

A INFLUÊNCIA DAS REPRESENTAÇÕES NA CLASSIFICAÇÃO DE QUADRILÁTEROS EM FUTURAS PROFESSORAS E EDUCADORAS

Lina Brunheira

Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa

lbrunheira@eselx.ipl.pt

João Pedro da Ponte

Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

jpponte@ie.ulisboa

Resumo: Esta comunicação diz respeito a uma experiência de formação com futuras professoras e educadoras do 2.º ano de uma LEB, focada na aprendizagem da classificação de quadriláteros, a qual foi promovida por um ensino de natureza exploratória. Os dados apresentados, recolhidos por registos áudio e vídeo e das produções escritas das formandas, focam-se na compreensão que evidenciam sobre as propriedades das figuras e suas relações, bem como nos fatores que influenciam esta aprendizagem. Os resultados mostram que a classificação hierárquica depende principalmente da robustez do conceito-imagem, da identificação dos atributos críticos das figuras, do domínio do raciocínio dedutivo e da visualização.

Palavras-chave: geometria, raciocínio, visualização, efeito protótipo, formação inicial.

Introdução

Nas últimas décadas, a investigação em educação tem apontado para uma valorização do ensino da geometria capaz de conciliar uma vertente mais formal e dedutiva com outra que apela à intuição, à criatividade e à descoberta. Tal como destaca Abrantes (1999):

A geometria é uma fonte de problemas de vários tipos: de visualização e representação; de construção e lugares geométricos; envolvendo transformações geométricas; em torno das ideias de forma e de dimensão; implicando conexões com outros domínios da Matemática... Apelando a processos de “organização local” da Matemática, nomeadamente de classificação e hierarquização a partir de determinadas definições e propriedades. (p. 156)

Contudo, um ensino consistente com esta visão da geometria levanta grandes desafios à formação de professores, quer no que respeita ao desenvolvimento do conhecimento matemático, quer do conhecimento didático, tanto mais que os estudos existentes em

Portugal e noutros países sobre o conhecimento geométrico de professores e futuros professores revelam muitas fragilidades (Clements & Sarama, 2011; Fujita & Jones, 2006; Menezes, Serrazina & Fonseca, 2014; Tempera, 2010). Assim, assumindo que a investigação tem um importante papel a desempenhar na melhoria destes resultados, procuramos compreender a forma como futuros educadores e professores desenvolvem o seu raciocínio geométrico e o papel da visualização espacial, no contexto de uma experiência de formação desenvolvida numa unidade curricular sobre geometria que integra o 2.º ano do plano de estudos de uma Licenciatura em Educação Básica (LEB). Neste artigo focamo-nos no desempenho de uma turma de formandas no processo de classificar, analisando ainda a influência das representações imagéticas no raciocínio geométrico.

A formação de professores dos anos iniciais em geometria

Atualmente, a perspetiva de que os futuros professores precisam de desenvolver uma compreensão profunda de ideias fundamentais da Matemática (NCTM, 1994) é uma ideia presente em muitos estudos e programas de formação, muito embora com interpretações e formas de concretizar que podem divergir bastante. Para o NCTM (1994), o conhecimento matemático necessário ao professor inclui o domínio de diferentes tipos de raciocínio matemático, formas de resolver problemas e de comunicar Matemática eficazmente, a compreensão de conceitos, de procedimentos específicos e do processo de fazer matemática. Em geometria, os professores dos anos iniciais devem compreender como ela é usada para descrever o mundo em que vivemos e resolver problemas, saber analisar figuras bi e tridimensionais, produzir argumentações e justificações e privilegiar a visualização espacial. Em Portugal, o documento produzido por Albuquerque et al. (2005) sugere que a formação dos professores inclua uma perspetiva histórica do tema, um foco na visualização e a representação espacial, o tratamento das formas geométricas básicas, suas propriedades e relações, transformações geométricas, dando igualmente atenção à comunicação. Esta formação deverá desenvolver-se em torno de atividades próprias da matemática, como a formulação e resolução de problemas, e incluir processos a ela associados: formulação de conjecturas, teste e validação, argumentação, prova e refutação, sem ignorar o recurso à tecnologia ou outras ferramentas e materiais.

No que diz respeito à abordagem metodológica, Watson e Mason (2007) sugerem que o trabalho a desenvolver deve partir de tarefas matemáticas que promovam o pensamento matemático dos futuros professores e desenvolvam a sua perceção sobre o poder dessas tarefas, uma orientação consistente com a ideia de Ponte e Chapman (2008) de que, na formação inicial, os futuros professores devem aprender segundo os mesmos métodos que se preconiza que venham a utilizar nas suas práticas. Nesta perspetiva, surge com especial interesse o ensino exploratório, um tipo de ensino assente essencialmente em tarefas de cunho exploratório e investigativo, onde cabe a quem aprende uma parte importante do trabalho de descoberta e construção do conhecimento, e numa dinâmica de

aula em que se reserva um espaço significativo ao trabalho dos alunos sobre as tarefas, a par de momentos de discussão e negociação de significados (Ponte, 2005).

O papel das representações no raciocínio geométrico

Como afirma Duval (1998), todos os processos de raciocínio dependem da forma como a informação é apresentada e está organizada. No caso específico da geometria, essa informação é dada segundo uma organização visual a partir da qual nós podemos nomear objetos, levantar questões e conjeturas sobre esses objetos e suas relações. Também para Battista (2008), em geometria “nós raciocinamos *sobre* objetos; nós raciocinamos *com* representações” (p. 342), pelo que é fundamental ter em conta a natureza de ambos para analisar o raciocínio em geometria. Para o autor, os objetos podem físicos, como um desenho num papel ou uma construção feita num AGD, ou podem ser conceitos formais. Por seu turno, as representações podem ser internas ou externas e podem ser verbais ou imagéticas. Porém, como alerta o autor, é preciso ter em conta que a mesma entidade pode ser uma representação para uma pessoa e um objeto para outra.

Numa perspetiva semelhante, Mariotti (1992) aborda as figuras geométricas associando-lhes duas dimensões: uma dimensão figurativa (associada às representações) e uma dimensão conceptual (de natureza abstrata e estabelecida pela sua definição) que se articulam formando o que Fischbein (1983) chama de *conceito figurativo*. A articulação entre estas duas dimensões levanta várias dificuldades e conduz a erros comuns que têm sido alvo de investigação (Battista, 2007; Clements, 2003). Uma das dificuldades mais frequentes deriva de os alunos raciocinarem sobre a representação material, em vez de o fazerem sobre a figura, ou seja, o objeto teórico regido por uma definição. Este facto é explicado por Vinner (1983) ao afirmar que, quando ouvimos ou lemos o nome de um conceito que conhecemos, ou quando resolvemos uma tarefa, a nossa memória é estimulada e evoca algo. Contudo, raramente aquilo que evoca é a definição formal do conceito, mas antes um conjunto de representações visuais, imagens, propriedades ou experiências – um conjunto que constitui aquilo a que chama *conceito-imagem*. No caso dos conceitos geométricos, o *conceito-imagem* pode incluir várias representações que o indivíduo recorda como exemplos do conceito e um conjunto de propriedades a ele associadas. Acontece que os exemplos que um indivíduo recorda podem ser afetados de forma adversa por um ensino desadequado, conduzindo a vários erros comuns. As propriedades incluídas no *conceito-imagem* podem não ser todas corretas e até podem incluir propriedades físicas irrelevantes. Esta restrição dos conceitos a um conjunto de elementos que é utilizado de forma recorrente é frequentemente designada por *efeito protótipo*, tem sido estudado por vários investigadores (por exemplo, Fujita, 2012; Herskowitz, 1989; Presmeg, 1992) e será abordado adiante a propósito do processo de classificar.

O processo de classificar em geometria

Classificar consiste em declarar uma equivalência entre objetos com semelhanças entre si mas visualmente diferentes, o que implica considerar cada caso como um caso particular de uma classe de objetos. Por outras palavras, segundo Mariotti e Fischbein, “o processo de classificar consiste em identificar as propriedades comuns e relevantes que determinam a categoria” (1997, p. 244). Contudo, as classificações formais recorrem frequentemente a critérios estruturais que não são imediatamente claros e estão longe dos critérios percetuais aos quais estamos habituados a remeter a nossa atividade espontânea de classificar. Mais concretamente, Herskowitz (1989) assinala a necessidade de distinguir entre atributos críticos e atributos não-críticos: por exemplo, a congruência entre lados consecutivos é um atributo não-crítico no retângulo, pois os lados consecutivos podem ou não ser congruentes; já a congruência dos quatro ângulos é um atributo crítico, pois se o quadrilátero não tiver este atributo não pode ser um retângulo. Além disso, para Markman (1989), compreender as relações hierárquicas entre as figuras envolve os seguintes aspetos:

- Compreender que uma figura pode ser classificada de formas distintas e ser nomeada com diferentes designações;
- Compreender as relações de transitividade entre diferentes conceitos, ou seja, compreender que, por exemplo, se um quadrado é um losango e se este é um paralelogramo, então um quadrado é um paralelogramo;
- Compreender a assimetria das relações entre quadriláteros, como por exemplo, que todos os retângulos são paralelogramos, mas que nem todos os paralelogramos são retângulos;

Compreender a assimetria entre os atributos críticos dos quadriláteros: por exemplo, os atributos críticos dos retângulos estão incluídos nos quadrados, mas que os atributos críticos do quadrado não estão incluídos no retângulo.

Apesar do interesse matemático e didático da classificação hierárquica dos quadriláteros, esta é uma área em que a investigação tem mostrado existirem várias dificuldades que afetam alunos de vários níveis de ensino, bem como futuros professores, e são evidenciadas em estudos de diferentes países (de Villiers, 1994; Fujita, 2012; Fujita & Jones, 2007; Tempera, 2010). Os estudos revelam que o raciocínio geométrico é frequentemente afetado pelas imagens mentais das figuras, na maioria das vezes pouco flexíveis (efeito protótipo). Há uma percentagem reduzida de indivíduos que admite a hierarquia entre quadriláteros e, frequentemente, é capaz de estabelecer relações entre algumas figuras, mas não entre outras, um problema que afeta alunos de diferentes níveis de ensino, bem como professores (Okazaki & Fujita, 2007). Os estudos revelam ainda que o conhecimento da definição não é suficiente para a correta classificação das figuras, já que muitas vezes o raciocínio produzido não é consistente com a definição enunciada.

Para Herskowitz (1989), os indivíduos que analisam as figuras com base na figura protótipo, tendem a fazer dois tipos de “julgamentos prototípicos”: 1) o exemplo protótipo é usado como base, mas o julgamento foca-se na sua representação visual; 2) o exemplo protótipo é usado como base, mas o julgamento tem por base as suas propriedades, sejam elas específicas da classe ou não. Por exemplo, neste nível de compreensão, um aluno pode afirmar que um retângulo não é um paralelogramo porque não é “inclinado” (julgamento tipo 1) ou argumentar no mesmo sentido, dizendo que o paralelogramo não tem ângulos retos (julgamento tipo 2).

Para Fujita e Jones (2007), a complexidade da classificação hierárquica entre quadriláteros resulta também da dificuldade em raciocinar dedutivamente. Na sua opinião, a questão-chave é saber como é que os indivíduos deixam de olhar para as “figuras” como objeto do seu estudo, através da análise das suas propriedades, e passam a olhar para as “propriedades geométricas das figuras” como objeto de estudo, focando-se no raciocínio dedutivo.

Metodologia de investigação

Este artigo insere-se num estudo mais amplo que visa, como já referimos, compreender a forma como os formandos de uma LEB raciocinam geometricamente. Adicionalmente, pretendemos reformular a unidade curricular de Geometria na qual decorre o estudo, concebendo estratégias e ferramentas de ensino, que são aperfeiçoadas em consonância com o conhecimento que vamos construindo. Desta forma, optámos pela metodologia de *design-based research*, na modalidade de experiência de formação (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer & Schauble, 2003) em que a professora tem também o papel de investigadora. Em 2013/14, foi realizada uma primeira experiência de formação com duas turmas que resultou num estudo-piloto e, em 2014/15, uma segunda experiência, desta vez com uma turma (30 formandas), sobre a qual nos debruçaremos neste artigo.

Os dados aqui utilizados dizem respeito à primeira unidade lecionada (*Triângulos e Quadriláteros*) e foram recolhidos a partir dos registos áudio e vídeo das aulas, bem como das produções escritas das formandas na sala de aula. Foi ainda aplicado um teste diagnóstico a toda a turma no primeiro dia de aulas e, de seguida, realizadas entrevistas a quatro formandas com perfis diferentes⁷.

A unidade *Triângulos e Quadriláteros* desenvolveu-se a partir de quatro tarefas, com uma orientação sequencial assente em três fases: 1) exploração/investigação sobre quadriláteros com recurso ao *Geogebra*, 2) classificação de triângulos e quadriláteros e 3) definição de quadriláteros. As tarefas foram criadas de modo a que as formandas descobrissem as propriedades invariantes dos quadriláteros e estabelecessem relações entre eles. De maneira geral, as aulas seguiram uma abordagem exploratória: a tarefa foi

⁷ Foram tidos em conta o percurso escolar, o grau de dificuldade que declararam sentir em geometria e as suas intenções sobre o futuro profissional.

introduzida brevemente pela professora, seguiu-se uma fase de trabalho em pequenos grupos (podendo ser antecedida por trabalho individual), discussão das conclusões apresentadas pelos grupos e síntese final. Ao longo das aulas, a professora apoiou o trabalho dos grupos, geriu a discussão e promoveu a síntese das ideias trabalhadas.

Neste texto começamos por apresentar alguns dados recolhidos do teste diagnóstico e das entrevistas iniciais que constituem um indicador relativamente à forma como as formandas encaravam a classificação hierárquica dos quadriláteros no início da unidade curricular. De seguida, apresentamos dados recolhidos durante a realização da tarefa sobre classificação, nomeadamente, registos escritos referentes a um grupo de questões e transcrições de diálogos de um dos grupos a propósito das suas resoluções.

A análise dos dados recorre a uma metodologia mista. Para analisar a forma como os futuros professores classificam quadriláteros, recorreremos a um modelo (ver Quadro 1) proposto por Fujita (2012). Do ponto de vista dos conceitos teóricos envolvidos, temos em conta a teoria dos conceitos figurativos de Fischbein (1993) e a distinção proposta por Herskowitz (1989) sobre julgamentos prototípicos. Com este quadro, pretendemos distinguir os níveis de compreensão sobre a classificação inclusiva de quadriláteros. A tabela 1 ilustra a forma como se organiza este quadro para a família dos paralelogramos mas, analogamente, podem construir-se outros quadros para a família dos trapézios ou papagaios. Nos casos da família dos retângulos ou dos losangos, o quadro tem menos uma categoria (classificação parcialmente prototípica) uma vez que o único tipo de quadrilátero pertencente àquelas classes é o quadrado. Apesar de existir uma hierarquia entre os níveis de compreensão relativos a cada quadrilátero, estes níveis são independentes quando comparamos diferentes quadriláteros.

Quadro 1: Níveis de compreensão das relações inclusivas na classe dos paralelogramos.

Nível	Descrição
Classificação Hierárquica	Os quadrados, retângulos e losangos são entendidos como paralelogramos. A “relação de sentido oposto à inclusão” é entendida.
Classificação parcialmente prototípica	Os conceitos figurativos começam a estender-se. Por exemplo, aceitam que os losangos sejam casos de paralelogramos, mas os quadrados e os retângulos não.
Classificação prototípica	Os conceitos figurativos são muito limitados. A análise que fazem das figuras é com base em protótipos, seja a partir da sua representação, seja das suas propriedades.
0	Não existe conhecimento elementar sobre paralelogramos.

Finalmente, além distinguir os desempenhos das formandas relativamente à classificação de quadriláteros, interessa-nos compreender ainda as suas estratégias de raciocínio, as quais emergiram dos dados.

Resultados

O teste diagnóstico de escolha múltipla continha uma questão relativa ao conhecimento da hierarquia entre quadriláteros, particularmente entre quadrados e retângulos. Os resultados das 28 respostas obtidas mostram que, cerca de 1/3 (9 respostas) considerava verdadeira a afirmação “todos os quadrados são retângulos”. Posteriormente, na entrevista às quatro formandas (que coincidentemente responderam bem a esta questão), percebemos que apenas uma compreendia a razão daquela relação (respondendo “porque tem quatro ângulos retos”), duas não conseguiam explicá-la e a quarta raciocinava incorretamente (“porque a partir de um retângulo posso fazer um quadrado”). Estes dados confirmam o que já havia ocorrido no estudo-piloto, ou seja, que há algumas formandas que conhecem esta relação, mas apenas como um facto e não algo que compreendam.

A tarefa relativa à classificação, sobre a qual focaremos a nossa discussão, apoiou-se significativamente na investigação anterior sobre as propriedades dos quadriláteros. Esta investigação foi realizada com recurso ao *Geogebra* e a construções dinâmicas de cada quadrilátero notável que as formandas deveriam manipular para descobrir as suas propriedades invariantes.

Na tarefa sobre classificação, as formandas preencheram um diagrama de Venn e um fluxograma (Figura 1) e responderam à questão 4 (Figura 2):

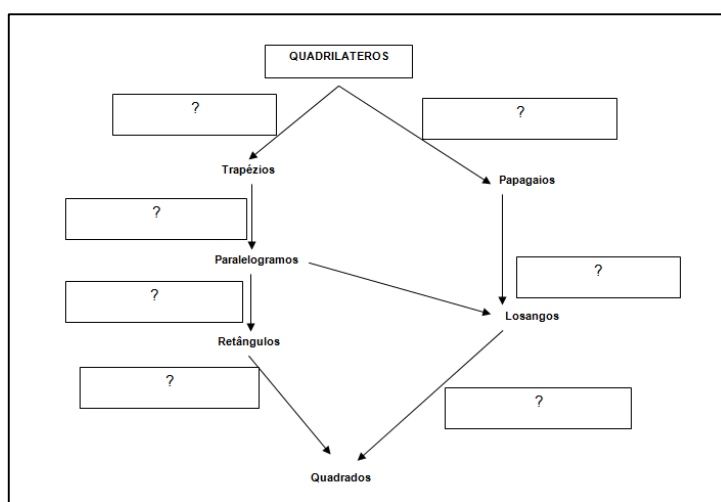


Figura 1: Fluxograma para preenchimento das propriedades em falta.

4. Analisa agora as seguintes afirmações quanto à sua veracidade. Se forem falsas apresenta um contraexemplo, se forem verdadeiras justifica-as.
- Todos os quadrados são retângulos;
 - Todos os paralelogramos são retângulos;
 - Todos os quadrados são papagaios.

Figura 2: Questão 4 da tarefa sobre classificação de quadriláteros.

Para esta pergunta, a professora pediu para que, antes de discutirem no grupo as suas ideias, registassem individualmente a sua resolução. Depois do trabalho anterior, a primeira afirmação pareceu ser de fácil resolução para toda a turma, já que as 24 formandas presentes nesse dia responderam corretamente, apresentando uma resposta com nível correspondente à classificação hierárquica. As justificações apresentadas são muito semelhantes à resposta da figura 3, havendo apenas a assinalar 3 formandas que fundamentaram a veracidade da afirmação unicamente com base na existência de quatro ângulos retos. Apenas uma formanda deu uma resposta mais superficial, dizendo que a afirmação é verdadeira porque “as propriedades do quadrado vão ao encontro às do retângulo”.

a. Todos os quadrados são retângulos; Verdadeira - Todas as propriedades dos retângulos estão incluídas nas propriedades dos quadrados, como quatro ângulos retos e 2 pares de lados paralelos. O quadrado é um caso particular do retângulo.

Figura 3: Resposta de Isabel à questão 4a.

A segunda afirmação registou um sucesso semelhante, uma vez que apenas duas formandas erraram, considerando a afirmação verdadeira. As restantes 22 respostas apresentadas são corretas, com diferentes níveis de sofisticação, potencialmente reveladoras de formas de pensar diferentes. Entre estas respostas, 14 argumentam com base nas propriedades dos paralelogramos e dos retângulos, mostrando compreender a assimetria entre os atributos críticos dos quadriláteros. Consequentemente, estas respostas revelam também a compreensão da assimetria entre as relações destes quadriláteros, como mostra a resposta apresentada na figura 4.

b. Todos os paralelogramos são retângulos; falso, porque os retângulos são casos particulares dos paralelogramos, onde ambos têm 2 pares de lados paralelos, mas o paralelogramo pode não ter os 4 ângulos retos.



Figura 4: Resposta de Anabela à questão 4b.

Note-se ainda que, no entanto, nem todas as formandas demonstram o rigor apresentado na resposta anterior, onde se diz que “o paralelogramo **pode** não ter os 4 ângulos retos”, afirmando em vez disso que “os paralelogramos não têm os quatro ângulos retos”.

Além das 14 respostas referidas, outras 4 respostas baseiam-se apenas assimetria das relações entre o paralelogramo e o retângulo, 3 dão respostas corretas mas pouco claras.

No que diz respeito à terceira afirmação, começamos por notar que a relação entre o quadrado e o papagaio não é, ao contrário das questões anteriores, uma relação “direta” se nos basearmos na hierarquia dos quadriláteros apresentada no fluxograma da tarefa. Ou seja, neste diagrama, os quadrados relacionam-se diretamente com os losangos, e estes

com os papagaios. O domínio da relação de transitividade responde facilmente à questão, no entanto, analisando o tipo de respostas obtidas (Quadro 2) vemos que o sucesso foi muito diferente:

Quadro 2: Desempenho das formandas relativamente à questão 4c.

Nível	Classificação Hierárquica		Classificação parcialmente prototípica	Classificação prototípica
Frequências	10 (42%)		7 (29%)	7 (29%)
Tipo de resposta	Recorre à transitividade 3 (12,5%)	Recorre às propriedades das figuras 7(29%)	Apenas reconhece relações “diretas”	Responde com base nas propriedades e/ou imagem da figura prototípica

Analisemos então algumas respostas correspondentes a estas categorias. No grupo das 10 formandas que responderam corretamente (nível de classificação hierárquica), existem três formandas que responderam diretamente usando a relação de transitividade atrás referida, sem referir quaisquer propriedades e, portanto, usando apenas raciocínio lógico. Os restantes 7 deram respostas semelhantes à apresentada na figura 5, distinguindo-se entre si pela quantidade de propriedades que mencionam verificar-se nos quadrados e nos papagaios.

c. Todos os quadrados são papagaios.

É verdadeiro, uma vez que, para uma figura ter a designação de "papagaio", a figura tem que ter dois pares de lados consecutivos com a mesma dimensão, condição que é satisfeita pelo quadrado, embora este seja um caso particular por ter todos os lados iguais.

Figura 5: Resposta de Carla à questão 4c.

A resposta da figura 6, perfeitamente representativa do grupo de 7 formandas que a deu, corresponde ao nível seguinte, o da classificação parcialmente prototípica. Estas formandas não revelam dúvida quanto à inclusão dos quadrados na classe dos losangos, havendo outras que referem também a inclusão dos losangos na classe dos papagaios. Contudo, parecem ter a conceção de que apenas um tipo de quadrilátero pode ser considerado caso particular de outro.

c. Todos os quadrados são papagaios. *É, porque todos os quadrados são losangos. O quadrado é um caso particular do losango.*

Figura 6: Resposta de Sandra à questão 4c.

Finalmente, temos um outro grupo de 7 formandas que apresenta respostas correspondentes a um nível de classificação prototípica. A resposta apresentada na figura 7 parece revelar que o raciocínio assenta quer nas propriedades, quer nas imagens prototípicas das figuras em causa. No que diz respeito às propriedades, as formandas parecem não encontrar relação entre a propriedade “quatro lados iguais” e “lados consecutivos iguais dois a dois”, ou seja, não compreendem que a primeira afirmação implica a segunda. Uma hipótese explicativa é a interpretação incorreta da propriedade “lados consecutivos iguais dois a dois”, que pode estar a ser entendida num sentido restrito, ou seja, como sendo “**apenas** lados consecutivos iguais dois a dois” o que coincide e é reforçado pela imagem da figura protótipo.

c. Todos os quadrados são papagaios. Falso. O papagaio tem obrigatoriamente que ter lados consecutivos iguais 2 a 2, ao contrário do quadrado em que os 4 lados têm de ser todos iguais

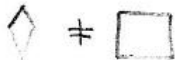


Figura 7: Resposta de Anita à questão 4c.

Para melhor acedermos às razões que poderão impedir os indivíduos de admitir esta relação, analisemos o seguinte episódio decorrido durante o trabalho em pequeno grupo, no momento em que os elementos confrontavam o que cada um escreveu individualmente e discutiam entre si. No registo individual, Tita respondeu corretamente com base na relação de transitividade, Fernanda e Helena deram respostas incorretas cujo fundamento podemos perceber a partir das suas intervenções:

Tita – Os papagaios não tem lados paralelos... quer dizer... Está aqui a dizer “o quadrado é um caso particular de um losango”, se um losango é um papagaio, então... então... Vocês tinham posto falsa, a terceira?

Fernanda – Sim... O losango é um caso particular de um papagaio.

Tita – E se um quadrado é um caso particular de um losango... então é porque também é um papagaio! Ai, não percebo nada... isto não tem sentido nenhum...

Tita – [recorre à folha de registo das propriedades dos quadriláteros] Dois pares de lados consecutivos iguais, um par de ângulos opostos congruentes, as diagonais são perpendiculares, uma das diagonais bisseta a outra. Pois, porque o quadrado tem todas as características do papagaio... E mais. Portanto... tem lógica!

Entretanto, a professora passa pelo grupo e percebe a expressão confusa de Helena:

Prof^a – A Helena é que não está convencida... diz lá.

Helena – Não sei...

Prof^a – Custa-te a aceitar isso, é?

Helena – Sim! Mas acho que também é porque vemos que são tão diferentes...
porque um losango e um quadrado ainda são... pronto, agora
estes são tão diferentes...

Tita – Pois, para mim também não tem lógica nenhuma...

A professora deixa o grupo a refletir mais um pouco. Apesar de continuarem a pensar no assunto, as formandas continuam confusas:

Helena – Que são descendentes já percebo, só que irrita-me ver que um papagaio
não tem lados paralelos, então um quadrado é um papagaio
como??? Se um quadrado tem os lados paralelos!

Tita – Sim, sim, os papagaios não têm lados paralelos e os quadrados têm todos.

Helena – os opostos.

Tita – Sim. Não sei o que te diga realmente... Estou confusa.

A primeira reflexão que podemos fazer é que, apesar de Tita ter raciocinado muito bem, quer recorrendo à propriedade transitiva, quer deduzindo a relação a partir dos atributos críticos do papagaio, isso não impede que a formanda questione e se sinta perturbada com as suas conclusões. As afirmações de Helena dão-nos pistas bastante interessantes sobre os obstáculos que esta formanda encontra para aceitar que um quadrado é um caso particular de um papagaio. Por um lado, a representação imagética que Helena associa ao quadrado é muito diferente daquela que associa ao papagaio, o que nos leva à influência determinante das imagens prototípicas. Por outro lado, a análise do ponto de vista das propriedades também não a ajuda porque Helena comete um erro de raciocínio que parece ser frequente: o facto de um quadrilátero não respeitar uma propriedade, não significa que respeite a sua negação. Concretamente, se os papagaios não têm de ter pares de lados paralelos, não significa que não haja papagaios que tenham lados paralelos.

Conclusão

Os resultados apresentados confirmam que, na grande maioria dos casos, a formação no Ensino Básico e Secundário não foi suficiente para promover um conhecimento adequado sobre as propriedades das figuras geométricas. A classificação hierárquica é desconhecida de muitas formandas que naturalmente revelam dificuldade, e até algum desconforto na sua aprendizagem, decorrente da forte conceptualização de muitas das figuras com que trabalham e da sua inexperiência em classificar objetos geométricos.

Nesta fase inicial da aprendizagem sobre o processo de classificar, há vários aspetos que influenciam o estabelecimento de uma hierarquia entre as figuras. Em primeiro lugar, parece-nos claro que as relações não têm todas o mesmo grau de dificuldade: quanto mais “direta” for a relação entre as figuras, mais fácil é a aceitação de uma relação hierárquica

entre si. Em segundo lugar, o estabelecimento desta relação hierárquica depende efetivamente da identificação dos atributos críticos das figuras (Herskowitz, 1989) que, por sua vez, depende do conjunto de representações imagéticas que o indivíduo associa às figuras. Em última análise, é possível deduzir toda a hierarquia entre as figuras analisando apenas o conjunto das suas propriedades, como sugerem Fujita e Jones (2007), contudo, os dados apresentados indicam que isso pode ser insuficiente se as representações mentais contrariarem tal raciocínio.

A conclusão anterior conduz-nos ao papel da visualização. Como afirma Herskowitz (1989), por um lado não podemos formar uma imagem de um conceito sem visualizarmos os seus elementos mas, por outro, esses elementos podem limitar o conceito-imagem. Nos diálogos apresentados, parece-nos claro que existe um repertório limitado de representações que constituem o conceito-imagem de papagaio, o que impõe um obstáculo importante ao raciocínio geométrico, nomeadamente ao raciocínio dedutivo. Contudo, além da necessidade de alargar o conjunto de representações associadas ao conceito, consideramos igualmente importante a sua estruturação espacial (Battista, 2008), ou seja, o reconhecimento da forma como os elementos da figura se organizam e relacionam. Se o modelo mental que um indivíduo tem sobre um papagaio destacar a propriedade “dois pares de lados consecutivos iguais”, podemos procurar visualizar os restantes quadriláteros destacando igualmente essa propriedade, tal como na figura 8, o que nos leva a compreender a razão pela qual as figuras pertencem todas à mesma classe. Analogamente, podemos destacar a propriedade “diagonais perpendiculares, com uma das diagonais a bisseitar a outra”, como mostra a figura 9.

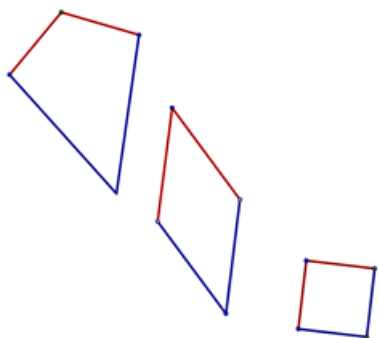


Figura 8: Família dos papagaios com as relações entre os lados destacadas.

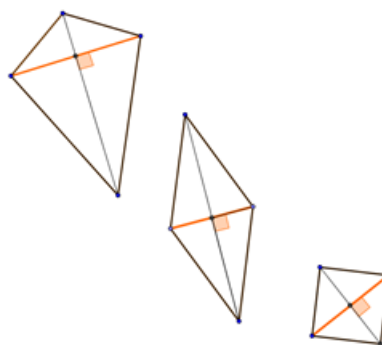


Figura 9: Família dos papagaios com as relações entre as diagonais destacadas.

Ainda no que se refere aos aspetos que influenciam o desempenho no processo de classificar, acrescentamos o domínio do raciocínio lógico, associado à interpretação da linguagem. De facto, parece-nos que afirmações como “figura com dois lados iguais” é entendida muitas vezes como tendo “exatamente dois lados iguais”. Da mesma forma, dizer que “um retângulo é um paralelogramo” pode ser entendido como “ser o mesmo que”, pelo que é importante a diversificação da linguagem, incluindo a ideia de classe ou de caso particular.

Finalmente, do ponto de vista da metodologia utilizada, destacamos a relevância do ensino exploratório e, em particular, de tarefas que conduzam à formação de conceitos e descoberta de propriedades, bem como a importância dos momentos de discussão, aqui retratados nos diálogos do grupo. A classificação hierárquica só pode ser verdadeiramente compreendida se houver uma participação ativa dos alunos na sua construção, se houver discussão e uma negociação de significados. Foi dessa forma que as formandas expuseram o seu raciocínio, o que tornou possível à professora entender os obstáculos que se colocaram em cada momento, para procurar dar-lhes resposta.

Referências bibliográficas

- Abrantes, P. (1999). Investigações em geometria na sala de aula. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca & L. Brunheira (Eds.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 153-167). Lisboa: Projeto MPT e APM.
- Albuquerque, C., Veloso, E., Rocha, I., Santos, L., Serrazina, L., & Nápoles, S. (2006). *A Matemática na formação inicial de professores*. Lisboa: APM e SPCE.
- Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843-908). Greenwich, CN: Information Age.
- Battista, M. T. (2008). Representations and cognitive objects in modern school geometry. In G. W. Blume & M. K. Heid (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Cases and perspectives* (vol. 2, pp. 341-362). Charlotte, NC: Information Age.
- Clements, D. H. (2003). Teaching and learning geometry. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 151-178). Reston, VA: NCTM.
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2011). Early childhood teacher education: The case of geometry. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 14(2), 133-148.
- Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, 32(1), 9-13.
- De Villiers, M. (1994). The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 11-18.
- Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point a view. In C. Mammana & V. Villani (Eds.) *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century* (pp. 37-52). Dordrecht/Boston: Kluwer.
- Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational studies in mathematics*, 24(2), 139-162.
- Fujita, T. (2012). Learners' level of understanding of the inclusion relations of quadrilaterals and prototype phenomenon. *The Journal of Mathematical Behavior*, 31(1), 60-72.
- Fujita, T., & Jones, K. (2006). Primary trainee teachers' understanding of basic geometrical figures in Scotland. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (Eds.), *Atas do PME 30* (Vol. 3, pp. 129-136). Prague, Czech Republic.
- Fujita, T., & Jones, K. (2007). Learners' understanding of the definitions and hierarchical classification of quadrilaterals: Towards a theoretical framing. *Research in Mathematics Education*, 9 (1), 3-20.