Instituto Politécnico de Lisboa

Escola Superior de Educação de Lisboa

DESENVOLVENDO O PENSAMENTO ALGÉBRICO NO 2.º CICLO DO ENSINO BÁSICO: O SENTIDO DOS SÍMBOLOS E DA GENERALIZAÇÃO

Maria da Luz Côco Valente Infante

Dissertação apresentada à Escola Superior de Educação de Lisboa para obtenção do grau de mestre em Educação Matemática na Educação Pré-escolar e nos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico

2014

Instituto Politécnico de Lisboa

Escola Superior de Educação de Lisboa

DESENVOLVENDO O PENSAMENTO ALGÉBRICO NO 2.º CICLO DO ENSINO BÁSICO: O SENTIDO DOS SÍMBOLOS E DA GENERALIZAÇÃO

Maria da Luz Côco Valente Infante

Dissertação apresentada à Escola Superior de Educação de Lisboa para obtenção do grau de mestre em Educação Matemática na Educação Pré-escolar e nos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico

Orientadora: Professora Doutora Ana Paula Canavarro

2014

RESUMO

O objetivo deste estudo é analisar o modo como alunos do 2.º Ciclo evoluem no desenvolvimento do seu pensamento algébrico, nomeadamente no que diz respeito ao uso das letras e expressões algébricas, no quadro de uma experiência de ensino sobre proporcionalidade direta e regularidades, baseada em tarefas de cariz exploratório, contextualizadas e com potencial algébrico a explorar no contexto de uma cultura de aula que valoriza a comunicação Matemática. Para tal procura-se compreender i) que tipo de representações adotam os alunos para representar as suas ideias algébricas, ii) que sentido atribuem os alunos às letras e às expressões algébricas e, iii) que estratégias privilegiam os alunos para lidar com tarefas de proporcionalidade direta e sequências e regularidades.

A metodologia assume o *design* de estudo de caso de natureza qualitativa, de uma turma de 6.º ano de escolaridade em que a professora de Matemática é simultaneamente a investigadora, constituindo deste modo uma investigação sobre a própria prática. A recolha de dados recorreu a fontes diversas como gravações vídeo e áudio dos momentos de apresentação e discussão coletiva das tarefas, um diário de bordo e as produções escritas dos alunos resultantes da exploração das tarefas. As categorias consideradas na análise de dados mantêm uma relação direta com o objetivo do estudo e as questões de investigação e encontram-se contempladas num quadro teórico estabelecido no capítulo da revisão da literatura.

Os resultados mostram que os alunos recorrem preferencialmente a tabelas para representar e organizar os dados, e para procurar estabelecer, posteriormente, relações entre as variáveis. A generalização é expressa, quase sempre, através de expressões numéricas ou algébricas, sendo estas últimas geradas a partir das expressões numéricas usadas no estudo de casos particulares. Às letras é, regra geral, atribuído o significado de variável. Para tal contribuiu, provavelmente, a natureza das tarefas, que evidenciam a existência de duas grandezas e encorajam a procura de relações entre elas. É ainda de realçar a importância dos momentos de discussão coletivas, que contribuíram de forma significativa para que as letras e as expressões algébricas mantivessem uma ligação ao contexto das situações propostas nas tarefas. No estudo de casos particulares e na procura da generalização prevalecem estratégias intuitivas, essencialmente de natureza multiplicativa, sendo possível identificar estratégias escalares e funcionais. Contudo, verificou-se que alguns alunos ainda empregam estratégias aditivas de construção, designadas por *building-up.*

Palavras-chave: Matemática, pensamento algébrico, proporcionalidade direta, relações e regularidades, representações, significado das letras, generalização, variável.

ABSTRACT

The purpose of this study is to analyse the way primary students develop their algebraic thinking, mainly the use of letters and algebraic expressions, in the context of a teaching experiment about proportionality and regularities. This experiment is based upon contextualised exploratory tasks, with algebraic potential to develop in the context of a teaching concept valuating mathematical communication. We intend to understand i) the type of representations students adopt to represent their algebraic ideas ii) the meaning students give to letters and algebraic expressions and iii) the strategies they favour to deal with proportionality and sequences and regularities.

This study adopts the methodology of a study case of qualitative nature. The sample group, a sixth year class, was taught by the researcher herself, thus implying a research about the investigator's own teaching effectiveness.

The study data were collected from audio and video recordings in presentation and discussion tasks in class and the students' writings following exploratory tasks. The data analysing is directly related to the purpose of this study and the issues under investigation as well as the theoretical framework presented in the literature review chapter.

The results of this study show that learners make use of tables to represent and organise the data and then to establish the relationship among the variables.

Generalization is often expressed through numerical or algebraic expressions. These are generated from numerical expressions used in the study of specific cases. Letters are usually meant as variables due to the nature of the tasks which highlight two values and motivate the search for relationships among them. We must also emphasize the discussions contribution to keep the letters and algebraic expressions related to the contexts proposed in the tasks. Intuitive strategies, essentially multiplicative strategies but also scalar and functional strategies prevail in the study of particular cases and in the search for generalization. It was also found that some learners still use additive strategies or building-up.

Keywords: Mathematics, algebraic thinking, direct proportionality, relations and patterns, representations, meaning of simbols (letters), generalization, variable.

AGRADECIMENTOS

Tal como nunca caminhamos sozinhos na vida, também este estudo não teria acontecido sem a colaboração de algumas pessoas, às quais quero expressar o meu sincero agradecimento.

À Professora Doutora Ana Paula Canavarro, pela sua orientação, e pelas questões que me colocou, em momentos decisivos, ajudando-me a refletir e a tomar decisões cruciais sobre o estudo.

Às professoras que lecionaram as unidades curriculares do mestrado e o seminário de apoio à dissertação, a Professora Doutora Cecília Monteiro, a Mestre Cristina Loureiro, a Professora Doutora Lurdes Serrazina e a Professora Doutora Margarida Rodrigues, pelos momentos de reflexão e aprendizagem que me proporcionaram.

Aos alunos que participaram neste estudo, pelo seu entusiasmo e empenho na exploração e discussão das tarefas.

Aos encarregados de educação dos alunos participantes, pela confiança que depositaram em mim, autorizando um processo moroso de recolha de dados, num ano em que os seus educandos iam ser sujeitos à realização de uma prova final, em maio.

Ao meu marido e aos meus filhos que suportaram as minhas ausências e angústias, enquanto redigi este documento.

À minha irmã e à Milu que foram o meu porto de abrigo.

Aos meus colegas de mestrado, em especial à Paula, à Helena e ao António pelos momentos de descontração e partilha.

Aos meus amigos Bito e Luísa, e à minha colega Elsa, pela colaboração prestada.

À Direção da minha escola, pelas facilidades que me concedeu na distribuição do horário letivo e pelo facto de nunca me ter colocado qualquer obstáculo que me impedisse de levar a cabo este trabalho.

ÍNDICE

RESUMO iii

ABSTRACT v

AGRADECIMENTOS vii

Capítulo 1 1

Introdução 1

1.1. Problematizando o estudo 1

1.2. Objetivos do estudo e questões de investigação 3

1.3. Pertinência do estudo 3

1.4. Organização da dissertação 6

Capítulo 2 9

Revisão da literatura 9

2.1. Pensamento algébrico no ensino da Matemática 9

2.1.1. Discutindo o conceito de pensamento algébrico 10

2.1.2. Orientações curriculares sobre o pensamento algébrico 12

2.1.2.1. A nível internacional: O caso do NCTM 13

2.1.2.2. A nível nacional 15

2.2. A representação e a construção de sentido no pensamento algébrico 18

2.2.1. Representações Matemáticas 18

2.2.2. A construção dos significados pelos alunos 21

2.2.3. O sentido dos símbolos 23

2.3. Estratégias dos alunos para lidar com a generalidade 26

2.3.1. Estratégias usadas pelos alunos para lidar com situações de proporcionalidade direta 27

2.3.2. Estratégias usadas pelos alunos no estudo de padrões e regularidades 31

2.4. O desenvolvimento do pensamento algébrico 34

2.4.1. Tarefas com potencial algébrico 34

2.4.2. A cultura de sala de aula 38

2.4.3. A comunicação e a construção dos significados 40

Capítulo 3 45

Metodologia 45

3.1. Opções gerais do estudo 45

3.2. Caracterização do caso 48

3.3. Experiência de ensino 49

3.3.1. Características da intervenção didática 49

3.3.1.1. As aulas 49

3.3.1.2. As tarefas 51

3.3.1.3. A organização do trabalho 52

3.3.2. A planificação 52

3.4. Recolha de dados 55

3.5. Análise de dados 57

3.5.1. Processo de análise 59

Capítulo 4 61

Análise do caso 61

4.1. Análise da tarefa "Um percurso pedestre" 61

4.1.1. As produções dos alunos e a discussão coletiva 63

4.1.2. Análise global da resolução da tarefa pela turma 80

4.2. Análise da tarefa "Aluguer de canoas" 85

4.2.1. As produções dos alunos e a discussão coletiva 87

4.3. Análise da tarefa "Um jogo com cubos e autocolantes" 108

4.3.1. As produções dos alunos e a discussão coletiva 110

4.3.2. Análise global da resolução da tarefa pela turma 119

4.4. Análise da tarefa "A hora da despedida..." 123

4.4.1. As produções dos alunos e a discussão coletiva 125

4.4.2. Análise global da resolução da tarefa pela turma 138

Capítulo 5 145

Conclusão 145

5.1. Síntese do estudo 145

5.2. Principais conclusões 149

5.2.1. Conclusões relativas a representações 149

5.2.2. Conclusões sobre o sentido dos símbolos 155

5.2.3. Conclusões relativas às estratégias dos alunos no que se refere ao pensamento funcional 156

5.3. Reflexão final 160

Referências bibliográficas 163

Índice de figuras

Figura 1- Enunciado da tarefa “Uma questão de misturas”................................ 27

Figura 2- Enunciado da tarefa “Um percurso pedestre" 62

Figura 3 – Produções do Grupo I referente à resolução da primeira questão da tarefa "Um percurso pedestre"... 64

Figura 4 - Produções do Grupo I referente à resolução da primeira questão da tarefa "Um percurso pedestre"... 65

Figura 5 - Produções do Grupo I referente à resolução da segunda questão da tarefa "Um percurso pedestre"... 66

Figura 6 - Produções do Grupo I referente à resolução da terceira questão da tarefa "Um percurso pedestre"... 68

Figura 7- Produções do Grupo II referente à resolução da primeira questão da tarefa “Um percurso pedestre” 69

Figura 8- Produções do Grupo II referente à resolução da primeira questão da tarefa “Um percurso pedestre” 70

Figura 9- Produções do Grupo II referente à resolução da segunda questão da tarefa “Um percurso pedestre” 70

Figura 10 - Produções do Grupo II referente à resolução da terceira questão da tarefa "Um percurso pedestre"... 72

Figura 11 - Produções do Grupo III referente à resolução da primeira questão da tarefa "Um percurso pedestre"... 73

Figura 12 - Produções do Grupo III referente à resolução da terceira questão da tarefa “Um percurso pedestre” 74

Figura 13 - Produções do Grupo IV referente à resolução da primeira questão da tarefa “Um percurso pedestre” 76

Figura 14 - Produções do Grupo IV referente à resolução da segunda questão da tarefa “Um percurso pedestre” 76

Figura 15 - Produções do Grupo IV referente à resolução da terceira questão da tarefa “Um percurso pedestre” 77

Figura 16 - Produções do Grupo V referente à resolução da tarefa “Um percurso pedestre” 77

Figura 17 - Produções do Grupo VI referente à resolução da primeira questão da tarefa “Um percurso pedestre” 78

Figura 18 - Produções do Grupo VI referentes à resolução da segunda questão da tarefa “Um percurso pedestre” 79

Figura 19 - Produções do Grupo VI referente à resolução da terceira questão da tarefa “Um percurso pedestre” 80

Figura 20 - Evidências de procedimentos aditivos 81

Figura 21 - Evidências de procedimentos multiplicativos funcionais 82

Figura 22 - Expressão algébrica crida por um dos grupos para expressar a generalização 83

Figura 23 - Expressões numéricas cridas por dois grupos para procurar expressar a generalização 83

Figura 24 - Expressões numéricas e linguagem natural usadas por um dos grupos para procurar expressar a generalização 84

Figura 25 - Razões cridas por um dos grupos para procurar expressar a generalização 84

Figura 26 - Enunciado da tarefa “Aluguer de canoas” 86

Figura 27 - Produções do Grupo I referentes à resolução da primeira questão da tarefa “Aluguer de canoas” 88

Figura 28 - Produções do Grupo I referentes à resolução da segunda questão da tarefa “Aluguer de canoas” 91

Figura 29 - Produções do Grupo II referentes à resolução da primeira questão da tarefa “Aluguer de canoas” 92

Figura 30 - Produções do Grupo II referentes à resolução da segunda questão da tarefa “Aluguer de canoas” 93

Figura 31 - Produções do Grupo III referentes à resolução da primeira questão da tarefa “Aluguer de canoas” 93

Figura 32 - Produções do Grupo III referentes à resolução da segunda questão da tarefa “Aluguer de canoas” 94

Figura 33 - Evidências das relações encontradas pelo Grupo III 95

Figura 34 - Produções do Grupo IV referentes à resolução da primeira questão da tarefa “Aluguer de canoas” 97

Figura 35 - Produções do Grupo IV referentes à resolução da segunda questão da tarefa “Aluguer de canoas” 97

Figura 36 - Produções do Grupo V que provam a existência de regularidades na tarefa “Aluguer de canoas” 98

Figura 37 - Produções do Grupo V referentes à resolução da primeira questão da tarefa “Aluguer de canoas” 100

Figura 38 - Produções do Grupo V referentes à resolução da segunda questão da tarefa “Aluguer de canoas” 101

Figura 39 - Evidências do uso de estratégias multiplicativas de natureza escalar 103

Figura 40 - Evidências do uso de estratégias funcionais 103

Figura 41 - Evidências do uso de estratégias funcionais 104

Figura 42 - Evidências do recurso à representação gráfica 104

Figura 43 - Evidências do uso de estratégias funcionais 105

Figura 44 - Evidências do uso da expressão algébrica na expressão da generalização 105

Figura 45 - Evidências do uso da linguagem natural e da tabela na tentativa de expressão da regra 106

Figura 46 - Evidências do uso de tabelas na procura de regularidades 106

Figura 47 - Enunciado da tarefa "Um jogo com cubos e autocolantes"........... 108

Figura 48 - Produções do Grupo I referentes à resolução da tarefa "Um jogo com cubos e autocolantes" 111

Figura 49 - Produções do Grupo II referentes à resolução da tarefa "Um jogo com cubos e autocolantes" 113

Figura 50 - Produções do Grupo III referentes à resolução da tarefa "Um jogo com cubos e autocolantes" 115

Figura 51 - Produções do Grupo IV referentes à resolução da tarefa "Um jogo com cubos e autocolantes" 116

Figura 52 - Produções do Grupo V referentes à resolução da tarefa "Um jogo com cubos e autocolantes" 117

Figura 53 - Produções do Grupo VI referentes à resolução da tarefa "Um jogo com cubos e autocolantes" 118

Figura 54 - Evidências de pontes que se estabelecem entre a Aritmética e a Álgebra 119

Figura 55 - Evidências da identidade entre a estrutura sequencial das expressões numéricas e algébricas... 120

Figura 56 - Evidências do abandono de estratégias aditivas e da adoção de estratégias multiplicativas 121

Figura 57 - Expressão algébrica utilizada por um dos grupos para expressar a generalização 121

Figura 58 - Expressão algébrica exemplificada por um aluno para expressar a generalização 122

Figura 59 - Expressão algébrica utilizada por outro grupo para expressar a generalização 122

Figura 60 - Evidências das expressões algébricas usadas para expressar a generalização e da ligação que as letras mantêm ao contexto da situação, surgindo como abreviaturas 123

Figura 61 - Enunciado da tarefa "A hora da despedida" 124

Figura 62 - Produções do Grupo I referentes à resolução da primeira questão da tarefa "A hora da despedida" 126

Figura 63 - Produções do Grupo I referentes à resolução da segunda questão da tarefa "A hora da despedida" 127

Figura 64 - Produções do Grupo II referentes à resolução da tarefa "A hora da despedida" 128

Figura 65 - Produções do Grupo III referentes à resolução da tarefa "A hora da despedida" 129

Figura 66 - Produções do Grupo IV referentes à resolução da primeira questão da tarefa A hora da despedida 130

Figura 67 - Evidências da regularidade encontrada pelo Grupo IV para um número ímpar de escuteiros 131

Figura 68 - Evidências da regularidade encontrada pelo Grupo IV para um número par de escuteiros 132

Figura 69 - Evidências da expressão da generalização apresentada pelo Grupo IV para um número ímpar de escuteiros 132

Figura 70 - Produções do Grupo V referentes à resolução da primeira questão da tarefa “A hora da despedida” ... 133

Figura 71 - A expressão da generalização para um número ímpar de escuteiros, expressa pelo Grupo V ... 134

Figura 72 - Expressões numéricas usadas pelo Grupo V para expressar a generalização ... 135

Figura 73 - A expressão da generalização para um número par de escuteiros, expressa pelo Grupo V (envolve procedimentos recursivos) ... 135

Figura 74 - A explicação da generalização para um número par, recorrendo a um caso particular. (Procedimento empregue pelo Grupo V) ... 136

Figura 75 - Procedimentos empregues pelo Grupo VI na resolução da tarefa “a hora da despedida” ... 137

Figura 76 - Evidências da utilização de uma estrutura idêntica nas expressões numéricas e algébricas ... 139

Figura 77 - Evidências da identidade entre a estrutura sequencial das expressões numéricas e algébricas na tarefa “A hora da despedida” ... 140

Figura 78 - Evidência da utilização de estratégias building-up ... 140

Figura 79 - Evidência da utilização de estratégias building-up para tentar encontrar o número de cumprimentos que 1001 escuteiros iriam efetuar entre si ... 141

Figura 80 - Evidência da utilização da tabela na procura da generalização ... 141

Figura 81 - Evidência da utilização de procedimentos funcionais na expressão da regra ... 142

Figura 82 - Evidência da utilização de procedimentos funcionais na expressão da regra ... 142

Figura 83 - Evidências das estratégias adotadas pelo Grupo IV para calcular o número de cumprimentos quando o número de escuteiros é par ... 143

Figura 84 - Evidência da utilização de uma estratégia recursiva 143

Índice de tabelas

Tabela 1– Foco das tarefas 53

Tabela 2 - Técnicas de recolha de dados 56

Tabela 3 - Categorias consideradas na análise de dados 58

Tabela 4 - Relação entre tempo e preço na empresa “Amieira dos Portos”....... 89

Índice de abreviaturas

NCTM – National Council of Teachers of Mathematics

EIEM – Encontro de Investigação em Educação Matemática

SPIEM – Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática

Índice de anexos

Anexo A – Tarefa “Uma questão de misturas...” 172

Anexo B – Tarefa “Enigmas com números geométricos”............................ 179

Anexo C – Tarefa “Um percurso pedestre”.. 186

Anexo D – Tarefa “Aluguer de canoas”.. 196

Anexo E – Tarefa “Os acidentes previnem-se” 202

Anexo F – Tarefa “Um dia radical” 207

Anexo G – Tarefa “A localização do acampamento”.................................. 214

Anexo H – Tarefa “Um jogo com cubos e autocolantes”............................ 221

Anexo I – Tarefa “Passagem para a outra margem” 228

Anexo J – Tarefa “Uma subida difícil...” 234

Anexo K – Tarefa “Quadrados sombreados… até ao infinito”.................... 239

Anexo L – Tarefa – “A hora da despedida...” 245

Anexo M – Pedido de autorização aos encarregados de educação............... 250

Anexo N – Informação enviada à direção do agrupamento de escolas........ 251

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresento os motivos que originam e dão sentido à realização deste estudo, problematizando-o do ponto de vista da investigação em Educação Matemática, e indico qual o objetivo e as questões de investigação que o norteiam, terminado com a exposição da sua pertinência à luz da evolução da investigação no domínio do pensamento algébrico, da evolução das tendências curriculares sobre este tema, e do meu interesse e experiência profissional.

1.1. Problematizando o estudo

A Álgebra constitui um dos temas matemáticos em que os alunos revelam mais dificuldades. Os problemas surgem essencialmente ao nível do 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário, quando o tema assume uma importância fundamental e o cálculo algébrico, recorrendo a expressões e manipulação simbólica, se torna transversal, presente de algum modo na abordagem de todos os conhecimentos matemáticos. A forma como a Álgebra tem vindo a ser ensinada ao longo dos tempos, muito associada ao ensino da manipulação de expressões simbólicas envolvidas em procedimentos, frequentemente sem qualquer significado para os alunos, pode ser uma das causas do seu insucesso e para a imagem que se criou de que a Álgebra não é acessível a todos os alunos (Kaput, 1999; Ponte, 2006).

Mas esta conceção de Álgebra é muito restritiva e não evidencia o que está na sua essência. A literatura de investigação tem vindo a associar o pensamento algébrico àquilo que é geral numa dada situação matemática e à expressão dessa generalização (Verschaffel, Greer, & De Corte, 2007). Também outros investigadores consideram que a Álgebra é muito mais que um conjunto de procedimentos envolvendo os símbolos em forma de letra; baseia-se em atividades de generalização que possibilitam o desenvolvimento de instrumentos para representar a generalidade das relações matemáticas. Essa generalidade não tem de ser necessariamente sintetizada através de linguagem matemática simbólica, podendo inclusivamente ser expressa por linguagem natural (Canavarro, 2009; Carraher & Schliemann, 2007; Kieran, 2007).

As dificuldades inerentes ao domínio da Álgebra pelos alunos podem estar relacionadas com o facto de se terem saltado etapas não existindo uma transição adequada entre os Ciclos, que possibilite ao aluno ir progressivamente lidando com o que é geral, em especial com os símbolos, como as letras (Arcavi, 2006). A antecipação da inclusão do pensamento algébrico na Matemática escolar e uma abordagem que coloque a ênfase na compreensão do que é lidar com o geral, poderá contribuir para uma transição mais eficaz e menos penosa nos Ciclos subsequentes.

Nos primeiros anos de ensino, o pensamento algébrico pode criar uma ponte entre a Aritmética e a Álgebra. Os alunos devem começar a lidar com a generalidade mais cedo, formulando conjeturas, experimentando, dando sentido às situações a partir da análise de casos particulares envolvendo números, tal como Blanton e Kaput (2005) defendem, e no contexto das quais o aparecimento das letras enquanto símbolos surge como natural, contextualizado, e com pertinência.

Para promover o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, há que cuidar de diversos aspetos do ensino, e em especial com a experiência que se proporciona aos alunos na sala de aula. Por um lado, há que reconhecer situações que potenciem o desenvolvimento do sentido dos símbolos (Arcavi, 2006), isto é, que constituam um desafio suficiente que possam conduzir à busca da generalização e da expressão da generalização, e constituí-las como tarefas para os alunos (Blaton & Kaput, 2005). Por outro lado, há que promover uma dinâmica de sala de aula, centrada no aluno, em que a comunicação matemática é valorizada e a explicitação de significados pode, em grande medida contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico nos primeiros anos de ensino (Canavarro, 2009).

1.2. Objetivos do estudo e questões de investigação

Esta investigação foca-se no desenvolvimento do pensamento algébrico por parte de alunos do 2.º Ciclo do ensino básico, no contexto da aprendizagem da proporcionalidade e das sequências e regularidades, conteúdos em que a procura de generalidades e a introdução de símbolos como letras têm especial importância. O objetivo do estudo é analisar de que modo os alunos evoluem no desenvolvimento do seu pensamento algébrico, no quadro de uma experiência de ensino baseada em tarefas com potencial algébrico a explorar no contexto de uma cultura de aula que valoriza a comunicação matemática. Para alcançar o objetivo do estudo, procuro responder às seguintes questões:

- Como representam os alunos as suas ideias algébricas relativas à procura e à expressão de generalizações? Que tipo de representações adotam?
- Que sentido atribuem os alunos aos símbolos algébricos, nomeadamente às letras e expressões algébricas?
- Que estratégias usam os alunos para lidar com tarefas de proporcionalidade direta e sequências e outras regularidades?

1.3. Pertinência do estudo

A pertinência deste estudo reside em argumentos relacionados com a investigação em Educação Matemática, com as tendências curriculares no ensino da Matemática e com a experiência profissional da investigadora.

No que diz respeito à investigação em Educação Matemática, a ênfase no pensamento algébrico tem gerado um interesse crescente nos últimos anos, nomeadamente em Portugal, onde foi, por exemplo, tema especialmente focado em dois encontros de investigação em Educação Matemática, o EIEM 2005 e EIEM 2011, promovidos pela Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática (SPIEM), sendo também alvo de interesse de um conjunto de teses e dissertações recentes produzidas no nosso país (Branco & Ponte, 2006). Trata-se de um domínio onde ainda há muito por conhecer, nomeadamente no que diz respeito ao lidar com símbolos.

Na realidade, a simbologia algébrica e a respetiva sintaxe são características da Álgebra que podem tornar-se poderosas ferramentas na resolução de problemas. Contudo, é também nesta potencialidade que se encontra a sua grande fraqueza, quando os símbolos são utilizados de forma meramente abstrata, sem significado, levando a um jogo de manipulações caracterizado pela prática repetitiva de exercícios envolvendo expressões algébricas (Ponte, Branco e Matos, 2009, p.8):

> A simbologia algébrica e a respetiva sintaxe ganham vida própria e tornam-se poderosas ferramentas para a resolução de problemas. No entanto, esta grande potencialidade do simbolismo é também a sua grande fraqueza. Esta vida própria tem tendência a desligar-se dos referentes concretos iniciais e corre o sério risco de se tornar incompreensível para o aluno.

Embora, o uso dos símbolos surja logo na Aritmética, a Álgebra acrescenta-lhe novos símbolos e, em simultâneo, exige uma mudança de significado de alguns dos símbolos já utilizados, como é o caso do sinal de igual; enquanto na Aritmética indica uma operação que é preciso efetuar, na Álgebra refere-se a uma condição. Esta mudança de significado constitui uma dificuldade acrescida para os alunos (Ponte et al., 2009).

O desenvolvimento do pensamento algébrico, desde os primeiros anos de ensino pode, de alguma forma, abrir portas à procura de significados para os símbolos, levando os alunos a encarar, cada contexto, cada situação apresentada, como única (Arcavi, 2006), numa perspetiva em que os mesmos símbolos podem assumir diferentes significados, de acordo com o contexto em que surgem, assim como um ator pode desempenhar diferentes papéis, de acordo com o guião do filme que protagoniza. Importa, pois, aprofundar a investigação neste domínio, em especial com os alunos do 2.º Ciclo de escolaridade, em que se intensifica e potencia o trabalho com os símbolos.

No que diz respeito à pertinência relacionada com as tendências curriculares, ela justifica-se a nível internacional e nacional, em particular com alunos da faixa etária abrangida pela presente dissertação. Nos Princípios e Normas para a Matemática

Escolar (NCTM, 2008), surgem diretrizes para o desenvolvimento do pensamento algébrico desde a educação pré-escolar. As indicações para o trabalho a desenvolver, entre o 3.º e o 5.º ano, defendem que os alunos deverão ser capazes de analisar a estrutura de um padrão e o modo como ele cresce ou varia, organizar a informação de forma sistematizada e através da sua análise fazer generalizações. Deverão também desenvolver modelos proporcionais e fazer generalizações acerca da relação entre duas variáveis, usando para tal formas de expressão a que possam dar significado.

Em Portugal, no Programa de Matemática homologado em 2007 e implementado em 2009 (Ponte et al., 2007), é dada especial atenção à Álgebra, em particular nas orientações curriculares para o 2.º Ciclo. O trabalho a realizar neste Ciclo de ensino deve surgir na sequência das atividades já desenvolvidas ao longo do 1.º Ciclo com vista ao desenvolvimento do pensamento algébrico, aquando da investigação de sequências numéricas e padrões geométricos. No 2.º Ciclo os alunos deverão aprofundar o trabalho já realizado, explorando padrões, determinando termos de uma sequência a partir da sua lei de formação e a lei de formação com base no estudo da relação entre os termos. Deverão ainda ser capazes de utilizar linguagem simbólica para descrever as relações encontradas e expressar relações matemáticas através de igualdades e desigualdades. O propósito principal de ensino para a Álgebra no 2.º Ciclo pressupõe "desenvolver nos alunos o pensamento algébrico, bem como a sua capacidade de representar simbolicamente situações matemáticas e não matemáticas e de resolver problemas em contextos diversos" (Ponte et al., 2007, p. 40).

Após o contacto com as estruturas multiplicativas e os números racionais no 1.º Ciclo, que constituíram a base para o desenvolvimento da noção de proporcionalidade, este tema deve ser aprofundado e sistematizado no 2.º Ciclo, através da exploração de situações que envolvem os conceitos de proporcionalidade direta, razão e proporção.

No Programa e Metas Curriculares de Matemática (ME, 2013), a Álgebra surge de forma implícita ligada às operações e às suas propriedades no 1.º Ciclo e, de forma explícita, ligada à resolução de expressões numéricas, às propriedades das operações, potências de expoente natural, sequências e regularidades e proporcionalidade direta, no 2.º Ciclo. Importa, pois, aprofundar a investigação neste domínio, em especial com os alunos do 2º Ciclo de escolaridade, em que as orientações curriculares dão tanta importância à Álgebra e trabalho com os símbolos.

Por fim, refiro-me à relevância da investigação do meu ponto de vista pessoal. Atendendo à minha experiência como professora do 2.º Ciclo, tenho vontade de aprofundar os meus conhecimentos nesta área, na qual tenho vindo a detetar algumas dificuldades nos alunos, no que respeita à generalização e à compreensão do significado dos símbolos. No 6..º ano de escolaridade, de acordo com as atuais orientações curriculares, é introduzida formalmente a Álgebra através da proporcionalidade direta e das relações e regularidades presentes em sequências numéricas e padrões geométricos. Estes conteúdos, apesar de já terem sido abordados em anos anteriores e de serem utilizados por todos em múltiplas situações quotidianas são, muitas vezes, aqueles em que observo um desempenho dos alunos mais problemático. Essas dificuldades prendem-se, na maioria das vezes, com a generalização e com a compreensão da expressão resultante, nas quais me parece haver falta de "sentido do símbolo".

Esta dicotomia entre o poder da simbologia, como uma ferramenta poderosa, disponível para ser usada em situações análogas e o risco de perder o significado ao desligar-se das situações concretas, constitui outro ponto de interesse do meu estudo, dado que pretendo compreender que estratégias poderão ser usadas para possibilitar aos alunos experiências significativas, que promovam o desenvolvimento do significado dos símbolos. Assim, enquanto professora de Matemática de 2.º Ciclo, espero retirar desta investigação contributos profissionais que me ajudem a regular a minha prática de modo a poder proporcionar aos meus futuros alunos uma aprendizagem da Álgebra melhor sucedida.

1.4. Organização da dissertação

Cinco capítulos constituem a estrutura desta dissertação: Introdução, Revisão da Literatura, Metodologia da Investigação, Análise de Dados e Conclusões.

No capítulo um apontam-se os propósitos que estão na origem e dão significado a este estudo. A problemática, analisada sob o ponto de vista da investigação em Educação Matemática, os objetivos do estudo e questões de investigação, que o orientam, e os aspetos que tornam pertinente a sua realização.

O capítulo dois encontra-se estruturado em quatro secções: a primeira intitula-se, o pensamento algébrico no ensino da Matemática, e abre espaço à discussão do conceito e a uma breve exposição das orientações curriculares sobre o mesmo; a segunda refere-se à representação e à construção de sentido no pensamento algébrico, e contempla as representações Matemáticas, a construção dos significados pelos alunos e o sentido dos símbolos; a terceira secção, estratégias usadas pelos alunos para lidar com a generalidade, abrange duas subsecções, estratégias para lidar com situações de proporcionalidade direta, e estratégias usadas no estudo de padrões e outras regularidades; a última secção deste capítulo intitula-se o desenvolvimento do pensamento algébrico, e trata dos aspetos didáticos do estudo, o potencial algébrico das tarefas, a cultura de sala de aula e a importância da comunicação matemática na construção dos significados.

No capítulo seguinte explicitam-se as opções metodológicas do estudo, é caracterizado o caso, e indicam-se os aspetos mais relevantes da experiência de ensino. É ainda neste capítulo, que se indicam as técnicas usadas na recolha de dados e as categorias consideradas na análise.

No quarto capítulo é apresentado o estudo do caso da turma, que participou nesta experiência de ensino, com enfoque nas reações e desempenho dos alunos nas tarefas selecionadas para análise.

Por fim, o último capítulo inclui uma síntese do estudo, as principais conclusões emergentes da experiência de ensino, e uma reflexão pessoal sobre o contributo deste estudo para o meu desenvolvimento profissional, para a investigação em Educação Matemática e para as atuais orientações curriculares.

CAPÍTULO 2

REVISÃO DA LITERATURA

A revisão da literatura que neste capitulo se apresenta procura elucidar sobre os conceitos e posicionamento teórico assumido nesta investigação. Incide em aspetos fulcrais que vão ao encontro do objetivo e das questões de investigação, como a discussão do conceito de pensamento algébrico, as orientações curriculares internacionais e nacionais, que estão por trás da Educação Matemática, as representações e a construção de sentido no pensamento algébrico, as estratégias usadas pelos alunos para lidar com a generalidade, quer na relação de proporcionalidade direta, quer no estudo de sequências e outras regularidades. Focam-se ainda aspetos didáticos ligados ao desenvolvimento do pensamento algébrico, como o potencial algébrico das tarefas, a cultura de sala de aula e a importância que a comunicação matemática assume no processo de construção dos significados. O desenvolvimento destes tópicos foi crucial, dado que me permitiu aprofundar conhecimentos e encontrar fundamentos que sustentem a análise.

2.1. Pensamento algébrico no ensino da Matemática

> (...) o caminho envolve infiltrar Álgebra ao longo de todo o currículo desde o início da escola. (Kaput, 1999, p. 4)

A introdução da Álgebra nos primeiros anos de escolaridade é uma orientação relativamente recente, que implica alterações significativas ao ensino da Matemática, sobretudo quando encarada de modo transversal, perpassando os restantes temas do currículo. A procura de regularidades e a necessidade de generalizar e formalizar, contribuem para o desenvolvimento de um modo de pensar próprio da Matemática (Kaput, 1999).

2.1.1. Discutindo o conceito de pensamento algébrico

Tradicionalmente, a Álgebra encontra-se associada à simplificação de expressões algébricas, à resolução de equações e à aprendizagem de um conjunto de procedimentos desconectados, tanto de outros conhecimentos matemáticos como da realidade dos alunos, onde a compreensão não é uma prioridade. A construção de relações e a posterior aplicação dos conhecimentos adquiridos não estão previstas nas raízes tradicionais da Álgebra, em que as situações propostas estão geralmente muito longe da realidade e onde não se privilegia um espaço para refletir nem para articular conhecimentos entre si (Kaput, 1999).

Mas esta conceção de Álgebra é muito restritiva e não evidencia o que está na sua essência. A literatura de investigação tem vindo a associar o pensamento algébrico àquilo que é geral numa dada situação Matemática e à expressão dessa generalização (Verschaffel, Greer & De Corte, 2007). Também, Mason (citado por Canavarro, 2009), considera que a Álgebra é muito mais do que um conjunto de procedimentos envolvendo os símbolos em forma de letra; baseia-se em atividades de generalização que possibilitam o desenvolvimento de instrumentos para representar a generalidade das relações matemáticas. Essa generalidade não tem de ser necessariamente sintetizada através de linguagem matemática simbólica, podendo inclusivamente ser expressa por linguagem natural (Canavarro, 2009; Carraher & Schliemann, 2007; Kieran, 2007).

Kaput (1999) aponta caminhos que poderão culminar numa Álgebra acessível a todos e que envolve a sua fusão com os outros temas do currículo. Esta via envolve a generalização e a expressão dessa generalização desde o início, independentemente da representação usada, utilizando linguagens progressivamente mais formais – quando se começa a generalizar em Aritmética, em situações de modelação, na Geometria e em praticamente toda a Matemática, a partir dos primeiros anos de ensino. O facto de a Álgebra poder atravessar os diferentes temas do currículo, dá-lhes outra profundidade ao conferir-lhes o poder da generalização.

Carolyn Kieran apresenta uma visão semelhante, destacando a importância da generalização e encarando a Álgebra como uma forma de pensamento:

> Álgebra não é apenas um conjunto de procedimentos envolvendo os símbolos em forma de letra, mas consiste também na atividade de generalização e proporciona uma variedade de ferramentas para representar a generalidade das relações matemáticas, padrões e regras (e.g. Mason, 2005). Assim, a Álgebra passou a ser encarada não apenas como uma técnica, mas também como uma forma de pensamento e raciocínio acerca de situações matemáticas (Kieran, 2007, p.5)

Matos, Silvestre, Branco e Ponte (2008) dão também uma visão muito alargada sobre o pensamento algébrico, referindo-o como a capacidade de estabelecer generalizações e relações, interpretar situações e resolver problemas. Esta visão encontra-se longe da perspetiva tradicional em que a Álgebra é encarada como a simples manipulação de expressões e equações.

A generalização, por seu lado, considerada como o atributo essencial do pensamento algébrico, envolve a extensão do raciocínio ou da comunicação para além dos casos particulares, permitindo identificar relações comuns e elevar o raciocínio a patamares em que a ênfase se centra nos padrões, procedimentos, estruturas e nas relações que se estabelecem entre eles (Kaput, 1999). Assim, o estudo de casos particulares, de situações concretas, constituem um meio e não uma finalidade para, indutivamente, se procurarem e detetarem regularidades.

Convém, contudo, distinguir o objetivo da generalização em Matemática e na Educação Matemática e, Carraher, Martinez e Schliemann (2008) estabelecem essa diferença. Enquanto que na Matemática a generalização está associada à demonstração de teoremas que assentam em princípios irrefutáveis, designados por axiomas, longínquos do mundo empírico, na Educação Matemática, essencialmente nos primeiros anos, a generalização abrange preocupações que se estendem a outros campos, relacionados com o mundo psicológico do aluno. Nesta perspetiva, consideram-se importantes as representações utilizadas e os caminhos que seguem rumo à construção dos significados. Os mesmos autores afirmam, ainda, que a Educação Matemática fundamentada na observação empírica e no estudo de casos particulares, prepara os alunos para uma aprendizagem posterior, baseada na lógica e na demonstração.

Blanton e Kaput (2011) consideram que o desenvolvimento do pensamento funcional, baseado na análise de padrões e relações, abre caminhos à Álgebra. De acordo com este pressuposto torna-se importante clarificar alguns aspetos relativos a este tipo de pensamento, Smith, em 2008, apresentou três categorias de codificação para analisar o pensamento funcional dos alunos: (i) Padronização recursiva, que passa por encontrar variações, numa sequência de valores; (ii) Covariação, análise da variação simultânea de duas grandezas (ex: se x aumenta uma unidade, então y aumenta três unidades, na expressão $y = 3x + 2$); (iii) Relação de correspondência, baseada na identificação da correlação entre as variáveis.

A forma como as crianças pensam acerca das relações funcionais tem implicações em aprendizagens posteriores, assim, há que desenvolver tarefas que possibilitem aprofundar, alargar e apoiar o desenvolvimento do pensamento funcional dos alunos, desde os primeiros anos de ensino (Blanton & Kaput, 2011). É então proposto, por estes autores, que se transformem e ampliem os recursos, de modo a criar oportunidades para construir padrões, conjeturar, generalizar, justificar relações matemáticas entre quantidades, em suma: construir alicerces que possibilitem desenvolver o pensamento funcional e algébrico, dotando os alunos de instrumentos fundamentais que lhes possibilitarão lidar com ideias algébricas mais complexas nos anos posteriores.

2.1.2. Orientações curriculares sobre o pensamento algébrico

> Generalizar é uma atividade humana, e uma capacidade natural inata (Mason, 2008). O currículo e o seu ensino, devem assim, construir-se e reger-se, sobre este pressuposto natural, proporcionando às crianças, a partir dos primeiros anos de ensino, uma experiência Matemática mais profunda e atraente (Blanton & Kaput, 2011, p. 21)

Esta visão abrangente sobre o ensino da Álgebra e o desenvolvimento do pensamento algébrico a partir dos primeiros anos de ensino, encontra-se implícita, nos

Princípios e Normas para a Matemática Escolar (2008) e em alguns documentos curriculares que têm orientado a Educação Matemática em Portugal nos últimos anos.

2.1.2.1. A nível internacional: O caso do NCTM

> "Todos os alunos deveriam aprender Álgebra".
> (NCTM, 2008, p. 39)

Nos Princípios e Normas para a Matemática Escolar, do *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2008), a Álgebra é considerada como "um fio condutor", transversal a todos os temas do currículo que deve ser trabalhada desde os primeiros anos de ensino, a partir de experiências significativas e com ligações profundas à compreensão, preparando e abrindo caminhos para uma Álgebra mais profunda, a trabalhar no 3.º Ciclo e Ensino Secundário. Neste documento á Álgebra é apresentada como um instrumento valioso, extremamente útil em diversas áreas do saber, envolvendo relações entre quantidades, onde se podem incluir as funções; diversas formas de representar relações matemáticas e a análise da variação. A notação simbólica é vista como uma ferramenta importante para expressar e analisar relações funcionais. Neste documento é possível encontrar quatro objetivos gerais a atingir por todos os alunos, e que surgem em consonância com a investigação que tem sido realizada, nos últimos anos, sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Os programas de ensino do pré-escolar ao 12.º ano deverão habilitar todos os alunos para (NCTM, 2008, p. 39):

- Compreender padrões, relações e funções;
- Representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos;
- Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas;
- Analisar a variação em diversos contextos.

Os quatro objetivos anteriores são posteriormente retomados concretizando aspetos mais específicos a desenvolver em cada nível de escolaridade. Do 6.º ao 8.º ano de escolaridade apontam-se Expectativas ambiciosas para a Álgebra.

Compreender padrões, relações e funções (NCTM, 2008, p. 262):

- Representar, analisar e generalizar uma diversidade de padrões, através de tabelas, gráficos, palavras e , sempre que possível, expressões simbólicas;
- Relacionar e comparar diferentes formas de representação de uma relação;
- Identificar funções como lineares ou não lineares e diferenciar as suas propriedades, a partir de tabelas, gráficos ou equações.
- Representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos:
- Desenvolver uma primeira compreensão conceptual das diferentes utilizações das variáveis;
- Explorar relações entre expressões algébricas e gráficos de linhas, dando particular atenção ao significado da interseção e declive;
- Usar a Álgebra simbólica para representar situações e resolver problemas, sobretudo aqueles que envolvam relações lineares;
- Reconhecer e produzir formas equivalentes de expressões algébricas simples e resolver equações lineares;
- Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas:
- Modelar e resolver problemas inseridos num contexto, utilizando diversas representações, como gráficos, tabelas e equações.
- Analisar a variação em diversos contextos:
- Usar gráficos para analisar a natureza das variações de quantidades em relações lineares.

> Espera-se que os alunos (do 6.º ao 8. Ano) aprendam conteúdos matemáticos sérios e substanciais, em aulas que privilegiem a participação reflexiva e a aprendizagem com compreensão (NCTM, 2008, p. 249)

Os objetivos propostos, para este nível de ensino revelam-se ambiciosos e pressupõem um trabalho anterior que remonta ao ensino pré-escolar, impõe-se o rigor da Álgebra, mas não se perdem as ligações a uma aprendizagem com compreensão, em que as tarefas continuam a desempenhar um papel importante, devendo revelar potencial algébrico e situações significativas, e onde a cultura de sala de aula contribua, em grande parte, para a construção e ampliação dos conhecimentos.

2.1.2.2. A nível nacional

Num documento publicado pelo Ministério da Educação em 1999, intitulado Matemática na Educação Básica, o tema Álgebra só surge de forma explícita no 3.º Ciclo. Contudo, os autores sugerem que os alunos comecem, desde cedo, a contactar com ideias algébricas a partir de situações concretas e significativas, de um modo intuitivo e informal, com conexões aos números e à geometria, conferindo a estes temas outra profundidade. Este contributo, evita que o "aparecimento das letras" associado a um conjunto de regras que, na maioria dos casos, não possuem qualquer significado para os alunos, surja de forma abrupta e descontextualizada, como algo complexo e aparentemente inútil. É proposto que se criem oportunidades para o desenvolvimento do pensamento algébrico, como atividades de natureza exploratória e investigativa que apelem à descoberta e comunicação da generalização, onde os recursos aritméticos se revelem insuficientes e a Álgebra possa emergir como uma necessidade. Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999), apontam cinco competências a desenvolver, por todos os alunos, em todos os Ciclos da educação básica no domínio da Álgebra e das funções. (i) A predisposição para procurar padrões e regularidades e para formular generalizações em situações diversas, nomeadamente em contextos numéricos e geométricos; (ii) A aptidão para analisar as relações numéricas de uma situação, explicitá-las em linguagem corrente, e representá-las através de diferentes processos, incluindo o uso dos símbolos; (iii) A aptidão para interpretar e construir tabelas de valores, gráficos, regras verbais e outros processos que traduzem relações entre variáveis, assim como passar de umas formas de representação para outras; (iv) A aptidão para concretizar em casos particulares relações entre variáveis e, fórmulas para procurar soluções de equações simples; (v) A sensibilização para entender e usar as noções de correspondência e de transformação em situações concretas diversas (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999, p. 109-110)

Estas competências voltam a ganhar vida no Currículo Nacional do Ensino Básico, publicado em 2001, onde a Matemática é encarada como *"*património cultural da humanidade e um modo de pensar*",* considerando-se a sua apropriação um direito de todos os cidadãos. Como tal, havia que criar oportunidades para que todas as crianças e jovens pudessem desenvolver competências nesta área do saber, que previa, de modo implícito e associado aos outros temas do currículo, à semelhança do documento publicado em 1999, a introdução de ideias algébricas, a partir dos primeiros anos de ensino.

No Programa de 2007 (Ponte et al., 2007), pelo qual se rege a presente investigação, é dada especial atenção à Álgebra, nas orientações curriculares para o 2.º Ciclo. O trabalho a realizar neste Ciclo de ensino, deve surgir na sequência das atividades já desenvolvidas ao longo do 1.º Ciclo e que visaram o desenvolvimento do pensamento algébrico, aquando da investigação de sequências numéricas e padrões geométricos. No 2.º Ciclo os alunos deverão aprofundar o trabalho já realizado, explorando padrões, determinando termos de uma sequência a partir da sua lei de formação e a lei de formação com base no estudo da relação entre os termos. Deverão ainda ser capazes de utilizar linguagem simbólica para descrever as relações encontradas, e expressar relações matemáticas através de igualdades e desigualdades. O propósito principal de ensino para a Álgebra no 2.º Ciclo é identificado como "desenvolver nos alunos o pensamento algébrico, bem como a sua capacidade de representar simbolicamente situações matemáticas e não matemáticas e de resolver problemas em contextos diversos" (p. 40).

Após o contacto com as estruturas multiplicativas e os números racionais no 1.º Ciclo, que constituíram a base para o desenvolvimento da noção de proporcionalidade, este tema deve ser aprofundado e sistematizado no 2.º Ciclo, através da exploração de situações que envolvem os conceitos de proporcionalidade direta, razão e proporção.

Os objetivos gerais de aprendizagem definidos para este tema do programa preveem (Ponte et al., 2007, p.40):

- A capacidade de explorar, investigar regularidades;

- A compreensão da noção de proporcionalidade direta e o uso do raciocínio proporcional;
- A capacidade de resolver problemas, raciocinar e comunicar recorrendo a representações simbólicas.

No que respeita a objetivos específicos, são definidos os seguintes para o tópico relações e regularidades (Ponte et al., 2007, p. 41):

- Identificar e dar exemplos de sequências e regularidades numéricas e não numéricas;
- Determinar o termo seguinte (ou o anterior) a um dado termo e ampliar uma sequência numérica, conhecida a sua lei de formação;
- Determinar termos de ordens variadas de uma sequência, sendo conhecida a sua lei de formação;
- Analisar as relações entre os termos de uma sequência e indicar uma lei de formação, utilizando a linguagem natural e simbólica;
- Representar simbolicamente relações descritas em linguagem natural e reciprocamente;
- Interpretar diferentes representações de uma relação e relacioná-las;
- Compreender os conceitos de razão, proporção e constante de proporcionalidade;
- Utilizar proporções para modelar situações e fazer previsões;
- Resolver e formular problemas envolvendo situações de proporcionalidade direta.

Ponte, Branco e Matos (2009), ainda a propósito do Programa de 2007, salientam a importância atribuída aos significados, suscetíveis de serem representados através de símbolos algébricos, conduzindo os alunos a um pensamento generalista e funcional, que assenta na compreensão e explicitação de relações que é possível estabelecer entre as variáveis. Destacam ainda outros aspetos, apresentados neste documento curricular, merecedores de uma visão detalhada e coerentes com muitos estudos realizados nos últimos anos sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico e a introdução precoce da Álgebra no ensino da Matemática: i) A linguagem algébrica ganha vida própria, deixa de estar associada apenas a um conjunto de regras que possibilitam a manipulação e é apresentada como um meio de expressar ideias; ii) A promoção e valorização do pensamento algébrico, possibilitando a emergência da

Álgebra como orientação transversal ao currículo, a partir dos primeiros anos de escolaridade; iii) A realização de tarefas de carácter exploratório e investigativo, que emprestem outra dimensão à atividade dos alunos e potenciem o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Em jeito de síntese, pode-se afirmar que as recentes orientações curriculares internacionais e nacionais apontam para o desenvolvimento do pensamento algébrico desde o início da escolaridade como orientação transversal, impondo uma outra dimensão ao ensino da Matemática, conferindo-lhe outra profundidade. A introdução de tarefas de carácter investigativo e exploratório potenciam, em grande parte, o desenvolvimento do pensamento algébrico e contribuem para uma aprendizagem com ênfase na construção dos significados.

2.2. A representação e a construção de sentido no pensamento algébrico

Na Educação Matemática, as representações são consideradas instrumentos essenciais que possibilitam representar, organizar e comunicar ideias matemáticas, servindo como meio à compreensão dos conceitos e das relações matemáticas. A comunicação dos processos e as conexões que se estabelecem têm como suporte as representações que sustentam a argumentação dos conhecimentos matemáticos. Assim, é importante sublinhar que as representações não constituem tanto finalidades em si mesmas, mas um meio para a compreensão e trabalho com os conceitos (NCTM, 2008).

2.2.1. Representações Matemáticas

Os diagramas, os gráficos e as expressões algébricas são representações convencionais há muito usadas para representar ideias matemáticas. Contudo, e essencialmente nos primeiros anos de ensino, os alunos devem ser incentivados a criar as suas próprias representações das ideias matemáticas (NCTM, 2008). Ponte e Serrazina (2000) sustentam esta ideia ao afirmar que há uma estreita ligação entre as representações usadas pelos alunos e a forma como as compreendem e utilizam nas suas resoluções.

Bruner (1999) distingue três tipos de representações que se inter-relacionam e que contribuem, em grande parte, para o processo de desenvolvimento e aprendizagem de cada indivíduo: representações ativas, sustentadas em manipulações; representações icónicas, que podem surgir na forma de desenho ou esquema, utilizando o papel como suporte, e onde os alunos procuram reproduzir as situações; e simbólicas, com recurso a símbolos que, na fase inicial do processo, não são necessariamente os formais partilhados por quem tem literacia Matemática, podendo até ser idiossincráticos (Pinto & Canavarro, 2012).

Um aspeto essencial da Álgebra nos primeiros anos de ensino é a transição entre a linguagem natural e a notação algébrica. Blanton e Kaput (2011), considerando como princípio o facto da aprendizagem promover o desenvolvimento, o que implica a existência de uma fase pré-conceptual de formação dos conceitos. Estes autores alegam a importância de dar às crianças a oportunidade de começar a usar representações simbólicas nos anos iniciais, possibilitando-lhes criar um maior espaço cognitivo para explorar posteriormente ideias mais complexas. Contudo, as orientações curriculares do NCTM (2008) sugerem que a utilização dos símbolos, como meio de representar ideias matemáticas, deve surgir após o contacto com outras formas de representação menos convencionais que irão facilitar a compreensão dos conceitos. Deste modo, será mais fácil, posteriormente, estabelecer conexões entre a linguagem natural e a linguagem simbólica, criando oportunidades para que os símbolos surjam com significado.

As estruturas aritméticas geradas para analisar casos particulares constituem, por vezes, o ponto de partida para expressar generalidades através da notação algébrica. Carraher e Schliemann (2007) defendem que a notação convencionalmente utilizada, em que são preferencialmente empregues as últimas letras do alfabeto, não é o único meio de expressar a generalização. A linguagem natural, os diagramas, as tabelas, as expressões numéricas e os gráficos constituem meios igualmente válidos. As tabelas, por exemplo, no 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico desempenham um papel importante (Brown & Mehilos, 2010), permitindo, facilmente, estabelecer relações entre os casos particulares, potenciando a descoberta da expressão da generalização e a atribuição de significado aos símbolos.

A utilização de tabelas e gráficos são considerados por Blanton e Kaput (2011) como meios preciosos para encontrar relações e compreender situações, desde o início da escolaridade. Estas ferramentas irão constituir auxiliares poderosos em anos posteriores, na resolução de tarefas mais complexas, quando os alunos tiverem necessidade de simbolizar funções, pois possibilitam comparar e encontrar relações entre as variáveis.

Johanning, Weber, Heidt, Pearce e Horner (2009) também referem que a Aritmética e a Álgebra podem ser desenvolvidas em simultâneo nos primeiros anos de ensino, através do raciocínio funcional e sempre que se procuram caminhos para estabelecer relações entre quantidades. O raciocínio recursivo, que prevê o recurso ao termo anterior para determinar o seguinte, é considerado por estes autores como um dos pontos de partida recomendados para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Kieran (2007) dá ênfase ao facto de, a generalização, em crianças muito jovens, surgir a partir de pontes que se estabelecem entre a Aritmética e a Álgebra, e à importância que as tarefas assumem neste processo. Quando as tarefas são suficientemente ricas, incentivam abordagens de resolução generalizáveis e abrem portas a momentos de discussão em que se estabelecem conexões entre diferentes representações e processos de resolução. Esta autora considera ainda crucial, no processo de generalização, a observação da estrutura sequencial das operações, geradas a partir do estudo de casos particulares, que evidenciam a forma, abrindo caminho à generalização.

As representações assumem um papel fundamental na comunicação e compreensão das ideias matemáticas. Assim, os alunos devem ser incentivados, desde cedo, a representar o seu raciocínio, utilizando, inicialmente processos originais, que revelam o modo como interpretam a situação e compreendem os conceitos. Os processos formais como tabelas, gráficos e expressões simbólicas, devem surgir de forma natural, passando a fazer parte das rotinas, para que os alunos se apercebam das suas potencialidades e os passem a usar como meios que lhes possibilitam compreender os conceitos.

2.2.2. A construção dos significados pelos alunos

Sfard (2000) afirma que o significado de um conceito existe em função do uso que dele se faz, logo, os conceitos devem ser usados para serem compreendidos. Da mesma forma, os alunos devem ter oportunidades de manipular os símbolos para que possam perceber as suas potencialidades e usá-los para expressar generalidades. Esta circularidade pode constituir uma armadilha para os alunos, na medida em que há um distanciamento das situações concretas, mas constitui em simultâneo a força motriz do processo de aprendizagem.

Contudo, nos primeiros anos de ensino, impõe-se uma ligação entre a Aritmética e a Álgebra. Carraher, Schliemann e Brinzuela (2006) referem que essa relação deve ser vista como um *continuum*, estabelecendo-se pontes a partir da modelação de situações concretas e significativas para os alunos. Blanton e Kaput (2005) defendem a mesma ideia acrescentando que os alunos devem começar a lidar com a generalidade mais cedo, formulando conjeturas, experimentando, dando sentido às situações a partir da análise de casos particulares.

De acordo com a perspetiva de Kaput (1999), o pensamento algébrico pode assumir diferentes formas que se conectam entre si. Este autor defende que os alunos devem explorar situações Aritméticas particulares, que lhes permitam estabelecer relações e encontrar regularidades para, assim, chegarem à generalização. Enfatiza ainda as potencialidades da modelação para exprimir e formalizar generalizações. Deste modo, o ensino da Álgebra, nos primeiros anos de ensino, deve partir de contextos significativos para os alunos, que lhes possibilitem atribuir um sentido aos símbolos.

A integração da aprendizagem da Álgebra noutros temas do programa envolvendo a generalização e a expressão da generalização é defendida por Kaput (1999). Esta medida torna possível ampliar o conhecimento matemático dos alunos e envolvê-los na construção do seu próprio conhecimento, dado que se encontra prevista uma trajetória que traça um caminho entre o conhecimento formal e informal e que passa pelo uso da linguagem natural. A verbalização das suas descobertas e das relações encontradas proporciona uma reflexão sobre as aprendizagens e a articulação com os seus pares:

> Expressar a generalização significa acomodá-la numa linguagem, seja uma linguagem formal, ou, para crianças mais jovens, em entoações e gestos. No caso de alunos jovens, identificar a expressão da generalidade ou a tentativa de que uma declaração acerca de um caso particular seja tomada como geral pode requerer o ouvido atento e qualificado do professor que sabe como ouvir cuidadosamente as crianças (Kaput, 1999, p. 6)

Ao refletir sobre possíveis abordagens ao pensamento algébrico, as funções ocupam um lugar de destaque. Contudo, a forma como são normalmente apresentadas aos alunos mais jovens, através da expressão algébrica, em nada contribui para a sua compreensão (Carraher, Martinez & Schliemann, 2008). A descrição de relações funcionais como ponto de partida e a sua expressão convencional na fase final do processo constituem uma trajetória lógica, apontada pelos autores, com a qual os alunos devem lidar ao longo de toda a escolaridade, contribuindo significativamente para a construção dos significados. Assim, há que proporcionar-lhes experiências distintas e com um grau de dificuldade crescente que os preparem, num futuro próximo, para a aprendizagem de uma Matemática em que as letras surgem com frequência e os números são cada vez mais escassos.

De acordo com as perspetivas apontadas, é possível inferir que a construção dos significados pelos alunos, passa por uma Aritmética generalizada e pelo desenvolvimento do pensamento funcional, em que o ponto de partida são situações concretas e significativas para os alunos, onde as relações que se estabelecem entre as variáveis permitem elevar o raciocínio a outra dimensão que fica para além do estudo de casos particulares. Destaca-se a importância atribuída à verbalização das relações encontradas na construção dos significados e na clarificação dos símbolos, cuja utilização precoce é recomendada para que os alunos compreendam as suas potencialidades.

2.2.3. O sentido dos símbolos

Alguns estudos realizados nos anos oitenta e no início dos anos noventa dão-nos a ideia que o desenvolvimento do sentido dos símbolos, na Álgebra, pode surgir no prolongamento do desenvolvimento do sentido do número na Aritmética (Arcavi, 2006), pois é a partir do estudo de casos particulares e das relações que se conseguem estabelecer entre eles que os alunos começam a estabelecer generalizações e a utilizar os símbolos como abreviaturas para expressar essas generalizações.

Arcavi (2006) considera como componentes essenciais para o desenvolvimento do sentido dos símbolos alguns aspetos fundamentais: a familiaridade com os símbolos; a capacidade de os manipular e de conseguir "ler através de expressões simbólicas" e a consciência de que os símbolos podem assumir significados distintos de acordo com o contexto a que surgem associados. A familiaridade com os símbolos encontra-se intimamente ligada à sua compreensão, propriamente dita, e à tomada de consciência do seu poder para expressar relações, generalizações e demonstrações. Quanto à segunda componente mencionada pelo autor, há que acrescentar a importância da separação das expressões dos seus significados e da adoção de uma visão global que facilite a sua manipulação. Por sua vez, "ler através de expressões simbólicas", possibilita estabelecer conexões com situações concretas e ponderar sobre a razoabilidade dos resultados obtidos.

O desenvolvimento do sentido dos símbolos e dos significados em geral não é um processo meramente cognitivo, ao qual apenas os matematicamente mais dotados podem aceder, mas um processo intimamente ligado a uma cultura de sala de aula onde a investigação, a experimentação e a reflexão são parte integrante das rotinas dos alunos (Arcavi, 2006). O mesmo autor destaca ainda como fatores relevantes o potencial das situações a propor aos alunos e o seu modo de abordagem, ou seja, o *design* da tarefa e a forma como a mesma é implementada na sala de aula, atributos determinantes para o desenvolvimento do sentido dos símbolos. Também Bandarra (2011) reforça essa ideia destacando o tipo de tarefas e o ambiente de sala de aula, como cruciais. Esta autora faz ainda referência aos diferentes significados que o mesmo símbolo pode assumir e propõe que sejam criadas oportunidades, ao longo de todo o Ensino Básico, para que os alunos se possam apropriar dessa diversidade.

Os múltiplos significados que se podem atribuir às letras têm sido motivo de reflexão de alguns autores. Nos anos 70, Küchemann, citado por Ponte, Branco e Matos (2009), apontava três aceções fundamentais usadas vulgarmente no ensino da Matemática:

> A letra como incógnita, representando um número específico, mas desconhecido, com o qual é possível operar diretamente. Esta interpretação está intimamente relacionada com a resolução de equações como x+3=6, por exemplo.
> Letra como número generalizado, situação em que o aluno a vê como representante de vários números ou, pelo menos, como podendo ser substituída por mais do que um valor...
> Letra como variável, caso em que esta é vista como representante de um conjunto de valores e pode ser usada para descrever relações entre um dado conjunto e outros conjuntos... (Ponte, Branco & Matos, 2009, p. 73)

Pode-se, assim, afirmar que a utilização das letras assume diversas facetas, envolvendo significados distintos de acordo com os contextos a que surgem associadas. A diversidade de significados que se podem atribuir às letras constitui, sem dúvida, uma das dificuldades que os alunos apresentam na transição entre a Aritmética e a Álgebra, e que têm sido apontadas por vários autores (Schoenfeld & Arcavi, 1988). As outras prendem-se com o facto de os alunos olharem a letra como representação de um número ou de um conjunto de números, caso se trate de uma incógnita ou de uma variável. Dar significado às letras existentes numa expressão e a atribuição de sentido à própria expressão é outro *handicap* que pode ser ultrapassado através de relações que é possível estabelecer com a situação problemática apresentada; e, por último, a passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica surge, muitas vezes, como um constrangimento difícil de contornar.

Schoenfeld e Arcavi (1988) consideram que o desenvolvimento do conceito de variável deve ocupar um lugar de destaque no ensino e aprendizagem da Matemática – a compreensão deste conceito, complexo mas fundamental, permite a transição entre a Aritmética e a Álgebra, elevando o raciocínio a outros patamares. Contudo, reconhecem a ambiguidade do conceito e sugerem que antes de usarem as variáveis, os alunos se tornem hábeis na observação de padrões, na procura de relações e generalizações, na medida em que as variáveis são consideradas “ferramentas” para expressar generalizações matemáticas. O cultivo do hábito de verbalizar/comunicar as generalizações encontradas permite estabelecer uma ponte entre a Aritmética a e a Álgebra, pois o passo seguinte, a formalização, tem origem na descrição e surge numa perspetiva em que é necessário sintetizar o discurso de uma forma natural e a partir das descobertas dos alunos. Assim, e de acordo com a perspetiva destes autores, os aprendizes desta área do conhecimento devem experienciar diversas situações que lhes abram as portas para o desenvolvimento da linguagem algébrica, que se tornará progressivamente numa poderosa “ferramenta” para expressar generalizações matemáticas.

Uma perspetiva semelhante sobre a complexa interpretação de que se reveste o conceito de “variável” é apresentada por Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999). Estes autores consideram que a visão redutora que muitos alunos apresentam sobre o conceito de variável está na origem das suas dificuldades. Assim, é importante que as crianças tenham oportunidades de vivenciar um número suficiente de experiências significativas, ao longo de todo o Ensino Básico, que lhes permitam discernir os diferentes papéis que as letras podem assumir em diferentes tipos de expressões matemáticas: (i) Na equação, $x + 7 = 13$, a letra “x” representa, uma incógnita, um número desconhecido mas que não varia, ou seja, a condição apresentada é satisfeita por um e um só número; (ii) na expressão, $a + b = b + a$, as letras podem ser substituídas por quaisquer valores numéricos, a expressão traduz a propriedade comutativa da adição, uma generalização de um padrão aritmético; (iii) $A = b \times h$, traduz uma fórmula, que permite determinar a área de um retângulo, as letras não podem ser encaradas como incógnitas, mas como características dos retângulos; (iv) a expressão algébrica, $2n - 1$, representa um conjunto de valores, se a letra “n” for sendo substituída pelos sucessivos números naturais a expressão gera a sequência dos número ímpares; (v) na expressão, $y = 3x$, a ideia de variável torna-se mais nítida, à medida que se atribuem valores a “x” é possível calcular os valores correspondentes de “y” (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999, p. 99-100).

No que confere à utilização de variáveis, Arcavi (2006) argumenta que a Educação Matemática se deve preocupar com a construção do conceito de variável, dado que se trata de um processo complexo que merece atenção particular, considerando-o mesmo como um tópico central no ensino-aprendizagem da Matemática. Acrescenta ainda, que a utilização com significado da noção de variável facilita a transição entre a Aritmética e a Álgebra e, propicia a construção de novos conceitos matemáticos de caráter mais avançado. Este autor utiliza a expressão “sentido de símbolo” como uma apreciação, uma compreensão ou um instinto complexo e com múltiplas facetas, considerando que o sentido de símbolo é dar significado a esses símbolos, para além de dotar os alunos da capacidade de decidirem sobre a utilidade dos símbolos e de como e quando devem ser utilizados, para evidenciar relações, mostrar a generalidade e formular conjeturas.

Conclui-se que as letras surgem, com frequência, associadas a diferentes tipos de expressões matemáticas, esta diversidade, pode constituir um entrave à aprendizagem de alunos que não usufruíram de um número suficiente de vivências significavas, quer do ponto de vista dos contextos, quer dos significados que as expressões podem assumir. A exploração de um vasto leque de experiências que criem oportunidades de encontrar relações, transmitir ideias, discuti-las, e que possibilitem abrir um espaço ao processo reflexivo e a uma aprendizagem com compreensão, constituem um imperativo à aquisição das ideias matemáticas.

2.3. Estratégias dos alunos para lidar com a generalidade

Nesta secção são apresentadas estratégias usadas por alunos, e identificadas em outros estudos já realizados, para lidar com a generalidade, quer na relação de proporcionalidade direta, quer no estudo de sequências e outras regularidades.

2.3.1. Estratégias usadas pelos alunos para lidar com situações de proporcionalidade direta

Várias fontes da literatura, baseadas em estudos cujo foco é o raciocínio proporcional, como os realizados por Lesh , Post, e Behr, 1988; Lo e Watanabe,1997; Costa, 2007; Dooren, Bock, Evers e Verschaffel, 2009; Fernández, Llinares, Dooren, Bock e Verschaffel, 2010, distinguem estratégias de natureza multiplicativa e aditiva.

Por uma questão de facilidade, ilustro as estratégias, aplicando-as a uma situação que a seguir transcrevo, proposta aos alunos na presente investigação, durante a realização da primeira tarefa denominada “Uma questão de misturas” (anexo A):

> O chefe dos escuteiros sugeriu que se preparasse sumo de laranja, misturando duas doses de concentrado de laranja com três doses de água.
>
> A Mariana ofereceu-se para preparar o sumo e colocou num recipiente seis doses de concentrado de laranja. Quantas doses de água deverá juntar para obter um sumo exatamente com o mesmo sabor do da receita sugerida pelo chefe? Explica o teu raciocínio.

Figura 1- Enunciado da tarefa “Uma questão de misturas”

Para resolver este problema, e considerando os resultados dos estudos já referidos (Lesh , Post, & Behr, 1988; Lo & Watanabe,1997; Costa, 2007; Dooren, Bock, Evers & Verschaffel, 2009; Fernández, Llinares, Dooren, Bock & Verschaffel, 2010) os alunos podem recorrer a estratégias de natureza multiplicativa, em que dois dos valores indicados estão relacionados multiplicativamente, e essa relação é aplicada a um terceiro valor. Estas estratégias admitem abordagens escalares e funcionais.

Abordagem escalar: baseada em relações internas, ou seja, relações entre quantidades da mesma natureza. De acordo com o exemplo sugerido é possível comparar as doses de concentrado sugeridas pelo chefe com as doses de concentrado usadas pela Mariana, e verificar que a mistura da Mariana contém 3 vezes mais doses de concentrado do que a que foi usada pelo chefe, logo, para que se mantenha o mesmo sabor serão necessárias 3 vezes mais doses de água, ou seja, $3\times 3 = 9 \text{ doses de água}$.

Abordagem funcional: considerando relações externas, ou seja, relações entre quantidades de diferentes naturezas. Na mistura sugerida pelo chefe foram usadas 2 doses de concentrado de laranjas para 3 doses de água, as doses de água podem ser encontradas através da multiplicação do número de doses de concentrado de laranja por 1,5, uma vez que, $2 \text{ doses de concentrado} \times 1{,}5 = 3 \text{ doses de água}$, logo, para encontrar o número de doses de água, basta que a Mariana multiplique o número de doses de concentrado de laranja que utilizou pelo mesmo valor e assim obter o número de doses de água necessária, ou seja, doses de concentrado $6 \times 1{,}5 = 9 \text{ doses de água}$.

Abordagem ao fator unidade: é considerada, em alguns dos estudos citados, como uma variante à abordagem funcional e baseia-se no valor da unidade de uma das quantidades referidas. A mistura inicialmente proposta tem 2 doses de concentrado de laranja para 3 doses de água, logo, uma mistura com 1 dose de concentrado de laranja teria 1,5 doses de água. Então, a quantidade de doses de água necessárias para a nova mistura poderia ser encontrada através do produto entre o número de doses de concentrado de laranja e 1,5, ou seja, 6 doses de concentrado $\times 1{,}5 = 9 \text{ doses de água}$.

O recurso a estratégias de natureza aditiva, para lidar com a relação de proporcionalidade direta é, segundo os autores já mencionados , um fenómeno comum, que não abrange apenas os alunos mais jovens. Estas estratégias podem apresentar duas *nuances* distintas, uma baseada na adição repetida e de certo modo relacionada com o raciocínio multiplicativo, normalmente designada por *building-up*, e uma outra denominada como diferença constante, que conduz a conclusões erradas (Baxter & Junker, 2001).

A adição repetida ou *building-up*, revela traços elementares que estão na base do raciocínio multiplicativo. Tomando como ponto de partida o exemplo anterior, em que temos uma mistura inicial com 2 doses de concentrado de laranja e 3 doses de água, é possível encontrar o número de doses de água para a nova mistura da Mariana, através do seguinte processo: 2+2+2 = $6 \text{ doses de concentrado usadas na nova mistura}$, então, repetindo o mesmo número de vezes as doses de água é possível encontrar a resposta para a situação proposta, ou seja, 3+3+3 = 9 doses de água.

Por outro lado, a diferença constante, consiste em estabelecer uma relação dentro de uma razão, que é calculada subtraindo um termo do outro, sendo essa diferença, em seguida, aplicada à outra razão. Por exemplo, é considerada a diferença entre o número de doses de água e de concentrado da mistura inicial, $3-2=1$ e, em seguida, essa diferença é aplicada à outra razão permitindo obter o termo em falta, $6+1=7$ doses de água. Esta abordagem admite ainda outro raciocínio ao considerar-se que a mistura da Mariana tem 4 vezes mais doses de concentrado de laranja que a mistura inicial, dado que 6 - 2 = 4, então, e de acordo com esta perspetiva, também é necessário adicionar 4 doses de água à mistura inicial, ou seja, 3+4=7 doses de água. Estes raciocínios de natureza aditiva, baseados na diferença constante, conduzem a uma resposta errada que não satisfaz as condições propostas no problema, contudo, alguns estudos têm demonstrado que são usados, não apenas por alunos com pouca experiência com a relação multiplicativa em relações proporcionais, como também por alunos mais velhos na resolução de problemas mais complexos (Baxter & Junker, 2001; Dooren, Bock, Evers & Verschaffel, 2009).

Autores como Cramer e Post (1993a) apontam ainda outros caminhos que é possível seguir na resolução de situações proporcionais. Estes autores fazem referência a quatro estratégias distintas:

(i) A utilização da taxa unitária, já referida anteriormente como fator unidade e que possui como base o valor da unidade de uma das quantidades referidas; (ii) A utilização do fator de mudança, em que são utilizados os múltiplos para estabelecer relação, por exemplo, e voltando a recorrer ao exemplo sugerido anteriormente, se a Mariana utilizou o triplo das doses de concentrado de laranja, relativamente às que foram gastas na mistura inicial, terá que usar o triplo das doses de água para obter um sumo com o mesmo sabor. Os autores acrescentam ainda que a utilização deste método é de certo modo condicionada pelas características dos números usados no problema, pois se um dos fatores não for um número inteiro, a tendência para o uso deste método decresce significativamente; (iii) A utilização das razões como frações, quando as razões são tratadas como frações aplicando-se-lhes o princípio da equivalência de frações:

$$\frac{\text{2 doses de concentrado}}{\text{3 doses de água}} \overset{\text{X 3}}{\underset{\text{X 3}}{=}} \frac{\text{6 doses de concentrado}}{\text{9 doses de água}}$$

(iv) A utilização do algoritmo do produto cruzado, consiste em estabelecer uma proporção, efetuar o produto cruzado e resolver a equação resultante:

$$\frac{\text{2 doses de concentrado}}{\text{3 doses de água}} = \frac{\text{6 doses de concentrado}}{\text{x doses de água}}$$

$$\text{x doses de água} = \frac{6 \times 3}{2}$$

Carmer e Post (1993a) alertam para o uso abusivo da utilização deste algoritmo que embora eficiente é, muitas vezes, utilizado de forma inadequada e desprovido de qualquer significado, a sua utilização na resolução de situações não proporcionais como surge expresso em alguns estudos (Carmer & Post, 1993a; Dooren, Bock, Evers & Verschaffel, 2009) revelam os traços opacos das suas características. Estes autores defendem ainda a utilização dos métodos mais intuitivos, taxa unitária e fator de mudança, no início do estudo da proporcionalidade direta, uma vez que a sua natureza apela à análise contextual de cada problema possibilitando encará-los como situações singulares.

Em Portugal já foram realizados alguns estudos que focam as estratégias usadas pelos alunos na resolução de problemas de proporcionalidade direta. Silvestre (2006, 2012) e Costa (2007) são exemplos concretos. Nos estudos realizados por Silvestre com alunos do 6.º ano de escolaridade a autora analisou as estratégias usadas por alunos na resolução de tarefas de natureza exploratória e investigativa. Durante estes estudos não foram ensinados aos alunos qualquer regra ou algoritmo, pelo que as estratégias usadas foram essencialmente intuitivas, baseadas em abordagens escalares, funcionais e na equivalência entre razões. Destaca-se ainda o facto de alguns alunos optarem por utilizar estratégias distintas para resolver o mesmo problema, demonstrando o domínio da situação. Por outro lado, Costa (2007) analisou as estratégias usadas pelos alunos antes e depois do ensino formal da proporcionalidade direta, constatando que os alunos possuem capacidade para resolver problemas proporcionais antes do ensino formal do tema, apresentando inicialmente estratégias intuitivas de natureza aditiva, baseadas na adição repetida e designadas vulgarmente por *building-up*. Contudo, e à medida que se avançou no ensino do tema, foram surgindo estratégias mais sofisticadas, de natureza multiplicativa, com abordagens escalares e funcionais. O produto cruzado acaba por surgir através da apresentação, por parte de um aluno, da regra de três simples. Este processo, aparentemente rápido e eficiente na resolução de problemas de valor omisso, acabou por integrar a rotina dos alunos na exploração de tarefas semelhantes.

2.3.2. Estratégias usadas pelos alunos no estudo de padrões e regularidades

A resolução de problemas de cariz aritmético, geralmente, não encoraja os alunos a olhar os valores como possibilidades dentro de um vasto domínio, mas como quantidades estabelecidas que conduzem a resultados singulares. Este problema, possivelmente, encontra-se relacionado com contextos limitativos que não permitem aos alunos questionar-se e aperceber-se da multiplicidade de valores que podem ser atribuídos ao domínio (Lambdin & Lester Jr., 2010). O estudo de padrões e regularidades, previsto nas orientações curriculares nacionais e internacionais (Ponte et al., 2007; NCTM, 2007), por outro lado, apresenta contornos distintos, contribuindo para o desenvolvimento de competências relacionadas com a resolução de problemas e o pensamento algébrico, ampliando horizontes e incentivando os alunos a tratar o que aparentemente parece ser um valor único como um conjunto de valores possíveis. Importa agora compreender as estratégias usadas pelos alunos para lidar com padrões e regularidades e que têm sido motivo de vários estudos efetuados, nos últimos anos, em Portugal e no estrangeiro (Branco, 2008; Barbosa, Vale & Palhares, 2008; Santos &

Oliveira, 2008; Friel & Markworth, 2009; TanişLi, D. & Özdaş, 2009).

Santos e Oliveira (2008) num estudo de caso, realizado com dois alunos pertencentes a uma turma do 5.º ano de escolaridade, identificaram as estratégias usadas pelos alunos na resolução de um conjunto de tarefas direcionadas para o estudo de padrões e regularidades. No início da proposta pedagógica os alunos focaram-se essencialmente nas relações aditivas inerentes à estrutura do padrão; quanto às estratégias empregues destacam-se a contagem e a recursiva, em que a previsão, desta última, é feita com base no termo anterior. Um dos alunos apresentou estratégias distintas para determinar termos próximos ou distantes. Assim, quando se tratava de efetuar uma previsão para termos distantes, optava por utilizar estratégias funcionais, estabelecendo relações entre as duas variáveis, ou recorria à utilização do "objeto inteiro", baseado no valor da unidade de uma das quantidades referidas. Nas tarefas finais e, independentemente de se tratar de prever termos próximos ou distantes, ambos recorreram a estratégias explícitas, estabelecendo relações entre quantidades de natureza distinta. Branco e Ponte (2006) identificaram os mesmos tipos de estratégias num estudo efetuado com alunos do 7.º ano de escolaridade. Estes autores realçam a importância que a descrição da figura, ou o modo como é observada pelos alunos, assume na adoção de estratégias funcionais. Em suma, ao descreverem os seus pontos de vista, considerando as propriedades da figura, os alunos abandonam as estratégias recursivas e passam a relacionar a constituição da figura com a posição que ocupa na sequência.

Barbosa (2011) considerou, com base num quadro teórico relevante, diferentes estratégias que lhe permitiram analisar os procedimentos utilizados por alunos do 6.º ano de escolaridade na resolução de tarefas direcionadas para o estudo de padrões e regularidades. Destacam-se estratégias: de contagem, em que se apela ao desenho e à contagem dos respetivos elementos de cada termo; "objeto inteiro", em que um termo da sequência é considerado como unidade sendo posteriormente usados os múltiplos dessa unidade; diferença constante, em que se recorre a uma diferença comum tendo como base os termos anteriores; explícitas, criando uma regra, baseada no contexto do problema que permita calcular qualquer termo; adivinhar e testar, adivinhando regras que são posteriormente testadas através da atribuição de vários valores pertencentes ao domínio da função.

Num estudo realizado com alunos do Ensino Secundário com idades compreendidas entre os quinze e os dezasseis anos, Cruz e Martinón (1998) fazem referência às estratégias mais usadas e realçam alguns aspetos pertinentes. Distinguem-se, assim, estratégias numéricas, visuais e mistas. Nas estratégias numéricas, prevalece a adição da diferença constante, e os autores realçam o facto de, apesar de esta abordagem não permitir a generalização, assumir posteriormente importância na verificação da regra. Nas estratégias mistas, os alunos adotam as duas abordagens, confrontando a visualização com as propriedades estruturais dos padrões, o que facilita, na perspetiva dos autores, a generalização. Neste estudo foram ainda empregues estratégias recursivas, envolvendo o uso dos termos anteriores e estratégias explícitas, com recurso à relação entre as variáveis. Outros autores como Barbosa, Vale e Palhares (2008); Friel e Makwath (2009) reforçam a importância da visualização no processo de generalização, na medida em que funciona como um facilitador na interpretação da estrutura dos padrões, permitindo simultaneamente que surjam diferentes expressões equivalentes de um mesmo padrão que refletem o ponto de vista do intérprete, ou seja, a forma como os alunos desenham ou observam o padrão. É ainda importante salientar a importância que os autores atribuem à utilização das tabelas na resolução de problemas envolvendo padrões, dado que se colocam em evidência as variáveis facilitando o estabelecimento de relações e a entrada no pensamento funcional.

Em jeito de síntese, apontam-se as estratégias mais comuns, empregues normalmente pelos alunos na resolução de problemas envolvendo a proporcionalidade direta e outras regularidades. Quanto à proporcionalidade direta, é possível distinguir estratégias de natureza multiplicativa e aditiva. As estratégias multiplicativas podem assumir abordagens de caráter escalar e funcional e ainda uma variante à abordagem funcional em que os alunos recorrem ao valor da unidade de uma das quantidades referidas. As estratégias aditivas podem apresentar traços distintos conducentes a conclusões corretas quando relacionadas com a adição repetida, frequentemente designada por *building-up*, apresentando, neste caso, características do raciocínio multiplicativo, ou originar resultados incorretos quando é empregue a diferença constante. Faz-se ainda referência a outras estratégias para tratar problemas de proporcionalidade direta, como é o caso do fator de mudança, com recurso aos múltiplos; à utilização da razão como fração e ao produto cruzado. Na abordagem a tarefas envolvendo outras regularidades enumeram-se estratégias de contagem; aditivas, com recurso à diferença constante que se mantém entre termos consecutivos; outras estratégias recursivas, em que é possível determinar o termo seguinte conhecendo o anterior; e estratégias explícitas ou funcionais, onde é estabelecida uma relação entre as variáveis, ou se recorre ao valor da unidade de uma das quantidades referidas, designando-se como objeto inteiro.

2.4. O desenvolvimento do pensamento algébrico

Ao desenvolvimento do pensamento algébrico estão associados aspetos didáticos que importa considerar: as potencialidades das tarefas, a cultura de sala de aula e a comunicação matemática imprescindível à construção dos significados (Canavarro, 2009). Sierpinska (1998) reafirma esta posição sublinhando a importância da existência de práticas de ensino adequadas, que promovam a comunicação como forma de interação social incentivando a argumentação e a justificação das ações, e que contribuam para a compreensão dos significados matemáticos.

2.4.1. Tarefas com potencial algébrico

As tarefas, tendo como ponto de partida as orientações curriculares, devem constituir desafios que conduzam à construção de conhecimentos sólidos sobre os seus tópicos. Assim na escolha de uma tarefa e de acordo com o que se encontra definido nos Princípios e Normas para a Matemática Escolar (1991), o professor deve possuir um conhecimento significativo dos seus alunos, no que confere a interesses, experiências anteriores com tarefas matemáticas e expectativas face à disciplina. Considerar as diferentes formas como os alunos podem aprender Matemática e estar disponível para ouvir e procurar compreender os seus raciocínios, são fatores determinantes na preparação e aplicação de tarefas de natureza exploratória que visam promover a construção do conhecimento. Estimular os alunos a fazer conexões, com outros tópicos ou temas do programa possibilitando o desenvolvimento de um quadro coerente de ideias matemáticas e proporcionar oportunidades que lhes possibilitem fazer Matemática e aprender a apreciá-la, são outras considerações a destacar nos Princípios e Normas.

A seleção e adaptação de tarefas aos diferentes objetivos de ensino definidos nas atuais orientações curriculares e o modo como se desenvolvem em sala de aula podem, deste modo, ser consideradas como funções primordiais do professor. Nos dias que correm, dada a diversidade de instrumentos e propostas disponíveis online há que ser criterioso na escolha, acautelando alguns aspetos como o propósito a que se destinam, o nível de desafio, o contexto e a relevância do mesmo para os alunos. A formulação cuidada das questões e a sequência em que surgem na tarefa são fatores que também não podem ser deixados ao acaso, delas depende a complexidade da tarefa e a qualidade das aprendizagens que se podem proporcionar aos alunos (Canavarro e Santos, 2012). Sobre o processo de planificação, Mundy, Lappan e Phillips (2000), apontam as expectativas criadas pelo professor, acerca da forma como os alunos irão interagir com a tarefa e com os seus pares em torno dela, e ainda a criação de um conjunto de questões pertinentes que possam ajudá-los a organizar o seu raciocínio como fatores cruciais.

A sequência de tarefas, vulgarmente concebida para tratar um tema ou tópico do Programa, é outro aspeto que Canavarro e Santos (2012) consideram relevante na aprendizagem, bem como, a importância das tarefas cumprirem papéis distintos e definirem uma trajetória. Nesta perspetiva são encarados diferentes níveis de desafio e a construção encadeada do conhecimento, na medida em que a tarefa seguinte deve proporcionar a mobilização de conhecimentos da, ou das anteriores e contribuir para novas aprendizagens.

As trajetórias de aprendizagem, associadas a um ensino com compreensão têm sido motivo de vários estudos que começaram a surgir, sobretudo a partir dos anos noventa, contudo, em Portugal o Programa de 2007 imprimiu um novo impulso a esta temática, pois tem implícita uma aprendizagem com compreensão, onde as cadeias de tarefas desempenham um papel fundamental. Neste sentido é importante compreender o que se encontra subjacente a uma trajetória de aprendizagem, Serrazina e Oliveira (2010) identificam os objetivos, a progressão no desenvolvimento e o conjunto de tarefas, como aspetos a considerar. Nesta ótica, os objetivos definidos no currículo, determinam as aprendizagens que os alunos devem fazer sobre determinado tema ou tópico; a progressão no desenvolvimento, compreende patamares distintos através dos quais os alunos devem caminhar e desenvolver a sua compreensão; e o conjunto de tarefas o fio condutor que os guiará ao longo do percurso. Estas autoras estabelecem ainda uma correspondência entre trajetórias de aprendizagem e sequências de tarefas, designadas habitualmente por cadeias de tarefas. Assim, é importante que uma sequência de tarefas tenha subjacente um trajetória, onde se possam identificar várias etapas que compreendam a construção progressiva do conhecimento.

Quando é o desenvolvimento do pensamento algébrico que está em causa, o potencial algébrico das tarefas é apontado, por muitos autores, como um dos aspetos fundamentais. Johanning et al (2009) destacam a importância das tarefas e dos contextos a que surgem associadas, bem como a quantidade e qualidade das experiências, que os alunos têm oportunidade de vivenciar, como relevantes no ensino da Álgebra. Ainley, Bills e Wilson (2005) realçam também a importância do recurso a contextos significativos e selecionaram cinco princípios fundamentais, que se tornam importantes, destacar no *design* de tarefas projetadas para a utilização da notação algébrica: a) a existência de equilíbrio entre os diferentes tipos de atividade algébrica: generalização, manipulação e situações problemáticas globais, que pressupõem o uso dos dois processos anteriores; b) a existência de continuidade entre a Aritmética e a Álgebra, possibilitando estabelecer generalizações a partir das relações diagnosticadas na análise de casos particulares; c) a utilização da folha de cálculo como ambiente algébrico, dado que a utilização da notação produz um efeito imediato na produção de resultados e um feedback instantâneo; d) o objetivo/ propósito da tarefa em que os resultados possam ser considerados significativos para o aluno; e) a utilidade, de certo modo ligada ao seu propósito, e que contempla a compreensão da utilidade das ideias matemáticas.

A descoberta da generalização tem implícito um caminho que passa por "algebrizar" tarefas de natureza problemática e promover investigações com esse intuito. As tarefas devem propor uma trajetória gradual, que permitam experienciar casos particulares e a partir deles estabelecer relações e generalizações (Canavarro, 2009). Quando os alunos são convidados a observar padrões e relações em problemas associados a contextos reais e significativos é possível vê-los formular conjeturas, testá-las, discuti-las, representá-las e verbalizar generalizações (Mundy, Lappan, & Phillips, 2000). Estes autores referem ainda que o tipo de questões a colocar aos alunos é determinante quando o propósito é a generalização. Assim, as tarefas devem potenciar o estudo de um número suficiente de casos particulares, que lhes permitam encontrar relações entre as variáveis e apontar em seguida para a exploração de casos distantes com vista à generalização, onde não seja viável a experimentação, e em que o recurso às relações encontradas aquando do estudo de casos particulares seja o caminho mais óbvio a seguir. A previsão dos acontecimentos para casos distantes é, deste modo, considerado o passo decisivo para a generalização.

O enunciado de uma tarefa deve remeter para a procura de significados dos símbolos e para a verificação da sua razoabilidade (Arcavi, 2006). A comparação entre a expressão da generalização obtida e o enunciado da tarefa que lhe deu origem, ajuda a compreender o sentido dos símbolos, podendo o aluno, inclusive, recorrer a outro tipo de representações algébricas, como um gráfico, uma tabela, ou a linguagem natural, que lhe permita descrever a situação proposta.

Os contextos/situações propostas são outro aspeto que assume grande importância quando os destinatários são ainda jovens inexperientes na Álgebra, devem estar o mais próximo possível da realidade dos alunos, ou mesmo abordar as suas vivências. Deste modo, as expressões algébricas convencionais ganham vida, a partir da verbalização das relações encontradas entre as variáveis e aos poucos tornar-se-ão motivo de reflexão por parte dos alunos, conduzindo-os a outros patamares mais elevados do conhecimento (Carraher, Martinez, & Schliemann, 2008).

Yackel (1997) sublinha que o raciocínio das crianças é fundamental para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Quando confrontadas com tarefas estimulantes, nos primeiros anos de ensino, as crianças são capazes de encontrar relações numéricas entre quantidades e a partir delas generalizar trilhando um caminho para o simbolismo algébrico, contudo, o potencial da tarefa não garante o sucesso, a forma como o professor conduz a aula é determinante. Nesta ótica há que destacar, as questões que coloca aos alunos, as oportunidades de interação que lhes possibilita e a liberdade que lhes dá para exporem e discutirem os seus raciocínios.

2.4.2. A cultura de sala de aula

Sutherland (1991) vem reforçar a ideia do desenvolvimento de uma "cultura de Álgebra na escola em que os alunos encontrem necessidade do simbolismo algébrico" (p. 46). Esta perspetiva, pode contribuir significativamente para uma mudança de atitude face à Matemática e à Álgebra. Quando os símbolos são introduzidos desde o 1.º Ciclo, em contextos reais e com naturalidade para representar quantidades indefinidas, em problemas de valor omisso ou noutros contextos, podendo inclusive surgir como abreviaturas, ganham um significado relevante para o utilizador (Canavarro, 2009).

Uma aprendizagem Matemática de natureza exploratória tem subjacente uma cultura de sala de aula, em que a natureza das tarefas, o papel do professor e aquele que é reservado aos alunos, possuem características particulares. Destaca-se o significado e a relevância da tarefa na construção dos conceitos matemáticos que são definidos pelas práticas matemáticas e pela forma de participar do professor e dos alunos em tais práticas. O foco encontra-se nas características das tarefas, nas interações estabelecidas, no uso de determinados instrumentos, na construção dos conceitos matemáticos e em posteriores reflexões (Llinares, 2000). Nesta perspetiva a sala de aula é vista como uma microcultura em que os significados se geram a partir de atividades partilhadas entre professor e alunos, e das interações estabelecidas em torno de uma tarefa matemática, definindo assim a triangulação em que professor, alunos e tarefa constituem os vértices.

Ao olhar para a planificação de aulas de natureza exploratória é possível distinguir quatro momentos (Canavarro et al, 2012). A apresentação da tarefa em que se espera que os alunos compreendam o que se pretende com a mesma, para tal devem usufruir de tempo para a leitura e para expressar a sua compreensão usando vocabulário próprio, do sucesso desta etapa depende o das seguintes, uma vez que o professor tem oportunidade de aceder ao raciocínio dos alunos e perceber como interpretaram a tarefa. Um segundo momento em que exploram, normalmente em grupos, a tarefa, um outro em que são apresentados e discutidos os resultados e as conjeturas formuladas pelos grupos, e um último em que tem lugar a sistematização que prevê a formalização dos conceitos implícitos, sempre com base nas conjeturas formuladas anteriormente pelos alunos.

Canavarro (2009) destaca o papel do professor na criação de uma cultura de sala de aula que potencie o desenvolvimento do pensamento algébrico. Neste ambiente há um espaço para a discussão, para a argumentação, para a partilha de ideias e para a construção coletiva da generalização. Uma cultura de aula em que é dada aos alunos a oportunidade de realizar um trabalho autónomo, onde expressam e justificam os seus raciocínios, onde traçam o seu próprio caminho e, onde por fim confrontam os seus resultados e processos com os dos colegas, enfim, uma cultura em que a construção do conhecimento faz parte das rotinas dos alunos. O papel do professor é crucial em todo este processo, dele depende a qualidade das aprendizagens realizadas pelos alunos, assim, deve questioná-los com frequência, com o objetivo de procurar compreender os seus raciocínios, valorizando, deste modo, o seu trabalho autónomo. Apoiá-los na construção e gestão de um conjunto de instrumentos valiosos como tabelas, diagramas, expressões numéricas, gráficos, materiais e objetos adequados à compreensão da tarefa, é outro aspeto inerente ao papel do professor, contudo, isso não significa indicar-lhes o caminho, pelo contrário deve procurar promover a diversidade, consciente da riqueza desta potencialidade, dando-lhes liberdade na escolha dos processos.

Kieran (2007) reforça esta ideia focando a importância da sequência de tarefas a propor aos alunos e a forma como o professor interage com o grupo turma, encorajandoos a expressar e justificar os seus pensamentos, como elementos determinantes no desenvolvimento do pensamento algébrico.

Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) descrevem uma perspetiva semelhante, realçando o papel do professor na criação de uma cultura de sala de aula e de instrumentos, que promovam uma aprendizagem significativa baseada em atividades de natureza exploratória e investigativa. Um professor que crie condições para a aprendizagem, que demonstre criatividade, que construa tarefas significativas, que proporcione momentos de reflexão, comunicação e argumentação, que abra espaço às interações, em suma, que transforme a aprendizagem dos seus alunos num processo de construção dos significados. Os autores reconhecem a exigência de um papel com estas características, distante daquele em que o professor procurar explicar os conteúdos de forma clara e em que seleciona um conjunto de exercícios relacionados, que os alunos devem resolver aplicando regras inquestionáveis que lhes foram transmitidas e, para os quais existe uma e uma só solução, válida para cada caso. Contudo, as vantagens são demasiado evidentes e relevantes na construção de uma aprendizagem com significado.

Ao professor cabe o papel de incentivar uma aprendizagem ativa e participada, dando tempo aos alunos para estabelecer e expressar relações, disponibilizando-se para ouvir, compreender raciocínios, proporcionar momentos de discussão e reflexão, criando, deste modo, uma cultura de sala de aula, onde se aprendem conceitos matemáticos com compreensão.

2.4.3. A comunicação e a construção dos significados

A comunicação pode ser caracterizada, de um modo geral, como um processo de transmissão ou circulação de informação, entre um emissor e um recetor que partilham de um mesmo código, de modo a tornar possível a compreensão da mensagem (Bitti & Zani, 1997). A efetividade da comunicação é aferida pelo *feedback* que permite ao comunicador controlar o modo como o destinatário recebe a informação (Sfez, 1991). O desenvolvimento de estratégias de comunicação, minimizam a existência de ruído, o que em termos educativos se pode traduzir na redução da diferença entre o que se ensina e o que se aprende.

A Matemática e o ensino da Matemática, devido à sua natureza, constituem uma área privilegiada para o desenvolvimento da comunicação, na medida em que os significados matemáticos não existem por si, constroem-se através de um processo de negociação, argumentação e contra-argumentação (Guerreiro, 2010).

A comunicação matemática como interação social é entendida como um meio dos intervenientes poderem partilhar a compreensão sobre um assunto e a aprendizagem resulta essencialmente das interações aluno-aluno e alunos-professor (Sierpinska, 1998). Por outro lado, a comunicação como processo de transmissão de informação, encontra-se associada ao ensino da Matemática como um conjunto de verdades objetivas, preexistentes e independentes dos indivíduos, prontas a serem transmitidas aos alunos. No Programa de Matemática do Ensino Básico de 2007 (Ponte et al., 2007) a comunicação matemática como processo de interação social afirma-se como um dos eixos fundamentais do ensino da Matemática em consonância com o que tem sucedido a nível internacional e com base em inúmeros estudos efetuados na área.

Na exploração das tarefas, em sala de aula, as interações sociais que se estabelecem, essencialmente, nos momentos de discussão coletiva, são fundamentais na construção dos significados matemáticos. Godino e Llinares (2000) e Sierpinska (1998) defendem que o significado matemático não se encontra no sentido dos signos ou representações, mas no uso das palavras, frases, ou signos e símbolos.

De acordo com esta perspetiva, há que criar um ambiente propício ao desenvolvimento da comunicação matemática. Thompson (2009) sugere algumas ideias neste sentido: (i) criar um ambiente, em sala de aula, onde os alunos não se sintam constrangidos em expor as suas estratégias; (ii) estar atento às explicações dos alunos, procurando compreender os seus métodos; (iii) identificar estratégias particulares dos alunos e reforçar positivamente o seu uso, ainda que sejam pouco usuais; (iv) valorizar a utilização de conhecimentos prévios no desenvolvimento de novos significados; e (v) garantir que os alunos passem por um número suficiente de experiências que lhes possibilite desenvolver, progressivamente, estratégias mais sofisticadas. Um ambiente com estas características promove as interações sociais, entre os alunos e entre estes e o professor, criando alicerces para o desenvolvimento de experiências significativas que potenciem a aprendizagem.

Pode-se então inferir que os momentos de discussão coletiva, são cruciais na construção do conhecimento, nesta fase, a capacidade de gestão do professor é novamente posta à prova e a consciência de que é necessário dar tempo aos alunos deve prevalecer. Durante a realização do trabalho autónomo é importante proporcionar aos alunos materiais, como acetatos, cartolinas, ou outro suporte onde possam expor o seu trabalho a fim de facilitar e apoiar a comunicação, no momento de discussão coletiva. A seleção das produções também merece algum cuidado, durante a realização do trabalho autónomo há que estar atento às diferentes representações utilizadas, e estabelecer uma ordem coerente, reservando para o final aquela, ou aquelas que expressam a generalização de um modo mais completo e formal. No momento privilegiado da discussão cabe-lhe moderar as intervenções e colocar questões que possam ajudar a clarificar raciocínios e eventualmente, caso seja necessário, e este acontecimento não surja durante o trabalho autónomo, ou no momento da discussão coletiva a partir do confronto de ideias, orientar para o estabelecimento de relações generalizáveis (Canavarro, 2009).

Em jeito de síntese, nesta secção destaca-se o potencial algébrico das tarefas como forma de desenvolver o pensamento algébrico e promover a busca da generalização, a partir do estudo de casos particulares e das relações que é possível estabelecer. Além do potencial algébrico o contexto e o caráter exploratório das tarefas são outros aspetos a considerar. No que respeita à cultura de aula o foco encontra-se, em grande parte, no papel do professor como bom ouvinte e responsável pela criação de um ambiente onde os alunos se sintam confortáveis a formular conjeturas, expô-las e defendê-las, questionar os colegas, desenvolver o seu pensamento e construir conceitos com significado. O papel da comunicação matemática em todo o processo ocupa um lugar central, pois deve estar presente nos quatro momentos distintos de um modelo exploratório (Canavarro et al, 2012).

CAPÍTULO 3

METODOLOGIA

O foco deste estudo incide sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico em alunos do 2.º Ciclo do Ensino Básico e pretende ser um contributo para a compreensão das estratégias e representações usadas pelos alunos na procura da generalização, e para a perceção dos significados que atribuem às letras e às expressões algébricas, quando exploram situações contextualizadas e com potencial algébrico. Considerando a natureza do problema em estudo neste terceiro capítulo, apresento as opções gerais do estudo, a caracterização do caso da turma do 6.º ano, a experiência de ensino que contempla as orientações curriculares em vigor à data da intervenção didática, as opções metodológicas desta intervenção e a importância que a planificação assumiu na gestão das aulas. Neste capítulo ainda se encontram indicadas as técnicas usadas na recolha de dados, e as categorias consideradas na análise.

3.1. Opções gerais do estudo

Tendo em linha de conta o objetivo e a natureza das questões da presente investigação, a opção metodológica inscreve-se no paradigma interpretativo, com uma abordagem qualitativa. Bogdan e Biklen (1994) consideram que os atributos essenciais desta opção são os seguintes: (i) o processo de recolha de dados ocorre no ambiente natural, a sala de aula, e o investigador é o instrumento principal desse processo, podendo deslocar-se com frequência junto dos participantes, para recolher dados mais detalhados; (ii) é interpretativa e descritiva, na medida em que o investigador interpreta os dados, descreve os participantes, analisa os dados, desenvolve categorias de codificação e retira conclusões; (iii) os processos são o principal foco de interesse do investigador, que delega para segundo plano os produtos e o resultado final; (iv) os dados são analisados indutivamente, dado que as conclusões são fundamentadas na análise de um número suficiente de casos particulares e (v) é dada uma atenção especial à compreensão dos significados construídos pelos participantes.

Destacam-se também, no que respeita à investigação interpretativa, três focos de interesse, reconhecidos por Erickson (1986): (i) a natureza da sala de aula que constitui um meio social e cultural organizado para o processo de aprendizagem; (ii) a natureza do ensino, considerado como um dos aspetos da aprendizagem e (iii) a natureza dos significados construídos por professores e alunos, considerados atributos essenciais do processo educativo.

A investigação concretiza-se com um *design* de estudo de caso analítico, sendo o caso uma turma de 6.º ano de escolaridade. Nesta ótica, irá apoiar-se em construtos teóricos bem definidos, com ganhos significativos para a investigação, e seguir uma perspetiva interpretativa, que possibilite compreender de que forma os símbolos e a generalização ganham significado para os alunos (Ponte, 2006).

Um estudo de caso desta natureza tem como objetivo o conhecimento da realidade, tal como ela é percecionada pelos diferentes atores. Do ponto de vista de Bogdan e Biklen (1984), ao alcance do investigador encontram-se variadíssimas formas de interpretar as experiências, e que podem resultar da interação estabelecida com os outros atores. Estes autores enfatizam, ainda, a importância do investigador procurar entender o pensamento subjetivo dos participantes, nos seus estudos, de forma a tentar compreender os significados criados por estes.

Este tipo de investigação segundo Merriam (citada por Bogdan & Biklen, 1984) apresenta as seguintes características: Particularística, dado que se focaliza numa determinada situação, neste caso, o desenvolvimento de uma dada cultura relativa a Álgebra, na aprendizagem da proporcionalidade e das sequências e regularidades nos alunos de uma turma de 6.º ano. Descritiva, na medida em que o produto final será a descrição aprofundada do fenómeno estudado. Heurística, pois pretende-se que conduza à compreensão de vários aspetos que condicionam o fenómeno estudado, como a origem das dificuldades dos alunos na compreensão do significado dos símbolos. Indutiva, o planeamento será aberto e flexível e atento ao que surge no terreno. Tratando-se de uma experiência de ensino, os episódios de sala de aula condicionam o decorrer das aulas e naturalmente as aulas seguintes, obrigando a reajustes constantes nas planificações iniciais, de acordo com as necessidades que surgirem. Holística, visto que incidirá sobre todas as dimensões de um mesmo contexto, nesta medida, procuraremos diversificar o tipo de problemas apresentados e os contextos em que surgem.

A turma de 6.º ano de escolaridade que constitui o caso tem a investigadora como professora de Matemática pelo segundo ano consecutivo, assim os dados serão recolhidos em ambiente natural de sala de aula, no decurso do ensino regular da disciplina de Matemática. A visão naturalista prevê, por um lado, a interação entre o investigador e os participantes no palco de estudo, sem se recorrer ao distanciamento e procurando manter constantes as condições do meio (Gauthier, 1978). Por outro lado, e apesar de não se pretenderem alterar as condições do meio e o nível proximal entre os participantes e o investigador, esta metodologia possibilita, segundo Erickson (1986), um distanciamento ao tornar estranho aquilo que é simultaneamente familiar, e ao explicitar o que está implícito possibilitando a construção de significados relevantes, para as questões de investigação.

Pelo exposto, este estudo constitui uma investigação sobre a minha própria prática, na medida, em que desempenhei simultaneamente, na minha sala de aula, o papel de professora e investigadora. Ponte (2002) refere que, cada vez mais, os professores se envolvem em investigações desta natureza, de modo a encontrar estratégias que lhes permitam enfrentar os problemas relacionados com a sua prática. Este autor distingue ainda dois objetivos que podem levar um professor a envolver-se em investigação sobre a sua própria prática. O primeiro está relacionado com a implementação de mudanças na sua prática e surge após a identificação, por parte do professor, da necessidade de alterar alguns aspetos. O segundo passa pela necessidade de compreender as causas que perturbam a prática, com vista à implementação posterior de um plano de ação que a melhore.

Como gestor do currículo, o professor tem uma necessidade constante de avaliar, reformular e experimentar metodologias de trabalho que conduzam os alunos a alcançar o sucesso. A investigação sobre a prática pode constituir um instrumento essencial nesse campo de ação, na medida em que ajuda a compreender o modo como pensam os alunos e as origens das suas dificuldades, contributos essenciais à criação de novas práticas

(Ponte, 2002). Outros autores como Serrazina e Oliveira (2001), também apresentam as suas reflexões acerca do duplo papel que o professor investigador pode assumir no desenvolvimento curricular.

> (i) um profissional competente na sala de aula, preocupado com a sua formação prática, centrando-se no aluno, com um elevado grau de compreensão na forma de lidar com os alunos donde retira alguma satisfação pessoal e avaliando o desempenho destes segundo o seu ponto de vista; e (ii) um profissional que perspetiva o seu trabalho no contexto mais global da escola, da comunidade e da sociedade, que participa em diversas atividades profissionais, que se preocupa em relacionar a teoria e a prática e que assume de alguma forma uma teoria curricular e de avaliação (Serrazina e Oliveira, 2001, p.306).

As autoras Serrazina e Oliveira (2001) descrevem um professor preocupado e atento à realidade, que procura desenvolver práticas centradas no aluno, e que investiga problemas relacionados com a sua prática, estabelecendo ligações entre a teoria e a prática, na procura de soluções para problemas relacionados com o exercício das suas funções. É esta a visão que partilho, sendo forte a expectativa de que este estudo me possibilite vir a tomar opções de ensino mais fundamentadas e robustas no que diz respeito ao ensino da Álgebra dos meus futuros alunos.

3.2. Caracterização do caso

O caso em estudo é uma turma de 6.º ano de escolaridade, de uma escola básica do 2.º e 3.º Ciclos, localizada no interior alentejano. As idades dos alunos estão compreendidas entre os onze e os quinze anos e, em termos de sexo, a distribuição é desigual, existindo dezasseis rapazes e seis raparigas. O nível socioeconómico é considerado bastante heterogéneo, bem como as habilitações académicas dos pais. Dos vinte e dois alunos da turma, seis encontram-se a repetir o 6.º ano.

A turma apresenta um bom comportamento e, de um modo geral, uma atitude positiva face à escola, demonstrando empenho nas atividades onde se envolve. Na disciplina de Matemática, os alunos gostam particularmente, de resolver tarefas que constituam desafios, participando ativamente nos momentos de discussão coletiva. O aproveitamento na disciplina de Matemática é considerado heterogéneo, na medida em que é possível distinguir vários níveis de desempenho, contudo, a taxa de sucesso é bastante satisfatória, rondando os oitenta e dois por cento. Realço o facto de ser o segundo ano que a maioria destes alunos estão a trabalhar comigo, tendo já adquirido hábitos de trabalho em grupo e de discussão entre pares na turma.

Os fatores apontados no parágrafo anterior, nomeadamente os que respeitam ao interesse dos alunos por tarefas de cunho exploratório, e aos hábitos já adquiridos de trabalho em grupo e comunicação, foram determinantes na escolha da turma, uma vez que o objetivo do estudo prevê a exploração de tarefas com potencial algébrico, no contexto de uma cultura de aula que valoriza a comunicação matemática.

3.3. Experiência de ensino

Para concretizar este estudo, foi concebida uma intervenção didática que permite investigar as questões orientadoras do estudo, no contexto do caso da turma do 6.º ano, procurando conciliar o objetivo desta investigação, inspirado no quadro teórico apresentado, com as orientações curriculares definidas no documento curricular oficial para o 2.º Ciclo à data da realização desta intervenção (Ponte et al., 2007).

3.3.1. Características da intervenção didática

A metodologia contempla a implementação de tarefas de natureza exploratória com potencial algébrico, que incentivam a busca da generalização, a desenvolver numa cultura de aula em que a comunicação matemática assume um papel importante na construção dos significados. Esta metodologia vai ao encontro da proposta no programa de 2007, onde aspetos relacionados com a escolha das tarefas e a dinâmica das aulas não podem ser descuidados.

3.3.1.1. As aulas

A promoção de uma dinâmica de sala de aula, centrada no aluno, em que a comunicação matemática e a explicitação de significados é valorizada, pode em grande medida contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico neste nível de ensino (Canavarro, 2009). Esta dinâmica será crucial, uma vez que o uso das letras, na Álgebra, ainda não faz parte das rotinas dos alunos. O uso da simbologia matemática surge, assim, aliado a situações contextualizadas e significativas para os alunos, e a linguagem natural a par da simbologia como um instrumento importante que ajuda a clarificar significados. Relativamente à utilização dos símbolos, Arcavi (2006) reforça esta ideia, referindo que ter sentido de símbolo é dar significado a esses símbolos, e que para tal, impõe-se o desenvolvimento de uma cultura de sala de aula que favoreça de forma natural e em contextos significativos a introdução dos símbolos na Álgebra, da mesma forma que se promovem tarefas para desenvolver o "sentido do número e das operações", na Aritmética.

As aulas contemplam os quatro momentos distintos, de um modelo exploratório (Canavarro et al 2012). A apresentação da tarefa em que se espera que os alunos compreendam o que se pretende com a mesma, sendo que, para tal devem usufruir de tempo para a leitura e para expressar a sua compreensão usando vocabulário próprio. Do sucesso desta etapa depende o das seguintes, uma vez que o professor tem oportunidade de aceder ao raciocínio dos alunos e perceber como interpretaram a tarefa. Um segundo momento, em que abordam a tarefa a pares ou em grupos constituídos por três ou quatro elementos, um outro em que são apresentados e discutidos os resultados e as conjeturas formuladas pelos grupos. Ao longo dos dois momentos anteriores o professor deve ouvir os alunos procurar compreender os seus raciocínios, valorizar e incentivar a aplicação dos seus próprios métodos, ainda que sejam pouco usuais e informais, o mais importante é que façam sentido para o aluno. O que está em causa são os significados construídos e o desenvolvimento do pensamento proporcional e algébrico, não a utilização de um conjunto de métodos usuais que conduzem à mecanização e à sua utilização deliberada sem que os alunos se questionem acerca da razoabilidade dos resultados obtidos e do significado das expressões utilizadas. A exploração de possíveis erros conduzem a momentos ricos de discussão, onde urgem explicações fundamentadas, argumentos válidos e convincentes, que indicam possíveis caminhos válidos a seguir. São momentos privilegiados de comunicação, em que a reflexão sobre o erro e a apresentação de estratégias diversificadas, por parte dos colegas traz ganhos significativos para todos, podendo ser considerados momentos privilegiados de aprendizagem. Um último momento, em que tem lugar a sistematização que prevê a formalização dos conceitos implícitos, sempre com base nas conjeturas formuladas anteriormente pelos alunos. Esta forma de trabalho já faz parte das rotinas do grupo, não sendo, por isso, uma alteração à dinâmica anteriormente estabelecida.

3.3.1.2. As tarefas

A escolha das tarefas constitui um aspeto importante, sobretudo, quando se pretende promover uma aprendizagem de natureza exploratória, com contextos significativos para os alunos e um nível de desafio adequado, aspetos que não podem ser descurados, assim como as exigências curriculares definidas nos documentos oficiais (Canavarro & Santos, 2012). Assim, as tarefas que integram esta sequência, traçam um percurso de aprendizagem, que prevê a mobilização de conhecimentos e o desenvolvimento das capacidades transversais, ao longo do qual é trabalhado o tópico relações e regularidades. As fontes são diversificadas, podendo destacar-se alguns artigos científicos relacionados com o desenvolvimento do pensamento algébrico, tendo também algumas sido criadas por mim.

A criação de um contexto apelativo e familiar aos alunos, surgiu após a consulta da tese de doutoramento de Ana Isabel Silvestre, onde a autora recorre a uma sequência de tarefas baseada na história infantil “O Coelho e a Tartaruga”. O grupo de escuteiros acontece pelo facto de alguns alunos da turma, onde terá lugar a recolha de dados, integrarem um grupo de escuteiros do Corpo Nacional de Escutas e por se tratar de um contexto onde é possível incluir desafios e diversas atividades de carácter desportivo e lúdico, praticadas habitualmente por estes grupos, que envolvem variáveis que podem ser tratadas algebricamente.

Algebrizar as tarefas foi um cuidado necessário atendendo aos objetivos deste estudo. Assim, a estrutura de cada uma contempla o estudo de casos particulares que apelam à concretização; de outros casos, ainda que particulares, mas distantes e da generalização, propriamente dita. Em relação ao potencial algébrico das tarefas Arcavi (2006) refere que estas devem contemplar situações que potenciem o desenvolvimento do sentido dos símbolos, isto é, que constituam um desafio suficiente que possam conduzir à busca da generalização e de um significado para as letras.

3.3.1.3. A organização do trabalho

Caminhar de estratégias informais e intuitivas para outras mais formais e estruturadas está na lógica desta sequência de tarefas e de toda a planificação que preveem, inicialmente, o estabelecimento de relações entre os números e factos particulares apresentados, sem esquecer o apelo, em simultâneo, à generalização. A própria expressão da generalização pode inicialmente assumir um carácter mais informal, tendo sempre por base as explicações dos alunos e a linguagem natural usada para a expressar e, adquirindo posteriormente, um maior formalismo a partir do uso de expressões algébricas.

Os alunos devem ser incentivados a criar a expressão algébrica a partir das relações que identificam entre os diferentes casos particulares analisados no contexto sugerido. O uso de tabelas, da linguagem natural e da folha de cálculo Excel podem ser instrumentos preciosos para esse fim, dado que permitem organizar os dados e expressar raciocínios, facilitando, assim, o estabelecimento de relações e o desocultar da estrutura matemática inerente, que irá conduzir à descoberta da expressão da generalização. As letras a utilizar nas expressões devem estar relacionadas com o contexto apresentado, surgindo como abreviaturas e assumindo, desta forma, um significado concreto, ao mesmo tempo que a expressão ganha transparência, permitindo ver através dela a situação apresentada na tarefa. Neste contexto Lave e Wenger (1991), afirmaram:

> o termo transparência, quando aplicado aos instrumentos (tabelas, gráficos, expressões algébricas), refere-se ao modo através do qual, a sua utilização e a compreensão do seu significado interagem para definir o processo de aprendizagem (p. 102-103)

3.3.2. A planificação

A planificação surgiu como um instrumento facilitador das aulas que orientou a minha ação, sem esquecer, contudo, que uma aula deve "acontecer", "ser viva e dinâmica", e que a ação dos seus intervenientes pode alterar o seu rumo. Contudo, isso não significa que se perca o fio condutor, ou seja, que se percam de vista os objetivos e as dinâmicas inicialmente previstas. Assim, os planos de aula incluíram possíveis estratégias a utilizar pelos alunos, bem como os seus erros mais frequentes, antecipando, de algum modo, os acontecimentos que ocorreram durante a implementação desta intervenção didática. Estes planos foram estruturados seguindo o modelo do ensino exploratório em que se valoriza a interação dialógica enquanto possibilidade de discussão dos raciocínios dos alunos para a sua compreensão, estruturação e desenvolvimento da linguagem mais formal.

Previram-se 30 aulas para trabalhar este tópico, ou seja, 15 blocos de 100 minutos com uma margem de três blocos, relativamente ao número de tarefas apresentadas pelo facto de existirem tarefas que poderiam ser desdobradas em dois blocos, devido à sua complexidade ou extensão.

Tabela 1– *Foco das tarefas*

	Tarefas	**Foco das tarefas**
1	Uma questão de misturas ...	• Reconhecer situações de proporcionalidade direta e representá-las em tabelas e gráficos; • Reconhecer a existência de um valor constante, resultante do quociente entre as variáveis; • Compreender os conceitos de razão, proporção; • 2C + 3A = SUMO ou 1C + 1,5 A = SUMO
2	Enigmas com números geométricos	• Reconhecer situações de proporcionalidade direta numa sequência pictórica crescente; • Identificar a relação entre as variáveis: número de pintas = número da figura X 3 número de pintas = número da figura X 4
3	Um percurso pedestre	• Identificar as variáveis: distância percorrida, em metros; intervalo de tempo, em minutos; • Identificar a relação entre as variáveis: o quociente entre o tempo, em minutos, e a distância percorrida, em metros, nesse intervalo de tempo é um valor constante, em situações onde se verifique a existência da proporcionalidade direta; • Interpretar o significado da constante de proporcionalidade: o tempo gasto, em minutos, para percorrer um metro; • Encontrar a expressão da generalização: tempo gasto para percorrer qualquer distância = 0,03 X distância percorrida
4	Aluguer de canoas	• Identificar as variáveis: tempo, em minutos; preço, em euros; • Identificar a relação entre as variáveis:

		o quociente entre o tempo, em minutos, e o preço, em euros, é um valor constante, em situações onde se verifique a existência da proporcionalidade direta; • Interpretar o significado da constante de proporcionalidade: o preço a pagar por cada minuto (cada minuto tem o custo de 0,1(6) €/ 1/6 de 1 €); o tempo, em minutos que é possível dispor, pagando um euro (cada 6 minutos tem o custo de 1€); • Expressar simbolicamente a generalização das relações encontradas: preço (em euros) = 1/6 x tempo (em minutos)
5	Os acidentes previnem-se	• Ler e interpretar gráficos de proporcionalidade direta; • Identificar as variáveis: n.º de coletes; preço, em euros do aluguer; • Identificar a relação entre as variáveis: o quociente entre o preço, em euros, do aluguer e o número de coletes, é um valor constante; • Interpretar o significado da constante de proporcionalidade: o preço do aluguer de um colete; • Expressar em linguagem natural e em linguagem simbólica a generalização das relações encontradas: • Expressar simbolicamente a generalização das relações encontradas: preço (em euros) = 2 X n.º de coletes
6	Um dia radical	• Determinar mentalmente algumas percentagens de referência como: 10%, 5%; 1%; • Reconhecer a percentagem como uma razão de consequente 100: 3% = $\frac{3}{100}$; • Identificar as variáveis: n.º de escuteiros que escolheu cada uma das opções; percentagem de escuteiros que optou por cada opção; • Calcular percentagens de um dado conjunto de dados: $\frac{11}{30} \approx 37\%$; $\frac{6}{30} = 20\%$; $\frac{2}{30} \approx$ 7%; • Expressar simbolicamente a generalização das relações encontradas: percentagem = $\frac{\text{qualquer número de elementos de um conjunto de dados}}{\text{número total de elementos do conjunto de dados}}$
7	A localização do acampamento	• Reconhecer a escala como uma razão em que o antecedente indica a distância na imagem e o consequente a distância real, correspondente; • Utilizar proporções para determinar, escalas, distâncias na imagem e na realidade; • Expressar em linguagem natural e em linguagem simbólica a generalização das relações encontradas: • A distância real entre duas localidades quaisquer, representadas num mapa, pode ser determinada: $\frac{\text{distância no mapa em centímetros} \times \mathit{distância\ real\ em\ centímetros\ indicada\ na\ escala}}{\mathit{distância\ no\ mapa\ em\ centímetros\ indicada\ na\ escala}}$ • As dimensões que um objeto qualquer deve assumir numa imagem pode ser determinada: $\frac{\text{dimensões reais em centímetros do objeto} \times \text{distância na imagem em centímetros}}{\text{dimensão real em centímetros indicada na escala}}$
8	Um jogo com cubos e autocolantes	• Reconhecer uma sequência pictórica crescente; • Identificar as variáveis: número de cubos, número de autocolantes; • Identificar a relação entre as variáveis: o número de autocolantes é quádruplo do número de cubos mais dois; • Expressar simbolicamente a generalização das relações encontradas: $4 \times \text{n.º de cubos} + 2$

9	Passagem para a outra margem	• Reconhecer uma sequência pictórica crescente; • Identificar as variáveis: número de adultos, número de viagens; • Identificar a relação entre as variáveis: o número de viagens necessárias para passar qualquer número de adultos e duas crianças para a outara margem é o quádruplo do número de adultos mais um; • Expressar simbolicamente a generalização das relações encontradas: $4 \times n.º\ de\ adultos + 1$
10	Uma subida difícil...	• Reconhecer uma sequência numérica crescentes; • Identificar as variáveis: altura da parede, em metros; tempo, em horas; • Identificar a relação entre as variáveis: quando o número de metros da altura da parede é um número par o número de horas que o sapo demora a subi-la coincide com a altura da parede; quando o número de metros da altura da parede é um número ímpar o número de horas que o sapo demora a subi-la pode ser obtido através da diferença entre o número de metros e quatro unidades; • Expressar simbolicamente a generalização das relações encontradas: $se\ o\ número\ de\ metros\ da\ parede\ for\ par: altuta\ (m) = tempo\ (h)$ $se\ o\ número\ de\ metros\ da\ parede\ for\ ímpar:$ altuta (m)=tempo (h)+4 tempo (h)=altura (m)-4
11	Quadrados sombreados ... até ao infinito	• Reconhecer uma sequência numérica decrescente; • Adicionar números racionais não negativos representados sob a forma de fração; • Comparar números racionais; • Identificar as variáveis: quadrado sombreado (termo da sequência), parte da área do quadrado [ABCD] correspondente a esse quadrado • Termo da sequência/ quadrado sombreado, parte da área do quadrado [ABCD] correspondente a esse quadrado; • Identificar a relação entre as variáveis: a área sombreada de cada um dos quadrados na sequência é $\frac{1}{4}$ da área do quadrado sombreado anterior; • Expressar simbolicamente a generalização das relações encontradas: $\left(\frac{1}{4}\right)^{\text{termo da sequência}}$
12	A hora da despedida...	• Reconhecer uma sequência numérica crescente; • Identificar as variáveis: número de escuteiros, número de apertos de mão; • Identificar a relação entre as variáveis: o número de apertos de mão é metade do produto entre o número de escuteiros e o número de escuteiros do termo anterior; • Expressar simbolicamente a generalização das relações encontradas: $\frac{\text{n.º de escuteiros} \times \text{n.º de escuteiros do termo anterior}}{2}$

3.4. Recolha de dados

Como pretendo analisar o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, nomeadamente no que diz respeito a estratégias, a representações e ao uso das letras e expressões algébricas, de modo a conseguir fazer uma descrição detalhada e a realizar uma análise sustentada em evidências de qualidade, reuni uma diversidade de dados complementares: as produções escritas dos alunos resultantes da exploração das tarefas, as gravações vídeo e áudio das discussões coletivas e as anotações de um diário de bordo. No quadro seguinte sintetizo os procedimentos utilizados na recolha de dados. Esta recolha teve como referência o objetivo e questões deste estudo, contextualizados na unidade de ensino em causa, e na turma de alunos envolvida.

Tabela 2 - *Técnicas de recolha de dados*

Técnicas	**Registos utilizados**	**Fontes de dados**
Observação participante:	• Gravações vídeo e áudio dos momentos de discussão coletiva; • Diário de bordo	Alunos
Recolha documental:	• Produções escritas dos alunos resultantes da exploração das tarefas	Alunos

A observação participante, utilizada como técnica de recolha de dados neste estudo é considerada uma das técnicas privilegiadas pela metodologia qualitativa (De Bruyne et al, 1975), transcendendo, em muito, uma abordagem puramente descritiva no que diz respeito à objetividade, na medida em que procura captar o significado das situações observadas, das dinâmicas e dos processos utilizados pelos alunos na realização das tarefas (Pourtois & Desment, 1988). Assim, as gravações vídeo e áudio de momentos privilegiados de construção do conhecimento na turma e o diário de bordo, por mim produzido, foram meios de registo importantes que serviram de base à minha atribuição de significado às ações dos alunos. Nas gravações é possível recorrer aos diálogos que se estabeleceram entre os alunos e entre estes e a professora, onde se clarificam processos e explicitam significados. Do diário de bordo constam algumas anotações informais sobre a forma como os alunos reagiram às tarefas e se envolveram na exploração, bem como questões pertinentes que surgiram nas fases de apresentação e de exploração, durante o trabalho autónomo, permitindo desbloquear impasses e contribuir para um abordagem adequada à tarefa.

As produções dos alunos resultantes da exploração das tarefas constituem o objeto principal de análise neste estudo. Contudo, o recurso a outros registos é imprescindível quando se procura descrever a forma como os alunos constroem os significados. Deste modo, a transcrição dos diálogos mantidos durante os momentos de discussão coletiva, onde se enfatiza a importância da comunicação matemática no desenvolvimento dos significados e alguns aspetos relevantes do diário de bordo são considerados meios complementares relevantes.

3.5. Análise de dados

Neste estudo, devido à sua essência interpretativa, as observações assumiram um carácter aberto na medida em que, como observadora, não me foquei exclusivamente num determinado número de categorias pré-definidas, pois estava consciente de que muito provavelmente, durante o processo de recolha ou análise de dados, poderiam surgir outras categorias que iriam igualmente contribuir para o objetivo da investigação.

Considerando o objetivo deste estudo, defini um conjunto de categorias de análise que me possibilitassem encontrar resposta às questões de investigação, que recordo:

- Como representam os alunos as suas ideias algébricas relativas à procura e à expressão de generalizações? Que tipo de representações adotam?
- Que sentido atribuem os alunos aos símbolos algébricos, nomeadamente às letras e expressões algébricas?
- Que estratégias usam os alunos para lidar com tarefas de proporcionalidade direta e sequências e outras regularidades?

As categorias de análise definidas tiveram em consideração uma primeira análise, onde procurei compilar diferentes representações utilizadas pelos alunos, para encontrar generalizações e explicitar ideias algébricas. Assim, e com base na primeira análise, considerei relevante, para além de analisar as representações e os significados que os alunos atribuem às letras, como estava inicialmente previsto, analisar as estratégias empregues pelos alunos, dado que evidenciam o desenvolvimento do pensamento funcional, inerente à expressão da generalização. Deste modo, o quadro teórico, inicialmente estabelecido, sofreu alteração, tendo sido necessário acrescentar uma secção ao capítulo da revisão da literatura e uma nova questão de investigação, sobre estratégias usadas pelos alunos para lidar com a generalidade, quer na relação de proporcionalidade direta, quer no estudo de sequências e regularidades. Destacam-se assim no quadro teórico as representações e as estratégias usadas pelos alunos para expressar a generalização e os significados que podem atribuir às letras, dado que estas categorias mantêm uma relação direta com o objetivo do estudo e as questões de investigação. Na tabela três sintetizam-se as categorias consideradas na análise de dados.

Tabela 3 - *Categorias consideradas na análise de dados*

Tipos de representações Bruner (1999); Canavarro & Pinto (2011)	
• Ativas (baseadas em ações)	- Dramatizações, manipulação de materiais;
• Icónicas (baseadas em imagens)	- Diagramas, esquemas, desenhos;
• Simbólicas (baseadas em símbolos)	- Formais: Tabelas, Gráficos, expressões algébricas, expressões numéricas, linguagem natural; - Informais: símbolos idiossincráticos.
Os significados que se podem atribuir às letras Abrantes, Serrazina & Oliveira (1999); Ponte, Branco & Matos (2009)	
• Incógnita	- Representa um número específico mas desconhecido;
• Número generalizado	- Quando o aluno a vê como representante de vários números, podendo ser substituída por mais do que um valor;
• Variável	- Podendo representar qualquer valor, usada normalmente para descrever relações entre as variáveis, à medida que se atribuem valores a uma variável é possível determinar os valores correspondentes da outra variável.
Estratégias usadas pelos alunos para lidar com situações de proporcionalidade direta Costa (2007); Cramer & Post, (1993); Fernández, Llinares, Dooren, Bock & Verschaffel (2010); Lesh , Post, & Behr (1988)	
• Multiplicativas	- Escalares (baseadas em relações internas, entre quantidades da mesma natureza); - Funcionais (baseadas em relações externas, entre quantidades de naturezas distintas); - Abordagem ao fator unidade (estratégia funcional, baseada no valor da unidade de uma das quantidades referidas)
• Aditivas	- Adição repetida/ *building-up;* - Diferença constante (consiste em estabelecer uma relação dentro de uma razão, que é calculada subtraindo um termo do outro, sendo essa diferença, em seguida, aplicada à outra razão)
• Fator de mudança	- Utilização dos múltiplos para estabelecer relações;

• Utilização da razão como fração	- Aplicação do princípio de equivalência de frações;
• Produto cruzado	- Consiste em estabelecer uma proporção, efetuar o produto cruzado e resolver a equação resultante
Estratégias usadas pelos alunos no estudo de sequências e regularidades Branco & Ponte (2006); Cruz & Martinón (1998) Santos & Oliveira (2008)	
• Contagem	- Baseada no desenho e na contagem dos respetivos elementos de cada termo;
• Recursivas (baseada em previsões efetuadas com base no termo anterior)	- Adição da diferença constante (em que se recorre a uma diferença comum tendo como base os termos anteriores);
• Explicitas (baseada em relações entre as variáveis)	- Objeto inteiro (baseada no valor da unidade de uma das quantidades referidas); - Funcionais (baseadas em relações entre as variáveis).

3.5.1. Processo de análise

Tendo em vista a dimensão do estudo, não foi possível analisar todas as tarefas que constituem a intervenção didática. Assim, e embora a recolha de dados tenha recaído sobre a sua totalidade, houve necessidade de selecionar algumas para a análise. Após uma primeira análise de carácter informal, que abrangeu todas as tarefas da sequência, constatei que os alunos, de um modo geral, mobilizam conhecimentos, empregando, ao longo do desenvolvimento da intervenção didática, estratégias e representações progressivamente mais formais. Procurei então, que a seleção contemplasse tarefas que permitissem responder às questões da investigação e, onde fosse possível observar diferentes estratégias e representações. Estabelecendo menção à ordem que ocupam na intervenção didática, as tarefas selecionadas para análise foram; a terceira "Um percurso pedestre", a quarta "Aluguer de canoas", a oitava "Um jogo com cubos e autocolantes" e a décima segunda "A hora da despedida". As duas primeiras remetem para a proporcionalidade direta, e as duas últimas para outras regularidades, tratando-se a oitava de uma função afim e a décima segunda de uma função quadrática. O facto da seleção incidir em diferentes tipos de funções com um grau de complexidade crescente, permitiu observar o modo como os alunos lidaram com essas situações e evoluíram do desenvolvimento do pensamento algébrico.

CAPÍTULO 4

ANÁLISE DO CASO

No presente capítulo apresenta-se o estudo de caso da turma que participou nesta intervenção didática, dando especial atenção à reação e ao desempenho perante cada uma das tarefas selecionadas, como explicado no capítulo anterior. Optou-se por apresentar os resultados por tarefa para permitir uma descrição e análise mais aprofundada. Para cada tarefa apresenta-se a forma como se desenrolou a aula e, analisam-se as resoluções apresentadas por cada um dos grupos de alunos, sintetizando-se o que se considerou essencial para o caso da turma.

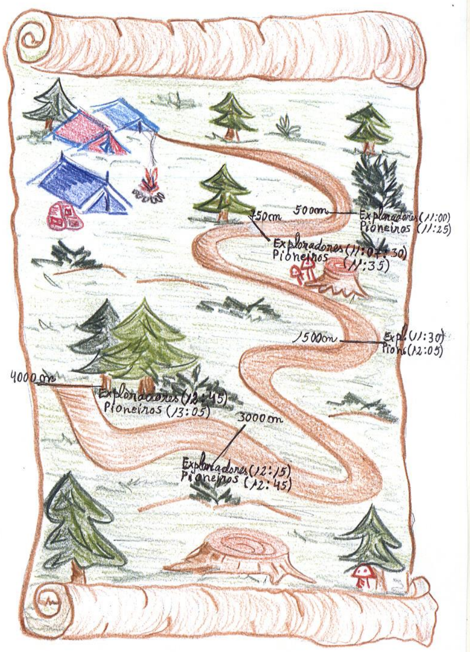
4.1. Análise da tarefa "Um percurso pedestre"

Esta tarefa corresponde à terceira da sequência realizada (Anexo C). Na sua realização com a turma foram utilizados dois blocos e meio de 100 minutos cada, tendo-se ultrapassado o tempo inicialmente previsto na planificação, de dois blocos.

No início do primeiro bloco, os alunos organizaram-se em grupos, mantendo a organização das aulas anteriores. Assim formaram-se quatro grupos com quatro elementos e dois grupos com três elementos. Em seguida, projetei a tarefa no quadro e distribui um exemplar por cada aluno, pedindo-lhes que procedessem a uma leitura individual e silenciosa. Foi necessário dar algum tempo aos alunos para a leitura, cerca de 5 minutos, dado que o mapa carecia de uma interpretação pormenorizada.

Um percurso pedestre

Na manhã seguinte teve lugar um percurso pedestre, era a oportunidade dos escuteiros conhecerem a zona envolvente do acampamento.
O percurso incluía trilhos muito estreitos e devido à dimensão do grupo, trinta escuteiros, o chefe propôs que se dividissem em dois grupos. O grupo dos Exploradores e o grupo dos Pioneiros.
Todos se prepararam para iniciar a caminhada levando consigo água e alguns alimentos. O grupo dos Exploradores foi o primeiro a partir tendo iniciado o percurso às 10 horas e 45 minutos, o grupo dos Pioneiros partiu meia hora depois.
O esquema mostra o percurso pedestre realizado pelos grupos dos Exploradores e Pioneiros.



1. Compara o tempo gasto por cada um dos grupos ao longo do percurso pedestre. Investiga se encontras alguma relação entre a distância percorrida e o tempo que foi gasto para a percorrer? Regista as tuas conclusões.
2. Se o percurso pedestre tivesse 6000 m, seria possível prever o tempo que cada um dos grupos precisaria para o concluir? Explica como pensaste.
3. Consegues encontrar uma regra que te permita determinar o tempo gasto pelos grupos, num percurso pedestre com qualquer número de metros? Explica como pensaste.

Figura 2- Enunciado da tarefa "Um percurso pedestre"

Após a leitura, os alunos, solicitados por mim, recontaram a situação apresentada, colocaram e esclareceram dúvidas. O episódio que se segue teve lugar durante a fase de apresentação da tarefa:

> Depois de um aluno ter recontado a situação perguntei-lhes se gostariam de acrescentar algo ou colocar eventuais dúvidas.
> **André** – Nós temos horas e metros e o meu grupo vai ver em quanto tempo percorrem uma parte. Por exemplo, 500m, equivale a não sei quantos minutos (...)

Bernardo – Eu tenho uma dúvida, aqui nos 750m está, 11 horas sete minutos e depois está 30...(11:07:30)
Manel – Foi a hora a que eles chegaram aos 750m.
José – São 11 horas, 7 minutos e 30 segundos
Bernardo – Outra coisa, eles começaram a caminhar cá de cima?
João – Sim, saíram das tendas.
Professora – Querem acrescentar mais alguma coisa?
André – Nós descobrimos a que horas os Pioneiros partiram do acampamento.
Outros alunos – Nós também…
Professora – Quer partilhar com a turma?
André – Os Pioneiros partiram às onze e quinze...
José – ...pois os Exploradores saíram às 10: 45, como faltavam 15 minutos para as 11, são 15 minutos, e depois os outros 15 acrescentam-se a seguir...

Durante a fase de apresentação da tarefa, os alunos começaram a analisar os valores numéricos e a estabelecer relações entre as variáveis. A observação de um aluno de "por exemplo, não sei quantos metros equivale a não sei quantos minutos...", permitiu esclarecer algumas dúvidas resultantes da leitura do mapa e da interpretação que os alunos fizeram da tarefa e trouxe contributos para a abordagem que teve lugar no momento seguinte.

4.1.1. As produções dos alunos e a discussão coletiva

Após a fase de apresentação da tarefa, os grupos deram início à exploração, o que ocupou o resto do primeiro bloco. Durante esta fase, os alunos preocuparam-se em organizar os dados e procurar relações que lhes permitissem encontrar respostas às questões que lhes eram colocadas na tarefa. Enquanto decorreu esta fase circulei pelos grupos, procurando estimular o diálogo no seio de cada grupo, pedindo-lhes que justificassem os seus procedimentos e colocando-lhes algumas questões que me pareceram convenientes, de modo a tentar aceder aos seus raciocínios ou desbloquear impasses sempre que os grupos não conseguiam avançar na tarefa. Algumas dessas questões tinham como objetivo remetê-los para um raciocínio funcional que lhes permitisse estabelecer relações entre as variáveis, para a busca e representação de regularidades:

- Que relações encontraram entre a distância percorrida e o tempo gasto para a percorrer?
- Essa relação verifica-se sempre?
- Como podem representar essa relação?

Grupo I

No momento de discussão coletiva os alunos explicitaram as suas estratégias e contaram com intervenções pertinentes de outros colegas, que ajudaram a esclarecer procedimentos e a clarificar ideias. Na primeira questão, o grupo limitou-se a organizar os dados em duas tabelas, uma para os Exploradores e outra para os Pioneiros, e em calcular a diferença entre a hora de chegada e a hora de partida, para determinar o tempo gasto por cada grupo de escuteiros no percurso pedestre.

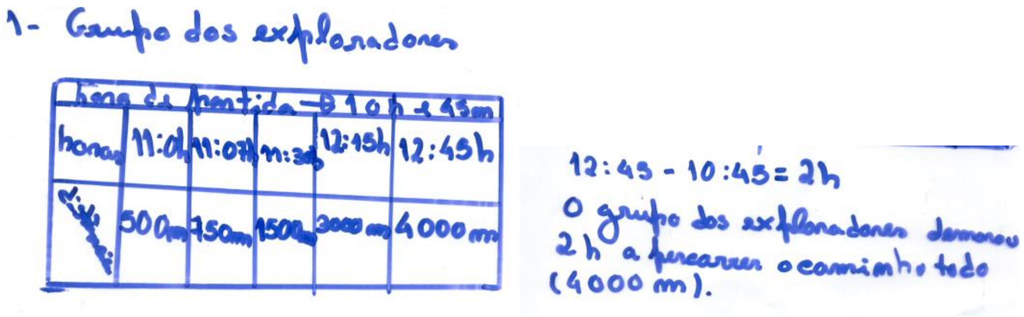


Figura 3 – Produções do Grupo I referente à resolução da primeira questão da tarefa "Um percurso pedestre"

> **José** (elemento do grupo) – Nós na primeira pensámos fazer uma tabela e primeiro pusemos a hora de partida dos exploradores, a tabela tem horas e as distâncias. As horas que estão aqui são as horas a que chegavam aos pontos.
> **Manel** (elemento do grupo) – Quer dizer que chegam às 11 horas aos 500 metros, às 11 horas e sete minutos aos 750 metros, (...)
> **Rui** – E vocês, encontraram relações?
> **José** (elemento do grupo) – Isso vamos explicar na três.
> **Bernardo** – Para se perceber melhor podiam ter colocado, uma seta dos 500 para os 750 metros com mais 250 metros, dos 750 metros para os 1500 metros, mais 750 metros,...
> **João** – Eu não sei se vai destoar muito, mas eles não meteram ali nas 11 horas e 7 minutos os segundos...
> **Diogo** – Acho que deviam ter posto os segundos se não, não vai dar certo.
> **Bernardo** – Eu acho que vai fazer diferença...
> **Rui** – Eu posso ir ai explicar. (dirige-se para junto dos elementos do grupo que estavam a apresentar o seu trabalho e indicando os dados da tabela explica). Os

exploradores começaram às 10:45 e às 11 fizeram os 500 metros, das 10:45 para as 11 vão 15 minutos, então quer dizer que os 15 minutos são 500 metros. Nos 750 metros como é que é? É metade de 500, mais 500, por isso é 15 mais metade, e a metade de 15 é sete e meio, por isso ali não estava bem assim (referindo-se à omissão dos 30 segundos), pois sete mais sete daria 14 (e não os 15 necessários para se manter a relação)

(O aluno senta-se e o grupo continua a apresentar o seu trabalho)

André – E quanto tempo demoraram ao todo? (questiona outro aluno)

Manel (elemento do grupo) – Aqui dizia quanto tempo eles demoravam desde o ponto de partida até aos 4000 metros, então fizemos as 12:45, que foram as horas a que chegaram aos 4000 metros, menos as 10:45, que foram as horas a que partiram e deu as duas horas, o tempo que demoraram a fazer o percurso todo.

Ao longo deste episódio destacam-se intervenções de outros elementos da turma ao questionarem o grupo sobre o facto de terem ou não encontrado relações, e ao exemplificarem algumas situações estabelecendo possíveis relações. O Bernardo estabelece uma relação interna no que se refere às distâncias referindo: "...podiam ter colocado, uma seta dos 500 para os 750 metros com mais 250 metros, dos 750 metros para os 1500 metros, mais 750 metros,...". O Rui, para esclarecer a necessidade dos 30 segundos, estabelece relações entre as variáveis utilizando um procedimento aditivo:

" Os exploradores começaram às 10:45 e às 11 fizeram os 500 metros, das 10:45 para as 11 vão 15 minutos, então quer dizer que os 15 minutos são 500 metros. Nos 750 metros como é que é? É metade de 500, mais 500, por isso é 15 mais metade, e a metade de 15 é 7,5, por isso ali não estava bem assim (...)"

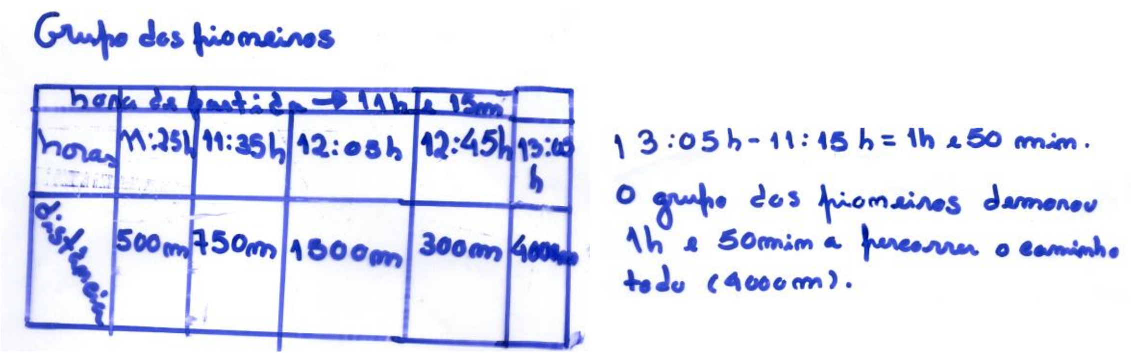


Figura 4 - Produções do Grupo I referente à resolução da primeira questão da tarefa "Um percurso pedestre"

Para os Pioneiros não é apresentada, do mesmo modo, qualquer estratégia que prove ou não a existência de regularidades, os alunos dão explicações semelhantes às que tinham dado no caso dos Exploradores, referindo-se às distâncias e às horas de chegada a cada ponto do percurso. O Rui volta a acrescentar que podiam ter estabelecido outras relações. A estratégia usada para encontrar o tempo gasto no percurso foi idêntica à que tinham usado para os Exploradores, o cálculo da diferença entre a hora de chegada e a hora de partida.

Na segunda questão houve necessidade de estabelecer relações que lhes permitissem fazer previsões. O grupo ignora o facto de não existir uma relação de covariação entre o tempo e a distância nos Pioneiros e, faz a previsão do tempo que demorariam a percorrer os 6000 metros para os dois Grupos de Escuteiros utilizando um procedimento multiplicativo.

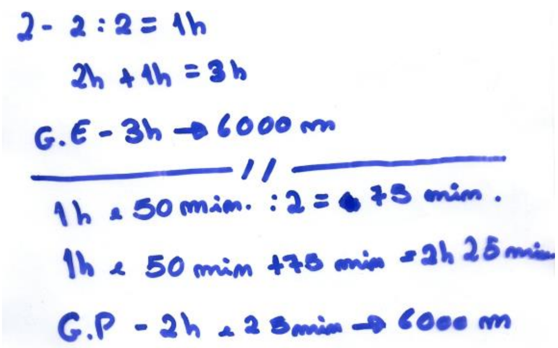


Figura 5 - Produções do Grupo I referente à resolução da segunda questão da tarefa "Um percurso pedestre"

A comunicação do grupo justifica os procedimentos.

Ana (elemento do grupo) – Aqui na dois eu pus o tempo que o Grupo dos Exploradores tinha demorado a percorrer os 4000 metros (2 horas) e dividi por 2, porque 2000 metros é metade de 4000 metros, e se eu soubesse o tempo que demoravam a percorrer os 2000 metros, juntava depois a estes (tempo em que percorreram os 4000 metros), que é o mesmo que multiplicar por 3, porque 2000 metros é 1/3 de 6000 metros, e depois deu-me o tempo.
João – Eu não percebi muito bem essa explicação.
Ana – (Volta a explicar) Ali pedia para 6000 metros, o tempo que eles demoravam a percorrer, mas como estavam lá só os 4000 metros, dividi por 2, para saber (...) o tempo que tinham demorado a percorrer os 2000 metros, isto é como se fosse 4000:2, ia dar o tempo que eles demoravam a percorrer 2000

metros, depois juntei ao tempo que eles demoraram a percorrer 4000 metros o tempo dos 2000 metros e ia dar o tempo dos 6000 metros.
João – Ah! Já percebi.
André – Aqui está 3000 metros, e 3000 metros é metade de 6000 metros, e até aos 3000 metros os Exploradores demoraram (...) 1:30 h, por isso era só fazer 1:30 X 2 que dava as 3 horas.
João – Nós resolvemos de forma diferente, fizemos: 11h – 10: 45h, que eram 15 minutos e dava os 500 metros, depois 11:30h – 10:45 que dava 45 minutos, que era igual a 1500 metros, 1500m = 500+500+500, por isso em minutos é igual a 15+15+15, e depois 1500+500 = 2000m, 45+15= 60 minutos, que é igual a 1 hora, 2 horas mais 1 hora são 3 horas.
Ana – Para os Pioneiros foi a mesma coisa só mudavam os números. Aqui, dividimos por 2 porque eram os 4000 metros (1h 50min: 2 = 75 minutos), para sabermos o que tinham percorrido em 2000 metros, e depois juntámos os 75 minutos ao tempo dos 4000 metros.
Professora – Concordam com os colegas?
João – Mas essa relação só podia ser feita nos Exploradores, porque nos Exploradores havia relação e nos Pioneiros não, tinham tempos completamente diferentes, não tinham relação nenhuma.
Tó – Não há relação porque não andam ao mesmo passo.
(...)
André – Por exemplo eles percorreram 500 metros em 10 minutos e também percorreram 250 metros em 10 minutos.

No momento de discussão coletiva outros elementos da turma deram os seus contributos, explicaram que tinham procedido de outro modo. Um aluno apresenta um procedimento multiplicativo para encontrar resposta à questão: "...3000 metros é metade de 6000 metros, e até aos 3000 metros os Exploradores demoraram (...) 1:30 h, por isso era só fazer 1:30 X 2 que dava as 3 horas." Outro apresenta um procedimento aditivo: "(...) 11h – 10: 45h, que eram 15 minutos e dava os 500 metros, depois 11:30h – 10:45h que dava 45 minutos, que era igual a 1500 metros, 1500m = 500+500+500, por isso, em minutos é igual a 15+15+15, e depois 1500+500 = 2000m, 45+15= 60 minutos, que é igual a 1 hora, 2 horas mais 1 hora são 3 horas."

Quando foi apresentada a estratégia utilizada para os Pioneiros, houve um aluno que se insurgiu declarando: " (...) essa relação só podia ser feita nos Exploradores, porque nos Exploradores havia relação e nos Pioneiros não, tinham tempos completamente diferentes, não tinham relação nenhuma." Outro aluno acrescentou:

“Não há relação porque não andam ao mesmo passo.” Um outro exemplificou a ausência da relação: “Por exemplo eles percorreram 500 metros em 10 minutos e também percorreram 250 metros em 10 minutos.”

Os alunos ignoram o erro apresentado pelo grupo ao afirmarem que metade de 1:50h, se trata de 75 minutos e não de 55 minutos, como sucede na realidade, e focam a sua atenção no facto de não existir uma regularidade no Grupo dos Pioneiros que permitisse aos colegas estabelecer relações e fazer uma previsão para o tempo que demoraria a percorrer os 6000 metros.

Na terceira questão utilizam as razões entre o tempo e a distância e entre a distância e o tempo, contudo, não tiram partido das mesmas para identificar a regularidade no Grupo dos Exploradores e a sua ausência no Grupo dos Pioneiros.

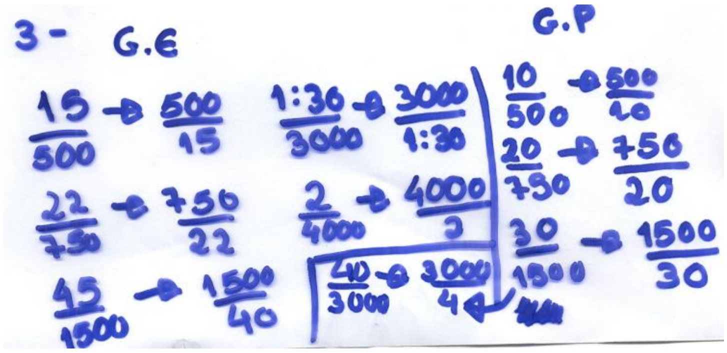


Figura 6 - Produções do Grupo I referente à resolução da terceira questão da tarefa "Um percurso pedestre"

A explicação de um elemento do grupo permite aceder ao raciocínio que está por trás desta representação.

> **Manel** – Aqui pedia-nos para encontrar a regra e nós tentámos usar as razões (indicando a razão 15/500 acrescenta) chegaram aos 500 metros passados 15 minutos, passados 22 minutos que tinham partido chegaram aos 750 metros, ...

Em seguida desenvolve-se uma nova discussão em torno da ausência dos 30 segundos, com contributos de elementos do grupo e de outros elementos da turma. O facto de terem utilizado setas entre razões inversas, também foi motivo de discussão, uma vez que um dos alunos apelidou-as de frações equivalentes, tendo sido prontamente corrigido pelos colegas que afirmaram tratar-se de razões inversas.

Grupo II

Este grupo representou os dados numa tabela e estabeleceu relações entre as varáveis, para o caso dos Exploradores utilizando procedimentos aditivos.

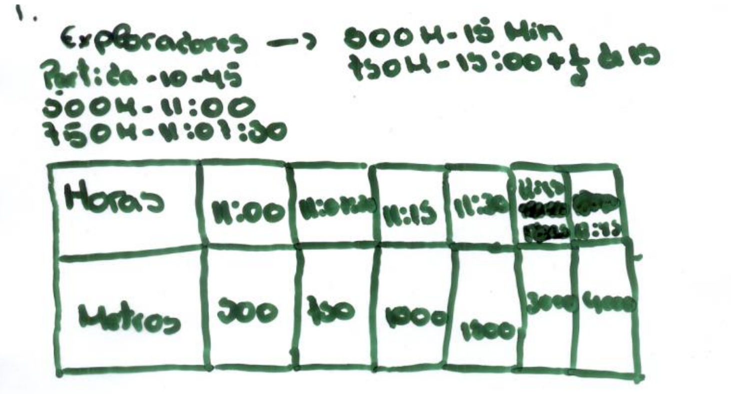


Figura 7- Produções do Grupo II referente à resolução da primeira questão da tarefa "Um percurso pedestre"

> **Rui** (elemento do grupo) – Como eu já tinha explicado (referindo-se à explicação que deu durante a apresentação do grupo anterior), das 10:45 às 11, vão 15 minutos, por isso, os 15 minutos são 500 metros. Depois como 750 é metade de 500 mais 500 e metade de 15 é 7,5, por isso é 15 mais metade de 15, que são os 15 mais 7, 5 que corresponde aos 750m. Depois acrescentámos os 1000m, para perceberem a relação, se 15 minutos eram 500 metros, era só acrescentar mais outros 15 minutos, ou então, mais 7,5 minutos (referindo-se ao tempo a que correspondiam os 750 metros) (...).

Entretanto, houve um aluno que não estava a compreender as relações estabelecidas e o Rui repetiu a sua explicação, continuando a estabelecer relações aditivas entre as variáveis.

Para o Grupo dos Pioneiros afirmam que não encontram relações, justificando que umas vezes iam mais rápido e outras mais devagar, contudo, a representação usada não fundamenta adequadamente a resposta, limitaram-se a estabelecer a diferença entre os tempos (11:25-11:15= 10 minutos - 500 m, ou seja, a diferença entre a hora a que chegaram aos 500 m e a hora de partida; 11:35-11:25 = 10 minutos - 750 m, ou seja, a diferença entre a hora que chegaram aos 750m e a hora a que tinha chegado aos 500m, sendo, deste modo, a distância percorrida em 250m e não em 750m, como surge representada).

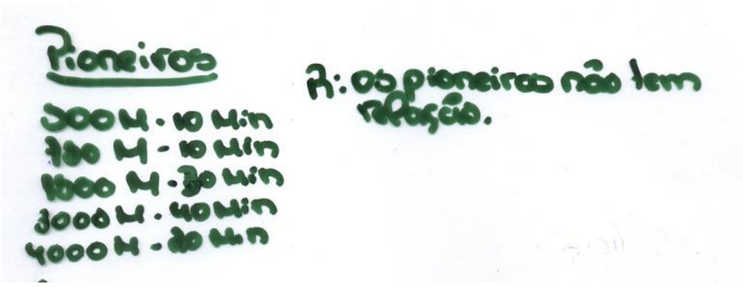


Figura 8- Produções do Grupo II referente à resolução da primeira questão da tarefa “Um percurso pedestre”

Para encontrar uma resposta à questão dois, procederam da seguinte forma:

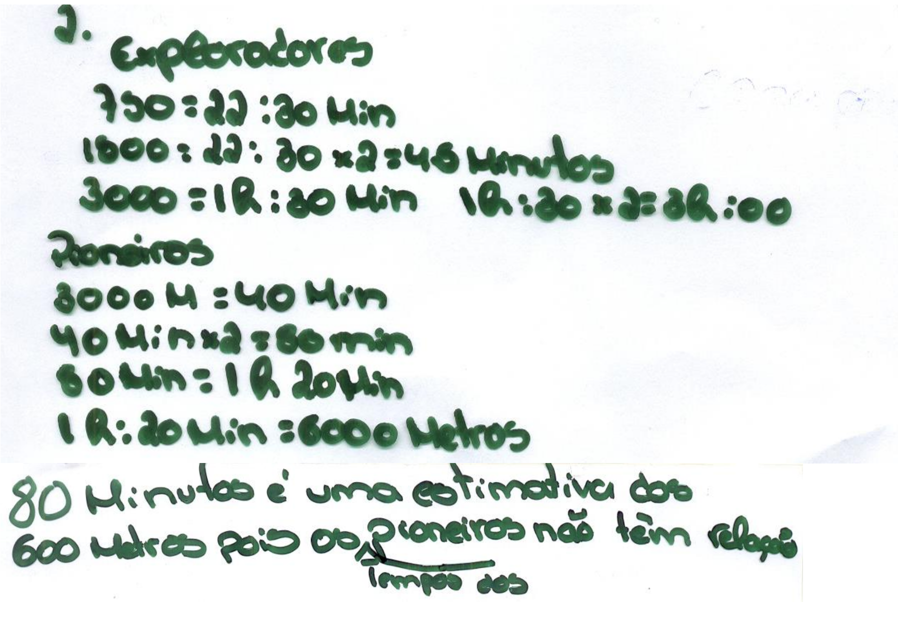


Figura 9- Produções do Grupo II referente à resolução da segunda questão da tarefa “Um percurso pedestre”

O episódio que se segue procura clarificar o modo como os alunos estruturaram o seu raciocínio.

> **Rui** - Nos exploradores, 750 metros eram os 22 minutos e meio. Como chegamos aos 22 minutos e meio, foi 7 e meio mais 15 minutos, (silêncio) era para descobrir? Alguém pode dizer qual era a pergunta?

(Uma aluna lê a pergunta)
Rui (elemento do grupo) -... pois os 1500 metros era o dobro (de 750 metros), por isso fizemos 22 minutos e meio vezes 2 e deu os 45 minutos. Depois os 45 minutos vezes 2 dava 90 minutos, se 1 hora são 60 minutos é 1 hora e meia, os 3000 metros é igual a 1 hora e meia, e 1 hora e meia vezes dois são as 3 horas que corresponde aos 6000 metros.
Bernardo - Não percebi...
Rui – Não percebeste nada disto, não foi? Era para calcular os 6000 metros, 750 metros é metade de 500 mais 500, então se 750 metros eram (percorridos em) 7 minutos e meio mais 15, dava 22 minutos e meio, depois os 1500 metros eram os 22 minutos e meio vezes dois, dava os 45 minutos, 45 minutos são os 1500 metros, depois os 3000 metros são 1 hora e trinta, que é 45 vezes dois e que dá 90, 90 é 60+30, que é 1:30 horas, 1:30 é uma hora e meia, uma hora e meia vezes dois dava as 3 horas que eram os 6000 metros.

Para o Grupo dos Pioneiros a explicação foi a seguinte:

Rui – Nos Pioneiros fizemos assim, como os 3000 metros eram 40 minutos, ... (é interrompido por um colega, que não faz parte do grupo)
João – Não podem fazer nada nos Pioneiros porque eles não iam sempre ao mesmo ritmo.
Rui – (o Rui ignora o colega e continua com a sua explicação) Depois fizemos os 40 minutos vezes 2, que deu os 80 minutos, e 80 minutos é igual a 1 hora e 20 minutos, por isso 1 hora e 20 minutos daria para percorrer os 6000 metros, mas os 80 minutos é uma estimativa, pois (aqui, aponta para a projeção) não há relação, não é um valor exato porque eles andavam mais depressa ou mais devagar.
Bernardo – Mas é uma estimativa ao calhas...
Rui – Os 80 é uma estimativa porque os Pioneiros não tinha relação nenhuma, nós fizemos o tempo que demoravam a percorrer 3000 metros vezes dois.

Nesta questão o grupo abandona a estratégia aditiva e centra-se em explorações multiplicativas (multiplicação e divisão entre variáveis). Os procedimentos de natureza multiplicativa inerentes a situações de proporcionalidade direta, tornam-se explícitos no momento da discussão através da verbalização das relações estabelecidas. Para os Pioneiros, apesar de reconhecerem que não existem relações entre a distância percorrida e o tempo gasto para a percorrer, consideraram que deveriam estimar um valor com base nos dados que tinham disponíveis. Nos procedimentos utilizam os dados da questão anterior e partem do princípio que, no Grupo dos Pioneiros, os 3000 metros tinham sido percorridos em 40 minutos e não em 1:30h como aconteceu na realidade.

Para expressar a regra que lhes permitiria calcular o tempo gasto para percorrer qualquer distância efetuam o quociente entre o tempo e a distância determinando, deste modo, a constante de proporcionalidade à qual atribuem um significado.

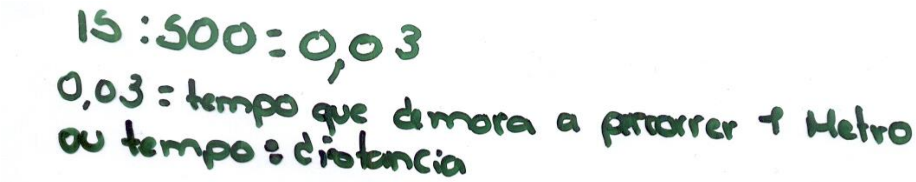


Figura 10 - Produções do Grupo II referente à resolução da terceira questão da tarefa "Um percurso pedestre"

O Rui explica a estratégia utilizada pelo grupo:

> **Rui** – 15 minutos é o tempo que demoram a fazer os 500 metros, se dividirmos os 15 minutos pelos 500 metros, que era o tempo a dividir pela distância, dá 0,03, e 0,03 é igual ao tempo que demoram a percorrer 1 metro.

A expressão numérica e a constante de proporcionalidade encontrada através da relação funcional que estabeleceram entre as variáveis, abrem caminho à introdução da expressão algébrica formal ($y = kx$, neste contexto: $t = 0{,}03d$).

Grupo III

Este grupo representa os dados em duas tabelas e estabelece relações entre as variáveis, comparando a situação dos Exploradores com a dos Pioneiros.

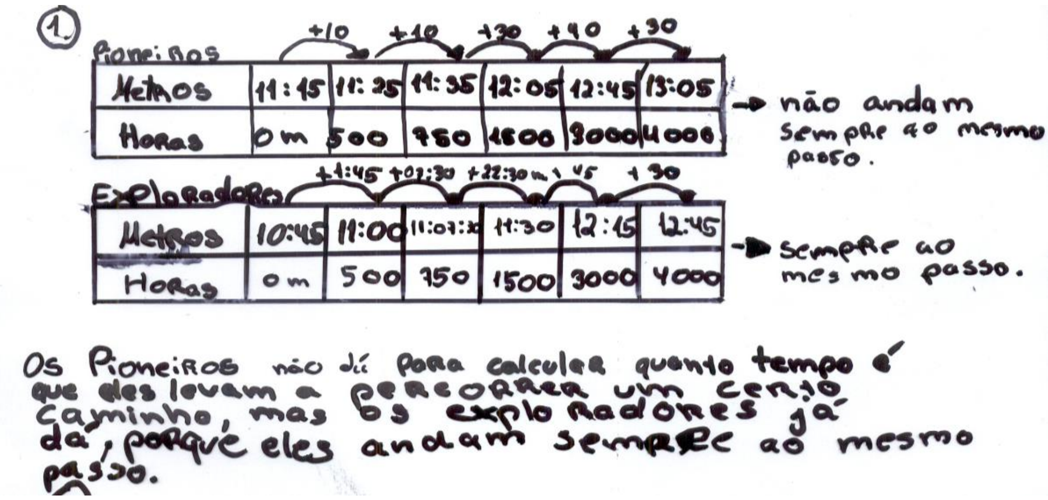


Figura 11 - Produções do Grupo III referente à resolução da primeira questão da tarefa "Um percurso pedestre"

> **Tó** (elemento do grupo) – Na um, para os Pioneiros, vimos que começaram às 11:15 que era mais meia hora que as 10:45, depois fizemos uma tabela e vimos que eles demoravam o mesmo tempo a percorrer 500 metros do que 250 metros, vimos que eles não andavam sempre ao mesmo passo. Aqui (referindo-se à tabela onde registaram as distâncias e tempos percorridos pelos exploradores) estivemos a relacionar e vimos que demoravam 15 minutos a percorrer 500 metros, e metade de 15 minutos é 7,5 minutos, então percorreram, nesse tempo metade de 500 metros que eram 250 metros.
>
> **Inês** (elemento do grupo) – Chegámos à conclusão que os Pioneiros não dava para calcular quanto tempo demoravam a percorrer um certo caminho porque eles não andavam sempre ao mesmo passo, mas os Exploradores já dava porque eles andam sempre ao mesmo passo.

A verbalização das relações encontradas explicita o raciocínio: " (...) os Pioneiros, vimos que começaram às 11:15h que era mais meia hora que as 10:45h, (...) e vimos que eles demoravam o mesmo tempo a percorrer 500 metros do que 250 metros, vimos que eles não andavam sempre ao mesmo passo." "Aqui, (no caso dos Exploradores) estivemos a relacionar e vimos que demoravam 15 minutos a percorrer 500 metros, e metade de 15 minutos é 7,5 minutos, então percorreram, nesse tempo metade de 500 metros que eram 250 metros." Quando se referem à velocidade, relação entre a distância e o tempo, utilizam as expressões: "não andavam sempre ao mesmo passo", quando a velocidade não é constante e, "andam sempre ao mesmo passo", quando a velocidade é constante. Os procedimentos utilizados são de natureza multiplicativa.

A resposta à questão dois é apresentada de forma muito breve, e tem por base a explicação dada anteriormente pela Inês.

> **Tó** – Não fizemos contas e só explicamos, os Pioneiros como não tem relação não dá para calcular, tem que existir uma relação, entre o tempo que eles levam a percorrer e os metros. Os Exploradores já dá porque eles andam sempre ao mesmo passo.

Os alunos recorrem ao que aprenderam na questão anterior, aquando da análise de casos particulares, para provar as suas conjeturas. Optam pela linguagem natural para explicar que apenas é possível fazer uma previsão quando existe uma relação entre o tempo e a distância, usando as palavras dos alunos: "(...), tem que existir uma relação, entre o tempo que eles levam a percorrer e os metros."

A regra não surge expressa pois os alunos, à semelhança do grupo anterior, calcularam a constante de proporcionalidade e atribuíram-lhe um significado. No entanto, esta expressão numérica, encontra-se a um pequeno passo da generalização.

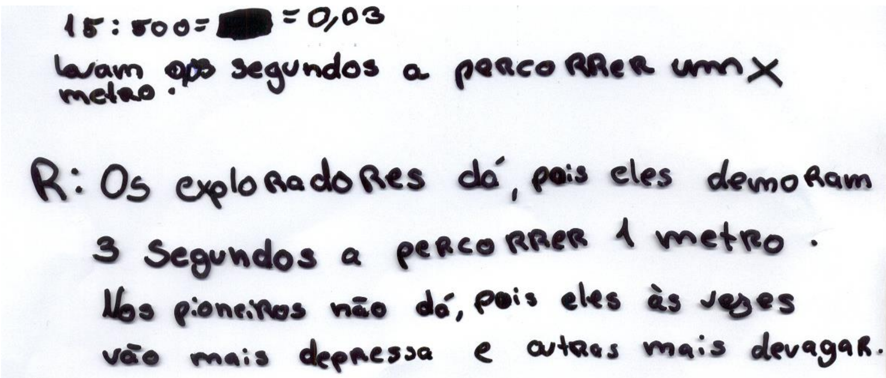


Figura 12 - Produções do Grupo III referente à resolução da terceira questão da tarefa "Um percurso pedestre"

> **Inês** (elemento do grupo) – Fomos descobrir quanto tempo é que eles levavam para percorrer 1 metro.
> **Maria** (elemento do grupo) – Dividimos o tempo pela distância e deu-nos a constante de proporcionalidade que era o tempo que eles demoravam a percorrer 1 metro.

> **André** – O meu grupo fez de outra maneira, fizemos assim para os Exploradores e fomos fazer para os Pioneiros, só que não deu. Nos Pioneiros quando fizemos 10:500, deu 0,02, e 10:250, não dá o mesmo, porque eles levaram o mesmo tempo a percorrer 500m e 250m, se eles fossem sempre ao mesmo passo os 250m tinham que ser percorridos em 5 minutos, porque é metade de 500.

Em seguida gerou-se uma nova discussão acerca do significado atribuído a 0,03, dado que o grupo interpretou, como sendo 3 segundos, e não como 3 centésimas do minuto, que na realidade representam 1,8 segundos, o recurso às unidades em que se encontravam o dividendo e o divisor contribuiu para o esclarecimento.

Durante a discussão a intervenção de um aluno da turma, não pertencente ao grupo, foi pertinente, uma vez que explicitou através da descrição do procedimento utilizado pelo seu grupo de trabalho, baseado no quociente entre o tempo e a distância, um modo de provar a inexistência de uma relação de covariação entre as variáveis no Grupo dos Pioneiros, uma vez que o quociente não é constante: "(...) quando fizemos 10:500, deu 0,02, e 10:250, não dá o mesmo, porque eles levaram o mesmo tempo a percorrer 500m e 250m, se eles fossem sempre ao mesmo passo os 250m tinham que ser percorridos em 5 minutos, porque é metade de 500."

Grupo IV

Este grupo organizou os dados numa tabela, estabelecendo relações entre as variáveis. Para calcular o tempo que os Exploradores gastaram no percurso utilizaram um procedimento multiplicativo, baseado nas relações de covariação entre as variáveis. Assim, consideraram o percurso composto por 8 troços de 500 metros cada, uma vez que 4000:500 = 8, e o tempo que demoravam a percorrer cada troço, 15 minutos (8X15 = 120 minutos, que correspondem a 2 horas). Para o caso dos Pioneiros, efetuaram a diferença entre a hora de chegada e a hora de partida (13:05 - 11:15), uma vez que não encontraram relações entre as variáveis, que lhes permitissem recorrer à estratégia multiplicativa inerente a situações de proporcionalidade direta. A diferença não foi calculada corretamente, contudo, destaca-se o facto de optaram por estratégias distintas nos dois casos.

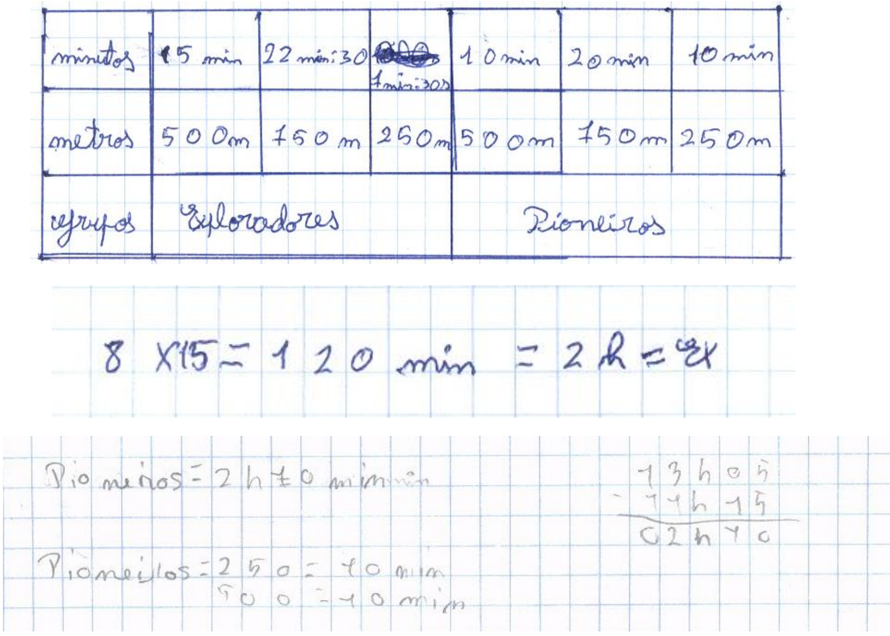


Figura 13 - Produções do Grupo IV referente à resolução da primeira questão da tarefa "Um percurso pedestre"

Para dar uma resposta à segunda questão o grupo utilizou um procedimento multiplicativo. No caso dos Exploradores, os valores de referência foram os 500 metros e os 15 minutos que demoram a percorrê-los. Para caso dos Pioneiros, ignoraram o facto de não existir uma regularidade que permitisse estabelecer relações entre as variáveis e utilizaram como valores de referência os 250 metros e o tempo que o Grupo dos Pioneiros gastou para percorrer essa distância.

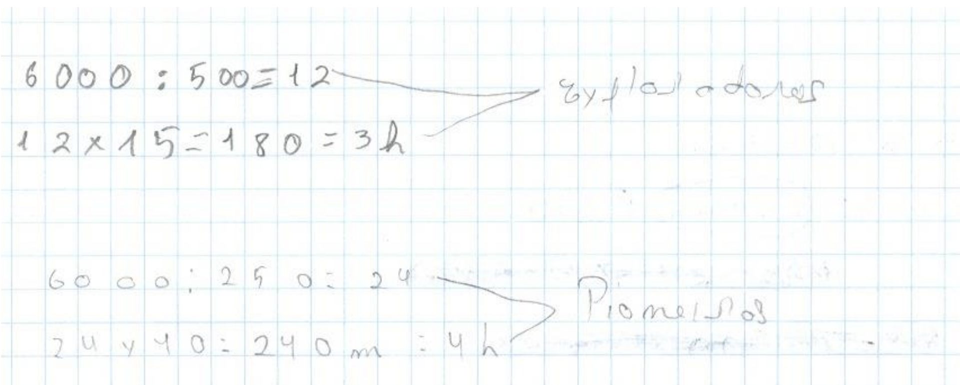


Figura 14 - Produções do Grupo IV referente à resolução da segunda questão da tarefa "Um percurso pedestre"

Para encontrar uma resposta para a terceira questão, os alunos basearam-se nos procedimentos utilizados na questão anterior e através do uso da linguagem natural expressam de forma incompleta a generalização, voltam a ignorar a inexistência de regularidades no Grupo dos Pioneiros.

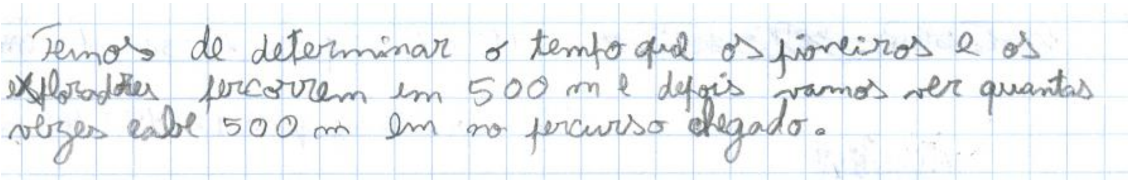


Figura 15 - Produções do Grupo IV referente à resolução da terceira questão da tarefa "Um percurso pedestre"

A relação expressa pelo grupo, em linguagem natural, pode ser traduzida pela expressão: distância÷500=x. Contudo, para calcular o tempo, seria necessário efetuar o produto entre o quociente obtido, que na linguagem dos alunos é traduzido através da expressão: "o número de vezes que os 500 metros cabe no percurso" e o tempo que demoram a percorrer os 500 metros: x×15=tempo.

Grupo V

Este grupo, à semelhança dos anteriores, utilizou a tabela para representar os dados e estabeleceu algumas relações aditivas internas, não conseguindo, contudo, relacionar as variáveis.

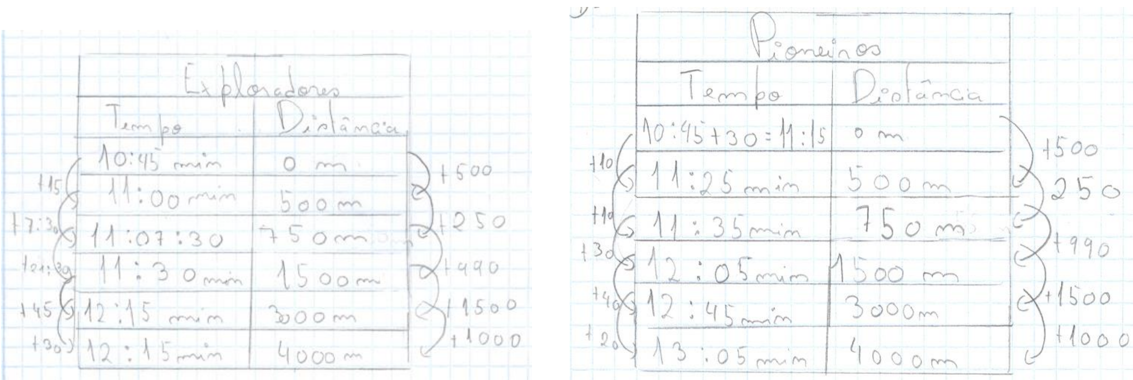


Figura 16 - Produções do Grupo V referente à resolução da tarefa "Um percurso pedestre"

Grupo VI

A tabela volta a ser o meio escolhido para representar os dados. A estratégia utilizada para calcular o tempo gasto no percurso por cada um dos grupos passou pela soma dos tempos que os grupos demoraram a percorrer cada troço do trajeto. Nesta questão não estabeleceram relações, preocuparam-se apenas em perceber os tempos despendidos por cada grupo de escuteiros. Há um erro no primeiro algoritmo, que é posteriormente corrigido.

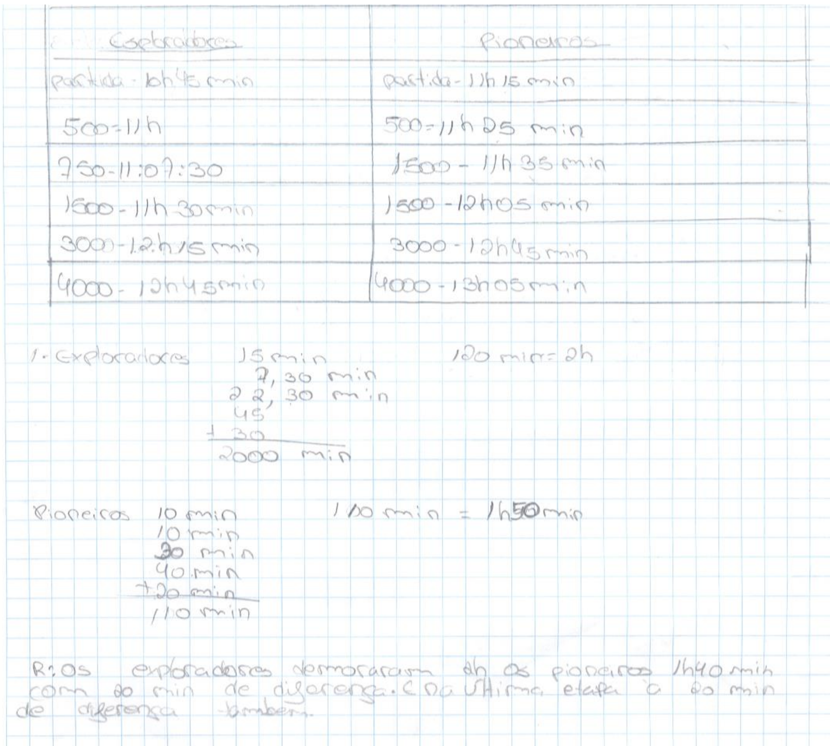


Figura 17 - Produções do Grupo VI referente à resolução da primeira questão da tarefa “Um percurso pedestre”

Na resposta para a segunda questão os alunos estabeleceram relações aditivas entre as variáveis no Grupo dos Exploradores e procuram aplicar uma estratégia semelhante para provar que não existem regularidades no percurso efetuado pelos Pioneiros.

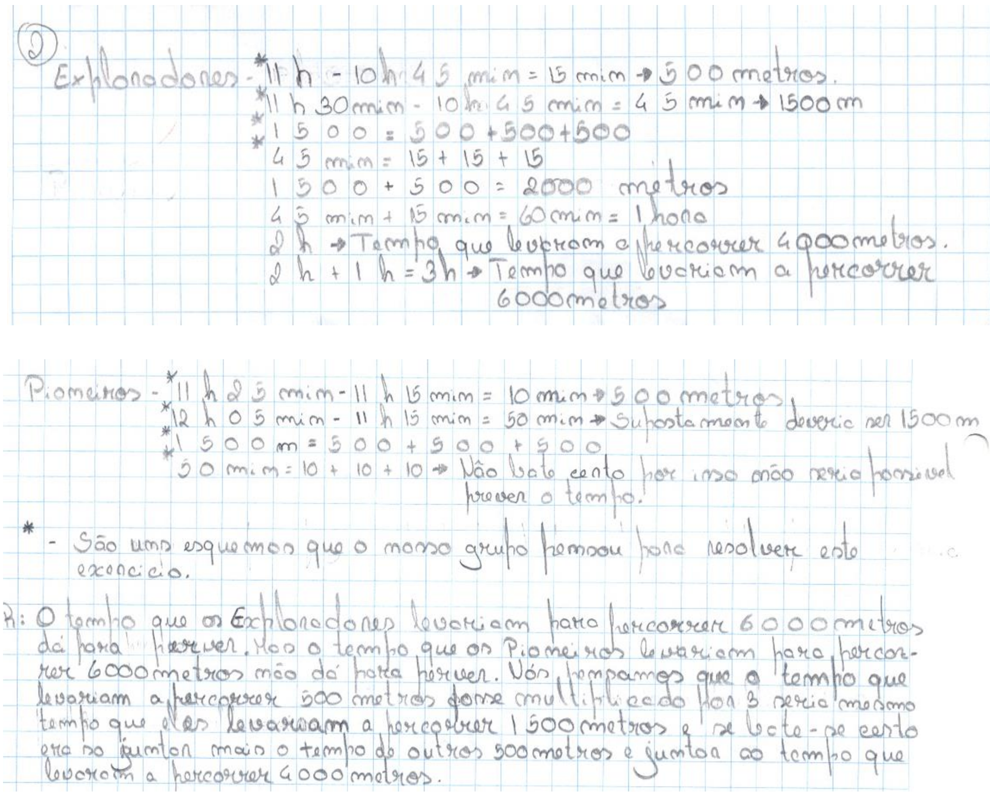


Figura 18 - Produções do Grupo VI referentes à resolução da segunda questão da tarefa "Um percurso pedestre"

A regra que procuram expressar tem uma configuração semelhante às expressões numéricas usadas pelo Grupo IV, para responder à questão dois, contudo, o uso das expressões algébricas que traduzem a regra, coloca esta resolução noutro patamar. O significado atribuído às letras encontra-se ligado ao contexto da situação proposta na tarefa, como se encontra explícito na legenda apresentada pelos alunos. As letras surgem como variáveis, na medida em que são vistas pelos alunos como representantes de qualquer valor, permitindo calcular o tempo gasto para percorrer uma distância com qualquer número de metros.

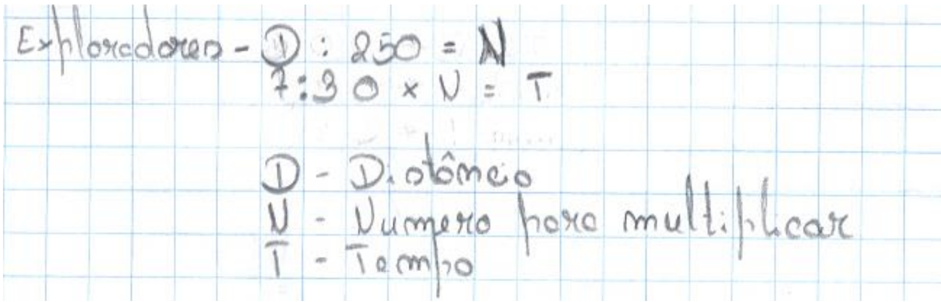


Figura 19 - Produções do Grupo VI referente à resolução da terceira questão da tarefa "Um percurso pedestre"

Após a discussão sugeri aos alunos que lançassem os dados na folha de cálculo de Excel e que comparassem as representações gráficas. Dois alunos ficaram responsáveis por esse trabalho que foi executado no computador que se encontra na sala de aula ligado ao projetor, dando oportunidade a todos de observar os procedimentos. Posteriormente, foi aberta uma nova discussão onde foi discutido o aspeto linear do gráfico representativo do percurso efetuado pelos Exploradores, onde é possível observar a covariação das variáveis, e a ausência dessa linearidade no gráfico dos Pioneiros. Esta discussão teve repercussões na tarefa seguinte, dado que um dos grupos recorreu à representação gráfica para representar e estabelecer relações entre as variáveis.

A utilização, por todos os grupos, da folha de cálculo de Excel prevista na planificação inicial sofreu alterações. Esta estratégia exigia um dispêndio de tempo que não era comportável, na medida em que os alunos tinham que se deslocar à biblioteca, situada noutro edifício para fazer uso da mesma, assim, a alternativa passou por utilizar, na exploração de algumas tarefas, o computador disponível na sala de aula.

4.1.2. Análise global da resolução da tarefa pela turma

Todos os grupos optaram por representar os dados em tabelas, estabelecendo posteriormente relações entre as variáveis, para responder às questões propostas na tarefa. Apenas um grupo não relacionou as variáveis, estabelecendo somente relações internas, dentro de cada variável, o que não lhe permitiu avançar na tarefa e encontrar respostas fundamentadas para as questões. Nos restantes grupos a resposta à primeira questão nem sempre teve implícita a relação entre as variáveis, houve grupos que se focaram apenas no tempo gasto por cada um dos grupos de escuteiros, não investigando relações entre a distância e o tempo. Foram, então, encontradas outras alternativas de resposta, nomeadamente: a soma dos tempos gastos em cada troço do percurso e a diferença entre o tempo de chegada e o tempo de partida. Contudo, três dos seis grupos de trabalho, utilizaram essas relações desde o início da tarefa, um através de procedimentos aditivos e dois através de procedimentos multiplicativos.

Procedimentos aditivos:

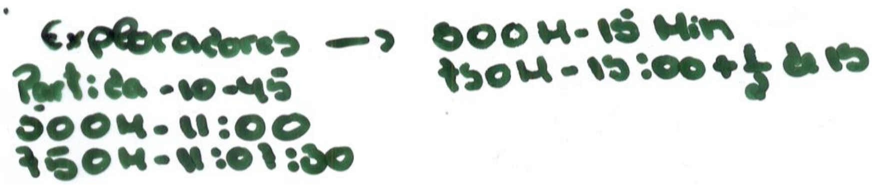


Figura 20 - Evidências de procedimentos aditivos

> (...) das 10:45 às 11, vão 15 minutos, por isso, os 15 minutos são 500 metros. Depois como 750 é metade de 500 mais 500 e metade de 15 é 7,5, por isso é 15 mais metade de 15, que são os 15 mais 7, 5 que corresponde aos 750m (Grupo II)

Procedimentos multiplicativos:

> Na um, para os Pioneiros, vimos que começaram às 11:15 que era mais meia hora que as 10:45, depois fizemos uma tabela e vimos que eles demoravam o mesmo tempo a percorrer 500 metros do que 250 metros, vimos que eles não andavam sempre ao mesmo passo. Aqui (referindo-se à tabela onde registaram as distâncias e tempos percorridos pelos exploradores) estivemos a relacionar e vimos que demoravam 15 minutos a percorrer 500 metros, e metade de 15 minutos é 7,5 minutos, então percorreram, nesse tempo metade de 500 metros que eram 250 metros (Grupo III)

Os autores do procedimento seguinte utilizaram a relação que estabeleceram entre as variáveis para determinar o tempo gasto ao longo do percurso pelos Exploradores, onde se verificava uma relação de covariação entre as variáveis.

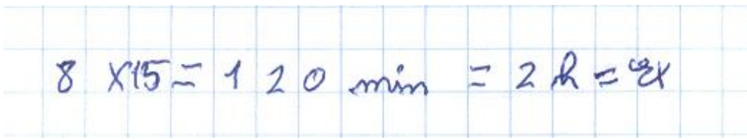


Figura 21 - Evidências de procedimentos multiplicativos funcionais

Na resposta à segunda questão, cinco dos seis grupos estabeleceram relações entre as variáveis no grupo dos Exploradores, onde se verificava a relação de proporcionalidade direta. Os procedimentos utilizados foram na sua maioria de natureza multiplicativa, tendo apenas um grupo utilizado procedimentos aditivos, este grupo na questão anterior limitou-se a somar os tempos gastos em cada troço do percurso. O grupo que na questão anterior fez uso de procedimentos aditivos abandonou essa estratégia e centrou-se numa exploração multiplicativa inerente à relação de proporcionalidade direta.

Para os Pioneiros, onde não existe uma relação de covariação entre as variáveis, a maioria dos grupos fez um julgamento proporcional, traçando previsões onde essa relação não existe. Apenas dois dos seis grupos não fizeram essa previsão, justificando através de cálculos ou da linguagem natural que não era possível fazê-la, dado que não se deslocavam à mesma velocidade (ao mesmo passo ou ritmo, utilizando as palavras dos alunos). Um dos grupos, apesar de reconhecer a inexistência dessa relação, calculou um valor que considerou ser uma estimativa, dado que não era possível prever com exatidão, devido à ausência de regularidades.

Para representar a generalização apenas um grupo fez uso de expressões algébricas atribuindo o significado de variável às letras, dado que podem representar qualquer valor e descrever a relação entre as variáveis, permitindo-lhes calcular o tempo gasto para percorrer distâncias, com qualquer número de metros. De salientar o facto do contexto da situação proposta não ter sido esquecido, dado que as letras escolhidas mantêm uma relação com o mesmo, surgindo como abreviaturas.

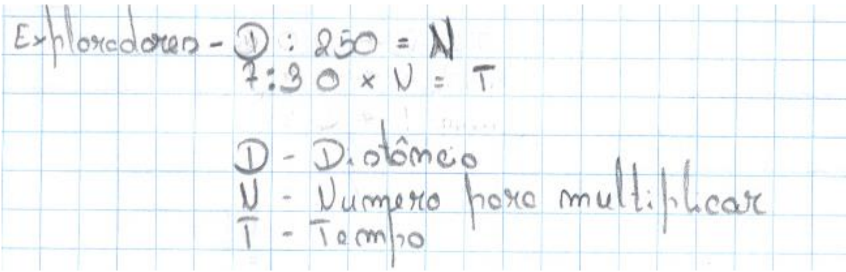


Figura 22 - Expressão algébrica crida por um dos grupos para expressar a generalização

Dois grupos encontraram a constante de proporcionalidade através do quociente entre o tempo e a distância, estabelecendo assim, uma relação multiplicativa entre as variáveis no Grupo dos Exploradores, onde se verifica a relação de proporcionalidade direta. Estes grupos, expressam a generalização através de uma expressão numérica, ficando a um pequeno passo de uma generalização formal (y = kx, tempo = o,o3x distância). À constante de proporcionalidade é atribuído um significado.

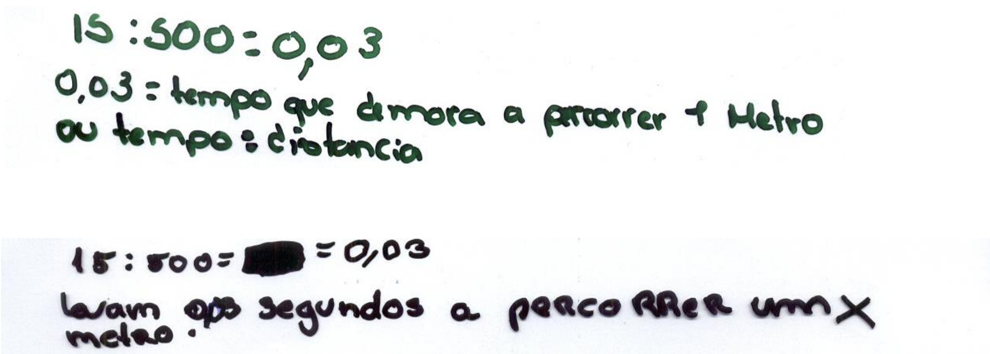


Figura 23 - Expressões numéricas cridas por dois grupos para procurar expressar a generalização

Um dos grupos procura expressar a generalização através do uso da linguagem natural, o discurso tem por base os procedimentos utilizados na questão anterior. Verifica-se uma tentativa de descrição das expressões numéricas utilizadas para prever o tempo gasto num percurso com 6000 metros de distância, contudo, a descrição encontra-se incompleta, dado que os alunos, apenas fazem referência à primeira expressão numérica e ao facto de ser necessário determinar o tempo que demoram a percorrer 500 metros. Este grupo de alunos ignora a inexistência da relação proporcional no percurso efetuado pelos Pioneiros e considera que pode fazer uma previsão ou estabelecer uma generalização para os dois grupos de escuteiros.

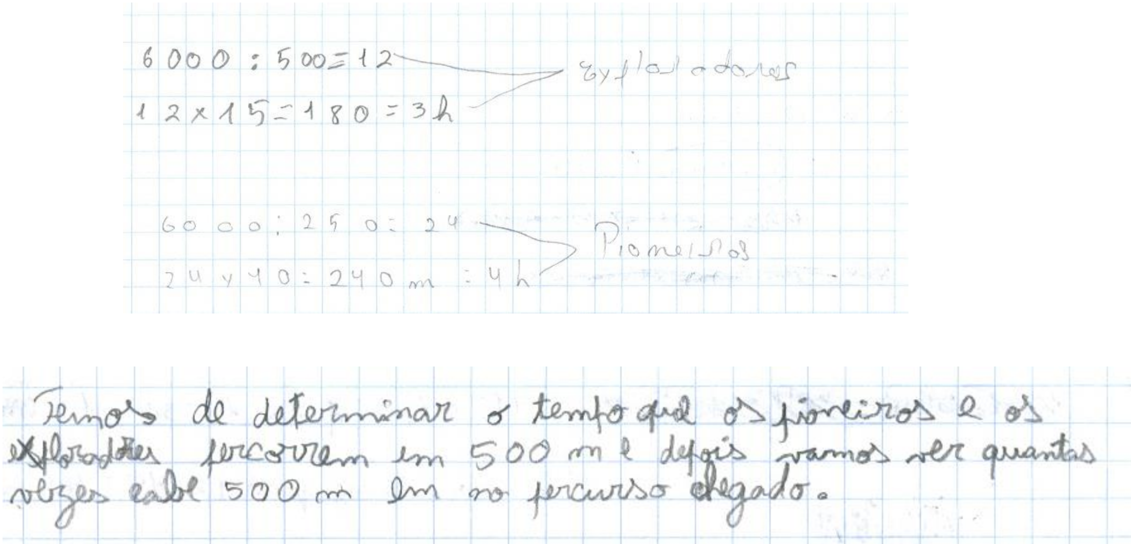


Figura 24 - Expressões numéricas e linguagem natural usadas por um dos grupos para procurar expressar a generalização

Um outro grupo procura traduzir a generalização através de razões que descrevem a relação entre o tempo e a distância e, entre a distância e o tempo, mas não retira partido da riqueza da situação, que lhe possibilitaria verificar a existência ou não de regularidades, calcular a constante de proporcionalidade e por fim chegar à regra.

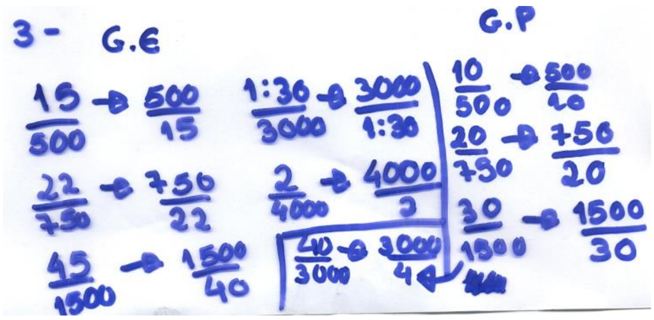


Figura 25 - Razões cridas por um dos grupos para procurar expressar a generalização

Um grupo não relacionou as variáveis e estabeleceu apenas relações internas. Este facto não lhes permitiu avançar na tarefa, e encontrar uma regra que expressasse o tempo gasto num percurso com qualquer número de metros.

Pode-se concluir que alguns grupos sentiram dificuldade em estabelecer relações entre as variáveis e, que alguns ainda recorrem a procedimentos aditivos para expressar relações de proporcionalidade direta. Salienta-se ainda, o facto de fazerem julgamentos proporcionais em situações em que essa relação não se verifica. Observou-se que alguns grupos, apesar de reconhecerem que não existia uma regularidade, no caso do Pioneiros, insistiram em fazer previsões e consideraram ser possível estabelecer uma regra.

Importa ainda salientar a importância dos momentos de comunicação que possibilitaram explicitar raciocínios e criar condições favoráveis à construção do conhecimento, com a sua génese nos momentos de discussão coletiva, onde houve oportunidade de esclarecer diferentes pontos de vista resultantes de diferentes estratégias. Nas tarefas seguintes houve repercussões significativas, que se traduziram na melhoria dos resultados e que se devem, em grande parte, a estes momentos de discussão e partilha.

4.2. Análise da tarefa "Aluguer de canoas"

Esta tarefa corresponde à quarta da sequência realizada (Anexo D). O tempo gasto na realização desta tarefa excedeu em meio bloco o tempo inicialmente previsto, de apenas um bloco de 100 minutos, as causas prenderam-se com o facto da discussão se ter prolongado, dado que surgiram questões que não estavam inicialmente previstas e representações interessantes meritórias de debate.

No início da aula os alunos organizaram-se em grupos, mantendo a estrutura já definida nas tarefas anteriores. Em seguida, adotei um procedimento similar ao seguido nas tarefas já realizadas, disponibilizando tempo suficiente aos alunos para a leitura e interpretação individual da tarefa.

Aluguer de canoas

No dia seguinte teve lugar um passeio de canoas pelo grande lago de Alqueva, alguns membros do grupo estavam muito entusiasmados com a oportunidade que tinha surgido. Finalmente iam poder experimentar e praticar canoagem...

Consultaram as tabelas de preços de duas empresas:

Momentos de Aventura	
Tempo (minutos)	Preço (euros)
30	5
45	7,5
60	10
90	15

Amieira Desportos	
Tempo (minutos)	Preço (euros)
40	5
60	10
90	16
180	28

1. Será possível prever, com exatidão, o preço a pagar pelo aluguer das canoas, durante cinco horas, para cada uma das empresas? Justifica a tua resposta.

2. Consegues encontrar uma regra que te permita determinar o preço a pagar para qualquer número de minutos, para cada uma das empresas? Explica o teu raciocínio.

Figura 26 - Enunciado da tarefa "Aluguer de canoas"

Após a leitura, os alunos referiram que existiam semelhanças entre esta tarefa e a anterior (Um percurso pedestre) e solicitados por mim, recontaram a situação apresentando a sua própria interpretação dos factos, foram também colocadas e esclarecidas dúvidas num debate que teve lugar durante a fase de apresentação. O episódio seguinte procura ilustrar os acontecimentos ocorridos na primeira fase da aula.

> Após um aluno ter recontado a situação perguntei-lhes se gostariam de acrescentar algo ou colocar eventuais dúvidas. De seguida, dois alunos referiram não compreender a primeira questão da tarefa, ao que se seguiram algumas intervenções.
> (...)
> **Bernardo** – Os escuteiros queriam fazer um passeio de canoa pelo Lago de Alqueva e queriam saber qual era a empresa em que podiam andar mais tempo com menos dinheiro, e depois pergunta-nos aqui quanto é que eles pagavam em 5 horas em cada uma das empresas. E por fim, pede-nos para achar uma regra para determinar o preço a pagar em cada uma das empresas.
> **João** – (...) eles queriam andar 5 horas de canoa e queriam ver quanto é que pagavam qual era a mais barata.
> **Professora** – Disseram que esta tarefa era parecida com a anterior (Um percurso pedestre), recordam-se das variáveis que surgiram nessa tarefa?
> Vários alunos responderam que as variáveis em questão na tarefa anterior foram a distância e o tempo.
> **Professora** – E nesta?
> **José** – Tempo e preço.
> **Professora** – Então, o que é que nós vamos ter que perceber?
> **Manel** – A relação entre o tempo e o preço em cada uma das empresas.

A interpretação da tarefa apresentada pelos alunos resulta de uma leitura transversal pouco cuidada, dado que o que parece estar em causa, é a busca da empresa que apresenta preços mais aliciantes e não a possibilidade de poder fazer uma previsão para cinco horas de aluguer. “ (...) queriam saber qual era a empresa em que podiam andar mais tempo com menos dinheiro (...) ”; “ (...) eles queriam andar 5 horas de canoa e queriam ver quanto é que pagavam, qual era a mais barata.”

Esta leitura foi provavelmente condicionada pela estrutura da tarefa, em que surgem duas tabelas onde o preço e o tempo se encontram em evidência, e pela preocupação óbvia de encontrar situações mais económicas, resultante de experiências anteriores colocadas na escola e de outras que integram as rotinas diárias dos alunos. O diálogo que se seguiu procurou clarificar o objetivo essencial da tarefa, a procura de regularidades entre o preço e o tempo em cada uma das empresas.

4.2.1. As produções dos alunos e a discussão coletiva

Após a fase de apresentação da tarefa, os grupos deram início à exploração que ocupou cerca de 40 minutos da aula. Durante esta fase, os alunos procuraram estabelecer relações entre as variáveis, tempo e preço, na procura de regularidades. As estratégias e representações usadas foram diversificadas, verificando-se que os alunos apelavam com frequência a representações e estratégias que já tinham usado nas tarefas anteriores, sobretudo na última, “Um percurso pedestre”, pelo facto das tarefas possuírem características comuns, uma vez que apelavam à comparação de duas situações, uma em que existiam regularidades, dado que os valores das variáveis aumentavam na mesma proporção, e outra em que não se verificavam quaisquer regularidades não sendo possível fazer previsões. No decorrer deste segundo momento, à medida que circulava entre os grupos de trabalho, fui colocando questões aos alunos de modo a tentar aceder aos seus raciocínios e desbloquear impasses que os impedissem de prosseguir com a exploração da tarefa.

- Como pensaram?

- O que sabem sobre a relação entre o preço, em euros, e o tempo, em minutos?
- Como podem representar essa relação?
- Será possível, através dos dados disponíveis, descobrir o custo de 1 minuto?

Grupo I

Para responder à primeira questão, e depois de verificarem a existência de proporcionalidade direta entre o preço e o tempo na empresa Momentos de Aventura, este grupo representa os dados numa nova tabela, estabelecendo uma correspondência direta entre o preço e o tempo de 1, 2, 3, 4 e 5 horas, respetivamente.

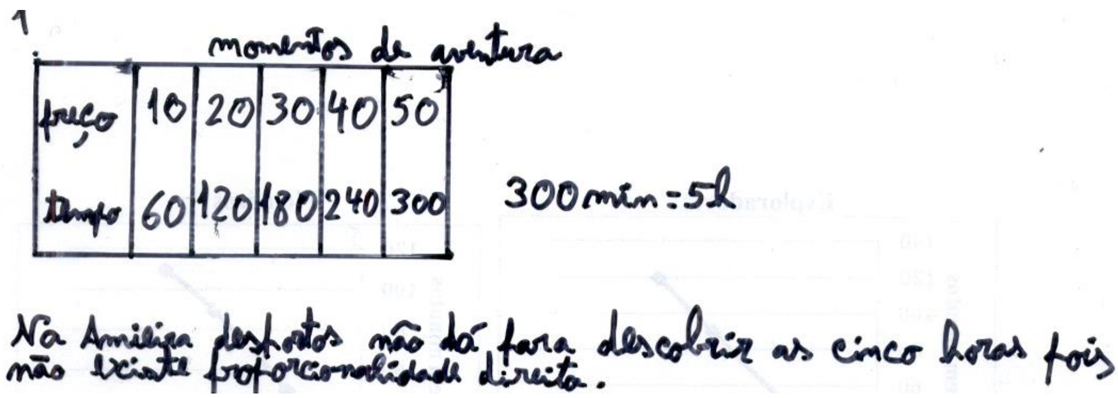


Figura 27 - Produções do Grupo I referentes à resolução da primeira questão da tarefa “Aluguer de canoas”

O episódio seguinte, ocorrido no momento da discussão coletiva, permite clarificar a estratégia utilizada pelos alunos na verificação da existência de proporcionalidade direta.

> **André** (elemento do grupo) – Nós tivemos a ver na primeira e na segunda tabela e descobrimos que nos Momentos de Aventura havia proporcionalidade direta e na tabela da Amieira Desportos não havia proporcionalidade direta.
> **Professora** – Querem perguntar alguma coisa aos colegas? (como os alunos não se manifestaram continuei, dado que era importante esclarecer a estratégia que tinha sido usada pelos alunos) Posso então perguntar-vos como descobriram que existia ou não proporcionalidade direta?
> **Simão** (elemento do grupo) – (esclarece) porque ia sempre aumentando da mesma forma, na mesma proporção.
> **Professora –** Exemplifiquem por favor.

Simão (elemento do grupo) – 10€ era uma hora, 20€ duas horas, 30€ três horas, 40€ quatro horas e 50 € cinco horas.
(...)
Manel – E como é que chegara à conclusão que na Amieira Desportos não havia proporcionalidade direta?
André (elemento do grupo) – Porque nós fomos ver e do 40 para o 60 vão 20€, não 20 minutos (corrige em seguida) e 40 a dividir por dois é 20 minutos e 5 a dividir por dois é 2,5; daqui para aqui (apontando os tempos 40 e 60 minutos) vão 20 minutos e 20 minutos é igual a 2,5€, não dá (...) neste caso (apontando para os 40 minutos) para isto ter proporcionalidade direta tinha que ser 80 minutos e 10 de preço.

(A tabela seguinte foi aqui colocada para, mais facilmente, se compreender a explicação do aluno.)

Tabela 4 - *Relação entre tempo e preço na empresa "Amieira dos Portos"*

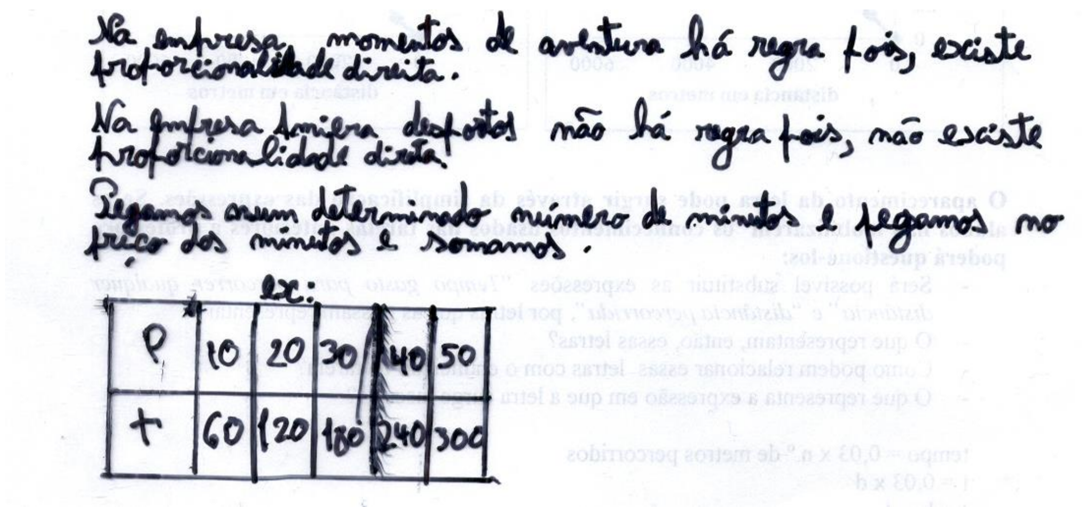
Amieira Desportos	
Tempo (minutos)	Preço (euros)
40	5
60	10
90	16
180	28

Manel – Também podiam provar que não havia proporcionalidade direta na Amieira desportos de outra maneira, aqui (apontando para a tabela) diz que 60 minutos são 10€, se fizéssemos 60 minutos mais 60 minutos dava 120 minutos, e 10€ mais 10€ dava 20 €, e aqui (voltando a indicar a tabela) no 180 minutos dava 28€ e para haver proporcionalidade direta tinha que ser 180 minutos 30€.

O André explica a inexistência de proporcionalidade direta na empresa Amieira Desportos recorrendo a procedimentos de natureza multiplicativa e utilizando duas abordagens distintas. Inicialmente usa uma abordagem escalar, estabelecendo relações internas "(...) 40 a dividir por 2 é 20 minutos e 5 a dividir por 2 é 2,5; (...) 20 minutos é igual a 2,5€, não dá (...)", neste caso, o aluno procura uma correspondência entre o tempo e o preço, sendo que, se 40 minutos custam 5€, 20 minutos que correspondem a metade de 40 minutos, deveriam ter um custo de 2,5€, dado que se trata de metade de

5€. Em seguida, utiliza uma abordagem funcional com o intuito de tornar mais clara a sua explicação “ (...) neste caso (apontando para os 40 minutos) para isto ter proporcionalidade direta tinha que ser 80 minutos e 10 de preço.”. Assim, foi estabelecida uma correspondência entre o tempo e o preço, uma vez que o tempo pode ser obtido através da multiplicação do preço por 8, 5€ x 8 = 40 minutos, logo, para provar a existência de proporcionalidade direta, o tempo correspondente ao preço de 10 € teria de ser de 80 minutos, dado que, 10€ x 8 = 80 minutos, o que na realidade não se verificava. Por outro lado, o Manel utiliza na sua explicação uma abordagem de construção, de natureza aditiva, designada por *building-up* “ (…) 60 minutos mais 60 minutos dava 120 minutos, e 10€ mais 10€ dava 20 €, e aqui (voltando a indicar na tabela) no 180 minutos dava 28€ e para haver proporcionalidade direta tinha que ser 180 minutos 30€.” Deste modo, através da adição repetida 60+60+60 obtém os 180 minutos e repetindo o mesmo número de vezes o custo de 60 minutos,10+10+10, iria obter, caso existisse proporcionalidade direta, o custo correspondente de 30€, o que não se verifica na situação proposta.

Na resposta à segunda questão o grupo reconhece que é possível estabelecer uma regra para a empresa Momentos de Aventura, onde se verifica a existência de proporcionalidade direta e que não é possível fazê-lo no caso da empresa Amieira Desportos, dada a inexistência dessa regularidade. Contudo, o grupo não conseguiu formular ou descrever uma regra que permitisse a generalização, os seus procedimentos são de natureza recursiva, dado que sugerem ir somando consecutivamente 10€ ao preço e 60 minutos ao tempo para obter os resultados pretendidos.



Na empresa momentos de aventura há regra pois, existe proporcionalidade direita.

Na empresa Amiera desportos não há regra pois, não existe proporcionalidade direta.

Pegamos num determinado número de minutos e pegamos no preço dos minutos e somamos.

ex.

p	10	20	30	40	50
t	60	120	180	240	300

Figura 28 - Produções do Grupo I referentes à resolução da segunda questão da tarefa "Aluguer de canoas"

No episódio seguinte os alunos justificam os seus procedimentos:

Júlio (elemento do grupo) – Na dois perguntava se existia uma regra para descobrir uma forma de encontrar resultados mais rápidos e nós descobrimos que numa existia proporcionalidade direta e noutra não.
André (elemento do grupo) – Existe diferença entre uma tabela e outra, uma vai sempre somando 2,5;...; 2,5 e na outra não, em vez de ser ao mesmo passo (recordando a tarefa anterior, *Um percurso pedestre*) é sempre ao mesmo preço.
Professora – E escreveram alguma coisa sobre a regra?
André (elemento do grupo) – Sim pegamos num determinado número de minutos e pegamos no preço dos minutos e somamos.
João – Mas, se somarem isso, o que é que isso vai dar?
Matilde – Eu acho que eles multiplicam por 2 porque fizeram 60 x 2 = 120
André (elemento do grupo) – Também se pode fazer 60+60; 60+60+60; 60+60+60+60,...
João – Mas isso era mais fácil fazer uma fórmula...
Professora – E assim será possível determinar o preço para qualquer número de minutos?
André (elemento do grupo) – Por exemplo como pedia em horas, 60 minutos é uma hora, pegamos no preço delas e multiplicamos (...) x1; x2; x3;…
Júlio (elemento do grupo) – (acrescenta)...como fizemos lá em cima (referindo-se à tabela)
João – Podiam ter feito uma espécie do que fizemos na última tarefa, fizemos uma fórmula que também se podia usar aqui, dividimos tudo para sabre quanto custava um minuto e depois multiplicávamos.
André (elemento do grupo) – Também podíamos olhar para a tabela desde o princípio e irmos continuando...

Através deste episódio é possível identificar a estratégia recursiva utilizada pelos elementos do grupo, sendo também evidente a abordagem *building-up* que lhe está associada, quando sugerem a soma consecutiva de 60 minutos, a multiplicação sucessiva desse valor por 1, 2, 3, ..., ou a continuação da tabela. As intervenções oportunas do João revelaram, de algum modo, as fragilidades da estratégia empregue pelo grupo, que se viu forçado a esclarecer a sua posição.

Grupo II

Na resposta à primeira questão verifica-se que este grupo de alunos teve a preocupação de encontrar o preço a pagar por cinco horas de aluguer em cada uma das empresas. O facto de existirem ou não regularidades não foi considerado. Assim, e uma vez que os dados da tarefa contemplavam o custo de 60 minutos nas duas empresas, adotaram o mesmo procedimento, assumindo que seria sempre possível prever o preço.

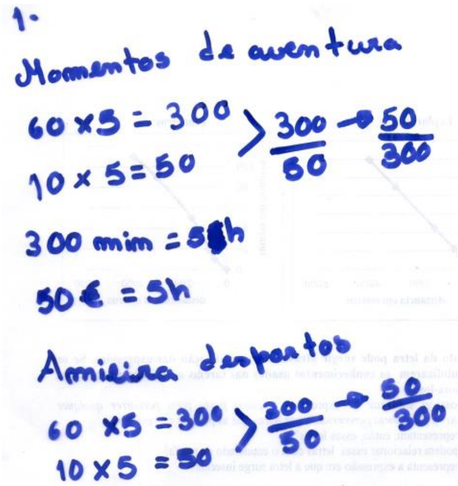
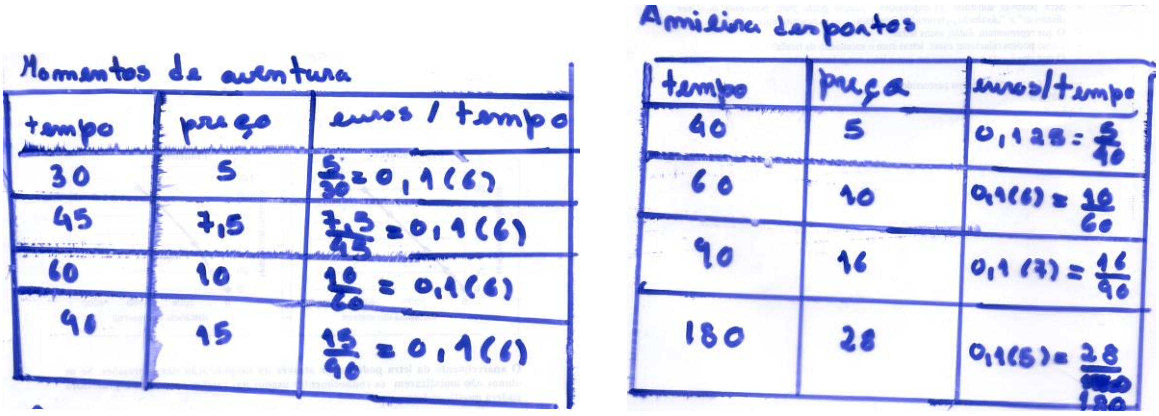


Figura 29 - Produções do Grupo II referentes à resolução da primeira questão da tarefa "Aluguer de canoas"

Em seguida, apresentam os produtos obtidos na forma de razão, estabelecendo uma relação multiplicativa entre o tempo e o preço e entre o preço e o tempo que só posteriormente irão explorar.



Momentos de aventura

tempo	preço	euros / tempo
30	5	$\frac{5}{30}=0,1(6)$
45	7,5	$\frac{7,5}{45}=0,1(6)$
60	10	$\frac{10}{60}=0,1(6)$
90	15	$\frac{15}{90}=0,1(6)$

Amieira desportos

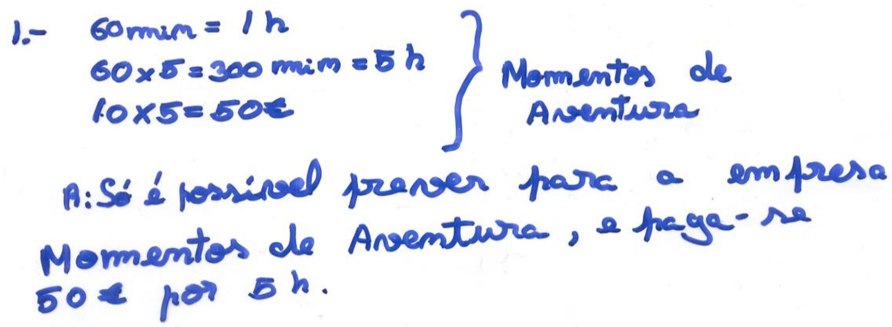
tempo	preço	euros/tempo
40	5	$0,125=\frac{5}{40}$
60	10	$0,1(6)=\frac{10}{60}$
90	16	$0,1(7)=\frac{16}{90}$
180	28	$0,1(5)=\frac{28}{180}$

Figura 30 - Produções do Grupo II referentes à resolução da segunda questão da tarefa "Aluguer de canoas"

As tabelas surgem à posteriori, na procura de regularidades que lhes permitissem formular a regra. Deste modo, colocam em evidência a relação entre o preço e o tempo através de uma razão e determinam posteriormente o quociente, que lhes fornece informação acerca do custo de um minuto em cada uma das empresas. Essa informação permitiu-lhes ainda identificar a relação de proporcionalidade direta na empresa Momentos de Aventura, dado que o quociente entre o preço e o tempo é um valor constante.

Grupo III

Este grupo adota um procedimento semelhante ao anterior para determinar o preço a pagar por cinco horas de aluguer, destaca-se, contudo, o facto de reconhecerem que apenas é possível fazer uma previsão no caso da empresa Momentos de Aventura.



1.- 60min = 1h
60x5=300 min = 5h
10x5=50€
Momentos de Aventura

R: Só é possível prever para a empresa Momentos de Aventura, e paga-se 50€ por 5h.

Figura 31 - Produções do Grupo III referentes à resolução da primeira questão da tarefa "Aluguer de canoas"

O episódio que se segue permite esclarecer os procedimentos.

Marta (elemento do grupo) – 60 minutos é igual a uma hora, então a gente fizemos 60 minutos que é uma hora vezes 5 que deu 300 que é igual a 5 horas. Depois como multiplicamos os minutos por 5 também tínhamos que multiplicar o preço então fizemos 10€ vezes 5 que é igual a 50€, isto na empresa Momentos de Aventura.
Bernardo (elemento do grupo) – Depois fomos ver se dava na outra empresa que era a Amieira Desportos e vimos que não dava...
Rui (elemento do grupo) – (conclui o raciocínio do colega) ...não havia relação.
(...)

Verifica-se que os alunos não justificam, neste momento da apresentação, a existência ou ausência da relação de proporcionalidade direta.

A resposta à segunda questão surge expressa num modo formal.

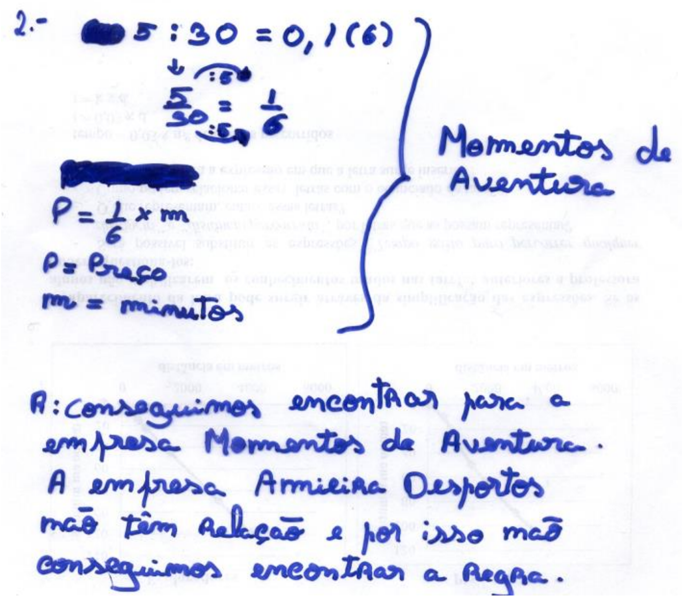


Figura 32 - Produções do Grupo III referentes à resolução da segunda questão da tarefa "Aluguer de canoas"

No episódio que se segue os alunos justificam os procedimentos adotados.

Rui (elemento do grupo) – Depois na dois como já tínhamos feito na outra tarefa (recordando os procedimentos adotados na tarefa anterior) fizemos o preço a dividir pelos minutos que dava o preço de um minuto, nos Momentos de Aventura, porque na Amieira Desportos não havia relação, então não dava para

ver. (apontando para o quadro, onde se encontrava projetado o acetato, continua a explicar os procedimentos) como 5 : 30 = $\frac{5}{30}$ ...
Marta (elemento do grupo) –... nós passamos para fração para achar o número exato $\frac{1}{6}$
André – (indicando o quociente de cinco por três) Aquela conta é para saber o quê?
Rui (elemento do grupo) – É para saber o preço de um minuto, para depois descobrirmos para qualquer (número de) minutos.
Bernardo (elemento do grupo) – Aqui em baixo nós fizemos uma legenda...
Gil (elemento do grupo) -... o P é o preço que é igual a $\frac{1}{6} \times$ m, que são os minutos...
Rui (elemento do grupo) -... isto (indica o m) é os minutos que queremos, $\frac{1}{6}$ é o preço de um minuto, se queremos andar 100 minutos fazemos $\frac{1}{6} \times 100$

Através do exemplo "se queremos andar 100 minutos fazemos $\frac{1}{6} \times 100$" Rui procura atribuir sentido à regra. Salienta-se ainda o facto dos alunos terem optado por utilizar a representação fracionária ao invés da representação decimal, trabalhando deste modo, tal como o referiram, com o "número exato".

Em seguida apresentam evidências das relações encontradas.

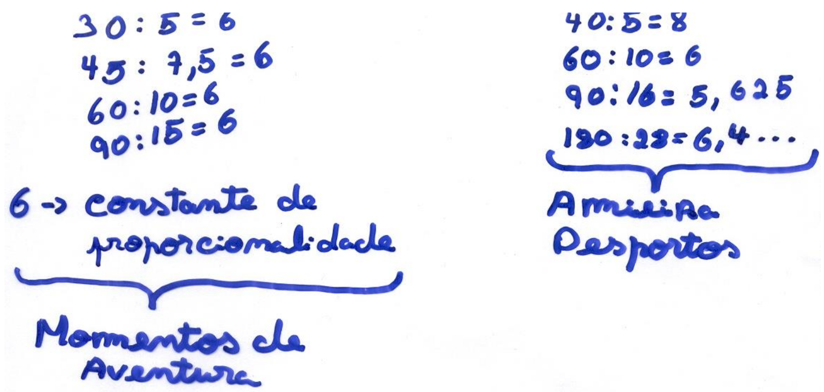


Figura 33 - Evidências das relações encontradas pelo Grupo III

Marta (elemento do grupo) – Nós fizemos: 30 : 5 =6; 45 : 7,5 = 6; 60 : 10 = 6; 90 : 15 = 6; para ver se existia constante de proporcionalidade na empresa Momentos de Aventura, e nesta (indicando a empresa Amieira Desportos) fizemos a mesma coisa e obtivemos números diferentes.
Bernardo (elemento do grupo) – Na Momentos de Aventura a constante de proporcionalidade é o 6, na Amieira Desportos não pois deu 8; 6; 5,625; 6,4..

(...)
Inês – Os resultados nos Momentos de Aventura é constante e na Amieira Desportos não.
André – Porque é que meteram constante de proporcionalidade e não puseram proporcionalidade direta?
Professora – O que é que é a constante de proporcionalidade?
Simão – É o valor que se vai repetindo...
Bernardo (elemento do grupo) –...um determinado valor que se repete.
Professora – E o que é que é existir proporcionalidade direta?
Simão – É os números aumentarem sempre na mesma proporção.
André – Já percebi...
Professora – O que é que percebeu?
André – Percebi que aqui (indicando a tabela da empresa Momentos de Aventura) metade de 60 é 30 e 5 é metade de 10, por isso dá, vão sempre aumentando na mesma proporção.

Na procura de regularidades os alunos efetuam o quociente entre o tempo e o preço, ao invés de o fazerem entre o preço e o tempo, como sucedeu ao formularem a regra, provavelmente a natureza dos números condicionou a escolha, uma vez que, deste modo, era possível obter quocientes inteiros. A conversa oportuna, em torno dos conceitos de proporcionalidade direta e constante de proporcionalidade, contribuiu, naquele momento, para dissipar as dúvidas do aluno e clarificar os conceitos.

Grupo IV

A preocupação em estabelecer, desde o início, uma relação entre as variáveis é evidente. Ao detetarem uma irregularidade na empresa Amieira Desportos, "porque no tempo em vez de 40 podia ser 30", uma vez que, se 60 minutos tem o custo de 10 euros, logo metade do custo, 5 euros, deveria corresponder a metade do tempo 30 minutos e não 40, como surge expresso na tabela, a hipótese de vir a fazer qualquer previsão ou formular uma regra que relacione o preço e o tempo, nesta empresa, foi afastada de imediato.

Para o caso da empresa Momentos de Aventura, onde não foram encontradas irregularidades estabeleceram uma relação funcional entre o preço e o tempo, prevendo assim o custo de 5 horas de aluguer.

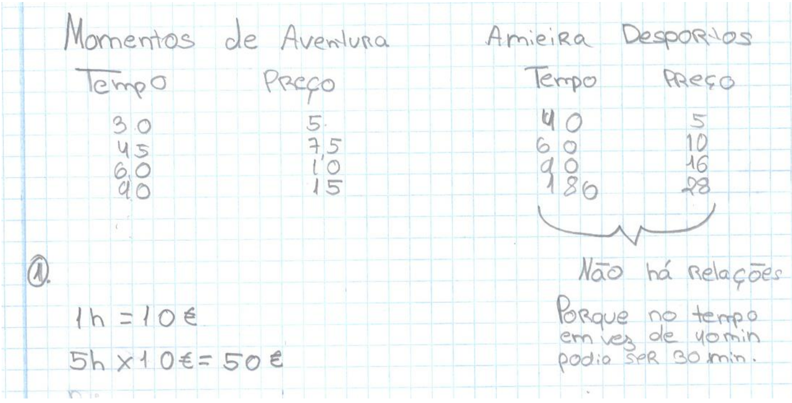


Figura 34 - Produções do Grupo IV referentes à resolução da primeira questão da tarefa “Aluguer de canoas”

Para encontrar a regra, à semelhança dos procedimentos utilizados pelo grupo anterior, os alunos determinaram o custo de um minuto de aluguer, utilizando um raciocínio multiplicativo, e a partir de desse valor formulam uma expressão algébrica que lhes permite determinar o preço a pagar para qualquer número de minutos.

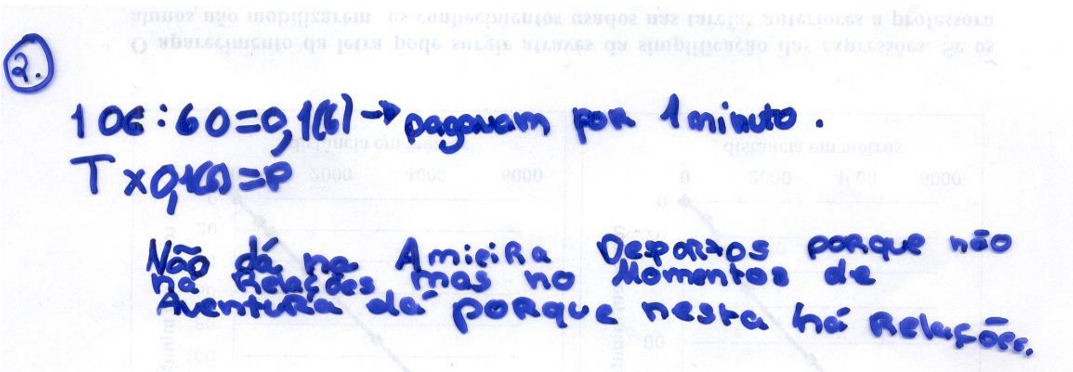


Figura 35 - Produções do Grupo IV referentes à resolução da segunda questão da tarefa “Aluguer de canoas”

No episódio seguinte justifica os procedimentos.

Maria (elemento do grupo) – Aqui a professora perguntou-nos se era possível saber quanto é que eles pagavam por um minuto, então fizemos 10€ : 60 minutos, que é um hora, e foi-nos dar...
António (elemento do grupo) – (conclui o raciocínio da colega)... o que pagavam num minuto...
Maria (elemento do grupo) – ... que era 0, 1(6), então nós vimos que para descobrir qualquer coisa (referindo-se ao preço) era o tempo vezes 0, 1(6).
Professora – O que era o 0, 1(6)?

António (elemento do grupo) – Era a constante
Professora – E o que é que ali representa?
Maria (elemento do grupo) – O que pagavam por um minuto, então fizemos o tempo vezes o que pagavam por um minuto e dava o preço de qualquer número de minutos.
Professora – E a que conclusões chegaram?
Maria (elemento do grupo) – Não dava na Amieira Desportos porque não tem relações entre o preço e o tempo e nos Momentos de Aventura dá porque já tínhamos relações.

Este grupo, apesar de ter encontrado uma estratégia eficaz para responder à primeira questão, demonstrou posteriormente alguma dificuldade em traçar um caminho que os conduzisse à regra. Então, na tentativa de desbloquear o impasse, questionei-os acerca da possibilidade de, através dos dados disponíveis, descobrirem o custo de um minuto, remetendo-os, deste modo, para a relação funcional.

Grupo V

Para provar a existência ou ausência da relação de proporcionalidade direta este grupo utiliza a representação gráfica. Esta representação tinha sido explorada no final da tarefa anterior, “Um percurso pedestre”, quando no momento de sistematização sugeri aos alunos, que utilizando a folha de cálculo Excel, observassem o comportamento das funções. No episódio seguinte os alunos justificam as suas ações.

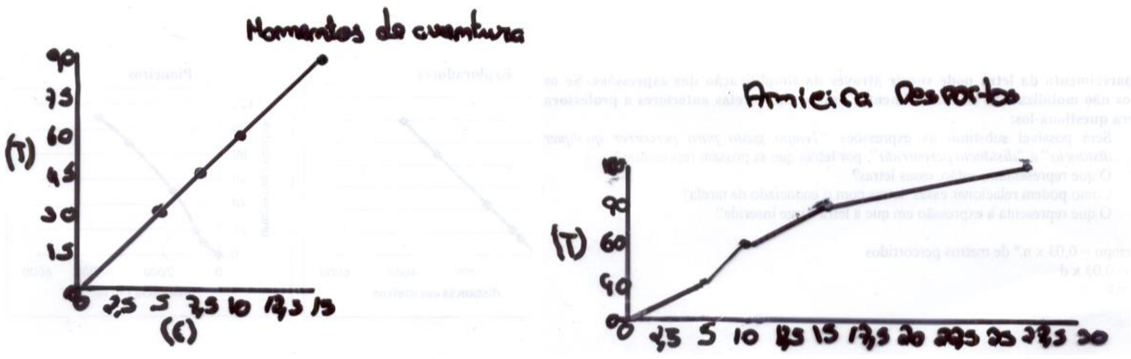


Figura 36 - Produções do Grupo V que provam a existência de regularidades na tarefa “Aluguer de canoas”

João (elemento do grupo) – Nesta tarefa para organizarmos os dados fizemos as escalas (...) então fizemos os dados, os euros e o tempo, fizemos os pontinhos e depois ligamos e vimos que este aqui (apontando para o gráfico da empresa Momentos de Aventu*ra*) fazia uma reta, então dava uma sequência, podíamos

prever outros tempos e outros custos. Depois aqui, na Amieira Desportos, fizemos a mesma coisa, só que os pontos não estavam em linha reta, então não dava para prever nenhum tempo nem nenhum custo.
Professora – (dirigindo-se a um aluno que estava com o dedo no ar) Quer colocar alguma questão aos colegas?
André – (indicando o gráfico que respeita à empresa Momentos de Aventura) É suposto 15 minutos ser 2,5€?
Gil – E ali nas tabelas ... como é que eu hei de explicar...
Professora – São tabelas o que ali está representado?
João (elemento do grupo) – Não são escalas...
Maria – São gráficos
Gil – Nos gráficos, aquilo (referindo-se à origem do referencial) são zeros?
João (elemento do grupo) **–** Sim, são zeros no de cima e no de baixo...
(...)
Professora – Mais alguma questão?
Bernardo – Onde foram buscar o 2,5 na primeira tabela... (corrigiu em seguida) no primeiro gráfico?
João (elemento do grupo) **–** Nós íamos de 2,5 em 2,5...
Matilde (elemento do grupo) – 10; 12,5; 15; ...
André – Posso fazer uma questão? E se houvesse um milhão e não sei quantos mil euros e quisesses saber os minutos, não podias ir de 2,5 em 2,5...
João (elemento do grupo) **–** (após uma pausa) ... ah! dividíamos um milhão e não sei quantos mil por 2,5, dava um número, e depois era só multiplicar esse número por 15...
(...)

Neste pequeno episódio, retirado da primeira parte da discussão coletiva, são esclarecidos alguns aspetos que dizem respeito à leitura e interpretação do gráfico. Destaca-se o significado que o João atribui à situação, quando o colega o questiona sobre como procederia se tivesse "...um milhão e não sei quantos mil euros...". A resposta revela que o aluno consegue generalizar a partir do gráfico, estabelecendo relações entre as variáveis: "dividíamos um milhão e não sei quantos mil por 2,5, dava um número, e depois era só multiplicar esse número por 15"

Após demonstrarem, através dos gráficos, a existência da relação de proporcionalidade direta na empresa Momentos de Aventura e a sua ausência na empresa Amieira Desportos utilizam o raciocínio funcional para encontrar a resposta à primeira questão.

① Momentos de aventura
5h = 300 min
5:30 = 0,1(6) + 1 minuto
0,1(6) × 300 = 50 €

Amieira Desportos
R: Na empresa "Amieira Desportos", 5 horas não se saberá quanto custará pois as variantes: tempo e dinheiro não tem uma regra é irregular.

Figura 37 - Produções do Grupo V referentes à resolução da primeira questão da tarefa "Aluguer de canoas"

O episódio seguinte relata os acontecimentos que ocorreram durante a discussão.

> **Matilde** (elemento do grupo) – Na primeira pedia-nos se sabíamos com exatidão o que pagar em cada empresa em 5 horas, e nós vimos que 5 horas era igual a 300 minutos, depois dividimos as 5 horas por 30 que nos deu 0,1(6)...
> **Manel** -...O 5 é o preço e o 30 são os minutos (corrigiu em seguida)
> **(...)**
> **José** – Era sobre a de cima (voltando a referir-se aos gráficos e à resposta dada pelo João ao colega André quando o questionou sobre o que faria se tivesse um milhão e não sei quantos mil euros) nos Momentos de Aventura era a dividir por 2,5...
> **João** (elemento do grupo) –...o preço que fosse era a dividir por 2,5...
> **José –** E o debaixo (referindo-se à empresa Amieira Desportos) é a dividir por quanto?
> **João** (elemento do grupo) **–** Não dá para dividir porque é irregular por isso não dá...
> **André** – Não tem proporcionalidade direta.
> (...)

Há a destacar o facto dos alunos recorrerem a uma abordagem ao fator unidade para encontrar uma resposta à primeira questão, apesar do João, um dos elementos do grupo, ter descrito, aquando da análise dos gráficos, uma relação igualmente funcional, mas distinta da que foi usada nesta resposta.

A regra apresenta uma estrutura idêntica à da expressão numérica, usada para obter a resposta à primeira questão, inspirada numa abordagem ao fator unidade.

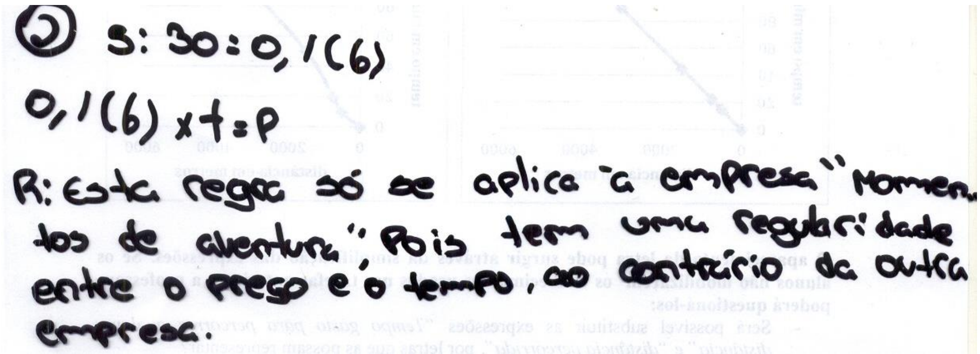

2) 5 : 30 = 0,1(6)
0,1(6) x t = p
R: Esta regra só se aplica "a empresa" "Momentos de aventura", pois tem uma regularidade entre o preço e o tempo, ao contrário da outra empresa.

Figura 38 - Produções do Grupo V referentes à resolução da segunda questão da tarefa "Aluguer de canoas"

No episódio seguinte justificam-se os procedimentos e esclarecem-se algumas dúvidas que parecem persistir.

Raul (elemento do grupo) - Aqui pedia-nos se seria possível encontrar uma regra para determinar o preço...
Matilde (elemento do grupo) – (continua)... na Amieira Desportos não conseguimos porque era irregular...
Raul (elemento do grupo) –...para a outra empresa fizemos 5 horas a dividir por 30...
Professora – São 5 horas?
Raul (elemento do grupo) – Não são 5€ a dividir por 30 e obtemos 0,1(6).
Professora – E que valor é esse?
João (elemento do grupo) – É uma dizima infinita periódica...
Tino (elemento do grupo) – 0,1(6) era o que cada minuto custava.
(...)
Professora – E como fariam para obter o preço?
Matilde (elemento do grupo) – Nós multiplicávamos o preço de um minuto vezes o tempo que nos pediam, que nos ia dar o preço que nós pagávamos.
André – Professora isso tem lógica, porque se fizermos o tempo a dividir pelo preço dá o preço de um minuto.
Professora – Concordam?
André – (após alguns segundos de reflexão o próprio aluno corrige a afirmação) não é o preço a dividir pelo tempo...
Professora – Como é que acham então?
Vários alunos defendem a última versão, confirmando que o preço de um minuto pode ser encontrado através do quociente entre o preço e o tempo.
(...)
Professora – Mais alguma questão?
André – E se quisermos saber o tempo?
João (elemento do grupo) – Não podia ser assim, tinha que ser 30 a dividir por 5, que ia dar 6, e 6 vezes o preço que tu querias ia dar o tempo.

Professora – E usando este valor (indiquei-lhes o valor 0,1(6)) seria possível determinar o tempo?
André – Eu acho que sim...
Matilde (elemento do grupo) – Podia ser o preço a dividir por 0,1(6), e ia dar o tempo.
(...)

No decorrer desta última discussão, à semelhança do que já tinha sucedido durante a apresentação de outros grupos, há a assinalar o facto de alguns alunos confundirem, os cinco euros usados para determinar a constante de proporcionalidade, com as cinco horas, para as quais deveriam fazer uma previsão do custo, na primeira questão. Contudo, há a destacar vários aspetos positivos nesta discussão: a descoberta da regra e o debate que se gerou em seu torno, levando os alunos a refletir sobre o significado do quociente entre o preço e o tempo, e a olhar a situação de um ponto de vista diferente, quando confrontados com a questão: E se quisermos saber o tempo? A pergunta colocada pelo André originou então duas abordagens distintas, assentes no raciocínio multiplicativo inerente a situações de proporcionalidade direta, que importam sublinhar: "Não podia ser assim, tinha que ser 30 a dividir por 5, que ia dar 6, e 6 vezes o preço que tu querias ia dar o tempo."; "Podia ser o preço a dividir por 0,1(6), e ia dar o tempo."

4.2.2. Análise global da resolução da tarefa pela turma

Esta tarefa conta apenas com cinco abordagens distintas, dado que, devido à ausência casual de dois alunos pertencentes a um dos grupos, o elemento restante foi integrado noutro grupo de trabalho.

Pode-se concluir que as estratégias usadas para encontrar reposta à primeira questão "Será possível prever, com exatidão, o preço a pagar pelo aluguer das canoas, durante cinco horas, para cada uma das empresas? Justifica a tua resposta." foram, essencialmente, de natureza multiplicativa, distinguindo-se abordagens escalares e funcionais. Porém, durante a discussão coletiva, houve alunos que recorreram a estratégias aditivas de construção, para justificar os seus procedimentos e a existência ou ausência da relação de proporcionalidade direta. Os trechos, retirados dos diálogos, comprovam o recurso a estratégias *building-up*, de natureza aditiva.

> (…) 60 minutos mais 60 minutos dava 120 minutos, e 10€ mais 10€ dava 20 €, e aqui (voltando a indicar na tabela) no 180 minutos dava 28€ e para haver proporcionalidade direta tinha que ser 180 minutos 30€.
> (...) uma vai sempre somando 2,5; ...; 2,5 (...)
> Também se pode fazer 60+60; 60+60+60; 60+60+60+60, (...)(Grupo I)

Os procedimentos e as justificações que se seguem revelam a utilização, por parte dos grupos, de abordagens escalares, em que estabelecem relações entre quantidades da mesma natureza, que são em seguida aplicadas à outra variável.

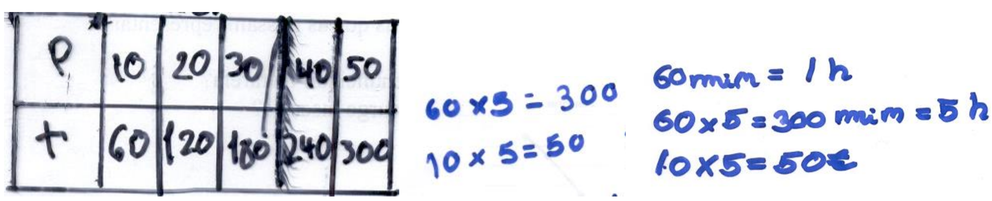


Figura 39 - Evidências do uso de estratégias multiplicativas de natureza escalar

> (...) 40 a dividir por 2 é 20 minutos e 5 a dividir por 2 é 2,5; (...) 20 minutos é igual a 2,5€, não dá (...)
> (...) 60 minutos é igual a uma hora, então a gente fizemos 60 minutos que é uma hora vezes 5 que deu 300 que é igual a 5 horas. Depois como multiplicamos os minutos por 5 também tínhamos que multiplicar o preço então fizemos 10€ vezes 5 que é igual a 50€ (...) (Grupo III)

Este grupo, após verificar a existência de proporcionalidade direta na empresa Momentos de Aventura, calcula, através da seguinte expressão numérica, o custo de 5 horas de aluguer, empregando procedimentos multiplicativos funcionais.

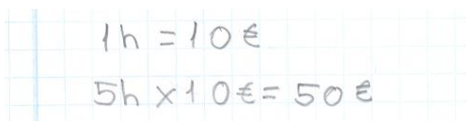


Figura 40 - Evidências do uso de estratégias funcionais

Para verificar a existência de proporcionalidade direta, este grupo, efetua o quociente entre o tempo e o respetivo custo, em cada uma das empresas, usando, igualmente, um procedimento funcional.

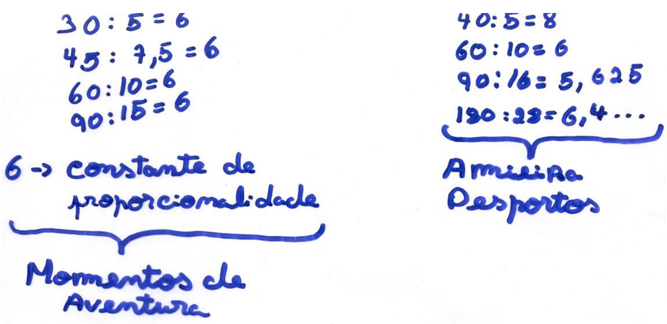


Figura 41 - Evidências do uso de estratégias funcionais

Os procedimentos sofisticados, empregues por este grupo, têm sempre inerentes abordagens funcionais.

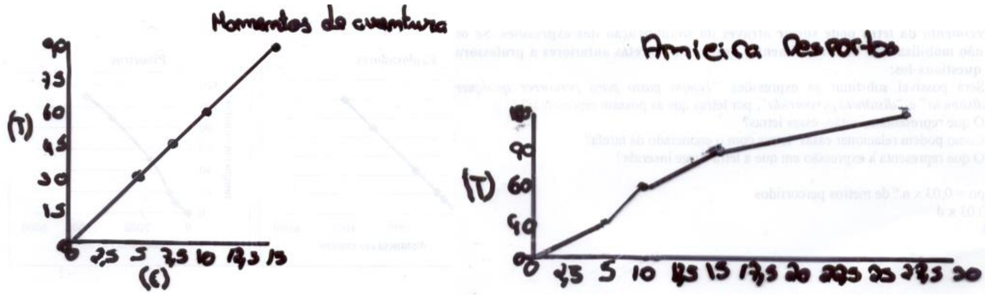


Figura 42 - Evidências do recurso à representação gráfica

O Grupo V apresenta, em seguida, a leitura dos gráficos, onde verifica a relação de proporcionalidade direta.

> "(...) fizemos os dados, os euros e o tempo, fizemos os pontinhos e depois ligamos e vimos que este aqui (apontando para o gráfico da empresa Momentos de Aventura) fazia uma reta, então dava uma sequência, podíamos prever outros tempos e outros custos. Depois aqui, na Amieira Desportos, fizemos a mesma coisa, só que os pontos não estavam em linha reta, então não dava para prever nenhum tempo nem nenhum custo."

Ao tentar encontrar uma resposta à questão colocada pelo André, João antecipa a generalização, a partir do gráfico que representa a relação entre o preço e o tempo, na empresa Momentos de Aventura, onde se verifica a existência de proporcionalidade direta.

André– Posso fazer uma questão? E se houvesse um milhão e não sei quantos mil euros e quisesses saber os minutos, não podias ir de 2,5 em 2,5...
João (elemento do grupo) – (após uma pausa) ... ah! dividíamos um milhão e não sei quantos mil por 2,5, dava um número, e depois era só multiplicar esse número por 15...

A estratégia usada, pelo mesmo grupo, para prever o custo de 5 horas de aluguer também envolve procedimentos funcionais.

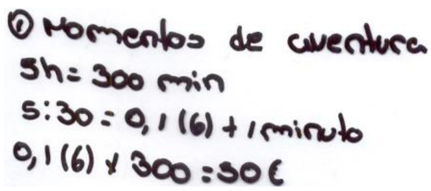


Figura 43 - Evidências do uso de estratégias funcionais

A representação da generalização assume nesta tarefa um caráter mais formal, tendo três dos cinco grupos utilizado a expressão algébrica e reconhecido que a regra só se podia aplicar à empresa Momentos de Aventura, onde identificaram a relação de proporcionalidade direta.

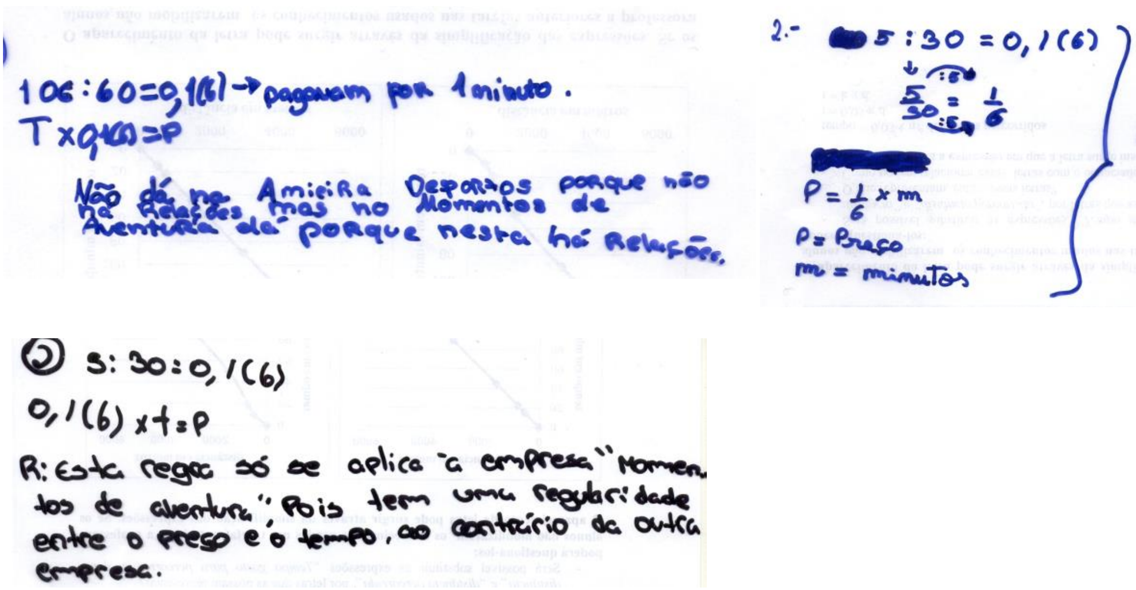
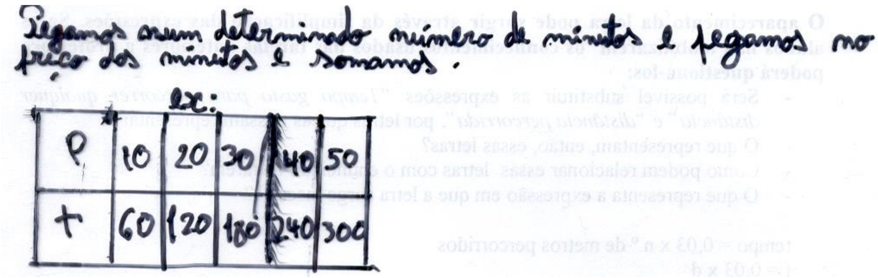


Figura 44 - Evidências do uso da expressão algébrica na expressão da generalização

O Grupo I procura expressar a generalização através da linguagem natural e de uma tabela, onde estabelecem relações entre o preço e o tempo.



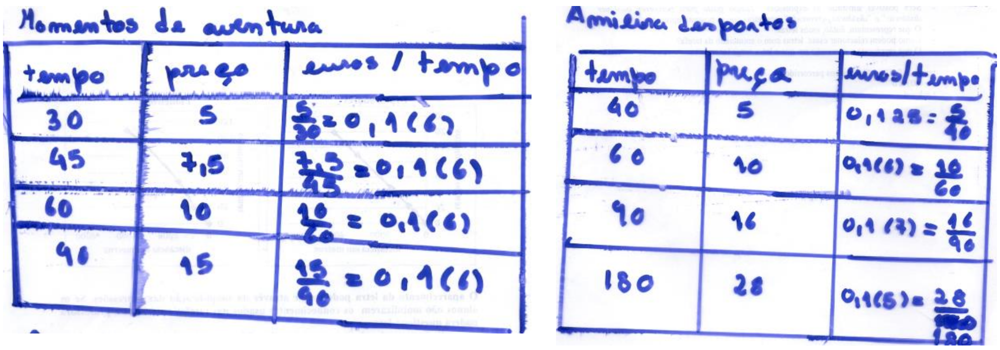
P	10	20	30	40	50
t	60	120	180	240	300

Figura 45 - Evidências do uso da linguagem natural e da tabela na tentativa de expressão da regra

A justificação dos procedimentos revela a intenção de utilizar uma estratégia recursiva.

> Também se pode fazer 60+60; 60+60+60; 60+60+60+60, ...
> ...como fizemos lá em cima (referindo-se à tabela) ”
> Também podíamos olhar para a tabela desde o princípio e irmos continuando...

Na tentativa de expressar a generalização, estes alunos estabeleceram relações multiplicativas, entre o preço e o tempo, em cada uma das empresas, o que lhes permitiu identificar a relação de proporcionalidade direta na empresa Momentos de Aventura, onde o quociente entre as variáveis é um valor constante. Contudo, não retiraram partido suficiente da situação, uma vez que não conseguiram formular a regra.



tempo	preço	euros / tempo
30	5	$\frac{5}{30}=0,1(6)$
45	7,5	$\frac{7,5}{45}=0,1(6)$
60	10	$\frac{10}{60}=0,1(6)$
90	15	$\frac{15}{90}=0,1(6)$

tempo	preço	euros/tempo
40	5	$0,125=\frac{5}{40}$
60	10	$0,1(6)=\frac{10}{60}$
90	16	$0,1(7)=\frac{16}{90}$
180	28	$0,1(5)=\frac{28}{180}$

Figura 46 - Evidências do uso de tabelas na procura de regularidades

É possível concluir que todos os grupos identificaram a existência de proporcionalidade direta na empresa Momentos de Aventura, utilizando estratégias, na sua maioria, de natureza multiplicativa. Contudo, o grupo II considerou ser possível fazer uma previsão do custo de 5 horas de aluguer para ambas as empresas, tendo só posteriormente investigado as relações entre as variáveis. Destaca-se ainda o facto de quatro dos cinco grupos terem determinado a constante de proporcionalidade, e de três deles lhe terem atribuído significado, utilizando em seguida esse valor para formular a regra. À semelhança do que sucedeu na tarefa anterior a regra não surge privada de significado, uma vez que os alunos atribuem sentido às letras e à própria expressão, relacionando-as com o contexto da situação proposta. Os excertos retirados dos diálogos que ocorreram nos momentos da discussão coletiva, comprovam a afirmação anterior, e permitem inferir que os alunos olham as letras como variável, uma vez que julgam poder atribuir-lhes qualquer valor e as usam para descrever relações entre as duas variáveis em causa.

Grupo III

Rui (elemento do grupo) – (...) fizemos o preço a dividir pelos minutos que dava o preço de um minuto, nos Momentos de Aventura, porque na Amieira Desportos não havia relação, então não dava para ver (...) como 5 : 30 = $\frac{5}{30}$ ...
Marta (elemento do grupo) –... nós passamos para fração para achar o número exato $\frac{1}{6}$
(...)
Gil (elemento do grupo) -... o P é o preço que é igual a $\frac{1}{6} \times m$, que são os minutos...
Rui (elemento do grupo) -... isto (indica o m) é os minutos que queremos, $\frac{1}{6}$ é o preço de um minuto, se queremos andar 100 minutos fazemos $\frac{1}{6} \times 100$

Grupo IV

Maria (elemento do grupo) – (...) então fizemos o tempo vezes o que pagavam por um minuto e dava o preço de qualquer número de minutos.

Grupo V

Matilde (elemento do grupo) – Nós multiplicávamos o preço de um minuto vezes o tempo que nos pediam, que nos ia dar o preço que nós pagávamos.
(...)
André – E se quisermos saber o tempo?

João (elemento do grupo) – Não podia ser assim, tinha que ser 30 a dividir por 5, que ia dar 6, e 6 vezes o preço que tu querias ia dar o tempo.
Professora – E usando este valor (indiquei-lhes o valor 0,1(6)) seria possível determinar o tempo?
André – Eu acho que sim...
Matilde (elemento do grupo) – Podia ser o preço a dividir por 0,1(6), e ia dar o tempo.

Sublinha-se a importância dos momentos de discussão coletiva que propiciaram o confronto de ideias, reflexões sobre o significado dos conceitos de proporcionalidade direta e constante de proporcionalidade, e dar sentido às letras e às expressões algébricas.

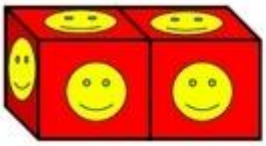
4.3. Análise da tarefa "Um jogo com cubos e autocolantes"

Esta tarefa corresponde à oitava da sequência realizada (Anexo H). Na sua realização pela turma foi utilizado um bloco de 100 minutos, cumprindo, deste modo, o tempo previsto na planificação.

No início da aula os alunos organizaram-se em grupos, mantendo a estrutura definida nas tarefas anteriores. Em seguida, projetei a tarefa no quadro e distribuí um exemplar por cada aluno, pedindo-lhes que procedessem a uma leitura individual e silenciosa, também lhes disponibilizei dois cubos e doze autocolantes, dando-lhes oportunidade de reconstruir a situação a três dimensões.

Um jogo com cubos e autocolantes

O grupo dos Pioneiros está a construir um jogo com cubos e autocolantes. Unem os cubos por uma das faces e formam filas de cubos. Depois colam um autocolante em cada uma das faces.
A imagem mostra a construção que fizeram com 2 cubos. Nessa construção usaram 10 autocolantes.



1. Descobre quantos autocolantes os Pioneiros usaram numa construção com: três cubos; quatro cubos; dez cubos; cinquenta e dois cubos.

2. Consegues descobrir qual é a regra que permite saber quantos autocolantes os Pioneiros usaram numa construção com um qualquer número de cubos? Explica como pensaste.

Figura 47 - Enunciado da tarefa "Um jogo com cubos e autocolantes"

Após a leitura, os alunos, solicitados por mim, recontaram a situação apresentada, exemplificaram, utilizando os cubos, levantaram e testaram hipóteses. O episódio que se segue teve lugar durante a fase de apresentação da tarefa:

> Enquanto um aluno reconta a situação apresentada na tarefa, dois alunos, solicitados por mim, colam os autocolantes nos dois cubos.
> **Bernardo** – Aqui diz que o Grupo dos Pioneiros está a construir um jogo com cubos e autocolantes, colocam os cubos em filas e têm que colar autocolantes em cada uma das faces, mesmo que estejam tapadas.
> **João** – Eu não entendi isso porque são 10 autocolantes e são 2 cubos, as faces que tiverem entre os 2 cubos não contam.
> **Professora** – Querem explicar aos colegas usando os cubos?
> **Bernardo** – (o aluno insiste) É em cada uma das faces...
> **Manel** – (com os cubos na mão e exemplificando a situação acrescenta) Tirando aquelas que se unem...
> **José** – (reforça a ideia) Em cada uma das faces visíveis.
> **Manel** – (utilizando os cubos, para exemplificar, continua a explicar o seu raciocínio) Os cubos estão assim na imagem (une os 2 cubos e mostra as 10 faces visíveis rodando os cubos) se fosse em todas as faces, tinham que estar nestas duas (mostra as duas faces não visíveis, onde não existem autocolantes) as faces que unem os 2 cubos não tinham autocolantes porque se tivessem autocolantes eram 6 faces em cada um e isso já dava 12.
> **Professora** – E então como é que fica?
> **José** – São 5 em cada.
> **Manel** – Assim ficam 5 em cada, que é 4 mais 1 do canto, e o mesmo neste (aponta para o outro cubo)...
> **José** – É 2 X 5
> **Manel** –... aqui (na tarefa) dizia que eles utilizaram 2 cubos e 10 autocolantes, por isso tinham que ter duas faces sem autocolantes.
> **Professora** – Querem colocar alguma questão ou acrescentar algo?
> **André** – Posso pedir os cubos ao Manel para explicar uma coisa ao Júlio? (com os cubos na mão começa a explicar ao Júlio, um dos seus colegas de grupo) o cubo tem seis faces (conta as faces uma a uma para reforçar a ideia) só que como uma não leva autocolantes tiramos uma e dá 5 e já sabemos que se calhar a soma de todos os cubos é um múltiplo de 5.
> **Bernardo** – É fazer o número de cubos que nos pedem vezes 5, se fossem 50 era 50 X 5.
> **Tó** – Não, fazemos 50 X 4 + 2, que são os dois das pontas (o aluno apresentou um raciocínio claro, contudo, nem todos os colegas pareciam ter compreendido)
> **Júlio** – Posso ir aí (coloca-se à frente dos colegas, com os cubos na mão, e começa a explicar) se tivéssemos 3 cubos, este também ficava tapado (indica a face não lateral) e o do meio ficava só com quatro autocolantes...
> **André** – No final têm que ficar dois dos lados (referindo-se aos dois autocolantes a colocar nas extremidades)

> **Júlio** – Faz de conta que estão aqui 5 cubos (pega nos cubos e afasta-os, deixando um espaço entre os dois que seria supostamente ocupado pelos restantes cubos) este está numa ponta e este está noutra e os que estão no meio só têm 4 autocolantes.
> **Bernardo** – Pois, porque ficam tapados pelos dois lados...
> **Rui** – Por exemplo podia haver 100 cubos, os da ponta têm sempre 5 (autocolantes), tirávamos os dois e ficava 98, e já tínhamos dez quadradinhos (referindo-se aos autocolantes) e depois fazíamos os 98 X 4, que são os do meio, e ia dar esse número mais 10.
> **Manel** – Pois os 2 cubos que estão nas pontas têm sempre 5 (autocolantes), começam e acabam a sequência, e os que estão no meio só têm 4.

Esta discussão foi muito útil para que todos conseguissem compreender a tarefa, contudo, talvez se tenha alongado demasiado, dado que os alunos começaram a antecipar generalizações, o que não previa que acontecesse neste momento da aula. Restava agora perceber como iriam representá-las e que significados atribuiriam às suas ações.

4.3.1. As produções dos alunos e a discussão coletiva

Após a fase de apresentação da tarefa, os grupos deram início à exploração, o que ocupou cerca de 20 minutos. Durante esta fase, os alunos dedicaram-se ao estudo de casos particulares e a partir destes, seguindo a estrutura sequencial das operações, que evidenciam a forma, abriram caminho à generalização. Kieran (2007), foca esses aspetos, reforçando a importância das ligações que se estabelecem entre a Aritmética e a Álgebra, no processo de generalização. Enquanto decorreu esta fase circulei pelos grupos, procurando estimular o diálogo no seio de cada grupo, pedindo-lhes que justificassem os seus procedimentos e colocando-lhes algumas questões que me pareceram convenientes, de modo a tentar aceder aos seus raciocínios.

- Como pensaram?
- O que sabem sobre a relação entre o número de cubos e o número de autocolantes?
- Como podem representar essa relação?

Grupo I

Este grupo considera que os cubos que ocupam os extremos têm 5 autocolantes cada um e repetem o mesmo procedimento (2 X 5 = 10) em todas as situações, inclusive quando procuram generalizar. De seguida, aquando do estudo dos casos particulares, para descobrir o número de autocolantes dos cubos que se encontram entre os dois que ocupam os extremos, procedem do seguinte modo: retiram dois cubos ao número total de cubos e efetuam, em seguida, o produto entre essa diferença e quatro. No final, para concluírem o raciocínio, ao produto obtido adicionam os 10 autocolantes, dos cubos que se encontram nas extremidades. Ao expressar a generalização procuraram seguir a estrutura sequencial das operações efetuadas durante o estudo dos casos particulares, contudo, desprezaram o facto de ser necessário retirar dois ao número total de cubos, dado que os dois cubos que ocupavam as extremidades já tinham sido considerados.

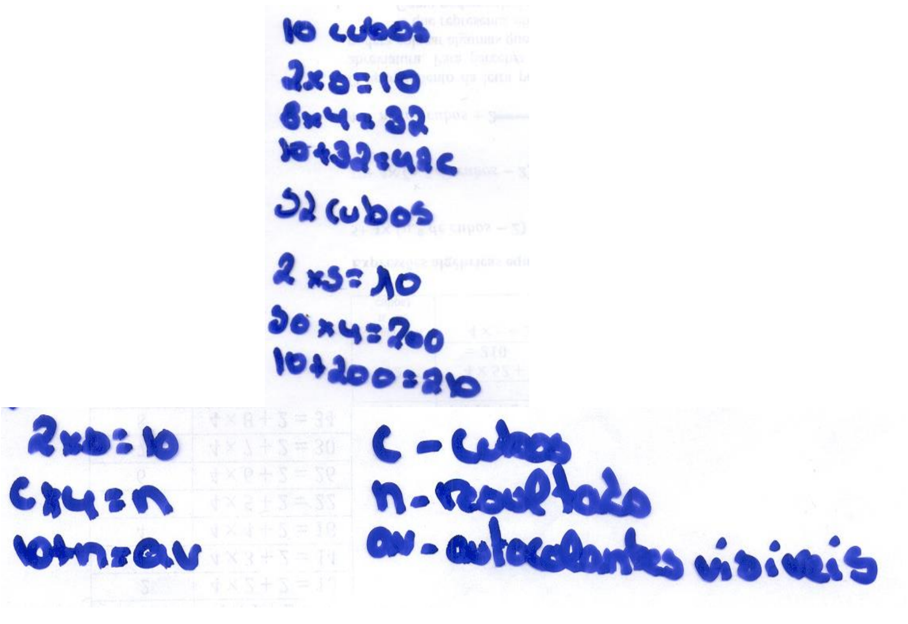


Figura 48 - Produções do Grupo I referentes à resolução da tarefa “Um jogo com cubos e autocolantes”

Dois alunos esclarecem os procedimentos utilizados pelo grupo.

Simão – Nós fizemos 2X5, porque na ponta estão sempre dois e têm 5 (autocolantes) e fizemos 1 X 4, porque está 1 no meio vezes os 4 (autocolantes).

Rui – É sempre assim os de cá (e aponta para os números dois e um) tinham que dar sempre o número que está aqui (número total de cubos) (...)
3 cubos, 2 x 5 = 10; 1 x 4 = 4, e 2 + 1 = 3
52 cubos, 2 x 5 = 10; 50 x 4 = 200, e 2 + 50 = 52
Simão – No 52 fizemos 2 x 5 e 50 x 4 e depois juntámos (referindo-se aos resultados das operações anteriores) e dava os 210.
Rui – E depois para saber a fórmula,...
Simão – (continuou) fizemos 2 x 5 que dava 10, e que era sempre o mesmo e depois fizemos os cubos vezes 4 que era o resultado.
Professora – Podem voltar a explicar os vossos procedimentos na questão dois?
Rui - (aponta para a expressão numérica, 2 x 5 = 10) é os da ponta que são sempre 5, (aponta em seguida para a expressão algébrica, c x 4 = n) e os do meio que são sempre 4
Simão – Aqui (aponta para a expressão algébrica, c x 4 = n) fizemos cubos (c) vezes quatro, porque os que estão no meio nunca se sabe o número certo e depois (10 + n = av), dez mais o resultado dava os autocolantes visíveis.

Durante a apresentação dos resultados deste grupo, os restantes elementos da turma não manifestaram a sua descrença relativamente à forma como o grupo apresentou a generalização. O grupo ignora, ao contrário do que tinha feito no estudo dos casos particulares, o facto de ter de retirar os dois cubos das extremidades, quando efetua o produto por quatro.

Grupo II

Este grupo utiliza uma estratégia semelhante ao grupo anterior no estudo de casos particulares, com a variante de somar o número de autocolantes dos dois cubos das extremidades, ao invés de fazer o produto do número de autocolantes de um deles por dois. A regra tem por base as expressões numéricas utilizadas no estudo dos casos particulares, embora surja expressa de forma incompleta dado que o resultado final não contempla os autocolantes dos cubos que se encontram nas extremidades.

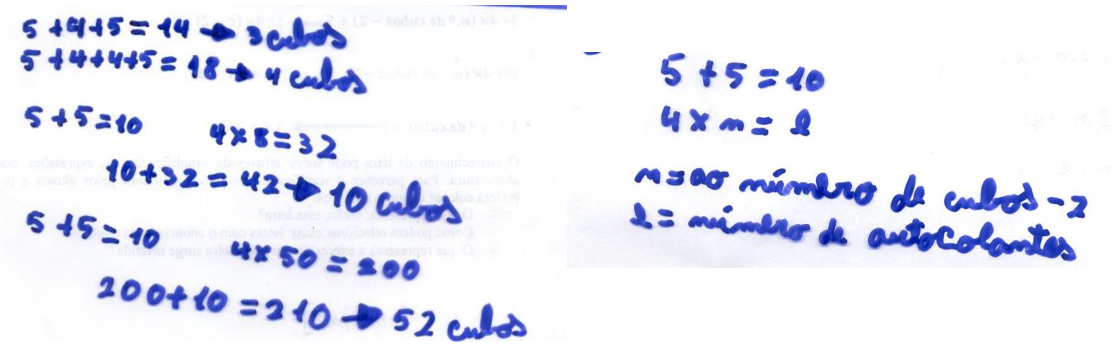


Figura 49 - Produções do Grupo II referentes à resolução da tarefa “Um jogo com cubos e autocolantes”

O episódio seguinte ajudou a esclarecer alguns aspetos e motivou o aparecimento de outra expressão que possibilita expressar a generalização.

> **Júlio** – Nós da de cima fizemos: 5 + 4 +5, eram os 3 cubos e como eu tinha explicado (referindo-se à sua explicação, aquando da apresentação da tarefa), os que estavam no meio tinham sempre 4, portanto os 3 cubos tinham 14 autocolantes, (...), para saber quantos autocolantes tinha o décimo cubo fizemos 5 +5 que deu 10, que eram os das pontas, e 4 X 8 que eram 32, o 8 era o número de cubos que estavam no meio e 4 era o número de autocolantes que cada cubo tinha, e depois fixemos 10 + 32 = 42. (...)
> **André** – Depois aqui (referindo-se à regra) fizemos da mesma maneira, 5 + 5 = 10, e 4 × n, “n” é o número de cubos menos 2, porque tirámos os 2 das pontas e o “e” é o número de autocolantes.
> **(...)**
> **Júlio** – (reforça acrescentando) O “n” corresponde ao número de cubos que estava no meio e fizemos vezes 4, porque é o número de autocolantes de cada cubo que está no meio.
> **Professora** – O André, apesar de ter estado a trabalhar com o grupo encontrou uma estratégia diferente que quer partilhar connosco.
> **Carlos** – (pede a colaboração dos colegas) Digam lá aí um número. (os colegas dão várias sugestões e ele resolve escolher o número 123, em seguida volta a questionar os colegas) O cubo tem quantas faces? (os colegas dão-lhe a resposta esperada e posteriormente começa a fazer os registos no quadro e a explicar os procedimentos que adota).
>
> $$123 \times 6 = 738$$
> $$123 - 1 = 122$$
>
> Eu fiz menos 1, porque se nós repararmos, entre 5 cubos por exemplo há quatro sítios em que se juntam, (faz um desenho pois os colegas parecem não estar a compreender a sua estratégia). Portanto há 5 cubos e quatro locais em que se unem, o que dá 8 faces invisíveis, porque entre dois cubos há sempre duas faces invisíveis.

(em seguida continua a explicação) Depois faço: $122 \times 2 = 244$, e já está. (volta a deixar o procedimento incompleto, contudo, a intervenção oportuna de outro colega teve repercussões positivas)
João – Agora á fácil é: $738 - 244 = 494$
André – Agora faz lá da tua maneira (solicita ao colega da grupo)
(Júlio reproduz no quadro a estratégia utilizada pelo grupo para o mesmo número de cubos escolhido pelo André)

$$5 + 5 = 10$$
$$121 \times 4 = 484$$
$$484 + 10 = 494$$

Professora – E se em vez de termos 123 cubos tivéssemos um número qualquer, como poderíamos generalizar?
André – Fazíamos: $n \times 6 = e$, depois do "n" que é um número qualquer tenho que ver o número anterior que é: $n - 1$, depois fazemos $n - 1 \times 2 = d$ e $e\text{-}d = c$

$$n \times 6 = e$$
$$(n\text{-}1) \times 2 = d$$
$$e\text{-}d = c$$

O raciocínio do aluno poderia ser traduzido na seguinte expressão:

$$6 \times n\text{-}[(n\text{-}1) \times 2]$$

A discussão teve resultados surpreendentes, dado que fez emergir outro modo de olhar a situação. Destaca-se ainda o facto dos alunos optarem pela escolha dos números para provar as suas conjeturas, contudo, o recurso às letras surge naturalmente quando lhes é pedido que generalizem. As ligações que estabelecem entre a Aritmética e a Álgebra são notórias, dado que as expressões algébricas mantêm a mesma estrutura das expressões numéricas usadas no estudo de casos particulares.

Grupo III

O raciocínio usado pelos alunos deste grupo, não se distancia muito do que foi utilizado pelos dois grupos anteriores. Os alunos consideram que os cubos que se encontram nas extremidades possuem 5 autocolantes cada um e, que os que se situam entre os extremos possuem 4, contudo, conseguem reunir numa única expressão o seu raciocínio, ao contrário do que sucedeu nos grupos anteriores. No estudo de casos particulares, quando o número de cubos é três ou quatro, a expressão numérica mantém a estrutura apresentada pelos cubos. Quando o número de cubos aumenta evidencia-se um abandono dos procedimentos aditivos e a adoção de explorações de natureza multiplicativa. A expressão algébrica nasce claramente a partir das expressões numéricas, mantendo uma estrutura idêntica às que foram utilizadas para calcular o número de autocolantes de 10 e 52 cubos.

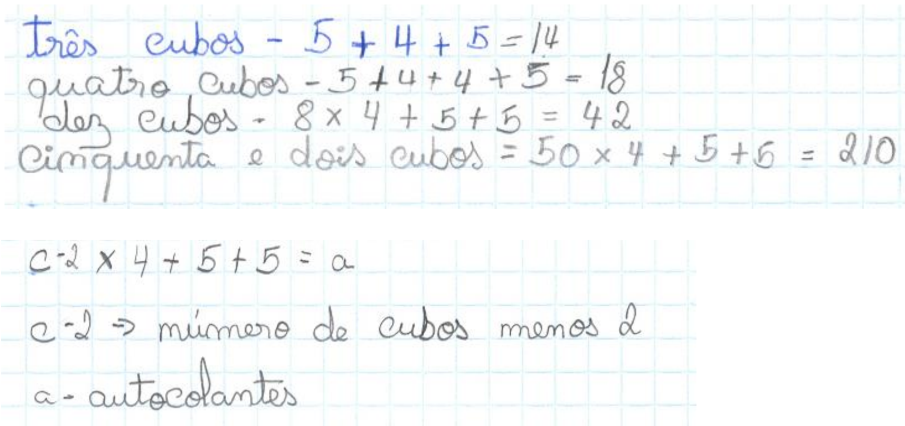


Figura 50 - Produções do Grupo III referentes à resolução da tarefa "Um jogo com cubos e autocolantes"

Grupo IV

A representação icónica da situação no início da exploração da tarefa, serviu, de algum modo, de suporte à exploração que os alunos apresentam da tarefa, dado que, quer as expressões numéricas usadas no estudo de casos particulares, quer a expressão algébrica, usada na generalização, mantêm uma estrutura fiel a essa representação. Destaca-se ainda o facto da necessidade que os alunos sentiram em utilizar o número mil para generalizar e confirmar as suas conjeturas, antes de recorrer à expressão algébrica.

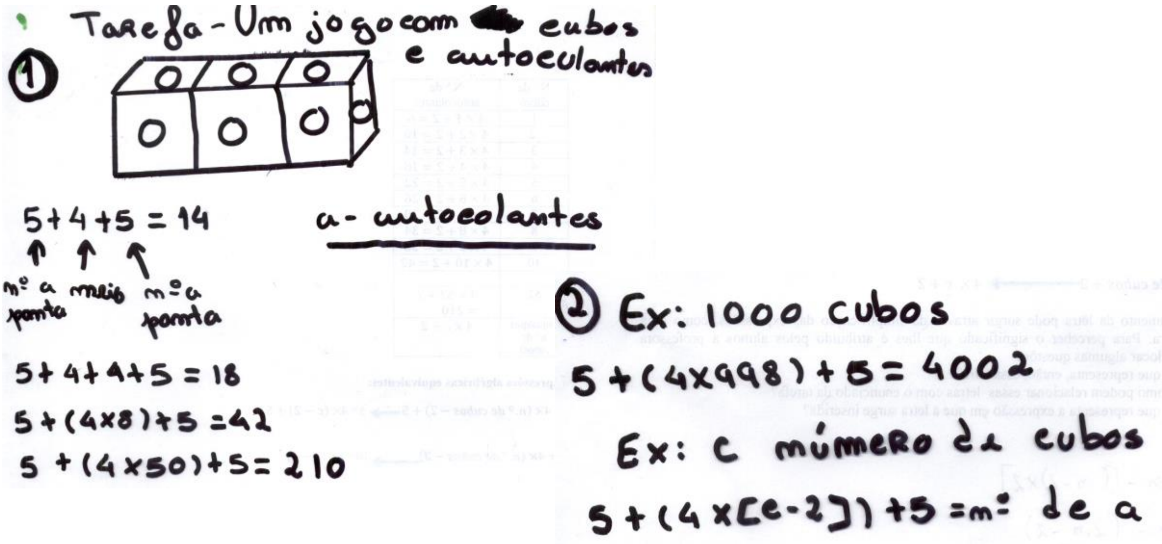


Figura 51 - Produções do Grupo IV referentes à resolução da tarefa "Um jogo com cubos e autocolantes"

O episódio seguinte conta com as explicações dos procedimentos por parte dos elementos do grupo e com a intervenção de outro aluno, não pertencente ao grupo.

> **Manel** – (lê o enunciado da primeira questão da tarefa e em seguida justifica os procedimentos adotados) Nós para 3 cubos, desenhámos os 3 cubos e vimos que o primeiro cubo e o último tinham 5 (autocolantes) e os 4 era o do meio (durante a explicação o aluno vai estabelecendo ligações entre a representação dos cubos, que o grupo apresenta no acetado, e as expressões numéricas que usaram no estudo de casos particulares). Para os 4 cubos fizemos 5+4+4+5, mas também dava para fazer $5 + 4 \times 2 + 5$; nos 10 cubos fizemos: $5 + (4 \times 8) + 5$, que era para não estarmos a repetir o 4, e deu-nos 42; (...)
>
> **José** – Na dois demos um exemplo com 1000 cubos (...) (explica os procedimentos através da leitura da expressão numérica)
>
> **Ana** – Depois fizemos os 5 da ponta mais $4 \times (c - 2)$ mais os outros 5, e deu-nos o número de autocolantes (acrescenta, em seguida) o **c-2**, (indica para o 998) é como se fosse isto.
>
> **Tino** – Não percebi bem o **c-2**...
>
> **Manel** – (indicando para a expressão algébrica explica) 5 +5 já fazia os dois cubos das pontas, mas como não tínhamos o número exato tivemos que colocar o "*c*" e tirar esses 2.
>
> **Bernardo** – Posso dar uma sugestão? No 1000 podiam fazer: $4 \times (1000 - 2)$, para sabermos como é que aí chegaram (referindo-se ao **c-2**); (reforça a ideia) temos aí 4×998, mas para sabermos como é que chegaram ao 998, podem meter aí, $4 \times (1000 - 2)$.

Da discussão, sobressai a dúvida que se levantou em torno da expressão, c-2, e a intervenção pertinente de um aluno, não pertencente ao grupo, que estabelece conexões entre a expressão algébrica e a expressão numérica, utilizada como exemplo pelo grupo.

Grupo V

Este grupo fez uma interpretação diferente da situação. Considerou as quatro faces laterais visíveis de cada um dos cubos, e adicionou posteriormente os dois autocolantes das extremidades. A generalização é expressa de forma clara e com ligações evidentes ao contexto da situação apresentada e às expressões numéricas usadas para determinar o número de autocolantes em situações particulares, contudo, não mantêm a mesma estrutura, dado que os alunos recorrem a duas expressões para concluir o seu raciocínio, no estudo de casos particulares, e expressam a generalização através de uma única expressão.

$3 \times 4 = 12$
$12 + 2 = 14$
$4 \times 4 = 16$
$16 + 2 = 18$
$10 \times 4 = 40$
$40 + 2 = 42$
$52 \times 4 = 208$
$208 + 2 = 210$

O nº de cubos × 4 faces + 2 laterais = nº de autocolantes nas faces que estão á vista.

Figura 52 - Produções do Grupo V referentes à resolução da tarefa "Um jogo com cubos e autocolantes"

As explicações dos alunos não acrescentam aspetos significativos ao trabalho escrito e não foram motivo de discussão no seio do grupo/turma.

> **Tó** – Vimos que na figura (indica para a imagem apresentada na tarefa) eram os 2 cubos vezes 4, mais os dois laterais, então fizemos: $3 \times 4 = 12$, mais os 2 laterais, dava 14, (...)
> **Inês** – Para sabermos o número de autocolantes para um número qualquer de cubos, fizemos o número de cubos, vezes as 4 faces, mais as 2 laterais, que ia dar o número de autocolantes nas faces que estão á vista.

Grupo VI

O ponto de vista deste grupo converge com o do anterior, dado que interpretam a situação da mesma forma. Contudo, destacam-se algumas diferenças: o uso, desde o início do estudo de casos particulares, de expressões numéricas com a mesma estrutura que irão originar a expressão algébrica simplificada com que representam a generalização, $4 \times nc + 2 = na$; o uso das letras como abreviaturas das expressões, número de cubos “nc”, e número de autocolantes “na”, confere uma ligação ao contexto e simultaneamente empresta outro formalismo à representação.

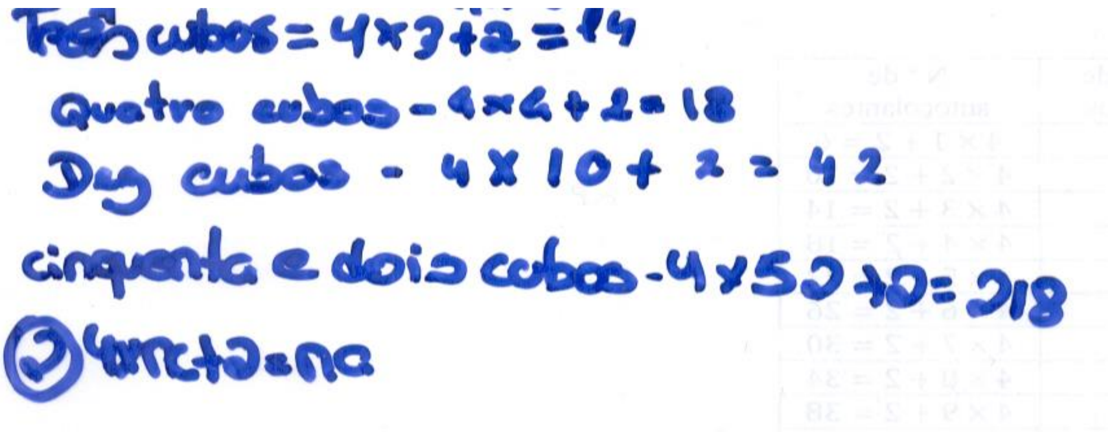


Figura 53 - Produções do Grupo VI referentes à resolução da tarefa “Um jogo com cubos e autocolantes”

Os procedimentos são explicados pelos elementos do grupo.

João – Na um para os 3 cubos fizemos: $4 \times 3 + 2$, que deu 14, são os 4 autocolantes que estão à volta dos cubos, vezes 3, porque eram 3 cubos, mais 2 que eram os (autocolantes) das pontas. (...) para os 52 cubos, $4 \times 52 + 2$, 4 à volta do cubo, vezes 52 cubos, mais 2, deu-nos 210, aqui temos um engano não era 218 é 210.
Maria – Aqui (indica para a expressão algébrica) fizemos 4, que eram os 4 que estavam à volta, vezes o número de cubos, mais os dois das pontas.
Matilde – (estabelece relações entre as letras utilizadas e o contexto da situação) “nc”, significa número de cubos e “na”, número de autocolantes.

4.3.2. Análise global da resolução da tarefa pela turma

A possibilidade que foi dada aos alunos de testar a situação apresentada, manipulando os cubos, e a discussão que se gerou, em torno da tarefa, durante a fase de apresentação, permitiu dissipar dúvidas e desenvolver raciocínios, contribuindo para uma abordagem diversificada.

> (utilizando os cubos, para exemplificar, continua a explicar o seu raciocínio) os cubos estão assim na imagem (une os 2 cubos e mostra as 10 faces visíveis rodando os cubos) se fosse em todas as faces, tinham que estar nestas duas (mostra as duas faces não visíveis, onde não existem autocolantes) as faces que unem os 2 cubos não tinham autocolantes porque se tivessem autocolantes eram 6 faces em cada um e isso já dava 12 (Manel)
>
> Faz de conta que estão aqui 5 cubos (pega nos cubos e afasta-os, deixando um espaço entre os dois que seria supostamente ocupado pelos restantes cubos) este está num a ponta e este está noutra e os que estão no meio só têm 4 autocolantes (Júlio)

Verificou-se que todos os grupos utilizaram expressões numéricas no estudo de casos particulares e expressões algébricas para representar a generalização. O estabelecimento de pontes entre a Aritmética e a Álgebra foi notório, dado que as expressões algébricas, na maioria dos casos, mantêm uma estrutura idêntica às expressões numéricas, usadas no estudo de situações particulares.

5 + (4x998) + 5 = 4002	5 + (4 x[e-2]) +5 = nº de a
4 X 10 + 2 = 42	[illegible]

Figura 54 - Evidências de pontes que se estabelecem entre a Aritmética e a Álgebra

Nos casos em que os alunos recorreram a uma sequência de expressões para representar o seu raciocínio, verificou-se a mesma tendência, dado que se mantém a estrutura sequencial das operações geradas a partir do estudo de casos particulares, que evidenciam a forma, abrindo caminhos à generalização, tal como afirma Kieran (2007).

$2 \times 5 = 10$ $50 \times 4 = 200$ $10 + 200 = 210$	2x5=10 Cx4=n 10+n=av
$5 + 5 = 10$ $4 \times 8 = 32$ $10 + 32 = 42$	5+5=10 4xm= l m= ao número de cubos -2 l= número de autocolantes
$123 \times 6 = 738$ $123 - 1 = 122$ $122 \times 2 = 244$ $738 - 244 = 494$	n×6=e (n-1)×2=d e-d=c

Figura 55 - Evidências da identidade entre a estrutura sequencial das expressões numéricas e algébricas

Em três dos seis grupos, a estratégia usada inicialmente no estudo de casos particulares para um número restrito de cubos, foi de natureza aditiva e manteve a estrutura da sequência dos cubos (5+4+5), contudo, verificou-se que à medida que o número de cubos aumenta os alunos têm tendência em abandonar essas estratégias e em adotar procedimentos multiplicativos, a partir dos quais geram a expressão algébrica.

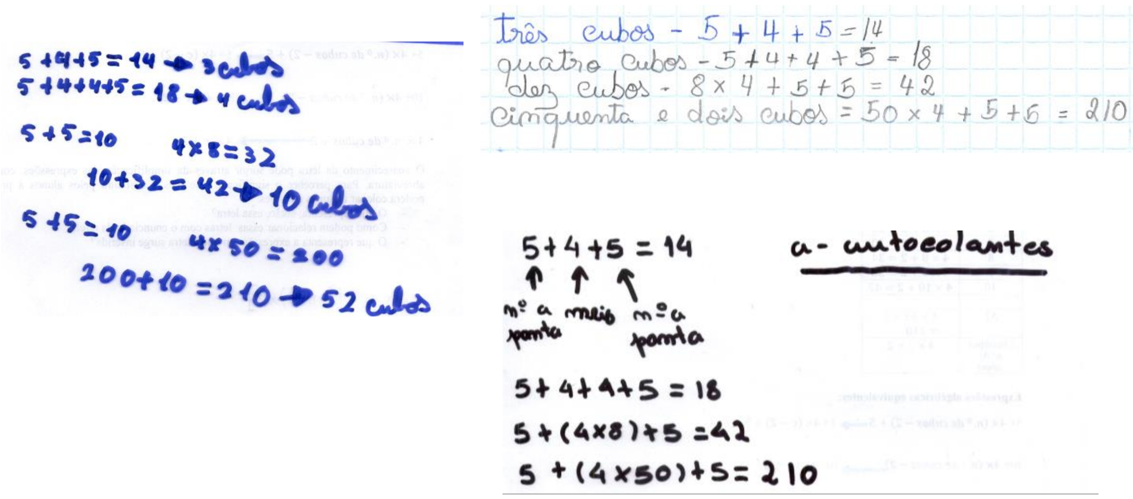


Figura 56 - Evidências do abandono de estratégias aditivas e da adoção de estratégias multiplicativas

A situação apresentada na tarefa sofre três interpretações distintas, gerando expressões algébricas que demonstram diferentes pontos de vista. A utilização da linguagem natural e a oportunidade de voltar a manipular os cubos, para explicar os seus raciocínios permitiu atribuir significado às suas ações. As representações ativas, baseadas na manipulação dos cubos, funcionaram como um complemento importante, preenchendo lacunas vocabulares e emprestando outra dinâmica aos momentos de comunicação.

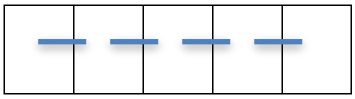
- Consideram que os cubos que ocupam as extremidades possuem 5 autocolantes cada um e que os cubos que se situam entre os extremos possuem 4;

Figura 57 - Expressão algébrica utilizada por um dos grupos para expressar a generalização

- À totalidade das faces, retiram as duas faces ocultas que se encontram entre dois cubos;

> Eu fiz menos 1, porque se nós repararmos, entre 5 cubos por exemplo há quatro sítios em que se juntam, (faz um desenho pois os colegas parecem não estar a compreender a sua estratégia). Portanto há 5 cubos e quatro locais em que se

unem, o que dá 8 faces invisíveis, porque entre dois cubos há sempre duas faces invisíveis (André)



$$n \times 6 = e$$

$$(n-1) \times 2 = d$$

$$e - d = c$$

$$6 \times n - [(n-1) \times 2]$$

Figura 58 - Expressão algébrica exemplificada por um aluno para expressar a generalização

- Consideram as quatro faces laterais visíveis, de cada um dos cubos, e adicionam posteriormente os dois autocolantes das extremidades.

Figura 59 - Expressão algébrica utilizada por outro grupo para expressar a generalização

A relação entre as duas variáveis, número de cubos e número de autocolantes, é usada nas expressões numéricas, quando procuram descobrir o número de autocolantes num número conhecido de cubos e encontra-se explícita em algumas expressões algébricas usadas pelos alunos para representar a generalização. Às letras é atribuído o significado de variável, dado que são vistas pelos alunos, como representantes de qualquer valor, permitindo determinar o número de autocolantes para qualquer número de cubos.

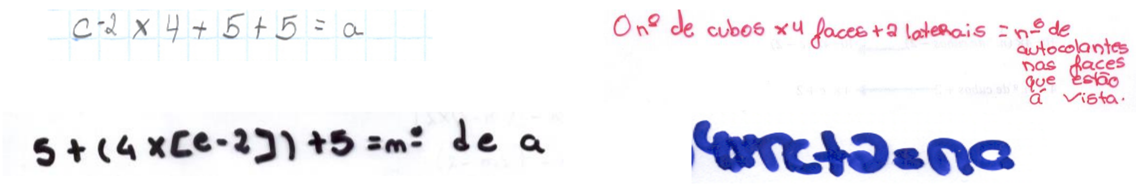


Figura 60 - Evidências das expressões algébricas usadas para expressar a generalização e da ligação que as letras mantêm ao contexto da situação, surgindo como abreviaturas

Não estava inicialmente previsto que os alunos verbalizassem antecipadamente a generalização na fase de apresentação da tarefa, tal como o fizeram, contudo, os contributos prestados foram determinantes para o sucesso na tarefa, assim como todos os momentos de comunicação, que possibilitaram explicitar procedimentos e atribuir significado às letras e às expressões algébricas.

> Não, fazemos 50 X 4 + 2, que são os dois das pontas (Tó)
> Por exemplo podia haver 100 cubos, os da ponta têm sempre 5 (autocolantes), tirávamos os dois e ficava 98, e já tínhamos dez quadradinhos (referindo-se aos autocolantes) e depois fazíamos os 98 X 4, que são os do meio, e ia dar esse número mais 10 (Rui)
> Pois os 2 cubos que estão nas pontas têm sempre 5 (autocolantes), começam e acabam a sequência, e os que estão no meio só têm 4 (Manel)

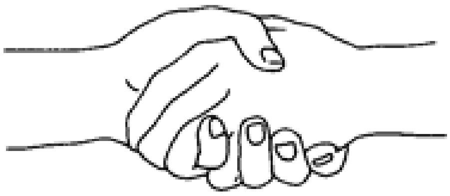
4.4. Análise da tarefa "A hora da despedida..."

Esta tarefa corresponde à décima segunda da sequência realizada (Anexo L). Na realização desta tarefa pela turma, à semelhança do que sucedeu com outras, excedeu-se o tempo inicialmente previsto de 100 minutos, tendo sido necessário utilizar mais meio bloco para a sua conclusão. Os motivos do incumprimento prendem-se, novamente, com o facto de terem existido momentos de discussão muito participados.

No início da aula, os alunos organizaram-se em grupos mantendo a estrutura já definida. Em seguida, e adotando procedimentos similares aos que tinha empregue nas tarefas anteriores, projetei a tarefa no quadro e distribuí um exemplar por cada aluno, pedindo-lhes que procedessem a uma leitura individual e silenciosa.

A hora da despedida...

Prestes a terminarem esta maravilhosa aventura, em que se viveram momentos bem passados, se ultrapassara desafios e em que a amizade e a solidariedade estiveram sempre presentes, eis que chega a hora da despedida em que todos se cumprimentam como é habitual entre os escuteiros, apertando a mão esquerda, entrelaçando os dedos mindinhos, e deixando assim a mão direita livre para a saudação.
O cumprimento é feito com a mão esquerda porque é a mão do lado do coração, que é o símbolo da amizade. O dedos mindinhos entrelaçados permitem um aperto de mão mais forte, sinal de maior união, e simbolizam um abraço trocado entre escuteiros, como sinal de profunda amizade.



1. Considerando que todos se cumprimentaram entre si, os 30 escuteiros e o respetivo chefe, quantos apertos de mão houve no total?

2. Consegues encontrar um processo que nos indique o número total de cumprimentos para qualquer número de escuteiros que pudesse estar no acampamento? Explica-o.

Figura 61 - Enunciado da tarefa "A hora da despedida"

Após a leitura, os alunos solicitados por mim, recontaram a situação apresentada e, em seguida, exemplificaram o cumprimento explicitando o seu significado. Findo este momento inicial, convidei alguns escuteiros a simular o acontecimento. Assim, os alunos tiveram oportunidade de verificar o que sucedia, efetuando a contagem do número de cumprimentos que ocorriam na presença de um, dois, três, quatro, cinco e seis escuteiros, dado que, à medida que um novo elemento se juntava ao grupo, todos se voltavam a cumprimentar entre si, mantendo-se organizados em fila. A disposição adotada facilitou a compreensão da situação, uma vez que o escuteiro que chega de novo, cumprimenta todos os outros posicionando-se, posteriormente, no final da fila, só depois avança o escuteiro que se encontra na outra extremidade para cumprimentar os restantes, e o processo continua até todos se cumprimentarem entre si. Esta organização foi sugerida por mim, dado que os procedimentos arbitrários que adotaram de início foram pouco conclusivos.

4.4.1. As produções dos alunos e a discussão coletiva

A exploração da tarefa ocupou cerca de 30 minutos. Durante esta fase, os alunos dedicaram-se ao estudo de casos particulares, procurando estabelecer relações entre as duas variáveis em causa, o número de escuteiros e o número de cumprimentos, o que lhes possibilitou, em seguida, trilhar caminhos para a generalização. Enquanto decorreu esta fase circulei pelos grupos, procurando estimular o diálogo no seio de cada grupo, pedindo-lhes que justificassem os seus procedimentos e colocando-lhes questões, que os focassem, não apenas na situação em si mesma, mas também nos procedimentos que adotaram e nos padrões que detetaram.

- O que sabem sobre a relação entre o número de escuteiros e o número de apertos de mão?
- Será possível descobrir outras relações, em que não seja necessário recorrer ao termo anterior ou à soma? Uma relação que nos permitisse determinar o número de cumprimentos, se tivéssemos um grupo de 100 ou até de 1000 escuteiros?
- Será possível obter o n.º de cumprimentos a partir do n.º de escuteiros, indicados na coluna da esquerda?
- Como podem representar essa relação?

Grupo I

Este primeiro grupo registou o número de cumprimentos de forma sistemática, adicionando o número de saudações efetuadas por cada membro do grupo. A dramatização da situação, ocorrida no momento de apresentação da tarefa, inspirou os procedimentos.

31:30

30+29+28+27+26+25+24+23+22+21+20+19+
18+17+16+15+14+13+12+11+10+9+8+7+6+5+4+
3+2+1=465 c

Figura 62 - Produções do Grupo I referentes à resolução da primeira questão da tarefa "A hora da despedida"

No episódio seguinte os alunos justificam os seus procedimentos e contam com a participação de outros elementos da turma.

> **Júlio** (elemento do grupo) – Nós na primeira reparámos qua cada escuteiro, (corrige em seguida) o número 31 dava 30 cumprimentos, porque se tivesse assim, uma fila de 30, eu ia passando e ia dando cumprimentos (referindo-se à situação que tinha sido dramatizada) depois o 30 dava 29, (...)
> **André** (elemento do grupo) – (procura esclarecer a situação, no que se refere ao emprego dos números) ... por exemplo a professora é a chefe que é o número 31, agente em vez de dar nomes, demos números, como num jogo de futebol.
> **(...)**
> **Manel** – André, 30 é o número de cumprimentos que o chefe dá, 29 é o número de cumprimentos que um escuteiro dá, 28 é o número de cumprimentos que outro escuteiro dá, ...
> **(**...)

Para expressar a generalização, os alunos recorrem ao termo geral, inspirando-se na expressão numérica utilizada na questão anterior para determinar o número total de cumprimentos que ocorreram na hora da despedida, entre os 30 escuteiros e o chefe. Assim, este grupo considera que é possível determinar o número total de cumprimentos adicionando todos os números, a partir do número anterior ao número de escuteiros até ao número um.

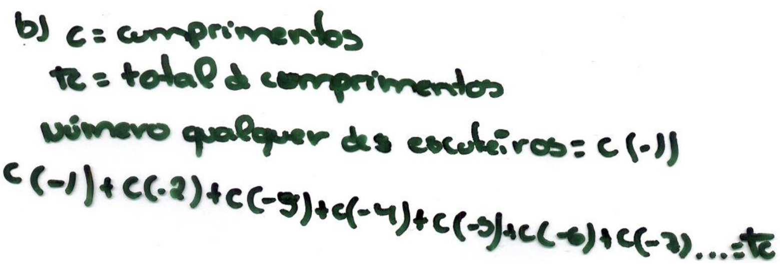


Figura 63 - Produções do Grupo I referentes à resolução da segunda questão da tarefa "A hora da despedida"

Apesar da legenda criada pelos alunos, para atribuir um significado às letras empregues na expressão, não ser conclusiva, é possível deduzir que C (-1) diz respeito ao número total de escuteiros menos um; do mesmo modo, C (-2), corresponde ao número total de escuteiros menos dois, e assim sucessivamente até C (-30), se considerarmos o número total de 31 escuteiros referidos na alínea anterior. A justificação apresentada, em seguida, pelo André confirma o exposto.

> **Professora** – E com essa regra é possível saber o número de cumprimentos para qualquer número de escuteiros? Se fossem 1000, por exemplo.
>
> **André** (elemento do grupo) – O número 1000 dá 999 (cumprimentos), o número 999 dá 998, ...

Grupo II

Este segundo grupo, associa o número de escuteiros ao número de saudações, apresentando os dados numa tabela. Através de um exemplo que denuncia uma estratégia idêntica à que foi utilizada pelo grupo anterior, revelam o modo como estruturaram o seu pensamento, retirando um, ao número total de escuteiros e adicionando em seguida, de uma forma ordenada decrescente, o número de cumprimentos, desde o número de escuteiros menos um, até ao número um. Não enunciaram, contudo, uma regra, que permitisse calcular o número de cumprimentos para qualquer número de escuteiros, ficando apenas pelo estudo de casos particulares. O recurso à tabela acabou por não ser uma mais valia, dado que não tiraram partido da mesma, ignorando as regularidades existentes, que poderiam conduzir a outros caminhos.

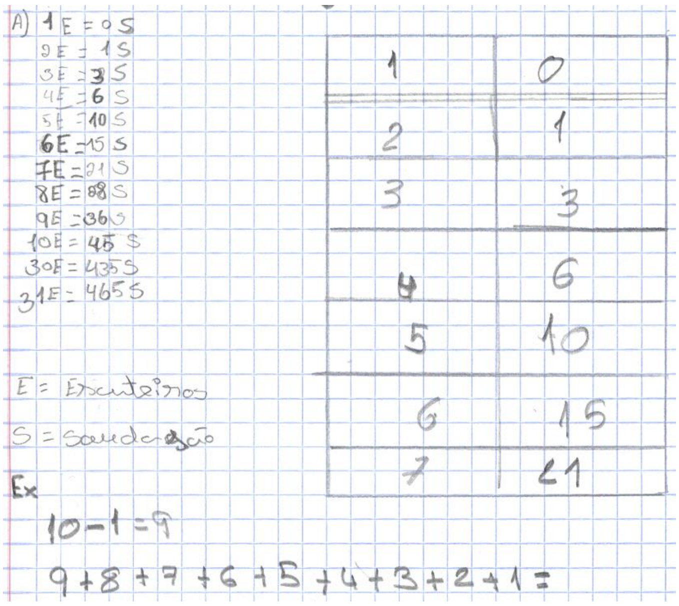


Figura 64 - Produções do Grupo II referentes à resolução da tarefa "A hora da despedida"

Grupo III

Um terceiro grupo apresenta uma estratégia, em tudo idêntica à dos grupos anteriores, baseada na adição ordenada do número de cumprimentos. Ao procurar expressar a generalização, utilizam como exemplo, os procedimentos a adotar para um universo de 1001 escuteiros, e em seguida, esboçam uma expressão, em que cada letra consecutiva do alfabeto representa um escuteiro, e em que a letra "x", representa o número total de cumprimentos. Estes alunos, apesar de não terem conseguido exprimir a generalização através de uma expressão algébrica, demonstram, através dos exemplos apresentados, ter encontrado uma estratégia para determinar o número total de cumprimentos, que apesar de morosa é eficaz.

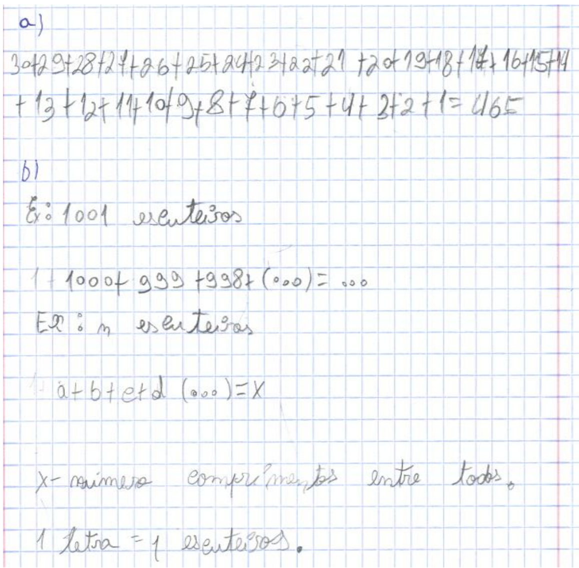


Figura 65 - Produções do Grupo III referentes à resolução da tarefa "A hora da despedida"

Grupo IV

Este quarto grupo seguiu uma estratégia similar à que foi utilizada pelos grupos anteriores, baseada na adição ordenada, para determinar o número de cumprimentos, até um total de 10 escuteiros, mas em seguida, e dando-se conta da morosidade dos procedimentos, procurou outro caminho. O novo caminho, previa o encontro de relações numéricas entre as duas variáveis em causa, o número de escuteiros e o número de cumprimentos. Deste modo, este grupo de alunos, conseguiu distanciar-se da situação em si mesma e centrar-se nas regularidades, identificando a estrutura Matemática inerente à situação em análise.

Nº de escuteiros	Nº de apertos de mão
1	0
2	1
3	3
4	6
5	10
6	15
10	45
31	465

Figura 66 - Produções do Grupo IV referentes à resolução da primeira questão da tarefa A hora da despedida

Após duas alunas terem feito uma leitura dos dados da tabela questionei-os:

Professora – E como é que chegaram a essas conclusões?
João (elemento do grupo) – Chegámos usando aqui as duas formas de fazer (...) como era número ímpar nós fizemos (...) 31 = 15 +16; (em seguida completa a expressão)
31 = $\frac{1}{15} + 16$, eu meto assim porque 31 é $\frac{1}{15}$ do resultado dos apertos de mão que eles vão ter que fazer, e depois faz-se $31 \times 15 = 465$.
Professora – Explique novamente aos colegas.
João (elemento do grupo) – 31 é distribuído por 15 e 16, e o número mais pequeno vai ser o denominador de uma fração, o 31 é $\frac{1}{15}$ do número de apertos de mão que vão ter que fazer, portanto o 31 é $\frac{1}{15}$ deste número (indica o número 465) e depois temos que multiplicar o 31 por 15, porque é $\frac{1}{15}$ e vai dar este número (indica novamente o número 465).
Em seguida, o grupo, seguindo a minha sugestão, apresenta outros exemplos.

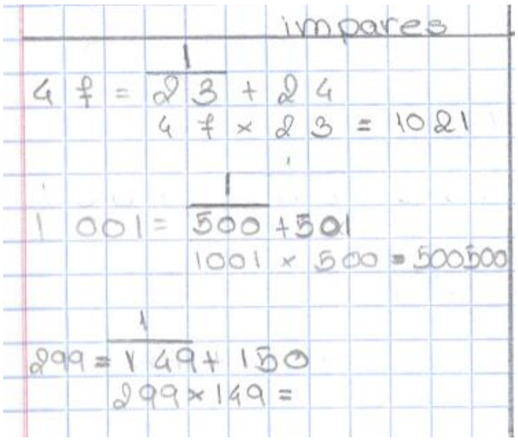


Figura 67 - Evidências da regularidade encontrada pelo Grupo IV para um número ímpar de escuteiros

(...)
Professora – Estão convencidos com o método deles? Será possível descobrir para qualquer número?
André – Sim, por exemplo se for 1003, dividimos por 500+503 não é?
João regista no quadro: 1003 = 502 + 503
Diogo – Assim vai dar 1005, é o 1 e o 2 (referindo-se ao algarismo das unidades de 502 e 503).
João corrige os registos anteriores: 1003 =501+502
(...)
Professora – Posso usar quaisquer números em que a soma seja 1003, ou tem que haver outro critério?
João (elemento do grupo) – (...) é a dividir por 2,...
Bernardo – Eu só não percebo porque é que ele mete ali a fração...
João (elemento do grupo) – Porque 1003 é $\frac{1}{501}$ do resultado final de apertos de mão.
Bernardo – Como é que descobriste isso?
João (elemento do grupo) – Experimentámos com resultados mais pequenos e vimos que isso repetia-se sempre. Depois aqui nos números pares nós fizemos:
n.º par : 2 + n.º par : 2
10 : 2 + 10 : 2
10 = 5 + 5
5×9=45
João (elemento do grupo) – (após registar do quadro explica os procedimentos) 10 dividi em duas partes, o 5 e o 5, peguei num dos 5 e multipliquei-o por 9, que era o número anterior ao 10 e deu 45.

Em seguida apresentam outros exemplos para os números pares.

Figura 68 - Evidências da regularidade encontrada pelo Grupo IV para um número par de escuteiros

Para expressar a generalização, o grupo apresenta dois procedimentos distintos. Um, que permite determinar o número de cumprimentos, quando o número de escuteiros é ímpar, e um outro para determinar o número de cumprimentos, quando o número de escuteiros é par. As expressões apresentadas foram inspiradas nos procedimentos empregues nos exemplos.

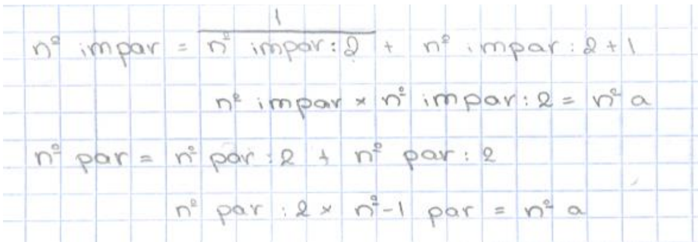


Figura 69 - Evidências da expressão da generalização apresentada pelo Grupo IV para um número ímpar de escuteiros

Na primeira expressão geram uma desigualdade, ao usar a fração unitária, e ao ignorarem que ao dividirem um número ímpar por dois, não irão obter um número inteiro.

A expressões que se seguem representam o raciocínio usado pelos alunos no estudo de casos particulares.

$$\text{n.º ímpar} = \frac{1}{\text{n.º ímpar} \div 2} + \text{n.º ímpar} \div 2 + 1$$

$$\text{n.º ímpar} \times \text{n.º ímpar} \div 2 = \text{n.º cumprimentos}$$

Contudo, a explicação "1003 é $\frac{1}{501}$ do resultado final de apertos de mão", traduz um facto. Nos momentos em que procurou justificar os procedimentos empregues pelo grupo, João manifestou dificuldade em descrever a forma como decompôs o número ímpar, referindo apenas que dividia por dois e usava o número mais pequeno como denominador da fração unitária, no entanto, encontrou um processo válido, que demonstrou através dos exemplos que utilizou, para determinar o número de cumprimentos, sempre que o número de escuteiros era ímpar.

A segunda expressão traduz, efetivamente, uma regra que permite calcular o número de cumprimentos, quando o número de escuteiros é um número par.

$$\text{n.º par} = \text{n.ºpar} \div 2 + \text{n.ºpar} \div 2$$

$$\text{n.ºpar} \div 2 \times (\text{n.ºpar-1}) = \text{n.º cumprimentos}$$

O número total de cumprimentos pode, assim, ser obtido através do produto entre metade do número de escuteiros e o número anterior ao número de escuteiros considerados.

Grupo V

Este grupo também optou por organizar os dados numa tabela e, em seguida, procurou compreender as relações existentes entre as duas variáveis em causa, número de escuteiros e número total de cumprimentos. À semelhança do que sucedeu com o grupo anterior este grupo apresentou dois procedimentos distintos para calcular o número total de cumprimentos, um para quando o número de escuteiros é ímpar e um outro para quando o número de escuteiros é um número par.

Nº de e	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...	31
Nº de	0	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	...	465

Figura 70 - Produções do Grupo V referentes à resolução da primeira questão da tarefa "A hora da despedida"

No episódio seguinte, os alunos descrevem os procedimentos adotados, colocando em evidência as relações que estabeleceram entre as variáveis.

> **Inês** (elemento do grupo) – A gente aqui na um construímos uma tabela e fomos tentar arranjar uma relação para chegar aos 31. (...) um estava para zero; dois estava para um; três estava para três; (...)
> **Tó** (elemento do grupo) – Nós fizemos no trinta e um, 31 – 1 = 30, depois metade de 30 era 15 e depois fizemos, 31 × 15, que dava 465 e que eram os apertos de mão, vimos as relações e vimos que era assim...

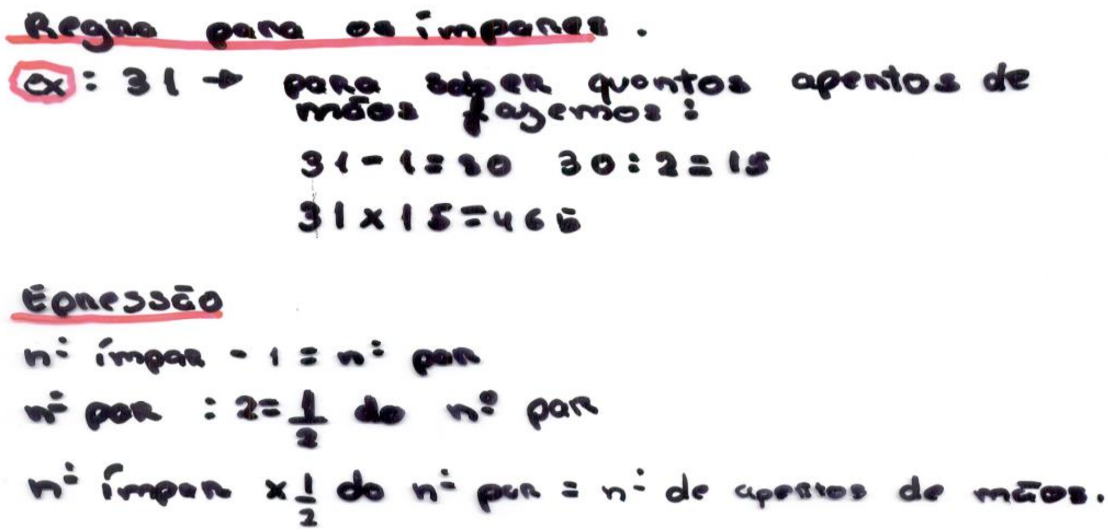


Figura 71 - A expressão da generalização para um número ímpar de escuteiros, expressa pelo Grupo V

> **Inês** (elemento do grupo) – A expressão era o número ímpar -1, que dava um número par, depois o n.º par dividimos por dois e ia dar metade do número par, depois fazemos o número ímpar vezes metade do número par e é igual ao número de apertos de mão.
> **Bernardo –** Não percebi muito bem.
> **Professora –** Usem o exemplo de cima para explicar a regra.
> **Tó** (elemento do grupo) – O número ímpar é o 31, depois se fizermos menos 1 dá 30, dá o número par, esse número par vamos dividir por 2, para ver quanto é que é metade do número par anterior, para depois fazer essa metade do número par anterior, ...
> **Inês** (elemento do grupo) – (...) que é 15, vezes o número ímpar (indica o número 31) que vai dar o número de apertos de mão.
> **Tino –** Porquê a dividir por 2?
> **Tó** (elemento do grupo) – Porque é a regularidade é a regra.

Quando o número de escuteiros é um número ímpar, os alunos recorrem a uma sequência de expressões, inspiradas no estudo de casos particulares.

Figura 72 - Expressões numéricas usadas pelo Grupo V para expressar a generalização

$$\text{n.º ímpar} - 1 = \text{n.º par}$$

$$\text{n.º par} \div 2 = \frac{1}{2}\text{ do n.º par}$$

$$\text{n.º ímpar} \times \frac{1}{2}\text{ do n.º par} = \text{n.º de apertos de mão}$$

Em seguida explicam os procedimentos adotados, para encontrar o número de cumprimentos, quando o número de escuteiros é par.

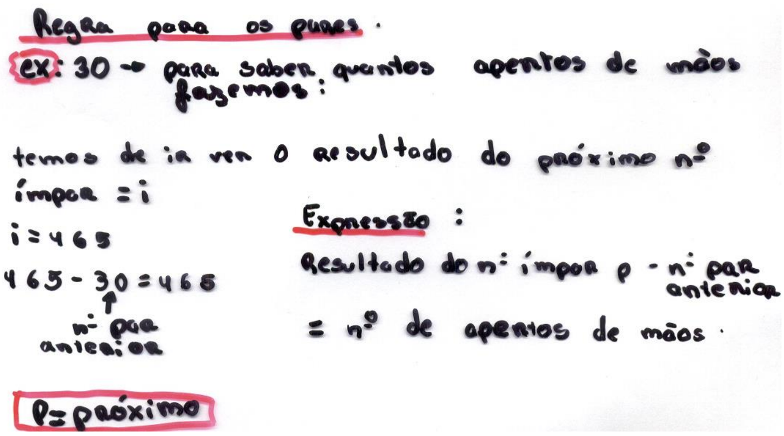


Figura 73 - A expressão da generalização para um número par de escuteiros, expressa pelo Grupo V (envolve procedimentos recursivos)

Tó (elemento do grupo) – Depois no 30 que era o número par anterior, o 30 é um exemplo, tínhamos de ir ver o resultado do próximo número ímpar, que era o 31 e que dava 465, então como era 30... (recorreu em seguida à tabela que usaram) vimos que, (exemplifica do quadro)...

1	2
0	1

1 + 0 = 1

2	3
1	3

2 + 1 = 3

3	4
3	6

3 + 3 = 6

Tó (elemento do grupo) – ... e assim sucessivamente, então do 465 tiramos este (indica o número 30) para dar este (indica o 435).

30	31
435	465

$465 - 30 = 435$

Bernardo – E se não tiveres o 465?
Tó (elemento do grupo) – Temos de ir ver qual é o resultado do próximo número ímpar.

Quando o número de escuteiros é um número par, recorrem a uma estratégia recursiva, dado que determinam o número total de cumprimentos, através da diferença entre o número total de cumprimentos do número ímpar seguinte e o número de escuteiros considerados. A expressão mantém a estrutura do exemplo considerado.

resultado do n.º ímpar próximo (seguinte)-n.º par anterior=n.º de apertos de mão

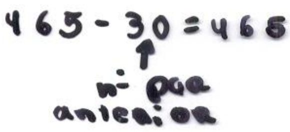


Figura 74 - A explicação da generalização para um número par, recorrendo a um caso particular. (Procedimento empregue pelo Grupo V)

Grupo VI

Este último grupo sintetiza numa tabela as relações numéricas que conseguiu estabelecer, a partir do estudo de casos particulares, entre as duas variáveis em causa, o número de escuteiros e o número de apertos de mão. O foco afasta-se, claramente, da situação proposta na tarefa e centra-se nas relações numéricas, entre as variáveis, elevando o raciocínio a outro patamar (Kaput, 1999).

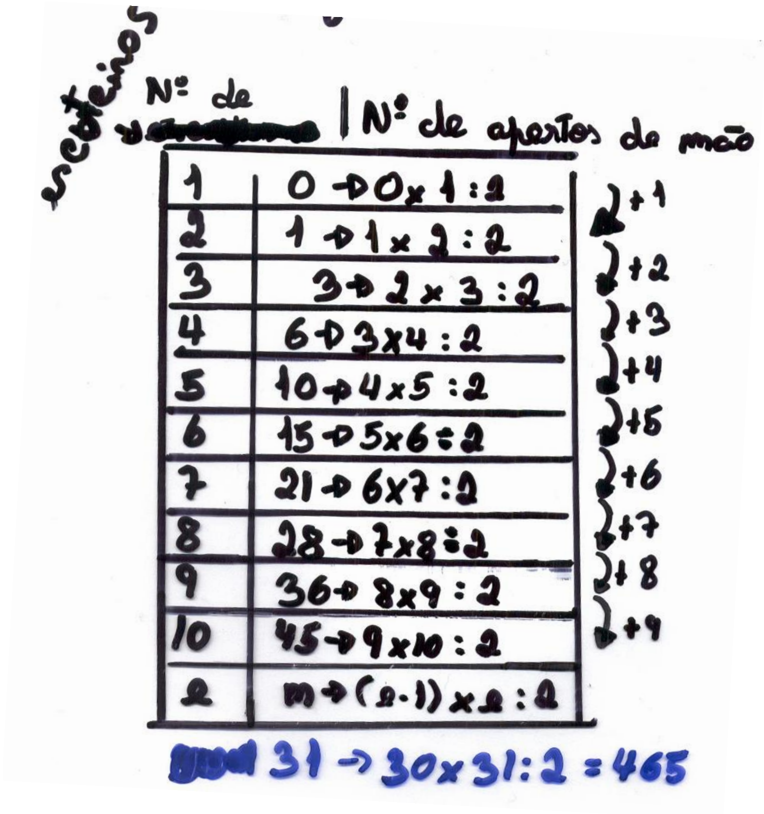


Figura 75 - Procedimentos empregues pelo Grupo VI na resolução da tarefa "a hora da despedida"

Em seguida, os alunos descrevem as relações numéricas que estabeleceram entre as variáveis.

> **Marta** (elemento do grupo) – Para um escuteiro, a gente ligámos a zero porque fomos buscar o número antes de escuteiros, que era zero, não havia nenhum, vezes um, dá zero, zero a dividir por dois tem que dar zero; depois para dois escuteiros, fomos buscar o número antes de escuteiros e fizemos, 1 × 2 ÷ 2; no três fomos buscar o número antes de escuteiros e fizemos, 2 × 3, que dava 6, e 6 ÷ 2, dava 3; (...)
> **Rui** – Porque é que fizeram: 1 × 2; 2 × 3; (...)
> **Marta** (elemento do grupo) – (contínua a explicar os procedimentos) aqui tínhamos 6 escuteiros, fomos buscar o número antes de escuteiros que era o 5, e fizemos, 5 × 6 = 30, 30 a dividir por 2, dava 15, os 15 apertos de mão que os 6 escuteiros davam; (...)
> **Constança** (elemento do grupo) – Nós aqui, por exemplo, no número de escuteiros 8, fizemos, 7 que era o número anterior de escuteiros, vezes 8, a dividir por dois que dava 28, (...)
> **Rui** – Mas porquê vezes 8, porque é que foram multiplicar 7 por 8?

Professora – O que é que elas procuraram observar na tabela?
Tino – Uma regularidade...
(...)
Professora – E se fossem 1000 escuteiros, como procederiam?
Simão - $999 \times 1000 \div 2$
Professora – Funciona sempre?
Manel – Era o número anterior vezes o número de escuteiros a dividir por dois.
Marta (elemento do grupo) – (explica em seguida a expressão algébrica que o grupo utilizou para expressar a generalização) “**e**” é um número qualquer de escuteiros, “**n**” é o número de apertos de mão, “**e – 1**” é este número de escuteiros (indica o “**e**”) menos 1, que era o número anterior, vezes esse número que era o “**e**” a dividir por 2.
Rui – Pois ali no 9, tinha que ser o anterior vezes 9, então...

O grupo estabeleceu relações numéricas entre os números apresentados na coluna da esquerda, e que diz respeito ao número de escuteiros, para tentar encontrar o número total de cumprimentos. Após um período de experimentação com os primeiros termos, o grupo concluiu que o número total de cumprimentos era sempre metade do produto entre um número qualquer de escuteiros e o número que o antecede.

As relações descritas pelos elementos deste grupo, apesar de evidentes, não foram aceites por todos. As questões colocadas pelo Rui, “Porque é que fizeram: $1 \times 2; 2 \times 3$"; “Mas porquê vezes 8, porque é que foram multiplicar 7 por 8?”; apelam a uma ligação ao contexto da situação proposta, o aluno não se conforma com o facto das colegas estabelecerem, exclusivamente, relações numéricas entre as duas variáveis, distanciando-se do contexto.

4.4.2. Análise global da resolução da tarefa pela turma

A dramatização, que teve lugar no primeiro momento da aula, foi o ponto de partida para a compreensão de uma situação complexa, que envolvia a generalização de uma função quadrática. Pode considerar-se também, que o ensaio da situação foi fonte de inspiração, na fase inicial de exploração da tarefa, para a generalidade dos grupos, que posteriormente, seguiram caminhos distintos.

> Nós na primeira reparámos qua cada escuteiro, (corrige em seguida) o número 31 dava 30 cumprimentos, porque se tivesse assim, uma fila de 30, eu ia passando e ia dando cumprimentos (referindo-se à situação que tinha sido dramatizada) depois o 30 dava 29, (...) (Grupo I)

Salienta-se o facto da primeira questão da tarefa apelar a uma visão generalista, e à consequente utilização de estratégias funcionais, uma vez que os alunos são convidados a encontrar o número de cumprimentos que 31 escuteiros efetuaram entre si. Este número, atendendo à natureza da função, pode ser considerado um termo distante, induzindo à busca de relações entre as duas variáveis em causa.

Analisando de um modo mais minucioso o trabalho desenvolvido pelos grupos, conclui-se que todos estabeleceram relações numéricas entre as duas variáveis e identificaram a estrutura Matemática da situação proposta. A generalização da regra foi expressa através de expressões numéricas e algébricas. À semelhança do que sucedeu na tarefa "Um jogo com cubos e autocolantes", verificou-se que as expressões algébricas, usadas para expressar, ou procurar expressar a generalização, mantêm uma estrutura idêntica à das expressões numéricas usadas no estudo de casos particulares, verificando-se, uma vez mais, o estabelecimento de pontes entre a Aritmética e a Álgebra.

30+29+28+27+26+25+24+23+22+21+20+19+ 18+17+16+15+14+13+12+11+10+9+8+7+6+5+4+ 3+2+1=465 C	c(-1)+c(-2)+c(-3)+c(-4)+c(-5)+c(-6)+c(-7)...=tc
31 → 30x31:2 = 465	n → (n-1) x n : 2

Figura 76 - Evidências da utilização de uma estrutura idêntica nas expressões numéricas e algébricas

A mesma tendência verificou-se quando a generalização foi expressa através de uma sequência de expressões relacionadas, dado que se mantinha a mesma estrutura sequencial das expressões numéricas geradas durante o estudo de casos particulares, colocando em evidência a forma (Kieran, 2007).

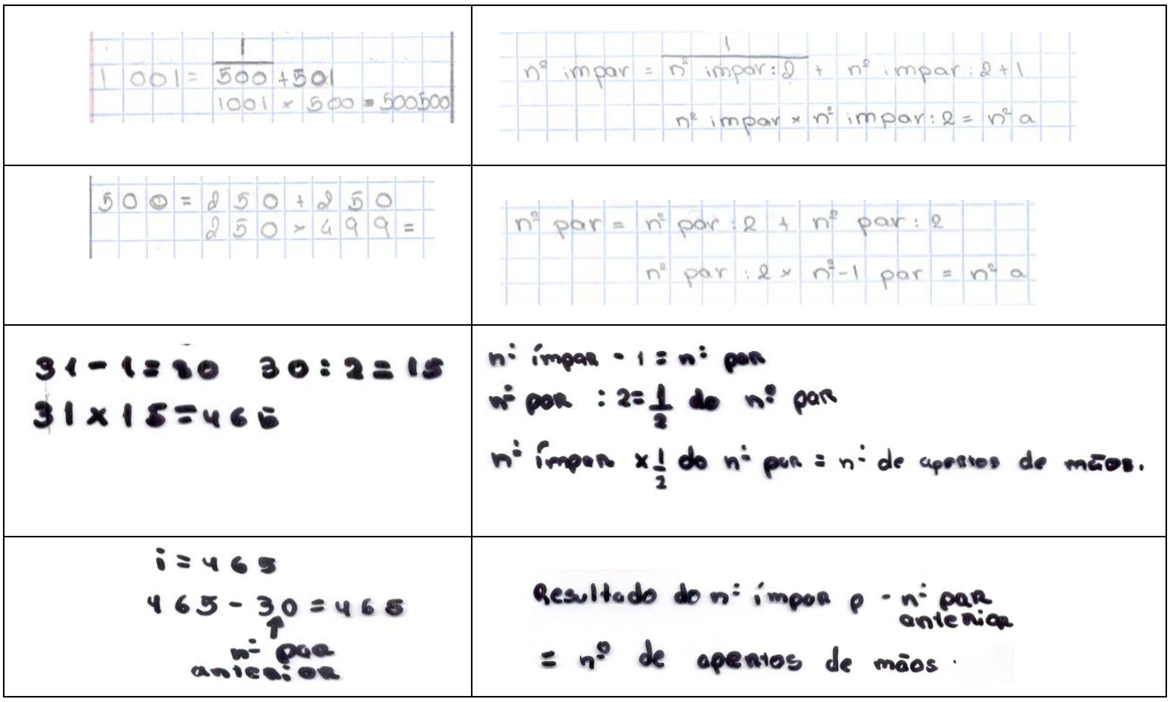


Figura 77 - Evidências da identidade entre a estrutura sequencial das expressões numéricas e algébricas na tarefa "A hora da despedida"

Algumas estratégias usadas pelos grupos, apresentam fragilidades que inviabilizam o cálculo célere do número de cumprimentos. Foi o caso, das que foram empregues por três dos seis grupos, que embora tenham identificado a estrutura Matemática da situação, utilizaram procedimentos aditivos, adicionando de forma ordenada, o número de cumprimentos efetuados por cada membro do grupo.

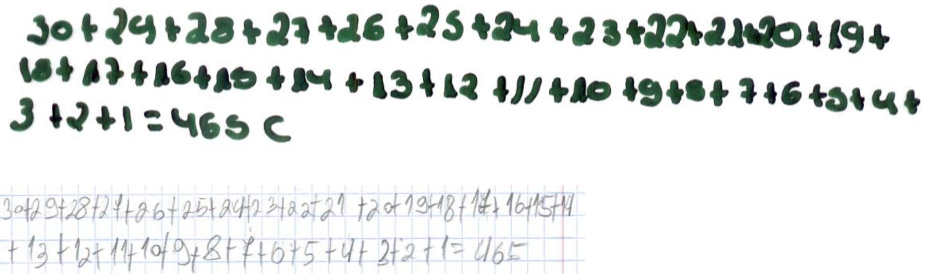


Figura 78 - Evidência da utilização de estratégias *building-up*

Para determinar o número total de cumprimentos num universo de 1001 escuteiros, tal como foi sugerido por um dos grupos, os procedimentos tornar-se-iam demasiado morosos, inviabilizando a concretização dos cálculos, em tempo útil.

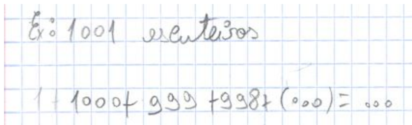


Figura 79 - Evidência da utilização de estratégias *building-up* para tentar encontrar o número de cumprimentos que 1001 escuteiros iriam efetuar entre si

Os restantes grupos procuraram, por outro lado, estabelecer relações numéricas de natureza multiplicativa, tornando o processo viável, dado que lhes era possível calcular com rapidez o número de cumprimentos para qualquer número de escuteiros. A utilização de tabelas, por parte destes grupos, facilitou o estabelecimento de relações numéricas entre as variáveis, uma vez que as mesmas foram colocadas em evidência. Assim, e a partir dos dados disponíveis nas tabelas, os alunos testaram hipóteses e generalizaram uma regra que lhes permitia obter o número de cumprimentos a partir do número de escuteiros, justificando os seus procedimentos.

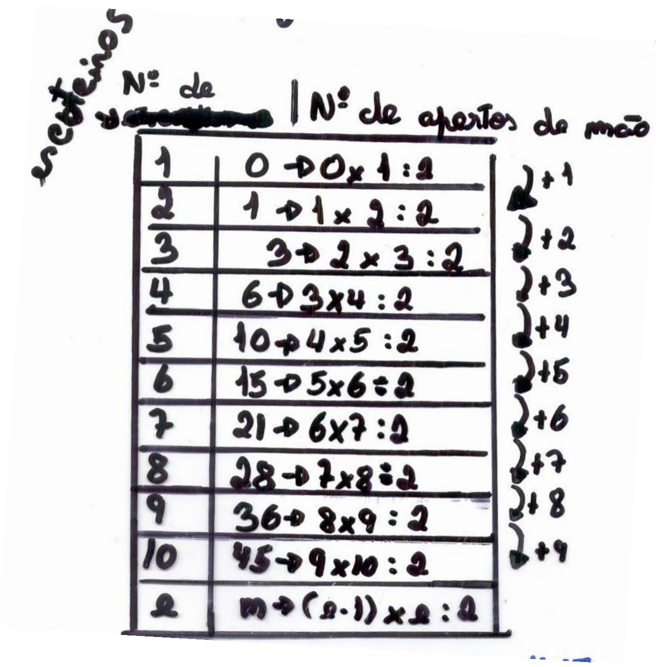


Figura 80 - Evidência da utilização da tabela na procura da generalização

Nós aqui, por exemplo, no número de escuteiros 8, fizemos, 7 que era o número anterior de escuteiros, vezes 8, a dividir por dois que dava 28, (...)
Era o número anterior vezes o número de escuteiros a dividir por dois. (Grupo VI)

Dois dos grupos estabeleceram relações de natureza multiplicativa entre as variáveis, generalizando uma regra, a partir do estudo de casos particulares, para um número par de escuteiros, e uma outra para um número ímpar de escuteiros.

Estratégias adotadas para um número ímpar de escuteiros:

Nós fizemos no trinta e um, 31 – 1 = 30, depois metade de 30 era 15 e depois fizemos, 31×15, que dava 465 e que eram os apertos de mão, vimos as relações e vimos que era assim (...) (Grupo V)

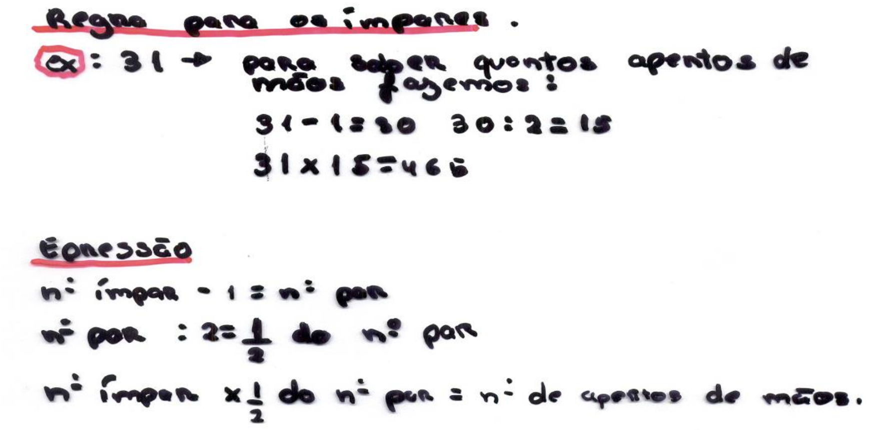


Figura 81 - Evidência da utilização de procedimentos funcionais na expressão da regra

Chegámos usando aqui as duas formas de fazer (...) como era número ímpar nós fizemos, 31=15 +16; (em seguida completa a expressão) 31 = $\frac{1}{15} + 16$, eu meto assim porque 31 é $\frac{1}{15}$ do resultado dos apertos de mão que eles vão ter que fazer, e depois faz-se $31 \times 15 = 465$ (Grupo IV)

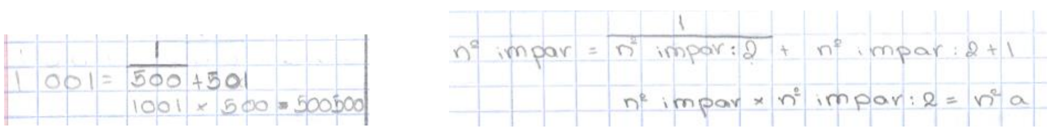


Figura 82 - Evidência da utilização de procedimentos funcionais na expressão da regra

Neste caso, as expressões algébricas não são fiéis às descrições e representações usadas no estudo de casos particulares. Os alunos, apesar de conseguirem exemplificar o modo como decompunham os números ímpares, demonstraram dificuldade em descrever os procedimentos. As expressões que se seguem, traduzem o raciocínio usado pelos alunos, no estudo de casos particulares. Note-se que não coincidem com a regra que enunciaram.

$$\text{n.º ímpar} = \frac{1}{(\text{n.º impar-1}) \div 2} + (\text{n.º ímpar} + 1) \div 2$$

$$\text{n.º ímpar} \times (\text{n.º ímpar-1}) \div 2 = \text{n.º de cumprimentos}$$

Estratégias adotadas para um número par de escuteiros:

> 10 dividi em duas partes, o 5 e o 5, peguei num dos 5 e multipliquei-o por 9, que era o número anterior ao 10 e deu 45 (Grupo IV)

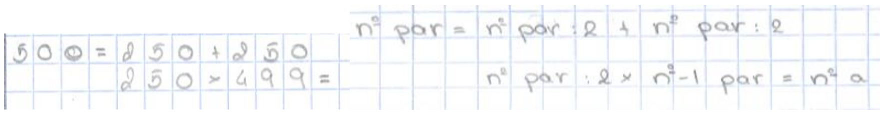


Figura 83 - Evidências das estratégias adotadas pelo Grupo IV para calcular o número de cumprimentos quando o número de escuteiros é par

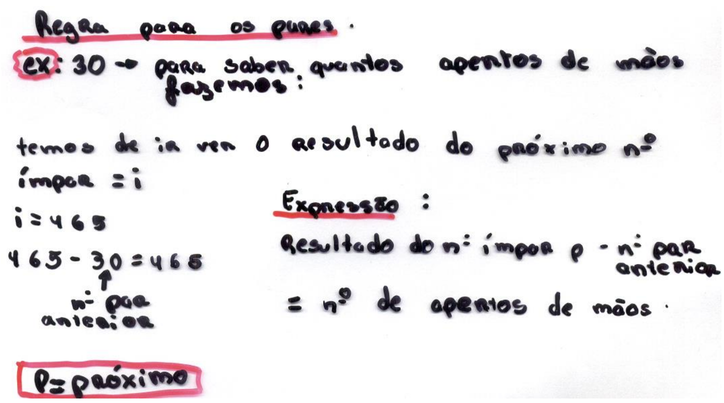


Figura 84 - Evidência da utilização de uma estratégia recursiva

A forma como expressam a regra sugere uma estratégia recursiva, aliada a um raciocínio de natureza aditiva, dado que para determinar o número de cumprimentos, é necessário conhecer o número total de cumprimentos que o número ímpar seguinte efetuou. “Temos de ir ver qual é o resultado do próximo número ímpar”.

As letras e as expressões usadas para exprimir a regra, surgem associadas ao contexto da situação, como se observa nos registos escritos e nos significados que os alunos atribuem às suas ações, nos momentos de discussão coletiva. Os grupos que utilizaram expressões algébricas para exprimir a generalização, atribuíram o significado de variável, às letras “e” e às expressões “n.º ímpar”, uma vez que podem assumir qualquer valor, viabilizando a determinação do número de cumprimentos para qualquer número de escuteiros.

Quando questionados, por outros colegas, acerca da forma como tinham descoberto aquelas relações responderam: “Experimentámos com resultados mais pequenos e vimos que isso repetia-se sempre.” Esta afirmação, pode ser considerada um indicador acerca da forma como os alunos, neste nível de ensino, constroem as suas ideias algébricas, através da experimentação e do posterior estabelecimento de pontes entre a Aritmética e a Álgebra.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÃO

Neste quinto e último capítulo começo por apresentar uma síntese do estudo, relembrando o objetivo, as questões de investigação, e alguns aspetos relevantes do quadro teórico, da intervenção didática e das opções metodológicas. Em seguida, exponho as principais conclusões que emergem do olhar transversal sobre a análise efetuada das resoluções da turma às tarefas propostas, com o foco nas diferentes questões que orientaram este estudo. Concluo o capítulo com uma reflexão pessoal a respeito do contributo, resultante da realização deste trabalho, para o meu desenvolvimento profissional, para a investigação em Educação Matemática e para as atuais orientações curriculares.

5.1. Síntese do estudo

Este estudo tem como objetivo a análise do modo como os alunos evoluem no desenvolvimento do seu pensamento algébrico, no quadro de uma experiência de ensino baseada em tarefas com potencial algébrico a explorar no contexto de uma cultura de aula que valoriza a comunicação matemática. Para alcançar o objetivo do estudo, procuro responder às seguintes questões:

- Como representam os alunos as suas ideias algébricas relativas à procura e à expressão de generalizações? Que tipo de representações adotam?
- Que sentido atribuem os alunos aos símbolos algébricos, nomeadamente às letras e expressões algébricas?
- Que estratégias usam os alunos para lidar com tarefas de proporcionalidade direta e sequências e outras regularidades?

A revisão da literatura incidiu em aspetos significativos que se podem associar ao objetivo e às questões de investigação. A leitura e análise de artigos e estudos dignos de relevo, de autores diversos, atuais e relevantes, permitiram-me aprofundar conhecimentos sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico e encontrar fundamentos que suportam a análise de dados deste estudo e com os quais é possível confrontar as respetivas conclusões.

No que respeita ao pensamento algébrico e, de acordo com investigações realizadas nos últimos anos, este tem vindo a ser associado àquilo que é geral numa determinada situação matemática e à expressão dessa generalização (Verschaffel, Greer & De Corte, 2007), a qual não tem, necessariamente, de ser representada em linguagem matemática simbólica, podendo, inclusive, ser expressa em linguagem natural (Canavarro, 2009; Carraher & Schliemann, 2007; Kieran, 2007). Kaput (1999) considera que a álgebra deve ser encarada como um tema transversal ao currículo, conferindo-lhe maior profundidade, e que o seu ensino deve ter início nos primeiros anos através de uma Aritmética generalizada. Blanton e Kaput (2011) acreditam que o desenvolvimento do pensamento funcional, baseado no estudo de padrões e relações, abre caminhos Álgebra.

As representações usadas pelos alunos para expressar a generalização podem assumir um caráter mais formal, como os diagramas, gráficos ou expressões algébricas, ou mais informal, como representações próprias, criadas pelos alunos. Ponte e Serrazina (2000) partilham esta ideia ao assumir que há uma estreita ligação entre a representação usada pelo aluno e a forma como a compreende e utiliza nas suas resoluções. Bruner (1999) distingue três tipos de representações que se inter-relacionam: representações ativas, representações icónicas e representações simbólicas com recurso a símbolos, que inicialmente não têm que ser os formais, podendo até ser idiossincráticos (Pinto & Canavarro, 2012). A utilização de tabelas e gráficos são considerados por Blanton e Kaput (2011) como importantes meios para encontrar relações e compreender situações funcionais, desde o início da escolaridade. Kieran (2007) dá ênfase ao facto da generalização, em crianças muito jovens, surgir a partir de pontes que se estabelecem entre a Aritmética e a Álgebra, e considera crucial, no processo de generalização, a observação da estrutura sequencial das operações, geradas a partir do estudo de casos particulares que evidenciam a forma, abrindo caminho à generalização.

A propósito do sentido dos símbolos na Álgebra, Arcavi (2006) sugere que estes possam emergir a partir do prolongamento do sentido do número na Aritmética, pois é a partir do estudo de casos particulares e das relações que se conseguem estabelecer entre eles, que os alunos começam a generalizar e a usar os símbolos como abreviaturas para expressar a generalização. Schoenfeld e Arcavi (1988) consideram que os diferentes significados que se podem atribuir às letras, constituem uma dificuldade acrescida na transição entre a Aritmética e a Álgebra. Neste trabalho, e com base em estudos relevantes efetuados anteriormente (Abrantes, Serrazina & Oliveira,1999; Ponte, Branco & Matos, 2009), elaborou-se um quadro teórico em que são atribuídos às letras os significados de: incógnita, número generalizado e variável.

Autores como Lesh, Post, e Behr (1988), Lo e Watanabe (1997), Costa (2007), Dooren, Bock, Evers e Verschaffel (2009), Fernández, Llinares, Dooren, Bock e Verschaffel (2010), indicam as estratégias intuitivas mais comuns, usadas vulgarmente pelos alunos, para lidar com situações de proporcionalidade direta, um tema da Matemática em que o pensamento algébrico tem grande relevância. Sendo possível distinguir estratégias de natureza multiplicativa, com abordagens escalares e funcionais e, estratégias de natureza aditiva, que podem, por um lado, basear-se na adição repetida, com características do raciocínio multiplicativo, gerando resultados corretos, ou basear-se, por outro lado, na diferença constante originando resultados incorretos. Cramer e Post (1993a) apontam ainda outras estratégias, o fator de mudança, com recurso aos múltiplos; a utilização da razão como fração e o produto cruzado. Os mesmos autores alertam para as características opacas da utilização do produto cruzado, muitas vezes empregue, privado de significado. Na abordagem a tarefas envolvendo outras regularidades Branco (2008); Barbosa, Vale e Palhares (2008); Santos e Oliveira (2008); Friel e Markworth (2009) enumeram estratégias de contagem, aditivas, recursivas e, estratégias explícitas ou funcionais, onde é estabelecida uma relação entre as variáveis, ou se recorre ao valor da unidade de umas das quantidades referidas.

Ao desenvolvimento do pensamento algébrico estão associados aspetos didáticos fulcrais que foram considerados neste estudo na construção da intervenção didática: o potencial algébrico das tarefas e o lugar que ocupam numa sequência de tarefas (Serrazina & Oliveira, 2010; Canavarro & Santos, 2012); uma cultura de sala em que o simbolismo algébrico surja como uma necessidade a partir dos primeiros anos de ensino (Sutherland, 1991; Canavarro, 2009); e o papel que a comunicação matemática assume na construção dos significados (Sierpinska, 1998; Guerreiro, 2009).

Como orientações curriculares internacionais é considerado o caso do NCTM, em que a Álgebra é entendida como "um fio condutor", transversal a todos os temas do currículo, e que deve ser trabalhada desde o ensino pré-escolar, a partir de experiências significativas e com ligações profundas à compreensão. A nível nacional, os documentos curriculares publicados pelo Ministério da Educação, desde 1999 até ao Programa de 2007, em vigor à data da implementação da intervenção didática, sugerem a introdução de ideias algébricas desde o início da escolaridade, a partir da exploração de padrões e sequências numéricas, potenciando o desenvolvimento do pensamento algébrico e preparando os alunos para a entrada na Álgebra formal nos ciclos subsequentes.

A intervenção didática tem como base o objetivo e as questões do estudo e os princípios que emergem das orientações curriculares nacionais e internacionais, nomeadamente, no Programa de 2007 (Ponte et al., 2007), em vigor nesta intervenção didática, e nos Princípios e Normas para a Matemática Escolar, publicado pela APM em 2008. Nesta intervenção, destaca-se a natureza exploratória das tarefas e o facto de contemplarem situações aliadas a um contexto comum, um acampamento de escuteiros, que potenciam o desenvolvimento do sentido dos símbolos (Arcavi, 2006).

A metodologia adotada no estudo tem natureza qualitativa e inscreve-se no paradigma interpretativo, assumindo um *design* de um estudo de caso. Os dados foram recolhidos durante o segundo período, no ano letivo 2013/2014, numa turma de 6.º ano de escolaridade, que constituiu o caso em estudo. As técnicas usadas na recolha de dados foram a observação participante e a recolha documental. Os registos recolhidos durante a observação participante são constituídos por gravações áudio e vídeo dos momentos de apresentação da tarefa e discussão coletiva e, por um diário de bordo. As produções escritas dos alunos, resultantes da exploração das tarefas, fazem parte dos registos da recolha documental. Resta acrescentar que este estudo se reporta a uma investigação sobre a minha própria prática, uma vez que foi realizado numa turma a que lecionei a disciplina de Matemática durante os dois anos do 2.º Ciclo.

5.2. Principais conclusões

Por uma questão de facilidade e organização, as conclusões emergentes da intervenção didática serão respondidas questão a questão. Assim, esta secção inclui três subsecções distintas que se referem às conclusões relativas a representações, ao sentido dos símbolos e a estratégias usadas pelos alunos para lidar com o pensamento funcional.

5.2.1. Conclusões relativas a representações

Esta subsecção procura responder à primeira questão do estudo: "Como representam os alunos as suas ideias algébricas relativas à procura e à expressão de generalizações? Que tipo de representações adotam?".

Realizando uma análise transversal, é possível inferir, a partir das tarefas analisadas, e à luz do quadro teórico estabelecido (Bruner, 1999; Canavarro & Pinto, 2011), que os alunos recorreram a representações ativas, quando manipularam os cubos, na tarefa "Um jogo com cubos e autocolantes", e os utilizaram durante a descrição dos procedimentos adotados. A oportunidade de manipular os cubos permitiu preencher lacunas vocabulares, funcionando como facilitador do discurso. Na tarefa "A Hora da despedida" também se verificou o recurso a representações ativas, durante a dramatização da situação proposta e no momento da discussão coletiva quando, alguns alunos, voltaram a apelar à simulação da situação para provar as suas conjeturas.

O apelo a representações icónicas foi esporádico, verificando-se com pouca frequência nas tarefas analisadas. Apenas um dos grupos recorreu a este tipo de representação, na tarefa "Um jogo com cubos e autocolantes"; maioritariamente, verificou-se um recurso a representações simbólicas formais, como a linguagem natural, tabelas, gráficos, expressões numéricas e algébricas. Perante este cenário, colocam-se algumas questões: O que pode ter levado os alunos a optar por representações mais formais, recorrendo com pouca frequência, como é habitual, a representações icónicas e esquemas? Terá a natureza das tarefas e a sua estrutura contribuído, de algum modo, para estes resultados? Ou, por outro lado, será que os alunos já não necessitam de recorrer a esquemas ou diagramas, não sendo relevante a natureza e estrutura das tarefas em causa? Ou ainda, será que a intervenção didática valorizou o recurso a representações como tabelas, fornecendo-lhes uma ferramenta poderosa, que acabaram por adotar?

O recurso a tabelas horizontais e verticais para representar dados e procurar relações entre as variáveis foi geral na tarefa "Um percurso pedestre", foi usado por dois dos cinco grupos que realizaram a tarefa "Aluguer de canoas", e foi opção de representação para quatro dos seis grupos na tarefa "A hora da despedida". Brown e Mehilos (2010) e Blanton e Kaput (2011) apontam as vantagens da utilização de tabelas, referindo que este modo de representar dados, permite estabelecer, facilmente, relações entre casos particulares, criando condições para a descoberta da expressão algébrica e para a atribuição de significado às letras. Na tarefa de proporcionalidade direta, "Um percurso pedestre" e, a partir da observação das tabelas, os alunos, conseguiram identificar a relação de covariação entre as variáveis, no grupo dos Exploradores, e a sua ausência no grupo dos Pioneiros, uma vez que o tempo e a distância não aumentam na mesma proporção. Na tarefa "Aluguer de canoas" acerca da mesma relação de proporcionalidade direta, um dos grupos utilizou a tabela, a par da linguagem natural, para procurar expressar a generalização, utilizando um raciocínio recursivo. Johanning, Weber, Heidt, Pearce e Horner (2009) consideram que este tipo de raciocínio pode constituir um ponto de partida para o pensamento algébrico. Outro grupo empregou as tabelas para encontrar relações entre as variáveis preço e tempo. A mesma tendência foi evidente na tarefa "A hora da despedida", em que estava em causa uma função quadrática. Aqui, o recurso à tabela revelou-se, igualmente, um meio importante, facilitando o estabelecimento de relações numéricas entre as variáveis em causa, e permitindo a três dos quatro grupos que utilizaram esta forma de representação, encontrar o número de cumprimentos a partir do número de escuteiros. Nos momentos de discussão coletiva, os alunos recorreram, com frequência, às tabelas indicando as relações numéricas encontradas no estudo de casos particulares, justificando, desse modo, os seus procedimentos e o significado que atribuíam às letras e às expressões algébricas.

O uso do gráfico para representar a relação entre as variáveis, aconteceu apenas numa situação pontual, por parte de um grupo, na tarefa “Aluguer de canoas”. O recurso a este meio de representação surgiu na sequência do trabalho realizado na tarefa anterior, em que os alunos utilizaram a folha de cálculo Excel para representar os dados e testar as suas conjeturas. A representação gráfica permitiu comparar o comportamento de uma função de proporcionalidade direta, com uma situação em que essa regularidade não se verifica e terá, possivelmente, sido a essa aprendizagem que os alunos recorreram quando optaram por representar os dados nos gráficos para provar ou verificar a existência ou ausência da relação de proporcionalidade direta. É importante acrescentar que um dos alunos, no momento de discussão coletiva, conseguiu generalizar a partir do gráfico de proporcionalidade direta enquanto explicava a um colega como procederia para determinar o tempo se tivesse “um milhão e não sei quantos mil euros”. Blanton e Kaput (2011) reconhecem a importância da representação gráfica na busca e compreensão de relações e defendem a sua utilização a partir dos primeiros anos de ensino. Contudo, esta situação pontual não permite inferir que este meio de representar os dados e generalizar situações, tenha passado a fazer parte das rotinas dos alunos envolvidos neste estudo. Para tal seria, possivelmente necessária a utilização mais frequente da folha de cálculo Excel, e do recurso à construção gráfica manual, para que os alunos tivessem tempo de se aperceber das suas potencialidades e adotassem os gráficos como um meio para a compreensão de conceitos.

A utilização de expressões numéricas no estudo de casos particulares foi geral na turma, verificando-se a sua utilização, em todas as tarefas analisadas, por parte de todos os grupos. Este modo de representação foi ainda usado, por alguns grupos, a par da linguagem natural ou das expressões algébricas, para procurar expressar a generalização. Assim, na tarefa “Um percurso pedestre”, três grupos recorreram à expressão numérica para provar a existência de regularidades e procurar expressar a generalização, notando-se que a linguagem natural esteve sempre presente, funcionando como ponte entre a Aritmética e a Álgebra (Kieran, 2007; Johanning, Weber, Heidt, Pearce, & Horner, 2009). Na tarefa "Aluguer de canoas", a tendência em estabelecer pontes entre a Aritmética e a Álgebra foi notória, três dos cinco grupos que exploraram esta tarefa utilizaram a expressão numérica no estudo de casos particulares. Estas expressões colocaram em evidência a forma, ou seja, a estrutura sequencial das expressões numéricas, abrindo posteriormente caminho à expressão da generalização. A utilização generalizada de expressões numéricas no estudo de casos particulares, na tarefa "Um jogo com cubos e autocolantes" esteve na origem das expressões algébricas, usadas por todos os grupos para expressar a regra. O que ocorreu na tarefa "A hora da despedida" confirma esta tendência, pois todos os grupos utilizaram expressões numéricas no estudo de casos particulares que serviram posteriormente de inspiração à regra, expressa por três grupos, através da linguagem natural, e, por outros três, através de expressões algébricas, com uma estrutura idêntica à das expressões numéricas. Conclui-se que a observação da estrutura sequencial das operações, que se geram a partir do estudo de casos particulares, evidenciam a forma, e abrem caminhos à generalização. Esta ideia defendida por Kieran (2007), parece encontrar evidências no trabalho desenvolvido por estes alunos.

Notou-se na turma uma tendência crescente para o uso das expressões algébricas para expressar a generalização. Para tal, foram determinantes a natureza das tarefas e a complexidade das funções em causa. Assim, na tarefa de proporcionalidade direta "Um percurso pedestre", em que o tempo e a distância eram as variáveis em causa, apenas um grupo recorreu à utilização de expressões algébricas, para expressar a generalização ($\mathrm{D} \div 250 = \mathrm{N}; 7{:}30 \times \mathrm{N} = \mathrm{T}$). Na tarefa, também sobre proporcionalidade direta, "Aluguer de canoas", verificou-se que três dos cinco grupos utilizaram a expressão algébrica para explicitar a regra e que esta já apresenta o aspeto formal e simplificado da relação de proporcionalidade direta, com recurso ao valor da constante de proporcionalidade. Os grupos que expressaram a regra através da expressão algébrica, calcularam o valor da constante de proporcionalidade, atribuíram-lhe significado (o preço a pagar por um minuto de aluguer) e, em seguida, criaram uma expressão que permite determinar o preço a pagar por qualquer número de minutos ($5 \div 30 =$

$0{,}1(6)$; $\frac{5}{30} = \frac{1}{6}$; $P = \frac{1}{6} \times m$, em que “P” é o preço e “m” o número de minutos); $(10 \div 60 = 0{,}1(6)$; $T \times 0{,}1(6) = P$, em que “T” é o tempo e “P” o preço); $(5 \div 30 = 0{,}1(6)$; $0{,}1(6) \times T = P)$. Na tarefa “Um jogo com cubos e autocolantes”, em que estava em causa uma função afim, a generalidade dos grupos recorreu à expressão algébrica para representar a regra. As diferentes expressões colocam em evidência diferentes pontos de vista (5+5=10; $4 \times n = e$, em que $n = \text{n.º de cubos} - 2$, e $e = \text{número de autocolantes}$); $(n \times 6 = e$; $(n-1) \times 2 = d$; $e - d = c$, em que “n” é o número de cubos, “e” o produto entre o número total de cubos e 6, “n-1” o número de cubos menos um, “d” o produto entre o número de cubos menos um e dois, que corresponde ao número de faces ocultas, e “c” o número de faces visíveis); $(c - 2 \times 4 + 5 + 5 = a$, em que “c -2” é o número de cubos menos 2 e “a” o número de autocolantes); $(5 + [4 \times (c-2)] + 5 = \text{n.º de a}$, em que “c-2” é o número de cubos menos dois, e “n.º de a” o número de autocolantes); (o $\text{n.º de cubos} \times 4 \text{ faces} + 2 \text{ laterais} = \text{n.º de autocolante}$); $(4 \times nc + 2 = na$, em que “nc” é o número de cubos e “na” o número de autocolantes). Na tarefa “A hora da despedida”, em que a função em causa é quadrática, apenas metade dos grupos fez uso da expressão algébrica para explicitar a generalização. Esta diminuição do uso da expressão algébrica, relativamente à tarefa anterior, está provavelmente associado à complexidade da função, em que as relações em causa são menos evidentes. As expressões voltam a evidenciar diferentes perspetivas, dois grupos encontraram uma regularidade, para situações em que o número de escuteiros é um número par e outra para quando o número de escuteiros é ímpar:

$(\text{n.º ímpar} = \frac{1}{(\text{n.º ímpar} - 1) \div 2} + (\text{n.º ímpar} + 1) \div 2,$

$\text{n.º ímpar} \times (\text{n.º ímpar} - 1) \div 2 = \text{n.º de cumprimentos})$

$(\text{n.ºpar} = \text{n.ºpar} \div 2 + \text{n.ºpar} \div 2$

$\text{n.ºpar} \div 2 \times (\text{n.ºpar} - 1) = \text{n.ºcumprimentos})$

$(\text{n.ºímpar} - 1 = \text{n.ºpar}$

$$\text{n.}^{\underline{o}}\text{par} \div 2 = \frac{1}{2}\text{do n.}^{\underline{o}}\text{par}$$

$$\text{n.}^{\underline{o}}\text{ímpar} \times \frac{1}{2}\text{do n.}^{\underline{o}}\text{ par} = \text{n.}^{\underline{o}}\text{ de apertos de mão)}$$

Para um número par de escuteiros, recorrem ao resultado do número de apertos de mão do número ímpar seguinte. O número de apertos de mão é, então, determinado através da diferença entre o número de apertos de mão do número ímpar seguinte e o número par de escuteiros, acerca dos quais se pretende conhecer o número de cumprimentos.

Este grupo encontrou o termo geral simplificado: $(\mathrm{e}-1)\ \times \mathrm{e} \div 2$, em que "e" diz respeito ao número de escuteiros e, "e-1" ao número de escuteiros do termo anterior. Esta expressão permite encontrar o número de cumprimentos para um número qualquer de escuteiros, independentemente de se tratar de um número par ou ímpar, conferindo-lhe um aspeto mais formal.

Destaca-se a importância que as tarefas assumiram no processo de generalização e na criação da regra incentivando a investigação de casos particulares e desafiando, em seguida, os alunos, a procurar um meio que lhes permitisse expressar a generalização. De um modo geral, é possível afirmar que as expressões algébricas foram criadas a partir das expressões numéricas usadas no estudo de casos particulares, uma vez que mantêm a mesma estrutura sequencial das operações. Kieran (2007) coloca em evidência estes aspetos, no que respeita à importância que as tarefas assumem na busca da generalização e à forma como crianças muito jovens constroem a regra, a partir de pontes que se estabelecem entre a Aritmética e a Álgebra.

Importa ainda referir a importância que a linguagem natural assumiu na construção dos significados e na clarificação dos conceitos, mantendo um caráter transversal a todas as representações usadas pelos alunos para expressar, ou procurar expressar, a generalização. Alguns autores como Schoenfeld e Arcavi (1988), Kaput (1999), Blanton e Kaput (2011), consideram crucial, nos primeiros anos de ensino, a transição entre a linguagem natural e a notação algébrica, e defendem uma ligação permanente entre elas.

5.2.2. Conclusões sobre o sentido dos símbolos

Relativamente à questão: Que sentido atribuem os alunos aos símbolos algébricos, nomeadamente às letras e expressões algébricas? é possível inferir, de acordo com o quadro teórico estabelecido para analisar os significados, que se podem atribuir às letras (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999; Ponte, Branco & Matos, 2009), que os alunos lhe atribuíram, maioritariamente, o significado de variável, usando-as para descrever relações. Este facto foi evidente na generalidade das tarefas analisadas e, sempre que a regra foi expressa através da utilização da expressão algébrica. A atribuição do significado de variável às letras encontra-se, possivelmente, relacionada com a natureza das tarefas que induzem a uma busca constante de relações entre as quantidades em causa. As explicações dos alunos, ajudam a dissipar dúvidas, no que se refere à forma como os alunos olham as letras: "(...) isto, $\frac{1}{6} \times m$, (indica o m) é os minutos que queremos, $\frac{1}{6}$ é o preço de um minuto, se queremos andar 100 minutos fazemos $\frac{1}{6} \times 100$"; "então nós vimos que para descobrir qualquer coisa (referindo-se ao preço) era o tempo vezes 0, 1(6)" ;"Nós multiplicávamos o preço de um minuto vezes o tempo que nos pediam, que nos ia dar o preço que nós pagávamos."; Aqui (aponta para a expressão algébrica, c x 4 = n) fizemos cubos (c) vezes quatro, porque os que estão no meio nunca se sabe o número certo e depois (10 + n = av), dez mais o resultado dava os autocolantes visíveis."; "Aqui (indica para a expressão algébrica) fizemos 4, que eram os 4 que estavam à volta, vezes o número de cubos, mais os dois das pontas."; "e" é um número qualquer de escuteiros, "n" é o número de apertos de mão, "e – 1" é este número de escuteiros (indica o "e") menos 1, que era o número anterior, vezes esse número que era o "e" a dividir por 2."

Torna-se também evidente, através dos exemplos apresentados, que as letras usadas nas expressões algébricas mantêm uma ligação aos contextos, surgindo como abreviaturas das variáveis, ou das suas unidades de medida consideradas. A linguagem natural, presente em todo o processo e a análise primordial de casos particulares foram, possivelmente, os aspetos mais relevantes na construção dos significados, contribuindo para uma ligação permanente aos contextos das situações propostas nas tarefas. Arcavi (2006) defende estes aspetos, considerando que é partir da análise de casos particulares que os alunos começam a estabelecer relações e a generalizar, usando os símbolos como abreviaturas.

5.2.3. Conclusões relativas às estratégias dos alunos no que se refere ao pensamento funcional

Para responder à questão: Que estratégias usam os alunos para lidar com tarefas de proporcionalidade direta e sequências e outras regularidades? é considerado um quadro teórico que inclui estratégias para lidar com o pensamento funcional na relação de proporcionalidade direta (Costa, 2007; Cramer & Post, 1993a; Fernández, Llinares, Dooren, Bock & Verschaffel, 2010; Lesh , Post, & Behr, 1988), e estratégias usadas para lidar com o pensamento funcional em padrões e regularidades (Branco & Ponte, 2006; Cruz & Martinón, 1998; Santos & Oliveira, 2008). Esta opção, relativa ao quadro teórico, encontra-se relacionada com as tarefas selecionadas para análise que compreendem os dois tópicos. Assim, nas tarefas de proporcionalidade direta "Um percurso pedestre" e "Aluguer de canoas", verificou-se, no estudo de casos particulares, um misto entre a utilização de estratégias multiplicativas, escalares e funcionais, e a utilização de estratégias aditivas de construção, denominadas vulgarmente por *building-up*. Contudo, e quando foram convidados a fazer previsões para termos distantes, verificou-se que alguns grupos abandonaram as estratégias aditivas, passando a adotar explorações multiplicativas inerentes à relação de proporcionalidade direta. Notou-se a mesma tendência na busca da generalização e, uma utilização generalizada de estratégias multiplicativas funcionais, por parte dos grupos que conseguiram formular a regra.

Na tarefa "Um percurso pedestre", apesar de apenas um grupo ter conseguido expressar algebricamente uma regra que permitia determinar o tempo necessário para percorrer distâncias com qualquer número de metros, verificou-se uma utilização quase generalizada de estratégias multiplicativas funcionais para procurar expressar a generalização. Assim, dois grupos determinaram a constante de proporcionalidade, atribuindo-lhe significado, através do quociente entre o tempo e a distância, adotando uma estratégia multiplicativa funcional, baseada no valor da unidade de uma das quantidades referidas, neste caso, calculando o tempo que demoram a percorrer um metro. Outro grupo utilizou razões para expressar a relação entre o tempo e a distância e a distância e o tempo, utilizando, igualmente, uma estratégia multiplicativa funcional. Um quinto grupo procurou, recorrendo à linguagem natural, descrever os procedimentos adotados na questão anterior, onde determinaram o tempo necessário para percorrer 6000 metros; a estratégia adotada é de natureza multiplicativa funcional, tendo as expressões numéricas utilizadas, por este grupo, uma estrutura idêntica às expressões algébricas usadas pelo grupo que conseguiu expressar a generalização ($6000 \div 500 = 12, 12 \times 15 = 180; \mathrm{D} \div 250 = \mathrm{N}; 7{:}30 \times \mathrm{N} = \mathrm{T}$), as diferenças encontram-se apenas nas distâncias e nos tempos que foram usados. Enquanto o grupo que utilizou a expressão numérica usou a distância de 500 metros e o tempo que o grupo demora a percorrê-la, 15 minutos, o grupo que usou a expressão algébrica optou pela distância de 250 metros e pelo tempo correspondente, sete minutos e meio.

Na tarefa “Aluguer de canoas” três dos cinco grupos que a realizaram expressaram a regra através de uma expressão algébrica ($\mathrm{P} = \frac{1}{6} \times \mathrm{m}; \mathrm{T} \times 0{,}1(6) = \mathrm{P}; 0{,}1(6) \times \mathrm{T} = \mathrm{P}$). Estes grupos adotaram procedimentos semelhantes, determinando a constante de proporcionalidade, através do quociente entre o custo e o tempo, atribuindo-lhe significado. As estratégias adotadas foram de natureza multiplicativa funcional, baseadas no valor da unidade de uma das quantidades, nesta situação, o custo de um minuto de aluguer. Os outros dois grupos adotaram estratégias distintas. Um optou por uma estratégia aditiva de construção (10€+10€+10€+...; 60min.+60min.+60min.+...) e outro por uma estratégia multiplicativa funcional, usando razões para expressar a relação entre o custo e o tempo, determinando, através do quociente entre estas duas grandezas a constante de proporcionalidade na empresa Momentos de Aventura, onde se verifica a relação de proporcionalidade direta ($\frac{5}{30} = 0{,}1(6); \frac{7{,}5}{45} = 0{,}1(6); \frac{10}{60} = 0{,}1(6);$ ...). O mesmo procedimento foi adotado para provar a ausência da relação de proporcionalidade direta na empresa Amieira Desportos.

Foi ainda possível verificar que a maioria dos grupos fez um julgamento proporcional, em situações onde não se verifica uma relação de covariação entre as variáveis. Esta tendência foi mais notória na tarefa "Um percurso pedestre", em que apenas dois grupos não fizeram uma previsão, demonstrando, através de cálculos e do uso da linguagem natural, que os Pioneiros não se deslocavam à mesma velocidade. Na tarefa "Aluguer de canoas", apesar de todos os grupos terem identificado a relação de proporcionalidade direta na empresa Momentos de Aventura e a sua ausência na empresa Amieira Desportos, houve ainda um grupo que considerou a possibilidade de fazer previsões para ambas as empresas.

Nas tarefas analisadas sobre sequências e outras regularidades, "Um jogo com cubos e autocolantes" e "A hora da despedida" foi possível identificar, quer no estudo de casos particulares, quer na expressão ou tentativa de expressão da generalização, a utilização maioritária de estratégias explícitas funcionais, baseadas nas relações numéricas entre as variáveis.

Na tarefa "Um jogo com cubos e autocolantes", verificou-se que alguns grupos recorreram a estratégias aditivas para determinar o número de autocolantes, para os casos particulares de três e quatro cubos; as expressões numéricas utilizadas (5+4+5; 5+4+4+5), parecem reproduzir a sequência, em que os cubos das extremidades possuem cinco autocolantes visíveis, e os que se situam entre eles possuem apenas quatro. Contudo, e à semelhança do que sucedeu nas tarefas de proporcionalidade direta, para determinar o número de autocolantes para um número distante de cubos, as estratégias aditivas foram substituídas por outras de natureza multiplicativa. Foi o que sucedeu para um número de cubos igual a 10 ($2\times5=10, 8 \times 4 = 32, 10 + 32 = 42; 5 + (4 \times 8) + 5 = 42; 4 \times 10 + 2 = 42$), e 52 ($2 \times 5 = 10, 50 \times 4 = 200, 10 + 200 = 210; 5 + (4 \times 50) + 5 = 210; 4 \times 52 + 2 = 210$). A partir das expressões numéricas usadas nos casos particulares de 10 e 52 cubos geraram, posteriormente, a regra, recorrendo a estratégias funcionais que evidenciam as relações numéricas entre o número de cubos e o número de autocolantes ($\text{c-}2\times4+5+5=\text{a}; 5+\left[4\times\left(\text{c-}2\right)\right]+5=\text{n.º a}$; $4\times\text{nc}+2=\text{na}$). Ainda nesta tarefa, nas fases de apresentação e discussão, e associadas às representações ativas usadas para descrever raciocínios, é possível identificar estratégias de contagem para os casos particulares de 4 e 5 cubos.

Na tarefa “A hora da despedida”, todos os grupos identificaram a estrutura matemática da situação proposta. Porém, as estratégias de natureza aditiva, usadas por três dos seis grupos para calcular o número de cumprimentos que os 31 escuteiros iriam efetuar entre si ($30 + 29 + 28 + 27 + \cdots + 2 + 1 = 465$), inviabilizaram a descoberta de uma regra eficaz ($\mathrm{C}(\text{-}1)+\mathrm{C}(\text{-}2)+\mathrm{C}(\text{-}3)+\ldots=\mathrm{TC}$) que permitisse determinar, em tempo útil, o número de cumprimentos a efetuar por um grande número de escuteiros. Por outro lado, as estratégias multiplicativas usadas pelos restantes grupos, no estudo de casos particulares ($31 = 15 + 16;\ 31 \times 15 = 465$), quando o número de escuteiros é ímpar; ($36 = 18 + 18;\ 18 \times 35 = 630$), quando o número de escuteiros é par; ($31 - 1 = 30, 30 \div 2 = 15, 31 \times 15 = 465,$ para um número ímpar de escuteiros) ; ($30 \times 31 \div 2 = 465$), podem ser consideradas um aspeto facilitador na descoberta da regra ($\text{n.º ímpar}=(\text{n.º ímpar-1})\div 2+(\text{n.º ímpar}+1)\div 2,\ \text{n.º ímpar}\times(\text{n.ºímpar-1})\div 2=$ n.º de cumprimentos); ($\text{n.º par}=\text{n.ºpar}\div 2+\text{n.ºpar}\div 2,\ (\text{n.ºpar}\div 2)\times(\text{n.ºpar-1})$ nº de cumprimentos); ($\text{n.º ímpar-1}=\text{n.º par},\ \text{n.ºpar}\div 2=\frac{1}{2}\,\text{n.º par},\ \text{n.º ímpar}\times\frac{1}{2}\,\text{n.º par}=$ n.º de cumprimentos); ($(\text{e-1})\times \text{e}\div 2=\text{n.º de cumprimentos}$). Nesta tarefa destaca-se ainda o recurso a uma estratégia recursiva, por parte de um grupo, para determinar o número de cumprimentos quando o número de escuteiros é par (31 escuteiros efetuam 465 cumprimentos, então, 30 escuteiros efetuam 465 – 30 = 435. Ao generalizar, descrevem assim os seus procedimentos: resultado do número de cumprimentos do próximo n.º ímpar – n.º par anterior = n.º de cumprimentos). O uso de contagens, associado a representações ativas, foi ainda determinante nas fases de apresentação e discussão da tarefa, preenchendo lacunas vocabulares e emprestando outra dinâmica ao discurso, à semelhança do que sucedeu na tarefa anterior. É possível concluir que, apesar dos grupos recorrerem maioritariamente a estratégias funcionais, sobretudo no estudo de casos particulares distantes e no processo de generalização, cuja génese se encontra, quase sempre, no estudo desses casos, também utilizam estratégias de contagem para justificar as suas conjeturas e socorrem-se de estratégias recursivas, quando não conseguem estabelecer relações funcionais entre as variáveis.

5.3.Reflexão final

O desenvolvimento deste trabalho constituiu uma excelente oportunidade para aprofundar os meus conhecimentos em Álgebra, e para me ajudar a compreender de que forma é possível desenvolver o pensamento algébrico em alunos do 2.º Ciclo. Para tal, contribuíram leituras de outros estudos já efetuados e de artigos de investigação, com enfoque no pensamento algébrico; a proposta de intervenção didática que criei, sob a orientação da minha orientadora; a análise das produções dos alunos e dos diálogos que se geraram nos momentos de discussão coletiva e as conclusões emergentes da análise.

As ideias marcantes de autores como Arcavi (2006), Canavarro (2009), Kaput (1999), Kieran (2007), Ponte (2006, 2009), sobre o ensino da Álgebra nos primeiros anos de ensino, referenciadas ou mesmo citadas neste estudo, contribuíram de forma significativa, para a construção de uma intervenção didática adequada ao objetivo do estudo e às questões de investigação. O caráter exploratório das tarefas, aliado ao facto de contemplarem situações que promovem a busca da generalização e de um significado para as letras (Arcavi, 2006), bem como a promoção de uma dinâmica de aula centrada no aluno, que contempla os quatro momentos de um modelo exploratório (Canavarro et al, 2012), foram determinantes nos resultados deste estudo, onde prevalecem estratégias intuitivas dos alunos e onde as letras e as expressões algébricas mantêm uma estreita relação com o contexto das situações propostas nas tarefas, adquirindo significado.

A contextualização da intervenção didática num acampamento de escuteiros que decorre junto à Marina da Amieira, nas margens do grande lago da Barragem de Alqueva, despertou o interesse dos alunos, induzindo-os à partilha de experiências e saberes, uma vez que um número significativo pertence ao Corpo Nacional de Escutas e já teve oportunidade de vivenciar a realidade de um acampamento e experienciar algumas das atividades propostas, como percursos pedestres, passeios de canoa no lago de Alqueva, e *peddy-papers*. A familiaridade do local escolhido para a realização do acampamento, situado nas proximidades da área geográfica de residência dos participantes, também permitiu estabelecer um elo de ligação à realidade de cada um.

Recordo ainda que, apesar da análise incidir apenas sobre quatro tarefas, atendendo à dimensão do estudo, a intervenção didática e a recolha de dados contemplaram um total de doze tarefas, constituindo um percurso de aprendizagem significativo para trabalhar os tópicos, proporcionalidade direta e sequências e regularidades. Assim, os resultados deste estudo são consequência da intervenção didática, composta por doze tarefas de natureza exploratória, e não apenas das tarefas apresentadas na análise que constitui o Capítulo 4, devendo a qualidade das aprendizagens dos alunos ser analisadas sob essa perspetiva.

A qualidade das aprendizagens realizadas pelos alunos da responsabilidade, em parte, da intervenção didática proposta, tão diferente das sugestões apresentadas nos manuais, fez-me refletir acerca de aspetos inerentes à gestão curricular, nomeadamente no que respeita à planificação das unidades didáticas e à consequente necessidade e vantagem de criar e usar materiais que potenciem aprendizagens significativas.

Olhando um pouco para os resultados deste estudo que parecem indicar que os alunos, neste nível de ensino, constroem as suas ideias algébricas a partir de experiências que realizam durante o estudo de casos particulares, e de pontes que posteriormente conseguem estabelecer entre a Aritmética e a Álgebra, alcançado, deste modo, o poder da generalização, parece-me importante e possível contemplar, no processo de gestão curricular, a transversalidade da Álgebra, conferindo outra profundidade aos restantes temas do currículo, tal como Kaput (1999) e Kieran (2007) afirmam.

Importa ainda realçar algumas questões que emergiram deste estudo e que poderão, de algum modo, ser um contributo, quer para a investigação em Educação Matemática, quer para as atuais Orientações Curriculares. As representações usadas pelos alunos para representar a generalização, apresentaram na sua maioria um caráter formal. O que pode ter levado os alunos a optar por representações mais formais? Nas produções dos alunos e nos momentos de discussão coletiva, destaca-se a necessidade de atribuírem significado às letras e às expressões algébricas, usando as letras como abreviaturas e procurando estabelecer ligações entre o contexto das situações apresentadas nas tarefas e as expressões algébricas. Terão estes resultados sido influenciados pelas situações contextualizadas apresentadas nas tarefas?

O abandono de estratégias aditivas, usadas no estudo de casos particulares, e a adoção de estratégias multiplicativas funcionais, no estudo de casos distantes, a partir das quais os alunos expressam a generalização, estabelecendo pontes entre a Aritmética e a Álgebra, é um dos aspetos que se destaca na análise. Poderão os resultados ter sido induzidos pela natureza e estrutura das tarefas, que apelavam inicialmente ao estudo de casos particulares próximos e, posteriormente, ao estudo de casos distantes e à generalização?

Não posso terminar sem antes referir que este estudo é uma experiência de ensino sobre o tema Álgebra, realizado na minha sala de aula, com alunos a que lecionei a disciplina de matemática durante dois anos consecutivos, constituindo, deste modo, uma investigação sobre a minha própria prática. Quaisquer indicações para a prática profissional de outros docentes, devem ter em conta as condições específicas inerentes ao estudo, nomeadamente o facto de os alunos já possuírem hábitos de resolver tarefas de natureza exploratória e de usarem com frequência a comunicação matemática para justificar conjeturas e ideias matemáticas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A matemática na educação básica*. Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.

Ainley, J., Bills, L. & Wilson, K. (2005). Designing Spreadsheet-Based Tasks forPurposeful Algebra. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 10*(3), 191-215.

Arcavi, A. (2006). El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos & A. P. Canavarro (Eds.), *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 29-48). Lisboa: SEM-SPCE.

Bandarra, L. (2011). O sinal de igual: Um estudo vertical. In M. H. Martinho, R. A. T. Ferreira, I. Vale, J. P. Ponte, (Eds.), *Ensino e Aprendizagem da Álgebra. Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 305–322). Póvoa de Varzim: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.

Barbosa, A. (2011). Patterning problems: Sixth graders' ability to generalize. In M. Pytlak, T. Rowland & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 420 - 428). Rzeszów, Poland: University of Rzeszów.

Barbosa, A., Vale, I. & Palhares, P. (2008). *The influence of visual strategies in generalization: a study with 6th grade students solving a pattern task*. *JETEN*, Vol. 4, (pp. 42-52).

Baxter, G., & Junker, B. (2001). *Designing cognitive-developmental assessments: a case study in proportional reasoning*. Paper presented at the annual meeting of the *National Council for Measurement in Education*, Seattle, Washington, April 2001.

Bitti, P., & Zani, B. (1997). *A Comunicação como Processo Social*. Lisboa: Editorial Estampa. (Edição original em italiano, 1983).

Blanton, M., & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412-446.

Blanton, M., & Kaput, J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. In J. Cai, E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization, Advances in Mathematics Education* (pp. 5-23). Berlin: Springer-Verlag.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*: uma introdução à teoria e aos métodos (pp. 207-241). Porto: Porto Editora (Obra original em inglês publicada em 1991).

Branco, N., & Ponte, J. P. (2006). Das regularidades às equações: Uma proposta pedagógica para o 7.º ano de escolaridade. In *Actas do XV Encontro de Investigação em Educação Matemática* (CD-ROM). Monte Gordo: SEM-SPCE.

Branco, N. (2008). *O estudo de padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico.* Dissertação de mestrado, Universidade de Lisboa.

Brown, S. & Mehilos, M. (2010). Using tables to bridge arithmetic and algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *15*(9), 532-538.

Bruner, J. (1999). *Para uma Teoria da Educação*. Lisboa: Relógio D'Água.

Canavarro, A. P. (2009). O pensamento algébrico na aprendizagem da matemática nos primeiros anos. *Quadrante, 16*(2), 81-118.

Canavarro, A. P., & Pinto, M. E. (2012). O raciocínio matemático aos seis anos: Características e funções das representações dos alunos. *Quadrante, 21*(2), 51-79.

Canavarro, A. P., & Santos, L. (2012). Explorar tarefas matemáticas. In A. P. Canavarro, L. Santos, A. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes & S. Carreira (Eds.), *Investigação em Educação Matemática – Práticas de ensino da Matemática: Atas do EIEM2012* (pp. 99-104). Lisboa: SPIEM.

Carraher, D., Martinez, M., & Schliemann, A. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education, 40,* 3–22.

Carraher, D., & Schliemann, A. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. K.

Lester (Ed.) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 669-705). Charlotte, NC: NCTM & Information Age Publishing.

Carraher, D., Schliemann, A., & Brizuela, B. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 37(*2), 87-115.

Costa, S. (2007). O raciocínio proporcional dos alunos do 2.º Ciclo do Ensino Básico. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Cramer, K., & Post, T. (1993a). Connecting research to teaching proportional reasoning. *Mathematics Teacher, 86*(5), 404-407.

Cruz, J. & Martinón, A. (1998). Levels of generalization in linear patterns. 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol 2, pp 329-336. University of Stellenbosch. Stellenbosch, South Africa (1998).

De Bruyne, P. et. al. (1975). *Dinâmica da Pesquisa em Ciências Sociais: os pólos da prática metodológica*. Rio de Janeiro: Francisco Alves.

Dooren, W. van, Bock, D. de, Evers, M., & Verschaffel, L. (2009). Students' Overuse of Proportionality on Missing-Value Problems: How Numbers May Change Solutions. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 40, No. 2, 187–211.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. Em *Handbook of research on teaching* (pp. 119-160). New York, NY: MacMillan.

Fernández, C., Llinares, S., Van Dooren, W., De Bock, D., & Verschaffel, L. (2010). The development of students' use of additive and proportional methods along primary and secondary school. *Hub Research Paper, November 2010, 32.*

Friel, S., & Markworth, K. (2009). A Framework for Analyzing Geometric Pattern Tasks. In *Mathematics Teaching In The Middle School*, Vol. 15, No. 1, August 2009.

Gauthier, D. P. (1978). Practical Problems. IN A. Harnett & M. Naish (Eds)., *Theory* *and the practice of education*, Vol I (pp. 18-24). London: Heinemann.

Godino, J., & Llinares, S. (2000). El Interaccionismo Simbólico en Educación Matemática. *Educación Matemática*, *12*(1), 70-92.

Guerreiro, A. (2010). O papel do outro (aluno) na comunicação matemática práticas de uma professora do 1.º ciclo. In L. Santos (Ed.), *Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 211-223). Costa da Caparica: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.

Johanning, D., Weber Jr., Heidt, C., Pearce, P., & Horner, K. (2009). The polar express to early algebraic thinking. *Teaching children mathematics, December 2009/January 2010*, 300-307.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra with understanding. Consultado a 10 de setembro de 2008 em, http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/DA/DATEXTOS/Kaput_99AlgUnd.pdf

Kieran, C. (2007). Developing algebraic reasoning: The role of sequenced tasks and teacher questions from the primary to the early secondary school levels. *Quadrante, Vol. XVI, 1.*

Lambdin, D.V., & Lester, Jr., F.K. (Eds.)(2010), *Teaching and learning mathematics: Translating research for elementary school teachers* (pp.15-22). Reston, VA: NCTM.

Lave, J., & Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripherical participation*. Cambridge: Cambridge University Press.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 93-118). Reston: NCTM e Lawrence Erlbaum.

Llinares. (2000). Intentando comprender la práctica del profesor de matemáticas. Consultado a 7 de março de 2013, em, **http://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/857/1/Llinares%20comprendiendo%20la%20practica%20del%20profesor.pdf**

Lo, Watanabe (1997). Developing ratio and proportion schemes: A story of a fifth grader. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 28, No. 2, 216–236

Mason, J. (2008). Making use of children's powers to produce algebraic thinking. In J.

Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades.* Mahwah, NJ: Lawrence Erl- baum/Taylor & Francis Group & National Council of Teachers of Mathematics.

Matos, A., Silvestre, A. I., Branco, N., & Ponte, J. (2008). Desenvolver o pensamento algébrico através de uma abordagem exploratória. In R. Luengo-González, B. Gómez- Alfonso, M. Camacho-Machín & L. B. Nieto (Eds.), *Investigación en educación matemática XII, (*pp. 505-516). Badajoz: SEIEM.

ME/DEB (2001). *Currículo nacional do Ensino Básico: Competências essenciais*. Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.

ME-DGE (2013). Programa de Matemática e Metas Curriculares para o Ensino Básico. Lisboa: ME.

Mundy, J., Lappan, G., & Phillips, E. (2000) Experiences with patterning. *NCTM's School-Based Journals and Other Publications,*12–19.

NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*. Lisboa: APM. (obra original em inglês, publicada em 1989).

NCTM (2008). *Princípios e normas para a Matemática escolar.* Lisboa: APM.

Pinto, E., & Canavarro, A. P. (2012). O papel das representações na resolução de problemas de Matemática: um estudo no 1.º ano de escolaridade. In O. Magalhães, & A. Folque (Orgs.), *Práticas de investigação em Educação.* Évora: Departamento de Pedagogia e Educação.

Ponte, J. (2002). Investigar a nossa própria prática. *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5-28). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2006). Números e álgebra no currículo escolar. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & A. P. Canavarro (Orgs.), *Números e Álgebra* *na Aprendizagem da Matemática e na Formação de Professores* (pp. 5-27). Porto: SEM/SPCE.

Ponte, J., Branco, N. & Matos, A. (2009). *Álgebra no Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC.

Ponte, J., & Serrazina, L. (2000). *Didática da Matemática do 1.º Ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M.,& Oliveira, P.(2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME/DGIDC.

Pourtois, J.P., & Desmet, H. (1988). *Épistémologie et instrumentation en science humaines*. Liège e Bruxelas: Pierre Madraga Éditeur.

Santos, M., & Oliveira, H. (2008). Generalização de padrões: Um estudo no 5.º ano de escolaridade. In R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho, & L. J. Blanco, (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 461-464). Badajoz: SEIEM, SPCE, APM.

Schoenfeld, A. H., & Arcavi, A. (1988). On the meaning of variable. *Mathematics Teacher*, *81*(6), 420-427.

Serrazina, L., & Oliveira, I. (2001). O professor como investigador: Leitura crítica de investigações em educação matemática. *In Actas do XII Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 29–55). APM: Vila Real.

Serrazina, L., & Oliveira, I. (2010). *O professor e o programa de matemática do ensino básico*. Lisboa: GTI/APM.

Sfard, A. (2000). Symbolizing mathematical reality into being: How mathematical discourse and mathematical objects create each other. In P. Cobb, K. E. Yackel, & K. McClain (Eds), *Symbolizing and communicating: perspectives on Mathematical Discourse, Tools, and Instructional Design* (pp. 37-98). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Sfez, L. (1991). *A Comunicação*. Lisboa: Instituto Piaget.

Sierpinska, A. (1998). Three epistemologies, three views of classroom communication: Constructivism, sociocultural approaches, interactionism. In H. Steinbring, M. G. B. Bussi, & A. Sierpinska (Eds.), *Language and communication in the mathematics classroom* (pp. 30-62). Reston, VA: NCTM.

Silvestre, A. I. (2006). *Investigações e novas tecnologias no ensino da proporcionalidade directa: Uma experiência no 2.º ciclo.* Dissertação de mestrado, Universidade de Lisboa.

Silvestre, A. I. (2012). *O desenvolvimento do raciocínio proporcional: percursos de aprendizagem de alunos do 6.º ano de escolaridade.* Tese de doutoramento. Universidade de Lisboa.

Sutherland, R. (1991). Some Unanswered Research Questions on the Teaching and Learning of Algebra. *For the Learning of Mathematics, 11*(3), 40–46.

TanişLi, D. & Özdaş, A. (2009). The strategies of using the generalizing patterns of the primary school 5th grade students. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri.* Educational Sciences: Theory & Practice *9* (3), 1485-1497

Thompson, I. (2009). Mental Calculation. *Mathematics Teaching*, 40-42.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2007). Whole number concepts and operations. In F. K. Lester (Ed.) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 557-628). Charlotte, NC: NCTM & Information Age Publishing.

Yackel, E. (1997) A foundation for algebraic reasoning in the early grades. *Teaching Children Mathematics, 3*, 276–280.

ANEXOS

Anexo A – Tarefa “Uma questão de misturas...”

Há muito que o grupo de escuteiros de Moura planeava o próximo acampamento. As férias da Páscoa, com os dias maiores e soalheiros, eram a altura ideal para o realizar e poder desfrutar em pleno da Natureza e das atividades que tinham planeado.

Durante uma semana viveram-se momentos inesquecíveis, verdadeiros desafios, em que o espírito de amizade e companheirismo esteve sempre presente, ajudando a desvendar enigmas e a superar obstáculos.

Ao chegarem ao local escolhido, junto à Marina da Amieira, nas margens do grande lago da Barragem de Alqueva, havia que montar o acampamento e em seguida repor energias, com uma boa dose de vitaminas, pois adivinhava-se uma semana plena de desafios. O chefe dos escuteiros sugeriu que se preparasse sumo de laranja, misturando duas doses de concentrado de laranja com três doses de água.

a) A Mariana ofereceu-se para preparar o sumo e colocou num recipiente seis doses de concentrado de laranja. Quantas doses de água deverá juntar para obter um sumo exatamente com o mesmo sabor do da receita sugerida pelo chefe? Explica o teu raciocínio.

b) Se a Mariana colocar num recipiente 15 doses de água, quantas doses de concentrado de laranja deverá juntar para obter um sumo com o mesmo sabor? Explica o teu raciocínio.

c) Se a Mariana quisesse preparar sumo para um grande grupo de caminhantes e usasse um total de 150 doses, quantas doses de concentrado de laranja e de água usaria para obter o mesmo sabor? Explica o teu raciocínio.

d) Descreve como procederias para calcular o número de doses de concentrado de laranja e de água para preparar qualquer quantidade de sumo com o mesmo sabor. Regista os teus procedimentos.

Sugestões: Observa os dados com atenção.
Faz registos do teu trabalho (ex.: recontar a situação; organizar os dados de forma clara, escrever o modo como se relacionam os dados)
[1]

[1] Tarefa adaptada a partir dos materiais preparados pelos professores experimentadores do programa de 2007

Objetivos da tarefa

Tema: Álgebra
Tópico: Proporcionalidade direta

Objetivos:

- Resolver problemas envolvendo situações de proporcionalidade direta;
- Formular e testar conjeturas e generalizações e justificá-las fazendo deduções informais;
- Identificar as variáveis:
  - doses de concentrado de laranja, doses de água;
- Identificar a relação entre as variáveis:
- Interpretar o significado da constante de proporcionalidade:
  - para obter um sumo com o mesmo sabor, a cada dose de concentrado de laranja deve juntar-se $1\frac{1}{2}$ de água;
- Expressar em linguagem natural e em linguagem simbólica a generalização das relações encontradas:
  - 2C + 3A = SUMO ou 1C + 1,5 A = SUMO, se a duas doses de concentrado juntarmos três de água obtém-se um sumo com o mesmo sabor;
- Compreender os conceitos de razão, proporção;
  - $\frac{1}{1,5}$; 1 dose de concentrado está para 1,5 doses de água (razão como a relação entre duas quantidades);
  - $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$; 2 doses de concentrado estão para 3 doses de água assim como 4 doses de concentrado estão para 6 doses de água (propriedade fundamental das proporções);
- Utilizar proporções para modelar situações e fazer previsões;
- Discutir resultados, processos e ideias matemáticos.

Guião de exploração da tarefa

Tempo: 1 bloco de 100 minutos

I – Apresentação da tarefa

Tempo previsto: 10 minutos

A professora apresenta o enunciado da tarefa projetado no quadro e distribui um exemplar por cada um dos alunos. Em seguida, solicita-lhes que façam uma leitura silenciosa e cuidada, dando-lhes o tempo necessário para tal. Nesta fase, os alunos já se devem encontrar organizados em grupos, evitando, deste modo, momentos de confusão durante a realização da tarefa.

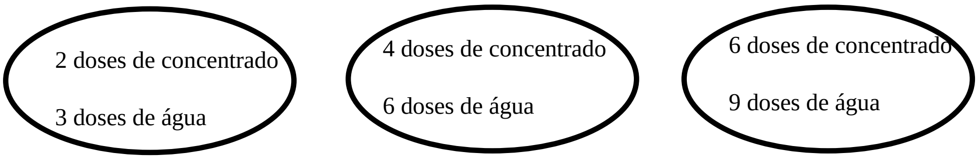
Após a leitura, e por sugestão da professora, alguns alunos recontam a situação apresentada na tarefa e esclarecem o que se pretende com a mesma, apresentando, assim, a sua própria interpretação do texto e das questões colocadas. A professora ficará atenta à ou às diferentes interpretações que possam surgir , verificando se houve elementos importantes que foram descuidados, como **a identificação das variáveis e a relação que mantêm**, que constituam um entrave à compreensão da tarefa. Deve continuar-se a solicitar, enquanto se verifique essa necessidade, a intervenção de outros elementos que possam acrescentar aspetos relevantes, ou apresentar uma interpretação mais clara e compreensível para todos.

Antes de se iniciar a fase do trabalho de grupo a professora deve alertar para o facto, desta tarefa se tratar de uma investigação, em que o sucesso depende do trabalho de equipa que se irá desenvolver no seio de cada grupo, onde todos devem expressar as sua opinião, ouvir e respeitar a dos colegas e chegar a um consenso no que respeita à apresentação dos dados disponíveis, ao seu tratamento e às conjeturas que possam formular, a partir das relações que conseguirem estabelecer.

II – Trabalho em grupos
Tempo previsto: 35 minutos

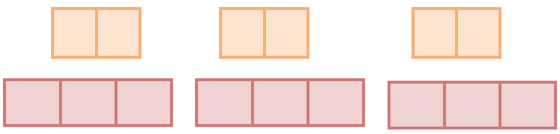
Possíveis abordagens a adotar pelos os alunos:
A abordagem à primeira questão poderá ser de natureza escalar, baseada em relações internas (relações entre quantidades da mesma natureza, se a quantidade de doses de concentrado é 3 vezes maior, então a quantidade de doses de água também é três vezes maior).

Outra abordagem possível é baseada na adição repetida, normalmente, denominada por *building-up.*
Possíveis representações que poderão surgir desta estratégia:



2+2+2 = 6 → *doses de concentra*

3+3+3+= 9 → *doses de água*



Será pouco provável que utilizem uma abordagem baseada na relação externa, dado que existem caminhos mais evidentes para obter a resposta.

2C X 1,5 = 3A
6C X 1,5 = 9A

Possíveis erros poderão estar relacionados com a aplicação de um raciocínio aditivo,

que consiste em estabelecer uma relação dentro de uma razão, calculada subtraindo um termo do outro, (3-2 = 1), sendo essa diferença, em seguida, aplicada à outra razão, (6+1= 7). Se existirem erros desta natureza devem ser levados a discussão, possibilitando aos alunos um debate interessante em torno de um erro comum, na resolução de situações análogas. A professora deve assumir um papel moderador, solicitando a intervenção dos outros alunos, conduzindo-os a explicitarem claramente a situação apresentada e a refletirem sobre a inadequação desta abordagem.
Na resposta à segunda questão poderão surgir abordagens semelhantes às que foram usadas na primeira.

Uma abordagem escalar baseada nas relações entre quantidades da mesma natureza. Para obter 15 doses de água multiplica-se o valor indicado na mistura inicial por 5 (3X5 = 15), da mesma forma, para encontrar o número de doses de concentrado deve multiplicar-se, igualmente, o número de doses, da mistura inicial, pelo mesmo número (2X5 = 10).

A utilização de abordagens de construção:

3 água $\longrightarrow$ 2 concentrado

6 água $\longrightarrow$ 4 concentrado

9 água $\longrightarrow$ 6 concentrado

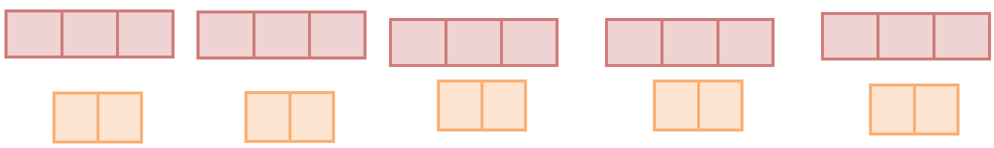
12 água $\longrightarrow$ 8 concentrado

15 água $\longrightarrow$ 10 concentrado

Doses de água 3 + 3 + 3 + 3 + 3 =15

Doses de concentrado 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10

Representação pictórica da mesma abordagem:



Um raciocínio multiplicativo baseado na relação externa entre as variáveis:

$3A \xrightarrow{:1,5} 2C$

$15A \xrightarrow{:1,5} 10C$

Para responder à terceira questão é natural que empreguem uma abordagem *building-up:*

3 água $\longrightarrow$ 2 concentrado $\longrightarrow$ Total de doses: 3+2 = 5

6 água $\longrightarrow$ 4 concentrado $\longrightarrow$ Total de doses: 6+4 = 10

9 água → 6 concentrado → Total de doses: 9+6 = 15

12 água → 8 concentrado → Total de doses: 12+8 = 20

15 água → 10 concentrado → Total de doses: 15+10 = 25

....

90 água → 60 concentrado → Total de doses: 90+60 = 150

No decorrer da resolução os alunos poderão ir estabelecendo relações, encontrando regularidades, não sendo necessário, para alguns, prosseguir com uma estratégia deste tipo até atingir um total de 150 doses.

Possíveis relações encontradas:
9 água → 6 concentrado → Total de doses: 9+6 = 15

x10 x10 x10

90 água → 60 concentrado → Total de doses: 90+60 = 150

O número total de doses corresponde aos múltiplos consecutivos de 5

150 : 5 = 30 (em que150 corresponde ao número total de doses, 5 ao número de doses da mistura inicialmente proposta e 30 ao número de vezes que é necessário juntar a mistura inicial para obter as 150 doses), deste modo e partindo da relação inicialmente proposta:

30 x 2 = 60 → doses de concentrado

30 x 3 = 90 → doses de água

Caso surjam impasses a professora poderá colocar-lhes a seguinte questão:
Que relação observam entre a quantidade final e a quantidade inicial de concentrado e de água?

A última questão apela à generalização:
Caso surjam situações de impasse a professora poderá colocar algumas questões:

- O que descobriram nas respostas anteriores? Isso ajuda-vos a responder a esta?
- O que sabem sobre a relação entre o número de doses de concentrado e o número de doses de água?
- Como podem representar essa relação?

É provável que a regra seja expressa em linguagem natural, mencionando: Para cada duas doses de concentrado de laranja são necessárias três doses de água e da sua soma resulta o número total de doses.
Neste caso a professora poderá colocar-lhes outra questão:

- Podem representar essa relação de outra forma? Como?

Poderão eventualmente surgir algumas expressões:
2xConcentrado + 3xÁgua = Número total de doses

Caso não tenham estabelecido uma relação funcional é pouco provável que apresentem as expressões gerais da função, neste caso é importante que a professora os questione:

- Por quanto tenho de multiplicar o número de doses de concentrado para obter o número de doses de água?
- n.º doses de água = 1,5 x n.º doses de concentrado
- n.º doses de concentrado = o,(6) x n.º doses de água

III – Discussão

Tempo previsto: 35 minutos

A seleção dos trabalhos dos grupos que serão apresentados à turma deve considerar os seguintes aspetos:

- Representações que evidenciem a relação entre as variáveis;
- Alguns erros cometidos, com interesse para a discussão no grande grupo;
- Clareza na forma como encontraram a regra;
- Diferentes representações da relação encontrada: em linguagem natural, em linguagem matemática, através de diagramas, esquemas e do gráfico da relação representado na folha de cálculo.

Os grupos selecionados para a apresentação copiam para o acetato a sua forma de resolução, em seguida, e utilizando como suporte a projeção, explicam o seu raciocínio.

As intervenções da professora devem ser pontuais, deixando espaço aos alunos para a discussão. Poderá assumir um papel moderado, perguntar-lhes se concordam com o que foi transmitido pelo colega, se gostariam de acrescentar algo importante ou explicar de outro modo.

IV – Síntese

Tempo previsto: 20 minutos

Nesta última fase da aula a professora procede à sistematização da tarefa, tendo como ponto de partida o trabalho desenvolvido e apresentado pelos grupos.

Relativamente às primeiras duas questões, os dados podem ser apresentados numa tabela onde é explorada a relação multiplicativa entre as variáveis, verificando-se que, em situações de proporcionalidade direta, os valores aumentam ou diminuem na mesma proporção e que o seu quociente é constante.

Relação escalar (relação interna) entre quantidades da mesma natureza:

Quantidade de concentrado	2	6	10	1
Quantidade de água	3	9	15	1,5

Descrever a propriedade fundamental das proporções, a partir dos dados observados na tabela: Duas doses de concentrado estão para três doses de água assim como seis doses de concentrado estão para nove doses de água, ...

O conceito de razão como a relação entre duas quantidades de natureza distinta (relação externa):

Razão **entre** a quantidade de água e de concentrado de laranja	$\frac{3}{2}=1,5$	$\frac{9}{6}=1,5$	$\frac{15}{10}=1,5$	$\frac{1,5}{1}=1,5$
Razão **entre** a quantidade de concentrado e de água	$\frac{2}{3}=0,(6)$	$\frac{6}{9}=0,(6)$	$\frac{10}{15}=0,(6)$	$\frac{1}{1,5}=0,(6)$

Deve ser explorado o significado do valor invariante encontrado. Neste sentido, a professora deve questioná-los sobre o que representa o quociente (a constante de proporcionalidade) e sobre o seu significado neste contexto.

- 1,5 quantidade de água necessária para uma dose de concentrado;
- 0,(6) quantidade de concentrado necessário para uma dose de água.

A professora deve questioná-los sobre o que significa para eles ser constante e ser proporcional. Esta discussão é importante, no sentido em que ajuda os alunos a atribuir um significado à expressão.

A introdução das tabelas, nesta última fase da aula, pode constituir um pretexto para a entrada das letras como abreviatura das expressões ou palavras utilizadas. Colocar algumas questões é fundamental para atingir esse intuito:

- Será possível substituir as expressões *"quantidade de água" e "quantidade de concentrado"*, por letras que as possam representar?
- O que representam, então, essas letras?
- Que relação encontram entre as letras e o enunciado da tarefa?

A expressão *"quantidade de água"* pode ser substituída por A, por exemplo.
A expressão *"quantidade de concentrado"* pode ser substituída por C, por exemplo.

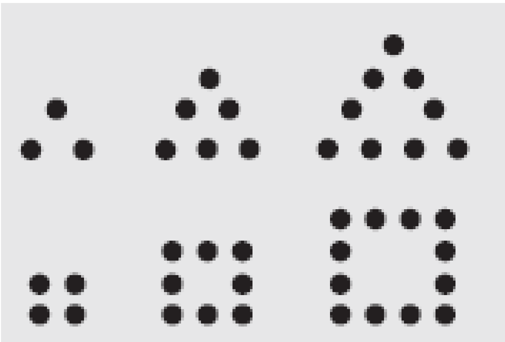
A sistematização da expressão da generalização terá lugar nas tarefas seguintes, caso os alunos não tenham recorrido à sua utilização e se limitem a descrever a generalização através da linguagem natural, contudo, se surgirem algumas expressões, durante a discussão coletiva, poderão ser exploradas, recorrendo à sua simplificação de acordo com a terminologia usada na tabela, abreviando as palavras ou expressões e fazendo surgir as letras.

Anexo B – Tarefa “Enigmas com números geométricos”

À noite, após o jantar, os jovens reuniram-se à volta da fogueira e houve tempo para contar histórias, outras aventuras e resolver enigmas.

O Grupo dos Pioneiros propôs o seguinte enigma ao Grupo dos Exploradores.

Observem as sequências de figuras, e imaginem que se trata de pistas que vos conduzirão a um porto de abrigo, no meio do mato, para cada uma...



1. Determina o número de pintas do quarto termo, do quinto termo, do décimo termo e do centésimo termo de cada sequência.

2. Será possível com cinquenta e quatro pintas construir um termo para qualquer uma das sequências? Explica o teu raciocínio.

3. Como poderás determinar o número de pintas de qualquer termo das sequências? Explica o teu raciocínio.

Sugestões: Observa os dados com atenção.
Faz registos do teu trabalho (ex.: organizar os dados de forma clara, escrever o modo como se relacionam os dados)
Utiliza a folha de cálculo do Excel para representar os dados e para testar as tuas conjeturas.

[1]

[1] Tarefa adaptada a partir do artigo “O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos”, Ana Paula Canavarro, Universidade de Évora e CIEFCUL

Objetivos da tarefa

Tema: Álgebra
Tópico: Proporcionalidade direta
Sequências e regularidades

Objetivos:

- Reconhecer uma sequência pictórica crescente;
- Formular e testar conjeturas e generalizações e justificá-las fazendo deduções informais;
- Identificar as variáveis:
  - Número do termo/ figura e número de pintas que constituem cada figura;
- Identificar a relação entre as variáveis:
  - Na primeira sequência o número de pintas é o triplo do número da figura/termo;
  - Na segunda sequência o número de pintas é o quádruplo do número da figura/termo;
- Reconhecer a existência de proporcionalidade direta nestas sequências,
- Expressar em linguagem natural e em linguagem simbólica a generalização das relações encontradas;
- Discutir resultados, processos e ideias matemáticos.

Guião de exploração da tarefa

Tempo: 1 bloco de 100 minutos

I – Apresentação da tarefa
Tempo previsto: 10 minutos

A apresentação da tarefa irá manter uma estrutura semelhante à anterior: (cada grupo de trabalho dispõe de um computador, que possibilite o uso da folha de cálculo do Excel)

- O enunciado da tarefa será projetado no quadro e será distribuído um exemplar por cada um dos alunos;
- Os alunos, organizados em grupos, procedem à leitura individual e silenciosa da tarefa;
- Os alunos, após a leitura, explicitam a situação apresentada identificando as variáveis e as relação que observam, é importante que existam diferentes intervenções, que possibilitem auscultar vários pontos de vista, de forma a que a tarefa se torne clara para todos.

II – Trabalho em grupos
Tempo previsto: 25 minutos

Possíveis abordagens a adotar pelos os alunos:
Para dar resposta à primeira questão os alunos, após a identificação das variáveis, poderão organizar os dados disponíveis numa tabela e estabelecer relações de natureza

escalar, baseada em relações internas (verificando que na primeira sequência o número de pintas coincide com os múltiplos consecutivos de três, ou os números que surgem na tabuada do três e na segunda com os múltiplos de quatro, ou os números da tabuada do quatro).
Outra abordagem possível é baseada na adição repetida, e irá conduzi-los ás mesmas conclusões sobre os múltiplos. Contudo, uma resposta para o centésimo termo, já exige uma abordagem de natureza externa, que evidencie a relação multiplicativa existente entre o número da figura e número de pintas dessa mesma figura, as características das sequências, pela familiaridade que apresentam com a tabuada, facilitam esta abordagem.

N.º da figura	N.º de pintas	
1	3	
2	6	+3
3	9	
4	12	+3
5	15	
6	18	+3
7	21	
8	24	+3
9	27	
10	30	
...	...	
100	300	

300 = 100 X 3

N.º da figura	N.º de pintas	
1	4	
2	8	+4
3	12	+4
4	16	+4
5	20	+4
6	24	
7	28	
8	32	
9	36	
10	40	
...	...	
100	400	

400 = 100 X 4

Caso os alunos optem por outra representação mais informal, a professora poderá questioná-los:

- Será que poderiam organizar e representar os dados de outra forma?

Para responder à segunda questão, os alunos possivelmente irão recorrer aos conhecimentos que possuem sobre os múltiplos, podendo eventualmente recorrer aos divisores e ao critério de divisibilidade por três.

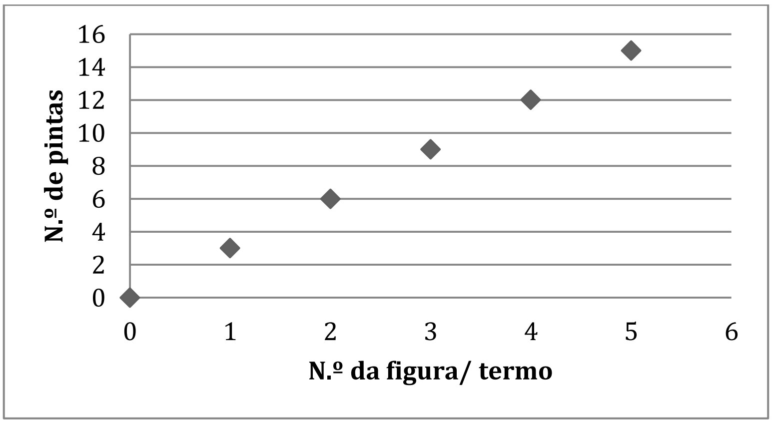
Assim, para verificarem se é possível construir uma figura da primeira sequência com 54 pintas, o mais provável é utilizarem os múltiplos consecutivos de três até 54, ou efetuarem o algoritmo da divisão e verificarem se se trata de uma divisão inteira.
Outra possibilidade é utilizarem o critério de divisibilidade por três: 5+4 = 9, como 9 é múltiplo de três logo o número é divisível por três e existe uma figura, na primeira sequência, com 54 pintas.

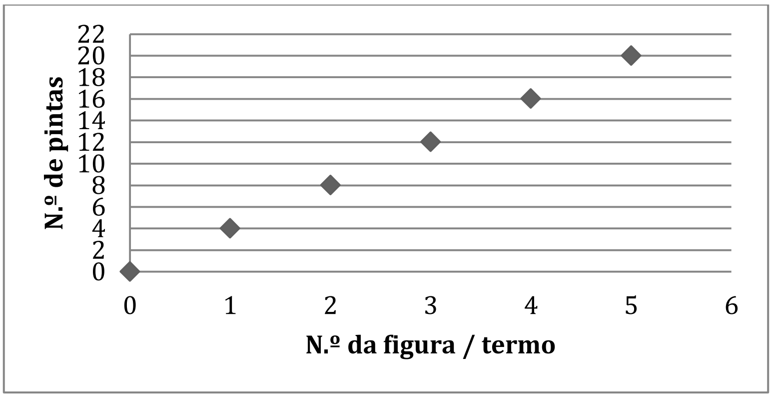
Relativamente à segunda sequência poderão recorrer, da mesma fora aos múltiplos consecutivos de quatro, ou ao algoritmo da divisão, pelo que deverão concluir que não existe nenhuma figura, na segunda sequência, com 54 pintas.
Na resposta à última questão é possível que os alunos utilizem a linguagem natural para expressar a generalização.

- Para encontrar o número de pintas de qualquer termo da primeira sequência devemos multiplicar o número da figura/ termo por três;
- Para encontrar o número de pintas de qualquer termo da segunda sequência devemos multiplicar o número da figura/ termo por quatro.

A professora deve procurar compreender o raciocínio dos alunos e questioná-los, com frequência, sobre as suas estratégias:

- Expliquem-me como pensaram?
- Porque fizeram dessa forma?
- O que vos levou a escolher essa estratégia?
- Será que a resposta que encontraram para a primeira questão vos pode ajudar a encontrar uma solução para a última?





A representação gráfica deve ser explorada na fase de discussão, para que os alunos reconheçam as suas potencialidades, procedendo à identificação das variáveis, à sua leitura e à formulação de questões que possam ser respondidas através do gráfico.

III – Discussão

Tempo previsto: 35 minutos

A seleção dos trabalhos dos grupos que serão apresentados à turma deve considerar os seguintes aspetos:

- Representações que evidenciem a relação entre as variáveis;
- Alguns erros cometidos, com interesse para a discussão no grande grupo;
- Clareza na forma como encontraram a regra;
- Diferentes representações da relação encontrada: em linguagem natural, em linguagem matemática, através de diagramas, esquemas e do gráfico da relação representado na folha de cálculo.

Os grupos selecionados para a apresentação copiam para o acetato a sua forma de resolução, em seguida, e utilizando como suporte a projeção explicam o seu raciocínio.

As intervenções da professora devem ser pontuais, deixando espaço aos alunos para a discussão. Poderá assumir um papel moderados, perguntar-lhes se concordam, com o que foi transmitido pelo colega, se gostariam de acrescentar algo importante ou explicar de outro modo, incentivando-os a expressarem de forma clara o seu raciocínio.

Aquando da projeção do gráfico a professora deve sugerir aos alunos que formulem algumas questões que possam ser respondidas a partir da observação do gráfico, para que comecem a compreender a importância e as potencialidades da representação gráfica da generalização. Os alunos poderão, por exemplo, ser desafiados a descrever possíveis procedimentos que os poderão conduzir a encontrar uma resposta para o número de pintas de qualquer termo das sequências (este processo consiste em proceder a um prolongamento da reta do gráfico de proporcionalidade direta).

IV – Síntese

Tempo previsto: 25 minutos

Nesta última fase da aula a professora procede à sistematização da tarefa, tendo como ponto de partida o trabalho desenvolvido e apresentado pelos grupos.

Relativamente à primeira questões, os dados podem ser apresentados numa tabela onde é explorada a relação multiplicativa entre as variáveis, verificando-se que, em situações de proporcionalidade direta, os valores aumentam ou diminuem na mesma proporção e que o seu quociente é constante.

N.º da figura	N.º de pintas
1	1X3 = 3
2	2X3 = 6
3	3X3 = 9
4	4X3 = 12
5	5X3 = 15
6	6X3 = 18
7	7X3 = 21
8	8X3 = 24
9	9X3 = 27
10	10X3 =30
...	...
100	100X3 = 300

Razão **entre** o número da figura e o número de pintas	$\frac{1}{3}=0,(3)$	$\frac{2}{6}=(0{,}3)$	$\frac{3}{9}=(0{,}3)$	$\frac{4}{12}=(0{,}3)$
Razão **entre** o número de pintas e o número da figura	$\frac{3}{1}=3$	$\frac{6}{2}=3$	$\frac{9}{3}=3$	$\frac{12}{4}=3$

Deve ser explorado o significado do valor invariante encontrado, a constante de proporcionalidade:

- A constante de proporcionalidade = 0,(3)/ 1/3, neste contexto, significa que o termo da sequência corresponde a 1/3 do número de pintas do próprio termo;
- A constante de proporcionalidade = 3, neste contexto, significa que o número de pintas corresponde ao triplo do número do termo da sequência.

Para encontrar o número de pintas para qualquer termo da sequência:

- Número de pintas = número da figura X 3

N.º da figura	N.º de pintas
1	1X4 = 4
2	2X4 = 8
3	3X4 = 12
4	4X4= 16
5	5X4 = 20
6	6X4 = 24
7	7X4 = 28
8	8X4 = 32
9	9X4 = 36
10	10X4 =40
...	...
100	100X4 = 400

Razão **entre** o número da figura e o número de pintas	$\frac{1}{4}=0{,}25$	$\frac{2}{8}=0{,}25$	$\frac{3}{12}=0{,}25$	$\frac{4}{16}=0{,}25$
Razão **entre** o número de pintas e o número da figura	$\frac{4}{1}=4$	$\frac{8}{2}=4$	$\frac{12}{3}=4$	$\frac{16}{4}=4$

- A constante de proporcionalidade = 0,25/ 1/4, neste contexto, significa que o termo da sequência corresponde a 1/4 do número de pintas do próprio termo;
- A constante de proporcionalidade = 4, neste contexto, significa que o número de pintas corresponde ao quádruplo do número do termo da sequência.

Para encontrar o número de pintas para qualquer termo da sequência:

- Número de pintas = número da figura X 4

O aparecimento da letra pode surgir através da simplificação das expressões. Se os alunos não mobilizarem os conhecimentos usados na tarefa anterior a professora poderá questioná-los:

- Será possível substituir as expressões *"número de pintas" e "termo/ número da figura"*, por letras que as possam representar?

- O que representam, então, essas letras?
- Como podem relacionar essas letras com o enunciado da tarefa?
- O que representa a expressão em que a letra surge inserida?

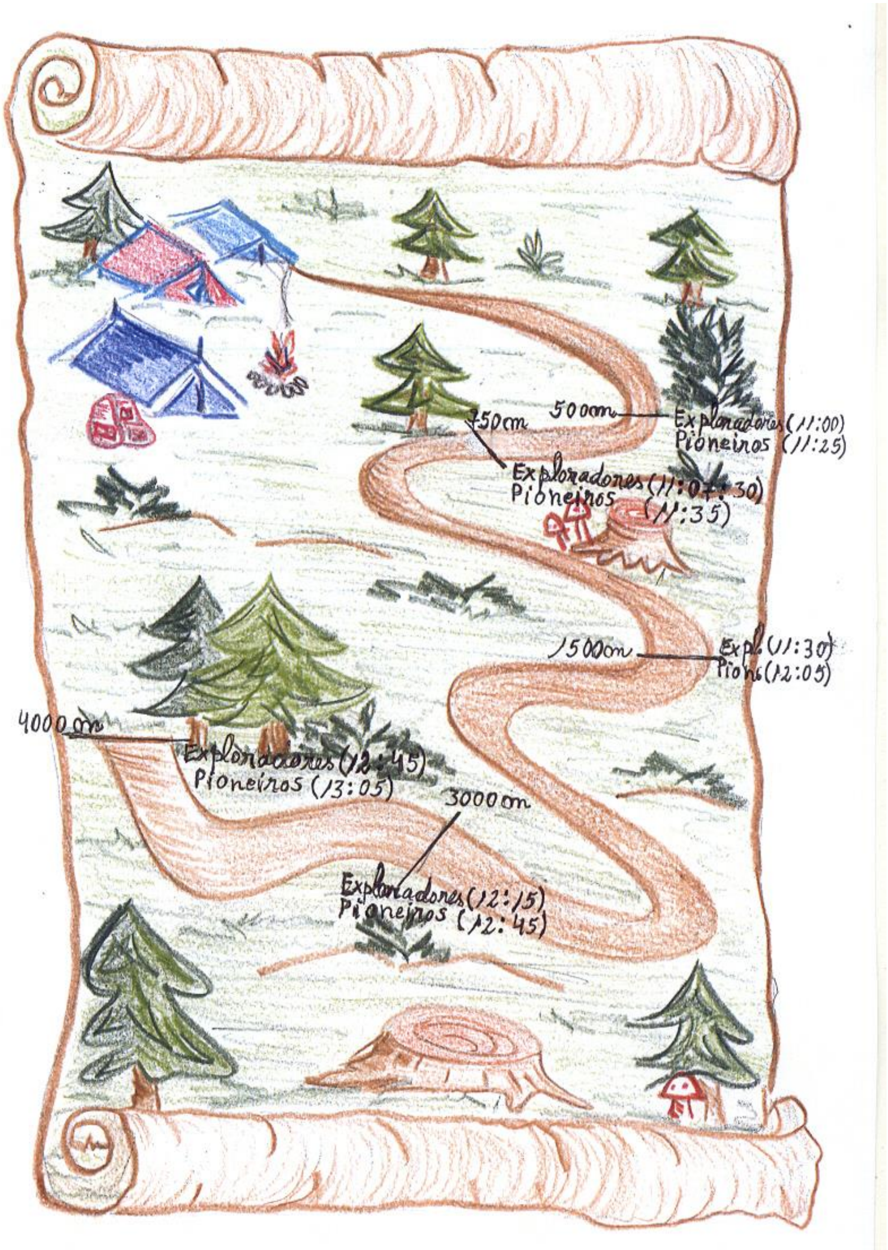
Anexo C – Tarefa “Um percurso pedestre”

Na manhã seguinte teve lugar um percurso pedestre, era a oportunidade dos escuteiros conhecerem a zona envolvente do acampamento.

O percurso incluía trilhos muito estreitos e devido à dimensão do grupo, trinta escuteiros, o chefe propôs que se dividissem em dois grupos. O grupo dos Exploradores e o grupo dos Pioneiros.

Todos se prepararam para iniciar a caminhada levando consigo água e alguns alimentos. O grupo dos Exploradores foi o primeiro a partir tendo iniciado o percurso às 10 horas e 45 minutos, o grupo dos Pioneiros partiu meia hora depois.

O esquema mostra o percurso pedestre realizado pelos grupos dos Exploradores e Pioneiros.



1. Compara o tempo gasto por cada um dos grupos ao longo do percurso pedestre. Investiga se encontras alguma relação entre a distância percorrida e o tempo que foi gasto para a percorrer? Regista as tuas conclusões.

2. Se o percurso pedestre tivesse 6000 m, seria possível prever o tempo que cada um dos grupos precisaria para o concluir? Explica como pensaste.

3. Consegues encontrar uma regra que te permita determinar o tempo gasto pelos grupos, num percurso pedestre com qualquer número de metros? Explica como pensaste.

Sugestões: Observa os dados com atenção.
Faz registos do teu trabalho (ex.: recontar a situação; organizar os dados de forma clara, escrever o modo como se relacionam os dados)
Utiliza a folha de cálculo do Excel para representar os dados e para testar as tuas conjeturas.

[1]

---

[1] Inspirada na tarefa "O Coelho e a Tartaruga", consultada na Tese de Doutoramento de Ana Isabel Silvestre. [1]

Objetivos da tarefa

Tema: Álgebra
Tópico: Proporcionalidade direta

Objetivos:

- Resolver problemas envolvendo situações de proporcionalidade direta;
- Formular e testar conjeturas e generalizações e justificá-las fazendo deduções informais;
- Identificar as variáveis:
  - distância percorrida, em metros; intervalo de tempo, em minutos;
- Identificar a relação entre as variáveis:
  - o quociente entre o tempo, em minutos, e a distância percorrida, em metros, nesse intervalo de tempo é um valor constante, em situações onde se verifique a existência da proporcionalidade direta;
- Interpretar o significado da constante de proporcionalidade:
  - o tempo gasto, em minutos, para percorrer um metro;
- Expressar em linguagem natural e em linguagem simbólica a generalização das relações encontradas:
  - O tempo gasto, em minutos, para percorrer qualquer número de metros, obtêm-se através do produto entre a constante de proporcionalidade e o número de metros do percurso: $t = kd$;
  - Discutir resultados, processos e ideias matemáticos.

Guião de exploração da tarefa

Tempo: 2 blocos de 100 minutos

I – Apresentação da tarefa
Tempo previsto: 15 minutos

A apresentação da tarefa irá manter uma estrutura semelhante às anterior: (cada grupo de trabalho dispõe de um computador, que possibilite o uso da folha de cálculo do Excel)

- O enunciado da tarefa será projetado no quadro e será distribuído um exemplar por cada um dos alunos;
- Os alunos, organizados em grupos, procedem à leitura individual e silenciosa da tarefa;
- Após a leitura, recontam a situação apresentada identificando as variáveis, a hora de partida de cada um dos grupos e as relação que observam, é importante que existam diferentes intervenções, que possibilitem auscultar vários pontos de vista, de forma a que a tarefa se torne clara para todos.

Antes de se iniciar a fase do trabalho de grupo a professora deve alertar para o facto desta tarefa se tratar de uma investigação, em que o sucesso depende do trabalho de equipa que se irá desenvolver no seio de cada grupo, onde todos devem expressar as sua opinião, ouvir e respeitar a dos colegas e chegar a um consenso no que respeita à apresentação dos dados disponíveis, ao seu tratamento e às conjeturas formuladas, a partir das relações estabelecidas.

II – Trabalho em grupos

Tempo previsto: 65 minutos (dada a natureza investigativa da tarefa, a complexidade das relações e dos processos morosos envolvidos que exigem a comunicação verbal do raciocínio, é possível que o tempo previsto seja insuficiente. É necessário garantir que alguns grupos cheguem a conclusões explícitas e fundamentadas, de modo a não defraudar o sucesso e a dinâmica da fase seguinte da aula.)

Possíveis estratégias a seguir pelos alunos:

Para dar resposta à primeira parte da primeira questão os alunos podem organizar os dados disponíveis **numa tabela** e verificarem o tempo gasto por cada grupo no percurso pedestre. Optando por esta representação poderão, inclusive, começar a estabelecer relações entre a distância percorrida e o tempo gasto para a percorrer, usando uma **estratégia aditiva**, contudo, alguns grupos possivelmente não irão sentir necessidade de recorrer à tabela, nesta fase do trabalho, podendo determinar o tempo gasto por cada grupo efetuando a diferença entre a hora de chegada e a hora de partida de cada um dos grupos.

É possível que ao efetuar a diferença entre a hora de chegada e partida, no grupo dos Pioneiros, se cometam alguns erros, que são comuns, quando os alunos efetuam cálculos desta natureza, ao operarem com diferenças horárias.
Nesta situação, a professora deve apelar à concretização da situação através do cálculo mental e pedir aos alunos que analisem a razoabilidade do resultado apresentado.

Distância percorrida em metros	Exploradores (horas de passagem pelas distâncias definidas)	Pioneiros (horas de passagem pelas distâncias definidas)
0	10:45	11:15
500	11:00	11:25
750	11:07:30	11:35
1500	11:30	12:05
3000	12:15	12:45
4000	12:45	13:05
Tempo gasto para percorrer a distância total	2 horas	1 hora e 50 min.

Na segunda parte da questão os alunos são convidados a investigar se existe, de facto alguma relação entre a distância percorrida e o tempo gasto para a percorrer. Nesta fase, a organização dos dados em tabelas é muito importante, permitindo estabelecer relações entre as variáveis. Contudo, poderão surgir outras representações esquemáticas que conduzam à identificação das mesmas relações.

Exploradores

metros percorridos	minutos demorados
500	15
750	22,5
1500	45
3000	90
4000	120

Pioneiros

metros percorridos	minutos demorados
500	10
750	20
1500	50
3000	90
4000	110

As tabelas apresentadas pelos alunos poderão apresentar uma estrutura semelhante, o que lhes possibilita inferir alguma conclusões: Os Exploradores percorreram 1500m em 45 minutos e o dobro da distância, 3000m, no dobro do tempo, 90 minutos; também percorreram 500m em 15 minutos e o triplo da distância, 1500m, no triplo do tempo, 45 minutos. No caso dos Pioneiros essa regularidade não se verifica.

O uso de unidades de tempo idênticas ajuda a estabelecer relações, contudo, é provável que alguns grupos continuem a trabalhar com horas e minutos. Se esse facto não constituir um entrave ao trabalho dos alunos, a professora deve deixá-los seguir o seu raciocínio.

Poderão investigar o tempo gasto por cada um dos grupo para percorrer determinadas distâncias e estabelecer relações entre distâncias idênticas e o tempo que cada grupo demorou, para as percorrer, usando uma estratégia aditiva para encontrar regularidades, com base numa relação interna.

Exploradores

250 m → 7,5 minutos

+ 7,5 minutos

500 m → 15 minutos

+ 7,5 minutos

750 m → 22,5 minutos

1000 m → 30 minutos + 7,5 minutos

Os Exploradores demoram, sempre o mesmo tempo, 7,5 minutos, para percorrer a mesma distância, 250 metros, podendo por isso considerar-se que são muito regulares no caminhar, existe uma regularidade

Pioneiros

250 m $\rightarrow$ 10 minutos

500 m $\rightarrow$ 10 minutos

750 m $\rightarrow$ 20 minutos

1000 m $\rightarrow$ 20 minutos

No Grupo dos Pioneiros, não se consegue observar uma regularidade, pois tanto demoram 10 minutos para percorrer 250 metros, como gastam o mesmo tempo para percorrer 500 metros.

Se optarem por uma exploração semelhante, poderão concluir que, enquanto o grupo dos Exploradores fez o percurso a uma velocidade constante, gastando sempre o mesmo tempo para percorrer a mesma distância, o grupo dos Pioneiros, não fez todo o percurso à mesma velocidade, houve troços que percorreram mais rapidamente e outros mais lentamente.

A professora deve procurar compreender o raciocínio dos alunos e questioná-los, com frequência, sobre as suas estratégias:

- Expliquem-me como pensaram?
- Porque fizeram dessa forma?
- O que vos levou a escolher essa estratégia?
- Será que poderiam organizar e representar os dados de outra forma?

Caso nenhum grupo recorra à exploração de relações multiplicativas entre os dados do problema, apresentados numa tabela ou num esquema, a professora deve estimular essa procura, levando-os a pensar sobre situações concretas, remetendo-os para as relações funcionais:

- Será possível descobrirmos o tempo que cada grupo demorou para percorrer um metro? Será que só existe uma forma de encontrar a resposta para esta questão?
- E como poderemos saber a distância percorrida num minuto?

Para encontrar uma resposta à segunda questão, os alunos devem considerar as relações encontradas na primeira e as conjeturas formuladas.
A professora apoia eventuais dificuldades colocando algumas questões:

- Que relações encontraram entre a distância percorrida e o tempo gasto para a percorrer?
- Essa relação verifica-se sempre?
- Onde poderão procurar a resposta a essa questão? (remetendo-os para os dados e para as relações encontradas)

Espera-se que os alunos considerem que apenas é possível prever o tempo, no caso dos Exploradores que fizeram o percurso a uma velocidade constante, demorando sempre o mesmo tempo para percorrer as mesmas distâncias.

Uma das possíveis estratégias a usar pelos alunos poderá ser a seguinte:

Os Exploradores para percorrerem 1000 metros gastam 30 minutos, para percorrer 6000 metros, gastarão 30 x 6 = 180 minutos, ou seja, 3 horas.
Ou, se para percorrer 3000 gastam 90 minutos, para percorrer 6000 gastarão o dobro, ou seja 90x2 = 180
O uso da estratégia aditiva, partindo dos mesmos princípios pode ser outar possibilidade:
30+30+30+30+30+30 = 180
90+90 = 180

Se na primeira questão tiverem determinado a constante de proporcionalidade, o tempo gasto pelo grupo dos Exploradores para percorrer um metro, poderão usar esse valor para determinar o tempo gasto para percorrer os 6000 metros: 0,03x6000 = 180 minuto.

É possível, contudo, que alguns grupos considerem que é possível prever o tempo dos Pioneiros, desprezando o facto de não existir uma regularidade que permita determinar o tempo gasto para percorrer 6000 metros. Se surgirem explorações desta natureza poderão ser usadas no momento da discussão, aguardando a reação dos restantes quando confrontados com esta hipótese. Estes erros poderão ser considerados uma mais valia nos momentos de discussão dado que os alunos são obrigados a encontrar argumentos que fundamentem as suas respostas e sejam convincentes para os restantes, e ao fazê-lo têm a oportunidade de clarificar as suas ideias e os conceitos em questão.

Na terceira questão os alunos são convidados a generalizar, a procurar uma regra, que lhes permita determinar o tempo gasto, e que seja válida para qualquer distância.

- O sucesso desta questão depende, em muito, dos procedimentos usados nas questões anteriores, é fundamental que os alunos tenham percebido que existe uma regularidade entre o tempo e a distância percorrida no grupo dos Exploradores e que essa regularidade não se verifica no grupo dos Pioneiros, sendo apenas possível encontrar uma regra nos casos onde se verifiquem regularidades.

- O tipo de estratégias usadas anteriormente também vai condicionar a procura da regra. Os grupos que apenas fizerem uso de estratégias aditivas, terão mais dificuldade em encontrá-la, dada a natureza multiplicativa das relações de proporcionalidade direta, contudo, esta questão poderá conduzi-los à procura dessa relação, que anteriormente não sentiram necessidade de usar, uma vez, que os procedimentos adotados possibilitaram-lhes encontrar uma resposta para as primeiras questões.

- O caminho encontra-se facilitado para os grupos que usaram uma relação multiplicativa, tendo determinado a constante de proporcionalidade.

Nesta fase a professora para apoiar eventuais dificuldades pode colocar algumas questões:

- O que descobriram nas respostas anteriores? Isso ajuda-vos a responder a esta?
- O que sabem sobre a relação entre o tempo e a distância percorrida?
- Como podem representar essa relação?

O mais provável é que os alunos expressem a regra em linguagem natural, mencionando que o tempo gasto para percorrer qualquer distância se pode obter através do produto entre o tempo gasto para percorrer um metro e o número de metros do percurso.

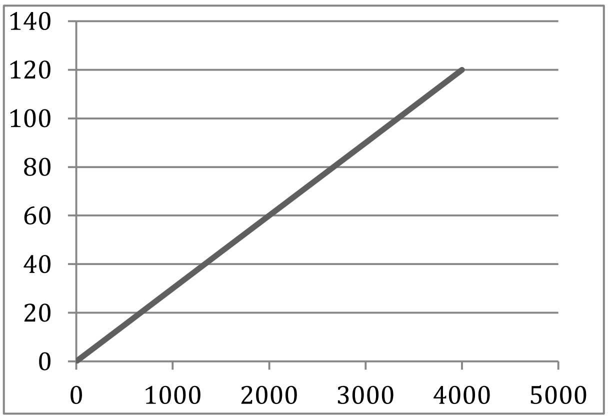
Neste caso a professora deverá confrontá-los com outra questão:

- Podem representá-la ainda de outra forma? Como?

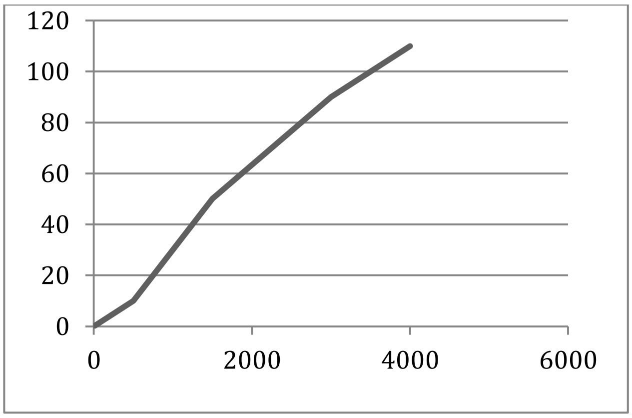
Poderão eventualmente surgir algumas expressões:
tempo = 0,03 x n.º de metros percorridos
t = 0,03 x d

Com o uso da folha de cálculo de Excel surge a representação gráfica:

Exploradores



Pioneiros



O uso da folha de cálculo de Excel pode induzir à exploração da relação entre as variáveis, distância percorrida em metros e o tempo que demoram para a percorrer. A observação dos gráficos permite observar a linearidade do gráfico de proporcionalidade direta, dos Exploradores, em confronto com o dos Pioneiros, onde não se verifica essa regularidade. A utilização da folha de cálculo, pode acontecer após a organização dos dados, ajudando os alunos a formular as suas conjeturas, ou após a resolução da tarefa como forma de as comprovar.

III – Discussão

Tempo previsto: 60 minutos

A seleção dos trabalhos dos grupos que serão apresentados à turma deve considerar os seguintes aspetos:

- Representações que evidenciem a relação entre as variáveis;
- Alguns erros cometidos, com interesse para a discussão no grande grupo;
- Clareza na forma como encontraram a regra;
- Diferentes representações da relação encontrada: em linguagem natural, em linguagem matemática, através de diagramas, esquemas e do gráfico da relação representado na folha de cálculo.

Os grupos selecionados para a apresentação copiam para o acetato a sua forma de resolução, em seguida, e utilizando como suporte a projeção, explicam o seu raciocínio.

As intervenções da professora devem ser pontuais, deixando espaço aos alunos para a discussão. Poderá assumir um papel moderados, perguntar-lhes se concordam, com o que foi transmitido pelo colega, se gostariam de acrescentar algo importante ou explicar de outro modo.

IV – Síntese

Tempo previsto: 40 minutos

Nesta última fase da aula a professora procede à sistematização da tarefa, tendo como ponto de partida o trabalho desenvolvido e apresentado pelos grupos.
Relativamente à primeira questão, os dados podem ser apresentados em tabelas onde é explorada a relação multiplicativa entre as variáveis, verificando-se que, em situações de proporcionalidade direta, os valores aumentam ou diminuem na mesma proporção e que o seu quociente é constante.

Exploradores

metros percorridos	minutos demorados	minutos/metros
500	15	15/500 = 0,03
750	22,5	22,5/750 = 0,03
1500	45	45/1500 = 0,03
3000	90	90/3000 = 0,03
4000	120	120/4000 = 0,03

Pioneiros

metros percorridos	minutos demorados	minutos/metros
500	10	10/500 = 0,02
750	20	20/750 = 0,02(6)
1500	50	50/1500 = 0,0(3)
3000	90	90/3000 = 0,03
4000	110	110/4000 = 0,0275

Deve ser explorado o significado do valor invariante encontrado, a constante de proporcionalidade, e o significado da própria expressão.

- A constante de proporcionalidade = 0,03 e neste contexto significa o tempo que os Exploradores demoram para percorrer um metro.
- Em matemática, esse valor constante encontrado surge, muitas vezes, representada pela letra K, logo poderemos abreviar a expressão escrevendo: K = 0,03

No caso dos Pioneiros não existe proporcionalidade, dado que o quociente entre as variáveis não é constante.

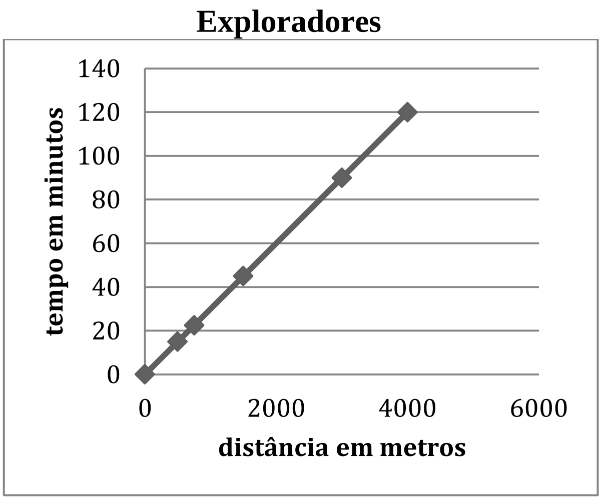
Determinar o tempo gasto para percorrer qualquer distância apenas é possível no grupo dos Exploradores que fez o percurso a uma velocidade constante.

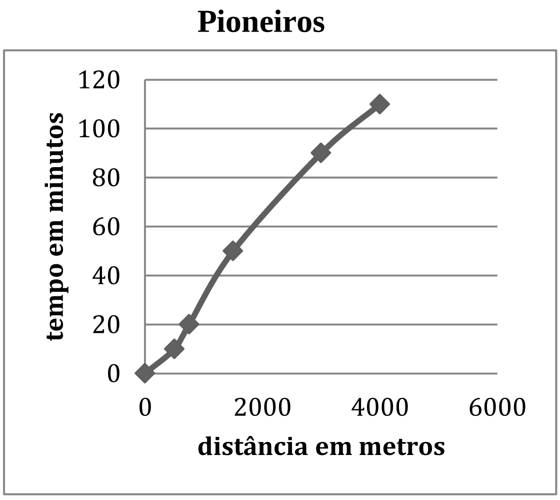
- Tempo gasto para percorrer qualquer distância = 0,03 x distância percorrida
- Tempo gasto para percorrer qualquer distância = K x distância percorrida

A exploração do gráfico como outro meio de representar os dados é importante, dado que permite dar resposta a algumas das situações colocadas e conjeturar sobre outras, ao explorar a linearidade do gráfico de proporcionalidade direta e as potencialidades dessa característica, e a imprevisibilidade do gráfico onde não se verifica essa linearidade.

O conceito de variável deve ser explorado para que os alunos se vão familiarizando com o termo. Para tal devem identificar as variáveis que neste problema respeitam à distância e ao tempo e discutir o significado do termo, associado ao gráfico.
Pode igualmente introduzir-se as expressões: variável dependente e variável independente: neste contexto, a variável dependente é o tempo e a variável independente é a distância, dado que o tempo depende da distância percorrida.

Poderá ainda ser pertinente a discussão em torno de variáveis discretas e contínuas, através da comparação dos contextos e dos gráficos desta tarefa com os da anterior.





O aparecimento da letra pode surgir através da simplificação das expressões. Se os alunos não mobilizarem os conhecimentos usados nas tarefas anteriores a professora poderá questioná-los:

- Será possível substituir as expressões *"Tempo gasto para percorrer qualquer distância" e "distância percorrida",* por letras que as possam representar?
- O que representam, então, essas letras?
- Como podem relacionar essas letras com o enunciado da tarefa?
- O que representa a expressão em que a letra surge inserida?

Anexo D – Tarefa "Aluguer de canoas"

No dia seguinte teve lugar um passeio de canoas pelo grande lago de Alqueva, alguns membros do grupo estavam muito entusiasmados com a oportunidade que tinha surgido. Finalmente iam poder experimentar e praticar canoagem...

Consultaram as tabelas de preços de duas empresas:

Momentos de Aventura	
Tempo (minutos)	Preço (euros)
30	5
45	7,5
60	10
90	15

Amieira Desportos	
Tempo (minutos)	Preço (euros)
40	5
60	10
90	16
180	28

1. Será possível prever, com exatidão, o preço a pagar pelo aluguer das canoas, durante cinco horas, para cada uma das empresas? Justifica a tua resposta.

2. Consegues encontrar uma regra que te permita determinar o preço a pagar para qualquer número de minutos, para cada uma das empresas? Explica o teu raciocínio.

Sugestões: Observa os dados com atenção.
Faz registos do teu trabalho (ex.: recontar a situação; organizar os dados de forma clara, escrever o modo como se relacionam os dados)
Utiliza a folha de cálculo do Excel para representar os dados e para testar as tuas conjeturas.

Objetivos da tarefa

Tema: Álgebra
Tópico: Proporcionalidade direta

Objetivos:

- Resolver problemas envolvendo situações de proporcionalidade direta;
- Formular e testar conjeturas e generalizações e justificá-las fazendo deduções informais;
- Identificar as variáveis:
    - Tempo, em minutos; preço, em euros;
- Identificar a relação entre as variáveis:
    - o quociente entre o tempo, em minutos, e o preço, em euros, é um valor constante, em situações onde se verifique a existência da proporcionalidade direta;
- Interpretar o significado da constante de proporcionalidade:
    - O preço a pagar por cada minuto (cada minuto tem o custo de 0,1(6) €/ 1/6 de 1 €;
    - O tempo, em minutos que é possível dispor, pagando um euro (cada 6 minutos tem o custo de 1€);
- Expressar em linguagem natural e em linguagem simbólica a generalização das relações encontradas:
    - O preço a pagar por qualquer número de minutos obtém-se através do produto do preço a pagar por cada minuto (a constante de proporcionalidade) pelo número de minutos: Preço (em euros) = 1/6 x tempo (em minutos)
    - Discutir resultados, processos e ideias matemáticos.

Guião de exploração da tarefa

Tempo: 1 blocos de 100 minutos

I – Apresentação da tarefa
Tempo previsto: 10 minutos
A apresentação da tarefa irá manter uma estrutura semelhante às anterior: (cada grupo de trabalho dispõe de um computador, que possibilite o uso da folha de cálculo do Excel)

- O enunciado da tarefa será projetado no quadro e será distribuído um exemplar por cada um dos alunos;
- Os alunos, organizados em grupos, procedem à leitura individual e silenciosa da tarefa;
- Após a leitura, recontam a situação apresentada identificando as variáveis e as relação que observam podendo exemplificar essas relações recorrendo aos dados disponíveis nas tabelas, é importante que existam diferentes intervenções, que possibilitem auscultar vários pontos de vista, de forma a que a tarefa se torne clara para todos.

II – Trabalho em grupos
Tempo previsto: 35 minutos
Possíveis estratégias a seguir pelos alunos:

Para dar resposta à primeira questão os alunos, a partir dos dados disponíveis nas tabelas, poderão verificar a existência, ou não existência, de uma regularidade para cada uma das empresas:

Momentos de Aventura	
Tempo (minutos)	Preço (euros)
30	5
45	7,5
60	10
90	15

Relativamente à empresa Momentos de Aventura poderão levantar algumas inferências, através de relações que estabelecerem entre o tempo, em minutos e o respetivo custo: se uma hora, que corresponde a 60 minutos, tem o custo de 10€; ½ hora, 30 minutos, tem um custo de 5€, dado que se trata de metade do tempo; seguindo o mesmo raciocínio;15 min tem um custo de 2,5€ e 90 minutos têm um custo de 15€, pois trata-se de um custo de 60 minutos mais 30 minutos. Através destas relações poderão concluir que existe uma regularidade.

Recorrendo aos conhecimentos já adquirido nas tarefas anteriores poderão recorrer à exploração de relações multiplicativas entre as variáveis:

$\frac{30}{5} = 6 \qquad \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$

$\frac{45}{7{,}5} = 6 \qquad \frac{7{,}5}{45} = \frac{1}{6}$

$\frac{60}{10} = 6 \qquad \frac{10}{60} = \frac{1}{6}$

$\frac{90}{15} = 6 \qquad \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$

Quanto à empresa Amieira Desportos poderão procurar estabelecer o mesmo tipo de relações entre os dados disponíveis: uma hora tem um custo de 10€, 30 minutos um custo de 5€, logo 90 minutos, deveria ter um custo de 15€, o que não se verifica. Ou se uma hora tem um custo de 10€, se existir uma regularidade, 180 minutos que corresponde a três horas teriam um custo de 30€, e não 28€ com se encontra na tabela, logo nesta empresa não se verifica uma regularidade entre o tempo e o preço.
Recorrer à exploração de relações multiplicativas entre as variáveis:

Amieira Desportos	
Tempo (minutos)	Preço (euros)
40	5
60	10
90	16
180	28

$\frac{40}{5} = 8$ $\frac{5}{40} = \frac{1}{8}$

$\frac{60}{10} = 6$ $\frac{10}{60} = \frac{1}{6}$

$\frac{90}{16} = \frac{45}{8} = 5{,}625$ $\frac{16}{90} = \frac{8}{45} = 0{,}1(7)$

$\frac{180}{28} = \frac{45}{7} \approx 6{,}429$ $\frac{28}{180} = \frac{7}{45} = 0{,}1(5)$

Neste caso poderão concluir que não se verifica uma regularidade, dado que o quociente entre as variáveis não é constante, não sendo possível prever o preço a pagar pelo aluguer das canoas, nesta empresa, durante cinco horas.

No caso da empresa Momentos de Aventura, verifica-se uma regularidade, o que possibilita prever o preço a pagar durante 5 horas. Se o custo de uma hora é 10€, por cinco horas irá pagar 50€. É provável que alguns grupos considerem que é possível fazer uma previsão para qualquer uma das empresas, ignorando o facto de existirem ou não regularidades. Caso surjam soluções desta natureza devem ser levadas a discussão, dando oportunidade aos alunos de expressar de forma justificada o seu acordo ou desacordo, em situações desta natureza.

A resposta à segunda questão tem implícita a relação multiplicativa entre as variáveis, inerente a situações onde se verifica a existência de proporcionalidade direta. Os grupos que já tenham explorado esta relação para encontrar a resposta à primeira questão, têm a tarefa simplificada.
Se surgirem impasses, dever-lhes-ão ser colocadas algumas questões:

- O que descobriram na resolução da questão anterior? Isso ajuda-vos a responder a esta?
- O que sabem sobre a relação entre o preço, em euros, e o tempo, em minutos?
- Como podem representar essa relação?

Caso não tenham recorrido à exploração de relações multiplicativas entre as variáveis, a professora deve estimular essa procura, levando-os a pensar sobre situações concretas, remetendo-os para as relações funcionais:

- Será possível, através dos dados disponíveis, descobrirmos o custo de 1 minuto?
- E como poderemos saber o tempo de que dispomos se pagarmos apenas 1€?

A exploração da relação multiplicativa entre as variáveis, e os conhecimentos que já possuem das tarefas anteriores, permitir-lhes-á concluir que apenas é possível encontrar uma regra para a empresa em que se verifica uma regularidade, a empresa Momentos de Aventura.

A regra poderá ser expressa em linguagem natural: O preço a pagar por qualquer número de minutos obtém-se através do produto do preço a pagar por cada minuto (a constante de proporcionalidade) pelo numero de minutos.
Neste caso a professora deverá confrontá-los com outra questão:

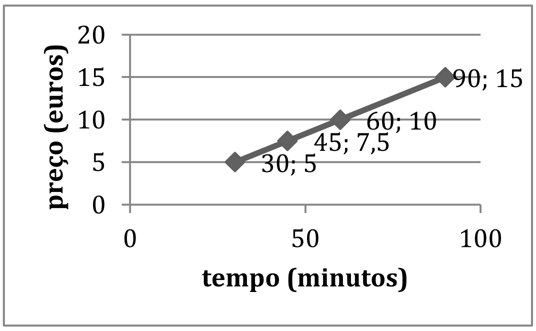
- Podem representá-la ainda de outra forma? Como?

Poderão eventualmente surgir algumas expressões, em que recorram à constante de proporcionalidade.

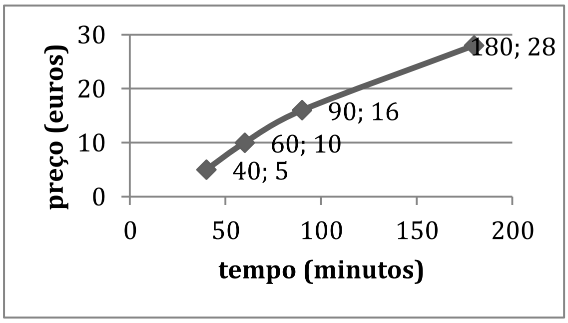
Preço (em euros) = 1/6 x tempo (em minutos)
P = k X T

Através da representação gráfica é possível observar o comportamento distinto das duas funções. É provável que os alunos estabeleçam comparações com os gráficos da tarefa anterior, em que apenas o gráfico representado pela reta, representa uma situação onde existe uma regularidade.

Momentos de Aventura



Amieira Desportos



III – Discussão

Tempo previsto: 35 minutos

A seleção dos trabalhos dos grupos que serão apresentados à turma deve considerar os seguintes aspetos:

- Representações que evidenciem a relação entre as variáveis, tabelas e gráficos;
- Alguns erros cometidos, com interesse para a discussão no grande grupo;
- Clareza na forma como encontraram a regra;
- Diferentes representações da expressão algébrica encontrada.

Os grupos selecionados para a apresentação copiam para o acetato a sua forma de resolução, em seguida, e utilizando como suporte a projeção explicam o seu raciocínio.

As intervenções da professora devem ser pontuais, deixando espaço aos alunos para a discussão. Poderá assumir um papel moderados, perguntar-lhes se concordam, com o que foi transmitido pelo colega, se gostariam de acrescentar algo importante ou explicar de outro modo. **A discussão das representações gráficas e das expressões algébricas deve ocupar um lugar de destaque, nesta fase da aula, de forma a que seja possível perceber os significados que lhes são atribuídos pelos alunos.**

IV – Síntese

Tempo previsto: 15 minutos

Nesta última fase da aula a professora procede à sistematização da tarefa, tendo como ponto de partida o trabalho desenvolvido e apresentado pelos grupos.

Relativamente à primeira questão, os dados podem ser apresentados em tabelas onde é explorada a razão entre as variáveis, verificando-se que, em situações de proporcionalidade direta, os valores aumentam ou diminuem na mesma proporção e que o seu quociente é constante.

Momentos de Aventura

Razão **entre** o tempo, em minutos, e o preço, em euros	$\frac{30}{5} = 6$	$\frac{45}{7{,}5} = 6$	$\frac{60}{10} = 6$	$\frac{90}{15} = 6$
Razão **entre** o preço, em euros, e o tempo, em minutos	$\frac{5}{30} = \frac{1}{6}$	$\frac{7{,}5}{45} = \frac{1}{6}$	$\frac{10}{60} = \frac{1}{6}$	$\frac{15}{90} = \frac{1}{6}$

Amieira Desportos

Razão **entre** o tempo, em minutos, e o preço, em euros	$\frac{40}{5} = 8$	$\frac{60}{10} = 6$	$\frac{90}{16} = \frac{45}{8}$	$\frac{180}{28} = \frac{45}{7}$
Razão **entre** o preço, em euros, e o tempo, em minutos	$\frac{5}{40} = \frac{1}{8}$	$\frac{10}{60} = \frac{1}{6}$	$\frac{16}{90} = \frac{8}{45}$	$\frac{28}{180} = \frac{7}{45}$

Ao comparar as duas tabelas pode-se concluir que apenas existe uma regra na empresa Momentos de Aventura, onde o quociente entre as variáveis é um valor constante.
Deve ser explorado o significado do valor invariante encontrado, a constante de proporcionalidade, e o significado da própria expressão.

- A constante de proporcionalidade = 6, neste contexto, significa que cada 6 minutos tem o custo de 1€.
- A constante de proporcionalidade = $\frac{1}{6}$, neste contexto, significa o preço a pagar por cada minuto que corresponde a $\frac{1}{6}$ de 1€.

No caso da empresa, Amieira Desportos, não existe proporcionalidade, dado que o quociente entre as variáveis não é constante.

Determinar o preço a pagar para qualquer número de minutos apenas é possível na empresa Momentos de Aventura, onde se verifica uma regularidade, neste caso, a existência de proporcionalidade direta.

- Preço (em euros) = 1/6 x tempo (em minutos)
- Preço (em euros) = k x tempo (em minutos)

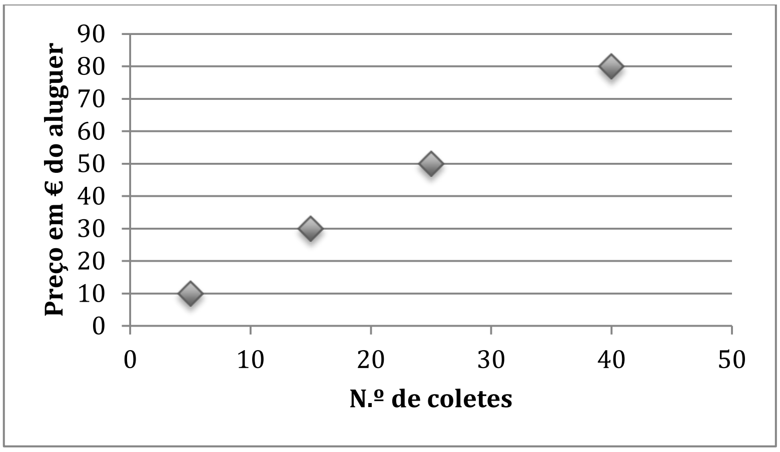
O aparecimento da letra pode surgir através da simplificação das expressões. Se os alunos não mobilizarem os conhecimentos usados nas tarefas anteriores a professora poderá questioná-los:

- Será possível substituir as expressões *"Preço" e "tempo"*, por letras que as possam representar?
- O que representam, então, essas letras?
- Como podem relacionar essas letras com o enunciado da tarefa?
- O que representa a expressão em que a letra surge inserida?

Anexo E – Tarefa “Os acidentes previnem-se”

Praticar canoagem é muito divertido quando tomamos alguns cuidados que permitem navegar em segurança, como é o caso do uso obrigatório de coletes de salvação, um aspeto que nunca pode ser descuidado.

A empresa *Momentos de Aventura* tinha afixado num placard o gráfico seguinte:



1. O Chefe observou o gráfico e percebeu quanto iria pagar pelo aluguer de todos os coletes. Será que também consegues prever esse valor considerando que na atividade irão participar 30 jovens e um adulto?

2. Será possível representar os dados do gráfico de outro modo? Encontra outra forma de representação.

3. Quantos coletes é possível alugar com 200 euros? Será possível descobrir essa quantidade através do gráfico?

4. Encontra uma regra que te permita determinar o valor a pagar pelo aluguer de qualquer número de coletes. Explica o teu raciocínio.

Objetivos da tarefa

Tema: Álgebra
Tópico: Proporcionalidade direta

Objetivos:

- Resolver problemas envolvendo situações de proporcionalidade direta;
- Formular e testar conjeturas e generalizações e justificá-las fazendo deduções informais;
- Ler e interpretar gráficos de proporcionalidade direta;
- Reconhecer as características e potencialidades de gráficos de proporcionalidade direta;
- Identificar as variáveis:
    - N.º de coletes; preço, em euros do aluguer;
- Identificar a relação entre as variáveis:
    - o quociente entre o preço, em euros, do aluguer e o número de coletes, é um valor constante;
- Interpretar o significado da constante de proporcionalidade:
    - O preço do aluguer de um colete;
- Expressar em linguagem natural e em linguagem simbólica a generalização das relações encontradas:
    - O preço a pagar por qualquer número de coletes pode ser encontrado através do produto entre o preço do aluguer de um colete (constante de proporcionalidade) e o número de coletes: Preço (em euros) = 2 x n.º de coletes
    - Discutir resultados, processos e ideias matemáticos.

Guião de exploração da tarefa

Tempo: 1 blocos de 100 minutos

I – Apresentação da tarefa
Tempo previsto: 10 minutos

A apresentação da tarefa irá manter uma estrutura semelhante às anterior:

- O enunciado da tarefa será projetado no quadro e será distribuído um exemplar por cada um dos alunos;
- Os alunos, organizados em grupos, procedem à leitura individual e silenciosa da tarefa;
- Após a leitura, recontam a situação apresentada, identificam as variáveis e procedem a uma breve leitura do gráfico referindo algumas das relações que observam, é importante que existam diferentes intervenções, que possibilitem auscultar vários pontos de vista, de forma a que a tarefa se torne clara para todos.

II – Trabalho em grupos
Tempo previsto: 35 minutos

Possíveis estratégias a seguir pelos alunos:

Para dar resposta à **primeira questão** os alunos, a partir dos dados disponíveis no gráfico, poderão verificar a existência de uma regularidade, de forma a que lhes seja possível determinar, com exatidão, o preço a pagar pelo aluguer de 31 coletes.
A partir de uma leitura adequada do gráfico é possível estabelecer relações entre as variáveis:
O aluguer de 5 coletes tem um custo de 10€
O aluguer de 15 coletes tem um custo de 30€
O aluguer de 25 coletes tem um custo de 50€
O aluguer de 40 coletes tem um custo de 80€

Podem concluir que o valor do preço é sempre o dobro do número de coletes, e que o aluguer de um colete terá o valor de 2€, dado que se trata do dobro: $2\times 1 = 2$

O recurso ao quociente, que lhes possibilita encontrar a constante de proporcionalidade é outra possibilidade viável.

$$10 \div 5 = 2$$
$$30 \div 15 = 2$$
$$50 \div 25 = 2$$
$$80 \div 40 = 2$$

Outros grupos poderão utilizar as potencialidades do gráfico, discutidas nas tarefas anteriores, fazendo passar uma reta pelos pontos assinalados e encontrando o valor pretendido.

A professora deve questionar os alunos, de forma a tentar aceder aos seus raciocínios e a apoiar eventuais dificuldades.

- Como pensaram?
- Será possível encontrar a resposta no gráfico? Como procederiam nessa situação?
- Que relações encontram entro o número de coletes e o preço a pagar pelo aluguer?
- O que representa esse quociente? Porquê? (caso recorram ao quociente)

O recurso à tabela ou à linguagem natural serão provavelmente as representações que irão surgir para dar resposta à **segunda questão**:

N.º de coletes	**Preço (€)**
5	10
15	30
25	50
40	80

O aluguer de 5 coletes tem um custo de 10€
O aluguer de 15 coletes tem um custo de 30€
O aluguer de 25 coletes tem um custo de 50€
O aluguer de 40 coletes tem um custo de 80€

Na **terceira questão** é natural que recorram às descobertas já efetuadas na primeira questão e a um raciocínio análogo:

Se o preço é sempre o dobro do número de coletes, então o número de coletes pode ser encontrado efetuando o quociente: $200 \div 2 = 100$, uma vez, que o número de coletes corresponde a metade do preço do seu aluguer.

Outra hipótese de resposta pode ser encontrada através do prolongamento da reta do gráfico e dos eixos das abcissas e das ordenadas.
No sentido de apoiar eventuais dificuldades a professora pode colocar algumas questões:

- O que descobriram nas respostas anteriores? Isso ajuda-vos a responder a esta?
- Que relações encontram entro o número de coletes e o preço a pagar pelo aluguer?

Na **última questão** a regra pode surgir, tal com nas tarefas anteriores em linguagem natural, ou através de uma expressão. O valor a pagar pelo aluguer de qualquer número de coletes pode ser encontrado multiplicando o preço do aluguer de um colete pelo número de coletes que se pretender alugar: Preço = $2 \times \text{número de coletes}$

A professora deve questionar os alunos, de forma a tentar aceder aos seus raciocínios e a apoiar eventuais dificuldades.

- O que descobriram nas respostas anteriores? Isso ajuda-vos a responder a esta?
- O que sabem sobre a relação entre o número de coletes e o preço a pagar pelo aluguer?
- Como podem representar essa relação?
- Podem representá-la de outra forma?

III – Discussão
Tempo previsto: 35 minutos
A seleção dos trabalhos dos grupos que serão apresentados à turma deve considerar os seguintes aspetos:

- Representações que evidenciem a relação entre as variáveis, tabelas, linguagem natural ou expressões;
- Alguns erros cometidos, com interesse para a discussão no grande grupo;
- Clareza na forma como encontraram a regra;
- Diferentes representações da expressão algébrica encontrada.

Os grupos selecionados para a apresentação copiam para o acetato a sua forma de resolução, em seguida, e utilizando como suporte a projeção, explicam o seu raciocínio.

As intervenções da professora devem ser pontuais, deixando espaço aos alunos para a discussão. Poderá assumir um papel moderados, perguntar-lhes se concordam, com o que foi transmitido pelo colega, se gostariam de acrescentar algo importante ou explicar de outro modo. **A discussão da representação gráfica e das expressões algébricas devem ocupar um lugar de destaque, nesta fase da aula, de forma a que seja possível perceber os significados e que lhes são atribuídos pelos alunos.**

IV – Síntese
Tempo previsto: 15 minutos
Nesta última fase da aula a professora procede à sistematização da tarefa, tendo como ponto de partida o trabalho desenvolvido e apresentado pelos grupos.
Os dados podem ser apresentados numa tabela onde é explorada a relação multiplicativa entre as variáveis, verificando-se que, em situações de proporcionalidade

direta, os valores aumentam ou diminuem na mesma proporção e que o seu quociente é constante.

N.º de coletes	**Preço (€)**	**Preço/ n.º de coletes**
5	10	10/5 = 2
15	30	30/15 = 2
25	50	50/25 = 2
40	80	80/40 = 2

Deve ser explorado o significado do valor invariante encontrado, a constante de proporcionalidade e o significado da própria expressão.

- A constante de proporcionalidade = 2, neste contexto, representa o preço a pagar pelo aluguer de 1 colete.

Para determinar o preço a pagar pelo aluguer de qualquer número de coletes:

- Preço (em euros) = 2 x número de coletes
- Preço (em euros) = k x n.º de coletes (em que k = 2, representa a constante de proporcionalidade)

O aparecimento da letra pode surgir através da simplificação das expressões. Se os alunos não mobilizarem os conhecimentos usados nas tarefas anteriores a professora poderá questioná-los:

- Será possível substituir as expressões *"Preço" e "n.º de coletes",* por letras que as possam representar?
- O que representam, então, essas letras?
- Como podem relacionar essas letras com o enunciado da tarefa?
- O que representa a expressão em que a letra surge inserida?

Anexo F – Tarefa "Um dia radical"

A empresa "Momentos de Aventura" tinha disponível um conjunto de atividades radicais muito interessantes. O grupo começou a criar expectativas no sentido de poder vir a desfrutar de algumas mas havia que analisar os custos e escolher a opção que fosse do agrado da maioria.

1	Escalada + slide + ponte de cordas + tiro com arco e zarabatana
2	Slide + matraquilhos humanos+ jogos sem fronteiras
3	Rapel + canoagem (rápidos ou águas calmas)
4	Escalada + Slide + Paintball

Custo e descontos

1	10€/ pessoa (descontos de 5% para grupos com mais de 10 elementos)
2	12€/ pessoa (descontos de 15% para grupos com mais de 20 elementos)
3	15€/ pessoa (descontos de 15% para grupos com mais de 10 elementos)
4	14€/ pessoa (descontos de 35% para grupos com mais de 30 elementos)

Após a votação apuraram-se os seguintes resultados:
11 escolheram a opção 1
6 escolheram a opção 2
2 escolheram a opção 3
11 escolheram a opção 4

1. **Escreve a razão entre o número de elementos do grupo que escolheu a opção 1 e o número total de elementos do grupo.** Será que consegues prever a percentagem dos elementos do grupo que optaram pela primeira opção? Explica como pensaste.

2. Determina as percentagens dos elementos dos grupos que escolheram as restantes opções.

3. Como procederias para determinar qualquer percentagem? Escreve uma regra que funcione para qualquer opção.

4. As opções 1 e 4 obtiveram a mesma votação. Se escolherem a mais económica qual será a opção do grupo? Explica como pensaste.

Sugestões: Observa os dados com atenção.
Faz registos do teu trabalho (ex.: recontar a situação; organizar os dados de forma clara, escrever o modo como se relacionam os dados)

Objetivos da tarefa

Tema: Álgebra
Tópico: Proporcionalidade direta

Objetivos:

- Resolver problemas envolvendo situações de proporcionalidade direta;
- Formular e testar conjeturas e generalizações e justificá-las fazendo deduções informais;
- Determinar mentalmente algumas percentagens de referência como: 10%, 5%; 1%;
- Reconhecer a percentagem como uma razão de consequente 100: 3% = $\frac{3}{100}$;
- Calcular percentagens de um dado conjunto de dados: $\frac{11}{30} \approx 37\%$; $\frac{6}{30} = 20\%$; $\frac{2}{30} \approx 7\%$;
- Expressar em linguagem natural e em linguagem simbólica a generalização das relações encontradas:
  - Qualquer percentagem pode ser determinada através do quociente entre um dado número e o total de elementos do conjunto de dados a que pertence esse número: por exemplo a percentagem de escuteiros que escolheu a primeira opção pode ser determinada através do quociente de 11, número de elementos que escolheu essa opção, por 30, número total de elementos;

    Percentagem = $\frac{\text{qualquer número de elementos de um conjunto de dados}}{\text{número total de elementos do conjunto de dados}}$
- Discutir resultados, processos e ideias matemáticos.

Guião de exploração da tarefa

Tempo: 1 blocos de 100 minutos

I – Apresentação da tarefa
Tempo previsto: 10 minutos

A apresentação da tarefa irá manter uma estrutura semelhante às anterior:

- O enunciado da tarefa será projetado no quadro e será distribuído um exemplar por cada um dos alunos;
- Os alunos, organizados em grupos, procedem à leitura individual e silenciosa da tarefa;
- Após a leitura, recontam a situação apresentada, identificando os dados relevantes que merecem ser discutidos, como as percentagens de descontos em cada um dos programas. É importante que existam diferentes intervenções, que possibilitem auscultar vários pontos de vista, de forma a que a tarefa se torne clara para todos.
- As percentagens de referência merecem uma atenção especial nesta fase da aula, pois apesar de já terem sido discutidas noutros contextos é possível que já não estejam presentes para alguns alunos. A promoção de uma discussão em seu torno pode partir da percentagem do desconto referenciada na tabela; neste sentido a professora poderá questionar: O que significa 5% de desconto, e 15%? Alguém se oferece para explicar utilizando exemplos concretos?

II – Trabalho em grupos

Tempo previsto: 40 minutos

Possíveis estratégias a seguir pelos alunos:

Para dar resposta à **primeira questão** os alunos, a partir dos dados disponíveis, deverão escrever a razão entre o número de elementos do grupo que escolheu a opção 1 e o número total de elementos do grupo: $\frac{11}{30}$, a partir desta razão são convidados a prever a percentagem de escuteiros que escolheu essa opção.

Poderão seguir várias estratégias:

Efetuando o quociente entre o antecedente e o consequente (número de escuteiros que escolheram a primeira opção e número total de escuteiros): $\frac{11}{30} = 11 \div 30 = 0{,}3(6) \approx 0{,}37 \approx 37\%$

X 3,(3)

Através da relação multiplicativa: $\frac{11}{30} \approx \frac{37\%}{100\%}$

X 3,(3)

Estabelecendo relações entre o antecedente e o consequente: 11 é um valor aproximado de $\frac{1}{3}$ de 30, $\frac{1}{3}$ corresponde a cerca de 33%, logo a percentagem corresponde a um pouco mais do que 33%

Através de percentagens de referência: 10% corresponde a 3 alunos
5% corresponde a 1,5 alunos
30% corresponde a 9 alunos
35% corresponde a 10,5 alunos, então 11 alunos corresponde a cerca de 36%.

A professora deve questionar os alunos, de forma a tentar aceder aos seus raciocínios e a apoiar eventuais dificuldades.

- Como pensaram?
- O que representa essa razão?
- Será possível determinar a percentagem a partir da razão?
- O que representa essa percentagem?

Na resposta à **segunda questão** é possível que sejam coerentes, optando por uma estratégia semelhante à que utilizaram na anterior.

Efetuando o quociente entre o antecedente e o consequente (número de escuteiros que escolheram cada uma das opções e número total de escuteiros):

$$\frac{6}{30} = 6 \div 30 = 0{,}2 = 20\%$$

$$\frac{2}{30} = 2 \div 30 = 0{,}0(6) = 7\%$$

$$\frac{11}{30} = 11 \div 30 = 0{,}3(6) \approx 37\%$$

X 3,(3)

Através da relação multiplicativa: $\frac{11}{30} \approx \frac{37\%}{100\%}$

X 3,(3)

X 3,(3)

$$\frac{6}{30} = \frac{20\%}{100\%}$$

X 3,(3)

X 3,(3)

$$\frac{2}{30} \approx \frac{7\%}{100\%}$$

X 3,(3)

Através de percentagens de referência: 10% corresponde a 3 alunos
20% corresponde a 6 alunos

5% corresponde 1,5 alunos
1% corresponde a 0,3 alunos
7% corresponde a cerca de 2 alunos

A professora deve questionar os alunos, de forma a tentar aceder aos seus raciocínios e a apoiar eventuais dificuldades.

- Como pensaram?
- Como fizeram na resposta anterior?
- Que regularidades conseguem observar?

Para determinar qualquer percentagem basta fazer o quociente entre um dado número e o total de elementos do conjunto de dados a que pertence esse número.

Percentagem = $\frac{\text{qualquer número de elementos de um conjunto de dados}}{\text{número total de elementos do conjunto de dados}}$

Ou através de uma razão equivalente, obtida através da relação multiplicativa:

$100 \div$ n.º total de elementos$=$x

$$\frac{\text{n.º de elementos do qual se pretende saber a \%}}{\text{n.º total de elementos}} = \frac{\text{\% que se pretende saber}}{100\%}$$

Ou através de percentagens de referência, como 10%; 5% e 1%

A professora deve questionar os alunos, de forma a tentar aceder aos seus raciocínios e a apoiar eventuais dificuldades.

- O que descobriram nas respostas anteriores? Isso ajuda-vos a responder a esta?
- O que sabem sobre a relação entre o número de escuteiros que escolheu cada opção e o número total de escuteiros?
- Como podem representar essa relação?
- Podem representá-la de outra forma?

Na **quarta questão** poderão incluir ou não o chefe no grupo:

Sem o chefe:
Grupo com 30 escuteiros
Opção 1 – o custo é de 10€ por pessoa: $30\times 10 = 300$
5% de desconto para grupos com mais de 10 elementos
$5\times 300 = 1500$
$1500\div 100 = 15$ (valor do desconto)

Outras resoluções possíveis:

0,(3)

$$\frac{15}{300} = \frac{5\%}{100\%}$$

0,(3)

10% de 300€ são 30€
5% de 300€ são 15€ (valor do desconto)
Valor a pagar: 300-15=285

Sem o chefe:
Grupo com 30 escuteiros
Opção 4 – o custo é de 14€ por pessoa: $30\times 14 = 420$€
Descontos apenas para grupos com mais de 30 elementos
Valor a pagar: 420€

Com o chefe:
Grupo com 31 escuteiros
Opção 1 – o custo é de 10€ por pessoa: $31\times 10 = 310$€
5% de desconto para grupos com mais de 10 elementos

$5\times 310 = 1550$
$1550\div 100 = 15{,}50€ -$ valor do desconto
Valor a pagar: 310-15,50=294,50€

Com o chefe:
Grupo com 31 escuteiros
Opção 4 – o custo é de 14€ por pessoa: $31\times 14 = 434€$
35% de desconto para grupos com mais de 30 elementos
$35\times 434 = 15190$
$15190\div 100 = 151,90€$- valor do desconto
Valor a pagar: 434-151,90=282,10€

A opção 4, incluindo o chefe, é a mais económica.

A professora deve questionar os alunos, de forma a tentar aceder aos seus raciocínios e a apoiar eventuais dificuldades.

- O que descobriram na resposta anterior? Isso ajuda-vos a responder a esta?
- É possível beneficiar sempre do desconto? Em que condições?
- Como podem determinar esse desconto?

III – Discussão
Tempo previsto: 35 minutos
A seleção dos trabalhos dos grupos que serão apresentados à turma deve considerar os seguintes aspetos:

- Representações que evidenciem a relação entre o número de elementos do grupo e a percentagem;
- Alguns erros cometidos, com interesse para a discussão no grande grupo;
- Clareza na forma como encontraram a regra;
- Diferentes representações da expressão algébrica encontrada.

Os grupos selecionados para a apresentação copiam para o acetato a sua forma de resolução, em seguida, e utilizando como suporte a projeção explicam o seu raciocínio.

As intervenções da professora devem ser pontuais, deixando espaço aos alunos para a discussão. Poderá assumir um papel moderados, perguntar-lhes se concordam, com o que foi transmitido pelo colega, se gostariam de acrescentar algo importante ou explicar de outro modo. **A discussão das diferentes representações devem ocupar um lugar de destaque, de forma a que seja possível perceber os significados e que lhes são atribuídos pelos alunos.**

IV – Síntese
Tempo previsto: 20 minutos
Nesta última fase da aula a professora procede à sistematização da tarefa, tendo como ponto de partida o trabalho desenvolvido e apresentado pelos grupos.
Os dados podem ser apresentados numa tabela onde é explorada a razão entre o número de escuteiros que escolheu cada uma das opções disponíveis e o número total de escuteiros, o quociente representa a percentagem de cada uma das opções.

Opções	**1**	**2**	**3**	**4**
Razão **entre** o número de elementos que escolheu cada uma das opções e o número total de escuteiros	$\frac{11}{30}=0{,}3(6)\approx\frac{37}{100}$	$\frac{6}{30}=0{,}2=\frac{20}{100}$	$\frac{2}{30}=0{,}0(6)\approx\frac{7}{100}$	$\frac{11}{30}=0{,}3(6)\approx\frac{37}{100}$

Os números racionais podem ser representados através de percentagem, fração e numeral decimal:

Ex.: 1%$=\frac{1}{100}=0{,}01;\ 37\%=\frac{11}{30}=0{,}3(6);\ 20\%=\frac{6}{30}=0{,}2;\ 7\%=\frac{2}{30}=0{,}0(6)$

Para determinar qualquer percentagem:

- Percentagem = $\frac{\text{qualquer número de elementos de um conjunto de dados}}{\text{número total de elementos do conjunto de dados}}$

Para calcular o valor do desconto conhecendo a percentagem do desconto e a quantidade:

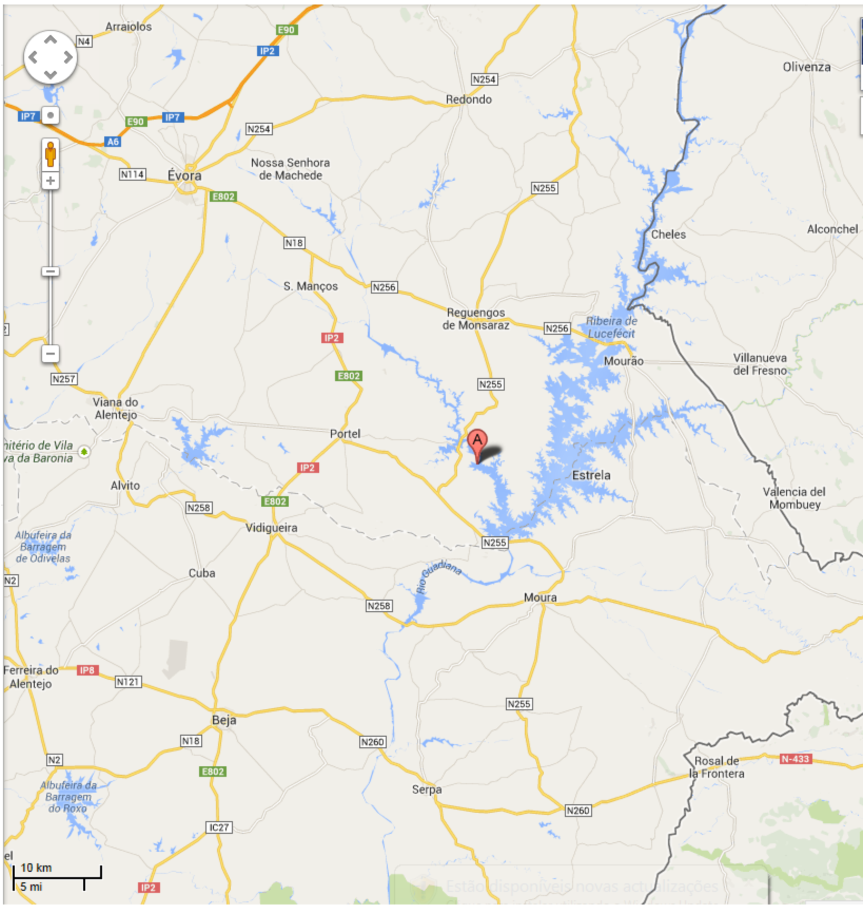
- Percentagem $\times$ quantidade (Ex: $5\%\ \times 300=\frac{5}{100}\times\ 300$)

O aparecimento da letra pode surgir através da simplificação das expressões. Se os alunos não mobilizarem os conhecimentos usados nas tarefas anteriores a professora poderá questioná-los:

- Será possível substituir as expressões *"Percentagem" e "qualquer n.º de elementos de um conjunto de dados", "n.º total de elementos do conjunto de dados"* por letras que as possam representar?
- O que representam, então, essas letras?
- Como podem relacionar essas letras com o enunciado da tarefa?
- O que representa a expressão em que a letra surge inserida?

Anexo G – Tarefa “A localização do acampamento”

No mapa seguinte é possível observar a localização do acampamento de escuteiros, na Marina da Amieira, que se encontra assinalado com a letra A.



1.1. Observa o mapa e a informação nele contida. Será possível determinar a distância real, em linha reta, que separa o acampamento de Moura? Explica como pensaste.

1.2. Como procederias para determinar a distância real entre duas localidades quaisquer, representadas neste mapa.

2. A figura representa a imagem de uma das canoas utilizadas pelos escuteiros, durante o passeio realizado na Barragem de Alqueva.

2.1. Qual o comprimento real da canoa se a imagem tiver desenhada à escala 1:40?

2.2. Imagina que te encontravas de pé junto à canoa fazendo parte desta imagem. Qual seria a tua altura na imagem?

2.3. Encontra uma regra que te permita descobrir as dimensões com que ficaria qualquer objeto que quisesses colocar nesta imagem.

Objetivos da tarefa

Tema: Álgebra
Tópico: Proporcionalidade direta

Objetivos:

- Formular e testar conjeturas e generalizações e justificá-las fazendo deduções informais;
- Reconhecer a escala como uma razão em que o antecedente indica a distância na imagem e o consequente a distância real, correspondente;
- Utilizar proporções para determinar, escalas, distâncias na imagem e na realidade;
- Expressar em linguagem natural e em linguagem simbólica a generalização das relações encontradas:
- A distância real entre duas localidades quaisquer, representadas num mapa, pode ser determinada:
- $\frac{\text{distância no mapa em centímetros} \times \text{distância real em centímetros indicada na escala}}{\text{distância no mapa em centímetros indicada na escala}}$
- As dimensões que um objeto qualquer deve assumir numa imagem pode ser determinada:
- $\frac{\text{dimensões reais em centímetros do objeto} \times \text{distância na imagem em centímetros indicada na escala}}{\text{dimensão real em centímetros indicada na escala}}$
- Discutir resultados, processos e ideias matemáticos.

Guião de exploração da tarefa

Tempo: 1 blocos de 100 minutos

I – Apresentação da tarefa
Tempo previsto: 10 minutos

A apresentação da tarefa irá manter uma estrutura semelhante às anterior:

- O enunciado da tarefa será projetado no quadro e será distribuído um exemplar por cada um dos alunos;
- Os alunos, organizados em grupos, procedem à leitura individual e silenciosa da tarefa;
- Após a leitura, recontam a situação apresentada, identificando os dados relevantes que merecem ser discutidos, como o significado e a interpretação da escala indicada no mapa, no que respeita à primeira questão e aspetos semelhantes como a escala e diferentes representações que pode assumir, relativamente à segunda questão.
- A professora deve questionar os alunos sobre o significado das escalas que surgem na tarefa. É importante que existam diferentes intervenções, que possibilitem auscultar vários pontos de vista, de forma a que a tarefa se torne clara para todos.

II – Trabalho em grupos
Tempo previsto: 35 minutos
Possíveis estratégias a seguir pelos alunos:

Para dar resposta à **primeira questão** os alunos, a partir dos dados disponíveis, poderão comparar a distância indicada na escala, em que cerca de 2cm no mapa correspondem a 10km na realidade, com a distância entre o acampamento e a cidade de Moura. A distância entre os dois locais é aproximadamente o dobro da distância indicada na escala, correspondendo assim a cerca de 20km, o dobro de 10km.

A professora deve questionar os alunos, de forma a tentar aceder aos seus raciocínios e a apoiar eventuais dificuldades.

- Como pensaram?
- O que significa a escala representada no mapa? Como pode ser utilizada?
- Que relação encontram entre a escala do mapa e a distância entre o acampamento e Moura?

Na **segunda questão** os alunos irão sentir necessidade de recorrer a outros processos que os conduzam à generalização. O ponto de partida será sempre a escala cujo significado já deve ter sido explorado na fase de apresentação da tarefa. É importante que os alunos tenham percebido que uma dada distância no mapa corresponde a uma outra na realidade.

Possíveis abordagens:

$$\frac{2\text{cm}}{10\text{km}} = \frac{1\text{cm}}{5\text{km}}$$

- se 1cm no mapa corresponde a 5km na realidade, então para determinar a distância real entre duas localidades quaisquer, devemos medir essa distância com a régua e multiplicá-la por 500 000cm, o correspondente a 5km.
- $\text{distância real entre 2 localidades} = \text{distância no mapa entre as localidades} \times 500\ 000$

Através da relação multiplicativa:

$$\frac{2}{1\ 000\ 000\text{cm}} = \frac{\text{distância no mapa em cm entre as localidades}}{}$$

$$\frac{2}{10\text{km}} = \frac{\text{distância no mapa em cm entre as localidades}}{}$$

A professora deve questionar os alunos, de forma a tentar aceder aos seus raciocínios e a apoiar eventuais dificuldades.

- O que descobriram na resposta anterior? Isso ajuda-vos a responder a esta?
- Que relação existe entre a escala e as distâncias no mapa?
- Como podem representar essas relação?
- Podem representá-la de outra forma?

Na **segunda parte da tarefa** têm como dados disponíveis a escala e a imagem de uma canoa.

A resposta para a **primeira questão**, pode surgir através da relação entre a escala e o comprimento da canoa na imagem:

- se 1cm no desenho corresponde a 40cm na realidade, para determinar o comprimento real da canoa na realidade basta multiplicar o comprimento da canoa na imagem por 40:

$$\text{comprimento da canoa na realidade} = \text{comprimento da canoa na imagem} \times 40$$

Através da relação multiplicativa:

$$\frac{1}{40} = \frac{7}{280}$$

A professora deve questionar os alunos, de forma a tentar aceder aos seus raciocínios e a apoiar eventuais dificuldades.

- Como pensaram?
- O que significa a escala 1:40? Podem representá-la de outra forma?
- Como podem relacionar a escala 1:40 com o comprimento da canoa na imagem?
- Como podem representar essa relação?
- O comprimento real da canoa será inferior ou superior ao da imagem? Quantas vezes?

Na **segunda questão,** conhecendo a sua altura na realidade devem determinar a altura com que ficariam na imagem se se encontrassem de pé junto à canoa.

- se 1cm no desenho corresponde a 40cm na realidade, para determinar a altura com que irão surgir na imagem o recurso à divisão, como operação inversa da multiplicação, é uma possibilidade.

$$\text{altura na imagem} = \text{altura real} \div 40$$

Através da relação multiplicativa:

- se a altura real de uma aluno for 1,5m, na imagem irá ter uma altura de 3,75cm.

$$\frac{1}{40} = \frac{7}{150}$$

A professora deve questionar os alunos, de forma a tentar aceder aos seus raciocínios e a apoiar eventuais dificuldades.

- Que dados necessitam para poderem descobrir a altura com que ficarão na imagem?
- Façam uma estimativa sobre a altura que vocês poderão ter na imagem?
- O que sabem sobre as dimensões da canoa na imagem e na realidade?
- Como podem relacionar essas dimensões?
- O que descobriram na resposta anterior poderá ajudar-vos a responder a esta?
- Como podem relacionar a escala 1:40 com a vossa altura real?
- Como podem representar essa relação?

Na **última questão**, possivelmente irão recorrer ao processo que utilizaram na questão anterior.

$$\text{dimensão do objeto na imagem} = \text{altura real do objeto} \div 40$$

A professora deve questionar os alunos, de forma a tentar aceder aos seus raciocínios e a apoiar eventuais dificuldades.

- O que descobriram nas respostas anteriores? Isso ajuda-vos a responder a esta?
- O que sabem sobre a relação entre as dimensões dos objetos na imagem e na realidade?
- Como podem representar essa relação?
- Podem representá-la de outra forma?

III – Discussão

Tempo previsto: 35 minutos

A seleção dos trabalhos dos grupos que serão apresentados à turma deve considerar os seguintes aspetos:

- Representações que evidenciem a relação entre as dimensões no mapa ou na imagem e as dimensões reais;
- Alguns erros cometidos, com interesse para a discussão no grande grupo;
- Clareza na forma como encontraram a regra;
- Diferentes representações da expressão algébrica encontrada.

Os grupos selecionados para a apresentação copiam para o acetato a sua forma de resolução, em seguida, e utilizando como suporte a projeção explicam o seu raciocínio.

As intervenções da professora devem ser pontuais, deixando espaço aos alunos para a discussão. Poderá assumir um papel moderados, perguntar-lhes se concordam, com o que foi transmitido pelo colega, se gostariam de acrescentar algo importante ou explicar de outro modo. **A discussão das diferentes representações que possam surgir deve ocupar um lugar de destaque, de forma a que seja possível perceber os significados e que lhes são atribuídos pelos alunos.**

IV – Síntese

Tempo previsto: 20 minutos

Nesta última fase da aula a professora procede à sistematização da tarefa, tendo como ponto de partida o trabalho desenvolvido e apresentado pelos grupos.

Diferentes representações de escalas numéricas:

Ex: 1/40, 1: 40, $\frac{1}{40}$, lê-se 1cm no mapa/ imagem equivale a 40cm na realidade, ou seja, a realidade foi reduzida 40 vezes.

Escala gráfica:

0 5 10km

|____|____| lê-se 1cm no mapa/imagem equivale a 5km na realidade ou 2cm no mapa equivalem a 10km na realidade.

Uma escala pode ser traduzida pela razão: $\frac{\text{distância no mapa/imagem}}{\text{distância real}}$

- A distância real entre duas localidades quaisquer, representadas num mapa, pode ser determinada:
- $\frac{\text{distância no mapa em centímetros}\times\text{distância real em centímetros indicada na escala}}{\text{distância no mapa em centímetros indicada na escala}}$

$$\frac{2}{1\,000\,000}=\frac{4}{2\,000\,000}$$

dimensão real do objeto÷2=x

$$\frac{2}{1\,000\,000}=\frac{\text{distância no mapa em centímetros}}{\text{distância real}}$$

- As dimensões que um objeto qualquer deve assumir numa imagem pode ser determinada:
- $\frac{\text{dimensões reais em centímetros do objeto}\times\text{distância na imagem em centímetros indicada na escala}}{\text{dimensão real em centímetros indicada na escala}}$

$$\frac{1}{40}=\frac{7}{150}$$

$$\frac{1}{40}=\frac{\text{dimensão do objeto na imagem}}{\text{dimensão real do objeto}}$$

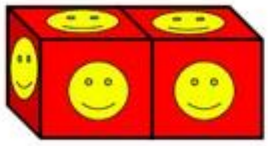
dimensão real do objeto÷40=x

O aparecimento da letra pode surgir através da simplificação das expressões, como uma abreviatura. Se os alunos não mobilizarem os conhecimentos usados na tarefa anterior a professora poderá questioná-los:

- Será possível substituir as expressões *"dimensão do objeto na imagem" e "dimensão real do objeto",* por letras que as possam representar?
- O que representam, então, essas letras?
- Como podem relacionar essas letras com o enunciado da tarefa?
- O que representa a expressão em que a letra surge inserida?

Anexo H – Tarefa "Um jogo com cubos e autocolantes"

O grupo dos Pioneiros está a construir um jogo com cubos e autocolantes. Unem os cubos por uma das faces e formam filas de cubos. Depois colam um autocolante em cada uma das faces.
A imagem mostra a construção que fizeram com 2 cubos. Nessa construção usaram 10 autocolantes.



1. Descobre quantos autocolantes os Pioneiros usaram numa construção com: três cubos; quatro cubos; dez cubos; cinquenta e dois cubos.

2. Consegues descobrir qual é a regra que permite saber quantos autocolantes os Pioneiros usaram numa construção com um qualquer número de cubos? Explica como pensaste.

Sugestões: Observa os dados com atenção.
Faz registos do teu trabalho (ex.: recontar a situação, organizar os dados de forma clara, escrever o modo como se relacionam os dados)
Utiliza a folha de cálculo do Excel para representar os dados e para testar as tuas conjeturas.

[1]

[1] Tarefa retirada de: Oliveira, H., Canavarro, A. P., Menezes, L., & (2012). Cubos com autocolantes (1.º ciclo) – caso multimédia. In *Site do Projeto P3M, Práticas Profissionais de Professores de Matemática*. (Acessível em http://p3m.ie.ul.pt/caso1-cubos-com-autocolantes-1-ciclo)

Objetivos da tarefa

Tema: Álgebra
Tópico: Sequências e regularidades

Objetivos:

- Reconhecer uma sequência pictórica crescente;
- Formular e testar conjeturas e generalizações e justificá-las fazendo deduções informais;
- Identificar as variáveis:
  - Número de cubos, número de autocolantes;
- Identificar a relação entre as variáveis:
  - O número de autocolantes é quádruplo do número de cubos mais dois;
- Expressar em linguagem natural e em linguagem simbólica a generalização das relações encontradas;
- Discutir resultados, processos e ideias matemáticos.

Guião de exploração da tarefa

Tempo: 1 bloco de 100 minutos

I – Apresentação da tarefa
Tempo previsto: 10 minutos

A apresentação da tarefa irá manter uma estrutura semelhante às anteriores: (cada grupo de trabalho dispõe de um computador, que possibilite o uso da folha de cálculo do Excel)

- A professora apresenta um cubo e questiona os alunos sobre o que sabem acerca daquele sólido designação; características particulares – número e forma das faces e número de arestas e vértices; características que o permite incluir nos sólidos platónicos – (todas as faces são polígonos congruentes, o mesmo número de arestas encontra-se em todos os vértices);
- Em seguida projeta o enunciado da tarefa no quadro e distribui um exemplar por cada um dos alunos;
- Os alunos, organizados em grupos, procedem à leitura individual e silenciosa da tarefa;
- Após a leitura, os alunos, explicitam a situação apresentada explicando como foi feita a construção, os materiais que foram usados e a forma como foram organizados. É importante que existam diferentes intervenções, que possibilitem auscultar vários pontos de vista, de forma a que a tarefa se torne clara para todos,
- A professora pede a dois alunos que exemplifiquem a situação, utilizando dois cubos, que devem unir com fita-cola e decorar, em seguida, com autocolantes de acordo com o padrão descrito na tarefa.
- Em seguida, a professora pede aos alunos que contem os autocolantes que foram usados, é importante que todos os alunos percebam que são dois cubos com dez autocolantes

II – Trabalho em grupos
Tempo previsto: 30 minutos
Possíveis estratégias a seguir pelos alunos:
Para dar resposta à **primeira questão** os alunos, devem descobrir quantos autocolantes tem uma construção com três cubos; para tal, poderão recorrer a um esquema pictórico, desenhando os cubos e imaginando as faces escondidas; à linguagem natural, procedendo a uma descrição e recorrendo a cálculos ou a uma tabela.

N.º de cubos	**N.º de autocolantes**	
1	6	
2	10	+4
3	14	+4

Numa construção com 3 cubos, os cubos das pontas têm 5 autocolantes, cada um e o do meio quatro, porque tem duas faces escondidas:

5+4+5= 14

Numa construção com 3 cubos, podemos contar 4 autocolantes em cada um, e juntar os 2 das pontas.

$4 \times 3 + 2 =$14

A professora deve questionar os alunos, de forma a tentar aceder aos seus raciocínios e a apoiar eventuais dificuldades.

- Como pensaram?
- Reparem na construção que ensaiamos. Quantos cubos tem? E quantos autocolantes?
- Imaginem que juntas mais um cubo. Com quantos autocolantes ficarias?
- Quantos autocolantes acrescentaste? Porquê?

Para descobrirem quantos cubos tem uma construção com 4 cubos, possivelmente seguirão procedimentos semelhantes:

N.º de cubos	**N.º de autocolantes**	
1	6	
2	10	+4
3	14	+4
4	18	+4

Numa construção com 4 cubos, os cubos das pontas têm 5 autocolantes, cada um e os do meio quatro, porque têm duas faces escondidas:

5+4+4+5= 18

Numa construção com 4 cubos, podemos contar 4 autocolantes em cada um, e juntar os 2 das pontas.

$4 \times 4 + 2 = 18$

Para descobrirem quantos cubos tem uma construção com 10 cubos, possivelmente seguirão procedimentos semelhantes:

N.º de cubos	**N.º de autocolantes**	
1	6	
2	10	+4
3	14	+4
4	18	+4
5	22	
6	26	
7	30	
8	34	
9	38	
10	42	

Numa construção com 10 cubos, os cubos das pontas têm 5 autocolantes, cada um e os do meio quatro, porque têm duas faces escondidas:

$5+4\times 8+5= 42$

Numa construção com 10 cubos, podemos contar 4 autocolantes em cada um, e juntar os 2 das pontas.

$4 \times 10 + 2 = 42$

Para apoiar eventuais dificuldades a professora poderá questionar os alunos:

- Como fizeram nos anteriores?
- Qual a relação entre o número de autocolantes e o número de cubos?

Se persistirem dificuldades em alguns grupos a professora poderá distribuir cubos de encaixe para poderem fazer as construções e contar as faces visíveis.
Para descobrirem quantos cubos tem uma construção com 52 cubos**,** poderão recorrer à tabela, ou a uma raciocínio que os conduza a uma caminho próximo da generalização:
Numa construção com 52 cubos, os cubos das pontas têm 5 autocolantes, cada um e os do meio quatro, porque têm duas faces escondidas:

$5+4\times 50+5= 210$

Numa construção com 52 cubos, podemos contar 4 autocolantes em cada um, e juntar os 2 autocolantes das pontas.

$4 \times 52 + 2 = 210$

Para apoiar eventuais dificuldades a professora poderá questionar os alunos:
- Como fizeram nos casos anteriores?
- Quantos autocolantes acrescentam cada vez que acrescentam um cubo? Porquê?
- Qual a relação entre o número de cubos e o número de autocolantes? Porquê?

Nesta questão alguns grupos poderão usar incorretamente um raciocínio proporcional desprezando os cubos da pontas e fazendo o quádruplo de 52. Se surgirem raciocínios semelhantes devem ser levados a discussão, para que possam ser discutidos no grupo turma.
Na **questão dois** os alunos devem descobrir qual a regra que permite saber quantos autocolantes pode ter uma construção com um qualquer número de cubos.
A regra poderá surgir a partir da análise da tabela, ou a partir do raciocínio usado nas questões anteriores, generalizando-a.
A generalização pode expressar-se através da linguagem natural, através de uma tabela, ou através de uma expressão algébrica.
O número de autocolantes, num qualquer número de cubos pode ser determinado multiplicando o número de cubos por 4 e acrescentando mais os dois autocolantes das pontas.
Ou das expressões.

$5+ 4\times\left(\text{n.º de cubos-}2\right)+5$

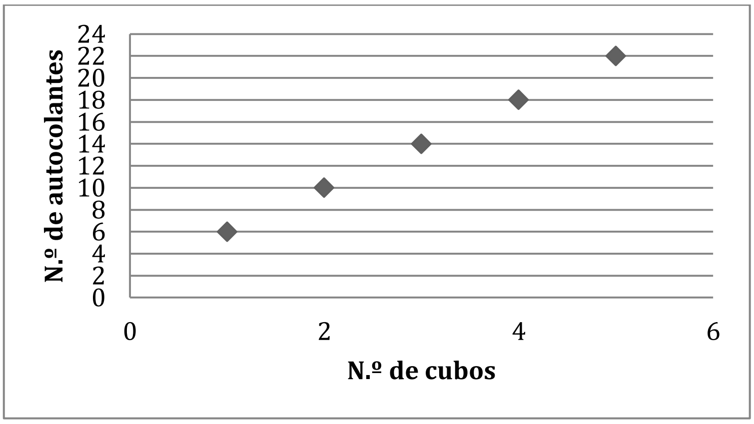
$10+ 4\times\left(\text{n.º de cubos-}2\right)$

$4 \times \text{n.º de cubos}+2$

Para apoiar eventuais dificuldades a professora poderá questionar os alunos:
- O que descobriram nas respostas anteriores? Isso ajuda-vos a responder a esta?
- O que sabem sobre a relação entre o número de cubos e o número de autocolantes?
- Como podem representar essa relação?
- Podem representá-la de outra forma?

Para induzir à substituição das expressões anteriores por outras mais simplificada e simultaneamente atribuir um significado às letras a professora poderá colocar algumas questões:
- Será possível representar essa relação de uma forma mais simplificada?

- Será possível abreviar a expressão *"n.º de cubos"*?



O gráfico da relação possibilita comprovar as conjeturas formuladas e a sua comparação com, os gráficos de proporcionalidade direta.

III – Discussão

Tempo previsto: 35 minutos

A seleção dos trabalhos dos grupos que serão apresentados à turma deve considerar os seguintes aspetos:

- Representações que evidenciem a relação entre as variáveis;
- Alguns erros cometidos, com interesse para a discussão no grande grupo;
- Clareza na forma como encontraram a regra;
- Diferentes representações da relação encontrada: em linguagem natural, em linguagem matemática, através de diagramas, esquemas e do gráfico da relação representado na folha de cálculo.

Os grupos selecionados para a apresentação copiam para o acetato a sua forma de resolução, em seguida, e utilizando como suporte a projeção explicam o seu raciocínio.

As intervenções da professora devem ser pontuais, deixando espaço aos alunos para a discussão. Poderá assumir um papel moderados, perguntar-lhes se concordam, com o que foi transmitido pelo colega, se gostariam de acrescentar algo importante ou explicar de outro modo, incentivando-os a expressarem de forma clara o seu raciocínio.

Aquando da projeção do gráfico a professora deve sugerir que o coparem com os gráficos das tarefas anteriores, levando-os a estabelecer comparações entre funções afins distintas, dado que nesta situação o gráfico, apesar de se traduzir numa reta, não passa na origem, mas no ponto dois do eixo das ordenadas.

IV – Síntese

Tempo previsto: 20 minutos

Nesta última fase da aula a professora procede à sistematização da tarefa, tendo como ponto de partida o trabalho desenvolvido e apresentado pelos grupos.

N.º de cubos	N.º de autocolantes
1	$4 \times 1 + 2 = 6$
2	$4 \times 2 + 2 = 10$
3	$4 \times 3 + 2 = 14$
4	$4 \times 4 + 2 = 18$
5	$4 \times 5 + 2 = 22$
6	$4 \times 6 + 2 = 26$
7	$4 \times 7 + 2 = 30$
8	$4 \times 8 + 2 = 34$
9	$4 \times 9 + 2 = 38$
10	$4 \times 10 + 2 = 42$
…	…
52	$4 \times 52 + 2 = 210$
c (qualquer n.º de cubos)	$4 \times c + 2$

Expressões algébricas equivalentes:

$5 + 4 \times (\text{n.º de cubos-2}) + 5 \rightarrow 5 + 4 \times (c-2) + 5$

$10 + 4 \times (\text{n.º de cubos-2}) \rightarrow 10 + 4 \times (c-2)$

$4 \times \text{n.º de cubos} + 2 \rightarrow 4 \times c + 2$

O aparecimento da letra pode surgir através da simplificação das expressões, como uma abreviatura. Para perceber o significado que lhes é atribuído pelos alunos a professora poderá colocar algumas questões:

- O que representa, então, essa letra?
- Como podem relacionar essas letras com o enunciado da tarefa?
- O que representa a expressão em que a letra surge inserida?

Anexo I – Tarefa “Passagem para a outra margem”

Alguns escuteiros enquanto passeavam junto a uma das margens da barragem encontraram um cartaz que despertou a sua atenção.

Viaje até à outra margem

Seja você mesmo o capitão

Número máximo de tripulantes em cada viajem

- Um adulto;
- Ou uma criança;
- Ou duas crianças.

Junto ao local onde esta pequena embarcação se encontrava atracada, um grupo, constituído por seis adultos e duas crianças, preparava-se para fazer a travessia. Os jovens escuteiros ficaram curiosos sobre a forma com se iriam organizar. Como seria possível passarem todos para a outra margem, cumprindo as condições definidas no cartaz?

1. Imagina uma estratégia que o grupo de seis adultos e duas crianças possam ter usado, recorrendo a um esquema procura descrevê-la.

2. Quantas viagens serão necessárias para que todos consigam efetuar a travessia?

3. E se o número de adultos fosse diferente? Determina o número de viagens necessárias para transportar os seguintes grupos para a outra margem:
   - 10 adultos e 2 crianças
   - 15 adultos e 2 crianças
   - 100 adultos e 2 crianças

4. Encontra uma regra que te permita calcular o número de viagens necessárias para transportar duas crianças e qualquer número de adultos. Justifica os teus procedimentos.

Sugestões: Observa os dados com atenção.
Faz registos do teu trabalho (ex.: recontar a situação; organizar os dados de forma clara, escrever o modo como se relacionam os dados)

[1]

[1] Adaptada a partir da tarefa usada no artigo de Kristen Herbert and Rebecca H. Brown “Patterns as Tools for Algebraic Reasoning”

Objetivos da tarefa

Tema: Álgebra
Tópico: Sequências e regularidades

Objetivos:

- Reconhecer uma sequência pictórica crescente;
- Formular e testar conjeturas e generalizações e justificá-las fazendo deduções informais;
- Identificar as variáveis:
  - o Número de adultos, número de viagens;
- Identificar a relação entre as variáveis:
  - o O número de viagens necessárias para passar qualquer número de adultos e duas crianças para a outara margem é o quádruplo do número de adultos mais um;
- o Expressar em linguagem natural e em linguagem simbólica a generalização das relações encontradas;
- o Discutir resultados, processos e ideias matemáticos.

Guião de exploração da tarefa

Tempo: 1 bloco de 100 minutos

I – Apresentação da tarefa
Tempo previsto: 10 minutos

- A professora projeta o enunciado da tarefa no quadro e distribui um exemplar por cada um dos alunos;
- Os alunos, organizados em grupos, procedem à leitura individual e silenciosa da tarefa;
- Após a leitura, os alunos, explicam a situação apresentada, mencionando o número máximo de tripulantes em cada viagem, a constituição do grupo e as suas intenções, passar para a outra margem, é importante que procurem descrever possíveis estratégias e que existam diferentes intervenções, que possibilitem auscultar vários pontos de vista, de forma a que a tarefa se torne clara para todos.
- Se os alunos sentirem dificuldade em compreender a tarefa a professora pode pedir a dois alunos que tenham dado provas, através das suas explicações, da compreensão da tarefa, que exemplifiquem, usando o quadro, a situação apresentada, podendo recorrer a um esquema ou a outra estratégia que considere adequada, nesta situação, será considerado apenas um grupo constituído por dois adultos e duas crianças.

II – Trabalho em grupos
Tempo previsto: 35 minutos

Possíveis abordagens a adotar pelos os alunos:
Na **questão um** os alunos deverão representar através de um esquema uma estratégia que o grupo de seis adultos e duas crianças possam ter usado para passarem para a outra margem. Para tal poderão, eventualmente, atribuir nomes aos adultos e às crianças, ou simplesmente tratá-los como adultos e crianças, o esquema poderá assumir contornos de uma situação próxima do real.

6A → 2C
6A+1C ← 1C
5A+1C → 1A+1C
5A+2C ← 1A
5A → 1A+2C
5A+1C ← 1A+1C
4A+1C → 2A+1C
4A+2C ← 2A
4A → 2A+2C
4A+1C ← 2A+1C
3A+1C → 3A+1C
3A+2C ← 3A
3A → 3A+2C
3A+1C ← 3A+1C
2A+1C → 4A+1C
2A+2C ← 4A
2A → 4A+2C
2A+1C ← 4A+1C
1A+1C → 5A+1C
1A+2C ← 5A
1A → 5A+2C
1A+1C ← 5A+1C
1C → 6A+1C
2C ← 6A
→ 6A+2C

Para apoiar eventuais dificuldades a professora coloca algumas questões:
- Após cada travessia qual o total do número de adultos e crianças que se encontram nas duas margens? Esse número pode variar?
- Será que conseguem encontrar outra estratégia que possibilite fazer um menor número de travessias? Porquê?

O esquema servirá de base para encontrar a resposta à **questão dois**, caso recorram a algo semelhante bastará contar o número de travessias, representadas por as setas.

Para apoiar eventuais dificuldades a professora coloca algumas questões:

- Será que a estratégia que usaram para responder à questão anterior vos poderá ajudar a responder a esta?

Na **terceira questão** os alunos têm oportunidade de testar e procurar compreender, de forma mais clara, o padrão apresentado. Quando o número de adultos sobe para 100, há necessidade de generalizar de procurar uma regularidade que lhes permita encontrar uma resposta que não pode ser alcançada através de uma esquema.

Para apoiar eventuais dificuldades a professora coloca algumas questões:

- O que descobriram na resposta anterior? Isso ajuda-vos a responder a esta?
- Que relação encontram entre o número de adultos e o número de viagens? Porquê?

Possíveis abordagens:

A continuação do esquema até aos 15 adultos, o recurso a uma tabela, ou a procura de uma regularidade que os conduza à generalização.

Para 10 adultos e 2 crianças podemos fazer: $4\times10+1=41\text{viagens}$, pois através do esquema descobrimos que são necessárias 4 viagens para que um adulto passe para a outar margem, acrescentamos mais um porque é a última viagem que as duas crianças têm que fazer para se juntarem aos adultos na outra margem.

Para 15 adultos e 2 crianças: $4\times15+1=61\text{viagens}$

Para 100 adultos e 2 crianças: $4\times100+1=401\text{viagens}$

Na **última questão** devem procurar uma regra que lhes permita determinar o número de viagens necessárias para transportar duas crianças e qualquer número de adultos.

Para apoiar eventuais dificuldades a professora poderá questionar os alunos:

- O que descobriram nas respostas anteriores? Isso ajuda-vos a responder a esta?
- O que sabem sobre a relação entre o número de viagens e o número de adultos?
- Como podem representar essa relação?
- Podem representá-la de outra forma?

Na resposta anterior os alunos tiveram que encontrar uma regularidade para conseguirem determinar o número de viagens necessárias para transportar 100 adultos, um esquema ou uma tabela, em que são estudados apenas casos particulares não lhes permitiria encontrar a resposta. O caminho para a regra estava traçado, bastava substituir o 100 por qualquer número de adultos: $4\times\text{n.º de adultos}+1$

Para induzir à substituição das expressões anteriores por outras mais simplificada e simultaneamente atribuir um significado às letras a professora poderá colocar algumas questões:

- Será possível representar essa relação de uma forma mais simplificada?
- Será possível substituir a expressão *"n.º de adultos"*, por uma letra que a represente?

III – Discussão

Tempo previsto: 35 minutos

A seleção dos trabalhos dos grupos que serão apresentados à turma deve considerar os seguintes aspetos:

- Representações que evidenciem a relação entre as variáveis;
- Alguns erros cometidos, com interesse para a discussão no grande grupo;
- Clareza na forma como encontraram a regra;

- Diferentes representações da relação encontrada: em linguagem natural, em linguagem matemática, através de diagramas, esquemas

Os grupos selecionados para a apresentação copiam para o acetato a sua forma de resolução, em seguida, e utilizando como suporte a projeção explicam o seu raciocínio.

As intervenções da professora devem ser pontuais, deixando espaço aos alunos para a discussão. Poderá assumir um papel moderados, perguntar-lhes se concordam, com o que foi transmitido pelo colega, se gostariam de acrescentar algo importante ou explicar de outro modo, incentivando-os a expressarem de forma clara o seu raciocínio.

IV – Síntese

Tempo previsto: 20 minutos

Nesta última fase da aula a professora procede à sistematização da tarefa, tendo como ponto de partida o trabalho desenvolvido e apresentado pelos grupos.

N.º de adultos	N.º de viagens
1	$4 \times 1 + 1 = 5$
2	$4 \times 2 + 1 = 9$
3	$4 \times 3 + 1 = 13$
4	$4 \times 4 + 1 = 17$
5	$4 \times 5 + 1 = 21$
6	$4 \times 6 + 1 = 25$
7	$4 \times 7 + 1 = 29$
8	$4 \times 8 + 1 = 33$
9	$4 \times 9 + 1 = 37$
10	$4 \times 10 + 1 = 41$
...	...
15	$4 \times 15 + 1 = 61$
...	...
100	$4 \times 100 + 1 = 401$
A (qualquer n.º de adultos)	$4 \times \mathrm{A} + 1$

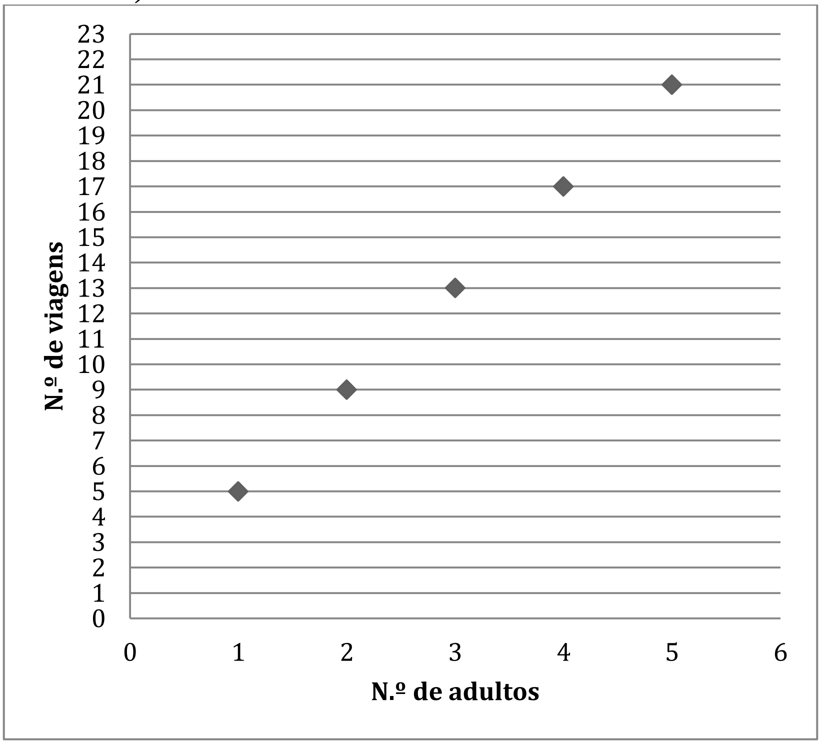
O aparecimento da letra pode surgir através da simplificação das expressões, como uma abreviatura. Para perceber o significado que lhes é atribuído pelos alunos a professora poderá colocar algumas questões:

- O que representa, então, essa letra?
- Como podem relacionar essas letras com o enunciado da tarefa?
- O que representa a expressão em que a letra surge inserida?

Poderá ser interessante desafiar os alunos a prever o comportamento do gráfico desta função:

- Como pensam que será o gráfico desta relação?
- Em que ponto irá cruzar o eixo das ordenadas? Porquê?

(Esta previsão deve ser confirmada, posteriormente, com o gráfico construído na folha de cálculo)


N.º de viagens
23
22
21
20
19
18
17
16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
0
1
2
3
4
5
6
N.º de adultos

Anexo J – Tarefa "Uma subida difícil..."

A realização de um *Peddy-paper* é o próximo desafio colocado aos escuteiros, há que desvendar trilhos e superar enigmas

Encontram-se agora no primeiro posto, Uma subida difícil, há que superar este enigma para continuar o percurso.

Um sapo encontra-se a subir a parede de um poço com 11 metros de profundidade. Numa hora o sapo sobe cinco metros e em seguida descansa durante uma hora. Enquanto repousa, o sapo, desliza três metros para trás, antes de voltar a subir novamente.

1. Quanto tempo irá demorar o sapo a sair do poço? Mostra como chegaste à tua resposta.

2. Quanto tempo iria demorar se o poço tivesse 100 metros de profundidade? Justifica a tua resposta.

3. E se tivesse 151 metros de profundidade? Justifica a tua resposta.

4. Como procederias para determinar o tempo que o sapo demoraria a subir um poço com qualquer profundidade?

Sugestões: Observa os dados com atenção.
Faz registos do teu trabalho (ex.: recontar a situação; organizar os dados de forma clara, escrever o modo como se relacionam os dados)

[1]

[1] Tarefa adaptada a partir do artigo: "Algebraic Thinking: A Professional Development Theme." *Teaching Children Mathematics* 3 (February 1997): 326–29. © 1997 by NCTM.

Objetivos da tarefa

Tema: Álgebra
Tópico: Sequências e regularidades

Objetivos:

- Reconhecer uma sequência numérica crescentes;
- Formular e testar conjeturas e generalizações e justificá-las fazendo deduções informais;
- Identificar as variáveis:
  - Altura da parede, em metros; tempo, em horas;
- Identificar a relação entre as variáveis:
  - Quando o número de metros da altura da parede é um número par o número de horas que o sapo demora a subi-la coincide com a altura da parede; quando o número de metros da altura da parede é um número ímpar o número de horas que o sapo demora a subi-la pode ser obtido através da diferença entre o número de metros e quatro unidades;
- Expressar em linguagem natural e em linguagem simbólica a generalização das relações encontradas;
- Discutir resultados, processos e ideias matemáticos.

Guião de exploração da tarefa

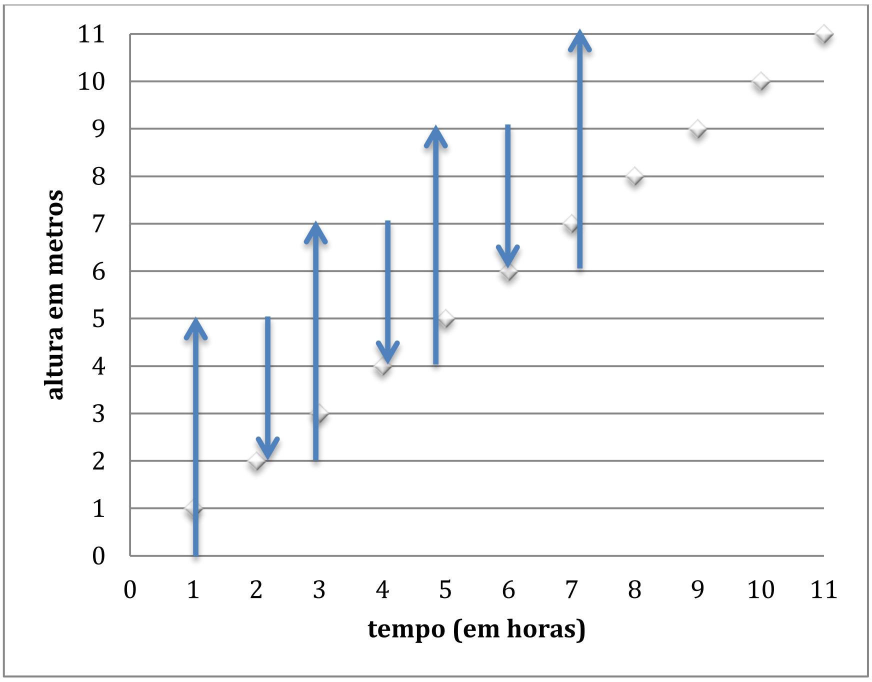
Tempo: 1 bloco de 100 minutos

I – Apresentação da tarefa
Tempo previsto: 10 minutos

- A professora projeta o enunciado da tarefa no quadro e distribui um exemplar por cada um dos alunos;
- Os alunos, organizados em grupos, procedem à leitura individual e silenciosa da tarefa;
- Após a leitura, dois alunos, solicitados pela professora, recontam e exemplificam a situação apresentada, podendo usar o quadro para o efeito e recorrer a um esquema, a uma tabela, ou a outra representação que considerem conveniente. É importante, contudo, que existam outras intervenções, que possibilitem auscultar vários pontos de vista, de forma a que a tarefa se torne clara para todos.

II – Trabalho em grupos
Tempo previsto: 35 minutos
Possíveis abordagens a adotar pelos os alunos:
Na **primeira questão** é possível que os alunos recorram a uma esquema ou a uma tabela:

Tempo (em horas)	Altura da parede (em metros)
1	5
2	2
3	7
4	4
5	9
6	6
7	11



Para apoiar eventuais dificuldades e procurar aceder ao raciocínio dos alunos a professora coloca algumas questões:

- O que sucede na primeira hora e na segunda e na terceira?
- Como poderão representar esses acontecimentos?

A **segunda questão,** apela à generalização, quando o número de metros da parede é 100, um número par. Este caso, embora particular, distancia-se dos casos em que através de uma esquema ou de uma tabela é possível encontrar uma resposta, induz à generalização, a um olhar mais atento, à procura de relações entre as variáveis.

Da observação dos casos particulares representados no gráfico ou na tabela é possível inferir que sempre que a altura da parede do poço, em metros, é um número par, o tempo em horas coincide com a altura da parede, logo, se a altura da parede for 100m a subida irá demorar 100 horas.

Tempo (em horas)	Altura da parede (em metros)
1	5
2	2
3	7
4	4
5	9
6	6
7	11

A **terceira questão,** apela à generalização quando o número de metros da parede é 151, um número ímpar. Tal como na questão anterior este caso, embora particular, distancia-se dos casos em que através de uma esquema ou de uma tabela é possível encontrar uma resposta, induzindo assim à generalização.

Da observação dos casos particulares representados no gráfico ou na tabela é possível inferir que sempre que a altura da parede do poço, em metros, é um número ímpar, existe uma diferença de 4 unidades entre essa altura, em metros, e o tempo, em horas, logo se a altura da parede for 151m a subida irá demorar 147 horas, 151- 4.

Para apoiar eventuais dificuldades e procurar aceder ao raciocínio dos alunos a professora coloca algumas questões:

- O que descobriram na resposta anterior? Isso ajuda-vos a responder a esta?
- O que sabem sobre a relação entre o tempo, em horas, e a altura da parede do poço, em metros?

A **última questão** apela à busca da expressão da generalização, que deve ter por base as descobertas feitas nas duas questões anteriores.

- Se o número de metros da parede for par: $\text{tempo (h)}=\text{altura (m)}$
- Se o número de metros da parede for ímpar:

$$\text{tempo (h)}=\text{altura (m)}-4$$

Para apoiar eventuais dificuldades a professora poderá questionar os alunos:

- O que descobriram nas respostas anteriores? Isso ajuda-vos a responder a esta?
- Que relações conseguem estabelecer entre o tempo, em horas, e a altura da parede do poço, em metros?
- Como podem representar essas relações?

Para induzir à substituição das expressões anteriores por outras mais simplificadas e simultaneamente atribuir um significado às letras, a professora poderá colocar algumas questões:

- Será possível representar essa relação de uma forma mais simplificada?
- Será possível substituir as palavras *"tempo" e "horas"*, por letras que os possam representar?

III – Discussão

Tempo previsto: 35 minutos

A seleção dos trabalhos dos grupos que serão apresentados à turma deve considerar os seguintes aspetos:

- Representações que evidenciem a relação entre as variáveis;
- Alguns erros cometidos, com interesse para a discussão no grande grupo;

- Clareza na forma como encontraram a regra;
- Diferentes representações da relação encontrada: em linguagem natural, em linguagem matemática (diferentes expressões algébricas), através de diagramas, esquemas.
-

Os grupos selecionados para a apresentação copiam para o acetato a sua forma de resolução, em seguida, e utilizando como suporte a projeção, explicam o seu raciocínio.

As intervenções da professora devem ser pontuais, deixando espaço aos alunos para a discussão. Poderá assumir um papel moderados, perguntar-lhes se concordam, com o que foi transmitido pelo colega, se gostariam de acrescentar algo importante ou explicar de outro modo, incentivando-os a expressarem de forma clara o seu raciocínio.

IV – Síntese
Tempo previsto: 20 minutos
Nesta última fase da aula a professora procede à sistematização da tarefa, tendo como ponto de partida o trabalho desenvolvido e apresentado pelos grupos.

Tempo (em horas)	Altura da parede (em metros)	Relação entre o tempo e a altura
1	5	tempo = altura-4
2	**2**	**tempo = altura**
3	7	tempo = altura-4
4	**4**	**tempo = altura**
5	9	tempo = altura-4
6	**6**	**tempo = altura**
7	11	tempo = altura-4

- Expressões da generalização das relações encontradas:

  - Se o número de metros da parede for par: tempo (h)=altura (m)

  - Se o número de metros da parede for ímpar:

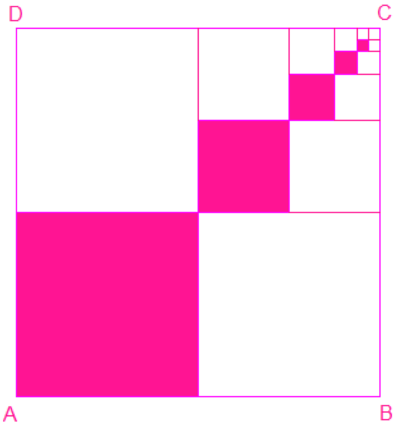
  tempo (h)=altura (m)-4 → t(h)=a (m)-4

O aparecimento da letra pode surgir através da simplificação das expressões, como uma abreviatura. Para perceber o significado que lhes é atribuído pelos alunos a professora poderá colocar algumas questões:

- O que representam, então, essas letras?
- Como podem relacionar essas letras com o enunciado da tarefa?
- O que representa a expressão em que a letra surge inserida?

Anexo K – Tarefa "Quadrados sombreados… até ao infinito"

Já se encontram no último posto. Superado este último enigma, *Quadrados sombreados… até ao infinito*, a meta encontra-se à vista.



1. Observa o quadrado ABCD. Imagina que a região sombreada se repete de acordo com o padrão da figura, originando sempre mais quadrados. Desse modo, que parte do quadrado ABCD ficará sombreada?
2. Encontra uma regra que te permita determinar a área sombreada de qualquer quadrado. Explica o teu raciocínio.

Sugestões: Observa os dados com atenção.
Faz registos do teu trabalho (ex.: recontar a situação; organizar os dados de forma clara, escrever o modo como se relacionam os dados)

[1]

[1] Inspirada na tarefa "Fractional parts" (http://intermath.coe.uga.edu/topics/nmcncept/fractns/a08.htm) em 06.04.2008

Objetivos da tarefa

Tema: Álgebra e números e operações
Tópico: Sequências e regularidades e números racionais não negativos
Objetivos:

- Reconhecer uma sequência numérica decrescentes;
- Adicionar números racionais não negativos representados sob a forma de fração;
- Comparar números racionais;
- Formular e testar conjeturas e generalizações e justificá-las fazendo deduções informais;
- Identificar as variáveis:
  - Quadrado sombreado, parte da área do quadrado [ABCD] correspondente a esse quadrado;
- Identificar a relação entre as variáveis: a área sombreada de cada um dos quadrados na sequência é $\frac{1}{4}$ da área do quadrado sombreado anterior;
  - Expressar em linguagem natural e em linguagem simbólica a generalização das relações encontradas;
  - Discutir resultados, processos e ideias matemáticos.

Guião de exploração da tarefa

Tempo: 1 bloco de 100 minutos

I – Apresentação da tarefa
Tempo previsto: 10 minutos

- A professora projeta o enunciado da tarefa no quadro e distribui um exemplar por cada um dos alunos;
- Os alunos, organizados em grupos, procedem à leitura individual e silenciosa da tarefa;
- Após a leitura, dois alunos, solicitados pela professora, recontam e exemplificam a situação apresentada, podendo usar o quadro para o efeito e recorrer a um esquema, a uma tabela, ou a outra representação que considerem conveniente, é importante, contudo, que existam outras intervenções, que possibilitem auscultar vários pontos de vista, de forma a que a tarefa se torne clara para todos.
- A professora poderá solicitar aos alunos uma estimativa da área sombreada, a discussão deve ser orientada no sentido de evidenciar que aquela área está entre $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$ da área do quadrado $[ABCD]$

II – Trabalho em grupos
Tempo previsto: 40 minutos
A **primeira questão** permite trabalhar a Álgebra, dado que conduz à identificação de regularidades e padrões (conforme se escolha uma abordagem numérica ou geométrica para a resolução) e estabelecer conexões com outros dois temas do programa: a

Geometria e a adição de números racionais não negativos. Ao nível da Geometria, a tarefa apela à capacidade de visualização de uma sequência de quadrados, sombreados e não sombreados, que se vão obtendo por divisão. A adição de números racionais não negativos surge como um dos procedimentos possíveis que permite encontrar a resposta a esta questão.

Possíveis abordagens a adotar pelos os alunos:
A representação, através de números racionais, de cada uma das partes sombreadas do quadrado [ABCD]. Para isso, o mais natural é a utilização de frações expressando a relação parte-todo (uma parte de 4, ou $\frac{1}{4}$, uma parte de 16, ou $\frac{1}{16}$,...). Os alunos podem também recorrer a numerais decimais para representar as partes sombreadas, calculando o quociente exato de 1 por 4, de 1 por 16, de 1 por 64, mais genericamente, de 1 pelas sucessivas potências de 4. A utilização da representação decimal causa algumas dificuldades pelo número de ordens decimais dos numerais:

Numerador	Denominador	Quociente
1	4	0,25
1	16	0,0625
1	64	0,015625
1	256	0,0039063
1	1024	0,0009766
1	…	…

Recorrendo à representação facionária, os alunos escrevem ordenadamente as frações que correspondem aos sucessivos quadrados sombreados na figura:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{4^5} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\frac{1}{1024}$$

Para apoiar eventuais dificuldades e procurar aceder ao raciocínio dos alunos a professora coloca algumas questões:

- Existem algumas regularidades nesta sequência de parcelas? Porquê?
- Que relação encontram entre os denominadores? E entre os quocientes?
- Conseguem explicar essas regularidades a partir da figura?

Para determinar a parte do quadrado[ABCD] sombreada, os alunos calculam a soma dos números racionais, depois de escreverem frações equivalentes com o mesmo denominador:

$$\frac{256}{1024}+\frac{64}{1024}+\frac{16}{1024}+\frac{4}{1024}+\frac{1}{1024}=\frac{341}{1024}$$

Para apoiar eventuais dificuldades e procurar aceder ao raciocínio dos alunos a professora coloca algumas questões:

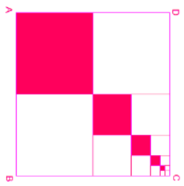
- Qual o significado do denominador 1024?
- Qual o significado de cada um dos numeradores das frações?

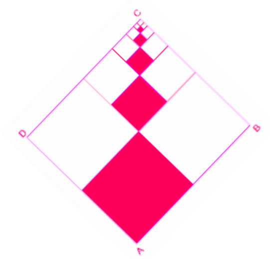
No final, os alunos determinam o quociente de 341 por 1024 para terem um valor aproximado da parte do quadrado [ABCD] sombreada.
$\frac{341}{1024} = 341 \div 1024 =$0,3330078125 (valor aproximado a $\frac{1}{3}$)

Para que os alunos atribuam um significado ao quociente a professora poderá questionar:

- O que acontece à soma quando se continua o padrão?
- Será possível representar o numeral decimal de outar forma?

A exploração da figura em posições distintas estimula a visualização e pode originar estratégias de resolução diferentes:





Na figura é possível identificar três “módulos” semelhantes, sendo dois deles brancos e apenas um sombreado. Desse modo, conclui-se que o “módulo” sombreado corresponde a 1/3 do quadrado [ABCD].

Na **segunda questão** o recurso a uma tabela ou a um esquema que evidencie a relação entre os termos da sequência e a área sombreada são as abordagens mais prováveis:

Quadrado/ termo	**Área sombreada**
1	$\frac{1}{4}=\frac{1}{4^1}$
2	$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}=\frac{1}{4^2}$
3	$\frac{1}{16}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{64}=\frac{1}{4^3}$
4	$\frac{1}{64}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{256}=\frac{1}{4^4}$
5	$\frac{1}{256}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{1024}=\frac{1}{4^5}$
...	....
10	$\frac{1}{4^{10}}$
...	...
Qualquer temo (n)	$\frac{1}{4^{\text{qualquer termo}}}=\frac{1}{4^n}$

Se os alunos não recorrerem às potências e para apoiar eventuais dificuldades a professora poderá questionar:

- O que descobriram na resposta anterior? Isso ajuda-vos a responder a esta?
- Que relações conseguem estabelecer entre a área do primeiro quadrado sombreado e a área do segundo? E entre a área do segundo e a área do terceiro? E entre a área do primeiro e a área do terceiro?
- Será possível representar essa relação de outra forma?

Para induzir à substituição das expressões anteriores por outras mais simplificada e simultaneamente atribuir um significado às letras a professora poderá colocar algumas questões:

- Será possível representar essa relação de uma forma mais simplificada?
- Será possível substituir a expressão *"qualquer termo"*, por uma letra que o possa representar?

III – Discussão

Tempo previsto: 35 minutos

A seleção dos trabalhos dos grupos que serão apresentados à turma deve considerar os seguintes aspetos:

- Representações que evidenciem a relação entre as variáveis;
- Alguns erros cometidos, com interesse para a discussão no grande grupo;
- Clareza na forma como encontraram a regra;
- Diferentes representações da relação encontrada: em linguagem natural, em linguagem matemática (diferentes expressões algébricas), através de diagramas, esquemas.

Os grupos selecionados para a apresentação copiam para o acetato a sua forma de resolução, em seguida, e utilizando como suporte a projeção, explicam o seu raciocínio.

As intervenções da professora devem ser pontuais, deixando espaço aos alunos para a discussão. Poderá assumir um papel moderador, perguntar-lhes se concordam com o que foi transmitido pelo colega, se gostariam de acrescentar algo importante ou explicar de outro modo, incentivando-os a expressarem de forma clara o seu raciocínio.

IV – Síntese

Tempo previsto: 20 minutos

Nesta última fase da aula a professora procede à sistematização da tarefa, tendo como ponto de partida o trabalho desenvolvido e apresentado pelos grupos.

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{4^5} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\frac{1}{1024}$$

$$\frac{256}{1024}+\frac{64}{1024}+\frac{16}{1024}+\frac{4}{1024}+\frac{1}{1024}=\frac{341}{1024}=341\div 1024=0{,}3330078125\approx\frac{1}{3}$$

Quadrado/ termo	**Produto de fatores iguais**	**Potência**	**Área sombreada**
1	$\frac{1}{4}$	$\left(\frac{1}{4}\right)^1$	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}$	$\left(\frac{1}{4}\right)^2$	$\frac{1}{16}$
3	$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}$	$\left(\frac{1}{4}\right)^3$	$\frac{1}{64}$
4	$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}$	$\left(\frac{1}{4}\right)^4$	$\frac{1}{256}$

5	$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}$	$\left(\frac{1}{4}\right)^5$	$\frac{1}{256}$
...	...	...	...
10	$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\ldots$	$\left(\frac{1}{4}\right)^{10}$	$\frac{1}{1\,048\,576}$
...	...	...	...
Qualquer termo (n)		$\left(\frac{1}{4}\right)^n$	

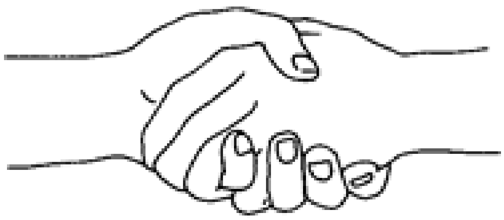
O aparecimento da letra pode surgir através da simplificação das expressões, como uma abreviatura. Para perceber o significado que lhes é atribuído pelos alunos a professora poderá colocar algumas questões:

- O que representa, então, essa letra?
- Como podem relacionar essas letras com o enunciado da tarefa?
- O que representa a expressão em que a letra surge inserida?

Anexo L – Tarefa – “A hora da despedida...”

Prestes a terminarem esta maravilhosa aventura, em que se viveram momentos bem passados, se ultrapassara desafios e em que a amizade e a solidariedade estiveram sempre presentes, eis que chega a hora da despedida em que todos se cumprimentam como é habitual entre os escuteiros, apertando a mão esquerda, entrelaçando os dedos mindinhos, e deixando assim a mão direita livre para a saudação.

O cumprimento é feito com a mão esquerda porque é a mão do lado do coração, que é o símbolo da amizade. O dedos mindinhos entrelaçados permitem um aperto de mão mais forte, sinal de maior união, e simbolizam um abraço trocado entre escuteiros, como sinal de profunda amizade.



1. Considerando que todos se cumprimentaram entre si, os 30 escuteiros e o respetivo chefe, quantos apertos de mão houve no total?

2. Consegues encontrar um processo que nos indique o número total de cumprimentos para qualquer número de escuteiros que pudesse estar no acampamento? Explica-o.

Sugestões: Observa os dados com atenção.
Faz registos do teu trabalho (ex.: recontar a situação; organizar os dados de forma clara, escrever o modo como se relacionam os dados)
[1]

[1] Inspirada na tarefa do Projeto IMLNA Promover a Aprendizagem Matemática em Números e Álgebra: Sequências e Expresses Algébricas (Saraiva, Pereira e Berrincha, 2010)

Objetivos da tarefa

Tema: Álgebra
Tópico: Sequências e regularidades
Objetivos:

- Reconhecer uma sequência numérica crescente;
- Formular e testar conjeturas e generalizações e justificá-las fazendo deduções informais;
- Identificar as variáveis:
    - Número de escuteiros, número de apertos de mão;
- Identificar a relação entre as variáveis: o número de apertos de mão é metade do produto entre o número de escuteiros e o número de escuteiros do termo anterior;
- Expressar em linguagem natural e em linguagem simbólica a generalização das relações encontradas;
- Discutir resultados, processos e ideias matemáticos.

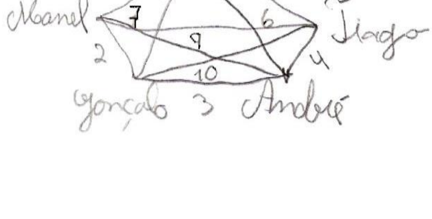
Guião de exploração da tarefa

Tempo: 1 bloco de 100 minutos

I – Apresentação da tarefa
Tempo previsto: 10 minutos

- A professora projeta o enunciado da tarefa no quadro e distribui um exemplar por cada um dos alunos;
- Os alunos, organizados em grupos, procedem à leitura individual e silenciosa da tarefa;
- Após a leitura, os alunos, explicitam a situação apresentada explicando por palavras suas o contexto e o objetivo da tarefa.
- A professora solicita a seis alunos que concretizem a situação. Enquanto um faz os registos no quadro, os restantes vão surgindo um a um e efetuando o cumprimento. Sempre que o grupo ganha um novo elemento, todos se voltam a cumprimentar entre si. Os restantes elementos da turma controlam o número de apertos de mão, em cada situação: com um, dois, três, quatro e cinco elementos, auxiliando o colega responsável pelos registos.

II – Trabalho em grupos
Tempo previsto: 35 minutos
Possíveis abordagens a adotar pelos os alunos:
Na **primeira questão,** os alunos podem recorrer a um esquema, para que possam concretizar e compreender a situação quando têm um número restrito de escuteiros, contudo, para um número maior o recurso à tabela é a hipótese mais viável.



N.º de escuteiros	N.º de apertos de mão
1	0
2	1
3	3
4	6
5	10
6	15
7	21
8	28
9	36
10	45
...	...
31	465

+1
+2
+3
+4
+5

O mais provável, dado o elevado número de escuteiros, é que a maioria dos grupos encontre a resposta à primeira questão através do preenchimento da tabela e usando como estratégia para obter o número de apertos de mão do termo seguinte a soma do número de apertos de mão com o número de escuteiros do termo anterior. Neste caso existe necessidade de recorrer sempre ao termo anterior.

Também poderão recorrer à soma dos inteiros consecutivos até n-1:
Para 5 escuteiros: 1+2+3+4 = 10
Para 10 escuteiros: 1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45
Para 31 escuteiros: 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16+17+18+...+30 = 465

A professora deve questionar os alunos, de forma a tentar aceder aos seus raciocínios e a apoiar eventuais dificuldades.

- Como pensaram?
- Seria possível determinar o número de apertos de mão dados pelos 31 escuteiros, se não conhecêssemos os que tinha sido dados por 30? (se recorrerem ao termo anterior)
- Será possível determinar o número de apertos de mão dados pelos 31 escuteiros, sem ter que recorrer à soma? (se recorrerem à soma dos inteiros consecutivos até n-1)

A **segunda questão** apela à generalização e inviabiliza os processos anteriores de recorrência.
Para apoiar eventuais dificuldades a professora poderá questionar os alunos:

- O que sabem sobre a relação entre o número de escuteiros e o número de apertos de mão? Como podem representar essa relação?

- O n.º de apertos de mão para qualquer n.º de escuteiros pode ser determinado por:
  $\text{n.º de apertos de mão do termo anterior} + \text{n.º de ordem do termo anterior}$

A professora poderá ainda colocar algumas questões que conduzam os alunos à busca de uma generalização sem o uso recursivo:

- Será possível descobrir outras relações na tabela, em que não seja necessário recorrer ao termo anterior ou à soma? Uma relação que nos permitisse determinar o número de apertos de mão, se tivéssemos um grupo de 100 ou até de 1000 escuteiros?
- Será possível obter o n.º de apertos de mão a partir do n.º de escuteiros, indicados

na coluna da esquerda?
- Como podem representar essa relação?

III – Discussão
Tempo previsto: 35 minutos
A seleção dos trabalhos dos grupos que serão apresentados à turma deve considerar os seguintes aspetos:
- Representações que evidenciem a relação entre as variáveis;
- Alguns erros cometidos, com interesse para a discussão no grande grupo;
- Clareza na forma como encontraram a regra;
- Diferentes representações da relação encontrada: em linguagem natural, em linguagem matemática (diferentes expressões algébricas), através de diagramas, esquemas.

Os grupos selecionados para a apresentação copiam para o acetato a sua forma de resolução, em seguida, e utilizando como suporte a projeção, explicam o seu raciocínio.

As intervenções da professora devem ser pontuais, deixando espaço aos alunos para a discussão. Poderá assumir um papel moderados, perguntar-lhes se concordam, com o que foi transmitido pelo colega, se gostariam de acrescentar algo importante ou explicar de outro modo, incentivando-os a expressarem de forma clara o seu raciocínio.

IV – Síntese
Tempo previsto: 20 minutos
Nesta última fase da aula a professora procede à sistematização da tarefa, tendo como ponto de partida o trabalho desenvolvido e apresentado pelos grupos.

N.º de escuteiros	N.º de apertos de mão	
1	0	$1 \times 2 \div 2 = 1$
2	1	
3	3	$3 \times 4 \div 2 = 6$
4	6	
5	10	$5 \times 6 \div 2 = 15$
6	15	
...	...	
Qualquer n.º de escuteiros (n)	?	

Assim, o número de cumprimentos entre qualquer número de escuteiros, pode ser determinado por:

- $\text{número de escuteiros} \times \text{número de escuteiros do termo anterior} \div 2$

Para induzir a substituição da expressão anterior por outra mais simplificada e simultaneamente atribuir um significado às letras a professora poderá colocar algumas questões:

- Se quisermos simplificar e substituir qualquer número de escuteiros por n, como poderemos determinar o n.º de cumprimentos entre qualquer número de escuteiros?
- Como poderemos representar o número de escuteiros do termo anterior?
- Será possível representar essa relação de uma forma mais simplificada?

- $n \times (n-1) \div 2 = \frac{n \times (n-1)}{2}$

O aparecimento da letra pode surgir através da simplificação das expressões, como uma abreviatura. Para perceber o significado que lhes é atribuído pelos alunos a professora poderá colocar algumas questões:

- O que representa, então, essa letra?
- Como podem relacionar essas letras com o enunciado da tarefa?
- O que representa a expressão em que a letra surge inserida?

Anexo M – Pedido de autorização aos encarregados de educação

[redacted], 6 de dezembro de 2013

Exmo.(a) Sr.(a) Encarregado de Educação

No âmbito da realização da minha dissertação de Mestrado, promovido pela Escola Superior de Educação de Lisboa, na ótica da Educação Matemática e sob a orientação da Professora Doutora Ana Paula Canavarro, pretendo analisar o desenvolvimento do pensamento algébrico nos alunos do 2.º Ciclo do Ensino Básico.

Para realizar este estudo, necessito de recolher dados com os alunos da turma do 6.ºD, enquanto leciono o tema "Álgebra", que integra o programa de 6.º ano de escolaridade. Solicito com este propósito autorização para a recolha de som e imagens do trabalho e das intervenções orais do seu educando, durante as aulas de Matemática, que decorrerão na segunda metade do mês de janeiro e durante o mês de fevereiro de 2014.

Os registos de áudio e vídeo, serão utilizados exclusivamente no âmbito do meu trabalho de mestrado e nunca serão alvo de exposição pública. No texto escrito que irei produzir relativamente a este trabalho a referência a eventuais alunos será feita de forma anónima, sendo os seus nomes alterados, garantindo assim a preservação da sua privacidade.
Tanto eu como o diretor de turma encontramo-nos inteiramente ao seu dispor para prestar qualquer esclarecimento.

Grata pela atenção dispensada

Anexo N – Informação enviada à direção do agrupamento de escolas

[redacted], 6 de dezembro de 2013

Exmo. Senhor Diretor do Agrupamento

No âmbito da realização da minha dissertação de Mestrado, promovido pela Escola Superior de Educação de Lisboa e na ótica da Educação Matemática na Educação Pré-escolar e no 1º e 2º ciclos do Ensino Básico, sob a orientação da professora Doutora Ana Paula Canavarro, pretendo analisar o desenvolvimento do pensamento algébrico nos alunos do 2.º Ciclo do Ensino Básico.

Para realizar este estudo, solicito autorização para recolher dados com os alunos da turma do 6.ºD, no decorrer das minhas aulas de matemática. Durante este processo será necessário utilizar instrumentos de recolha de som e imagem, destinados à gravação do trabalho realizado pelos alunos, dos seus diálogos, justificações e processos de construção do conhecimento.

As gravações áudio e vídeo serão utilizadas exclusivamente no âmbito deste trabalho. Os nomes dos alunos serão alterados, garantindo assim a preservação da sua privacidade e também da própria escola.

Todos os encarregados de educação dos alunos da turma serão contactados, para que formalizem por escrito a autorização que permita a gravação de imagens e som para o fim mencionado.

Agradeço a atenção dispensada