com a finalidade de haver uma boa base de comparação entre o freeFEM++ e o SAP2000.

Assim sendo, a estrutura será composta por 3 pisos, com lajes de dimensões $6m \times 6m \times 0,20m$. Os pilares terão uma secção de $A = 0,30 \times 0,30m^2$. O material utilizado é o betão C20 / 25, com um *módulo de elasticidade* $E = 30 \times 10^6 kPa$ e um *coeficiente de Poisson* $\nu = 0,16$.

Veja-se o modelo de cálculo utilizado tanto em freeFEM++ e como no SAP2000 (fig. 5.27):

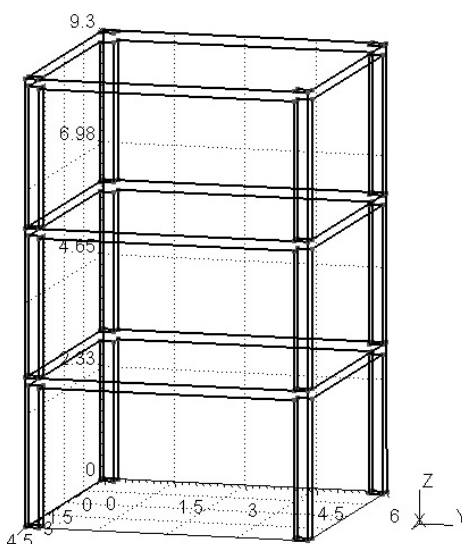


Figura 5.27: Representação do modelo de cálculo utilizado.

5.4.2 Construção da Malha e Resultados em freeFEM++

Os modelos anteriores foram desenvolvidos em GMSH por etapas de forma a permitir alterações na geometria da estrutura com relativa facilidade. Assim, aproveitou-se o modelo estudado em 5.2 para a criação deste, sendo que a discretização da estrutura em elementos finitos (tetraedros) será gerada de forma automática pelo GMSH, que possibilita o registo da estrutura discretizada num ficheiro com formato *Medit INRIA* e extensão **.mesh* de forma a ser possível a leitura da malha com o freeFEM++. A estrutura discretizada em GMSH (fig. 5.28) contém um total de 10441 tetraedros.

As *condições de fronteira* foram implementadas nas bases dos pilares de forma a impedir os deslocamentos em todas as direcções ($u_1=0$, $u_2=0$ e $u_3=0$).

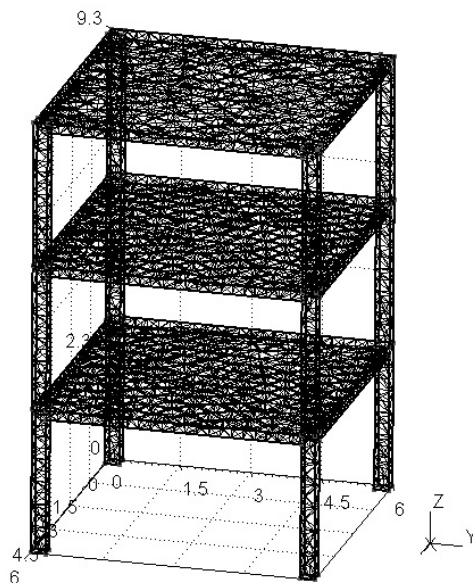


Figura 5.28: Malha discretizada, GMSH.

Após a resolução numérica do problema elástico 3D, em freeFEM++, obtemos o campo dos deslocamentos, permitindo deste modo a criação da malha deformada (fig. 5.29). Assim, obteve-se o valor máximo dos deslocamentos verticais de $0,00389m$ no último piso da estrutura.

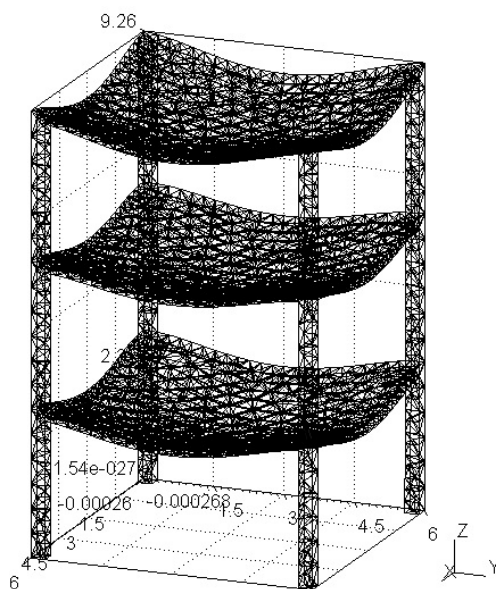


Figura 5.29: Malha deformada, GMSH.

Veja-se a fig. 5.30 com a representação do campo de deslocamentos ao longo de toda a estrutura, onde é possível verificar que as maiores deformações ocorrem a meio vão da laje (0,00389m) do último piso e a deformada geral da estrutura tem um comportamento que seria de esperar:

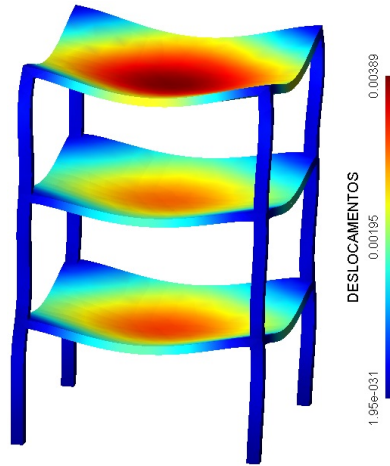


Figura 5.30: Deformada da estrutura com deslocamentos à escala 1:250, pós-processamento em GMSH

Seguidamente, vamos verificar os resultados dos *momentos flectores* segundo as direcções x , y e xy , sendo espectável a existência de resultados bi-simétricos dada a simetria da estrutura.

Para os *momentos flectores* na direcção x (fig. 5.5), apresenta-se a seguinte distribuição, com $m_{x,max}^- = -35,76 \text{ kNm/m}$ e um $m_{x,max}^+ = 15,76 \text{ kNm/m}$. O valor do momento positivo obtém-se a meio vão do bordo da laje do último piso enquanto que o momento negativo é obtido na zona dos pilares do segundo piso (no canto da laje).

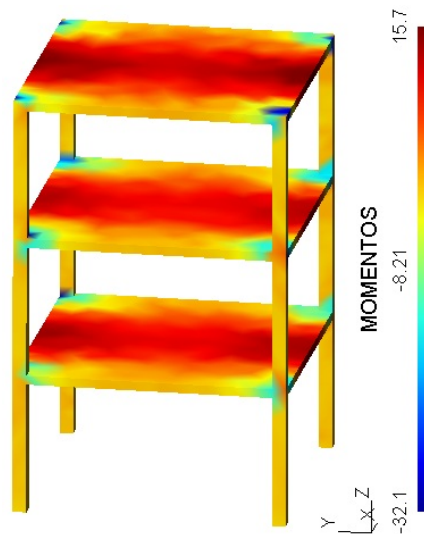


Figura 5.31: Momentos flectores segundo o eixo x , pós-processamento em GMSH

No caso dos *momentos flectores* na direcção y (fig. 5.6), apresenta-se a seguinte distribuição, com $m_{y,max}^- = -35,76 \text{ kNm/m}$ e um $m_{y,max}^+ = 15,76 \text{ kNm/m}$. Da mesma forma que os momentos determinados segundo o eixo de x , na direcção yy os valores máximos foram obtidos a meio vão do bordo da laje do último e os mínimos foram obtidos na zona do pilar do segundo piso (canto da laje).

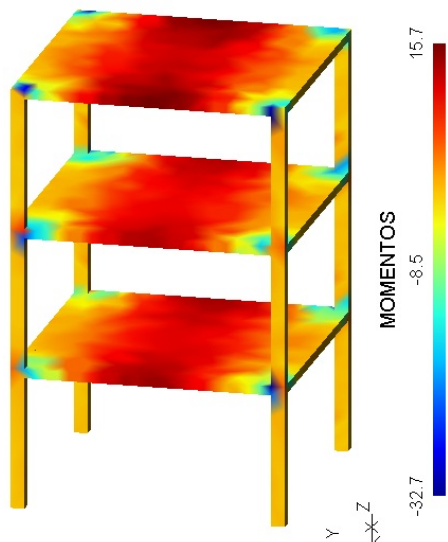


Figura 5.32: Momentos flectores segundo o eixo y , pós-processamento em GMSH

Os *momentos torsores* na direcção xy também apresentam simetria nos seus resultados, sendo o $m_{xy,max}^- = -20,5 \text{ kNm/m}$ e o $m_{xy,max}^+ = 20,5 \text{ kNm/m}$. Assim como os valores mínimos dos momentos flectores obtidos segundo os eixos x e y , os momentos torsores foram obtidos no segundo piso, na zona do pilar.

Veja-se a distribuição dos *momento torsores* na estrutura:

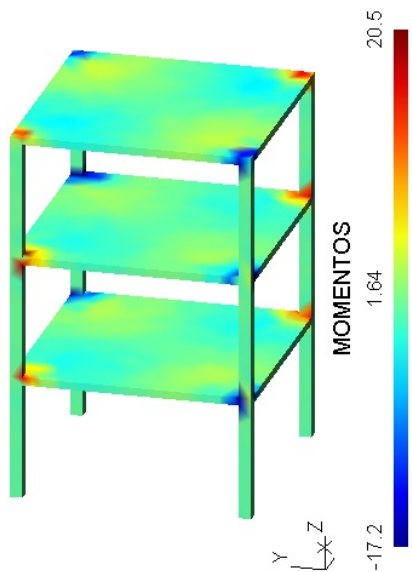


Figura 5.33: Distribuição de *momentos torsores*, pós-processamento em GMSH.

5.4.3 Construção da Malha e Resultados em SAP2000

Em SAP2000 a geometria da estrutura é concebida por etapas. Inicialmente definem-se as *grid lines* que não são nada mais que linhas espaçadas entre si de acordo com as dimensões das peças estruturais pretendidas. Seguidamente, são definidas sobre as linhas as peças estruturais (pilares e lajes), o tipo de material, a área da secção de cada elemento estrutural, a acção pretendida para análise, a discretização da estrutura e finalmente é feita a análise final através do cálculo da estrutura. Quanto à malha é definida apenas para o elemento de laje, onde podemos dividir de acordo com a discretização pretendida, tendo para este caso 40 divisões para cada um dos eixos x e y , apresentando um total de 1600 elementos.

Relativamente às condições de fronteira, foram colocados apoios fixos nas bases dos pilares, restringindo os deslocamentos nas 3 direcções x , y e z .

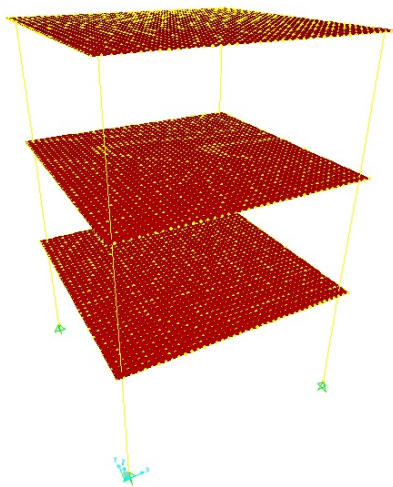


Figura 5.34: Malha discretizada, SAP2000.

Uma vez concluída a resolução do problema, é possível obter os vectores deslocamento, e assim construir a malha deformada (fig. 5.35). Obteve-se desta forma o valor máximo dos deslocamentos verticais, de 0,0038 m.

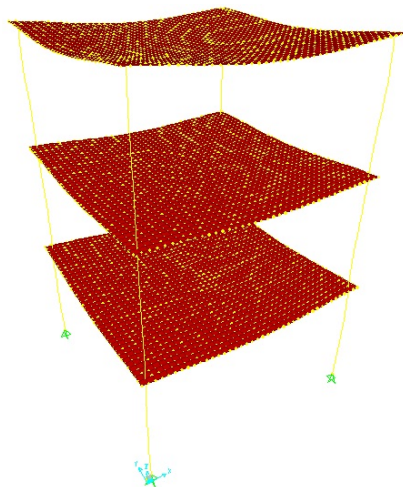


Figura 5.35: Malha deformada, SAP2000.

Vejam os resultados da distribuição dos vectores deslocamento na direcção vertical no piso mais desfavorável (3º piso):

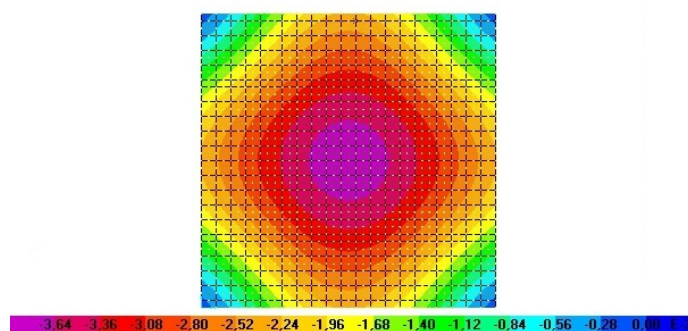


Figura 5.36: Distribuição dos vectores deslocamento na direcção vertical, SAP2000.

Relativamente aos resultados obtidos através da adaptação do modelo de laje de Reissner-Mindlin ao presente caso tridimensional, obteve-se para os momentos flectores na direcção x (fig. 5.37 e 5.38), a seguinte distribuição, com um $m_{x,max}^- = -42,54 \text{ kNm/m}$ (obtido na zona dos pilares do segundo piso) e $m_{x,max}^+ = 15,27 \text{ kNm/m}$ (medido a meio vão do bordo da laje do último piso).

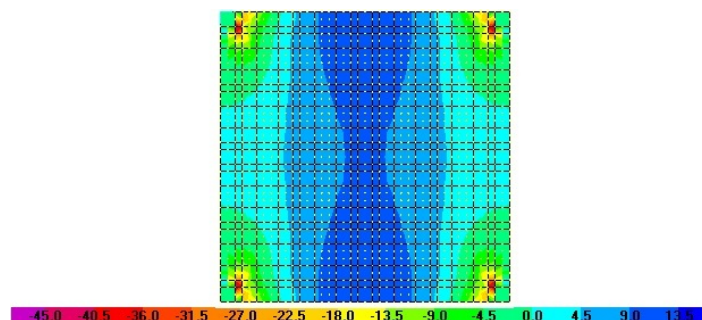


Figura 5.37: Momentos flectores mínimos segundo o eixo x (piso 2), SAP2000.

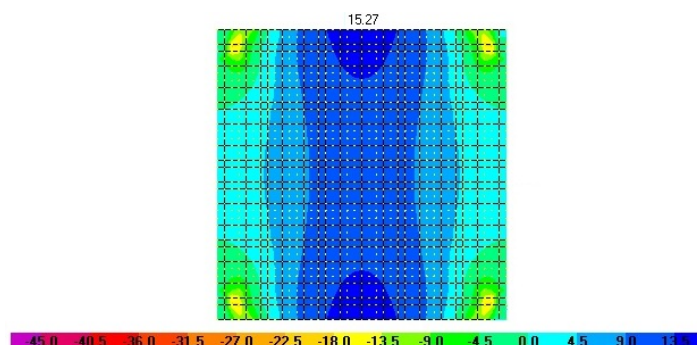


Figura 5.38: Momentos flectores máximos segundo o eixo x (piso 3), SAP2000.

No caso dos *momentos flectores* na direcção y (fig. 5.39 e 5.40), apresenta-se a seguinte distribuição, com $m_{y,max}^- = -42,54 \text{ kNm/m}$ (obtido na zona dos pilares do segundo piso) e $m_{y,max}^+ = 15,27 \text{ kNm/m}$ (medido a meio vão do bordo da laje do último piso).

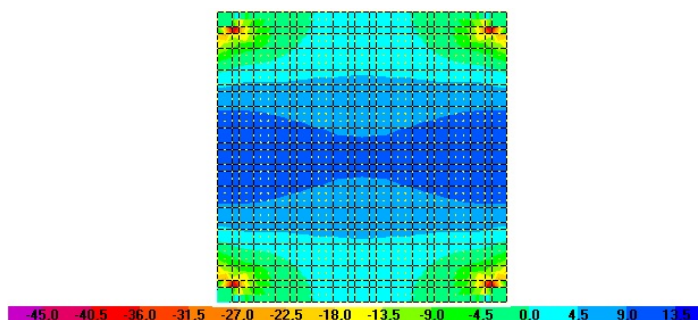


Figura 5.39: Momentos flectores mínimos segundo o eixo y (piso 2), SAP2000.

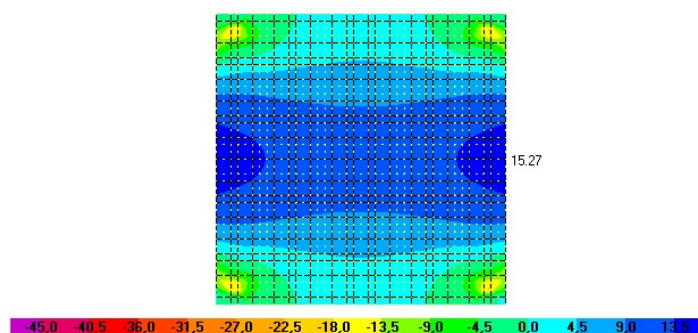


Figura 5.40: Momentos flectores máximos segundo o eixo y (piso 3), SAP2000.

Quanto aos *momentos torsores*, registam-se valores de $m_{xy,max}^- = -22,72 \text{ kNm/m}$ e um $m_{xy,max}^+ = 22,72 \text{ kNm/m}$ (medidos no piso 2, zona do pilar).

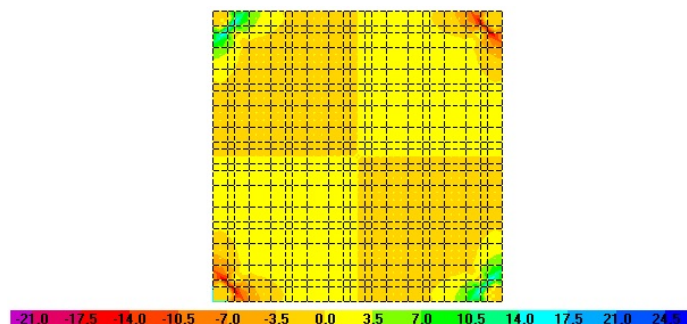


Figura 5.41: Momentos torsores segundo o eixo xy , SAP2000.

5.4.4 Comparação de Resultados

Na tabela seguinte serão comparados os diferentes resultados obtidos tendo em conta os diferentes métodos de cálculo:

	freeFEM++	SAP2000	erro (%)
$u_3 P_1 \max(-)$	0,00316	0,00316	0,0
$u_3 P_2 \max(-)$	0,00299	0,0028	6,8
$u_3 P_3 \max(-)$	0,00389	0,0038	2,4
$m_x^+ \max$	15,76	15,27	3,2
$m_x^- \max$	-35,76	-42,54	15,9
$m_y^+ \max$	15,76	15,27	3,2
$m_y^- \max$	-35,76	-42,54	15,9
$m_{xy}^+ \max$	20,5	22,72	9,8
$m_{xy}^- \max$	-20,5	-22,72	9,8
Tempo (s)	99	27	-

Tabela 5.3: Tabela comparativa de resultados - 3º modelo

A análise da tabela 5.3 permite constatar que os erros obtidos demonstram compatibilidade entre os diferentes parâmetros determinados, apresentando erros na ordem dos 0% a 15,9%. O erro máximo corresponde aos momentos negativos em ambas as direcções, devendo-se fundamentalmente à qualidade da malha de elementos finitos que por sua vez revelou ser extremamente importante na determinação dos esforços.

5.5 Análise de lajes num sistema porticado - 3 pisos

5.5.1 Apresentação do modelo

Neste modelo iremos estudar o comportamento de lajes com espessura de 20 cm, apoiadas em pilares e vigas, numa estrutura de 3 pisos com pilares de 2.7 metros. A configuração deste modelo terá como base o modelo estudado em 5.3, sendo que para este modelo a laje terá vãos de $6m \times 6m$, pilares e vigas com áreas de secção $A = 0,30 \times 0,30m^2$ e $A = 0,20 \times 0,40m^2$, respectivamente. O material utilizado é o betão C20 / 25, com um *módulo de elasticidade* $E = 30 \times 10^6 kPa$ e um *coeficiente de Poisson* $\nu = 0,16$.

De seguida podemos ver o modelo de cálculo utilizado para a análise com os diferentes programas (freeFEM++ e SAP2000):

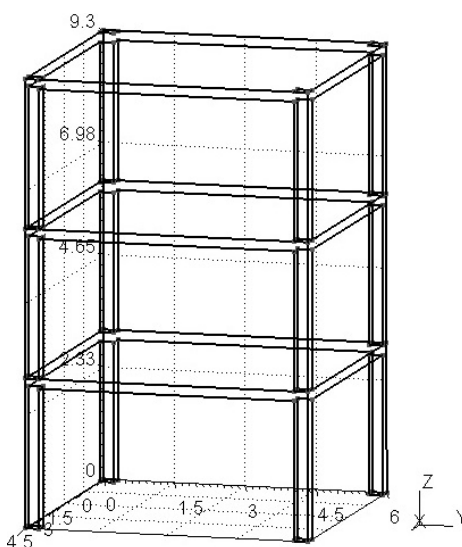


Figura 5.42: Representação do modelo de cálculo utilizado.

5.5.2 Construção da Malha e Resultados em freeFEM++

A construção da estrutura de 3 pisos foi feita tendo como alicerce a estrutura reproduzida em 5.3, distinguindo-se desta em termos de número de pisos. A discretização da estrutura em elementos finitos (tetraedros) é obtida através da utilização do GMSH e a malha de elementos finitos será guardada num ficheiro com formato *Medit INRIA* e extensão **.mesh* de forma a ser possível a leitura da malha com o freeFEM++. A estrutura discretizada em GMSH (fig. 5.43) contém um total de 7425 tetraedros.

As *condições de fronteira* foram implementadas nas bases dos pilares de forma a impedir os deslocamentos em todas as direcções ($u_1=0$, $u_2=0$ e $u_3=0$).

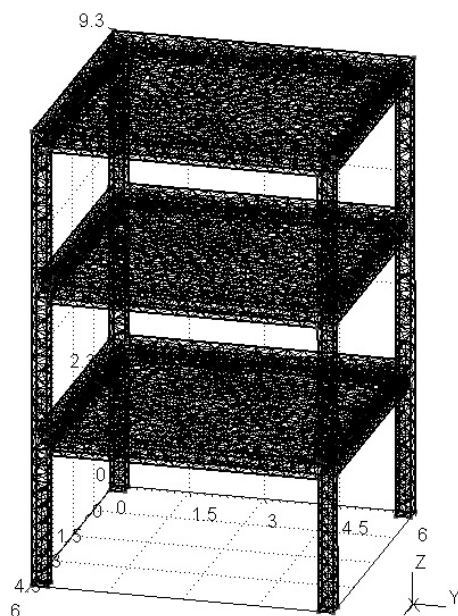


Figura 5.43: Malha discretizada, GMSH.

Após a resolução numérica do problema elástico 3D, em freeFEM++, obtemos o campo dos deslocamentos, permitindo deste modo a criação da malha deformada (fig. 5.44). Assim, obteve-se o valor máximo dos deslocamentos verticais de $0,00254m$ no último piso da estrutura.

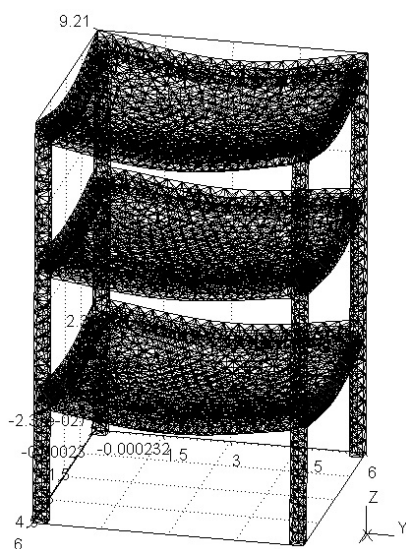


Figura 5.44: Malha deformada, GMSH.

Veja-se a fig. 5.45 com a representação do campo de deslocamentos ao longo de toda a estrutura, onde é possível verificar que as maiores deformações ocorrem a meio vão da laje (0,00254m) do último piso e a deformada geral da estrutura tem um comportamento que seria de esperar:

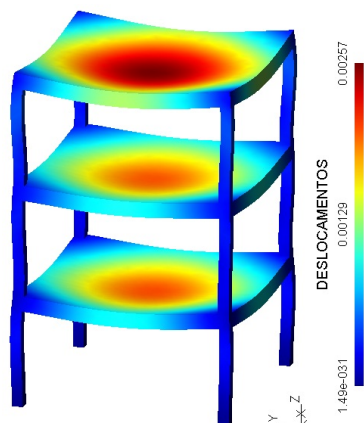


Figura 5.45: Deformada da estrutura com deslocamentos à escala 1:250, pós-processamento em GMSH

Seguidamente, vamos verificar os resultados dos *momentos flectores* segundo as direcções x , y e xy , sendo espectável a existência de resultados simétricos dada a simetria da estrutura.

Para os *momentos flectores* na direcção x (fig. 5.5), apresenta-se a seguinte distribuição, com $m_{x,max}^- = -2,78 \text{ kNm/m}$ e um $m_{x,max}^+ = 8,47 \text{ kNm/m}$. O valor do momento positivo obtém-se no centro da laje do último piso enquanto que o momento negativo é obtido no canto da laje do primeiro piso.

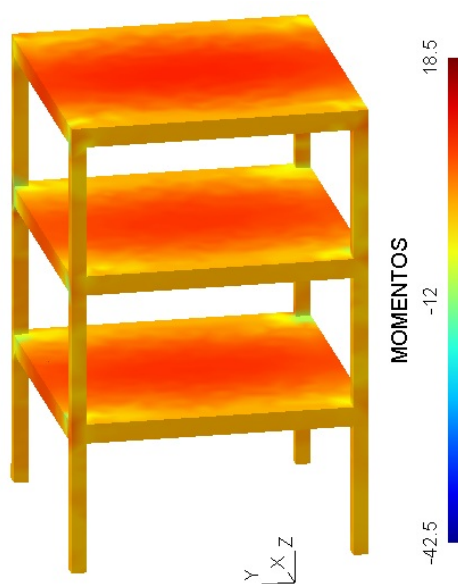


Figura 5.46: Momentos flectores segundo o eixo x , pós-processamento em GMSH

No caso dos *momentos flectores* na direcção y (fig. 5.6), apresenta-se a seguinte distribuição, com $m_{y,max}^- = -2,78 \text{ kNm/m}$ e um $m_{y,max}^+ = 8,47 \text{ kNm/m}$. Da mesma forma que os momentos determinados segundo o eixo de x , na direcção yy os valores máximos foram obtidos no centro da laje do último e os mínimos foram obtidos no canto da laje do primeiro piso.

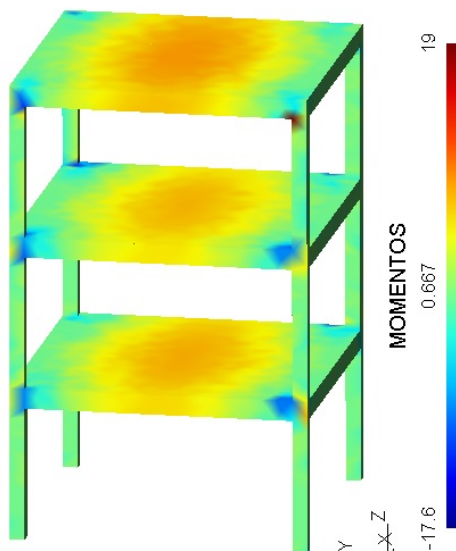


Figura 5.47: Momentos flectores segundo o eixo y , pós-processamento em GMSH

Os *momentos torsores* na direcção xy também apresentam simetria nos seus resultados, sendo o $m_{xy,max}^- = -2,30 \text{ kNm/m}$ e o $m_{xy,max}^+ = 2,30 \text{ kNm/m}$. Os valores dos momentos torsores foram obtidos no segundo piso, no canto da laje.

Veja-se a distribuição dos *momento torsores* na estrutura:

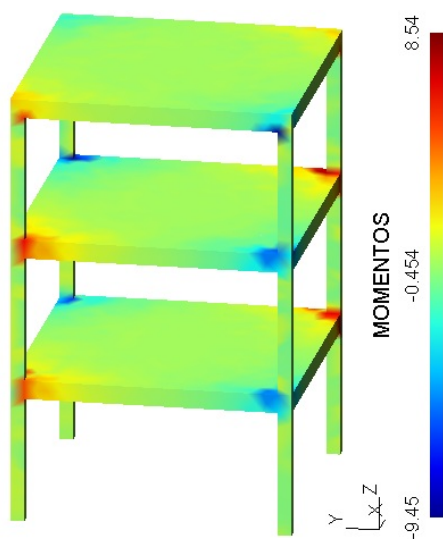


Figura 5.48: Distribuição de *momentos torsores*, pós-processamento em GMSH.

5.5.3 Construção da Malha e Resultados em SAP2000

Da mesma forma que em freeFEM++, aproveitou-se a estrutura concebida em 5.3 para o desenvolvimento do edifício de 3 pisos. Em SAP2000 a geometria da estrutura é concebida por etapas. Inicialmente definem-se as *grid lines* que não são nada mais que linhas espaçadas entre si de acordo com as dimensões das peças estruturais pretendidas. Seguidamente, são definidas sobre as linhas as peças estruturais (pilares, vigas e lajes), o tipo de material, a área da secção de cada elemento estrutural, a acção pretendida para análise, a discretização da estrutura e finalmente é feita a análise final através do cálculo da estrutura. Quanto à malha é definida apenas para o elemento de laje, onde podemos dividir de acordo com a discretização pretendida, tendo para este caso 40 divisões para cada um dos eixos x e y , apresentando um total de 1600 elementos.

Relativamente às condições de fronteira, foram colocados apoios fixos nas bases dos pilares, restringindo os deslocamentos nas 3 direcções x , y e z .

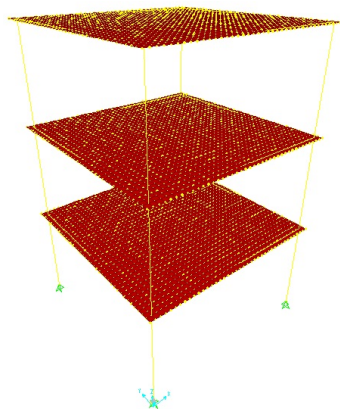


Figura 5.49: Malha discretizada, SAP2000.

Uma vez concluída a resolução do problema, é possível obter os vectores deslocamento, e assim construir a malha deformada (fig. 5.50). Obteve-se desta forma o valor máximo dos deslocamentos verticais, de 0,00246 m.

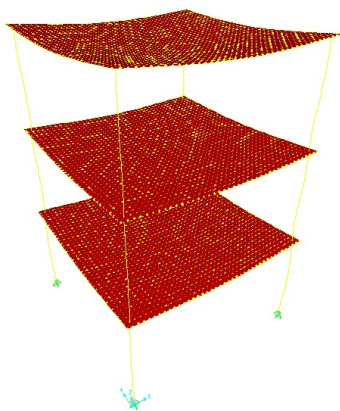


Figura 5.50: Malha deformada, SAP2000.

Vejamos de seguida a distribuição dos vectores deslocamento na direcção vertical no piso mais desfavorável (3º piso):

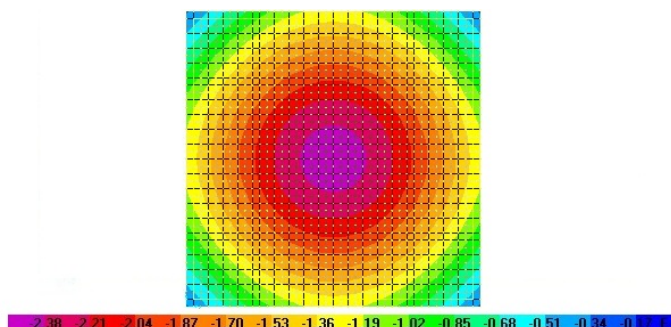


Figura 5.51: Distribuição dos vectores deslocamento na direcção vertical, SAP2000.

Relativamente aos resultados obtidos através da adaptação do modelo de laje de Reissner-Mindlin ao presente caso tridimensional, obteve-se para os momentos flectores na direcção x (fig. 5.37 e 5.38), a seguinte distribuição, com um $m_{x,max}^- = -3,0 \text{ kNm/m}$ (obtido no canto da laje do primeiro piso) e $m_{x,max}^+ = 8,3 \text{ kNm/m}$ (medido no centro da laje do último piso).

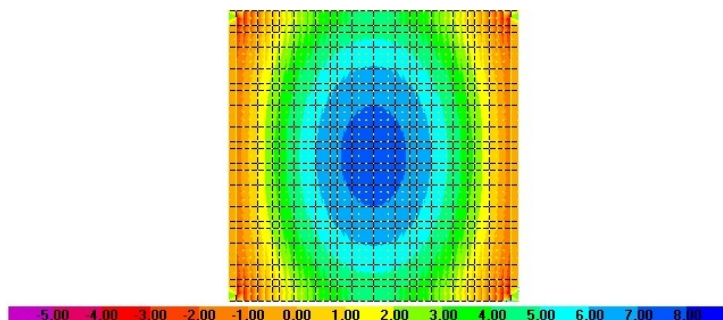


Figura 5.52: Momentos flectores mínimos segundo o eixo x (piso 1), SAP2000.

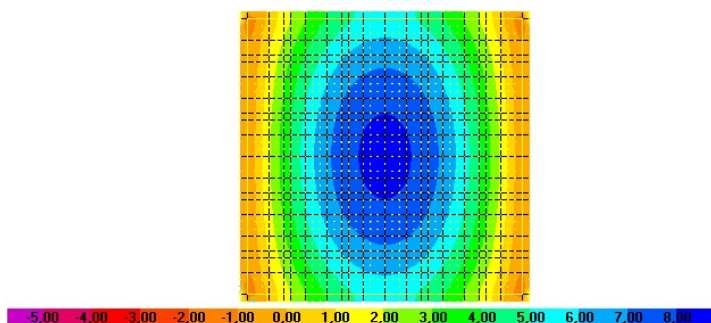


Figura 5.53: Momentos flectores máximos segundo o eixo x (piso 3), SAP2000.

No caso dos *momentos flectores* na direcção y (fig. 5.39 e 5.40), apresenta-se a seguinte distribuição, com $m_{y,max}^- = -3,0 \text{ kNm/m}$ (obtido no canto da laje do primeiro piso) e $m_{y,max}^+ = 8,3 \text{ kNm/m}$ (medido no centro da laje do último piso).

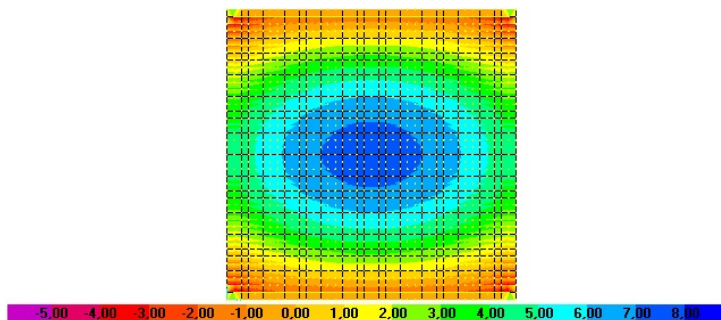


Figura 5.54: Momentos flectores mínimos segundo o eixo y (piso 1), SAP2000.

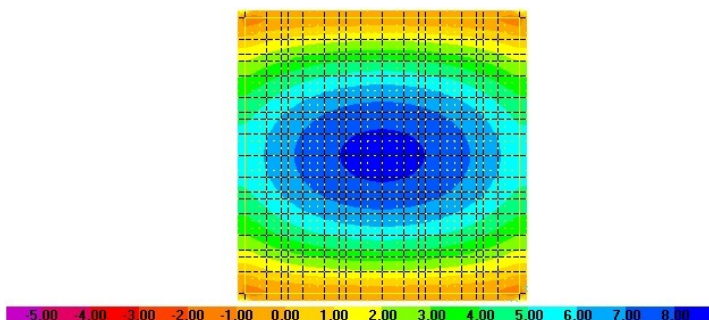


Figura 5.55: Momentos flectores máximos segundo o eixo y (piso 3), SAP2000.

Quanto aos *momentos torsores*, registam-se valores de $m_{xy,max}^- = -2,62 \text{ kNm/m}$ e um $m_{xy,max}^+ = 2,62 \text{ kNm/m}$ (obtidos no segundo piso, nos cantos da laje).

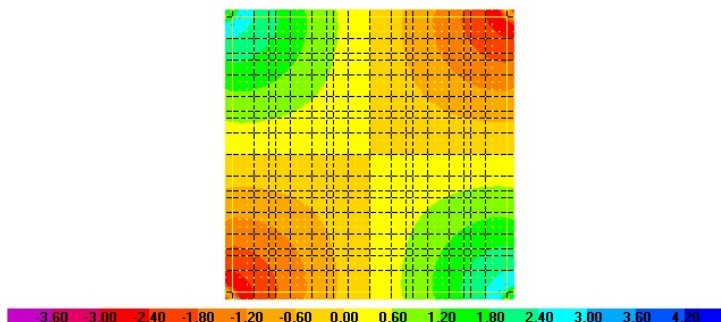


Figura 5.56: Momentos torsores segundo o eixo xy (piso 2), SAP2000.

5.5.4 Comparação de Resultados

Na tabela seguinte serão comparados os diferentes resultados obtidos através de métodos de cálculo distintos:

	freeFEM++	SAP2000	erro (%)
$u_3P_1 \max(-)$	0,00202	0,002	1,0
$u_3P_2 \max(-)$	0,002	0,002	0,0
$u_3P_3 \max(-)$	0,00254	0,0025	1,6
$m_x^+ \max$	8,47	8,3	2,0
$m_x^- \max$	-2,78	-3,0	7,3
$m_y^+ \max$	8,47	8,3	2,0
$m_y^- \max$	-2,78	-3,0	7,3
$m_{xy}^+ \max$	2,3	2,62	12,2
$m_{xy}^- \max$	-2,3	-2,62	12,2
Tempo (s)	47	26	-

Tabela 5.4: Tabela comparativa de resultados - 4º modelo

De acordo com os resultados determinados em *freeFEM++*, é possível verificar que não existem discrepâncias em relação aos valores determinados através do SAP2000, sendo que o erro relativo varia entre 0% e 12,2%. Da mesma forma que nos modelos anteriores, constata-se que os momentos negativos é um dos parâmetros com maior percentagem de erro. Estes valores devem-se ao facto de os momentos flectores serem demasiado dependentes da discretização de elementos finitos.

5.6 Análise de lajes fungiformes apoiadas em pilares - 9 pisos

5.6.1 Apresentação do modelo

Nesta secção vamos estudar o comportamento de uma estrutura de 9 pisos. Da mesma forma que os modelos definidos em 5.2 e 5.4, este modelo também será constituído apenas por pilares e lajes.

As lajes possuem vãos de 6 metros e altura de 20 cm, apoiadas nos quatro cantos. Os pilares que servirão de apoio às lajes são constituídos por uma secção de $A = 0,30 \times 0,30m^2$ e por uma altura de 2.9 metros. O material utilizado é o betão C20 / 25, com um *módulo de elasticidade* $E = 30 \times 10^6 kPa$ e um *coeficiente de Poisson* $\nu = 0,16$.

Considera-se como acção o peso próprio instalado na estrutura, para um peso específico de $25kN/m^3$.

Seguidamente é ilustrado o modelo de cálculo utilizado em freeFEM++ e no SAP2000 (fig. 5.57).

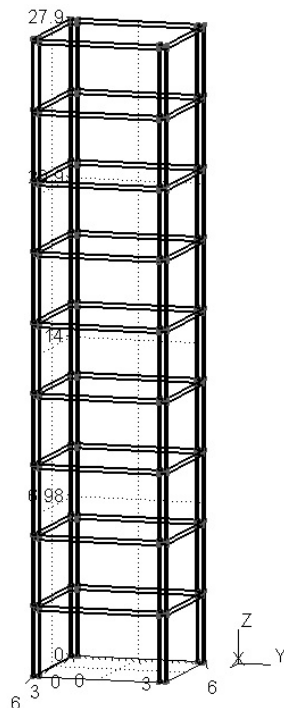


Figura 5.57: Representação do modelo de cálculo utilizado.

5.6.2 Construção da Malha e Resultados em freeFEM++

A geometria da estrutura foi construída baseando-se no modelo definido em 5.4, aumentando assim o número de pisos para 9.

A discretização da estrutura em elementos finitos (tetraedros) será gerada de forma automática pelo GMSH, que por sua vez, possibilita o registo das coordenadas de elementos finitos (tetraedros) num ficheiro com formato *Medit INRIA* e extensão **.mesh* de forma a ser possível a leitura da malha com o freeFEM++. Na fig. 5.58 representa-se apenas a malha do 1º piso da estrutura de 9 pisos que, por sua vez, contém um total de 25248 elementos (tetraedros).

As *condições de fronteira* foram implementadas nas bases dos pilares de forma a impedir os deslocamentos em todas as direcções ($u_1=0$, $u_2=0$ e $u_3=0$).

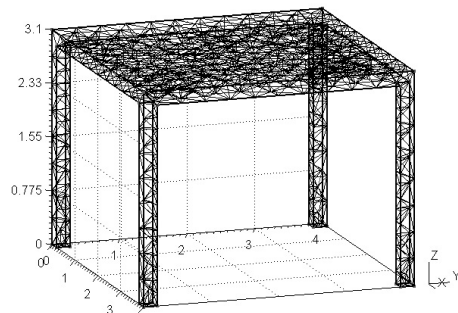


Figura 5.58: Malha discretizada, GMSH.

Após a resolução numérica do problema elástico 3D, em freeFEM++, obtemos o campo dos deslocamentos, permitindo deste modo a criação da malha deformada (fig. 5.59). Assim sendo, obteve-se o valor máximo dos deslocamentos verticais de $0,00595m$ no último piso da estrutura.

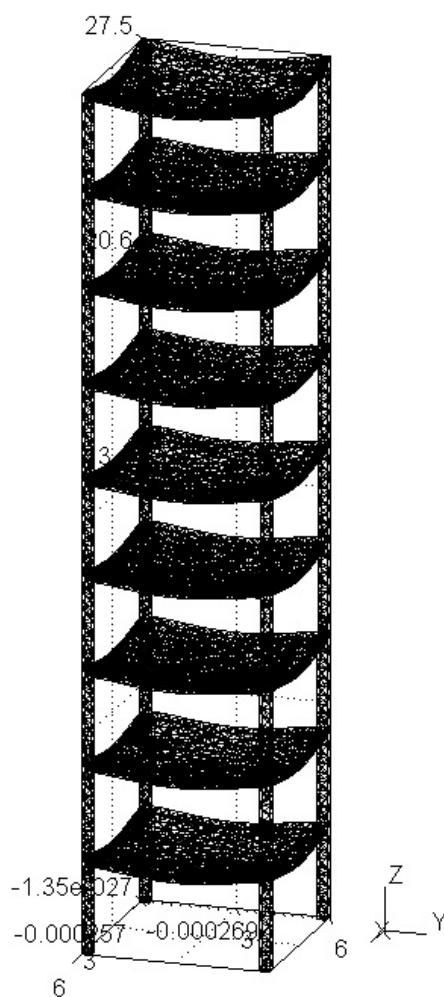


Figura 5.59: Malha deformada, GMSH.

Veja-se a fig. 5.60 com a representação do campo de deslocamentos ao longo de toda a estrutura, onde é possível verificar que as maiores deformações ocorrem a meio vão da laje (0,00595m) do último piso e a deformada geral da estrutura tem um comportamento que seria de esperar:

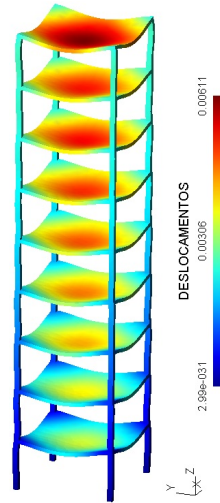


Figura 5.60: Deformada da estrutura com deslocamentos à escala 1:250, pós-processamento em GMSH

Seguidamente, vamos verificar os resultados dos *momentos flectores* segundo as direcções x , y e xy , sendo espectável a existência de resultados bi-simétricos dada a simetria da estrutura.

Para os *momentos flectores* na direcção x (fig. 5.5), apresenta-se a seguinte distribuição, com $m_{x,max}^- = -55,6 \text{ kNm/m}$ e um $m_{x,max}^+ = 15,71 \text{ kNm/m}$. O valor do momento positivo obtém-se a meio vão do bordo da laje do último piso enquanto que o momento negativo é obtido na zona dos pilares do segundo piso (canto da laje).

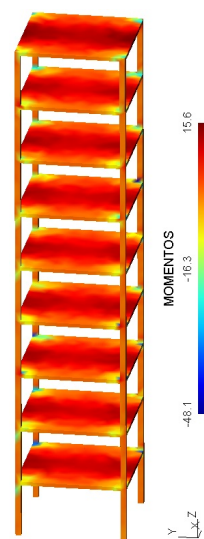


Figura 5.61: Momentos flectores segundo o eixo x , pós-processamento em GMSH

No caso dos *momentos flectores* na direcção y (fig. 5.6), apresenta-se a seguinte distribuição, com $m_{y,max}^- = -55,6 \text{ kNm/m}$ e um $m_{y,max}^+ = 15,71 \text{ kNm/m}$. Da mesma forma que os momentos determinados segundo o eixo de x , na direcção yy os valores máximos foram obtidos a meio vão do bordo da laje do último piso e os mínimos foram obtidos na zona do pilar do segundo piso (canto da laje).

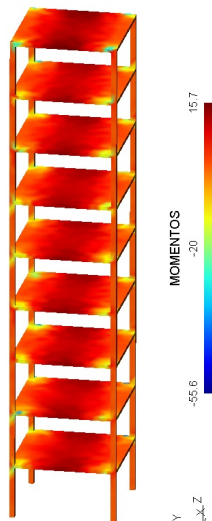


Figura 5.62: Momentos flectores segundo o eixo y , pós-processamento em GMSH

Os *momentos torsores* na direcção xy também apresentam simetria nos seus resultados, sendo o $m_{xy,max}^- = -21,34 \text{ kNm/m}$ e o $m_{xy,max}^+ = 21,34 \text{ kNm/m}$. Assim como os valores mínimos dos momentos flectores obtidos segundo os eixos x e y , os momentos torsores foram obtidos no segundo piso, na zona do pilar (canto da laje).

Veja-se a distribuição dos *momento torsores* na estrutura:

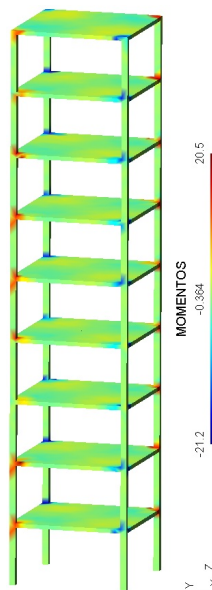


Figura 5.63: Distribuição de *momentos torsores*, pós-processamento em GMSH.

5.6.3 Construção da Malha e Resultados em SAP2000

Da mesma forma que os modelos definidos em 5.2 e 5.4 a geometria desta estrutura também é concebida por etapas. O modelo em SAP2000 foi criado baseando-se nos modelos anteriores, tendo sido feito uma réplica dos pisos definidos nesses modelos para que se tenha uma estrutura de 9 pisos. Depois de definir a geometria da estrutura, são definidos o tipo de material, a área da secção de cada elemento estrutural, a acção pretendida para análise, a discretização da estrutura e finalmente é feita a análise final através do cálculo da estrutura. Quanto à malha é definida apenas para o elemento de laje, onde podemos dividir de acordo com a discretização pretendida, tendo para este caso 40 divisões para cada um dos eixos x e y , apresentando um total de 1600 elementos.

Relativamente às condições de fronteira, foram colocados apoios fixos nas bases dos pilares, restringindo os deslocamentos nas 3 direcções x , y e z .

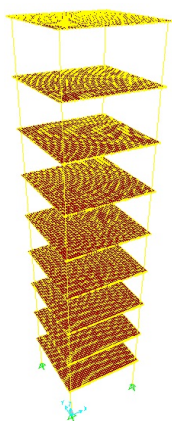


Figura 5.64: Malha discretizada, SAP2000.

Uma vez concluída a resolução do problema, é possível obter os vectores deslocamento, e assim construir a malha deformada (fig. 5.65).

Obteve-se desta forma o valor máximo dos deslocamentos verticais no último piso, de 0,00601m.

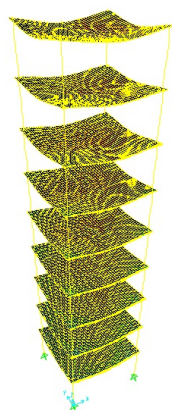


Figura 5.65: Malha deformada, SAP2000.

Vejam os de seguida a distribuição dos vectores deslocamento na direcção vertical no piso mais desfavorável (9º piso):

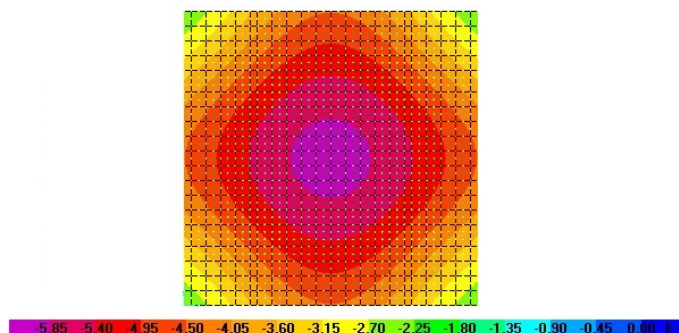


Figura 5.66: Distribuição dos vectores deslocamento na direcção vertical, SAP2000.

Relativamente aos resultados obtidos através da adaptação do modelo de laje de Reissner-Mindlin ao presente caso tridimensional, obteve-se para os momentos flectores na direcção x (fig. 5.67 e 5.68), a seguinte distribuição, com um $m_{x,max}^- = -47,79 \text{ kNm/m}$ e $m_{x,max}^+ = 15,23 \text{ kNm/m}$. O valor do momento positivo obtém-se a meio vão do bordo da laje do último piso enquanto que o momento negativo é obtido na zona dos pilares do segundo piso (canto da laje).

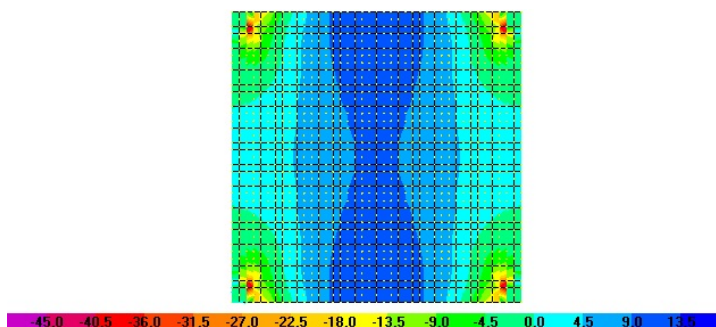


Figura 5.67: Momentos flectores mínimos segundo o eixo x (piso 2), SAP2000.

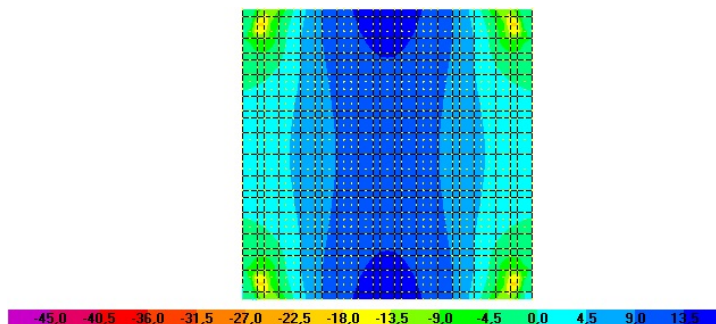


Figura 5.68: Momentos flectores máximos segundo o eixo x (piso 9), SAP2000.

No caso dos *momentos flectores* na direcção y (fig. 5.69 e 5.70), apresenta-se a seguinte distribuição, com $m_{y,max}^- = -47,79 \text{ kNm/m}$ e $m_{y,max}^+ = 15,23 \text{ kNm/m}$. Da mesma forma que os momentos determinados segundo o eixo de x , na direcção yy os valores máximos foram obtidos a meio vão do bordo da laje do último piso e os mínimos foram obtidos na zona do pilar do segundo piso (canto da laje).

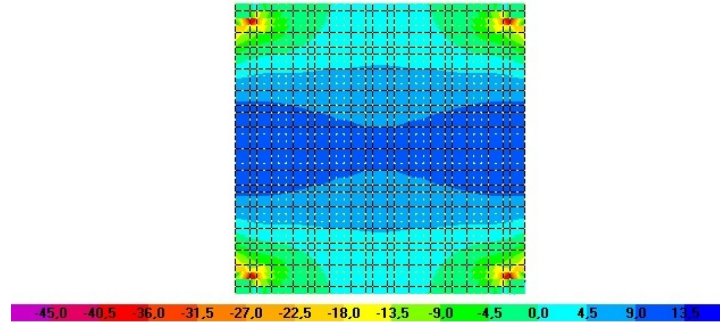


Figura 5.69: Momentos flectores mínimos segundo o eixo y (piso 2), SAP2000.

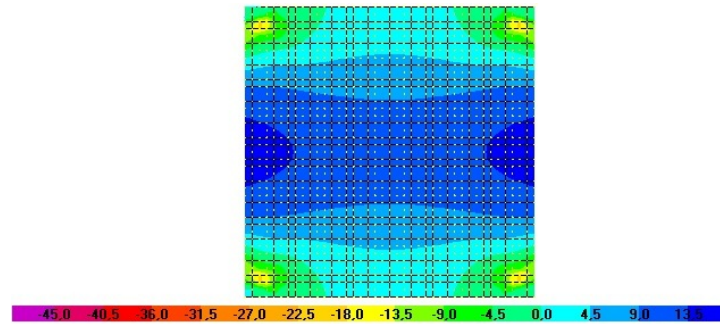


Figura 5.70: Momentos flectores máximos segundo o eixo y (piso 9), SAP2000.

Quanto aos *momentos torsores*, registam-se valores de $m_{xy,max}^- = -22,31 \text{ kNm/m}$ e um $m_{xy,max}^+ = 22,31 \text{ kNm/m}$. Assim como os valores mínimos dos momentos flectores obtidos segundo os eixos x e y , os momentos torsores foram obtidos no segundo piso, na zona do pilar (canto da laje).

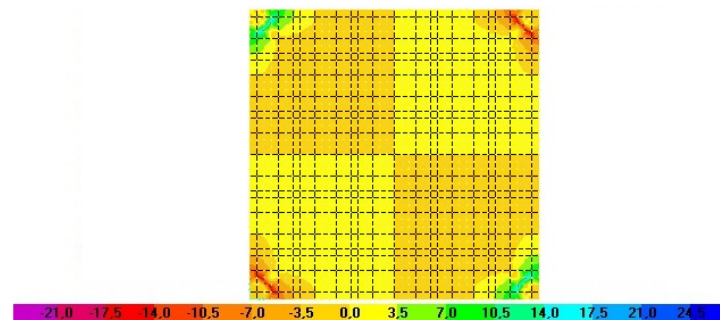


Figura 5.71: Momentos torsores segundo o eixo xy , SAP2000.

5.6.4 Comparação de Resultados

Na tabela 5.5 serão comparados os diferentes resultados obtidos através de métodos de cálculo distintos:

	freeFEM++	SAP2000	erro (%)
$u_3 P_1 \max(-)$	0,00347	0,00347	0,0
$u_3 P_2 \max(-)$	0,00379	0,00365	3,9
$u_3 P_3 \max(-)$	0,00424	0,00410	3,9
$u_3 P_4 \max(-)$	0,00459	0,00443	3,5
$u_3 P_5 \max(-)$	0,00482	0,00472	2,0
$u_3 P_6 \max(-)$	0,00497	0,00494	0,6
$u_3 P_7 \max(-)$	0,00516	0,00514	0,4
$u_3 P_8 \max(-)$	0,00508	0,00510	0,4
$u_3 P_9 \max(-)$	0,00595	0,00601	1,0
$m_x^+ \max$	15,71	15,23	3,2
$m_x^- \max$	-55,6	-47,79	16,3
$m_y^+ \max$	15,71	15,23	3,2
$m_y^- \max$	-55,6	-47,79	16,3
$m_{xy}^+ \max$	21,34	22,31	4,3
$m_{xy}^- \max$	-21,34	-22,31	4,3
Tempo (s)	370	76	-

Tabela 5.5: Tabela comparativa de resultados - 5^o modelo

Para este modelo, os valores dos deslocamentos e dos momentos flectores determinados em freeFEM++ estão em conformidade com os valores determinados em SAP2000. Da análise à tabela 5.5, podemos concluir que os deslocamentos atingiram valores entre 0% e 3,9%. Como já foi referido no modelo anterior, os momentos flectores negativos apresentam maior percentagem de erro uma vez que os momentos flectores na sua generalidade são muito sensíveis relativamente à qualidade da malha de elementos finitos.

Globalmente podemos referir que os valores determinados em freeFEM++ são bastante satisfatórios quando comparados com os valores determinados através do SAP2000.

5.7 Análise de lajes num sistema porticado - 9 pisos

5.7.1 Apresentação do modelo

Nesta secção vamos estudar o comportamento de uma estrutura de 9 pisos. Da mesma forma que os modelos definidos em 5.3 e 5.5, este modelo também será constituído por pilares, vigas e lajes construídas em betão armado.

Neste modelo iremos estudar o comportamento de lajes apoiadas em pilares e vigas, numa estrutura de 9 pisos com pilares de 2.7 metros. A configuração deste modelo terá como base o modelo estudado em 5.5, sendo que a laje terá vãos de $6m \times 6m$, pilares e vigas com áreas de secção $A = 0,30 \times 0,30m^2$ e $A = 0,20 \times 0,40m^2$, respectivamente. O material utilizado é o betão C20 / 25, com um *módulo de elasticidade* $E = 30 \times 10^6 kPa$ e um *coeficiente de Poisson* $\nu = 0,16$.

Considera-se como acção o peso próprio instalado na estrutura, para um peso específico de $25kN/m^3$.

Seguidamente é ilustrado o modelo de cálculo utilizado em freeFEM++ e no SAP2000 (fig. 5.72).

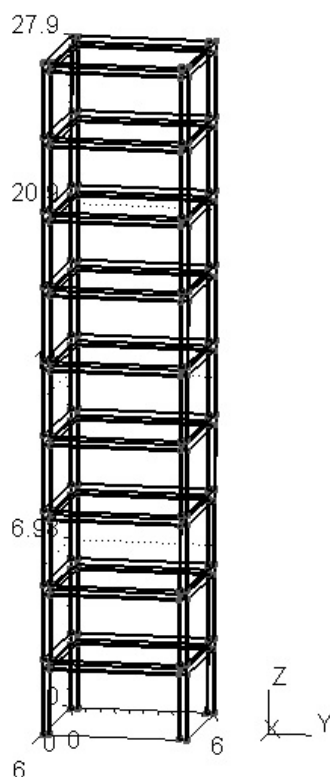


Figura 5.72: Representação do modelo de cálculo utilizado.

5.7.2 Construção da Malha e Resultados em freeFEM++

A geometria da estrutura foi construída baseando-se no modelo definido em 5.5, aumentando assim o número de pisos para 9.

A discretização da estrutura em elementos finitos (tetraedros) será gerada de forma automática pelo GMSH, que por sua vez, possibilita o registo das coordenadas de elementos finitos (tetraedros) num ficheiro com formato *Medit INRIA* e extensão **.mesh* de forma a ser possível a leitura da malha com o freeFEM++.

Na fig. 5.73 representa-se apenas a malha do 1º piso da estrutura de 9 pisos que, por sua vez, contém um total de 17177 elementos (tetraedros). As *condições de fronteira* foram implemen-

tadas nas bases dos pilares de forma a impedir os deslocamentos em todas as direcções ($u_1=0$, $u_2=0$ e $u_3=0$).

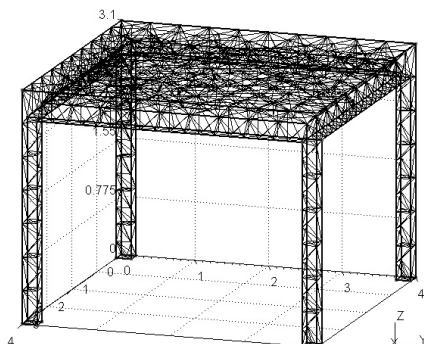


Figura 5.73: Malha discretizada, GMSH.

Após a resolução numérica do problema elástico 3D, em freeFEM++, obtemos o campo dos deslocamentos, permitindo deste modo a criação da malha deformada (fig. 5.59). Desta forma, obteve-se o valor máximo dos deslocamentos verticais de $0,00505m$ no último piso da estrutura.

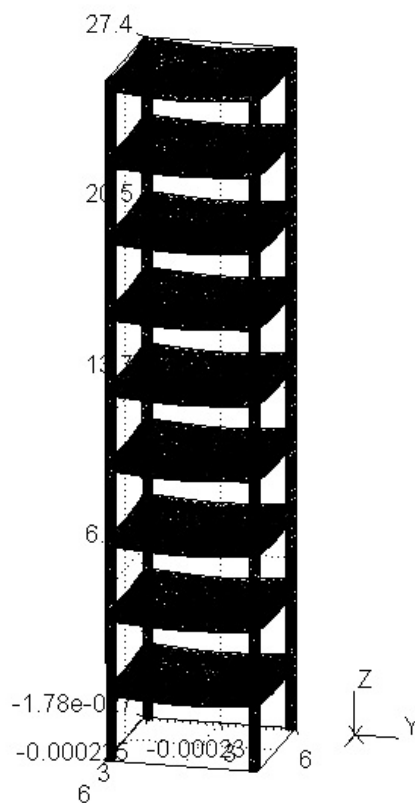


Figura 5.74: Malha deformada, GMSH.

Veja-se a fig. 5.75 com a representação do campo de deslocamentos ao longo de toda a estrutura, onde é possível verificar que as maiores deformações (0,00505m) ocorrem a meio vão da laje do último piso e a deformada geral da estrutura tem um comportamento que seria de esperar:

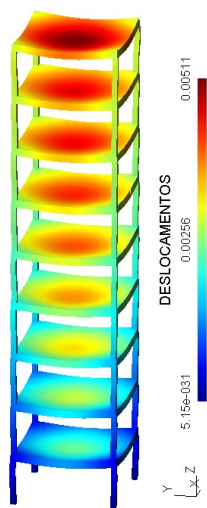


Figura 5.75: Deformada da estrutura com deslocamentos à escala 1:250, pós-processamento em GMSH

Seguidamente, vamos verificar os resultados dos *momentos flectores* segundo as direcções x , y e xy , sendo espectável a existência de resultados bi-simétricos dada a simetria da estrutura.

Para os *momentos flectores* na direcção x (fig. 5.5), apresenta-se a seguinte distribuição, com $m_{x,max}^- = -4,25 \text{ kNm/m}$ e um $m_{x,max}^+ = 8,37 \text{ kNm/m}$. O valor do momento positivo obtém-se no centro da laje do último piso enquanto que o momento negativo foram obtidos no canto da laje, no 8º piso.

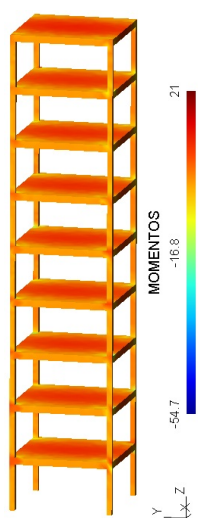


Figura 5.76: Momentos flectores segundo o eixo x , pós-processamento em GMSH

No caso dos *momentos flectores* na direcção y (fig. 5.6), apresenta-se a seguinte distribuição, com $m_{y,max}^- = -4,25 \text{ kNm/m}$ e um $m_{y,max}^+ = 8,37 \text{ kNm/m}$. Da mesma forma que os momentos determinados segundo o eixo de x , na direcção yy os valores máximos foram obtidos no centro da laje do último piso e os mínimos foram obtidos no canto da laje, no 8º piso.

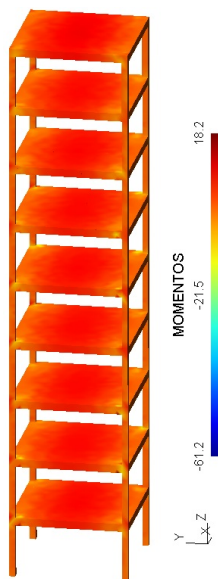


Figura 5.77: Momentos flectores segundo o eixo y , pós-processamento em GMSH

Os *momentos torsores* na direcção xy também apresentam simetria nos seus resultados, sendo o $m_{xy,max}^- = -2,28 \text{ kNm/m}$ e o $m_{xy,max}^+ = 2,28 \text{ kNm/m}$. Assim como os valores mínimos dos momentos flectores obtidos segundo os eixos x e y , os momentos torsores foram obtidos no 8º piso, no canto da laje.

Veja-se a distribuição dos *momento torsores* na estrutura:

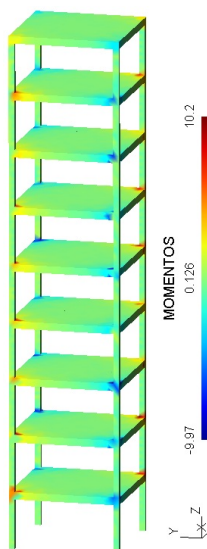


Figura 5.78: Distribuição de *momentos torsores*, pós-processamento em GMSH.

5.7.3 Construção da Malha e Resultados em SAP2000

Da mesma forma que os modelos definidos em 5.3 e 5.5 a geometria desta estrutura também é concebida por etapas. O modelo em SAP2000 foi criado baseando-se nos modelos anteriores, tendo sido feito uma réplica dos pisos definidos nesses modelos para que se tenha uma estrutura de 9 pisos. Depois de definir a geometria da estrutura, são definidos o tipo de material, a área da secção de cada elemento estrutural, a acção pretendida para análise, a discretização da estrutura e finalmente é feita a análise final através do cálculo da estrutura. Quanto à malha é definida apenas para o elemento de laje, onde podemos dividir de acordo com a discretização pretendida, tendo para este caso 40 divisões para cada um dos eixos x e y , apresentando um total de 1600 elementos.

Relativamente às condições de fronteira, foram colocados apoios fixos nas bases dos pilares, restringindo os deslocamentos nas 3 direcções x , y e z .

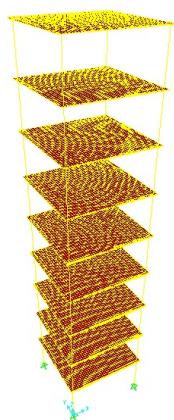


Figura 5.79: Malha discretizada, SAP2000.

Uma vez concluída a resolução do problema, é possível obter os vectores deslocamento, e assim construir a malha deformada (fig. 5.80).

Obteve-se desta forma o valor máximo dos deslocamentos verticais no último piso, de 0,0054m.

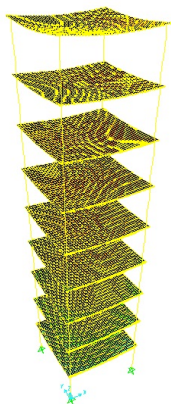


Figura 5.80: Malha deformada, SAP2000.

Vejamos de seguida a distribuição dos vectores deslocamento na direcção vertical no piso mais desfavorável (9º piso):

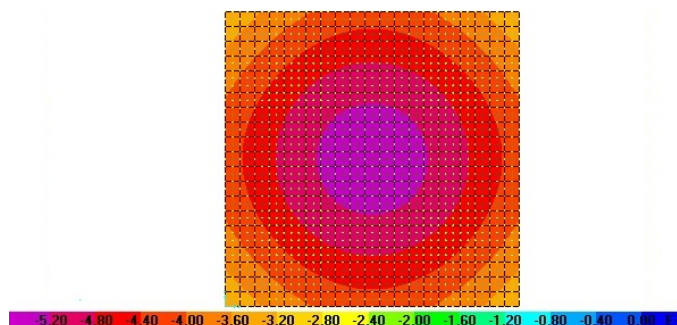


Figura 5.81: Distribuição dos vectores deslocamento na direcção vertical, SAP2000.

Relativamente aos resultados obtidos através da adaptação do modelo de laje de Reissner-Mindlin ao presente caso tridimensional, obteve-se para os momentos flectores na direcção x (fig. 5.82 e 5.83), a seguinte distribuição, com um $m_{x,max}^- = -3,60 \text{ kNm/m}$ e $m_{x,max}^+ = 8,31 \text{ kNm/m}$. O valor do momento positivo obtém-se no centro da laje do último piso enquanto que o momento negativo foram obtidos no canto da laje, no 8º piso.

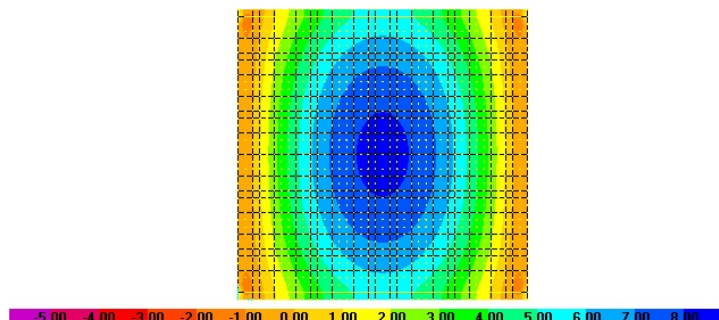


Figura 5.82: Momentos flectores segundo o eixo x (piso 8), SAP2000.

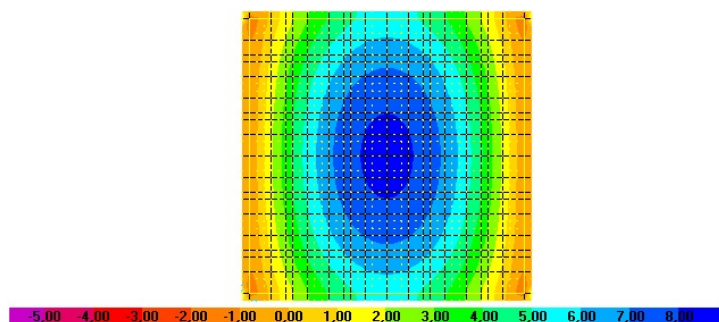


Figura 5.83: Momentos flectores segundo o eixo x (piso 9), SAP2000.

No caso dos *momentos flectores* na direcção y (fig. 5.84 e 5.85), apresenta-se a seguinte distribuição, com $m_{y,max}^- = -3,60 \text{ kNm/m}$ e $m_{y,max}^+ = 8,31 \text{ kNm/m}$. Da mesma forma que os momentos determinados segundo o eixo de x , na direcção yy os valores máximos foram obtidos no centro da laje do último piso e os mínimos foram obtidos no canto da laje, no 8º piso.

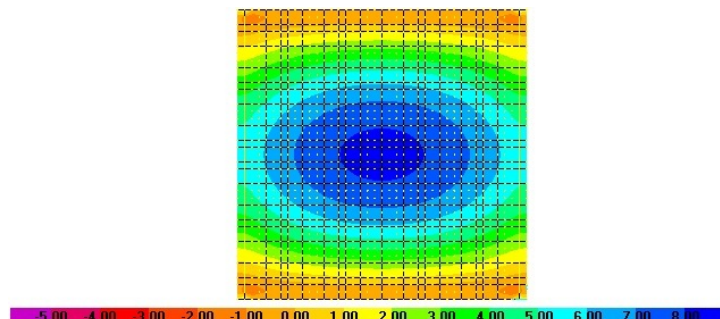


Figura 5.84: Momentos flectores segundo o eixo y (piso 8), SAP2000.

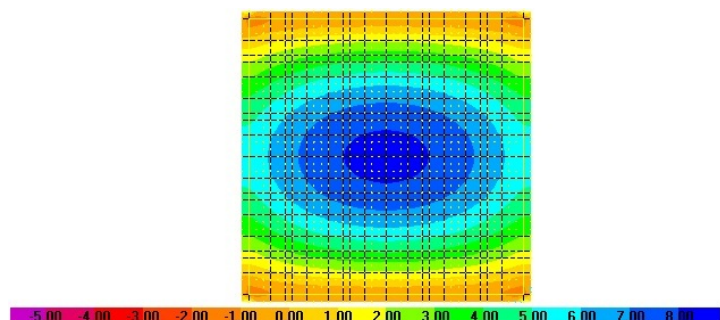


Figura 5.85: Momentos flectores segundo o eixo y (piso 9), SAP2000.

Quanto aos *momentos torsores*, registam-se valores de $m_{xy,max}^- = -2,6 \text{ kNm/m}$ e um $m_{xy,max}^+ = 2,6 \text{ kNm/m}$.

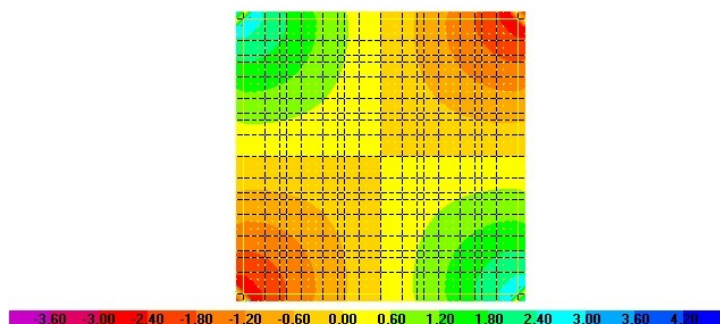


Figura 5.86: Momentos torsores segundo o eixo xy (piso 8), SAP2000.

5.7.4 Comparação de Resultados

Na tabela 5.6 serão comparados os diferentes resultados obtidos através de métodos de cálculo distintos:

	freeFEM++	SAP2000	erro (%)
$u_3 P_1 \max(-)$	0,0024	0,0025	5,6
$u_3 P_2 \max(-)$	0,0028	0,0030	6,4
$u_3 P_3 \max(-)$	0,0033	0,0035	7,3
$u_3 P_4 \max(-)$	0,0037	0,0040	8,5
$u_3 P_5 \max(-)$	0,0040	0,0044	8,5
$u_3 P_6 \max(-)$	0,0043	0,0047	8,6
$u_3 P_7 \max(-)$	0,0045	0,0049	8,6
$u_3 P_8 \max(-)$	0,0045	0,0050	9,4
$u_3 P_9 \max(-)$	0,0051	0,0054	6,8
$m_x^+ \max$	8,37	8,31	0,72
$m_x^- \max$	-4,25	-3,60	18,06
$m_y^+ \max$	8,37	8,31	0,72
$m_y^- \max$	-4,25	-3,60	18,06
$m_{xy}^+ \max$	2,28	2,60	12,31
$m_{xy}^- \max$	-2,28	-2,60	12,31
Tempo (s)	143	85	-

Tabela 5.6: Tabela comparativa de resultados - 6º modelo

A análise cuidada do tabela 5.6 permite-nos concluir que os valores dos deslocamentos determinados em freeFEM++ demonstram boa compatibilidade em relação ao SAP2000, sendo que o erro relativo varia entre 5,6% e 9,4%. Relativamente aos momentos flectores os valores também são compatíveis com o SAP2000, apresentando um erro máximo 18,06%. De acordo com o quadro 5.6 verifica-se que os momentos flectores negativos apresentam maior percentagem de erro, devendo-se sobretudo à qualidade da malha de elementos finitos, sendo que, ao longo do desenvolvimento deste trabalho, a determinação dos momentos negativos revelaram geralmente alguma sensibilidade relativamente à discretização da malha de elementos finitos, ou seja, os valores dos momentos negativos sofrem algumas oscilações com a alteração do factor que determina a qualidade (pormenor) da malha de elementos finitos.

Capítulo 6

Conclusão

6.1 Conclusões

A determinação dos deslocamentos e esforços, sendo uma etapa indispensável no dimensionamento de um edifício alto, é feita de forma a permitir a execução de uma estrutura economicamente viável e garantir níveis satisfatórios de segurança. Um bom modelo matemático deve levar em consideração todos os factores que afectam o comportamento de uma estrutura e obter soluções próximas do seu funcionamento real. A técnica de elementos finitos é uma ferramenta de grande utilidade neste sentido, na medida em que permite a simulação de problemas reais abrangendo maior parte das obras de engenharia civil.

Neste trabalho foi usada uma implementação do método de elementos finitos para análise de problemas estáticos de elasticidade linear em estruturas tridimensionais que, por sua vez, revelou ser uma ferramenta importante na simulação do comportamento estrutural. Os modelos implementados em *freeFEM++* permitiram a obtenção de soluções estaticamente admissíveis. A geometria e a discretização das estruturas de cada modelo foram criadas graças à poderosa ferramenta com facilidades de pré e pós-processamento, o GMSH, permitindo deste modo a inserção da malha discretizada em *freeFEM++*. Tendo em conta que a interface gráfica utilizada pelo *freeFEM++* para a representação dos resultados gera gráficos/imagens de fraca qualidade, decidiu-se utilizar como alternativa o GMSH de forma a aproveitar uma das suas grandes potencialidades que é o processamento dos gráficos.

Os deslocamentos e os esforços foram determinados tendo como base de comparação os resultados obtidos com o SAP2000. Todos os modelos estudados apresentaram boa compatibilidade no que se refere aos resultados obtidos entre os dois programas de cálculo automático.

Os esforços determinados em *freeFEM++*, mais concretamente os momentos flectores negativos apresentaram no computo geral uma maior percentagem de erro quando comparado com os valores determinados com o SAP2000.

De acordo com os resultados obtidos ao longo deste trabalho, é possível constatar que o *freeFEM++* é uma ferramenta útil que pode ser utilizada para a determinação dos deslocamentos máximos de uma estrutura, bem como o esforço actuante. Contudo, a utilização e implementação de um modelo em *freeFEM++* exige o conhecimento da sua linguagem de forma a possibilitar o *input* do modelo e a exportação de resultados para posterior análise.

6.2 Desenvolvimentos futuros

Como desenvolvimentos possíveis do estudo efectuado, sugere-se a utilização de polinómios de grau 3 que, dada a sua complexidade, darão sem dúvida resultados mais precisos em termos de determinação de esforços. A utilização de polinómios de grau n (para $n \geq 3$) já exige que a análise seja feita por intermédio de computadores com elevada capacidade de processamento.

Tendo em conta que o SAP2000 utiliza malhas quadrangulares, propõe-se, para o caso do freeFEM++, a utilização de malhas de elementos finitos constituídas por paralelepípedos para resolução de problemas elásticos 3D.

Outra questão interessante seria a análise dinâmica da estrutura de um edifício alto quando submetida à acção sísmica.

Capítulo 7

Bibliografia

AZEVEDO, A. – *Método de Elementos Finitos*, 1^a Edição. Porto: Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 2003.

Disponível em: http://civil.fe.up.pt/pub/apoio/ano5/aae/pdf/apontamentos/Livro_MEF_AA.pdf

C. GEUZAINÉ and J.F. REMACLE – *Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Volume 79, Issue 11, pages 1309-1331, 2009.

Disponível: <http://geuz.org/gmsh/doc/texinfo/>

CASTRO, Luís Manuel Soares dos Santos – *Wavelets e séries de Walsh em elementos finitos*. Lisboa: Instituto Superior Técnico, 1996.

HECHT, Frédéric – *Freefem++*, version 3.5. 3.^a edition. Université Pierre et Marie Curie, Laboratoire Jacques-Louis Lions, Paris 2010.

Disponível em WWW: |URL: <http://www.freefem.org/ff++/j>

HUGHES, T. – *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Englewood Cliffs : Prentice-Hall, 1987.

JOHANSSON, Claes – *Numerical Solutions of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*. 1st ed. Bromley: Cambridge University Press, 1987.

MORAIS, E. – *Simulação Numérica do Comportamento de Lajes: Aplicação do Método dos Elementos Finitos a Problemas Tridimensionais de Elasticidade Linear usando o freeFEM++*. Lisboa: Instituto Superior de Engenharia de Lisboa. Dissertação de Mestrado, 2010.

OLIVEIRA, Sérgio; CASTRO, A. Tavares de; GOMES, J. Pereira – *Capítulo I: Equilíbrios Tridimensionais, Equações Fundamentais da Mecânica Estrutural. Capítulo II: O Método dos Elementos Finitos na Análise Estrutural, Formulação em Deslocamentos. Mecânica dos Sólidos III*. Lisboa: Departamento de Engenharia Civil do Instituto Superior de Engenharia de Lisboa, 2009.

PEREIRA, Orlando José Barreiros d'Almeida – *Um Modelo de Elementos Finitos de Equilíbrio para Elasticidade Tridimensional*. Lisboa: Instituto Superior de Engenharia, Universidade Técnica de Lisboa. Dissertação de Mestrado, 1993.

Disponível em WWW: |Url:http://www.civil.ist.utl.pt/orlando/pub_op.html

PIRONNEAU, Oliver; HECHT, Frédéric; HYARIC, Antoine Le – *Freefem++*, version 3.12 (2d and 3d). Université Pierre et Marie Curie, Laboratoire Jacques-Louis Lions, Paris 2005. Disponível em WWW: [URL: http://www.freefem.org/ff++/;](http://www.freefem.org/ff++/)

Ribeiro, F. – *Introdução ao Método de Elementos Finitos*. Programa de Engenharia Civil, COPPE / UFRJ - Notas de aula do Prof. Fernando L. B. Ribeiro. Rio de Janeiro, 2004.

Sabino, J. – *Elementos de teoria da Elasticidade 1 e 2*. Textos de Apoio, Teoria de Estruturas. Departamento de Engenharia Mecânica. Instituto Superior de Engenharia do Porto, 2010.

SALGADO, D.; Pinto, M. – *O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS COMO FERRAMENTA PARA PROJETO DE MALHAS DE ATERRAMENTO DE SUBESTAÇÕES*. São Paulo: Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2009.
Disponível em: <http://pt.scribd.com/doc/37807300/O-METODO-DOS-ELEMENTOS-FINITOS-COMO-FERRAMENTA-PARA-PROJETO-DE-MALHAS-DE-ATERRAMENTO-DE-SUBESTACOES>

SAP2000, version 14 – Computers Structures, Inc. 1995 University Ave. Suite 540, Berkeley, CA 94704 USA.

SOUTO, A. – *Análise de estruturas de edifícios altos submetidos a carregamentos horizontais e verticais*. Porto Alegre: Escola da engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Dissertação de Mestrado, 1993.

VAZQUEZ, M. G. – *Construção de Funções de Interpolação para versões h e p do MEF através do produto tensorial*. São Paulo: Universidade Estadual de Campinas, 2004.
Disponível em: <http://www.bibliotecadigital.unicamp.br/document/?code=vtls000340740>

Capítulo 8

Anexos

Anexo I

Construção da estrutura vigada de 9 pisos em GMSH.

```
lc = 0.56;

x0 = 0.; y0 = 0.; z0 = 0; //ponto de referencia

hl = .2; // altura laje
hp = 2.9; // altura pilar
hv = .2; // altura da viga
lt = 6.; // comprimento topo
lb = .3; // comprimento base
wt = 6.; // largura topo
wb = .3; // largura base

l1b = lt-2*lb;
w1b = wt-2*wb;

//Rectangulo inferior
Point(1) = { x0 , y0 , z0, lc } ;
Point(2) = { x0 + lb , y0 , z0, lc } ;
Point(3) = { x0 + l1b+lb , y0 , z0, lc } ;
Point(4) = { x0 + lt , y0 , z0, lc } ;
Point(5) = { x0 , y0+wb , z0, lc } ;
Point(6) = { x0 + lb , y0+wb , z0, lc } ;
Point(7) = { x0 + l1b+lb , y0+wb , z0, lc } ;
Point(8) = { x0 + lt , y0+wb , z0, lc } ;
Point(9) = { x0 , y0+w1b+wb , z0, lc } ;
Point(10) = { x0 + lb , y0+w1b+wb , z0, lc } ;
Point(11) = { x0 + l1b+lb , y0+w1b+wb , z0, lc } ;
Point(12) = { x0 + lt , y0+w1b+wb , z0, lc } ;
Point(13) = { x0 , y0+wt , z0, lc } ;
Point(14) = { x0 + lb , y0+wt , z0, lc } ;
Point(15) = { x0 + l1b+lb , y0+wt , z0, lc } ;
Point(16) = { x0 + lt , y0+wt , z0, lc } ;
npa1[] = Translate {0., 0., hp-hv }{ Duplicata { Point{ 2, 3 ,5, 6 , 7 , 8, 9, 10 , 11 ,12, 14 , 15 }; } };
npa2[] = Translate {0., 0., hp }{ Duplicata { Point{ 6 , 7 , 10 , 11 }; } };
npa3[] = Translate {0., 0., hl+hp }{ Duplicata { Point{ 1 , 4 , 13 ,16 }; } };
```

```

// linhas horizontais
Line(1) = {1 , 2};
Line(2) = {5 , 6};
Line(3) = {1 , 5};
Line(4) = {2 , 6};
Line(5) = {3 , 4};
Line(6) = {7 , 8};
Line(7) = {3 , 7};
Line(8) = {4 , 8};
Line(9) = {9 ,10};
Line(10) = {13,14};
Line(11) = {9 ,13};
Line(12) = {10,14};
Line(13) = {11,12};
Line(14) = {15,16};
Line(15) = {11,15};
Line(16) = {12,16};
Line(17) = {npa1[0 ],npa1[1 ]};
Line(18) = {npa1[1 ],npa1[4 ]};
Line(19) = {npa1[4 ],npa1[3 ]};
Line(20) = {npa1[3 ],npa1[0 ]};
Line(21) = {npa1[2 ],npa1[3 ]};
Line(22) = {npa1[3 ],npa1[7 ]};
Line(23) = {npa1[7 ],npa1[6 ]};
Line(24) = {npa1[6 ],npa1[2 ]};
Line(25) = {npa1[7 ],npa1[8 ]};
Line(26) = {npa1[8 ],npa1[11]};
Line(27) = {npa1[11],npa1[10]};
Line(28) = {npa1[10],npa1[7 ]};
Line(29) = {npa1[4 ],npa1[5 ]};
Line(30) = {npa1[5 ],npa1[9 ]};
Line(31) = {npa1[9 ],npa1[8 ]};
Line(32) = {npa1[8 ],npa1[4 ]};
Line(33) = {npa2[0 ],npa2[1 ]};
Line(34) = {npa2[1 ],npa2[3 ]};
Line(35) = {npa2[3 ],npa2[2 ]};
Line(36) = {npa2[2 ],npa2[0 ]};

// linhas verticais
Line(41) = {1, npa3[0]};
Line(42) = {4, npa3[1 ]};
Line(43) = {13,npa3[2 ]};
Line(44) = {16,npa3[3 ]};
Line(45) = {5, npa1[2 ]};
Line(46) = {6, npa1[3 ]};
Line(47) = {2, npa1[0 ]};
Line(48) = {3, npa1[1]};
Line(49) = {7, npa1[4 ]};
Line(50) = {8, npa1[5 ]};
Line(51) = {12, npa1[9]};
Line(52) = {11, npa1[8 ]};
Line(53) = {15, npa1[11 ]};
Line(54) = {14, npa1[10]};
Line(55) = {10, npa1[7 ]};
Line(56) = {9, npa1[6 ]};
Line(57) = {npa1[3],npa2[0]};
Line(58) = {npa1[4],npa2[1]};
Line(59) = {npa1[7],npa2[2]};
Line(60) = {npa1[8],npa2[3]};
npa4[] = Translate {0., 0., h1+hp }{ Duplicata { Line{ 1 , 2 , 3 ,4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12,
13, 14, 15, 16 }; } };
npa5[] = Translate {0., 0., h1+hv }{ Duplicata { Line{ 17 , 24 , 27 ,30 }; } };

```

```

//superficies horizontais
Line Loop (1001) = {npa5[0],npa4[6],npa4[5],npa5[3],-npa4[12],npa4[14],
npa5[2], -npa4[11], -npa4[8], npa5[1],npa4[1], -npa4[3]};
Plane Surface (101) = {1001};
Line Loop (1002) = {17,18,19,20};
Plane Surface (102) = {1002};
Line Loop (1003) = {29,30,31,32};
Plane Surface (103) = {1003};
Line Loop (1004) = {21,22,23,24};
Plane Surface (104) = {1004};
Line Loop (1005) = {25,26,27,28};
Plane Surface (105) = {1005};
Line Loop (1006) = {5,8,-6,-7};
Plane Surface (106) = {1006};
Line Loop (1007) = {9,12,-10,-11};
Plane Surface (107) = {1007};
Line Loop (1008) = {13,16,-14,-15};
Plane Surface (108) = {1008};
Line Loop (1009) = {1,4,-2,-3};
Plane Surface (109) = {1009};
Line Loop (1010) = {33,34,35,36};
Plane Surface (110) = {1010};

//superficies verticais
Line Loop (1011) = {1,47,17,-48,5,42,-npa4[4],-npa5[0],-npa4[0],-41};
Plane Surface (111) = {1011};
Line Loop (1012) = {8,50,30,-51,16,44,-npa4[15],-npa5[3],-npa4[7],-42};
Plane Surface (112) = {1012};
Line Loop (1013) = {10,54,-27,-53,14,44,-npa4[13],npa5[2],-npa4[9],-43};
Plane Surface (113) = {1013};
Line Loop (1014) = {-11,56,24,-45,-3,41,npa4[10],-npa5[1],npa4[2],-43};
Plane Surface (114) = {1014};
Line Loop (1015) = {4,46,20,-47};
Plane Surface (115) = {1015};
Line Loop (1016) = {2,46,-21,-45};
Plane Surface (116) = {1016};
Line Loop (1017) = {6,50,-29,-49};
Plane Surface (117) = {1017};
Line Loop (1018) = {7,49,-18,-48};
Plane Surface (118) = {1018};
Line Loop (1019) = {9,55,23,-56};
Plane Surface (119) = {1019};
Line Loop (1020) = {12,54,28,-55};
Plane Surface (120) = {1020};
Line Loop (1021) = {13,51,31,-52};
Plane Surface (121) = {1021};
Line Loop (1022) = {15,53,-26,-52};
Plane Surface (122) = {1022};
Line Loop (1023) = {-19,58,-33,-57};
Plane Surface (123) = {1023};
Line Loop (1024) = {32,58,34,-60};
Plane Surface (124) = {1024};
Line Loop (1025) = {25,60,35,-59};
Plane Surface (125) = {1025};
Line Loop (1026) = {22,59,36,-57};
Plane Surface (126) = {1026};

npa6[] = Translate {0., 0., hl+hp }{ Duplicata { Surface{ 101,102,103,104,105,110,111,
112,113,114,115,116,117,118,119,120,121,122,123,124,125,126}; } };

```

```

npa7[] = Translate {0., 0., 2*(hl+hp) }{ Duplicata { Surface{ 101,102,103,104,105,110,111,
112,113,114,115,116,117,118,119,120,121,122,123,124,125,126}; } };

npa8[] = Translate {0., 0., 3*(hl+hp) }{ Duplicata { Surface{ 101,102,103,104,105,110,111,
112,113,114,115,116,117,118,119,120,121,122,123,124,125,126}; } };

npa9[] = Translate {0., 0., 4*(hl+hp) }{ Duplicata { Surface{ 101,102,103,104,105,110,111,
112,113,114,115,116,117,118,119,120,121,122,123,124,125,126}; } };

npa10[] = Translate {0., 0., 5*(hl+hp) }{ Duplicata { Surface{ 101,102,103,104,105,110,111,
112,113,114,115,116,117,118,119,120,121,122,123,124,125,126}; } };

npa11[] = Translate {0., 0., 6*(hl+hp) }{ Duplicata { Surface{ 101,102,103,104,105,110,111,
112,113,114,115,116,117,118,119,120,121,122,123,124,125,126}; } };

npa12[] = Translate {0., 0., 7*(hl+hp) }{ Duplicata { Surface{ 101,102,103,104,105,110,111,
112,113,114,115,116,117,118,119,120,121,122,123,124,125,126}; } };

npa13[] = Translate {0., 0., 8*(hl+hp) }{ Duplicata { Surface{ 101,102,103,104,105,110,111,
112,113,114,115,116,117,118,119,120,121,122,123,124,125,126}; } };

npa14[] = Translate {0., 0., 9*(hl+hp) }{ Duplicata { Surface{106,107,108,109}; } };

//superficies
Surface Loop (2001) = {101,102,103,104,105,106,107,108,109,110,111,112,113,114,115,116,117,
118,119,120,121,122,123,124,125,126,npa6[],npa7[],npa8[],npa9[],npa10[],npa11[],npa12[],npa13[],npa14[]};
Volume (201) = {2001};

Physical Surface (3002) = {106,107,108,109};

```

Anexo II

Programa exemplo da estrutura vigada de 9 pisos, freeFEM++.

```
load "Element_P3"
load "msh3"
load "medit"

mesh3 Th("9mcv.mesh");

// CONSTANTES DO MATERIAL-----
real E = 30e6,
      H = .2,
      poisson = 0.16,
      mu = E/(2*(1+poisson)),
      lambda = E*poisson/((1+poisson)*(1-2*poisson)),
D=E*H^3/(12*(1-poisson^2));
// func f1=-5;
      func g = -25.;
      int num;
// DEFINIÇÃO DOS ESPAÇOS-----
//fespace Vh(Th,P1);
      //fespace Vh(Th,[P2,P2,P2]), Vh1(Th,P2), Vh2(Th,P2);
fespace Vh(Th,P2);
Vh u1,u2,u3,v1,v2,v3,
Sx, Sy, Sz, Sxy, Sxz, Syz,
Mx,My,Mxy;
// INTRODUÇÃO DAS MACRO's
real sqrt2=sqrt(2.);
macro epsilon(u1,u2,u3) [dx(u1),dy(u2),dz(u3),(dz(u2)+dy(u3))/sqrt2,(dz(u1)+dx(u3))/sqrt2,(dy(u1)+dx(u2))/sqrt2];
macro div(u1,u2,u3) ( dx(u1)+dy(u2)+dz(u3) ) // EOM
// SOLUÇÃO DO PROBLEMA-----
solve Lame([u1,u2,u3],[v1,v2,v3], solver=CG,eps=1.e-1)=
      int3d(Th)( lambda*div(u1,u2,u3)*div(v1,v2,v3)
+ 2.*mu*(epsilon(u1,u2,u3)'*epsilon(v1,v2,v3))
      -int3d(Th)(g*v3) //
      // - int2d(Th,3001)(g*v3)
      + on(3002,u3=0,u2=0,u1=0);
// DESLOCAMENTOS-----
real dmax= u3[].max,
dmin= u3[].min,
      coef=abs(1/dmin);
      mesh3 Thm= movemesh3(Th, transfo=[x+u1,y+u2,z+u3*coef]);
plot (Thm,wait=1 );
plot ([u1,u2,u3], ps="lame3d.eps", coef=coef);
// TENSÕES-----
Sx = lambda*(dx(u1)+dy(u2)+dz(u3)) + 2*mu*dx(u1);
Sy = lambda*(dx(u1)+dy(u2)+dz(u3)) + 2*mu*dy(u2);
Sz = lambda*(dx(u1)+dy(u2)+dz(u3)) + 2*mu*dz(u3);
Sxy = mu*(dy(u1) + dx(u2));
Sxz = mu*(dz(u1) + dx(u3));
Syz = mu*(dz(u2) + dz(u2));
plot(Sx,wait=1);
plot(Sy,wait=1);
// MOMENTOS NA LAJE-----
Mx = D*(dxx(u3)+poisson*dyy(u3));
My = D*(dyy(u3)+poisson*dxx(u3));
Mxy = D*(1-poisson)*dxy(u3);
plot (Mx, wait=true,cmm ="Mx laje",fill=1,value=true,ps="Mxlaje.eps",coef=coef);
plot (My, wait=true,cmm ="My laje",fill=1,value=true,ps="Mylaje.eps",coef=coef);
plot (Mxy, wait=true,cmm ="Mxy laje",fill=1,value=true,ps="Mxylaje.eps",coef=coef);
```

```

real  MxM=Mx[] .max, Mxm=Mx[] .min,
MyM=My[] .max, Mym=My[] .min,
MxyM=Mxy[] .max, Mxym=Mxy[] .min;
// RESULTADOS E OUTPUT's-----
cout << "lambda ="<< lambda << endl
<< "mu =" << mu << endl
    << "Esbelteza =" << D << endl
    << " max deslocamento = " << dmin << endl
<< " Momentos na Laje: " << endl
<< " Mx max=" << MxM << ", Mx min=" << Mxm << endl
    << " My max=" << MyM << ", My min=" << Mym << endl
<< " Mxy max=" << MxyM << ", Mxy min=" << Mxym << endl;

savemesh(Thm,"Thm.mesh");
ofstream file("deslocamentos.pos");

file << "View \" "<<"DESLOCAMENTOS"<<" \" {"<< endl;

//registro das coordenadas dos vertice dos tetraedros

for (int k=0; k< Th.nt; k++)
{

file<<"VS(";

for (int j=0; j <3; j++) file << Th[k] [j] .x <<","<< Th[k] [j] .y <<","<< Th[k] [j] .z<<",";
file << Th[k] [3] .x <<","<< Th[k] [3] .y <<","<< Th[k] [3] .z;
file<<"){"<<endl;
//registro dos deslocamentos em cada vertice

for (int j=0; j <3; j++) file << u1[] [Vh(k,j)]<< ","
<< u2[] [Vh(k,j)]<< ","
<< u3[] [Vh(k,j)]<< ","<<endl;
file << u1[] [Vh(k,3)]<< ","
<< u2[] [Vh(k,3)]<< ","
<< u3[] [Vh(k,3)]<<"}<<endl;
}

file<< "};"<<endl;

// registro dos momentos

//registro dos momentos em x
ofstream file2("momentos_em_x.pos");

file2 << "View \" "<<"MOMENTOS"<<" \" {"<< endl;

//registro das coordenadas dos vertice dos tetraedros

for (int k=0; k< Th.nt; k++)
{

file2<<"SS(";

for (int j=0; j <3; j++)
file2 << Th[k] [j] .x <<","<< Th[k] [j] .y <<","<< Th[k] [j] .z<<",";
file2 << Th[k] [3] .x <<","<< Th[k] [3] .y <<","<< Th[k] [3] .z;
file2<<"){"<<endl;

//registro dos momentos em cada vertice

```

```

for (int j=0; j <3; j++) file2 << Mx[] [Vh(k,j)]<< " , "<<endl;
                    file2 << Mx[] [Vh(k,3)]<<"};"<<endl;
    }

                    file2<< "};"<<endl;

//registro dos momentos em y
ofstream file3("momentos_em_y.pos");

file3 << "View \ " "<<"MOMENTOS"<<" \ " {"<< endl;

//registro das coordenadas dos vertices dos tetraedros

    for (int k=0; k< Th.nt; k++)
    {

        file3<<"SS(";

        for (int j=0; j <3; j++)
file3 << Th[k] [j] .x <<" , "<< Th[k] [j] .y <<" , "<< Th[k] [j] .z<<" , ";
file3 << Th[k] [3] .x <<" , "<< Th[k] [3] .y <<" , "<< Th[k] [3] .z;
        file3<<"){"<<endl;

//registro dos momentos em cada vertice

        for (int j=0; j <3; j++) file3 << My[] [Vh(k,j)]<< " , "<<endl;
                    file3 << My[] [Vh(k,3)]<<"};"<<endl;
    }

                    file3<< "};"<<endl;

//registro dos momentos em xy
ofstream file4("momentos_em_xy.pos");

file4 << "View \ " "<<"MOMENTOS"<<" \ " {"<< endl;

//registro das coordenadas dos vertices dos tetraedros

    for (int k=0; k< Th.nt; k++)
    {

        file4<<"SS(";

        for (int j=0; j <3; j++)
file4 << Th[k] [j] .x <<" , "<< Th[k] [j] .y <<" , "<< Th[k] [j] .z<<" , ";
file4 << Th[k] [3] .x <<" , "<< Th[k] [3] .y <<" , "<< Th[k] [3] .z;
        file4<<"){"<<endl;

//registro dos momentos em cada vertice

        for (int j=0; j <3; j++) file4 << Mxy[] [Vh(k,j)]<< " , "<<endl;
                    file4 << Mxy[] [Vh(k,3)]<<"};"<<endl;
    }

                    file4<< "};"<<endl;

ofstream file5("mx_1mcv.dat");

    for (int j=0; j <=20; j++)
        file5 << j/5. <<" "<< Mx( j/5. , 0.5 , .0 )<<endl;

```

```
// DESLOCAMENTO MÁXIMO POR PISO
```

```
cout<<"deslocamento no piso 1 = "<<u3( 3. , 3. , 3.1 )<<endl  
<<"deslocamento no piso 2 = "<<u3( 3. , 3. , 6.2 )<<endl  
<<"deslocamento no piso 3 = "<<u3( 3. , 3. , 9.3 )<<endl  
<<"deslocamento no piso 4 = "<<u3( 3. , 3. , 12.4)<<endl  
<<"deslocamento no piso 5 = "<<u3( 3. , 3. , 15.5 )<<endl  
<<"deslocamento no piso 6 = "<<u3( 3. , 3. , 18.6)<<endl  
<<"deslocamento no piso 7 = "<<u3( 3. , 3. , 21.7)<<endl  
<<"deslocamento no piso 8 = "<<u3( 3. , 3. , 24.8)<<endl  
<<"deslocamento no piso 9 = "<<u3( 3. , 3. , 27.9)<<endl  
<<"momento maximo x = "<<Mx( 3, 3, 27.9 )<<endl  
<<"momento minimo x = "<<Mx( 0.3, 0.3 , 24.7 )<<endl  
<<"momento maximo xy = "<<Mxy( 0.3, 0.3 , 24.7 )<<endl;
```