

# ESTRUTURAR O RACIOCÍNIO MATEMÁTICO NUMA AULA DE 2.º ANO DE ESCOLARIDADE

## Margarida Rodrigues

CIED, ESELx-Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa & UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

margaridar@eselx.ipl.pt

## Lurdes Serrazina

CIED, ESELx-Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa & UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

lurdess@eselx.ipl.pt

## Ana Caseiro

CIED, ESELx-Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa

anac@eselx.ipl.pt

## RESUMO.

*Este artigo tem como objetivo analisar a interação entre uma professora do 2.º ano de escolaridade e os seus alunos focando a estruturação do raciocínio matemático. O estudo segue uma metodologia qualitativa de carácter interpretativo e centra-se na resolução de uma tarefa, integrada numa sequência de tarefas, numa turma de 25 alunos de uma escola da periferia de Lisboa. Os dados foram recolhidos através da observação participante, apoiada por gravações áudio e vídeo e dos documentos escritos dos alunos. A análise foi realizada através da análise de conteúdo, focada nas ações da professora que promovem o desenvolvimento do raciocínio dos alunos. Os resultados mostram que a professora através das suas ações levou os alunos a validar uma conjectura estabelecendo generalizações e respetivas justificações*

## ABSTRACT.

*This article aims to analyse the interaction between a second grade teacher and her students focusing on the structuring of mathematical reasoning. The study follows a qualitative methodology of interpretative nature and focuses on the resolution of a task, integrated in a sequence of tasks, in a class of 25 students from a school in the periphery of Lisbon. Data were collected through participant observation, supported by audio-video recordings and students' written documents. The analysis was carried out through content analysis, focused on the actions of the teacher that promote the development of students' reasoning. The results show that the teacher through her actions led the students to validate a conjecture establishing generalizations and their justifications.*

**Palavras-chave:** raciocínio matemático; ações do professor; processos de raciocínio dos alunos.

## INTRODUÇÃO

A importância de desenvolver o raciocínio matemático constitui um aspeto consensual no seio da comunidade de educação matemática, tanto em termos nacionais (Mata-Pereira & Ponte, 2018; Rodrigues, 2012) como internacionais (De Villiers, 2004; Harel & Sowder, 2007; Jeannotte & Kieran, 2017; Stylianides, 2009). As orientações curriculares internacionais convergem igualmente nesse sentido (NCTM, 2017). Também o documento curricular *Aprendizagens Essenciais* (ME, 2018), recentemente publicado em Portugal, sublinha esta importância no contexto escolar, em todos os temas matemáticos. Neste documento, é referido que a ação do professor no 1.º ciclo deve ser orientada por forma a que “os alunos desenvolvam a capacidade de raciocinar matematicamente, bem como a capacidade de analisar os raciocínios de outros” (ME, 2018, p. 4). Justifica-se, assim, a pertinência deste estudo centrado no raciocínio matemático dos alunos e em como pode o professor promover nos alunos esse raciocínio.

O presente artigo tem como objetivo analisar a interação entre uma professora de 2.º ano de escolaridade e os seus alunos focando a estruturação do raciocínio matemático.

## COMO PROMOVER O RACIOCÍNIO MATEMÁTICO DOS ALUNOS

Muita da literatura mobiliza o constructo de raciocínio matemático sem, contudo, o definir de forma clara, tal como é salientado por Jeannotte e Kieran (2017). Passamos a apresentar as definições deste conceito por autores que se preocupam em clarificar o significado do mesmo. Jeannotte e Kieran (2017) colocam a tónica na comunicação e definem o “raciocínio matemático como um processo de comunicação com outros e consigo próprio que permite inferir afirmações matemáticas a partir de outras afirmações matemáticas” (p. 7). Sumpter (2013) assume uma definição muito diferente, definindo raciocínio matemático como uma “linha de pensamento adotada para produzir afirmações e chegar a conclusões na resolução de tarefas” (p. 1120), propondo dois tipos de raciocínio: criativo e imitativo, sendo que este último contempla o que a autora designa por raciocínio memorizado e raciocínio algorítmico. Stylianides (2009), por sua vez, associa o raciocínio à prova, encarando-os de um modo integral como a atividade envolvida no processo de dar sentido e de estabelecer conhecimento matemático. No presente artigo, assumimos a definição de Jeannotte e Kieran (2017), que consideramos convergente com a de Stylianides (2009), entendendo o processo de inferência como o processo de utilizar informação matemática já conhecida para obter novo conhecimento ou novas conclusões. Assim, nesta aceção não consideramos aspetos imitativos como sendo raciocínio.

Embora se possam considerar dois aspetos no raciocínio matemático, o estrutural e o processual, de acordo com Jeannotte e Kieran (2017), ambos deverão ser encarados de um modo dialético já que um e outro contribuem para uma construção mútua. Assim, as autoras rejeitam uma visão dualista ou dicotómica destes dois aspetos. O as-

peto estrutural tem uma natureza estática e compreende os vários tipos de raciocínio: a dedução, a indução e a abdução. O aspeto processual tem uma natureza dinâmica e temporal e compreende diferentes processos que as autoras dividem em duas grandes categorias: os relacionados com a procura de semelhanças e diferenças e os relacionados com a validação. Os processos da primeira categoria compreendem generalizar, conjecturar, identificar um padrão, comparar e classificar. Os processos da segunda categoria compreendem validar, justificar, provar e provar formalmente. Também Stylianides (2009), numa abordagem similar, e focando-se no aspeto processual, distingue duas grandes categorias, o processo de generalizar e o processo de fundamentar as afirmações matemáticas.

No que se refere ao processo de generalizar, Stylianides (2009) inclui no mesmo os processos de identificar um padrão e de formular uma conjectura, distinguindo-os, tal como Jeannotte e Kieran (2017), pelo facto de a associação de um valor epistémico de provável ou talvez estar apenas presente no processo de formular uma conjectura. Assim, segundo Stylianides (2009), o processo de identificar um padrão envolve identificar uma relação geral num determinado conjunto de dados enquanto o processo de conjecturar envolve formular uma hipótese acerca de uma relação matemática geral baseada numa evidência incompleta. O autor assume o ponto de vista dos alunos, na mesma linha de Harel e Sowder (2007), afirmando que os alunos estarão a conjecturar se estes formularem uma hipótese da qual não estão certos se é verdadeira ou falsa, requerendo, pois, que a mesma seja testada ou examinada. Assumimos, tal como Stylianides (2009), uma abordagem inclusiva, considerando que quando os alunos identificam um padrão ou conjecturam, também estão simultaneamente a generalizar, contrariamente a Jeannotte e Kieran (2017) que estabelecem uma distinção entre o processo de generalizar e os restantes processos relacionados com a procura de semelhanças e diferenças.

Os processos de validação, segundo Jeannotte e Kieran (2017), visam mudar o valor epistémico das afirmações matemáticas para verdade, falso ou mais provável, incluindo justificar e provar. Por sua vez, o processo de provar pode ser realizado através de um exemplo genérico ou de uma demonstração (Stylianides, 2009). O exemplo genérico usa um caso particular como representativo do caso geral.

No que respeita às ações do professor para promover o raciocínio matemático, Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013) propõem um quadro de análise articulando vários tipos de raciocínio como a generalização (associada ao raciocínio indutivo e abdução) e a justificação (associada ao raciocínio dedutivo). Nesse quadro, as ações de *Convidar* levam os alunos a um contato inicial com o que está sendo ou será discutido, e as outras ações apoiam as discussões matemáticas. Através de perguntas ou outros tipos de intervenção, as ações de *Guiar/Apoiar* conduzem os alunos, de forma discreta ou explícita, a continuar a participar na resolução de um problema já iniciado. Nas ações de *Informar/Sugerir* a responsabilidade do discurso matemático fica a cargo do professor que “assume o papel de introduzir informação, proporcionar argumentos, ou validar respostas dos alunos” (Ponte et al., 2013, p. 59). Já em *Desafiar*, o professor “coloca o aluno na situação de ser ele próprio a avançar em terreno novo, seja em termos de representações, da interpretação de enunciados, do estabelecimento de conexões, ou de

raciocinar, argumentar ou avaliar” (Ponte et al., 2013, p. 59).

Para Ellis, Özgür e Reiten (2018), “as discussões em sala de aula devem concentrar-se tanto em ideias matemáticas importantes quanto no desenvolvimento de significados matemáticos por meio de processos comunicativos (p. 2). Nesse processo, o papel desempenhado pelo professor é fundamental e vai desde selecionar tarefas apropriadas, a definir quando e como estimular o pensamento dos alunos, até incentivar que estes assumam a responsabilidade intelectual de construir e defender as suas ideias matemáticas. Estas autoras propõem um modelo de organização das ações dos professores em quatro categorias (elicitando, respondendo, facilitando e ampliando), de acordo com o seu potencial para apoiar o raciocínio dos alunos.

As ações incluídas na categoria *Elicitando o raciocínio dos alunos* são aquelas nas quais os professores pretendem extrair, identificar, esclarecer e entender as ideias dos alunos, que permitem os professores avaliar o pensamento dos alunos enquanto participam da discussão. A categoria *Respondendo ao raciocínio dos alunos* corresponde à forma como o professor reage ao pensamento dos alunos, como “valida as respostas dos alunos, corrige raciocínios ou estratégias de solução incompletos ou imprecisos ou encoraja os alunos a assumirem esses papéis” (Ellis et al., 2018, p. 12), contemplando também o redizer as afirmações dos alunos. Quando os professores respondem às ideias dos alunos, “desenvolvendo o seu pensamento, fornecendo informações, explicações ou estratégias alternativas de solução, ou incentivando os alunos a desenvolver soluções diferentes” (Ellis et al., 2018, p. 14), realizam ações que se enquadram na categoria *Facilitando o raciocínio dos alunos*. Assim, esta categoria subdivide-se em duas subcategorias: *guiar e fornecer*. *Ampliando o raciocínio dos alunos* diz respeito às ações que “aumentam as oportunidades dos alunos de ampliar o seu raciocínio matemático, particularmente em termos de generalizar as suas estratégias ou ideias e desenvolver justificações matematicamente apropriadas” (Ellis et al., 2018, p. 18). Esta categoria corresponde à categoria de *desafiar* proposta por Ponte et al. (2013) e abarca as ações que têm a intenção de promover um raciocínio matemático mais sofisticado, desta forma está no extremo de um *continuum* para o desenvolvimento do raciocínio matemático.

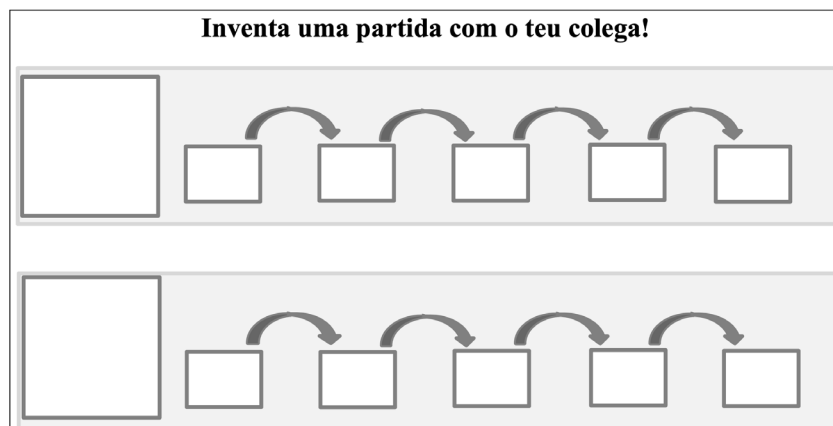
## METODOLOGIA

Este estudo segue uma metodologia qualitativa de carácter interpretativo. O projeto, onde se insere, utiliza uma metodologia de investigação baseada em design, visando produzir teorias locais de ensino que possam constituir materiais de trabalho para o professor (Gravemeijer & Cobb, 2013).

Os dados aqui apresentados foram recolhidos numa turma do 2.º ano com 25 alunos de uma escola pública de um bairro da periferia de Lisboa. A professora da turma é uma professora experiente, empenhada no seu desenvolvimento profissional, e com uma boa relação com a matemática.

A tarefa aqui analisada (Figura 1) foi concebida por Jean Marie Kraemer, membro da equipa do projeto, e resolvida na turma em 2 de dezembro de 2015. Propõe-se a cada

**Figura 1.** Tarefa explorada pelos alunos.



par de alunos que, assumindo o papel de rapaz ou de rapariga respetivamente, invente uma partida de berlindes e conclua o que acontece. A tarefa tem associado um raciocínio inversivo pois os alunos sabem que, em cada uma das jogadas, se um jogador ganha, o outro perde a mesma quantidade. Foi a sexta de uma sequência de oito tarefas que pretendiam desenvolver o raciocínio quantitativo aditivo e a flexibilidade de cálculo. Algumas das tarefas anteriores envolveram ganhos e perdas em tarefas com o contexto de jogo de berlindes. Na fase de resolução da tarefa, os alunos trabalharam a pares ou trios, tendo a atividade de dois pares (Paulo e João, Luís e Lúcia) sido videogravada, bem como a discussão coletiva com toda a turma. Estes pares foram selecionados por indicação da professora pela sua facilidade de comunicação e de expressão dos seus raciocínios. Neste artigo, focamo-nos apenas no trabalho realizado pelo par Luís e Lúcia, bem como na discussão coletiva.

Os dados foram recolhidos através de recolha documental (trabalhos escritos dos alunos) e da observação participante, complementada pelas transcrições das gravações. A análise de dados foi realizada através da análise de conteúdo tendo presente o quadro teórico apresentado antes.

## **RESULTADOS**

### *A emergência de uma conjectura*

Na apresentação da tarefa, a professora começa por dar a palavra a um aluno que explica:

Aluno — Quando a rapariga ganha, o rapaz perde os berlindes que a rapariga ganhou. E quando o rapaz ganha, a rapariga é que perde.

Com base nas tarefas anteriormente exploradas, este aluno verbaliza a inversão presente num jogo de berlindes. Seguidamente, a professora apoia a intervenção do aluno, chamando a atenção da turma para a necessidade de se respeitar esta regra na invenção

da partida. A professora foca ainda o registo simbólico, já usado anteriormente, em que os alunos usam “+” para indicar os ganhos e “-” para indicar as perdas de berlindes.

Os alunos exploram a tarefa sem dificuldades, respeitando a regra enunciada antes. Alguns pares iniciam a partida com um número diferente para rapaz e rapariga; outros partem com o mesmo número. Todos eles chegam a números finais diferentes.

O par Luís e Lúcia inicia a partida com 12 berlindes para ambos, registando para a rapariga  $-5$ ,  $+5$ ;  $-4$  e o inverso para o rapaz. Ao verificar que nesse momento, a rapariga tinha 8 berlindes e estava a perder em relação ao rapaz, Luís inverte a última jogada para  $+4$  para a rapariga e  $-4$  para o rapaz. Depois, conclui com  $-1$  para a rapariga e  $+1$  para o rapaz. Interpela a colega, personificando o rapaz e a rapariga como se fossem eles próprios:

Luís — Queres ganhar? Podemos empatar!

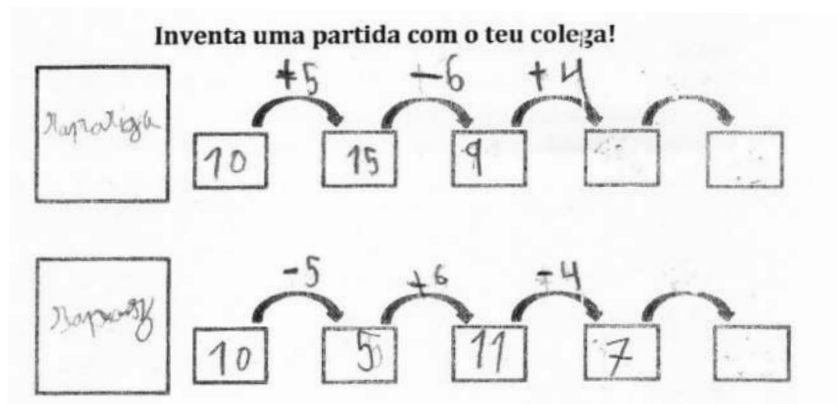
A partir deste momento, Luís e Lúcia apagam os últimos dois saltos, fazendo tentativas de novos números de ganhos e perdas para empatarem. Quando a professora se aproxima, Luís dá conta dessa intenção: “Professora, nós estamos a tentar empatar”.

Como não conseguem chegar ao mesmo número final, Luís decide apagar tudo, secundado por Lúcia. Começam então pelo número 10 para ambos os jogadores e registam para a rapariga  $-5$ ,  $+6$  e o inverso para o rapaz. Entretanto, Luís vai ficando com algum desalento e comenta para as investigadoras quando estas se aproximam: “Nós não conseguimos empatar!...”. Seguidamente, Luís regista  $-1$  para a rapariga (e o inverso), e vendo que obtém 10 para ambos os jogadores, apaga e regista para o penúltimo salto  $-4$  (e  $+4$ ) para que o 10 seja o último e não o penúltimo número. Toma algum entusiasmo perante a possibilidade de empate e diz para a Lúcia: “Tentamos os dois chegar ao 10 e pronto!”. Nesta sua afirmação, há já uma ideia de que para empatar, teria de obter como número final o mesmo com que iniciou para ambos os jogadores. Volta a trocar as jogadas, apagando desde o início e fazendo novos registos:  $+5$ ,  $-6$ ,  $+4$  e o inverso para o rapaz. Registam 7 no penúltimo quadrado da linha do rapaz (como resultado de  $11-4$ ) mas não chegam a registar no quadrado correspondente da linha da rapariga (Figura 2) pois a professora inicia a discussão coletiva e ambos os alunos prestam atenção.

Provavelmente, Luís decidiu apagar e trocar os ganhos e perdas anteriormente registados para que Lúcia ficasse mais satisfeita ao chegar quase ao término das jogadas com mais berlindes, uma vez que esta, por várias vezes, verbalizava a vontade de ganhar, ao que Luís reagia dizendo que ela já tinha ganho nas partidas anteriores (numa outra tarefa explorada antes noutro dia).

Verifica-se, assim, que o par Luís e Lúcia confere uma nova complexidade à tarefa, acrescentando-lhe o desafio da pretensão do empate, a que atribuem o significado de terminarem com o mesmo número de berlindes. Durante a exploração, emerge, pois, a conjectura *É possível empatar* da qual não estão certos acerca da sua veracidade, pois não conseguiram concretizar o seu intento, após várias tentativas, e face ao facto de terem interrompido a exploração com a discussão da tarefa em turma. No entanto, no momento da discussão, Luís sente alguma confiança na sua veracidade, tal como veremos a seguir.

**Figura 2.** Tarefa explorada por Luís e Lúcia.



**Discussão coletiva: As ações da professora e os processos de generalizar e justificar**

A professora inicia a discussão, chamando um par para registrar no quadro a sua invenção de partida. Foca a comparação entre o total de ganhos e de perdas ao longo de todo o jogo bem como o respetivo registo simbólico. Em seguida, e com a resolução feita pelo par anterior registada no quadro, interpela o par Luís e Lúcia sobre a sua intenção de empate. Apresentamos o extrato do diálogo que se seguiu:

Professora — Este grupo, o Luís e a Lúcia, lembraram-se de (...) tentar arranjar maneira de chegar ao final empatados. Mas empatados em quê? O que é empatados?

Aluno — Empatados com o mesmo número de...

Professora — São eles a falar. Luís, vocês querem que eles empatem?

Luís — Sim.

Professora — Empatem como? Acabem com o mesmo número aqui (*aponta para os dois quadros finais*) ou que ganhem o mesmo (*aponta para o meio*)?

Luís — Eu acho que é acabar com o mesmo número, não sei.

Como podemos verificar pelo extrato, a professora começa por tentar compreender o pensamento dos alunos, questionando acerca do que consideram como “empatados”, questão que repetiu diversas vezes (*ação de elicitare*).

Seguidamente, a professora tenta ampliar o raciocínio dos alunos, introduzindo a situação de os jogadores poderem ou não empatar em cada uma das jogadas. Dessa forma, segue-se o seguinte diálogo:

Professora — Agora a pergunta é: eles podem terminar empatados? Podem empatar aqui nas jogadas?

Turma — Não.

Professora — Nas jogadas podem empatar? Porquê?

Luís — Porque cada vez que o rapaz ganha a rapariga perde.

Professora — Então aqui nos saltos nós não conseguimos fazer isso, ou conseguimos?

Luís — Não. Foi isso que eu percebi.

Professora — Não. Como é que eles vão empatar aqui nos saltos? Mas vocês estão a tentar que eles terminem?

Turma — No mesmo número.

Nesta situação, a professora, através das questões que coloca, *encoraja os alunos a refletirem* sobre a possibilidade de empate em cada uma das jogadas. Simultaneamente, questiona pelo porquê, *solicitando uma justificação*. Interpelado pela professora, Luís *justifica* a razão de ser impossível empatar em cada uma das jogadas: “Porque cada vez que o rapaz ganha a rapariga perde”. Esta justificação acaba por corresponder à regra enunciada na fase da apresentação da tarefa e que todos aplicaram na invenção da partida, mas que agora assume um novo cariz, já que serve o propósito de validar uma generalização, ou seja, a de que é sempre impossível empatar em cada uma das jogadas.

A discussão prossegue:

Professora — Para eles terminarem com o mesmo número, o que temos de pensar? Começam com o mesmo?

Luís — Começam. Começam com o 10.

A professora agora *encoraja os alunos a raciocinar* sobre as condições para terminar com o mesmo número, avançando com uma hipótese: “Começam com o mesmo?”. Luís responde afirmativamente, indicando o número concreto com que iniciaram a partida.

Professora — Mas agora a pergunta é: para no final terminarem com o mesmo número, podem começar com o mesmo número?

Luís — Acho que sim.

(...)

Luís — Nós dantes quase que isso dava.

Professora - Então vamos lá ver se isso dava.

Luís - Mas ainda não acabámos.

Professora - Os colegas vão ajudar. Sim, mas nós ajudamos. Luís e Lúcia, agora são vocês.

Luís expressa que, com o trabalho autónomo, quase alcançou a pretensão de empatar, isto é, de iniciar e terminar com o mesmo número (“Nós dantes quase que isso dava”), manifestando, assim, a sua confiança na veracidade da conjectura. Em seguida, a professora *convida* o par Luís e Lúcia a apresentar a sua resolução, como forma de confirmar essa possibilidade.

Lúcia inicia o registo da sua resolução. A professora, entretanto, aproxima-se das investigadoras e comenta: “Eu não experimentei. Não estava à espera desta!”. O facto de a professora não ter pensado previamente nesta situação fez com que a questão do empate fosse também desafiante para si própria. Luís dá um pulo de contentamento, exclamando “Ah! Já sei!” pois acaba de descobrir os últimos saltos para empatar, ao olhar para a sua folha inacabada. E regista no quadro “-3” e “+3”. Os registos são apagados e rescritos de novo pois estavam trocados já que a ordem no quadro das linhas do rapaz e da rapariga era inversa à que o par registara na sua folha. Depois de Lúcia concluir o registo dos números até à penúltima jogada, Luís explica a partida, apontando para os números:

Luís — Eu comecei com 10. A Lúcia com 10. Eu, menos 5.

Professora — Perdeste 5.

Luís — Ela, mais 5.

Professora — Ela ganhou 5.

Luís — Depois o rapaz...

Professora — Ganhaste 6.

Luís — E a rapariga perdeu 6.

Professora — Sim.

Luís — Depois o rapaz perdeu 4 e a rapariga ganhou 4. Já sei como empatar! (*pula de contentamento*) Eu sei como empatar! Mais 3, menos 3!

Professora — Calma. Então e agora?

Aluno — Mais 3 para o rapaz, fica 10, e menos 3 para a rapariga, dá 10 também. Olha, começaram em 10 e acabaram em 10. Por isso, os dois ganharam zero.

Professora — Então dá para empatar, ou não, no final?

Turma — Dá.

A professora acompanha a explicação de Luís *redizendo*, por vezes, por outras palavras, o que ele refere, com a preocupação de ir dando sentido contextual de ganhos e perdas às expressões simbólicas registadas no quadro. Uma vez que não concluíra o trabalho no momento de exploração autónoma, Luís termina-o durante a apresentação, manifestando o seu entusiasmo ao obter o empate pretendido: “Já sei como empatar!”.

Após chegarem à conclusão da possibilidade de empate no final do jogo, e de modo a auxiliar os alunos a refletirem sobre o que aconteceu ao longo das jogadas para que tal acontecimento fosse possível, a professora pede aos alunos para, através do exemplo apresentado, tentarem mostrar essa possibilidade (ação de *ampliar o raciocínio*). O extrato do diálogo seguinte ilustra essa situação:

Professora — Olha, vamos ver. É uma questão de pensar. Começaram em 10, o rapaz e a rapariga, e acabaram em...?

Turma — 10.

(...)

Professora — Vamos ver. Diz, Maria. A Maria queria falar. Maria?

Maria vai ao quadro explicar.

Maria — Eu sei porque é que eles empataram.

Professora — Porquê?

Maria — Porque  $3+6$  (aponta para +3 e +6) dá 9 e  $4+5$  (aponta para -4 e -5) também dá 9.

Professora — Então vá. Quanto é que deu aqui? (aponta para a linha do rapaz)

Maria — 9.

Professora — Mas como é que isso se escreve? Ganharam?

Maria — Mais 9.

Professora — E como é que eu escrevo o que perdeu?

Maria — Menos 9.

Professora — Que dá?

Maria — 0.

A professora vai registando  $+9-9 = 0$ .

Professora — Esta partida, tal como começou acabou. E este? (*aponta para a linha da rapariga*) Começa com? Aliás, quanto é que ganhou?

Maria — Mais 5.

Professora — E mais?

Luís — 4.

Professora — Dá mais quanto?

Maria e Luís — 9.

Professora — E depois, perdeu quanto? Perdeu 6 e perdeu?

Maria — 3.

Professora — Dá quanto?

Maria — Menos 9.

A professora vai registando  $+9-9 = 0$ .

Professora — Anulam-se.

Como podemos verificar pelo extrato, a professora começa por *encorajar os alunos a raciocinar* sobre a situação. Verificando que uma aluna, Maria, se encontrava a raciocinar corretamente (“Porque  $3+6$  dá 9 e  $4+5$  também dá 9”), a professora foi *guiando* a sua explicação, de forma a garantir que todos os alunos da turma a compreendessem, começando por auxiliá-la a focalizar em aspetos específicos e fornecendo, através das questões que colocava, constantes orientações ao longo da discussão. Assim, Maria apresenta uma justificação que constitui uma forma de validação da conjectura através de um exemplo genérico. Quando Maria se apoia no exemplo da resolução de Luís e Lúcia para *justificar* a possibilidade de empate, fá-lo mostrando que as somas dos ganhos e das perdas de berlindes é igual e implicitamente *prova* que existirá empate para quaisquer partidas em que tal se verifique, generalizando, assim, para todos os casos nessas condições. No entanto, a forma como verbaliza a justificação é bastante económica e é a ação de *guiar* da professora que leva a uma explicitação do significado contextual das referidas somas, ganhos ou perdas, e que o facto de as mesmas serem iguais leva ao seu anulamento, resultando no final em 0 ganhos ou perdas. Assim, a professora *fornece* ela própria uma *explicação que sintetiza* a justificação de Maria para o caso da rapariga (“Esta partida, tal como começou acabou”) que se aplica igualmente para o caso do rapaz, dada a natureza inversiva do jogo, em que o anulamento se verifica por se inverter os ganhos e perdas, mantendo-se os mesmos valores numéricos. Para o caso do rapaz, a professora segue o mesmo processo de focalização no balanço entre os ganhos e perdas, registando simbolicamente o anulamento das somas iguais.

A professora passa à síntese da discussão:

Professora — Olhem, vou fazer a pergunta outra vez. É possível empatar nos saltos?

Turma — Sim!

Professora — É possível empatar no final, a terminar com o mesmo número, que era o que eles queriam saber?

Turma — Sim.

Professora — É possível empatar no fim, quer dizer, terminar com o mesmo número e é possível empatar nos saltos desde que comece com o mesmo...

Turma — Número.

(...)

Professora (*olhando para Luís*) — Conseguiram tirar as vossas conclusões? (*olhando para a turma*) É possível terminar com o mesmo número, é possível empatar nos saltos desde que se

comece...

Turma — com o mesmo número.

Professora — com o mesmo número.

Na síntese da discussão, a professora *desafia os alunos a estabelecerem generalizações*, considerando o empate de terminar com o mesmo número, e simultaneamente, o empate nos saltos, encarados, não jogada a jogada, mas como balanço global de todo o jogo, em que o ganho de berlindes é nulo para ambos os jogadores, condição esta simultânea que só se verificará se ambos os jogadores começarem com o mesmo número. As generalizações, embora apoiadas pelo caso concreto da partida inventada por Luís e Lúcia, e expressas pela professora, são entendidas pelos alunos para quaisquer números. As outras variantes destas generalizações (acabar com o mesmo número, mas partindo de números diferentes sem empate no jogo global; empate no jogo global com ganhos nulos, mas partindo de números diferentes) não foram abordadas.

## CONCLUSÃO

A forma como a professora foi interagindo com os alunos durante o trabalho autónomo levou-a a perceber que o par Luís e Lúcia tinha introduzido uma condição na tarefa, não prevista inicialmente, mas que a tornava mais complexa — acabar o jogo com os dois jogadores empatados. Condição essa que lhes tinha dificultado a conclusão da tarefa durante o trabalho autónomo. O empate foi procurado persistentemente pelos dois alunos talvez por razões emocionais, para que nenhum dos dois terminasse a tarefa a ganhar ou a perder. A possibilidade de empate foi assumida pelos alunos como uma conjectura acerca da qual não estavam certos da sua veracidade (Jeannotte & Kieran, 2017; Stylianides, 2009), embora tivessem alguma confiança na mesma. Assim, foi através da tentativa e erro que os alunos abordaram a condição pretendida, registando e apagando sucessivamente sempre que a quantidade de berlindes final não era a mesma para rapaz e rapariga.

Na discussão coletiva, a professora convidou (Ponte et al., 2013) o par a explicar à turma o que pretendia, questionando-o de modo a clarificar a ideia de empate no contexto do jogo, e assim, através da ação de elicitare, compreender o pensamento dos alunos (Ellis et al., 2018). Apesar de se ter deparado com uma situação não prevista por ela, a professora, através da ação de guiar (Ellis et al., 2018; Ponte et al., 2013), conduziu o diálogo com os alunos, de modo a levá-los a confirmar a sua conjectura naquele caso particular. Conseguiu, assim, ampliar o raciocínio dos alunos, desafiando-os (Ellis et al., 2018; Ponte et al., 2013) a mostrarem como a sua conjectura era válida e justificando porque era válida através de um exemplo genérico (Stylianides, 2009). Neste processo, a ação da professora foi a de facilitar o raciocínio dos alunos, fornecendo explicações (Ellis et al., 2018) que ajudaram a clarificar a ideia que tinha sido expressa pelos alunos. Para além disso, a professora desafiou os alunos a estabelecerem generalizações, procurando fazer uma síntese sobre o que globalmente acontecia aos ganhos e perdas

na situação em que os jogadores iniciavam e terminavam o jogo com o mesmo número. Deste modo, os alunos avançaram na estruturação do seu raciocínio. As ações da professora foram aqui cruciais, primeiro levando o par de alunos a clarificar o seu pensamento de modo a perceberem o que significava “empatar” naquele caso, posteriormente partilhando a situação com toda a turma de modo a envolver todos no processo, garantindo que o fundamento matemático da possibilidade de empate tinha sido compreendido por todos.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- De Villiers, M. (2004). The role and function of quasi-empirical methods in mathematics. *Canadian Journal of Science*, 4(3), 397–418.
- Ellis, A., Özgür, Z., & Reiten, L. (2019). Teacher moves for supporting student reasoning. *Mathematics Education Research Journal*, 31(2), 107–132. DOI: 10.1007/s13394-018-0246-6
- Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2013). Design research from the learning design perspective. In T. Plomp, & N. Nieveen (Eds.), *Educational design research* (pp. 72–113). Enschede, The Netherlands: Netherlands Institute for Curriculum Development (SLO).
- Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 805–842). Charlotte: Information Age Publishing Inc., & NCTM.
- Jeannotte, D., & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 96(1), 1–16. DOI: 10.1007/s10649-017-9761-8
- Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2018). Promover o raciocínio matemático dos alunos: Uma investigação baseada em design. *Bolema*, 32(62), 781–801. DOI: 10.1590/1980-4415v32n62a02
- Ministério da Educação (2018). *Aprendizagens essenciais. Matemática, 2.º ano*. Lisboa: DGE. Consultado a 17 de maio de 2019, em <http://www.dge.mec.pt/aprendizagens-essenciais-ensino-basico>.
- National Council of Teachers of Mathematics (2017). *Princípios para a ação: Assegurar a todos o sucesso em Matemática*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática. (Obra original em inglês publicada em 2014)
- Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2013). Ações do professor na condução de discussões matemáticas. *Quadrante*, 22(2), 55–81.
- Rodrigues, M. (2012). A integração curricular da demonstração. *Da Investigação às Práticas: Estudos de Natureza Educacional*, 2(2), 53–77. DOI: 10.25757/invep.v2i2.50

- Stylianides, G. (2009). Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks. *Mathematical Thinking and Learning*, 11(4), 258–288. DOI: 10.1080/10986060903253954
- Sumpter, L. (2013). Themes and interplay of beliefs in mathematical reasoning. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 11, 1115–1135.