

Compondo e desenhando formas tridimensionais: um contributo para a caracterização do raciocínio espacial de crianças de 5 anos

Composing and drawing three-dimensional shapes: a contribute for the characterization of the spatial reasoning of children aged five

Maria João Nunes

Agrupamento de Escolas de Paço de Arcos, Portugal

mjoao.nunes@aepa.pt

Margarida Rodrigues

ESELx - Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa

UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal

margaridar@eselx.ipl.pt

Abstract. This article aims to characterize the spatial reasoning of children aged five through the analysis of their strategies when composing and drawing three-dimensional shapes. We begin by presenting curricular perspectives about the area of geometry in the kindergarten, focusing later conceptual aspects associated with the development of spatial reasoning, namely those involved in the composition of three-dimensional shapes. The study assumes a qualitative nature, within the modality of case study. The results of the study suggest the interaction between multiple processes that characterize spatial reasoning, verifying the occurrence of different strategies. The children, in the composition of the three-dimensional forms, used strategies involving intentionality and anticipation, corresponding to the shape composer level and substitution composer level. The analysis of the strategies used in the compositions' drawings shows children's ability to perceive spatial relationships by adopting a partial approach in which they regard the relative positions of the cubes as distinct parts of the tetracubes.

Keywords: preschool education; spatial reasoning; visualization; composition of three-dimensional shapes.

Resumo. Este artigo visa caracterizar o raciocínio espacial de crianças de 5 anos através da análise das suas estratégias na composição e desenho de formas tridimensionais. Começamos por apresentar perspetivas curriculares sobre a área da geometria no Jardim de Infância, focando depois aspetos conceptuais associados ao desenvolvimento do raciocínio espacial, designadamente os envolvidos na composição de formas tridimensionais. O estudo assume uma natureza qualitativa, na modalidade de estudo de caso. Os resultados do estudo sugerem a interação entre múltiplos processos que caracterizam o raciocínio espacial, verificando-se a ocorrência de estratégias

diversificadas. Revelam que as crianças, na composição das formas tridimensionais, utilizaram estratégias envolvendo a intencionalidade e a antecipação, correspondendo aos níveis compositor de formas e compositor de substituição. A análise das estratégias utilizadas nos desenhos das composições evidencia a capacidade das crianças em perceberem relações espaciais, ao adotarem uma abordagem parcial em que atendem às posições relativas dos cubos como partes distintas dos tetracubos.

Palavras-chave: educação pré-escolar; raciocínio espacial; visualização; composição de formas tridimensionais.

(Recebido em outubro de 2017, aceite para publicação em setembro de 2018)

Introdução

As crianças do Jardim de Infância possuem um conhecimento matemático informal que assume, muitas vezes, de forma surpreendente, alguma complexidade e sofisticação, revelando serem capazes de explorar padrões, de contar objetos, de explorar formas e relações espaciais, sobretudo quando lhes são disponibilizados materiais diversificados e as tarefas propostas são desafiantes (Bruce, Sinclair, Moss, Hawes, & Caswell, 2015; Clements & Sarama, 2007; Mulligan, 2015). Quando se fala em matemática no Jardim de Infância, a maior parte dos educadores referem o trabalho com números e eventualmente a identificação de figuras geométricas básicas. Com a publicação das novas Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar (OCEPE) (Silva, Marques, Mata, & Rosa, 2016), a Geometria aparece como uma das componentes na abordagem à matemática. Diversos autores argumentam mesmo que, na educação pré-escolar, a área da geometria é tão importante como a dos números uma vez que, além da sua importância específica, também suporta as capacidades numéricas e aritméticas (Hawes, Tepylo, & Moss, 2015; Sarama & Clements, 2009). Goldenberg, Cuoco e Mark (1998) invocam duas razões para fundamentar a importância da Geometria na educação em geral: (1) ajuda os alunos a estabelecer conexões com a matemática; e (2) é um veículo fundamental para desenvolver estilos de raciocínio visuais e aprender a procurar invariantes. Espera-se que os educadores, com tarefas apropriadas, envolvendo a manipulação e a reflexão sobre as propriedades das figuras bi e tridimensionais apoiem o desenvolvimento do raciocínio espacial e a análise e operação com formas (NCTM, 2007).

Sendo a Geometria a ciência que estuda o espaço e a forma, ela é apresentada por Freudenthal (1973) como a forma da criança compreender o espaço em que vive, respira e se move para que, através do seu conhecimento, conquista e exploração, possa viver,

respirar e mover-se melhor nesse mesmo espaço. De acordo com Battista (2007), o pensamento geométrico consiste na invenção e no uso de sistemas conceituais formais para investigar a forma e o espaço. O autor salienta que no pensamento geométrico, raciocina-se acerca de objetos mas raciocina-se com representações. Diversos autores (Bruce & Hawes, 2015; Clements, Battista, & Sarama, 2001; Lehrer, Kenkins, & Osana, 1998) sustentam que o desenvolvimento do pensamento geométrico depende da maturação mas também da instrução. Segundo Battista (2007), os processos cognitivos subjacentes ao pensamento geométrico são a percepção e a formação de imagens (ou seja, formação de representações mentais), sendo que o conhecimento geométrico tem origem nestes dois processos. Daí que o autor considere que o raciocínio espacial está “subjacente à maior parte do pensamento geométrico” (Battista, 2007, p. 843), sendo aquele definido como a capacidade de “ver” (no sentido de ver não só com o sentido da visão mas sobretudo com os olhos da mente), examinar e refletir sobre objetos espaciais, relações, imagens e transformações.

O raciocínio espacial inclui, assim, gerar imagens, analisá-las de modo a responder a questões a elas respeitantes, operar e transformar com imagens e colocar essas imagens ao serviço de outras operações mentais (Battista, 2007). Refere-se à capacidade de reconhecer e manipular mentalmente as propriedades espaciais dos objetos e as relações espaciais entre eles (Mulligan, 2015). Está, pois, associado à visualização espacial, à compreensão de formas e figuras geométricas, suas propriedades e relações, bem como à orientação espacial (Nes & de Lange, 2007; Sarama & Clements, 2009). De acordo com Whiteley, Sinclair, e Davis (2015), são diversos os processos dinâmicos que caracterizam o raciocínio espacial, nomeadamente localizar, orientar, transformar, decompor e recompor, mudar dimensões, balançar, usar diagramas, navegar, comparar, dispor em simetria, redimensionar de acordo com uma escala, experienciar sensorialmente, e visualizar.

O desenvolvimento do raciocínio espacial tem impacto no sucesso matemático (Hawes, Tepylo, & Moss, 2015; Mamolo, Ruttenberg-Rozen, & Whiteley, 2015), em diferentes domínios (Bruce & Hawes, 2015), e nos anos vindouros (Mulligan, 2015; Sinclair & Bruce, 2015). No entanto, e apesar da sua importância, tem sido dada pouca ênfase às capacidades espaciais na aprendizagem da matemática (Mulligan, 2015; Sinclair & Bruce, 2015).

Nas novas OCEPE (Silva et al., 2016), a expressão visualização espacial aparece referida como “um processo que envolve a construção e a manipulação de imagens mentais de objetos a 2 ou 3 dimensões e permite construir representações visuais que são essenciais

para a vida” (p. 83). Numa perspectiva convergente, as orientações curriculares internacionais sustentam que o principal objetivo do ensino da geometria é desenvolver a visualização e o raciocínio espaciais. Segundo o NCTM (2007), a visualização, além dos aspetos atrás referidos, envolve também a perceção de um objeto a partir de diferentes perspetivas.

Este artigo apresenta parte de um estudo mais amplo (Nunes, 2016), e tem como objetivo caracterizar o raciocínio espacial de crianças de 5 anos, designadamente o envolvido na composição de formas tridimensionais. De acordo com este objetivo, o presente artigo pretende responder às seguintes questões: (i) Que estratégias usam as crianças na composição de formas tridimensionais?; e (ii) Como representam pelo desenho as composições realizadas?. Foca-se numa única tarefa, a de construção de tetracubos e respetiva representação pelo desenho. A concretização desta tarefa foi estendida à criação de *puzzles*, encetada espontaneamente pelas crianças. Assim, a primeira questão incide em diferentes tipos de composições tridimensionais: os tetracubos solicitados pela educadora, bem como os *puzzles* criados espontaneamente pelas crianças. A segunda questão incide exclusivamente nos tetracubos.

Dada a reduzida investigação incidente no raciocínio espacial de crianças dos primeiros anos envolvendo formas tridimensionais (Sinclair & Bruce, 2015), este artigo visa contribuir para o conhecimento das capacidades de crianças de 5 anos relacionadas com o seu raciocínio espacial.

Enquadramento teórico

A aprendizagem da geometria

O conhecimento geométrico é um processo onde coexistem quatro aspetos – perceção, construção, representação e conceção – aos quais deve ser dada igual importância (Lauro, 2007). A geometria deve, pois, ser iniciada com atividades que visem a perceção mas ao mesmo tempo estejam relacionadas com a construção de objetos e com a sua representação. São estas ações de construção e representação, juntamente com a perceção, que irão permitir, mais tarde, a sistematização concetual.

Ao realizar atividades manipulativas e de exploração, a criança pode desenvolver diversas capacidades como a visualização, a organização do pensamento geométrico e até a criatividade, utilizando objetos do mundo real ou materiais específicos. Segundo Van den Heuvel-Panhuizen e Buys (2005), o raciocínio e a linguagem geométrica são adquiridos

progressivamente, numa espiral de desenvolvimento em que a criança desempenha um papel ativo na construção dos seus próprios conceitos. O progresso da compreensão das crianças sobre a forma e o espaço obedece a uma sequência de aprendizagem que vai das experiências concretas (usando os olhos e as mãos na observação e exploração de objetos) para as abstratas, da realização de conexões no conhecido para o desconhecido, numa linha que flui do simples para o complexo. Diversos autores (Moreira & Oliveira, 2003; Sarama & Clements, 2009) consideram que a resolução de problemas e a discussão envolvendo os objetos geométricos ajudam a construir as conexões entre o conhecimento construído e outro conhecimento igualmente acessível mas ainda não interiorizado. A construção do significado matemático é feita a partir de ações em objetos geométricos, modelados por materiais manipuláveis, e posteriormente da reflexão sobre essas ações. A ênfase recai na importância de os educadores de infância estimularem as crianças a observarem e descreverem as formas observadas, privilegiando a descoberta das propriedades e relações entre elas e não apenas a identificação ou nomeação das figuras geométricas (Moreira & Oliveira, 2003; NCTM, 2007).

Tal como referido atrás, é fundamental que as crianças representem as construções realizadas, desenhando-as no papel. Segundo o NCTM (2007), as representações deverão ser realizadas pelas próprias crianças pois materializam o esforço que estas fazem para compreenderem e tornarem a sua compreensão acessível aos outros. Assim, os desenhos realizados pelas crianças para representar as construções modeladas com materiais manipuláveis ilustram a sua compreensão das ideias matemáticas e é neste sentido que Sarama e Clements (2009) consideram que os desenhos são atos de representação e não atos perceptivos, na medida em que constituem indicadores da forma como as crianças organizam o espaço e a forma. Esta é uma questão controversa, sendo que outros autores (Gutiérrez, 1998; Lehrer, Jenkins, & Osana, 1998) apontam resultados de investigação que não suportam a existência de uma relação entre o desenho realizado e o raciocínio sobre as formas. Por seu lado, Thom e McGarvey (2015) sustentam que o ato de desenhar é um meio de as crianças se tornarem conscientes das relações espaciais bem como dos conceitos geométricos, constituindo, portanto, um modo de pensar e não um produto da sua consciência das relações espaciais. Os autores assumem a perspectiva teórica da cognição corporizada, rejeitando uma visão dualista que concebe os desenhos como representações estáticas que fixam um mundo externo. Pelo contrário, defendem que os desenhos das crianças são simultaneamente atos e artefactos. Assim, os desenhos não são encarados meramente como a expressão de uma realidade; eles são em si mesmos uma realidade

multifacetada. O estudo que desenvolveram com alunos dos 1.º e 2.º anos de escolaridade permitiu concluir que as propriedades geométricas foram ficando evidentes para os alunos através da ação de desenhar e da reflexão sobre essa mesma ação e que os desenhos expandiram a compreensão dos alunos acerca dos padrões, da composição das formas e das relações geométricas.

Para a aprendizagem da geometria, Van den Heuvel-Panhuizen e Buys (2005) propõem uma trajetória de aprendizagem que tem em conta os seguintes aspetos: *orientar*, *construir* e *operar com formas*. *Orientar* inclui todo o tipo de atividades em que as crianças determinam a sua posição ou a de objetos no espaço e em que interpretam mapas ou esquemas. *Construir* e *operar com formas* relacionam-se com atividades de composição e decomposição de formas, pelo que serão apresentados a seguir com um pouco mais de detalhe.

Construir compreende todas as atividades através das quais as crianças elaboram formas bidimensionais e tridimensionais, sendo a ação concreta e o pensamento atividades que não se podem dissociar. Cada criança que está empenhada numa atividade de grupo tem que imaginar mentalmente o que as outras pretendem e por sua vez tentar transmitir o que pretende fazer. O educador poderá questionar por exemplo quanto à possibilidade de alguma parte das figuras que construíram poder ser substituída por outras peças. Pretende-se que as crianças “sejam capazes de identificar formas congruentes “dentro” das suas construções, com as restantes peças que têm disponíveis” (Mendes & Delgado, 2008, p. 32).

Operar com formas tem a ver com todas as atividades que incluem transformações geométricas, nomeadamente deslizar, rodar, refletir, projetar. Estas transformações deverão ser realizadas de forma intuitiva e incluir o uso de objetos concretos e/ou do próprio corpo. Sarama e Clements (2009) referem que as crianças, até aos três anos de idade, começam com movimentos de translação simples dos objetos, realizando, por volta dos quatro anos de idade, movimentos de rotação simples. Os movimentos de inversão dos objetos, associados à reflexão, são mais complexos, surgindo a sua utilização por volta dos cinco anos de idade.

Segundo Bruce et al. (2015), a simetria constitui uma ideia central em matemática, sendo uma área de relações espaciais onde as crianças desenvolvem um conhecimento corporizado, muito antes de realizarem aprendizagens formais neste âmbito. Os autores referem estudos que evidenciam que crianças, na idade correspondente à educação pré-escolar, realizam espontaneamente construções simétricas nas suas brincadeiras informais,

sendo, por isso, importante, na educação matemática, aproveitar esse conhecimento implícito acerca do espaço. Referem, ainda, a conexão entre a noção de congruência e as transformações geométricas em atividades de composição como a de construção de pentaminós ou a de construção de tricubos, tetracubos ou pentacubos, indicando que a maior parte dos alunos observados dos 1.º e 2.º anos não reconheciam a congruência das formas quando apresentadas em diferentes orientações.

Composição e decomposição de formas tridimensionais

Para que a criança consiga realizar a composição e decomposição de formas é necessário que tenha atingido um determinado nível de pensamento, implicando mobilizar capacidades espaciais de natureza intrínseca e dinâmica, isto é, envolvendo transformações de objetos, mentalmente ou por manipulação. Sarama e Clements (2009) explicitam os diferentes níveis de pensamento envolvido na composição de formas tridimensionais, segundo uma ordenação hierárquica:

- *Pré-compositor* (0 a 1 ano) – as crianças manipulam formas individualmente mas não são capazes de as combinar para compor uma forma maior;
- *Empilhador* (1 ano) – as crianças deste nível já empilham blocos, revelando usar a relação espacial “por cima de”, mas a escolha dos blocos não é sistemática;
- *Construtor de uma linha* (1 ano e meio) – as crianças usam a relação espacial “ao lado de” para fazer uma linha de blocos;
- *Empilhador de blocos congruentes* (2 anos) - as crianças usam a relação espacial “por cima de” para empilhar blocos congruentes, ou os que mostram uma relação similar para fazer linhas ou colunas;
- *Juntador de peças* (2 anos) - as crianças constroem componentes verticais e horizontais dentro de uma faixa limitada, como por exemplo, construindo o chão ou uma parede; usam a estratégia de tentativa e erro;
- *Construtor de figuras* (3 a 4 anos) – as crianças usam múltiplas relações espaciais, formando figuras em que os seus componentes têm múltiplos pontos de contacto, estendendo-se em múltiplas direções; revelam flexibilidade na integração das partes da estrutura; podem usar a estratégia de tentativa e erro e a simples adição de peças, não antecipando a criação de novas figuras geométricas e as formas são escolhidas tendo em conta a sua forma ou um atributo;

- *Compositor de formas* (4 a 5 anos) – cada vez com mais intencionalidade e antecipação, as crianças combinam formas para fazer novas formas ou fazer *puzzles*, com base nos atributos das formas; relacionam as partes com o todo e manipulam imagens mentais das formas; rodam e invertem para selecionar e colocar formas;
- *Compositor de substituição* (5 a 6 anos) – as crianças deliberadamente formam unidades compostas, reconhecendo e usando relações de substituição entre as formas;
- *Compositor de formas iterativo* (5 a 6 anos) – as crianças operam, intencionalmente, com unidades compostas (unidades de unidades);
- *Compositor de formas com unidades de unidades* (6 a 8 anos) – as crianças constroem e operam sobre unidades de unidades de unidades (formas feitas a partir de outras formas).

Em resumo, inicialmente, as crianças isolam as partes, depois arrumam-nas contiguamente e mais tarde combinam-nas de uma maneira integradora, eventualmente criando unidades mais complexas. Tal como referido por Battista (2007), no âmbito do processo cognitivo da percepção, as crianças começam por atender às formas globais, podendo notar partes das formas mas não as relações entre as partes. Numa fase inicial, as crianças mantêm os processamentos, referentes à percepção global e à percepção das partes, separados e não integrados. Com o desenvolvimento da aprendizagem, o pensamento torna-se mais sofisticado e os processos separados são coordenados e integrados num nível superior de esquemas de reconhecimento que são sensíveis ao todo, às suas partes e às relações entre as partes.

Assim, a composição e a decomposição de formas envolvem diversas capacidades espaciais. Del Grande (1990) refere que vários autores têm procurado categorizar as diferentes capacidades espaciais, apresentando o conjunto das sete que considera terem especial relevância no estudo da geometria, a saber: (1) coordenação visual-motora; (2) percepção figura-fundo; (3) constância perceptual; (4) percepção de posições espaciais; (5) percepção das relações espaciais; (6) discriminação visual; e (7) memória visual. Gutiérrez (1996) acrescenta à lista proposta por Del Grande (1990) a capacidade de rotação mental (produção de imagens mentais dinâmicas e visualização de uma configuração em movimento), considerada por Bruce e Hawes (2015) como sendo especialmente importante a atender em atividades a serem realizadas por crianças entre os 4 e os 8 anos de idade.

O uso destas capacidades espaciais não é individualizado, dependendo das características do problema que se pretende resolver. Frequentemente, na resolução de uma tarefa, estão envolvidas várias capacidades espaciais.

Gorgorió (1998) apresenta um quadro teórico para a análise de estratégias de resolução de problemas de rotação, propondo uma abordagem eclética e abrangente, que se configura também adequado na análise da resolução dos problemas de composição e decomposição de formas, uma vez que encontrar uma nova composição poderá implicar rodar uma peça para a colocar numa nova posição, ou verificar se uma dada composição é congruente com outra poderá envolver a rotação mental dessa composição (Bruce & Hawes, 2015). O quadro seguinte (Quadro 1) sintetiza as ideias apresentadas pela autora.

Quadro 1. Categorias para análise das estratégias de resolução de problemas de rotação (adaptado de Gorgorió, 1998)

Estruturais	A criança envolve-se na tarefa? Cria um contexto a fim de lhe dar significado?	
Processuais	<i>Visuais</i> A criança imagina um dos seguintes aspetos: o contexto da tarefa (ex: uma situação particular), uma mudança de posição do objeto	
	<i>Não visuais</i>	Verbais
		Geométricas
De abordagem	<i>Globais</i>	
	<i>Parciais</i>	

Gorgorió (1998) propõe três perspetivas para a análise das estratégias: uma perspetiva estrutural, uma perspetiva processual e uma perspetiva quanto à abordagem do problema. Na perspetiva estrutural, o foco é a origem e a organização da informação usada pelo aluno. Na perspetiva processual, o foco encontra-se no modo de representação mental usado pelo aluno, sendo possível encontrar estratégias visuais (quando da explicação da criança e da nossa observação se pode sustentar que ela usa imagens mentais como parte essencial do método de resolução) e não visuais (quando a criança usa um argumento e explicitamente não confia em imagens mentais na resolução da tarefa). As estratégias não visuais podem, ainda, ser classificadas em verbais (quando a criança descreve a aparência do objeto final, dando por vezes informações relativas à sua aparência durante o processo de resolução da tarefa, podendo igualmente utilizar informação retirada do contexto da tarefa) e geométricas (quando a criança invoca factos relacionados com as propriedades dos objetos ou das tarefas apresentadas; por

exemplo, simetrias de reflexão ou de rotação, congruências). No entanto, a autora salienta que imagens mentais e processos verbais não funcionam independentemente uns dos outros; não apenas interagem, como têm mesmo uma função de suporte mútuo. Na perspectiva de abordagem, podem surgir estratégias globais (com as crianças a compararem os objetos, como um todo, com objetos e situações da vida real) e parciais (em que o objeto é visto como um conjunto de partes distintas, levando em linha de conta as suas posições relativas).

No quadro analítico de Gorgorió (1998), a rotação mental é uma estratégia visual. Também Bruce e Hawes (2015) consideram que a rotação mental pode ser usada como uma estratégia fiável em diferentes tipos de problemas, nomeadamente na composição e decomposição de figuras 2D e 3D, ou na identificação de figuras congruentes quando são apresentadas com orientações diferentes, ou decompostas e rodadas.

Metodologia de investigação

Opções metodológicas e participantes

Em qualquer investigação, a escolha da abordagem metodológica representa um papel central, devendo ter em consideração a natureza do problema em estudo. Atendendo a que se procurava compreender, de forma o mais profunda possível, as estratégias utilizadas pelas crianças e as representações das composições realizadas, optou-se por um estudo de natureza qualitativa com uma abordagem interpretativa (Bogdan & Biklen, 1994). A análise incidiu na forma processual como as diversas composições foram encontradas e representadas, mais do que nos produtos finais. Foi usada a modalidade de estudo de caso (Merriam, 1991; Yin, 1989). Trata-se de uma modalidade indicada para as investigações que visem responder a questões ligadas ao como e ao porquê, almejando a compreensão de fenómenos relacionados com eventos contemporâneos, sem controlo sobre os acontecimentos e comportamentos. Assume um carácter descritivo e simultaneamente analítico (Ponte, 1994).

O estudo realizou-se numa sala de Jardim de Infância da rede pública da periferia da cidade de Lisboa, sendo a primeira autora do artigo a educadora titular. A turma era composta por 22 crianças com idades compreendidas entre os 3 e os 5 anos. Do grupo de 5 anos, foram selecionadas nove crianças, consideradas como informadores privilegiados, para constituir o caso a estudar. Foram utilizados como critérios de seleção: a) ambos os géneros (embora não se tenha estudado o fator género, existiu a intenção de o grupo de participantes contemplar ambos os géneros, tal como acontece nos grupos formados

habitualmente na sala, mantendo, assim, uma composição familiar às crianças); b) tratem-se de crianças que habitualmente expressavam com facilidade os seus pensamentos e opiniões (para facilitar a compreensão do seu pensamento por parte da investigadora); e c) serem crianças que apresentavam um tempo de permanência na tarefa adequado à idade (de modo a garantir a consecução das tarefas propostas). As crianças foram observadas no ambiente da sala, no decurso da realização das tarefas propostas, e os seus desempenhos gravados em filme.

Foram seguidos os critérios de natureza ética para a realização da investigação. Foi pedida autorização aos encarregados de educação das crianças para se efetuar a recolha de dados, tendo sido explicitados o objetivo do estudo e os procedimentos metodológicos a usar, de modo a obter-se o seu consentimento informado. A fim de salvaguardar o critério de confidencialidade, cada criança escolheu um nome fictício pelo qual é referida, garantindo assim o seu anonimato, mas fazendo surgir nomes pouco comuns.

Recolha e análise de dados

A recolha de dados, levada a cabo entre fevereiro e maio de 2016, foi realizada com recurso a observação participante (complementada com um diário de bordo com notas de campo da investigadora) e a recolha documental incidente nos registos vídeo da resolução das tarefas e nas produções realizadas pelas crianças. A gravação em vídeo foi um auxiliar importantíssimo para a observação e constituiu um manancial de dados que muito enriqueceu a visão do trabalho de resolução das tarefas, tornando possível revisitá-lo uma e outra vez, como é sugerido por Bogdan e Biklen (1994, p. 48): “os materiais registados mecanicamente são revistos na sua totalidade pelo investigador, sendo o entendimento que este tem deles o instrumento-chave de análise”. Os documentos recolhidos, juntamente com as conversas tidas durante e após a realização das tarefas, ajudaram a compreender o modo como as crianças pensaram. As diferentes técnicas de recolha de dados tornaram possível a triangulação da informação recolhida.

Ao realizar-se a análise dos dados, tentou-se negociar “com os informantes sobre a adequação das interpretações e das representações” (Walsh, Tobin, & Graue, 2010, p. 1056). Tratando-se de crianças pequenas, este procedimento foi realizado durante e após a realização das tarefas, questionando-as, o que tornou possível alguma apropriação dos seus significados e contribuiu para a interpretação dos dados.

Para a análise dos dados recolhidos, foi utilizada análise de conteúdo. Para caracterizar o raciocínio espacial envolvido na composição de formas, foram usadas as categorias

analíticas correspondentes aos níveis de pensamento identificados por Sarama e Clements (2009), atrás apresentados, e cujos descritores estão associados a diferentes estratégias de resolução. Esta análise foi cruzada com as capacidades espaciais definidas por Del Grande (1990), e com as categorias analíticas de Gorgorió (1998), usadas aqui para problemas de composição e decomposição de formas por estes envolverem também o uso de rotações ou inversões das formas. Para analisar os desenhos realizados pelas crianças para representar as composições obtidas (tetracubos), foram utilizadas as categorias de Gorgorió (1998) e as capacidades espaciais (Del Grande, 1990).

Apresentação da tarefa

A tarefa “Construção de tetracubos, com cubos de encaixe”, apresentada no presente artigo, é a quarta de um conjunto de sete tarefas, focadas na composição e decomposição de formas bi e tridimensionais, que foram propostas às crianças da sala. Embora a proposta dessas tarefas visasse desenvolver o raciocínio espacial das crianças e criar um contexto favorável à obtenção de evidências que permitissem responder às questões do estudo, as mesmas foram realizadas no âmbito do trabalho habitual desenvolvido na sala pela educadora, primeira autora deste artigo. Todas as tarefas foram realizadas a pares. Foi escolhida esta tarefa para ser apresentada no artigo, por ter sido a tarefa que mais desafios colocou às crianças, designadamente no que respeita ao desenho das construções que apresentavam dois níveis (não passíveis de assentarem na sua totalidade numa base plana).

Para a realização da tarefa, foram fornecidos, a cada criança, quatro conjuntos de dez cubos de encaixe. Após um período de exploração livre do material, foi-lhes pedido que tentassem encontrar diferentes formas de juntar quatro peças e depois mostrassem. No decurso da composição dos diferentes tetracubos, duas crianças introduziram, espontaneamente, a criação de *puzzles*. Esta atividade não foi planeada nem solicitada pela educadora, tendo sido, mesmo assim, objeto de análise, já que os *puzzles* constituem composições tridimensionais, fornecendo elementos pertinentes de análise do raciocínio espacial das crianças. No dia seguinte, após se ter chegado a acordo sobre quais eram os tetracubos diferentes, foi pedido às crianças que os desenhassem, procurando não repetir construções iguais. Esta tarefa tinha como ideias matemáticas a explorar, as capacidades de visualização (em especial, a perceção de relações espaciais), a identificação da congruência, bem como a representação no plano de construções tridimensionais.

Apresentação dos resultados









Estratégias na composição de formas tridimensionais

Esta secção apresenta três subsecções. As duas primeiras apresentam os dois tipos de composições: composições de tetracubos e composições de *puzzles*. A terceira secção incide na noção de congruência.

Compondo tetracubos

Todas as possibilidades de composição dos tetracubos foram alcançadas pelas crianças. Apresentamos, em seguida, uma tabela (Quadro 2) com o registo das construções realizadas por cada uma das nove crianças:

Quadro 2. Tetracubos realizados por cada uma das crianças

Composição	Crianças								
	Messi	Fada	Susana	Mário	Sonic	Triceratop	Dalmata	Max	Princesa
N.1 	x	x	x	x	x	x	x	x	x
N.2 	x	x	x	x	x	x	x	x	x
N.3 	x	x	x	x	x	x	x	x	x
N.4 	x	x	x	x	x	x	x	x	x
N.5 	x	x	x	x	x	x	x	x	x
N.6 	x		x	x			x		
N.7 	x		x					x	x
N.8 				x	x	x			

Como se pode inferir pela análise desta tabela, todas as crianças conseguiram realizar as composições de um nível (de N.1 a N.5), isto é, as que são passíveis de assentarem na sua totalidade numa base plana. Mas foram muito menos (entre três e quatro crianças) as que construíram cada um dos tetracubos de dois níveis (N.6 a N.8). No entanto, conseguiam realizá-las por imitação do colega (não registado no Quadro 2). Uma criança não conseguiu

construir por iniciativa própria nenhum tetracubo de dois níveis. Cinco crianças construíram apenas um tetracubo de dois níveis. Apenas três crianças realizaram duas construções de dois níveis: Messi e Susana (N.6 e N.7) e Mário (N.6 e N.8). Nenhuma criança fez simultaneamente N.7 e N.8, composições que constituem imagens refletidas uma da outra.

Algumas das crianças experienciaram a transformação de uma composição de dois níveis noutra com apenas um nível (e vice-versa), apenas rodando o encaixe entre os dois conjuntos de dois cubos, como aconteceu com N.7 e N.5 (Figura 1).



Figura 1. Composições que se podem transformar uma na outra

Apresentamos, em seguida, as estratégias usadas pelas crianças nas construções dos tetracubos. Enquanto algumas se mantinham focadas, respeitando a condição de construção de tetracubos, outras, porém, preferiam brincar com as peças, fazendo pistolas, monstros ou outras construções com número variável de cubos. Aliás, mesmo construções de quatro peças, realizadas para a tarefa, também podiam servir de “arma”, como a da figura 2.



Figura 2. Tetracubo (N3) construído por Triceratop, a ser usado no jogo simbólico

Também Sonic imaginou um contexto para a construção que realizou, dizendo que eram “perninhas”. Esta foi uma das situações em que a criança deu por concluída a construção sem dela resultar um tetracubo, na medida em que dois dos cubos contíguos não partilham a totalidade das faces contíguas (Figura 3).



Figura 3. “Perninhas” de Sonic

Foi, assim, notória a necessidade de as crianças criarem um *contexto* significativo para as suas construções, no que respeita à estratégia usada na perspetiva estrutural (Gorgorió, 1998), além de que todas elas se envolveram entusiasticamente na atividade. Associado ao significado contextual, foi também evidente a capacidade de as crianças relacionarem as partes com o todo (*compositor de formas*). Por exemplo, no tetracubo apresentado na Figura 2, cada uma das partes, pela sua posição espacial distinta (em baixo e em cima), assume uma função específica distinta no contexto atribuído à construção global: o cabo e o cano da pistola.

O modo como as crianças foram encaixando os quatro cubos para obterem uma diversidade de composições revela, além da *coordenação visual-motora*, *perceção de posições espaciais* e *perceção de relações espaciais*. Assim, as crianças iam modificando as posições dos cubos com intencionalidade, antecipando novas formas (*compositor de formas*). Por exemplo, obtiveram o tetracubo N.3 a partir do N.2: ao identificarem um cubo em cima de uma linha de três cubos (relação espacial), mudavam a posição do cubo de cima do centro para a extremidade. Também os tetracubos N.4 e N. 5 eram obtidos mudando a posição do encaixe dos dois cubos de cima.

Criando puzzles

Uma situação recorrente, quando as crianças estavam a construir os tetracubos, prende-se com o facto de utilizarem os tetracubos como se fossem peças de um *puzzle* como se ilustra na figura 4. Neste encaixe, duas crianças formam deliberadamente unidades compostas (tetracubos), desempenho este que parece situar-se no nível *compositor de substituição*.



Figura 4. Construção de um *puzzle* de aparência bidimensional, por Messi

As crianças mostraram intencionalidade nas suas ações de combinar os diversos tetracubos, rodando-os ou invertendo-os, de modo a permitir o seu encaixe nos *puzzles* criados. Esta intencionalidade foi acompanhada de antecipação associada ao uso de imagens mentais dos tetracubos e das suas múltiplas posições espaciais possíveis, uma vez que não se verificou a utilização de estratégias de tentativa e erro: as crianças selecionavam, com segurança, os tetracubos adequados ao respetivo encaixe, e colocavam-nos, de imediato, na posição correta, o que denota a sua capacidade de *perceção das relações espaciais*. Usavam os tetracubos já construídos e, apenas uma vez, Messi construiu um tetracubo para um encaixe específico.

Respeitante à perspetiva estrutural, estas crianças criaram um *contexto* (construir o *puzzle*) para dar significado à tarefa de construção de tetracubos, encaixando os tetracubos uns nos outros, tanto os diferentes como os congruentes colocados em diferentes posições. Estes *puzzles* tinham uma aparência bidimensional, como o da figura 4, ou tridimensional, como o “bloco” construído por Messi com dois tetracubos de dois níveis (Figura 5).

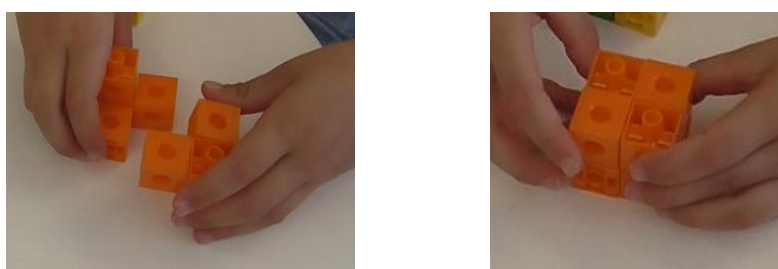


Figura 5. Construção de um *puzzle* de aparência tridimensional, por Messi

Pontualmente, durante o processo de construção da composição com diversos tetracubos, as crianças descreviam a aparência do objeto final, como se ilustra no episódio seguinte e na figura 6:

Mário: O meu vai ficar uma escada. Vai p’ra cima e vai p’ra baixo.

Max: E o meu são dois carros. Um vai para ali e o outro vai para o outro lado.

Mário: Mas são iguais. Copiaste!

Max: Não, o meu tem uma peça aqui e o teu não (aponta para uma parte da sua construção, embora na realidade os tetracubos fossem iguais).

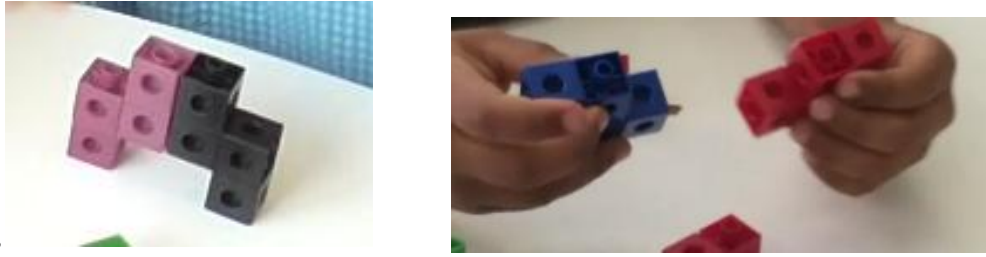


Figura 6. Escada do Mário e carros de Max

Do ponto de vista processual (Gorgorió, 1998), estas crianças utilizaram uma estratégia *visual*, ao imaginarem um contexto significativo, e também uma estratégia *verbal*, ao descreverem, de forma antecipada, a aparência final do que ainda estava em fase de construção, reportando-se ao contexto imaginado das composições. No que respeita à abordagem, as crianças utilizaram uma estratégia *global*, comparando a composição, no seu todo, a situações da sua vida real.

Verificando a congruência dos tetracubos

Mário e Max mostraram especial interesse em realizar construções simétricas, fazendo composições com dois tetracubos congruentes. Quando a educadora lhes perguntou se as construções (tetracubos) eram iguais, responderam que não, porque uma estava virada para “aquele lado” (ou seja, para a direita) e a outra para o “outro lado” (Figura 7, à esquerda). Aparentemente, o conceito de congruência não está ainda suficientemente desenvolvido para assumirem como iguais dois objetos com orientações diferentes. No entanto, evidenciam *percepção de posições espaciais* ao distinguirem as diferentes orientações, para a esquerda e para a direita, invocando, assim, uma propriedade geométrica (estratégia *não visual geométrica*). Porém, pouco depois, disseram expressamente que as duas construções, ilustradas à direita na figura 7, eram iguais mas uma estava virada para cima e a outra para baixo, o que denota a sua capacidade de operar mentalmente, pela reflexão ou pela rotação, com os tetracubos. Esta manipulação mental das formas corresponde ao nível *compositor de formas*, segundo Sarama e Clements (2009). Como se ilustra na figura 7, a identificação da congruência, neste caso, envolveu a utilização de uma estratégia *visual*, do ponto de vista processual, ao imaginarem a mudança de posição do tetracubo (Gorgorió, 1998).



Figura 7. Tetracubos de Mário e de Max virados “para aquele lado e para o outro” e “para cima e para baixo”

Numa outra situação, com Triceratop e Susana, também eles disseram que dois tetracubos (congruentes) “têm a mesma forma” se estiverem na mesma posição, caso contrário “não têm a mesma forma”, tal como ilustrado na figura 8.



Figura 8. Tetracubos de Triceratop e de Susana que “não têm a mesma forma”

As construções dos tetracubos frequentemente repetiam-se, pois as crianças não estavam especialmente preocupadas em encontrar formas diferentes de unir as peças, mas sim em divertirem-se, só pelo gosto de construir. De um modo geral, a forma de identificarem se eram ou não congruentes foi rodando ou invertendo os tetracubos, por iniciativa própria ou a pedido da educadora, mais uma vez verificando-se que as suas capacidades de visualização espacial, associadas à manipulação mental das formas, ainda não estão completamente desenvolvidas, já que precisavam de manipular os tetracubos fisicamente. Foi, por exemplo, o caso de Dalmata ao comparar dois tetracubos para ver se eram iguais (Figura 9): colocou um sobre o outro e posteriormente ao lado; finalmente, inverteu o tetracubo branco e conseguiu sobrepor os dois, percebendo que eram iguais.



Figura 9. Dalmata comparando duas peças

Tal como referido por Sarama e Clements (2009), o movimento de inversão do tetracubo aparenta ser mais complexo do que o de rotação (realizado no momento em que dispõe os tetracubos lado a lado). A sobreposição dos tetracubos não foi imediata, tendo sido alcançada por tentativa e erro.

Desenhos das composições de formas tridimensionais

Esta secção encontra-se estruturada de acordo com os tipos de tetracubos, de um e dois níveis. A representação de tetracubos de dois níveis constituiu um desafio que foi resolvido de modo diferenciado da representação dos restantes tetracubos.

Desenhando a vista de cima de tetracubos de um nível

A maioria das crianças do estudo realizou as representações das construções sem qualquer intervenção da educadora. A estratégia seguida por todas as crianças foi a de contornar o tetracubo. Após o contorno, a educadora referiu que deviam indicar onde estavam cada um dos quatro cubos. Fada olhou para o tetracubo e traçou as linhas, resolvendo rapidamente o problema (Figura 10). O seu desenho representa a vista de cima do tetracubo. Embora as crianças tenham considerado primeiro a forma global do tetracubo, ao realizarem o seu contorno, todas elas foram capazes de representarem adequadamente as posições espaciais de cada um dos cubos, quando solicitadas pela educadora para o fazerem, utilizando assim um estratégia de abordagem *parcial*.

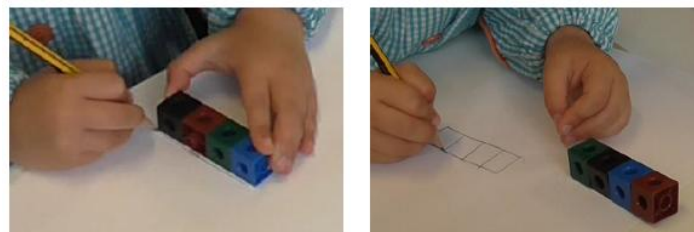


Figura 10. Fada a contornar a construção e a desenhar, à vista, as linhas entre as peças

Todas as crianças usaram a estratégia da representação da vista de cima para representarem a duas dimensões uma construção tridimensional que, no entanto, no caso dos tetracubos de um nível, é concebida pelas mesmas como sendo uma construção plana, conduzindo, inerentemente, à consideração de apenas um tipo de vista (a vista de cima). Susana desenha, inclusivamente, um pequeno círculo, tal como é observado nas faces dos cubos (Figura 11), indiciando, claramente a sua visão física e realista dos cubos, e não uma visão geométrica correspondente a uma conceção idealizada e abstrata do objeto *cubo*.

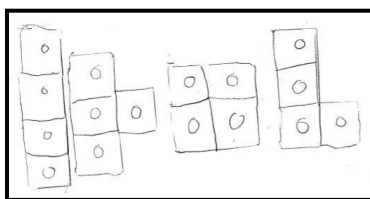


Figura 11. Representação de Susana, dos tetracubos

Também na representação, duas crianças, Max e Fada, tiveram necessidade de criar um *contexto* significativo, como estratégia estrutural (Gorgorió, 1998), realizando desenhos com os tetracubos (Figura 12).

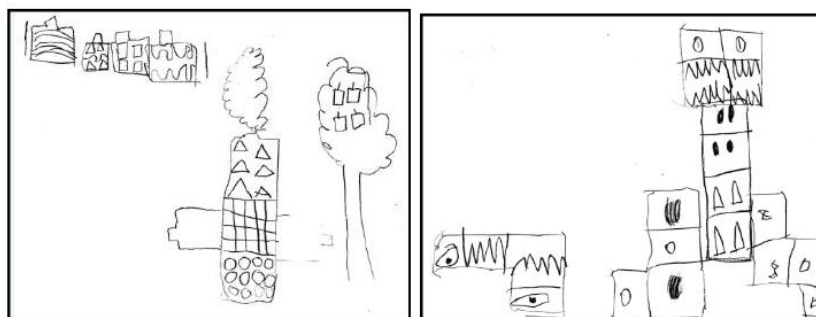


Figura 12. Representações de Max (à esquerda) e de Fada (à direita)

O significado contextual parece ter influenciado o modo de representação dos tetracubos, correspondente às suas vistas de cima. No desenho de Max, o tetracubo que representa o tronco da árvore com o ramo surge com os cubos unidos, desempenhando uma única função no desenho, mas os outros dois tetracubos já são desenhados com a individualização dos cubos para representarem as nuvens e os frutos, em separado. No desenho de Fada, são representados quatro tetracubos diferentes, sendo cada um deles um componente com uma função específica na composição global da figura humana: cabeça, tronco e pernas esquerda e direita (as pernas não surgem refletidas mas sim

correspondendo a dois tetracubos diferentes). Cada um destes tetracubos funciona como uma unidade composta mas o modo como eles são combinados no desenho obedece ao significado contextual: por exemplo, o tronco é colocado no meio da base da cabeça, e não com uma justaposição de partilha das faces dos cubos.

Desenhando tetracubos de dois níveis

Enquanto as peças a representar assentavam na totalidade na folha, o trabalho era considerado fácil. O problema começou a pôr-se quando uma das peças não estava ao mesmo nível das outras. E então cada criança encontrou a sua solução. Para representarem o tetracubo da figura 13, seis das crianças utilizaram como estratégia comum o contorno da base inferior que assentava na mesa, resolvendo de maneira diferente a representação do cubo de cima.

Max, enquanto estava a desenhar o tetracubo, por contorno, disse: “Oh professora, esta peça não se vai ver muito bem as quatro (sic)”. Quando a educadora voltou para o pé dele, notou que tinha feito a representação A, pelo que lhe perguntou onde estava a quarta peça. Sem hesitação, virou a folha e disse: “Está aqui!”. Tinha colocado o desenho ilustrado na figura 13 B na parte de baixo de folha exatamente por baixo da peça que estava no canto da construção, evidenciando assim, a compreensão da *relação espacial* entre a quarta peça e as restantes. A estratégia de abordagem usada foi *parcial*, já que atendeu às posições relativas das partes constituintes do tetracubo. Também aqui se verifica uma representação física dos cubos.

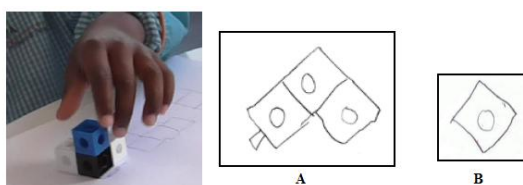


Figura 13. Construção de dois níveis e representação de Max, na frente (A) e nas costas da folha (B)

Susana optou por desenhar o contorno com as três peças apoiadas e depois inverteu a construção, ficando apenas uma peça em contacto com o papel. O resultado é o ilustrado abaixo (Figura 14), tendo mais tarde explicado que o desenho no canto era o cubo de cima (assinalado com uma seta). Assim, Susana usou a estratégia processual de mudança de posição do tetracubo de modo a poder contornar também a face superior do cubo de cima, evidenciando capacidade de *perceção de posições espaciais*. No entanto, esta estratégia é realizada por manipulação física do tetracubo e não através da imagem mental dessa

mudança. Do ponto de vista da abordagem, evidencia uma estratégia *parcial*, ao considerar as posições relativas das partes correspondentes aos dois níveis.

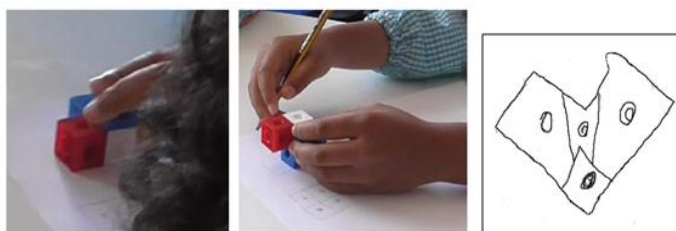


Figura 14. Susana contornando o nível inferior e o nível superior da sua construção e respetiva representação final

Já Messi apresenta a solução ilustrada pela figura 15, e diz: “Professora, assim já dá para ver; 1, 2, 3, 4 (conta, apontando e confirmando o número de peças, como demonstrado na figura 15 com os algarismos de 1 a 4, feitos pelas autoras deste artigo). Esta é a peça de cima!” (reforça, apontando para a tira assinalada com 3).

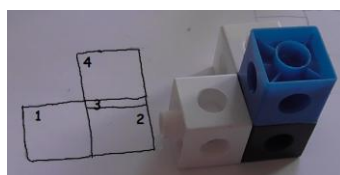


Figura 15. Representação de Messi com a construção que serviu de modelo

Messi usa uma estratégia processual *visual* para resolver o problema, começando por imaginar o tetracubo com apenas as três peças de baixo e fazendo a respetiva vista de cima. O facto de Messi representar o cubo de cima como uma pequena tira que não se sobrepõe ao quadrado (assinalado com 2) indicia a sua consideração do mesmo se encontrar num nível distinto dos restantes, e por isso, carecer de uma representação diferente. Por outro lado, quer o desenho quer a explicitação verbal que faz da posição do cubo de cima (por cima do cubo 2) denotam uma estratégia de abordagem *parcial*, envolvendo *percepção de posições e relações espaciais*.

Fada, após contornar a base do tetracubo, desenhou à vista o cubo de cima (assinalado com 4 na figura 16). A sua representação revela a *percepção da posição* do quarto cubo num nível superior, por cima do cubo 2. Fada revela *percepção das relações espaciais* uma vez que relacionou as várias partes da construção umas com as outras e com ela própria. Assim, também ela usa uma estratégia de abordagem *parcial*.

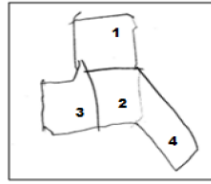


Figura 16. Representação de Fada

Triceratop seguiu o mesmo procedimento de Fada, dizendo explicitamente que o pequeno acrescento era a peça de cima (Figura 17). No entanto, não respeitou a relação espacial entre esta peça e as do nível inferior. Também esta criança usou a estratégia de abordagem *parcial* ao considerar, por um lado, a existência de duas partes distintas correspondentes aos dois níveis, e por outro, ao atender às posições relativas dos cubos do nível de baixo.

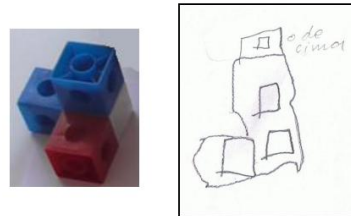


Figura 17. Representação de Triceratop e construção que lhe esteve na origem

Relativamente ao mesmo tetracubo, Sonic também considera os dois níveis (Figura 18, à esquerda), contornando a base, e ao desenhar os cubos individualizados, colocou o cubo de cima (assinalado com 1) por cima do cubo não visível (4). O facto de a aresta superior do cubo 3 partilhar simultaneamente uma aresta do cubo 1 e uma aresta do cubo 4 foi representado colocando a aresta do cubo 3 com maior comprimento do que as arestas partilhadas.

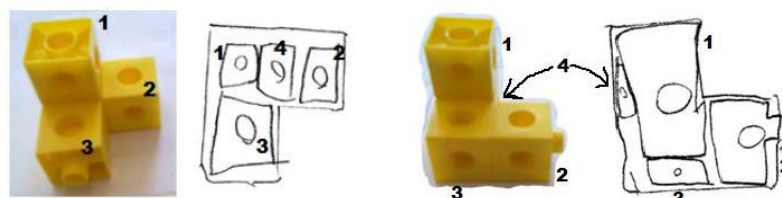


Figura 18. Representações de Sonic

Perante as representações e os tetracubos que lhes serviram de modelo, cremos que a correspondência entre as peças e os desenhos na representação é o indicado pela numeração. Relativamente à representação da direita na figura 18, após ter contornado, igualmente, a base inferior assente na mesa, e quando questionado se o seu desenho tinha

as peças todas, Sonic desenhou a peça número 4. Aparentemente, não a teria levado em conta e teria assumido que a peça visível no nível superior seria maior, sendo por isso o desenho da peça 1 maior e considerando a peça 3 a da frente. Talvez pela necessidade de representar a peça 1 com um tamanho grande, a aresta do cubo 2 não coincide totalmente com a do cubo 3. Sonic parece usar uma estratégia processual *visual* ao criar a imagem mental do cubo 4 não visível, representando-o por sua própria iniciativa, no caso do tetracubo N.6, ou quando interpelado pela educadora quanto ao número de cubos, no caso do tetracubo N.8. Atente-se que na sua representação realista dos cubos, envolvendo a representação dos orifícios das faces de cima, surge igualmente o círculo no cubo 4, não pela observação direta mas pela mobilização da respectiva imagem mental. Quanto à *percepção das relações espaciais*, no âmbito da estratégia de abordagem *parcial*, Sonic parece atender sobretudo às relações posicionais entre os diversos cubos, revelando uma menor preocupação com a representação da relação de congruência entre as arestas dos cubos.

Princesa, por sua vez, não usou a estratégia do contorno da base, tendo feito o seu desenho à vista (Figura 19) e explicado: “Eu pus uma por cima e uma por baixo e uma de um lado e outra do outro” (apontando para a construção e para o seu desenho).

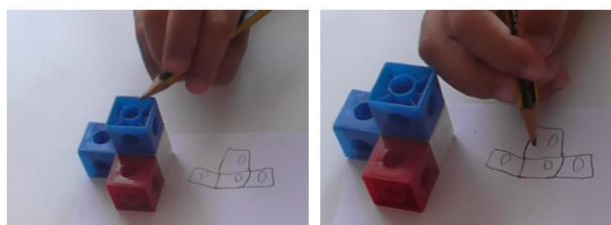


Figura 19. Representação de Princesa

O ligeiro arco que alinha os três cubos do nível inferior é o único indicador que a Princesa nos dá (juntamente com a sua explicação oral) de que terá alguma consciência da relação espacial entre essas três peças. A explicação de Princesa apresenta as relações espaciais por meio da verbalização do vocabulário topológico: por cima, por baixo, de um lado, do outro lado. Esta é também uma evidência do uso de uma estratégia *não visual geométrica*, ao invocar as relações espaciais para resolver o problema de representação no plano deste tetracubo, assumido como uma construção tridimensional. Do ponto de vista da abordagem, Princesa usou uma estratégia *parcial*, ao focar a sua atenção nas posições relativas dos cubos constituintes.

Discussão dos resultados

As crianças deste estudo de caso evidenciaram uma multiplicidade de processos, na forma como construíram e desenharam os diferentes tetracubos, e realizaram as composições com diversos tetracubos, de entre os que caracterizam o raciocínio espacial, segundo Whiteley, Sinclair e Davis (2015), designadamente compor e decompor, dispor em simetria, transformar, experienciar sensorialmente, comparar, e visualizar. Estes processos não podem ser encarados de um modo independente, uma vez que interagiram entre si, uma vez ocorrendo em simultâneo, outras em momentos diferenciados, podendo ser identificados tanto na atividade de construção como na de desenhar as construções realizadas.

A interligação de processos é, pois, um elemento a considerar na caracterização do raciocínio espacial destas crianças, no que se refere à sua capacidade de reconhecer as propriedades espaciais e relações espaciais em objetos tridimensionais (Mulligan, 2015). Por exemplo, o processo de transformar foi vivido pelas crianças sobretudo pela manipulação física dos tetracubos, e por isso, encontra-se intimamente associado ao processo de os experienciar sensorialmente, pelo tato e pela visão. O processo de transformar está igualmente ligado ao processo de comparar, associação esta que surgiu durante a determinação da congruência dos tetracubos, decorrente da sugestão da educadora para que fossem desenhadas apenas as construções diferentes. Tal como referido por Whiteley, Sinclair e Davis (2015), também aqui se evidencia a conexão entre a congruência e as transformações geométricas. A noção de congruência constituiu um aspeto crítico, com a maioria das crianças a considerar como diferentes, tetracubos congruentes quando dispostos em diferentes orientações, convergindo com o observado, em alunos dos 1.º e 2.º anos, por Bruce et al. (2015). Assim, embora não existisse nas crianças uma consciência explícita das propriedades das transformações geométricas, ao serem operadas, de um modo intuitivo e informal, a invariância da forma de tetracubos congruentes, dispostos em diferentes orientações, só foi reconhecida, na maioria das vezes, pela comparação direta e global dos tetracubos alinhados lado a lado, ou sobrepostos, após a rotação ou inversão de um dos tetracubos em causa, tendo estas transformações sido, predominantemente, realizadas pela movimentação física.

Do presente estudo, conclui-se que a utilização da rotação ou da inversão dos tetracubos constituiu, para estas crianças, uma estratégia de resolução de um dado problema

geométrico, fosse este o da verificação da congruência dos tetracubos construídos, ou o da representação, pelo desenho, do nível superior de um tetracubo apresentando dois níveis (como foi o caso da estratégia usada por Susana). Esta estratégia veio a revelar-se simultaneamente um instrumento conceptual, assumindo um papel importante na emergência da consciência da invariância da forma associada aos movimentos de rotação e de inversão dos tetracubos. Tal como sustentado por diversos autores (Sarama & Clements, 2009; Van den Heuvel-Panhuizen & Buys, 2005; Whiteley, Sinclair, & Davis, 2015), as crianças desenvolvem o seu raciocínio espacial começando por explorar e movimentar os objetos tridimensionais usando os olhos e as mãos, e só depois da exploração sensorial do tato conjugado com a visão, é que, progressivamente, vão sendo capazes de evoluir para a capacidade de formação de imagens mentais dos objetos, que podem ser evocadas mesmo na ausência perceptiva dos mesmos.

A capacidade de visualização das crianças, enquanto processo de construção e manipulação de imagens mentais dos tetracubos, verificou-se sobretudo na forma intencional com que foram realizadas as composições com diversos tetracubos, tendo sido também evidenciada no desenho dos tetracubos de dois níveis, ao imaginarem o cubo de baixo não visível. A utilização das estratégias associadas à intencionalidade e antecipação sugere que estas crianças se situam no nível compositor de formas e no nível compositor de substituição, resultados estes convergentes com os obtidos por Sarama e Clements (2009), no que respeita à faixa etária média das crianças situadas nestes dois níveis de composição de formas tridimensionais. As crianças formaram unidades compostas nos *puzzles* (correspondendo ao nível compositor de substituição), de forma espontânea e deliberada, sendo que as relações de substituição entre as unidades (tetracubos) foram usadas intuitivamente no modo como iam encaixando os tetracubos e criando diferentes formas globais para os *puzzles*. Também se verificou a realização espontânea de composições simétricas com dois tetracubos, tal como descrito em Bruce et al. (2015), com as crianças (Mário e Max) a reconhecerem como congruentes os tetracubos orientados “para cima e para baixo”, operando mentalmente com os mesmos, ao imaginarem a mudança de posição de um deles.

No âmbito do referencial de análise proposto por Gorgorió (1998), predominou a criação de um contexto significativo para as construções tridimensionais e respetivos desenhos, no que respeita à perspetiva estrutural. Do ponto de vista processual, verificou-se o uso de estratégias visuais, verbais e geométricas, associadas à identificação das diferentes orientações dos tetracubos. Relativamente à abordagem, as crianças

evidenciaram estratégias globais, comparando as formas globais dos *puzzles* criados a situações ou objetos reais, ou concluindo da congruência entre dois tetracubos, pela sua comparação global, e estratégias parciais, ao distinguirem as posições relativas dos tetracubos enquanto partes distintas das suas composições simétricas, e ao identificarem as posições relativas dos cubos nos desenhos representativos dos tetracubos.

Na representação, pelo desenho, dos tetracubos, as crianças usaram a estratégia de contorno. Contornavam a base que assentava na mesa, representando, depois, espontaneamente, a vista de cima. Esta estratégia permitiu manter a posição relativa das peças, independentemente do maior ou menor rigor do traçado realizado.

Os resultados apresentados neste artigo evidenciam as capacidades espaciais destas crianças e levam-nos a concluir das potencialidades de um ambiente de aprendizagem que alie a predisposição natural das crianças em vivenciarem processos dinâmicos caracterizadores do raciocínio espacial, em atividades espontâneas, à intencionalidade educativa envolvendo tarefas desafiantes promotoras dessas mesmas capacidades. Tal como salientado por Bruce et al. (2015), este é um desafio importante da educação geométrica no Jardim-de-infância, o de potenciar o conhecimento espacial intuitivo e implícito das crianças.

Considerações finais

Como problema aberto para a investigação, emerge uma questão relacionada com a representação dos tetracubos: os desenhos produzidos pelas crianças deste estudo são unicamente um produto indiciador da forma como percebem as relações espaciais, tal como sugerido por Sarama e Clements (2009), ou constituíram-se, simultaneamente, como atos de as crianças tomarem uma maior consciência dessas relações espaciais, tal como sustentado por Thom e McGarvey (2015), nomeadamente ao resolverem o problema de representação do cubo do nível superior? A representação no plano de dois níveis revelou-se bastante desafiante para as crianças que, de forma autónoma, encontraram soluções variadas e criativas. As características e funções cognitivas das soluções encontradas merecem maior investigação futura.

Por fim, consideramos que os resultados do presente estudo contribuem para a crescente evidência dada pela investigação das fortes capacidades espaciais de crianças com esta faixa etária, que não eram consideradas possíveis há décadas atrás (Mulligan, 2015), desde que lhes sejam dadas oportunidades de se envolverem em tarefas desafiantes e dinâmicas,

com recurso à manipulação de materiais, e focadas nas capacidades espaciais (Bruce & Hawes, 2015). Esta tendência surge como promissora se considerarmos a correlação positiva, apontada por diversos autores (Bruce & Hawes, 2015; Hawes, Tepylo, & Moss, 2015; Mamolo, Ruttenberg-Rozen, & Whiteley, 2015; Mulligan, 2015; Sinclair & Bruce, 2015), entre o desenvolvimento do raciocínio espacial das crianças e o seu sucesso matemático futuro em diversos domínios, incluindo o aritmético e o algébrico. Por outro lado, o reconhecimento de que este desenvolvimento é potenciado pela instrução justifica também que lhe seja dada a devida atenção no currículo implementado nos Jardins de Infância, tal como preconizado nas atuais OCEPE (Silva et al., 2016).

Referências

- Battista, M. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843-908). Reston, VA: NCTM.
- Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação*. Porto: Porto Editora.
- Bruce, C. D., & Hawes, Z. (2015). The role of 2D and 3D mental rotation in mathematics for young children: What is it? Why does it matter? And what can we do about it? *ZDM Mathematics Education*, 47, 331-343.
- Bruce, C. D., Sinclair, N., Moss, J., Hawes, Z., & Caswell, B. (2015). Spatializing the curriculum. In B. Davis & the Spatial Reasoning Study Group (Eds.), *Spatial reasoning in the early years: Principles, assertions, and speculations* (pp. 85-106). New York: Routledge.
- Clements, D. H., Battista, M. T., & Sarama, J. (2001). Logo and Geometry. *Journal for Research in Mathematics Education Monograph Series*, 10.
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2007). Early childhood mathematics learning. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 461-555). Reston, VA: NCTM.
- Del Grande, J. (1990). Spatial sense. *The Arithmetic Teacher*, 37(6), 14-20.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.
- Goldenberg, E. P., Cuoco, A. A., & Mark, J. (1998). A role for geometry in general education. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 3-44). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Gorgorió, N. (1998). Exploring the functionality of visual and non-visual strategies in solving rotational problems. *Educational Studies in Mathematics*, 35(3), 207-231.
- Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. In Puig, L. & Gutiérrez, A. (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 3-19). Valencia, España: Universidad de Valencia.
- Gutiérrez, A. (1998). Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial. *Revista EMA*, 3(3), 193-220.
- Hawes, Z., Tepylo, D., & Moss, J. (2015). Developing spatial thinking. In B. Davis and the Spatial Reasoning Study Group (Eds.), *Spatial reasoning in the early years: Principles, assertions, and speculations* (pp. 29-44). New York and London: Routledge.

- Lauro, M. M. (2007). *Percepção – Construção - Representação – Concepção: Os quatro processos do ensino da Geometria: uma proposta de articulação* (Dissertação de mestrado). Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo.
- Lehrer, R., Kenkins, M., & Osana, H. (1998). Longitudinal study of children's reasoning about space and geometry. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 137-167). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Mamolo, A., Ruttenberg-Rozen, R., & Whiteley, W. (2015). Developing a network of and for geometric reasoning. *ZDM Mathematics Education*, 47, 483-496.
- Mendes, M. F., & Delgado, C. C. (2008). *Geometria – Textos de apoio para Educadores de Infância*. Lisboa: Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.
- Merriam, S. (1991). *Case study research in education: A qualitative approach* (2ª ed.). São Francisco: Jossey-Bass Publishers.
- Moreira, D., & Oliveira, I. (2003). *Iniciação à Matemática no Jardim de Infância*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Mulligan, J. (2015). Looking within and beyond the geometry curriculum: Connecting spatial reasoning to mathematics learning. *ZDM Mathematics Education*, 47, 511-517.
- NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (tradução do inglês) Lisboa: APM.
- Nes, F., & Lange, J. (2007). Mathematics Education and neurosciences: Relating spatial structures to the development of spacial sense and number sense. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 4(2), 210-229.
- Nunes, M. (2016). *A resolução de problemas geométricos por crianças de 5 anos* (Dissertação de mestrado). Escola Superior de Educação de Lisboa, Lisboa.
- Ponte, J. P. (1994). O estudo de caso na investigação em educação matemática. *Quadrante*, 3(1), 3-18.
- Sarama, J., & Clements, D. H. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. New York: Routledge.
- Silva, I. L. (coord), Marques, L., Mata, L., & Rosa, M. (2016). *Orientações curriculares para a educação pré-escolar*. Lisboa: Ministério da educação/Direcção-geral da Educação.
- Sinclair, N., & Bruce, C. (2015). New opportunities in geometry education at the primary school. *ZDM Mathematics Education*, 47, 319-329.
- Thom, J., & McGarvey, L. (2015). The act and artifact of drawing(s): Observing geometric thinking with, in, and through children's drawings. *ZDM Mathematics Education*, 47, 465-481.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Buys, K. (2005). *Young children learn measurement and geometry: A learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for the lower grades in primary school*. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.
- Walsh, D. J., Tobin, J. J., & Graue, M. E. (2010). A voz interpretativa: Investigação qualitativa em educação de infância. In B. Spodek (Org.), *Manual de investigação em educação de infância* (pp. 1037-1066). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.
- Whiteley, W., Sinclair, N., & Davis, B. (2015). What is spatial reasoning? In B. Davis & the Spatial Reasoning Study Group (Eds.), *Spatial reasoning in the early years: Principles, assertions, and speculations* (pp. 3-14). New York: Routledge.
- Yin, R. (1989) *Case study research: Design and methods*. Newbury Park: Sage.