



ISEL

INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DE LISBOA

Área Departamental de Engenharia Mecânica

Avaliação do Escoamento do Ar no Interior de um Laboratório

FRANCISCO BERNARDO LEIBUSCH DE

MARGARIDO ZDANOWSKI

(Licenciado em Engenharia Mecânica)

Trabalho Final de Mestrado para a obtenção do grau de
Mestre em Engenharia Mecânica

Orientadora:

Doutora Cláudia Sofia Séneca da Luz Casaca

Jurí:

Presidente: Doutor João Manuel Ferreira Calado

Vogais: Doutor Pedro Manuel Alves Patrício da Silva

Doutora Cláudia Sofia Séneca da Luz Casaca

Dezembro de 2016

a todos os que me são queridos

*Este documento não foi escrito
segundo o novo acordo ortográfico.*

"A goal is not always meant to be reached, it often serves simply as something to aim at."

Bruce Lee

Agradecimentos

À minha cara Professora Cláudia Casaca, pela sua orientação no trabalho e disponibilidade ao longo destes anos.

Ao Frederico, ao Ruben, ao José, à Teresa, à Balixa, e ao Sérgio pela ajuda e companheirismo ao longo desta caminhada.

À minha namorada, Guadalupe.

Aos meus irmãos e sobrinhos.

Aos meus pais, Júlio '*o Gorducho*' e Luísa, por tudo.

Simbologia

d_0	Distância típica de equilíbrio estável entre moléculas	m
Δd	Distância percorrida pelas moléculas, entre colisões	m
∂m	Massa molecular	$m \text{ mol}^{-1}$
∂V	Volume elementar	m^3
∂V^*	Volume elementar limite	m^3
ρ	Massa volúmica	$kg \text{ m}^{-3}$
\vec{a}	Aceleração vectorial	$m \text{ s}^{-2}$
m	Massa	kg
\vec{F}	Força vectorial	$kg \text{ m s}^{-2}$ ou N
T	Temperatura	$^{\circ}C$ ou $^{\circ}K$
$x \ y \ z$	Coordenadas espaciais	m
t	Tempo	s
\mathbf{V}	Velocidade vectorial	$m \text{ s}^{-1}$
u_i	Componente escalar da velocidade na direcção x	$m \text{ s}^{-1}$
v_j	Componente escalar da velocidade na direcção y	$m \text{ s}^{-1}$
w_k	Componente escalar da velocidade na direcção z	$m \text{ s}^{-1}$
$Dt \ \partial t \ \Delta t$	Incremento no tempo	s
$\partial x \ \Delta x$	Incremento no espaço na direcção x	m
$\partial y \ \Delta y$	Incremento no espaço na direcção y	m
$\partial z \ \Delta z$	Incremento no espaço na direcção z	m
∇	Gradiente	<i>n.a.</i>
V	Volume de controlo	$kg \text{ m}^{-3}$
S	Superfície de controlo	m^2
n	Direcção normal	
g_i	Constante de aceleração gravítica	m^2
$\tau_{i,j}$	Relação constitutiva	$kg \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-2}$ ou $N \text{ m}^{-2}$ ou Pa
f	Força de corpo	
P	Pressão	$kg \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-2}$ ou $N \text{ m}^{-2}$ ou Pa

$\tau_{x,x}$ $\tau_{y,y}$ $\tau_{z,z}$	Tensão normal	$kg\ m^{-1}\ s^{-2}$ ou $N\ m^{-2}$ ou Pa
$\tau_{x,y}$ $\tau_{y,z}$ $\tau_{z,x}$	Tensão normal	$kg\ m^{-1}\ s^{-2}$ ou $N\ m^{-2}$ ou Pa
λ	Segunda viscosidade	$kg\ m^{-1}\ s^{-1}$ ou $N\ s\ m^{-2}$ ou $Pa\ s$
μ	Viscosidade dinâmica	$kg\ m^{-1}\ s^{-1}$ ou $N\ s\ m^{-2}$ ou $Pa\ s$
\dot{q}	Calor específico	$J\ kg^{-1}$ ou $m^2\ s^{-2}$
k	Condutividade térmica	$W\ m^{-1}\ kg^{-1}$
e	Energia interna	$J\ kg^{-1}$ ou $m^2\ s^{-2}$
k	Energia cinética turbulenta	$m^2\ s^{-2}$
ϵ	Taxa de dissipação de energia turbulenta	$m^2\ s^{-3}$
μ_t	Viscosidade dinâmica turbulenta	$m^2\ s$
M	Número de Mach	<i>Adimensional</i>
Re	Número de Reynolds	<i>Adimensional</i>
Ra	Número de Raleigh	<i>Adimensional</i>
Gr	Número de Grashof	<i>Adimensional</i>
Ar	Número de Arquimédes	<i>Adimensional</i>
β	Coefficiente de expansão térmica	<i>Adimensional</i>
Δ	Laplaciano	<i>n.a.</i>
ν	Viscosidade cinemática	$m^{-2}\ s^{-2}$
c_p	Calor específico a pressão constante	$J\ kg^{-1}\ K^{-1}$ ou $J\ kg^{-1}\ ^\circ C^{-1}$
α	Difusividade térmica	$m^2\ s$
L	Comprimento característico dos turbilhões	m
α_t	Difusividade térmica turbulenta	$m^2\ s$

Abreviaturas

NS	Navier-Stokes
DFC	<i>Dinâmica dos Fluidos Computacional</i>
ISEL	<i>Instituto Superior de Engenharia de Lisboa</i>
SOR	<i>Successive Over Relaxation</i>

Resumo

A dinâmica dos fluidos computacional (DFC) começa na indústria da ventilação por volta dos anos 70 e tem um vasto uso nas áreas de engenharia, nomeadamente em projectos de climatização. A sua utilização em fase de projecto e no teste de soluções com alto risco permite poupar a nível económico e energético. A nível da climatização, a DFC tem como base as equações que descrevem o movimento do ar e a transferência de calor, as equações de Navier-Stokes, e conservação da energia, respectivamente. A resolução destas é feita através de métodos numéricos e permite obter resultados discretos localizados no espaço e no tempo.

Este trabalho analisa um escoamento incompressível, para tal deduzem-se e resolvem-se numericamente as equações diferenciais parciais da continuidade, de Navier-Stokes e da energia. A resolução foi realizada em duas fases, na primeira desenvolveu-se um programa em ambiente MatLab que pretende resolver um escoamento laminar através do algoritmo SIMPLE e obter o perfil de velocidade. Na segunda através do uso do software comercial OpenFOAM, pretende-se resolver um escoamento turbulento com o modelo de turbulência $k - \epsilon$ contabilizando as forças de impulsão através da aproximação de Boussinesq. Através destas duas fases avaliou-se o escoamento do ar no interior do laboratório e obtiveram-se os perfis de temperatura e velocidade que se desenvolvem no laboratório. Os dois problemas abordados são caracterizados por um difusor e uma grelha de extracção, a duas dimensões, que se diferenciam pela direcção com que o ar é inserido no laboratório. Este estudo foi efectuado para duas condições de ar distintas (condições típicas de verão e de inverno) com o intuito de analisar a influência das condições de insuflação. Através dos perfis de temperatura e de velocidade dos regimes transientes obtém-se informação acerca do tempo que demora até se obterem condições de conforto térmico e da forma como se podem dispor os difusores e as grelhas de extracção.

Palavras Chave: Climatização, Ventilação forçada (mecânica), Navier-Stokes, Malha escalonada, SIMPLE.

Abstract

Computational fluid dynamics (CFD) emerges from the ventilation industry around the 70's and presents a wide use in different fields of engineering such as HVAC projects. This approach, when used in the early stage of the project or in high risk, solutions may result in an economic and energetic saving. When referring to HVAC, the foundation for CFD are the equations that describe the airflow, namely the Navier-Stokes equations, and the heat transfer, namely the energy equation. To solve these, numerical methods produce discrete results with respect to space and time.

This dissertation analyzes an incompressible flow, in order to analyze it, it is done the derivation and numerical resolution of the partial differential equations for the continuity, Navier-Stokes and energy. The numerical resolution was done in two phases: first it was developed a script in Matlab wich solves a laminar flow through the SIMPLE algorithm and second by means of commercial software OpenFOAM, it is intended to solve a turbulent flow by means of $k - \epsilon$ turbulence model and take into consideration the Boussinesq approximation. By setting this two phases it is possible to get an evaluation of the flow inside of a laboratory, allowing to determine the temperature and velocity profiles. The two studied cases are two dimensional. They both present one supply diffuser and one extraction grid and what declares them as different cases is the direction of the airflow that enters the laboratory. This study was made for two distinct conditions (typical conditions for Winter and Summer), attempting to analyze the influence of the supply conditions. Through the temperature and velocity profiles on the transient conditions its possible to know how long it takes to obtain thermal comfort conditions and it is possible to determine the most efficient locations to place the diffuser and the grid. In the Winter case, to get thermal comfort it takes about 60 minutes and in Summer case it takes about 4 minutes.

Keywords: HVAC, Mechanical ventilation, Fluid Mechanics, Navier-Stokes, Staggered grid, SIMPLE.

Índice

Índice	xvii
Lista de Figuras	xix
Lista de Tabelas	xxi
1 Introdução	1
1.1 Enquadramento	1
1.2 Motivação	3
1.3 Objectivos	4
1.4 Estrutura da dissertação	5
2 Mecânica dos Fluidos	7
2.1 Conceito de fluido	7
2.1.1 Da natureza discreta ao tratamento contínuo	8
2.1.2 As leis básicas da física	12
2.2 Modelos de escoamento	13
2.2.1 Volume de controlo finito	13
2.2.2 Elemento de fluido infinitesimal	14
2.3 Derivada material	15
2.4 Equação diferencial da Continuidade	20
2.5 Equação diferencial de conservação de quantidade de movimento	22
2.6 Equação diferencial de conservação da energia	27
2.7 Turbulência	34
3 Caso de Estudo	37
3.1 Formulação do problema	37
3.2 Equações que governam os fluidos	39
3.3 Método da Correção de Pressão - SIMPLE	44

3.4	Turbulência	56
3.5	Condições iniciais e de fronteira	58
4	Análise de resultados	67
4.1	Análise em condições de Inverno	72
4.1.1	Caso I - Inverno	72
4.1.2	Caso II - Inverno	75
4.2	Análise em condições de Verão	78
4.2.1	Caso I - Verão	78
4.2.2	Caso II - Verão	82
5	Conclusão e Perspectivas de Trabalho Futuro	87
	Referências	91
	Anexos	95
A	Cálculos	97
A.1	Algoritmos para os cálculos desenvolvido em Matlab®	97
B	Propriedades dos fluidos e Números adimensionais	109
B.1	Algoritmos para os cálculos desenvolvido em Matlab®	109
C	Programas desenvolvidos (Pré-processador, Solver, Pós-processador)	115
C.1	Algoritmos desenvolvidos em MatLab®	115
D	BlockMesh - Programa utilizado para criar malha no OpenFOAM	133
D.1	Algoritmos em C++	133

Lista de Figuras

2.1	Deflexão estática de um sólido e círculo de Mohr de um elemento sólido	8
2.2	São necessárias paredes para conter o fluido, círculo de Mohr de um elemento de fluido .	8
2.3	Força F de atracção e de repulsão entre duas moléculas contíguas, em função da distância d que separa os seus centros	9
2.4	Volume elementar numa região do fluido	11
2.5	Massa volúmica vs Tamanho do volume elementar	11
2.6	Modelos de escoamento. a) e b) abordagem Volume de controlo finito.	14
2.7	Modelos de escoamento. a) e b) abordagem do elemento de fluido infinitesimal.	15
2.8	Elemento de fluido em movimento num escoamento	16
2.9	Volume de controlo em movimento usado para a interpretação física da divergência da velocidade	19
2.10	Modelo utilizado para deduzir a equação de quantidade de movimento na componente x	23
2.11	Fluxos de energia associados a um elemento de fluido infinitesimal em movimento. . . .	28
3.1	Perfil de velocidades, tipo tabuleiro de xadrez	46
3.2	Distribuição de pressões, tipo tabuleiro de xadrez	46
3.3	Malha escalonada (Staggered Grid)	47
3.4	Malha escalonada computacional.	51
3.5	Condições de fronteira para a intensidade da velocidade a) caso I b) caso II, do perfil da sala.	59
3.6	Condições de fronteira da pressão.	60
3.7	Condições de fronteira de temperatura a) condições de Inverno b) condições de Verão. .	61
3.8	Condições de fronteira da difusividade térmica turbulenta.	62
3.9	Condições de fronteira da energia cinética turbulenta.	63
3.10	Condições de fronteira da taxa de dissipação turbulenta.	64
3.11	Condições de fronteira da viscosidade cinemática turbulenta.	65
4.1	Perfil de pressão no inverno sem grelhas, caso estacionário	68

4.2	Perfil de velocidades em MatLab, regime estacionário	69
4.3	Perfil de velocidades em OpenFOAM, regime estacionário	70
4.4	Casos de estudo em análise	71
4.5	Perfil de temperaturas do caso I em regime transiente para o tempo de 200s, 1060s, 2120s, 2446s, 2772s e 3100s	73
4.6	Temperatura no inverno ao longo da sala nas coordenadas teste para o caso I.	74
4.7	Temperatura ao longo do tempo em condições de Inverno para o caso I	74
4.8	Perfil de temperaturas do caso II em regime transiente para o tempo de 600s, 1200s, 1800s, 2400s, 3334s e 3600s	76
4.9	Temperatura no inverno ao longo da sala nas coordenadas teste para o caso II.	77
4.10	Temperatura ao longo do tempo em condições de Inverno para o caso II	78
4.11	Perfil de temperaturas do caso I em regime transiente para o tempo de 0s, 48s, 96s, 144s, 192s e 240s	79
4.12	Temperatura no verão ao longo da sala nas coordenadas teste para o caso I	80
4.13	Temperatura ao longo do tempo em condições de Verão para o caso I	81
4.14	Perfil de temperaturas do caso II em regime transiente para o tempo de 0s, 52s, 104s, 156s, 208s e 260s	83
4.15	Temperatura no verão ao longo da sala nas coordenadas teste para o caso II.	84
4.16	Temperatura ao longo do tempo em condições de Verão para o caso II	84

Lista de Tabelas

3.1	Constantes do modelo $k - \epsilon$	57
3.2	Condições de fronteira - Velocidade \mathbf{V}	60
3.3	Condições de fronteira - Pressão \mathbf{p}	61
3.4	Condições de fronteira - Temperatura \mathbf{T}	62
3.5	Condições de fronteira - Difusividade térmica turbulenta α_t	63
3.6	Condições de fronteira - Energia cinética turbulenta \mathbf{k}	64
3.7	Condições de fronteira - Taxa de dissipação da energia turbulenta \mathbf{k}	65
3.8	Condições de fronteira - Viscosidade cinemática turbulenta ν_t	66

Capítulo 1

Introdução

1.1 Enquadramento

A dinâmica dos fluidos computacional (DFC) foi introduzida na indústria da ventilação por volta dos anos 70 e desde essa altura que a sua utilização tem sido cada vez mais solicitada. A prova disso é que têm sido realizados estudos e produzidos artigos a uma grande escala de acordo com Nielsen [2015]. Portanto quando surge um sistema de distribuição de ar mais complexo, o uso desta ferramenta não é descurado.

De uma forma geral, o ar numa sala e os escoamentos são descritos física e matematicamente por um conjunto de equações diferenciais, que dão pelo nome de equações de Navier-Stokes. Estas podem ser resolvidas de forma analítica, para escoamentos ideais, ou de forma numérica, para os escoamentos mais generalizados como os de ventilação num determinado espaço. Esta resolução passa por reformular as equações diferenciais que governam os fluidos para se obter uma solução numérica aproximada, utilizando-se métodos de discretização que aproximam as equações diferenciais a um sistema de equações algébricas que pode ser resolvido computacionalmente. As aproximações são aplicadas a domínios espaciais e/ou temporais para que a resolução numérica produza resultados discretos localizados no espaço e no tempo, sendo este o conceito de dinâmica dos fluidos computacional, segundo Nielsen [2015]. De acordo com Anderson [1995], para se conhecerem as equações diferenciais que governam os fluidos é necessário recorrer às ciências físicas e matemáticas, pois são estas que fundamentam todo o processo de desenvolvimento da DFC. Para a leitura deste trabalho é importante que o leitor tenha conhecimentos matemáticos e físicos ao nível de uma licenciatura de matemática, física ou engenharia.

Este trabalho debruça-se sobre um tema actual e que está em desenvolvimento, cuja variedade de aplicações é tão grande como os estudos em mecânica dos fluidos, sendo impossível abranger toda a dinâmica dos fluidos computacional num só trabalho. Este é um tema que tem sido objecto de muitos estudos cuja evolução tem sido muito acentuada.

A equação da continuidade e a de Navier-Stokes representam quatro equações diferenciais acopladas, que podem descrever um escoamento isotérmico numa sala. No entanto, para analisar um escoamento não isotérmico é necessário aumentar o número de equações através da utilização da equação da energia. Considerando a não dependência do tempo, a bidimensionalidade e/ou simetria do problema, estas equações podem ser simplificadas, embora deva considerar-se que o movimento do ar é tridimensional e dependente do tempo. Outra consideração que se deve ter em conta é que um escoamento numa sala normalmente é turbulento e a forma mais comum de caracterizar este tipo de escoamento é através do modelo $k - \epsilon$, que descreve a turbulência com um conjunto de equações, sendo k a energia cinética turbulenta e ϵ a dissipação de energia turbulenta, segundo Nielsen [2015].

Nos dias que correm, por um lado é possível obter projectos computacionais simples para sistemas de tubagens que resolvem problemas num computador pessoal, em pouco tempo, por outro lado existem códigos mais complicados que podem necessitar de horas de computação em grandes computadores e muito caros. De uma forma ou de outra é uma ferramenta com muitas vantagens mas que exige bastante consciência crítica por parte do utilizador, pois as soluções não são exactas, são apenas aproximações.

Este tema está cada vez mais presente na engenharia e a sua aplicação em áreas como a climatização pode levar a grandes poupanças em equipamentos, custos energéticos e redução da poluição ambiental.

1.2 Motivação

Hoje em dia a climatização existe em todo o lado, e a maior parte das pessoas não se dá conta de todo o projecto e esforço envolvido para garantir determinadas condições de conforto térmico, o que é bom sinal, pois significa que o projecto correu bem e tudo funciona como esperado. Estes projectos de climatização são realizados por engenheiros, que têm como objectivo proporcionar o conforto térmico e projectos competitivos tanto a nível económico como energético.

O projecto tem como base um estudo a vários níveis, dos quais fazem parte a matemática, a física (termodinâmica e a mecânica dos fluidos). A aprendizagem e conhecimento da forma como os modelos matemáticos e físicos se desenvolvem e se comportam quando aplicados a problemas de climatização, bem como a compreensão de qual a melhor forma de proporcionar o conforto térmico dentro de um espaço onde se encontram seres humanos, justificam a minha motivação para desenvolver esta dissertação.

Usualmente, os escoamentos são aplicados apenas numa direcção por questões de conveniência, quando os valores correspondentes às outras direcções são tão pequenos que não influenciam os resultados finais, ou mesmo por simplificação. Contudo, é importante salientar que se perde muita informação quando se analisa um espaço mais amplo, como uma sala em todas as direcções têm um peso importante e devem ser contabilizadas. Ao se contabilizarem todas as direcções, o desenvolvimento das equações diferenciais parciais será mais complexo e exige o uso de técnicas computacionais e aplicação de conceitos matemáticos deveras interessantes.

Toda esta necessidade de compreender e inserir todos os conhecimentos obtidos ao longo da minha aprendizagem no curso de engenharia mecânica do ISEL (Licenciatura e Mestrado), tornaram-se numa curiosidade e vontade de querer ir um pouco mais longe. Em conjunto com toda a literatura referente ao caso em estudo, o meu conhecimento e de todos os que me auxiliam, pretendo deixar uma ferramenta para os alunos do ISEL e todos os interessados poderem estudar e completar.

1.3 Objectivos

Esta dissertação visa cumprir os objectivos nas seguintes partes:

1^a Parte

- Deduzir as equações diferenciais parciais que governam o escoamento, a partir das leis básicas da física:
 - * Equação de Conservação de Massa;
 - * Equação diferencial de Conservação de Quantidade de Movimento;
 - * Equação diferencial de Conservação da Energia.

2^a Parte

- Fazer levantamento das medidas do laboratório, dos difusores e dos extractores, para definir as geometrias em estudo;
- Simplificar as equações que governam os fluidos para o regime incompressível;
- Criar malha computacional;
- Discretizar as equações que governam os fluidos de forma explícita;
- Desenvolver o algoritmo SIMPLE;
- Definir as condições iniciais e as de fronteira para os diferentes casos de estudo.

3^a Parte

- Criar/Utilizar um *solver* para resolver o algoritmo SIMPLE com as equações que governam os fluidos;
- Criar/Utilizar um pós-processador para observar os resultados de forma gráfica.

1.4 Estrutura da dissertação

A dissertação consiste em 5 capítulos principais. Nesta fase, será apresentada uma breve descrição de cada um dos capítulos.

O Capítulo 1 é uma introdução do tema em estudo. Neste, compreende-se o significado do tema e a motivação do autor. São também expostos os objectivos a desenvolver.

O Capítulo 2 procura explicar de forma mais profunda a introdução e permitir ao leitor compreender os conceitos abordados nos capítulos 3 e 4. É uma exposição do tema que apresenta os conceitos físicos e matemáticos.

O Capítulo 3 explica como se aplicam os conhecimentos adquiridos no capítulo 2, através do desenvolvimento do caso de estudo, simplificam-se as equações que governam os fluidos e explicam-se os conceitos essenciais para se poder implementar um programa e resolver as equações diferenciais parciais.

O Capítulo 4 demonstra os resultados obtidos após aplicação dos conhecimentos adquiridos no caso de estudo, através de imagens retiradas do software de pós-processamento. São realizados comentários e observações acerca de cada imagem e o que estas representam.

O Capítulo 5 é a conclusão do trabalho, a reflexão dos resultados que se obtiveram no trabalho face ao que existe e a apresentação das perspectivas de trabalho futuro.

Capítulo 2

Mecânica dos Fluidos

2.1 Conceito de fluido

A Mecânica dos fluidos é o estudo dos fluidos em movimento (Dinâmica dos fluidos) ou em descanso (Estática dos fluidos). Os gases e os líquidos são classificados como fluidos e a sua aplicação na engenharia é vasta. Contudo, o estudo do escoamento de um fluido é um compromisso judicioso entre a teoria e a experimentação.

O escoamento de fluidos é um ramo da mecânica, que satisfaz um conjunto de leis básicas bem fundamentadas. No entanto, a teoria pode ser frustrante, pois aplica-se a situações maioritariamente ideais, as quais podem ser inválidas em problemas práticos. Assim, os dois maiores obstáculos para se encontrar uma teoria válida são a geometria e a viscosidade.

A viscosidade é um obstáculo para se obter uma teoria válida, contudo a sua acção pode ser ignorada em certas análises ideais. Por um lado, a viscosidade aumenta a dificuldade das equações básicas. No entanto a aproximação da camada limite descoberta por Ludwig Prandtl em 1904, segundo White [2003], simplificou a análise dos escoamentos viscosos. Por outro, a viscosidade tem um efeito destabilizante em todos os fluidos, originando pequenas velocidades a um fenómeno desordeiro e aleatório, denominado por turbulência.

A teoria fenomenológica dos escoamentos turbulentos é "bruta" e muito sustentada a nível experimental, no entanto pode ser muito útil como uma estimativa a nível de engenharia. Deve-se ter em conta que a teoria e a experimentação devem andar de mãos dadas, em todos os estudos de mecânica dos fluidos.

Do ponto de vista da mecânica dos fluidos, a matéria encontra-se em dois estados, fluido ou sólido. Por observação, a diferença entre os dois é óbvia, todavia explicar por palavras próprias não é tão

óbvio. De acordo com White [2003], tecnicamente, o que distingue os dois estados é a reacção que estes apresentam quando submetidos a tensões de corte ou tangenciais. Um sólido é capaz de resistir a tensões de corte através de uma deflecção estática, enquanto que um fluido não. Qualquer tensão de corte aplicada a um fluido, por mais pequena que seja, resulta num deslocamento e deformação contínua enquanto a tensão de corte for aplicada.

White [2003] afirma que uma consequência desta observação, é que um fluido em repouso deve estar na condição de tensão hidrostática, ou seja, não existe qualquer tensão de corte aplicada. Nesta condição de acordo com as figuras 2.1 e 2.2 o círculo de Mohr da tensão é reduzido a um ponto, onde não existe qualquer tensão de corte em qualquer plano que atravesse o elemento.

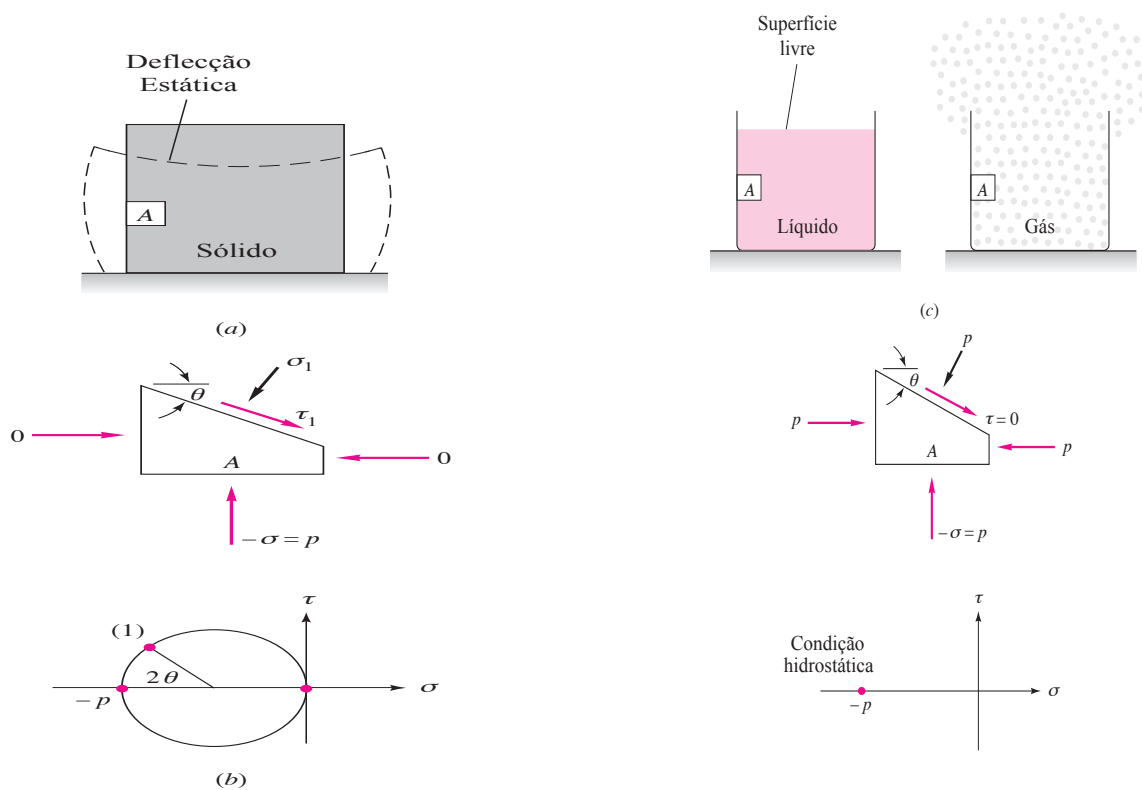


Figura 2.1: Deflecção estática de um sólido e círculo de Mohr de um elemento sólido, adaptado de White [2003].

Figura 2.2: São necessárias paredes para conter o fluido, círculo de Mohr de um elemento de fluido, adaptado de White [2003].

2.1.1 Da natureza discreta ao tratamento contínuo

As propriedades de uma substância são a manifestação directa da sua própria estrutura molecular. Cada molécula simples origina á sua volta um campo de forças, resultando, na ausência de reacções químicas, um efeito de atracção ou de repulsão entre duas moléculas contíguas, consoante a distância d que as separa, como se pode observar na figura 2.3. Daqui resulta uma distância d_0 , típica de equilíbrio estável entre moléculas vizinhas (d_0 é da ordem de 10^{-8} cm, para a maioria das moléculas que não formem entre si qualquer ligação química).

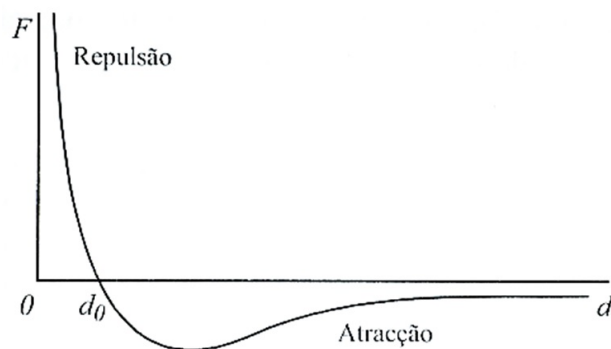


Figura 2.3: Força F de atracção e de repulsão entre duas moléculas contíguas, em função da distância d que separa os seus centros, adaptado de L. A. Oliveira [2012].

Entretanto, as moléculas encontram-se em estado permanente de agitação em torno das suas posições médias de equilíbrio estável, sendo a energia cinética desta oscilação tanto maior quanto for a energia térmica fornecida.

De acordo com L. A. Oliveira [2012], o estado físico de uma substância encontra-se intimamente relacionado com a distância média, d , entre posições médias de equilíbrio estável de moléculas adjacentes, bem como com o correspondente livre percurso médio, Δd (distância percorrida pelas moléculas, entre colisões).

Assim:

- O estado sólido caracteriza-se por uma distância média, d , da ordem de d_0 . Cada partícula está fortemente sujeita ao campo de forças das partículas vizinhas, daí resultando uma estrutura coesa e regular, com forma própria;
- No estado líquido, a distância média, d , e o livre percurso médio são ambos da ordem de d_0 . A mobilidade é, portanto, maior do que no estado sólido. O líquido toma a forma do recipiente que o contém, mas ocupa apenas uma parte dele, isto é, forma uma superfície livre. Dado tratar-se de uma estrutura molecular relativamente compacta, apresenta uma forte resistência à compressão;
- O estado gasoso distingue-se dos anteriores pelo facto de tanto a distância média entre partículas como o livre percurso médio serem muito superiores a d_0 . A sua resistência à compressão é assim significativamente inferior. Como acontece num líquido, um gás adapta-se a qualquer forma de recipiente que o contenha. Porém, a coesão entre moléculas não é suficiente para a formação de superfície livre, expandindo-se o gás livremente dentro do espaço que lhe for acessível.

Assim, poder-se-à dizer que os fluidos dividem-se em duas classes: os líquidos e os gasosos, que se distinguem um do outro pelas forças de coesão. Os líquidos, compostos por moléculas com forças coesivas elevadas têm tendência para reter o volume e formar uma superfície livre num campo gravitacional. Os gases, compostos por moléculas mais afastadas umas das outras e com forças coesivas inferiores quase desprezáveis, têm a tendência para se expandir até encontrar paredes que os limitem. Assim, de acordo com L. A. Oliveira [2012], o volume que um gás ocupa não é bem definido e a atmosfera criada por este é essencialmente hidrostática. Ou seja, um gás não pode formar uma superfície livre e portanto o seu escoamento raramente tem em conta os efeitos gravitacionais.

De acordo com a Hipótese do *Continuum*, os fluidos são moléculas agregadas, muito espaçadas no caso dos gases e muito próximas no caso dos líquidos. A distância entre as moléculas é muito maior em comparação com o seu diâmetro e estas não estão fixas como numa treliça, movimentam-se livremente umas em relação às outras. Portanto, a massa volúmica, não tem um significado preciso, pois o número de moléculas que ocupam um determinado volume varia continuamente. De acordo com White [2003], este efeito torna-se pouco importante se a unidade de volume considerada for grande comparada com o espaço entre moléculas ao cubo quando o número de moléculas dentro do volume se mantém praticamente constante, apesar da enorme troca de partículas através das fronteiras. Se a unidade de volume for muito grande pode existir uma variação notória no agregado de moléculas.

Até um determinado ponto é possível usar as leis do movimento para descrever o que acontece a cada molécula. Este assunto é estudado pela teoria cinética e a física estatística, de acordo com Graebel [2001]. O autor L. A. Oliveira [2012] afirma que, mesmo que se opte por realizar o estudo de um simples escoamento, tornar-se-ia muito complexo realizar o cálculo, assim como iriam surgir dois inconvenientes, decisivos para um número considerável de circunstâncias práticas:

- Do ponto de vista teórico, a utilização do cálculo diferencial seria liminarmente excluída, enquanto instrumento de análise. De facto, o cálculo diferencial pressupõe que, em cada ponto e instante, as propriedades em estudo sofram variações de modo contínuo, condição essa que, a ser satisfeita, permite o recurso à noção de derivada (espacial ou temporal). Ora, tal não pode conceber-se quando a própria estrutura a que respeitam as propriedades em causa é constituída de modo discreto;
- Numa óptica experimental, é óbvio que os instrumentos a que tipicamente se recorre na análise laboratorial em mecânica dos fluidos, não oferecem resolução espacial nem temporal que permite descer à referida escala microscópica.

Assim sendo, é necessário recorrer a outro tipo de escala, a uma escala macroscópica. A figura 2.5 representa uma região de fluido com um determinado elemento de volume, cuja massa volúmica é calculada a partir da massa molecular, ∂m , dentro de um determinado volume ∂V . Na figura 2.4 observa-se a massa volúmica em função do tamanho da unidade de volume. De acordo com a equação 2.1, existe um volume limite ∂V^* , que deve ser inferior para determinadas variações moleculares e superior a determinadas variações de agregamento molecular, segundo White [2003]. A massa volúmica, ρ , de um fluido define-se por:

$$\rho = \lim_{\partial V \rightarrow \partial V^*} \frac{\partial m}{\partial V} \quad (2.1)$$

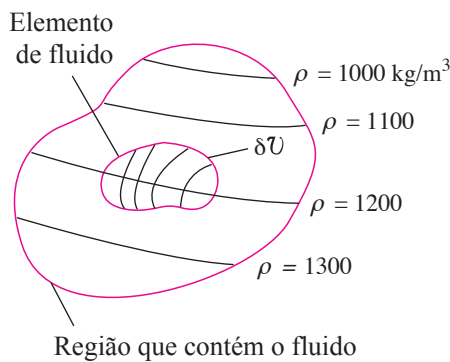


Figura 2.4: Volume elementar numa região do fluido, adaptado de White [2003].

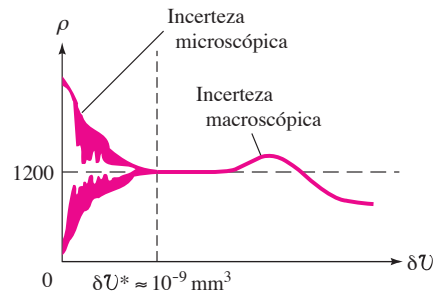


Figura 2.5: Massa volúmica [kg/m^3] em função do tamanho do volume elementar, adaptado de White [2003].

O limite de volume ∂V^* é cerca de 10^{-9} mm^3 para líquidos e gases à pressão atmosférica. Por exemplo, 10^{-9} mm^3 de ar em condições normalizadas, contém 3×10^7 moléculas, o que é suficiente para definir aproximadamente uma massa volúmica constante de acordo com a Eq. 2.1 e segundo Graebel [2001].

A título ilustrativo, notar-se-á que raramente são significativas as variações das propriedades físicas e dinâmicas de um fluido ao longo de uma distância da ordem de 10^{-3} mm . Logo, um instrumento de medida com poder de resolução volúmica da ordem de $(10^{-3})^3 \text{ mm}^3 = 10^{-9} \text{ mm}^3$ fornece, de facto, uma informação de carácter local, segundo White [2003]. Ainda assim, este pequeno volume, se for preenchido por ar em condições normais de pressão e temperatura, contém cerca de 3×10^7 moléculas no seu interior. Por outras palavras, a média do valor de uma propriedade, tomada entre todas as moléculas contidas no interior de um volume de 10^{-9} mm^3 , será já, sem dúvida, independente do número das referidas moléculas. As propriedades variam, assim, regularmente (continuamente) de elemento de volume para elemento de volume, em ambos os domínios espacial e temporal. A substância, essencialmente discreta, passa, deste modo, a ser entendida como um meio contínuo, segundo L. A. Oliveira [2012].

A maior parte dos problemas de engenharia lida com dimensões físicas muito maiores do que este limite de volume. Então, a massa volúmica é essencialmente uma função escalar e as propriedades do fluido variam continuamente no espaço, como se vê na figura 2.4.

De acordo com L. A. Oliveira [2012], a 'Hipótese do *continuum*' viabiliza, portanto, o recurso ao conceito de derivada, obviamente fundamental para qualquer formulação matemática. Por sua vez, as informações fornecidas por sondas laboratoriais passarão a ser vistas como "médias pontuais", isto é, valores médios respeitantes ao conjunto das partículas contidas no volume elementar a que chamamos de elemento de volume, e que será, dentro desta escala macroscópica referida, tão pequeno quanto o permita o poder de resolução do aparelho usado.

2.1.2 As leis básicas da física

Para descrever o comportamento de um fluido sob condições específicas e assim aceder ao efeito por ele exercido sobre as fronteiras que o restringem, é necessário o conhecimento, em todo o domínio, da distribuição de um certo número de variáveis dependentes.

- Tipicamente, as incógnitas envolvidas neste processo são cinco no seu todo:
 - Três componentes do vector velocidade;
 - Duas propriedades termodinâmicas.

- Para este fim, existem três *leis básicas*:
 - Lei de conservação da massa (equação de continuidade);
 - Lei de conservação da quantidade de movimento (segunda lei de Newton);
 - Lei de conservação da energia (primeira lei da termodinâmica).

A segunda lei de Newton relaciona a aceleração, \vec{a} , produzida sobre um corpo de massa m por uma força \vec{F} . A equação 2.2, trata-se de uma equação vectorial, que corresponde, portanto, a três equações escalares nas coordenadas x , y e z .

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (2.2)$$

Resumindo, encontram-se disponíveis cinco equações para determinar cinco incógnitas. Se, além das cinco variáveis referidas, for necessário o conhecimento de uma terceira propriedade termodinâmica, haverá que recorrer à equação de estado do fluido, obtendo-se, assim, um problema de seis equações a seis incógnitas, de acordo com L. A. Oliveira [2012] e Anderson [1995].

2.2 Modelos de escoamento

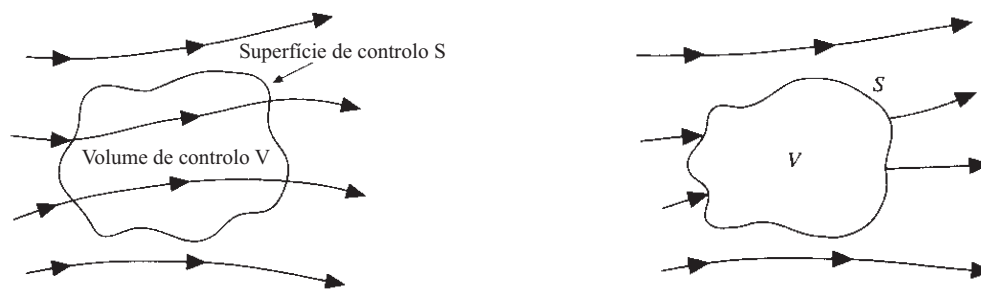
Os princípios físicos descritos no capítulo 2.1.2, devem ser aplicados a modelos de escoamento. Definir um modelo que se adequa ao escoamento não é trivial. No caso de um sólido é simples definir a velocidade do mesmo num movimento de translação, visto que a velocidade de cada parte do corpo é a mesma. Por outro lado, num fluido em movimento a velocidade pode ser diferente de um local para o outro, segundo Anderson [1995]. A título de exemplo, considere-se um fluido de temperatura não uniforme e em regime transiente (dependente do tempo). A distribuição da temperatura T no fluido será, uma função do espaço, localizado em relação a um referencial cartesiano de coordenadas (x, y, z) e do tempo, t : $T = T(x, y, z, t)$. Tendo em conta o exemplo, evidenciam-se dois pontos de vista, o de Euler e o de Lagrange. Ambas as explicações de acordo com Graebel [2001], Tritton [1988] e L. A. Oliveira [2012].

Na descrição de Euler, o observador 'coloca-se' num ponto fixo (x, y, z) , onde colhe informação sobre o escoamento. No entanto, se desejar aprofundar o conhecimento da distribuição de T , deverá posicionar-se sucessivamente em vários outros pontos fixos do domínio, de onde 'verá' o escoamento a evoluir.

Na descrição de Lagrange o observador acompanha o movimento de uma dada partícula de fluido, estudando a sua variação de temperatura ao longo do tempo, enquanto aquela percorre a sua trajectória: $T = T(t)$. Para completar a informação, o observador seguirá sucessivamente várias outras partículas na descrição das suas trajectórias. Nesta caso a dependência em relação ao espaço desapareceu, já que o referencial passou a ser a própria partícula, segundo L. A. Oliveira [2012]

2.2.1 Volume de controlo finito

Considerando um campo de escoamento, como o representado pelas linhas de corrente na figura 2.6; o volume fechado desenhado dentro dessa região finita do escoamento define o volume de controlo, V , já a superfície fechada que limita esse volume define-se de superfície de controlo, S . O volume de controlo pode ser fixo no espaço, com o fluido a atravessá-lo, como se pode ver na figura 2.6a. Alternativamente, o volume de controlo, V , pode mover-se com o fluido, tal que as mesmas partículas do fluido estejam sempre dentro do mesmo, como se pode ver na figura 2.6b. Em ambos os casos, o volume de controlo é uma região finita do escoamento, razoavelmente grande. As leis/princípios fundamentais da física são aplicados ao volume de controlo dentro do fluido e ao fluido que atravessa a sua superfície (se o volume de controlo for fixo no espaço). Portanto, segundo Anderson [1995], em vez de se olhar para todo o campo de escoamento de uma vez, com o modelo de volume de controlo limita-se a direccionar a atenção para apenas o fluido na região finita do próprio volume.



(a) Volume de controle finito fixo no espaço. (b) Volume de controle finito que se move com o fluido.

Figura 2.6: Modelos de escoamento. a) e b), adaptado de Anderson [1995].

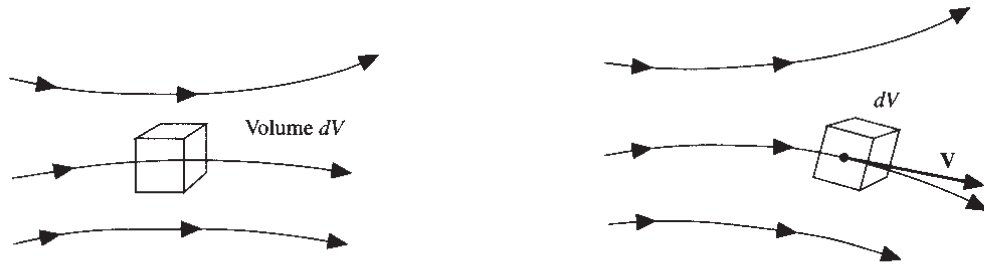
As equações dos fluidos directamente obtidas pela aplicação dos princípios físicos fundamentais para um volume de controle finito estão na forma integral. Esta forma integral das equações que governam os fluidos pode ser manipulada indirectamente para se obterem as equações diferenciais parciais.

As equações obtidas a partir do volume de controle fixo no espaço (figura 2.6a), tanto na forma integral como diferencial parcial, são denominadas pela forma conservativa das equações que governam os fluidos. As equações obtidas a partir do volume de controle que se movimentam com o fluido (figura 2.6b), tanto na forma integral como diferencial parcial, são denominadas pela forma não conservativa das equações que governam os fluidos.

2.2.2 Elemento de fluido infinitesimal

Considerando um campo de escoamento como o representado pelas linhas de corrente, na figura 2.7 e imaginando um elemento de fluido infinitesimal no escoamento com um volume diferencial dV , o elemento de fluido é infinitesimal no mesmo sentido do cálculo diferencial. Contudo, segundo Anderson [1995], este é grande o suficiente para conter um grande número de moléculas de forma a que se possa considerar válida a hipótese do *Continuum*.

O elemento de fluido pode ser fixo no espaço com o fluido a atravessá-lo, como se pode ver na figura 2.7a. O elemento de fluido infinitesimal pode movimentar-se no espaço, ao longo da linha de corrente, com velocidade \mathbf{V} igual à velocidade do escoamento local em cada ponto, como se pode ver na figura 2.6b. Portanto, em vez de se olhar para todo o campo de escoamento de uma vez, os princípios físicos fundamentais são aplicados apenas ao próprio elemento de fluido infinitesimal. Esta aplicação remete directamente para as equações fundamentais na forma diferencial parcial, de acordo com Anderson [1995].



(a) Elemento de fluido infinitesimal, fixo no espaço. (b) Elemento de fluido infinitesimal que se move ao longo da linha de corrente.

Figura 2.7: Modelos de escoamento. a) e b), adaptado de Anderson [1995].

As equações diferenciais parciais, particularmente obtidas directamente a partir do elemento do fluido fixo no espaço (ver figura 2.6a), são denominadas pela forma conservativa das equações que governam os fluidos. As equações diferenciais parciais obtidas directamente a partir do elemento de fluido que se movimenta com o fluido (ver figura 2.6b), são denominadas pela forma não conservativa das equações que governam os fluidos.

2.3 Derivada material

Antes de se deduzirem as equações que governam os fluidos, é necessário introduzir a notação de derivada material ou substancial, de acordo com Tritton [1988], Anderson [1995], Acheson [2003] e L. A. Oliveira [2012].

A derivada material será deduzida à custa do modelo de escoamento de um elemento de fluido infinitesimal a movimentar-se com o fluido, conforme explicado na secção 2.1, como se pode observar na figura 2.7b. Na figura 2.8, pode observar-se com mais detalhe o movimento do elemento de fluido. Neste caso, o fluido movimenta-se num referencial cartesiano. Nas coordenadas cartesianas tridimensionais existe uma base, conjunto de vectores linearmente independentes que geram um espaço, composta por vectores unitários, vector espacial cujo comprimento é 1. Assim os vectores unitários ao longo dos eixos x , y e z são \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} , respectivamente.

O vector velocidade é dado pela equação 2.3.

$$\mathbf{V} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k} \quad (2.3)$$

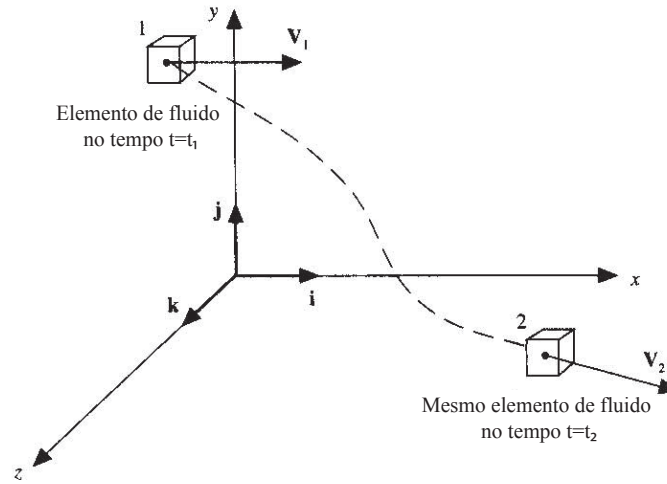


Figura 2.8: Elemento de fluido em movimento num escoamento, adaptado de Anderson [1995].

Onde as componentes x , y e z da velocidade são, respectivamente, dadas por,

$$u = u(x, y, z, t) \quad (2.4)$$

$$v = v(x, y, z, t) \quad (2.5)$$

$$w = w(x, y, z, t) \quad (2.6)$$

Considerando um escoamento transiente, onde u , v e w são funções do espaço e do tempo. Assim, a derivada material aplica-se a qualquer variável do campo de escoamento, pressão P , temperatura T , etc. Para uma variável de escoamento qualquer, dada por,

$$F = F(x, y, z, t) \quad (2.7)$$

No tempo t_1 o elemento de fluido localizado no ponto 1 na figura 2.8 é:

$$F_1 = F(x_1, y_1, z_1, t_1)$$

Passado algum tempo, t_2 , o elemento de fluido moveu-se para o ponto 2 na figura 2.8, onde as propriedades do elemento de fluido são (ver figura 2.8):

$$F_2 = F(x_2, y_2, z_2, t_2)$$

Como $F = F(x, y, z, t)$, é possível expandir uma série de Taylor no ponto 1 da seguinte forma,

$$F_2 = F_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_1 (x_2 - x_1) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_1 (y_2 - y_1) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_1 (z_2 - z_1) + \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_1 (t_2 - t_1) \\ + (\text{termos de ordem superior})$$

Dividindo por $t_2 - t_1$ e ignorando os termos de ordem superior obtém-se,

$$\frac{F_2 - F_1}{t_2 - t_1} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_1 \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_1 \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_1 \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1} + \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_1 \quad (2.8)$$

Ao se observar o lado esquerdo da equação 2.8, conclui-se que o significado físico do termo é a taxa de variação média de F , no tempo conforme esta se move do ponto 1 para o ponto 2. Assim, no limite, quando t_2 se aproxima de t_1 este termo é idêntico a,

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{F_2 - F_1}{t_2 - t_1} \equiv \frac{DF}{Dt}$$

Observando o lado direito da equação 2.8, ainda se pode concluir que,

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \equiv u \\ \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} \equiv v \\ \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1} \equiv w$$

então, no limite quando t_2 tende para t_1 a equação 2.8 toma a seguinte forma,

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z} \quad (2.9)$$

Observando a equação 2.9 obtém-se uma expressão para a derivada material em coordenadas cartesianas. Introduzindo o gradiente,

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.10)$$

a derivada material, é representada pela equação 2.11, sendo válida para qualquer sistema de coordenadas:

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)F \quad (2.11)$$

De acordo com L. A. Oliveira [2012], o segundo membro da expressão 2.11, válida, num ponto (x, y, z) da trajectória e num instante t do intervalo de tempo em que essa trajectória é descrita, deve ser entendido como composto por dois tipos de derivadas:

- Derivada local (Primeiro termo): A propriedade pode variar ao longo do tempo, num determinado ponto, ainda que não haja escoamento ($u = v = w = 0$). Basta, para tal, que o regime seja transiente ($\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$);
- Derivada advectiva (Segundo termo): A propriedade pode variar de ponto para ponto, num determinado instante, ainda que o regime seja permanente ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$). Isso ocorrerá se a sua distribuição espacial não for uniforme e se, além disso, existir um escoamento de velocidade $\vec{V} \neq 0$ que transporte (que 'advecete') o fluido de um ponto para o outro. Esta derivada é também, de forma menos precisa mas muito frequente na literatura, designada por 'convectiva'.

De notar que D/Dt , ao seguir a evolução com o tempo a propriedade de uma dada partícula, acompanhando a sua trajectória, está associada à descrição de Lagrange. Portanto este termo, é vocacionado para exprimir as leis da Mecânica das Partículas (claramente 'Lagrangianas', já que as partículas sólidas são seguidas nas suas trajectórias, como acontece na balística). A descrição de Euler, é frequentemente adoptada em mecânica dos fluidos. De facto, o segundo membro da equação 2.11 é claramente 'Euleriano', de acordo com L. A. Oliveira [2012].

Na secção 2.3, definiu-se o significado físico da derivada material e as equações que governam os fluidos são compostas pela derivada material, como poderá ser visto nos capítulos 2.4, 2.5 e 2.6. Na dedução da derivada material surge um termo, na equação 2.10, denominado por divergência da velocidade, que por sua vez também é recorrente nas equações que governam os fluidos. Como tal, é importante ter em conta o seu significado físico.

A figura 2.6b representa um volume de controlo que acompanha o escoamento, e as partículas de fluido que o constituem são sempre as mesmas, conseqüentemente a sua massa é constante e invariável no tempo. Contudo o volume de controlo V e a superfície de controlo S variam com o tempo, conforme o volume de controlo se movimenta para diferentes regiões do escoamento onde existem diferentes valores de massa volúmica (ρ). Isto é, de acordo com Anderson [1995], este volume de controlo de massa fixa está em constante variação tanto de volume como de forma e isto apenas depende das características do escoamento.

De acordo com o volume de controlo num determinado instante no tempo, da figura 2.9, considera-se um elemento infinitesimal dS movendo-se com uma velocidade local \mathbf{V} . A variação do volume, (ΔV), devido ao movimento de dS durante um incremento de tempo Δt é, conforme se pode ver na figura 2.9, igual ao volume do cilindro. Ou seja, a área da base dada por dS e altura por $(\mathbf{V}\Delta t) \cdot \mathbf{n}$, onde \mathbf{n} é o vector unitário normal à superfície dS . Assim, a equação 2.12 representa a variação do

volume e tem o seguinte aspecto,

$$\Delta V = [(\mathbf{V}\Delta t) \cdot \mathbf{n}]dS = (\mathbf{V}\Delta t) \cdot \mathbf{dS} \quad (2.12)$$

o vector \mathbf{dS} é definido como $\mathbf{dS} \equiv \mathbf{n}dS$. Ao longo do tempo Δt , a variação total de volume de todo o volume do controlo é igual ao somatório da equação 2.12 sobre toda a superfície de controlo. Assim, no limite quando $dS \rightarrow 0$, o somatório torna-se o integral de superfície,

$$\iint_S (\mathbf{V}\Delta t) \cdot \mathbf{dS} \quad (2.13)$$

Se o integral for dividido por Δt , o resultado físico será a taxa de variação do volume de controlo, dada pela equação 2.12.

$$\frac{DV}{Dt} = \frac{1}{\Delta t} \iint_S (\mathbf{V}\Delta t) \cdot \mathbf{dS} = \iint_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{dS} \quad (2.14)$$

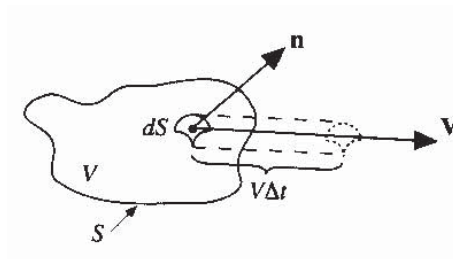


Figura 2.9: Volume de controlo em movimento usado para a interpretação física da divergência da velocidade, adaptado de Anderson [1995].

Note-se que o lado esquerdo da equação 2.14 representa a derivada material de V , pois estamos a lidar com a taxa de variação do volume de controlo, enquanto o volume se movimenta com o escoamento (figura 2.6b). Aplicando o Teorema da Divergência de cálculo vectorial, segundo Hildebrand [1962], ao lado direito da equação obtém-se,

$$\frac{DV}{Dt} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{V}dV \quad (2.15)$$

Imaginando que o volume de controlo, V , na figura 2.9 é encolhido de forma a que o volume fique muito pequeno, tornando-se num elemento de fluido infinitesimal, δV , em movimento como o da figura 2.7b. Desta forma substitui-se V por δV na equação 2.15, e esta pode ser re escrita da forma apresentada na equação 2.16,

$$\frac{D(\delta V)}{Dt} = \iiint_{\delta V} \nabla \cdot \mathbf{V}dV \quad (2.16)$$

Assumindo que δV é pequeno o suficiente, tal que $\nabla \cdot \mathbf{V}$ tenha essencialmente o mesmo valor ao longo de δV , então o integral na equação 2.16 no limite quando δV tende para zero é dado por $(\nabla \cdot \mathbf{V})\delta V$. Então,

$$\frac{D(\delta V)}{Dt} = (\nabla \cdot \mathbf{V})\delta V$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{\delta V} \frac{\Delta(\delta V)}{\Delta t} \quad (2.17)$$

Examinando a equação 2.17, do lado esquerdo tem-se a divergência da velocidade e do lado direito o seu significado físico, ou seja, a taxa de variação de volume de um elemento de fluido em movimento por unidade de volume segundo Anderson [1995].

Estas são as ferramentas mais utilizadas a nível da manipulação algébrica das equações diferenciais parciais. Com estas ferramentas matemáticas presentes deduzem-se, na forma diferencial, as três leis básicas enunciadas na secção 2.1.2.

2.4 Equação diferencial da Continuidade

A designação de equação da continuidade está ligada ao facto de apenas encerrar como condição de validade que tanto a massa volúmica, ρ , como a velocidade, \vec{V} , sejam funções contínuas do espaço e do tempo. O respeito desta condição resulta, naturalmente, assegurado ao adoptar-se aqui a hipótese do *Continuum* como ponto de partida para qualquer análise, segundo L. A. Oliveira [2012].

Para se deduzir a equação da continuidade utiliza-se o princípio fundamental da física, a conservação da massa e o modelo de escoamento utilizado pode ser um qualquer, visto que através de manipulação algébrica, se consegue obter a mesma equação. O modelo utilizado para a dedução da equação da continuidade será o de um elemento finito que se move com o escoamento (ver figura 2.7b), Este modelo, geralmente, é o mais escolhido para se deduzirem as equações diferenciais, segundo Anderson [1995] e L. A. Oliveira [2012].

Sendo a massa fixa e o volume variável deste elemento de fluido ∂m e ∂V , respectivamente. Temos que,

$$\partial m = \rho \partial V \quad (2.18)$$

Como se conserva a massa, pode-se afirmar que a taxa de variação da massa do elemento de fluido é zero, conforme o elemento se move com o escoamento. À luz da derivada material, vista no capítulo 2.3, tem-se,

$$\frac{D(\partial m)}{Dt} = 0 \quad (2.19)$$

Combinando as equações 2.18 e 2.19, obtém-se

$$\frac{D(\rho\partial V)}{Dt} = \partial V \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{D(\partial V)}{Dt} = 0$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \left[\frac{1}{\partial V} \frac{D(\partial V)}{Dt} \right] = 0 \quad (2.20)$$

O termo dentro de parêntesis na equação 2.20 tem o significado físico da divergência da velocidade, explicado na secção 2.3. De acordo com a equação 2.17 e substituindo na equação 2.20 obtém-se a equação 2.21,

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (2.21)$$

De acordo com Anderson [1995], a equação 2.21 é uma equação diferencial parcial e representa a equação da continuidade, tendo esta sido deduzida com base no pequeno elemento infinitesimal de fluido que se move com o escoamento. O facto de ser um elemento infinitesimal justifica o motivo pelo qual se obteve a equação diferencial parcial de forma directa. E o facto do elemento se movimentar com o fluido, através da descrição de Lagrange, conduz a uma forma diferencial específica dada pela equação 2.21, que se denomina de forma não conservativa, como foi explicado no capítulo 2.1. Contudo, a equação 2.21 na forma não conservativa pode ser transformada para a sua forma conservativa, através de alguma manipulação algébrica. Portanto, e de acordo com a derivada material (ver secção 2.3) a equação 2.21 pode adquirir a forma da equação 2.22,

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla\rho$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla\rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (2.22)$$

A forma como se encontra a equação 2.22 não é a mais simplificada. Assim, segundo Hildebrand [1962], considerando a divergência do produto de um escalar vezes um vector (ver equação 2.23),

$$\nabla \cdot (\rho\mathbf{V}) \equiv (\rho\nabla \cdot \mathbf{V}) + (\mathbf{V} \cdot \nabla\rho) \quad (2.23)$$

Isto é, a divergência de um escalar vezes um vector, é congruente ao escalar vezes a divergência do vector mais o produto interno do vector pelo gradiente do escalar. Combinando a equação 2.23 com a 2.22 obtém-se a equação 2.24,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{V}) = 0 \quad (2.24)$$

Assim a equação 2.24 é uma equação diferencial parcial da equação da continuidade na forma conservativa. Embora a equação 2.18 tenha sido obtida através de manipulação, esta forma também pode

ser obtida quando o modelo de escoamento utilizado para deduzir a equação da continuidade é fixo no espaço, através da descrição de Euler.

2.5 Equação diferencial de conservação de quantidade de movimento

De acordo com Acheson [2003], em 1687 Newton teceu no seu livro *Principia*, uma hipótese acerca da movimentação dos fluidos, tendo sido refutada por Bernoulli em 1743 e desenvolvida por Euler em 1752, na qual desenvolveu o princípio de quantidade de movimento linear e angular. Em 1822, Cauchy introduz o conceito de tensor das tensões e à luz do que foi desenvolvido por Euler, cria a teoria geral para o movimento de qualquer fluido (ver equação 2.25). Em 1845, Stokes deduz a relação constitutiva para o movimento de fluidos newtonianos, Navier já a tinha encontrado antes de Stokes mas não havia sido testada. Foram necessários 158 anos e o esforço realizado pelas grandes mentes da altura, para se chegar ao caso geral que traduz o movimento de qualquer fluido, a equação de movimento de Cauchy, traduzido pela equação 2.25.

$$\rho \frac{\mathbf{D}u_i}{\mathbf{D}t} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i \quad (2.25)$$

Contudo, esta equação é geral e existem dois tipos de fluidos, os Newtonianos e os não-Newtonianos, isto implica que haja uma relação constitutiva que os caracterize. Olhando para a equação 2.25, o termo τ_{ij} do lado direito é o tensor das tensões, responsável por definir quais as propriedades de um fluido. Como as propriedades a serem estudadas neste trabalho são as de fluidos Newtonianos basta utilizar a relação constitutiva certa e substituir na equação. Ao longo desta secção deduzir-se-á a equação diferencial de conservação de quantidade de movimento para fluidos Newtonianos, também conhecida como a equação de Navier-Stokes. Os fluidos, na mecânica do *Continuum*, são fluidos que exibem proporcionalidade entre a tensão tangencial aplicada e a taxa de deformação angular resultante, de acordo com L. A. Oliveira [2012].

Tomemos um elemento de fluido de volume unitário, sujeito, no seu escoamento, a um conjunto de forças externas de resultante \vec{F} . A segunda lei de Newton relaciona a força \vec{F} com as grandezas m e \vec{a} , sendo respectivamente a sua massa e a aceleração do seu movimento, representada pela equação 2.2.

A figura 2.10, representa as forças de corpo e de superfície aplicadas nas várias faces do elemento de fluido infinitesimal. A partir desta representação deduzem-se as equações de quantidade de movimento.

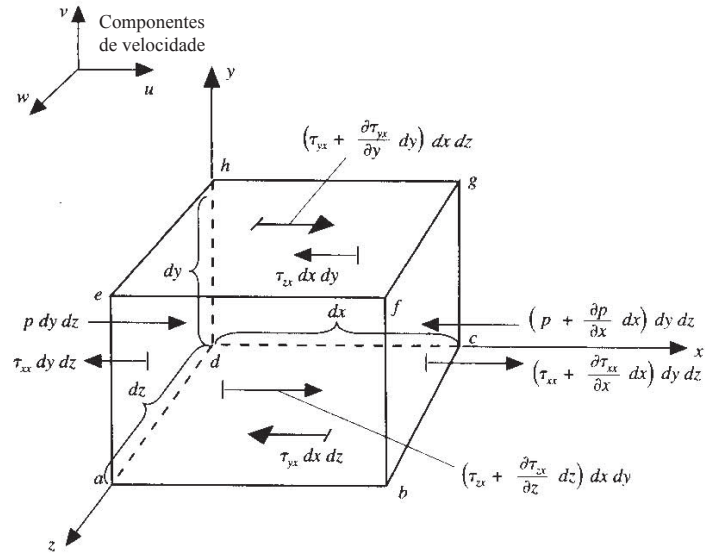


Figura 2.10: Modelo utilizado para deduzir a equação de quantidade de movimento na componente x , adaptado de Anderson [1995].

A equação 2.2 está na forma vectorial mas é possível separá-la esta em três relações escalares, ao longo dos eixos x , y e z . Esta separação apenas se realiza para facilitar a dedução da equação bastando assim considerar uma das relações escalares. Considerando a componente em x da segunda Lei de Newton, obtém-se a equação 2.26.

$$F_x = ma_x \tag{2.26}$$

Onde F_x e a_x são as componentes escalares em x da força e da aceleração, respectivamente. Olhando para o lado esquerdo da equação 2.26 é possível constatar que existe uma força aplicada no sentido de x e esta pode ter duas origens:

1. Forças de corpo (ou de campo), que actuam directamente na massa volumétrica do elemento de fluido. Estas forças como a, força gravitacional, eléctrica ou magnética actuam à distância.
2. Forças de superfície (ou de contacto), actuam directamente na superfície do elemento de fluido. Estas ocorrem devido à distribuição de pressão que actua na superfície, imposta pelo fluido que rodeia o elemento de fluido e pelas distribuições das tensões normais e de corte que actuam na superfície, também impostas pelo fluido que passa pela superfície do elemento de fluido.

A força de corpo por unidade de massa que actua no elemento de fluido é, f , e a componente em x é dada por f_x . Se o volume do fluido for dado por $dx dy dz$ então,

$$\rho f_x (dx dy dz) \tag{2.27}$$

tendo em conta a explicação dada, para um elemento de fluido em movimento pode-se escrever a equação 2.28, que representa a força líquida superficial na direcção x .

$$\left[p - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) \right] dy dz + \left[\left(\tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} dx \right) - \tau_{xx} \right] dy dz + \left[\left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) - \tau_{yx} \right] dx dz + \left[\left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) - \tau_{zx} \right] dx dy \quad (2.28)$$

A força total na direcção x é dada pelo somatório das equações 2.27 e 2.28, que após algum tratamento algébrico, tomam a seguinte forma:

$$F_x = \left[-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right] dx dy dz + \rho f_x dx dy dz \quad (2.29)$$

A equação 2.29 representa o lado esquerdo da equação 2.2. Considerando o lado direito da equação 2.2, e recordando que a massa do elemento de fluido é igual a,

$$m = \rho dx dy dz \quad (2.30)$$

e que a aceleração de um elemento de fluido é a taxa de variação da velocidade no tempo, então a componente em x da aceleração é representada pela equação 2.31.

$$a_x = \frac{Du}{Dt} \quad (2.31)$$

Substituindo as equações 2.29 e 2.31 na 2.2 obtém-se a equação 2.32, a equação de quantidade de movimento para o escoamento viscoso na componente x .

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho f_x \quad (2.32)$$

Da mesma forma se obtém nas componentes y e z , as equações 2.33 e 2.34, respectivamente.

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho f_y \quad (2.33)$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \rho f_z \quad (2.34)$$

Como o elemento de fluido se move com o escoamento, as equações 2.32, 2.33 e 2.34 estão na forma não-conservativa. Contudo as equações podem ser obtidas na forma conservativa, escrevendo o lado esquerdo da equação 2.32 de acordo com a derivada material (ver equação 2.35),

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \mathbf{V} \cdot \nabla u \quad (2.35)$$

Expandindo a seguinte derivada e re-arranjando, obtém-se a equação 2.36.

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} = \rho \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} - u \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.36)$$

Relembrando que a divergência do produto de um escalar por um vector é,

$$\nabla \cdot (\rho u \mathbf{V}) = u \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) + \rho \mathbf{V} \cdot \nabla u$$

$$\rho \mathbf{V} \cdot \nabla u = \nabla \cdot (\rho u \mathbf{V}) - u \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \quad (2.37)$$

Substituindo as Equações 2.36 e 2.37 na 2.35, obtém-se a equação 2.38.

$$\rho \frac{D u}{D t} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} - u \frac{\partial \rho}{\partial t} - u \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) + \nabla \cdot (\rho u \mathbf{V})$$

$$\rho \frac{D u}{D t} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} - u \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} - \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \right] + \nabla \cdot (\rho u \mathbf{V}) \quad (2.38)$$

O termo entre parêntesis na equação 2.38 é a equação da continuidade, esta é igual a 0 (ver equação 2.24). Assim, a equação 2.38 fica,

$$\rho \frac{D u}{D t} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \mathbf{V}) \quad (2.39)$$

Substituindo a equação 2.39 na equação 2.32, obtém-se a equação 2.40 que representa a equação de Cauchy na sua forma conservativa, referente à componente x .

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \mathbf{V}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho f_x \quad (2.40)$$

Da mesma forma as equações nas componentes y e z tomam a forma das equações 2.41 e 2.42, respectivamente.

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v \mathbf{V}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho f_y \quad (2.41)$$

e

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho w \mathbf{V}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \rho f_z \quad (2.42)$$

Para se obter a equação de Navier-Stokes é necessário introduzir a relação constitutiva. De acordo com Isaac Newton, as tensões tangenciais num fluido são proporcionais à sua taxa de deformação (gradientes de velocidade). Segundo Anderson [1995], estes fluidos adquiriram o nome de fluidos newtonianos e em 1845 Stokes obteve as equações de 2.43 a 2.48,

$$\tau_{xx} = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{V}) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.43)$$

$$\tau_{yy} = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{V}) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.44)$$

$$\tau_{zz} = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{V}) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.45)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2.46)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (2.47)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (2.48)$$

onde μ é a viscosidade dinâmica e λ a segunda viscosidade. Onde Stokes criou uma hipótese que relaciona ambas as viscosidades.

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu$$

De acordo com Anderson [1995], esta hipótese é utilizada frequentemente mas não foi completamente confirmada até aos dias de hoje e apenas se torna importante para os casos em que a compressibilidade é essencial. A segunda viscosidade ou viscosidade de volume encontra-se presente em ondas de choque e propagação de som.

Substituindo as equações 2.43 até 2.48 nas equações 2.40, 2.41 e 2.42, obtêm-se as equações 2.49, 2.50 e 2.51, denominadas por equações de Navier-Stokes na forma conservativa.

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \nabla \cdot \mathbf{V} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + \rho f_x \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \nabla \cdot \mathbf{V} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] + \rho f_y \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w^2)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \nabla \cdot \mathbf{V} + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \rho f_z \end{aligned} \quad (2.51)$$

Estas equações encontram-se em várias livros nomeadamente, Patankar [1980], Anderson [1995], Acheson [2003], Versteeg H. [2007] e L. A. Oliveira [2012]. Definidas as equações de Navier-Stokes, calcula-se a equação diferencial de conservação da energia.

2.6 Equação diferencial de conservação da energia

Para se deduzir a equação diferencial da equação de conservação da energia, tem-se em conta o principio físico da conservação da energia e o modelo de um elemento de fluido infinitesimal, que se move com o escoamento de acordo com a figura 2.7b.

O principio físico descrito anteriormente é a primeira lei da termodinâmica que quando aplicada ao modelo de um elemento de fluido que se move com o escoamento traduz-se no seguinte,

$$A = B + C$$

Onde:

- A é igual à taxa de variação da energia dentro do elemento de fluido;
- B é igual ao fluxo líquido de calor que entra no elemento de fluido;

Semelhantemente, a taxa de trabalho realizada pelas tensões tangenciais na direcção x nas faces $abcd$ e $efgh$ é:

$$\left[\left(u\tau_{yx} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} dy \right) - u\tau_{yx} \right] dx dz = \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} dx dy dz$$

e

$$\left[\left(u\tau_{zx} + \frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z} dz \right) - u\tau_{zx} \right] dx dy = \frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z} dx dy dz$$

Considerando todas as superfícies que se vêem na figura 2.11, a taxa de trabalho realizada num elemento de fluido em movimento devido as forças descritas é,

$$\left[-\frac{\partial(up)}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z} \right] dx dy dz$$

Tendo em conta que a expressão acima apenas considera as forças superficiais na direcção x , quando se incluem as forças superficiais nas direcções y e z , as expressões obtidas são semelhantes. Portanto, na totalidade a taxa de trabalho líquido realizado no elemento de fluido em movimento é o somatório das contribuições das forças superficiais em x , y e z , assim como, a contribuição da força de corpo (ver equação 2.53).

$$C = - \left[\left(\frac{\partial(up)}{\partial x} + \frac{\partial(vp)}{\partial y} + \frac{\partial(wp)}{\partial z} \right) + \frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z} + \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v\tau_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{zy})}{\partial z} + \frac{\partial(w\tau_{xw})}{\partial x} + \frac{\partial(w\tau_{yw})}{\partial y} + \frac{\partial(w\tau_{zw})}{\partial z} \right] dx dy dz + \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{V} dx dy dz \quad (2.53)$$

Avaliando B, sendo o fluxo líquido de calor que circula para dentro do elemento. Este fluxo deve-se a (1) aquecimento volumétrico como a absorção ou emissão de radiação ou (2) transferência de calor através da superfície devido a gradientes de temperatura, por exemplo condução térmica. Definindo \dot{q} como a taxa de adição de calor volumétrico por unidade de massa, e tendo em conta que a massa do elemento de elemento fluido é $\rho dx dy dz$, obtém-se a equação 2.54.

$$\text{Aquecimento Volumetrico do elemento} = \rho \dot{q} dx dy dz \quad (2.54)$$

Na figura 2.11, o calor transferido pela condução térmica através da face $adhe$ para o elemento de fluido em movimento é $\dot{q}_x dy dz$, onde \dot{q}_x é o calor transferido na direcção x por unidade de tempo e área, através de condução térmica. Esta transferência de calor numa determinada direcção e quando expressa em unidades de energia por unidade de tempo e área é denominada por fluxo de calor. O

calor transferido para fora de um elemento através da face bcgf é $[q_x + (\partial q_x / \partial x) dx] dy dz$. Então o calor líquido transferido na direcção x para o elemento de fluido por condução térmica é,

$$\left[q_x + \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) \right] dy dz = - \frac{\partial q_x}{\partial x} dx dy dz$$

Tendo em conta a transferência de calor através das outras faces nas direcções y e z , ver figura 2.11, obtém-se a equação 2.55.

$$- \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (2.55)$$

Assim o termo B é o somatório das equações 2.54 e 2.55, tomando a forma da equação 2.56.

$$B = \left[\rho \dot{q} - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) \right] dx dy dz \quad (2.56)$$

O fluxo de calor devido à condução térmica é obtido a partir da Lei de Fourier da condução de calor. É proporcional ao gradiente de temperatura local:

$$\dot{q}_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad \dot{q}_y = -k \frac{\partial T}{\partial y} \quad \dot{q}_z = -k \frac{\partial T}{\partial z}$$

onde k é a condutividade térmica. Então a equação 2.56 pode ser escrita através da equação 2.57.

$$B = \left[\rho \dot{q} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] dx dy dz \quad (2.57)$$

Finalmente, no termo A, que tem como significado a taxa de variação de energia no tempo em relação ao elemento de fluido, a energia considerada é a que aparece na 1ª Lei da termodinâmica, a energia interna. A energia interna de um sistema gasoso é a energia de cada molécula ou átomo, ao longo de todas as moléculas e átomos do sistema, este é o significado de energia interna que aparece na 1ª Lei da Termodinâmica segundo Anderson [1995].

Voltando à definição do termo A, e tendo em conta que o elemento de fluido se movimenta num meio gasoso e que tem apenas em conta a energia cinética e a sua própria energia interna, as suas contribuições são, segundo Anderson [1995] as seguintes:

1. A energia interna devido ao movimento molecular aleatório, e ;
2. A energia cinética devido ao movimento de translação do elemento de fluido. A energia cinética por unidade de massa é $V^2/2$.

Então, o elemento de fluido em movimento contém energia interna e energia cinética e o somatório destes dois tipos de energia pode ser denominado pela energia total. O termo A , como está a seguir um elemento de fluido em movimento, é a taxa de variação de energia total por unidade de massa ($e + V^2/2$), sendo este termo a derivada material. Onde a massa do elemento de fluido é $\rho dx dy dz$.

$$A = \rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{V^2}{2} \right) dx dy dz \quad (2.58)$$

A equação 2.59, representa a forma final da equação da energia e obtém-se substituindo na equação $A = B + C$ as equações 2.58, 2.56 e 2.53.

$$\begin{aligned} \rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{V^2}{2} \right) = & \rho \dot{q} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \\ & - \frac{\partial(u p)}{\partial x} - \frac{\partial(v p)}{\partial y} - \frac{\partial(w p)}{\partial z} + \frac{\partial(u \tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(u \tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(u \tau_{zx})}{\partial z} + \frac{\partial(v \tau_{xy})}{\partial x} \\ & + \frac{\partial(v \tau_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial(v \tau_{zy})}{\partial z} + \frac{\partial(w \tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(w \tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial(w \tau_{zz})}{\partial z} + \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{V} \quad (2.59) \end{aligned}$$

Esta é a equação da energia na forma não conservativa em termos da energia total ($e + V^2/2$), obtida a partir do modelo de um elemento de fluido infinitesimal em movimento com a aplicação da 1ª Lei da Termodinâmica (ver figura 2.7b).

A equação 2.59 pode ser modificada de duas formas:

1. O lado esquerdo da equação pode ser escrito apenas em termos da energia interna, e , da entalpia estática, h , ou da entalpia total, $h_0 = h + V^2/2$. Para cada um dos casos o lado direito da equação também muda;
2. Para cada diferente forma da equação da energia, existem sempre as formas não conservativa e conservativa. Apenas depende de manipulação matemática para converter de uma forma para a outra.

Optando por escrever a equação da energia em termos da energia interna (eq. 2.59), realiza-se a transformação apresentada nas equações 2.60 a 2.62, multiplica-se as equações 2.32, 2.33 e 2.34 por u , v e w , respectivamente.

$$\rho \frac{D(u^2/2)}{Dt} = -u \frac{\partial p}{\partial x} + u \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + u \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + u \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho u f_x \quad (2.60)$$

$$\rho \frac{D(v^2/2)}{Dt} = -v \frac{\partial p}{\partial y} + v \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + v \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + v \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho v f_y \quad (2.61)$$

$$\rho \frac{D(w^2/2)}{Dt} = -w \frac{\partial p}{\partial z} + w \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + w \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + w \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \rho w f_z \quad (2.62)$$

Adicionando as equações 2.60, 2.61 e 2.62 e considerando que $u^2/2 + v^2/2 + w^2/2 = V^2/2$, obtém-se

$$\rho \frac{D(V^2/2)}{Dt} = -u \frac{\partial p}{\partial x} - v \frac{\partial p}{\partial y} - w \frac{\partial p}{\partial z} + u \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) + v \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) + w \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) \quad (2.63)$$

Subtraindo a equação 2.63 pela equação 2.59 e considerando que $\rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{V} = \rho(u f_x + v f_y + w f_z)$ obtém-se a equação 2.64.

$$\rho \frac{D}{Dt} e = \rho \dot{q} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) - p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \tau_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yx} \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{zx} \frac{\partial u}{\partial z} + \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{zy} \frac{\partial v}{\partial z} + \tau_{xz} \frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{yz} \frac{\partial w}{\partial y} + \tau_{zz} \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.64)$$

A equação 2.64 é a equação da energia onde a derivada material é escrita em termos da energia interna. Neste caso a energia cinética e as forças de corpo deixaram de existir, portanto a equação é escrita apenas em termos de energia interna (e) e não contém explicitamente as forças de corpo.

Relembrando as equações 2.46, 2.47 e 2.48 do capítulo 2.5 e que $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ e $\tau_{yz} = \tau_{zy}$. Esta simetria entre as tensões tangenciais é necessária para impedir que a velocidade angular de um elemento de fluido vá para infinito, conforme o volume do elemento é encolhido para um ponto, esta afirmação está associada aos momentos exercidos no elemento de fluido, segundo Anderson [1995].

Assim, alguns termos da equação 2.64 podem ser factorizados tomando a forma da equação 2.65.

$$\rho \frac{De}{Dt} = \rho \dot{q} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) - p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \tau_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{zz} \frac{\partial w}{\partial z} + \tau_{yx} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \tau_{zx} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \tau_{zy} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (2.65)$$

Relembrando novamente as equações 2.43 até 2.48, de forma a se expressarem as tensões viscosas em termos de gradientes de velocidade, a equação 2.65 toma a forma da equação 2.66.

$$\begin{aligned} \rho \frac{De}{Dt} = & \rho \dot{q} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \\ & - p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \\ & + \mu \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.66)$$

A equação 2.66, representa a equação da energia em termos da energia interna. Contudo, a equação 2.66 ainda se encontra na forma não-conservativa, uma vez que foi deduzida segundo o modelo de elemento de fluido em movimento (ver figura 2.7b). Tendo em conta que o lado esquerdo da equação 2.66 representa a derivada material, ir-se-á escrever a equação na forma conservativa equação 2.67, a partir da definição da derivada material (ver secção 2.3).

$$\rho \frac{De}{Dt} = \rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho \mathbf{V} \cdot \nabla e \quad (2.67)$$

Contudo, esta não é a forma mais simplificada. Assim procede-se á simplificação da derivada material, sendo

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} = \rho \frac{\partial e}{\partial t} + e \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

ou

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} - e \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.68)$$

A partir da propriedade dos vectores, segundo Hildebrand [1962], a divergência do produto de um escalar por um vector é,

$$\nabla \cdot (\rho e \mathbf{V}) = e \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) + \rho \mathbf{V} \cdot \nabla e$$

ou

$$\rho \mathbf{V} \cdot \nabla e = \nabla \cdot (\rho e \mathbf{V}) - e \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \quad (2.69)$$

Substituindo as equações 2.68 e 2.69 na equação 2.67 obtém-se a equação 2.70.

$$\rho \frac{De}{Dt} = \rho \frac{\partial e}{\partial t} - e \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \right] + \nabla \cdot (\rho e \mathbf{V}) \quad (2.70)$$

O termo dentro de parêntesis rectos da equação 2.70 é zero, devido á equação da continuidade representada pela equação 2.24. Assim a equação 2.70 toma a forma da equação 2.71.

$$\rho \frac{De}{Dt} = \rho \frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \mathbf{V}) \quad (2.71)$$

Substituindo a equação 2.71 na equação 2.66, obtém-se a equação 2.72 que é a equação da energia em termos da energia interna na forma conservativa. Esta equação encontra-se em várias bibliografias nomeadamente, Anderson [1995], L. A. Oliveira [2012] e Yunus Cengel [2014].

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \mathbf{V}) = & \rho \dot{q} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \\ & - p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \\ & + \mu \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (2.72) \end{aligned}$$

As equações diferenciais parciais na forma conservativa, deduzidas nesta fase representam as três leis básicas da física, de acordo com Anderson [1995]. A forma como se apresentam as equações 2.24, 2.49, 2.50, 2.51 e 2.72 representam o seu estado mais geral, o que se adapta à maior parte dos casos. Contudo as equações de Navier-Stokes deduzidas, apenas são adequadas para escoamentos laminares, sendo necessário identificar um modelo turbulento que se ajuste ao caso de estudo. Se as equações de Navier-Stokes forem resolvidas sem nenhuma aproximação à turbulência, o método de resolução é denominado por simulação numérica directa e para se resolverem estes escoamentos é necessário ter uma malha muito pequena o que poderia levar anos, segundo Chen Q [2002]. Na próxima secção são explicados alguns conceitos básicos acerca da turbulência e as suas implicações.

2.7 Turbulência

Os trabalhos inicialmente desenvolvidos por Boussinesq e Reynolds no fim do século XIX, nos quais formalizaram as características básicas dos escoamentos turbulentos, entusiasmaram os investigadores a analisar o comportamento extremamente complexo da turbulência. A turbulência é um assunto actual e compreendê-la é um dos problemas científicos mais desafiantes e antigos. Se nos dias que correm a turbulência está longe de estar resolvida, alguns factos podem ser deduzidos a partir de experiências e observações. De acordo com Roger Lewandowski [2014], o seu estudo é de extrema importância, pois têm um grande impacto na vida humana, tanto na previsão do tempo, como na geração de energia, no fornecimento de água, processos biológicos, entre outros.

A mecânica dos fluidos clássica estabelece que o movimento de fluidos viscosos é definido pelas equações de Navier-Stokes, o que teoricamente deveria ser apropriado para realizar simulações numéricas de escoamentos turbulentos. Porém, segundo Roger Lewandowski [2014], o escoamento turbulento é irregular e caracterizado por mudanças de propriedades caóticas, associadas a uma vasta gama

de dimensões com interações não lineares entre elas. Estas características produzem uma grande complexidade computacional, o que na actualidade torna as simulações numéricas de escoamentos turbulentos em equações de Navier-Stokes impossíveis. Daqui resulta a introdução dos modelos de turbulência, de forma a reduzir a complexidade computacional. Além da fase experimental e da física, a análise e a modelação matemática têm um papel central no estudo dos escoamentos turbulentos.

Não é o objectivo desta secção, nem do trabalho, explicar os fenómenos de turbulência com detalhe nem como se derivam e obtêm os modelos, apenas será realizada uma breve introdução do modelo, $k - \epsilon$. Para um estudo mais aprofundado ver as referências, Roger Lewandowski [2014], Schiestel [2008], Versteeg H. [2007], Joel H. Ferziger [2002] e Gatski [1996].

Segundo Zhang [2004], o modelo padrão $k - \epsilon$ é um modelo semi-empírico baseado nas equações de transporte para energia cinética turbulenta k e da taxa de dissipação de energia turbulenta ϵ . O modelo de transporte da equação para k é deduzido a partir de uma equação matemática exacta e o modelo da equação de transporte para ϵ é obtido a partir de raciocínios físicos e contém alguma semelhança matemática relativamente a k .

Na dedução do modelo $k - \epsilon$ assume-se que o escoamento é completamente turbulento e que os efeitos da viscosidade molecular não são contabilizados. Assim as equações de transporte, equação 2.73 e 2.74, são dadas de acordo com Ying Sun [2005], Zhang [2004] e Launder BE [1974] por:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k u_i) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] + G_k + G_b - \rho \epsilon - Y_M \quad (2.73)$$

onde G_k representa a geração de energia cinética turbulenta devido aos gradientes de velocidade, G_b é a geração de energia cinética devido às forças de impulsão e Y_m representa a contribuição da dilatação da turbulência compressível em relação à taxa de dissipação.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \epsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \epsilon u_i) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} \right] + C_{1\epsilon} \frac{\epsilon}{k} (G_k + G_{3\epsilon} G_b) - C_{2\epsilon} \rho \frac{\epsilon^2}{k} \quad (2.74)$$

onde $C_{1\epsilon}$, $C_{2\epsilon}$ e $C_{3\epsilon}$ são constantes e σ_k e σ_ϵ são os números de Prandtl turbulentos para k e ϵ , respectivamente.

A viscosidade turbulenta μ_t é calculada através da combinação de k e ϵ da seguinte forma,

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (2.75)$$

onde C_μ é uma constante, definida na tabela 3.1.

Capítulo 3

Caso de Estudo

3.1 Formulação do problema

Com as equações diferenciais bem definidas, o objecto de estudo pode ser analisado e desenvolvido. Em primeiro lugar definem-se as condições em que se irá dar o escoamento, depois simplificam-se as equações generalizadas, discretizam-se as equações simplificadas e aplicam-se os algoritmos para se resolverem as equações.

A DFC é constituída por 3 fases distintas: O pré-processador, o *solver* e o pós-processador. O pré-processador, em que se definem as geometrias da região de interesse, ou seja, o domínio computacional e a geração da malha. Adicionalmente é efectuada a selecção dos fenómenos físicos a serem modelados, a definição das propriedades dos fluidos e a especificação das condições de fronteira apropriadas. O *solver*, é constituído pela programação de um algoritmo numérico que resolve as equações que constituem os fluidos através de técnicas numéricas. Nomeadamente, a discretização onde se cria um sistema de equações algébricas e a sua solução através de um método numérico iterativo. O pós-processador, utiliza as soluções obtidas e cria imagens de forma a poder interpretar-se melhor os resultados obtidos.

A análise de um problema começa pela observação do local e daí começam a formular-se as premissas para fundamentar o caso de estudo. O caso de estudo consiste na observação do escoamento interno 2D, num laboratório, provocado por ventilação mecânica (forçada) através de difusores e extractores. Os difusores são responsáveis por fornecer energia cinética e interna ao sistema, através da variação de velocidade e temperatura e os extractores são responsáveis por retirar o ar do laboratório a uma determinada velocidade, sendo estes responsáveis também por alterar a energia cinética do escoamento.

O escoamento em estudo é caracterizado por um fluido Newtoniano numa única fase - gasosa. A análise em questão envolve diferenças de temperatura superiores a $5^{\circ} C$ e inferiores a $15^{\circ} C$, portanto o escoamento é não isotérmico e ainda se pode considerar o fluido como incompressível, de acordo com Joel H. Ferziger [2002]. Todavia, quanto à questão da compressibilidade, esta é condição apenas necessária. Para se verificar a condição suficiente quanto à compressibilidade, é necessário verificar se o número de Mach é inferior 0,3 ($M \leq 0,3$), segundo Joel H. Ferziger [2002] e White [2003].

Para se verificar o número de Mach é necessário definir as condições de temperatura de insuflação e de velocidade em estudo. A condição estipulada de temperatura de insuflação para a estação de verão é de $16^{\circ} C$ e de inverno é de $28^{\circ} C$. A velocidade utilizada no insuflador e no extractor é $0,15 m/s$.

O valor do número de Mach para os casos 2D é igual a 0.00043 para as condições de verão e 0.00044 para condições de inverno. Portanto em condições de verão e de inverno, o valor do número de Mach é sempre inferior a 0,3, logo os escoamentos podem ser considerados incompressíveis, (ver os cálculos no anexo A).

Embora as velocidades sejam baixas, é necessário verificar outra condição: se o escoamento é laminar ou turbulento de acordo com Chen Q [2002] e Ying Sun [2005]. De acordo com Howard D. Goodfellow [2001], os escoamentos dentro de salas são usualmente turbulentos, contudo deve confirmar-se estas afirmações através do número Reynolds, que relaciona as forças de inércia com as forças viscosas, e o de Rayleigh que está associado aos escoamentos conduzidos por forças de impulsão. Os valores de número de Reynolds devem ser superiores a 10^3 e de acordo com Fluent [2009] os valores de número de Rayleigh devem estar entre $10^8 < Ra < 10^{10}$.

O valor do número de Reynolds em condições de inverno é 4.3022×10^4 e em condições de verão 4.0034×10^4 . Os números de Reynolds são suficientemente altos, demonstrando que as forças de inércia predominam sobre as viscosas, ou seja, pode considerar-se que o escoamento é turbulento. O valor dos números de Rayleigh em condições de inverno é 6.9693×10^{10} e em condições de verão é 2.8849×10^{10} e está dentro dos parâmetros definidos, assim é possível afirmar que no escoamento a transferência de calor é realizada, principalmente, por convecção. Significa também que o escoamento se pode considerar turbulento, (ver os cálculos no anexo B).

De acordo com Joel H. Ferziger [2002], dado as diferenças de temperatura, o ar mais quente em relação ao ar mais frio, cria forças de impulsão e conseqüentemente variação de massa volúmica, que embora pequenas, podem provocar variações de velocidade no escoamento. Porém, é necessário verificar se o escoamento se pode considerar dominado pelas forças de impulsão. Para tal, segundo Ying Sun [2005], é necessário calcular o número de Archimedes dado pela divisão entre o número de

Grashof, que relaciona as forças de impulsão e as forças viscosas que actuam num fluido, e o número de Reynolds. Se o número de Archimedes for 1 ou maior que 1 deve ser considerado um escoamento dominado pelas forças de impulsão. Caso contrário é dominado pelas forças de inércia. O valor do número de Arquimedes obtido nas condições de inverno é 51 e nas condições de verão é 28. Portanto pode-se afirmar que o escoamento é dominado pelas forças de impulsão, ver os cálculos no anexo B.

A um escoamento que varia no tempo é dado o nome de transiente, caracterizado pela variação das suas propriedades ao longo do tempo. O estudo das propriedades do fluido com a variação do tempo é um dos objectos de estudo.

3.2 Equações que governam os fluidos

É possível resolver uma grande série de problemas da engenharia utilizando as equações que governam os fluidos, nomeadamente com a equação da continuidade, de Navier-Stokes e da energia. As equações 2.24, 2.49, 2.50, 2.51 e 2.72 deduzidas nas secções 2.4, 2.5 e 2.6, são as mais generalizadas. Estas podem ser simplificadas, de acordo com as formulações realizadas na secção 3.1. Tornando assim as equações diferenciais parciais mais simples e conseqüentemente mais fáceis de resolver.

A equação da continuidade é responsável por garantir uma condição no escoamento, que tanto a massa volúmica, ρ , como a velocidade, \mathbf{V} , sejam funções contínuas do espaço e do tempo. Todavia, é possível simplificar a equação da continuidade, pois como vimos na secção 3.1 o escoamento é considerado incompressível. A equação 3.1, representa a equação da continuidade na sua forma mais geral.

$$\frac{\partial(\rho)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (3.1)$$

Como o escoamento é considerado incompressível de acordo com a equação 2.24, o primeiro termo do lado esquerdo é igual a zero, pois não existe variação de massa volúmica. Assim, a equação da continuidade para um escoamento incompressível é traduzida pela equação 3.2.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.2)$$

Obtém-se a divergência da velocidade (ver secção 2.3), onde a equação 3.3 aparece várias vezes ao longo do texto e irá simplificar as equações de conservação de quantidade de movimento (equações 2.49, 2.50 e 2.51) e a de conservação da energia (equação 2.72).

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (3.3)$$

Com a equação da continuidade simplificada, existem várias simplificações que podem ser realizadas aquando da simplificação das equações de Navier-Stokes e da Energia. Assim, lembrando as equações de Navier-Stokes escalares na sua forma mais geral, nas respectivas direcções x , y e z , equação 3.4, 3.5 e 3.6.

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} \\ + 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} + \rho f_x \end{aligned} \quad (3.4)$$

,

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} \\ + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \rho f_y \end{aligned} \quad (3.5)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w^2)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + 2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \rho f_z \end{aligned} \quad (3.6)$$

As equações 3.4, 3.5 e 3.6 contêm derivadas parciais mistas. Estas, aquando da discretização das equações podem complicar as equações. Contudo, dado o facto do escoamento ser incompressível, é possível, através de um artifício, segundo Anderson [1995], transformar as derivadas mistas em derivadas simples. Portanto, este artifício é utilizado para não ter de se lidar com as derivadas mistas e só se irá demonstrar para a equação em x pois a dedução será sempre igual para as outras equações em y e z .

Assim, tendo em conta a equação da continuidade (equação 3.3), em regime incompressível ($\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$) obtemos a equação 3.7.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} \quad (3.7)$$

Diferenciando em ordem a x a equação 3.7, somando em ambos os lados $\partial^2 u / \partial x^2$ e multiplicando por μ em ambos os lados obtém-se a equação 3.8.

$$2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} \quad (3.8)$$

Procedendo-se da mesma forma para os outros casos, obtêm-se as equações 3.9 e 3.10.

$$2\mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} \quad (3.9)$$

$$2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} - \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \quad (3.10)$$

Como o escoamento é incompressível existem termos da derivada material que também são simplificados conduzindo à equação 3.11.

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla(\rho u \mathbf{V}) \equiv \rho \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho u \nabla \cdot \mathbf{V} + \rho \mathbf{V} \cdot \nabla u \quad (3.11)$$

Tendo em conta que o segundo e o terceiro termo do lado direito da equação 3.11 são iguais a zero, dado o facto de que o escoamento é incompressível, e tendo em conta a equação da continuidade (ver equação 3.3) obtêm-se a equação de Navier-Stokes simplificada, nas respectivas direcções consideradas x , y e z . Assim, substituindo as equações 3.8, 3.9 e 3.10 nas equações 3.4, 3.5 e 3.6 respectivamente, as equações de Navier-Stokes para um escoamento incompressível na forma escalar têm o aspecto das equações 3.12, 3.13 e 3.14.

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \rho f_x \quad (3.12)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \rho f_y \quad (3.13)$$

e

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \rho f_z \quad (3.14)$$

Os termos de força ρf_x e ρf_z são ignorados pois são muito pequenos em relação aos outros termos. Contudo são contabilizadas na dimensão y , pois a influência da impulsão e da gravidade tem de ser considerada na equação 3.13.

O escoamento nas condições de inverno e de verão têm variações de temperatura, devido à introdução de ar a temperaturas diferentes das que se encontram no laboratório. Assim, devem ser tidas em conta as forças de impulsão devido às variações de temperatura, de acordo com as formulações da secção 3.1. Sendo as variações de temperatura significativas, mas inferiores a $15^\circ C$, e tendo em conta as forças de impulsão responsáveis pelo surgimento de variações de velocidade no campo de escoamento, deve-se desenvolver o termo de força de acordo com a aproximação de Boussinesq, segundo Joel H. Ferziger [2002]. A aproximação de Boussinesq diz que

$$(\rho - \rho_0) g = -\rho_0 g \beta (T - T_0)$$

sendo que as diferenças de massa volúmica são muito pequenas $\Delta\rho = (\rho - \rho_0) \ll 1$ logo $\Delta\rho = \rho$.

$$\rho = -\rho_0\beta(T - T_0) \quad (3.15)$$

Assim, o termo de força de corpo passa a representar a força gravitacional $\rho f = \rho g$. Na equação de Navier-Stokes na direcção y , tendo em conta que o termo de força é ρg , substitui-se ρ pela equação 3.15,

$$-\rho g = \rho_0\beta(T - T_0)g = \rho_0g\beta(T - T_0) \quad (3.16)$$

Assim, substituindo a equação 3.16 no termo da força gravitacional em y , segundo Wirth [2014], aplicando a convergência da velocidade aos termos do lado esquerdo das equações de Navier-Stokes (termos advectivos) (ver secção 2.3) e aplicando o Laplaciano aos termos do lado direito das equações de Navier-Stokes (termos difusivos) obtêm-se as equações 3.17, 3.18 e 3.19.

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot (\nabla u)\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\Delta u \quad (3.17)$$

,

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot (\nabla v)\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\Delta v - \rho_0g\beta(T - T_0) \quad (3.18)$$

e

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot (\nabla w)\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\Delta w \quad (3.19)$$

No entanto é possível simplificar ainda mais as equações 3.17, 3.18 e 3.19, passando o ρ para o lado direito e considerando $\nu = \mu/\rho$ obtendo-se 3.20, 3.21 e 3.22.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot (\nabla u) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\Delta u \quad (3.20)$$

,

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot (\nabla v) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\Delta v - g\beta(T - T_0) \quad (3.21)$$

e

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot (\nabla w) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\Delta w \quad (3.22)$$

As simplificações realizadas nesta fase permitem que a resolução das equações não seja acoplada, isto é, deixou de existir a dependência entre as variáveis dependentes pois a massa volúmica é considerada constante. Assim, é possível obter o valor das variáveis primitivas directamente resolvendo a equação de Navier-Stokes incompressível com a aproximação de Boussinesq. Contudo, a aproximação de

Boussinesq insere uma nova variável, a temperatura. Devido a essa nova variável, existem dois motivos para utilizar a equação da energia: o facto de o escoamento não ser isotérmico e a contabilização da evolução das forças de impulsão devido à variação da temperatura.

Tendo em conta as hipóteses formuladas na secção 3.1, ir-se-á deduzir uma nova equação da energia. Relembrando a equação 2.72, a equação da energia deduzida no Capítulo 2.6 e escrita em termos da energia interna e na forma conservativa.

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \mathbf{V}) = & \rho \dot{q} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \\ & - p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \\ & + \mu \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Do lado direito da equação 2.72, observando o termo da pressão e da segunda viscosidade, o que está dentro dos parêntesis é a continuidade. Como tal, esses termos passam a ser nulos. Assim como, segundo L. A. Oliveira [2012] devido às baixas velocidades os termos viscosos também não são contabilizados, tomando a equação 2.72 a forma da equação 3.23.

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + e \frac{\partial \rho}{\partial t} + e \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) + \rho \mathbf{V} \cdot \nabla(e) = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (3.23)$$

Ao se desenvolverem os termos da derivada material existem dois termos, um que depende da variação da massa volúmica e outro que representa a continuidade. Como a massa volúmica é constante e a continuidade é igual a zero esses dois termos desaparecem e a equação 3.23 toma a forma da equação 3.24

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho \mathbf{V} \cdot \nabla e = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (3.24)$$

De acordo com L. A. Oliveira [2012], e assumindo as seguintes propriedades constantes: viscosidade dinâmica (μ), condutividade térmica (k) e o calor específico a volume constante tal que $de = C_v dT$ e tendo em conta que a massa volúmica (ρ) também é constante, pode afirmar-se que $C_v = C_p$.

Portanto a equação da energia toma a seguinte forma,

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p \mathbf{V} \cdot \nabla T = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{k}{\rho c_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$$

Sabendo que $k/\rho c_p$ representa a difusividade térmica α ,

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla T = \alpha \Delta T \quad (3.26)$$

A equação 3.26 é a equação da energia com os termos difusivos do lado direito da equação e com os termos advectivos do lado esquerdo da equação. A simplificação da equação 3.26 é idêntica à equação do calor, de acordo com Yunus Cengel [2014], embora, a equação do calor não contenha os termos advectivos. Assim, as equações que governam o escoamento em estudo ficam descritas, deduzidas e explicadas. As equações 3.3, 3.20, 3.21, 3.22 e 3.26 serão escritas novamente para facilitar a sua visualização em qualquer altura. A equação 3.27 representa a equação da continuidade incompressível na forma conservativa.

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (3.27)$$

A equação Navier-Stokes incompressível para fluidos Newtonianos na forma conservativa com aproximação de Boussinesq, nas dimensões espaciais x é apresentada na equação 3.28,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot (\nabla u) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u \quad (3.28)$$

, y na equação 3.29,

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot (\nabla v) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v - g\beta(T - T_0) \quad (3.29)$$

e z na equação 3.30.

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot (\nabla w) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta w \quad (3.30)$$

Na equação 3.31 representa, a equação de conservação da energia incompressível:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla T = \alpha \Delta T \quad (3.31)$$

3.3 Método da Correção de Pressão - SIMPLE

Muitos dos softwares que existem actualmente são baseados no algoritmo Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations (SIMPLE), sendo este algoritmo desenvolvido em 1972 por Brian Spalding e Suhas Patankar de acordo com a referência Patankar [1980]. Segundo Anderson [1995] este algoritmo foi realizado com o objectivo de resolver as equações de Navier-Stokes incompressíveis.

Para se resolverem as equações 3.1, 3.28, 3.29, 3.28 e 3.31 obtidas na secção 3.2 é necessário recorrer a ferramentas computacionais. No DFC esta fase é denominada por *solver*, onde se pretende linearizar

as equações de Navier-Stokes e resolvê-las de forma iterativa através do algoritmo SIMPLE proposto por Patankar [1980].

A ferramenta computacional escolhida para implementar o algoritmo SIMPLE foi o MatLab, onde são realizados, através de programação, o pré-processamento, o *solver* e o pós-processador. Adicionalmente, foi escolhida outra ferramenta computacional, o OpenFOAM BlueCFD, um programa desenvolvido e utilizado no mercado de trabalho, para simular o problema em estudo. O OpenFOAM, como a maioria dos softwares de DFC, tem por base o algoritmo SIMPLE. Contudo, o algoritmo SIMPLE tem de ser discretizado através da criação de uma malha, cujo propósito é adaptar o escoamento formulado a um domínio computacional. É conhecido o espaço físico a ser estudado, no entanto é necessário que esse espaço seja discretizado, ou seja, é necessário criar uma malha a uma, duas ou três dimensões que defina o escoamento. Sendo a malha definida por um conjunto finito de pontos. Através do uso das equações diferenciais e do conjunto de pontos define-se o escoamento, assim como, os perfis de velocidades, pressão e temperatura.

Existem vários tipos de malhas e cada tipo ajusta-se a cada utilização, não sendo o objectivo deste trabalho especificar os tipos de malha existentes e as suas características. Poder-se-á verificar em maior detalhe esta informação nas referências Pletcher [1997], Joel H. Ferziger [2002] e Versteeg H. [2007]. A malha escolhida para este caso é uma malha escalonada (Staggered grid, na literatura inglesa) da família das malhas estruturadas de acordo com o CFD-Online [2012]. Foi desenvolvido em ambiente MatLab um pré-processador onde se cria a malha a duas dimensões (ver anexo C.1). No pré-processador desenvolvido em MatLab gerou-se a malha de forma linear, ou seja define-se um Δx , Δy e Δz para um determinado comprimento. No OpenFOAM é necessário criar uma malha através de um programa próprio para gerar malhas chamado *BlockMesh*, onde a programação é realizada em ambiente C++. As programações para gerar as malhas podem ser vistas, no anexo C.1 para o caso desenvolvido em MatLab e no anexo D para o caso desenvolvido no OpenFOAM.

Dos vários tipos de diferenciação que existem, há um compromisso entre a ordem das soluções e os tempos de computação. Usualmente a escolha das diferenças finitas centrais permite obter soluções com uma aproximação de segunda ordem e tempos de computação aceitáveis, de acordo com Anderson [1995]. Todavia, a utilização das diferenças finitas centrais acarreta um problema quando se pretendem resolver as equações de Navier-Stokes incompressíveis. Supondo um perfil de velocidades igual ao da figura 3.1, do tipo tabuleiro de xadrez onde as velocidades em x são 20, 40, 20, 40, etc. e as velocidades em y são 5, 2, 5, 2, etc, ao se aplicarem as diferenças centrais à equação da continuidade é garantida a continuidade, embora o perfil não faça muito sentido em termos físicos.

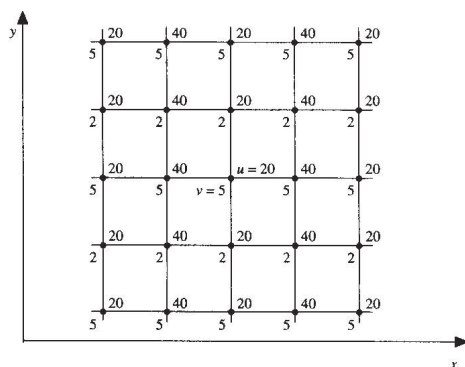


Figura 3.1: Perfil de velocidades, tipo tabuleiro de xadrez Anderson [1995].

Quando se diferenciam as equações de conservação de quantidade de movimento existe um termo que corresponde à pressão que, ao imaginar um perfil de pressões igual ao da figura 3.2, e se se aplicar as diferenças finitas centrais, observa-se um gradiente de pressões resultante nulo. Como consequência, as equações de conservação de quantidade de movimento não irão ser influenciadas, pois a pressão seria constante. A utilização de diferenças finitas centrais nas equações de Navier-Stokes incompressíveis, quando os perfis de velocidades e de pressão são similares aos das figuras 3.1 e 3.2, induz uma tendência de ocorrência destes problemas.

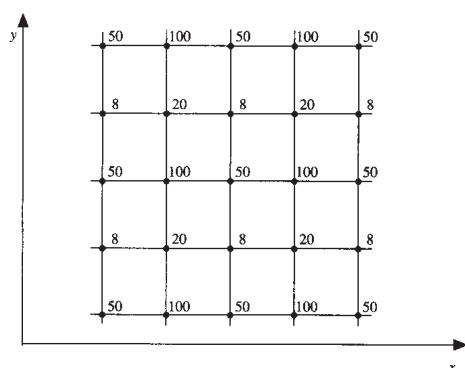


Figura 3.2: Distribuição de pressões, tipo tabuleiro de xadrez Anderson [1995].

De acordo com Anderson [1995], o facto descrito anteriormente, deixa de fazer sentido quando se utilizam as diferenças finitas progressivas ou regressivas, com aproximações de 1ª ordem. Contudo, realizar estes cálculos com aproximações de 1ª ordem induz um erro grande. Como os erros de 2ª ordem são aceitáveis e se pode à partida evitar um erro de discretização, são utilizadas para o efeito as diferenças finitas centrais e consequentemente a malha escalonada. Um exemplo da respectiva malha é apresentada na figura 3.3.

A malha escalonada tem o aspecto da figura 3.3. As pressões são calculadas nos pontos a cheio da malha, denominados por $(i-1, j)$, (i, j) , $(i+1, j)$, $(i, j-1)$, $(i, j+1)$ e as velocidades são calculadas

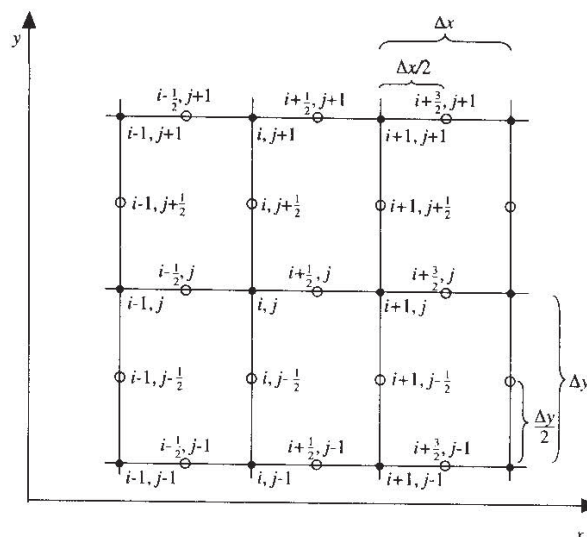


Figura 3.3: Malha escalonada Anderson [1995].

nos restantes pontos da malha, denominados por $(i - 1/2, j)$, $(i + 1/2, j)$, $(i, j - 1/2)$, $(i, j + 1/2)$. A velocidade em x designa-se por u , e é calculada nos pontos $(i - 1/2, j)$, $(i + 1/2, j)$, enquanto que a velocidade em y designa-se por v e é calculada nos pontos $(i, j - 1/2)$, $(i, j + 1/2)$. A função chave da malha escalonada, é calcular os perfis de pressão e os de velocidade em diferentes pontos da malha. A vantagem da malha escalonada é eliminar a possibilidade de existir um padrão do tipo tabuleiro de xadrez nos perfis de velocidade e nos de pressão, permitindo assim que exista uma evolução no escoamento.

Definida a malha e o seu tipo de construção, o algoritmo é estabelecido para o método de correção de pressão para resolver linearmente as equações diferenciais e diferenciam-se as equações que governam os fluidos. O método de correção de pressão é um processo iterativo, que para construir a iteração seguinte utiliza os resultados da iteração anterior. Assim a lógica do processo, segundo Patankar [1980], Anderson [1995] e Versteeg H. [2007], é dada pela seguinte ordem:

1. Iniciar o processo iterativo por estimativa do campo de pressões. A pressão estimada será dada por p^* ;
2. Utilizar os valores da pressão estimada p^* , para resolver u , v e w , a partir das equações de conservação de quantidade de movimento. Como estas velocidades estão associadas aos valores da p^* , também possuem o índice u^* , v^* e w^* ;
3. Como as velocidades são obtidas a partir do valores estimados da pressão estimada p^* , os valores u^* , v^* e w^* quando substituídos na equação da continuidade, não irão satisfazer necessariamente a conservação de massa. Assim, através da equação da continuidade, deduz-se a

pressão corrigida, p' , que posteriormente será adicionada a p^* . A soma das duas pressões resulta numa pressão corrigida, p , que irá criar um campo de velocidades que respeita a equação da continuidade. A equação 3.32 representa a pressão corrigida.

$$p = p^* + p' \quad (3.32)$$

As velocidades u , v e w são obtidas a partir de p' , tal que

$$u = u^* + u' \quad (3.33)$$

$$v = v^* + v' \quad (3.34)$$

$$w = w^* + w' \quad (3.35)$$

4. No ultimo passo do método iterativo, a equação 3.32, representa o novo valor de p , mas como o novo campo de pressões também representa a nova estimativa é atribuído o seu valor a p^* . Voltar ao passo 2 e repetir o processo até que o campo de velocidades satisfaça a equação da continuidade.

Os passos descritos anteriormente são a filosofia do método de correcção de pressão, onde através de um processo iterativo se tenta obter um perfil de velocidades que respeite a equação da continuidade. Assim que a equação da continuidade seja verificada, considera-se que o escoamento está correcto.

Para se poder calcular a pressão corrigida, p' , é necessário deduzir-se a equação de correcção da pressão. Esta necessidade surge pois não existe nenhuma equação de evolução para a pressão, ao contrário do que se verifica com a velocidade e a temperatura. A dedução da pressão corrigida é realizada á custa das equações de Navier-Stokes em x , y e z incompressíveis, isto é, equações 3.28, 3.29 e 3.30, respectivamente. Estas equações serão discretizadas, escolhendo as diferenças finitas progressivas para o tempo e as diferenças finitas centrais para o espaço. Nesta fase definem-se as ferramentas base do método da correcção da pressão.

Para melhor se entender a forma como se passa das equações diferenciais escritas para uma malha escalonada, discretizam-se as velocidades nos mesmos pontos que a pressão (equação 3.36, 3.37 e 3.38)

$$u_{i,j,k}^{n+1} = u_{i,j,k}^n + \Delta t \left[-\frac{u_{i+1,j,k}^2 - u_{i-1,j,k}^2}{2\Delta x} - \frac{uv_{i,j+1,k}^n - uv_{i,j-1,k}^n}{2\Delta y} - \frac{uw_{i,j,k+1}^n - uw_{i,j,k-1}^n}{2\Delta z} - \frac{p_{i+1,j,k}^n - p_{i,j,k}^n}{\Delta x} + \nu \left(\frac{u_{i+1,j,k}^n - 2u_{i,j,k}^n + u_{i-1,j,k}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1,k}^n - 2u_{i,j,k}^n + u_{i,j-1,k}^n}{\Delta y^2} + \frac{u_{i,j,k+1}^n - 2u_{i,j,k}^n + u_{i,j,k-1}^n}{\Delta z^2} \right) \right] \quad (3.36)$$

$$v_{i,j,k}^{n+1} = v_{i,j,k}^n + \Delta t \left[-\frac{vu_{i+1,j,k}^n - vu_{i-1,j,k}^n}{2\Delta x} - \frac{v^2_{i,j+1,k}^n - v^2_{i,j-1,k}^n}{2\Delta y} - \frac{vw_{i,j,k+1}^n - vw_{i,j,k-1}^n}{2\Delta z} - \frac{p_{i,j+1,k}^n - p_{i,j,k}^n}{\Delta y} + \nu \left(\frac{v_{i+1,j,k}^n - 2v_{i,j,k}^n + v_{i-1,j,k}^n}{\Delta x^2} + \frac{v_{i,j+1,k}^n - 2v_{i,j,k}^n + v_{i,j-1,k}^n}{\Delta y^2} + \frac{v_{i,j,k+1}^n - 2v_{i,j,k}^n + v_{i,j,k-1}^n}{\Delta z^2} \right) \right] \quad (3.37)$$

e

$$w_{i,j,k}^{n+1} = w_{i,j,k}^n + \Delta t \left[-\frac{wu_{i+1,j,k}^n - wu_{i-1,j,k}^n}{2\Delta x} - \frac{wv_{i,j+1,k}^n - wv_{i,j-1,k}^n}{2\Delta y} - \frac{w^2_{i,j,k+1}^n - w^2_{i,j,k-1}^n}{2\Delta z} - \frac{p_{i,j,k+1}^n - p_{i,j,k}^n}{\Delta z} + \nu \left(\frac{w_{i+1,j,k}^n - 2w_{i,j,k}^n + w_{i-1,j,k}^n}{\Delta x^2} + \frac{w_{i,j+1,k}^n - 2w_{i,j,k}^n + w_{i,j-1,k}^n}{\Delta y^2} + \frac{w_{i,j,k+1}^n - 2w_{i,j,k}^n + w_{i,j,k-1}^n}{\Delta z^2} \right) \right] \quad (3.38)$$

A discretização das velocidades nos mesmos nós da pressão, como foi explicado nesta secção pode originar problemas, portanto esta discretização foi realizada apenas a título de exemplo. Na figura 3.3 é apresentada uma malha escalonada que realça a lógica da discretização. Assim, as equações discretizadas para a malha escalonada passam a ter a forma das equações 3.39, 3.40 e 3.41.

$$u_{i+1/2,j,k}^{n+1} = u_{i+1/2,j,k}^n + \Delta t \left[-\frac{u^2_{i+3/2,j,k}^n - u^2_{i-1/2,j,k}^n}{2\Delta x} - \frac{uv_{i+1/2,j+1,k}^n - uv_{i+1/2,j-1,k}^n}{2\Delta y} - \frac{uw_{i+1/2,j,k+1}^n - uw_{i+1/2,j,k-1}^n}{2\Delta z} - \frac{p_{i+1,j,k}^n - p_{i,j,k}^n}{\Delta x} + \nu \left(\frac{u_{i+3/2,j,k}^n - 2u_{i+1/2,j,k}^n + u_{i-1/2,j,k}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{i+1/2,j+1,k}^n - 2u_{i+1/2,j,k}^n + u_{i+1/2,j,k-1}^n}{\Delta y^2} + \frac{u_{i+1/2,j,k+1}^n - 2u_{i+1/2,j,k}^n + u_{i+1/2,j,k-1}^n}{\Delta z^2} \right) \right] \quad (3.39)$$

,

$$v_{i,j+1/2,k}^{n+1} = v_{i,j+1/2,k}^n + \Delta t \left[-\frac{vu_{i+1,j+1/2,k}^n - vu_{i-1,j+1/2,k}^n}{2\Delta x} - \frac{v^2_{i,j+3/2,k}^n - v^2_{i,j-1/2,k}^n}{2\Delta y} - \frac{vw_{i,j+1/2,k+1}^n - vw_{i,j+1/2,k-1}^n}{2\Delta z} - \frac{p_{i,j+1,k}^n - p_{i,j,k}^n}{\Delta y} + \nu \left(\frac{v_{i+1,j+1/2,k}^n - 2v_{i,j+1/2,k}^n + v_{i-1,j+1/2,k}^n}{\Delta x^2} + \frac{v_{i,j+3/2,k}^n - 2v_{i,j+1/2,k}^n + v_{i,j-1/2,k}^n}{\Delta y^2} + \frac{v_{i,j+1/2,k+1}^n - 2v_{i,j+1/2,k}^n + v_{i,j+1/2,k-1}^n}{\Delta z^2} \right) \right] \quad (3.40)$$

e

$$\begin{aligned}
w_{i,j,k}^{n+1} = w_{i,j,k}^n + \Delta t \left[-\frac{wu_{i+1,j,k}^n - wu_{i-1,j,k}^n}{2\Delta x} - \frac{wv_{i,j+1,k}^n - wv_{i,j-1,k}^n}{2\Delta y} \right. \\
\left. - \frac{w^2_{i,j,k+1}^n - w^2_{i,j,k-1}^n}{2\Delta z} - \frac{p_{i,j,k+1}^n - p_{i,j,k}^n}{\Delta z} + \nu \left(\frac{w_{i+1,j,k}^n - 2w_{i,j,k}^n + w_{i-1,j,k}^n}{\Delta x^2} \right. \right. \\
\left. \left. + \frac{w_{i,j+1/2,k}^n - 2w_{i,j,k}^n + w_{i,j-1/2,k}^n}{\Delta y^2} + \frac{w_{i+1/2,j+1/2,k+1}^n - 2w_{i+1/2,j+1/2,k}^n + w_{i+1/2,j+1/2,k-1}^n}{\Delta z^2} \right) \right] \quad (3.41)
\end{aligned}$$

Nesta fase as equações são muito extensas, para facilitar a leitura e mesmo a escrita simplificaram-se as equações denominando os termos advectivos e os difusivos das equações 3.39, 3.40 e 3.41 em x , y e z por A , B e C , respectivamente (equação 3.42, 3.43 e 3.44).

$$\begin{aligned}
A = -\frac{u^2_{i+3/2,j,k}^n - u^2_{i-1/2,j,k}^n}{2\Delta x} - \frac{uv_{i+1/2,j+1,k}^n - uv_{i+1/2,j-1,k}^n}{2\Delta y} \\
- \frac{uw_{i+1/2,j,k+1}^n - uw_{i+1/2,j,k-1}^n}{2\Delta z} + \nu \left(\frac{u_{i+3/2,j,k}^n - 2u_{i+1/2,j,k}^n + u_{i-1/2,j,k}^n}{\Delta x^2} \right. \\
\left. + \frac{u_{i+1/2,j+1,k}^n - 2u_{i+1/2,j,k}^n + u_{i+1/2,j-1,k}^n}{\Delta y^2} + \frac{u_{i+1/2,j,k+1}^n - 2u_{i+1/2,j,k}^n + u_{i+1/2,j,k-1}^n}{\Delta z^2} \right) \quad (3.42)
\end{aligned}$$

,

$$\begin{aligned}
B = -\frac{vu_{i+1,j+1/2,k}^n - vu_{i-1,j+1/2,k}^n}{2\Delta x} - \frac{v^2_{i,j+3/2,k}^n - v^2_{i,j-1/2,k}^n}{2\Delta y} \\
- \frac{vw_{i,j+1/2,k+1}^n - vw_{i,j+1/2,k-1}^n}{2\Delta z} + \nu \left(\frac{v_{i+1,j+1/2,k}^n - 2v_{i,j+1/2,k}^n + v_{i-1,j+1/2,k}^n}{\Delta x^2} \right. \\
\left. + \frac{v_{i,j+3/2,k}^n - 2v_{i,j+1/2,k}^n + v_{i,j-1/2,k}^n}{\Delta y^2} + \frac{v_{i,j+1/2,k+1}^n - 2v_{i,j+1/2,k}^n + v_{i,j+1/2,k-1}^n}{\Delta z^2} \right) \quad (3.43)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
C = -\frac{wu_{i+1,j,k}^n - wu_{i-1,j,k}^n}{2\Delta x} - \frac{wv_{i,j+1,k}^n - wv_{i,j-1,k}^n}{2\Delta y} \\
- \frac{w^2_{i,j,k+1}^n - w^2_{i,j,k-1}^n}{2\Delta z} + \nu \left(\frac{w_{i+1,j,k}^n - 2w_{i,j,k}^n + w_{i-1,j,k}^n}{\Delta x^2} \right. \\
\left. + \frac{w_{i,j+1/2,k}^n - 2w_{i,j,k}^n + w_{i,j-1/2,k}^n}{\Delta y^2} + \frac{w_{i+1/2,j+1/2,k+1}^n - 2w_{i+1/2,j+1/2,k}^n + w_{i+1/2,j+1/2,k-1}^n}{\Delta z^2} \right) \quad (3.44)
\end{aligned}$$

Apresentada a simplificação substituem-se A , B e C nas equações 3.39, 3.40 e 3.41 e obtém-se uma equação menos extensa das equações de Navier-Stokes discretizadas (equações 3.45, 3.46 e 3.47).

$$u_{i+1/2,j,k}^{n+1} = u_{i+1/2,j,k}^n + A\Delta t - \frac{\Delta t}{\Delta x} (p_{i+1,j,k}^n - p_{i,j,k}^n) \quad (3.45)$$

$$v_{i,j+1/2,k}^{n+1} = v_{i,j+1/2,k}^n + B\Delta t - \frac{\Delta t}{\Delta y} (p_{i,j+1,k}^n - p_{i,j,k}^n) \quad (3.46)$$

$$w_{i,j,k}^{n+1} = w_{i,j,k}^n + C\Delta t - \frac{\Delta t}{\Delta z} (p_{i,j,k+1}^n - p_{i,j,k}^n) \quad (3.47)$$

Contudo a malha da figura 3.3, apenas serve para se entender a localização dos pontos no domínio real, pois no domínio computacional existe outra forma de escrever as equações discretizadas. Como se pode observar na figura 3.4 é necessário criar duas malhas à volta da malha principal, onde residem as variáveis como a pressão e a temperatura. As duas malhas criadas correspondem às velocidades u e v situando-se entre os nós nas direcções x e y da malha principal, como se pode ver na figura 3.4.

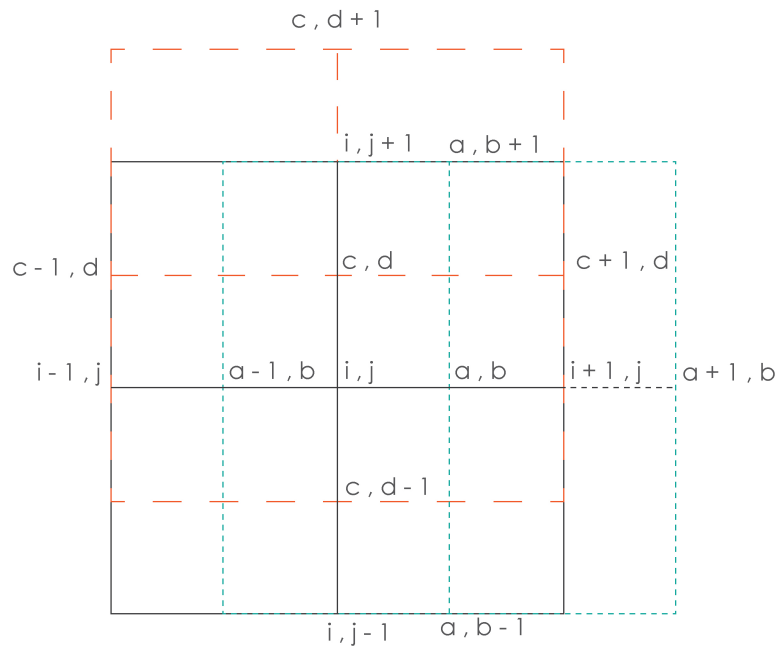


Figura 3.4: Malha escalonada computacional.

Tendo em conta a figura 3.4 e o raciocínio aplicado aquando da discretização das equações 3.39, 3.40 3.41 e de acordo com a malha da figura 3.3, obtêm-se as equações 3.48, 3.49 e 3.50 para o domínio computacional. Deve-se ter em atenção que, a equação 3.48 deve ser discretizada na malha azul tendo em conta a malha vermelha, nos termos em que v é multiplicado por u . O mesmo deve acontecer na equação 3.49 mas ao contrário, a discretização deve ser feita na malha vermelha tendo em conta a

malha azul, nos termos em que u é multiplicado por v .

$$A = -\frac{u^2_{i+1,j,k} - u^2_{i-1,j,k}}{2\Delta x} - \frac{uv_{i,j+1,k} - uv_{i,j-1,k}}{2\Delta y} - \frac{uw_{i,j,k+1} - uw_{i,j,k-1}}{2\Delta z} \\ + \nu \left(\frac{u^n_{i+1,j,k} - 2u^n_{i,j,k} + u^n_{i-1,j,k}}{\Delta x^2} + \frac{u^n_{i,j+1,k} - 2u^n_{i,j,k} + u^n_{i,j-1,k}}{\Delta y^2} + \frac{u^n_{i,j,k+1} - 2u^n_{i,j,k} + u^n_{i,j,k-1}}{\Delta z^2} \right) \quad (3.48)$$

$$B = -\frac{vu_{i+1,j,k} - vu_{i-1,j,k}}{2\Delta x} - \frac{v^2_{i,j+1,k} - v^2_{i,j-1,k}}{2\Delta y} - \frac{vw_{i,j,k+1} - vw_{i,j,k-1}}{2\Delta z} \\ + \nu \left(\frac{v^n_{i+1,j,k} - 2v^n_{i,j,k} + v^n_{i-1,j,k}}{\Delta x^2} + \frac{v^n_{i,j+1,k} - 2v^n_{i,j,k} + v^n_{i,j-1,k}}{\Delta y^2} + \frac{v^n_{i,j,k+1} - 2v^n_{i,j,k} + v^n_{i,j,k-1}}{\Delta z^2} \right) \quad (3.49)$$

e

$$C = -\frac{wu_{i+1,j,k} - wu_{i-1,j,k}}{2\Delta x} - \frac{wv_{i,j+1,k} - wv_{i,j-1,k}}{2\Delta y} - \frac{w^2_{i,j,k+1} - w^2_{i,j,k-1}}{2\Delta z} \\ + \nu \left(\frac{w^n_{i+1,j,k} - 2w^n_{i,j,k} + w^n_{i-1,j,k}}{\Delta x^2} + \frac{w^n_{i,j+1,k} - 2w^n_{i,j,k} + w^n_{i,j-1,k}}{\Delta y^2} + \frac{w^n_{i,j,k+1} - 2w^n_{i,j,k} + w^n_{i,j,k-1}}{\Delta z^2} \right) \quad (3.50)$$

Tendo em conta o que foi dito anteriormente, e como este processo é iterativo, a cada iteração os valores da pressão são iguais à pressão corrigida, $p = p^*$. Assim as equações 3.45, 3.46 e 3.47 também seguem a mesma lógica, de acordo com, a explicação dada no ponto 2 da descrição do método de correcção de pressão. Obtendo-se as equações 3.51, 3.52 e 3.53.

$$u^{*n+1}_{i+1/2,j,k} = u^{*n}_{i+1/2,j,k} + A^* \Delta t - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(p^{*n}_{i+1,j,k} - p^{*n}_{i,j,k} \right) \quad (3.51)$$

$$v^{*n+1}_{i,j+1/2,k} = v^{*n}_{i,j+1/2,k} + B^* \Delta t - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left(p^{*n}_{i,j+1,k} - p^{*n}_{i,j,k} \right) \quad (3.52)$$

$$w^{*n+1}_{i,j,k} = w^{*n}_{i,j,k} + C^* \Delta t - \frac{\Delta t}{\Delta z} \left(p^{*n}_{i,j,k+1} - p^{*n}_{i,j,k} \right) \quad (3.53)$$

Subtraindo as equações 3.51, 3.52 e 3.53 pelas equações 3.45, 3.46 e 3.47, respectivamente, obtém-se as equações 3.54, 3.55 e 3.56.

$$u'^{n+1}_{i+1/2,j,k} = u'^n_{i+1/2,j,k} + A' \Delta t - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(p'^n_{i+1,j,k} - p'^n_{i,j,k} \right) \quad (3.54)$$

$$v'_{i,j+1/2,k}{}^{n+1} = v'_{i,j+1/2,k}{}^n + B' \Delta t - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left(p'_{i,j+1,k}{}^n - p'_{i,j,k}{}^n \right) \quad (3.55)$$

$$w'_{i,j,k}{}^{n+1} = w'_{i,j,k}{}^n + C' \Delta t - \frac{\Delta t}{\Delta z} \left(p'_{i,j,k+1}{}^n - p'_{i,j,k}{}^n \right) \quad (3.56)$$

As equações 3.54, 3.55 e 3.56 são respectivamente as equações de quantidade de movimento em x , y e z , definidas pelas equações 3.32, 3.33, 3.34 e 3.35, em termos da pressão corrigida, p' , e das velocidades corrigidas, u' , v' e w' .

Obtidas as equações 3.54, 3.55 e 3.56, e de acordo com Anderson [1995], é possível deduzir uma equação para a correção de pressão, p' , insistindo no aspecto de que o campo de velocidades deve satisfazer a equação da continuidade.

Tendo em conta que o método da correção de pressão é um processo iterativo, não existe nenhuma razão inerente para que a equação deduzida para a pressão corrigida, p' , esteja fisicamente correcta, pois não será deduzida à luz de nenhum princípio físico apenas irá ter em conta a equação da continuidade. Existem dois aspectos que devem estar presentes, segundo Anderson [1995]:

1. Os valores obtidos pela equação devem convergir numa solução;
2. No limite da solução convergida, a equação deve ficar muito próxima de uma solução que satisfaça fisicamente a equação da continuidade.

No seguimento do que foi explicado cria-se então um artifício matemático para calcular os perfis de pressão corrigidos. A este artifício dá-se o nome de equação de correção da pressão. De acordo com Patankar [1980], A' , B' , C' , $u'{}^n$, $v'{}^n$ e $w'{}^n$ são iguais a zero nas equações 3.54, 3.55 e 3.56, obtendo-se as equações 3.57, 3.58 e 3.59.

$$u'_{i+1/2,j,k}{}^{n+1} = -\frac{\Delta t}{\Delta x} \left(p'_{i+1,j,k}{}^n - p'_{i,j,k}{}^n \right) \quad (3.57)$$

$$v'_{i,j+1/2,k}{}^{n+1} = -\frac{\Delta t}{\Delta y} \left(p'_{i,j+1,k}{}^n - p'_{i,j,k}{}^n \right) \quad (3.58)$$

e

$$w'_{i,j,k}{}^{n+1} = -\frac{\Delta t}{\Delta z} \left(p'_{i,j,k+1}{}^n - p'_{i,j,k}{}^n \right) \quad (3.59)$$

Esta é uma fase muito importante, pois definem-se as equações para a correção da velocidade. Tendo em conta as equações 3.33, 3.34 e 3.35, em ordem aos valores corrigidos, aplicadas num ponto qual-

quer para um instante seguinte, obtêm-se as equações 3.60, 3.61 e 3.62.

$$u'_{i+1/2,j,k}{}^{n+1} = u_{i+1/2,j,k}{}^{n+1} - u^*_{i+1/2,j,k}{}^{n+1} \quad (3.60)$$

$$v'_{i,j+1/2,k}{}^{n+1} = v_{i,j+1/2,k}{}^{n+1} - v^*_{i,j+1/2,k}{}^{n+1} \quad (3.61)$$

$$w'_{i,j,k}{}^{n+1} = w_{i,j,k}{}^{n+1} - w^*_{i,j,k}{}^{n+1} \quad (3.62)$$

Substituindo as equações 3.57, 3.58 e 3.59 nas equações 3.60, 3.61 e 3.62 acima descritas, obtêm-se as equações 3.63, 3.64 e 3.65 responsáveis por corrigir a velocidade, através da velocidade estimada e da pressão corrigida.

$$u_{i+1/2,j,k}{}^{n+1} = u^*_{i+1/2,j,k}{}^{n+1} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (p'_{i+1,j,k} - p'_{i,j,k}) \quad (3.63)$$

$$v_{i,j+1/2,k}{}^{n+1} = v^*_{i,j+1/2,k}{}^{n+1} - \frac{\Delta t}{\Delta y} (p'_{i,j+1,k} - p'_{i,j,k}) \quad (3.64)$$

$$w_{i,j,k+1/2}{}^{n+1} = w^*_{i,j,k+1/2}{}^{n+1} - \frac{\Delta t}{\Delta z} (p'_{i,j,k+1} - p'_{i,j,k}) \quad (3.65)$$

Nesta fase estão reunidas as condições para se criar a equação de correcção de pressão. Aplicando as diferenças finitas regressivas à equação 3.27, a equação da continuidade incompressível é representada pela equação 3.66.

$$\frac{u_{i+1/2,j,k} - u_{i-1/2,j,k}}{\Delta x} + \frac{v_{i,j+1/2,k} - v_{i,j-1/2,k}}{\Delta y} + \frac{w_{i,j,k+1/2} - w_{i,j,k-1/2}}{\Delta z} = 0 \quad (3.66)$$

Substituindo as equações 3.63, 3.64 e 3.65 sem o índice $n + 1$ obtêm-se a equação 3.67.

$$\begin{aligned} & \frac{u^*_{i+1/2,j,k} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (p'_{i+1,j,k} - p'_{i,j,k}) - u^*_{i-1/2,j,k} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (p'_{i,j,k} - p'_{i-1,j,k})}{\Delta x} \\ & + \frac{v^*_{i,j+1/2,k} - \frac{\Delta t}{\Delta y} (p'_{i,j+1,k} - p'_{i,j,k}) - v^*_{i,j-1/2,k} - \frac{\Delta t}{\Delta y} (p'_{i,j,k} - p'_{i,j-1,k})}{\Delta y} \\ & + \frac{w^*_{i,j,k+1/2} - \frac{\Delta t}{\Delta z} (p'_{i,j,k+1} - p'_{i,j,k}) - w^*_{i,j,k-1/2} - \frac{\Delta t}{\Delta z} (p'_{i,j,k} - p'_{i,j,k-1})}{\Delta z} = 0 \end{aligned} \quad (3.67)$$

Simplificando todos os termos tem-se a equação 3.68.

$$\begin{aligned} & \frac{u_{i+1/2,j,k}^* - u_{i-1/2,j,k}^*}{\Delta x} + \Delta t \frac{\left(-p'_{i+1,j,k} + 2p'_{i,j,k} - p'_{i-1,j,k}\right)}{\Delta x^2} \\ & + \frac{v_{i,j+1/2,k}^* - v_{i,j-1/2,k}^*}{\Delta y} + \Delta t \frac{\left(-p'_{i,j+1,k} + 2p'_{i,j,k} - p'_{i,j-1,k}\right)}{\Delta y^2} \\ & + \frac{w_{i,j,k+1/2}^* - w_{i,j,k-1/2}^*}{\Delta z} + \Delta t \frac{\left(-p'_{i,j,k+1} + 2p'_{i,j,k} - p'_{i,j,k-1}\right)}{\Delta z^2} = 0 \quad (3.68) \end{aligned}$$

Considerando que,

$$\begin{aligned} a &= \left[\frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} + \frac{2\Delta t}{(\Delta y)^2} + \frac{2\Delta t}{(\Delta z)^2} \right]; \quad b = -\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}; \quad c = -\frac{\Delta t}{(\Delta y)^2}; \quad d = -\frac{\Delta t}{(\Delta z)^2}; \\ e &= \frac{1}{\Delta x} [u_{i+1/2,j,k}^* - u_{i-1/2,j,k}^*] + \frac{1}{\Delta y} [v_{i,j+1/2,k}^* - v_{i,j-1/2,k}^*] + \frac{1}{\Delta z} [w_{i,j,k+1/2}^* - w_{i,j,k-1/2}^*] \end{aligned}$$

a equação de correcção de pressão é dada pela equação 3.69.

$$ap'_{i,j,k} + bp'_{i+1,j,k} + bp'_{i-1,j,k} + cp'_{i,j+1,k} + cp'_{i,j-1,k} + dp'_{i,j,k+1} + dp'_{i,j,k-1} + e = 0 \quad (3.69)$$

Com a equação da correcção de pressão deduzida, procede-se à manipulação algébrica para se resolver a equação 3.69 em ordem a $p'_{i,j,k}$. A equação 3.70 é responsável por calcular os campos de pressão corrigidos e por sua vez corrigir os campos de velocidade.

$$p'_{i,j,k} = -\frac{1}{a} \left[bp'_{i+1,j,k} + bp'_{i-1,j,k} + cp'_{i,j+1,k} + cp'_{i,j-1,k} + dp'_{i,j,k+1} + dp'_{i,j,k-1} + e \right] \quad (3.70)$$

Mais uma vez relembra-se que a forma como se discretiza o domínio real não é igual à forma como se discretiza o domínio computacional, portanto o coeficiente e é discretizado na malha da figura 3.4. Sendo a velocidade em u discretizada na malha azul e a velocidade em v discretizada na malha vermelha, a equação 3.71 é a equação discretizada no domínio computacional.

$$e = \frac{1}{\Delta x} [u_{i,j,k}^* - u_{i-1,j,k}^*] + \frac{1}{\Delta y} [v_{i,j,k}^* - v_{i,j-1,k}^*] + \frac{1}{\Delta z} [w_{i,j,k+1}^* - w_{i,j,k-1}^*] \quad (3.71)$$

Assim deduziu-se um artifício numérico para calcular o campo de pressões para qualquer escoamento. Este artifício numérico denomina-se por equação da correcção de pressão. Segundo Anderson [1995], matematicamente, esta equação tem um comportamento elíptico consistente com o facto de que a variação de pressão num determinado ponto se irá propagar por todo o escoamento. As equações elípticas são um caso clássico da matemática e existem vários métodos para a sua resolução, normalmente numéricos e iterativos. Alguns dos métodos utilizados para resolver a equação 3.71 são o método de

Jacobi, o de Gauss-Seidel e o de 'Sucessive Over-Relaxation' ou (SOR), entre outros (ver referência Versteeg H. [2007]).

Foram experimentados, os métodos de Jacobi, o de Gauss-Seidel e o SOR, todos eles resolveram a equação de correcção de pressão e apresentaram uma solução. Embora todos resolvam a equação de correcção de pressão existe uma diferença entre eles, que é a velocidade de convergência. A convergência de uma variável de escoamento consiste na obtenção de um resíduo tão pequeno, que se considere que, mesmo que se continue a iterar, a variável não irá mudar. Tendo em conta o significado de convergência, a sua velocidade é importante pois, será responsável por diminuir o tempo de computação. O método de Jacobi mostrou ser o mais lento e o SOR o mais rápido, estando a sua programação no anexo C. Pelos motivos apresentados anteriormente, o método utilizado para resolver a equação 3.71 foi o SOR, pois é o que necessita de menor número de iterações para convergir, ou seja, um custo computacional menor. Nos programas utilizados, MatLab e OpenFOAM, é utilizado o método SOR, para calcular as equações elípticas.

Ao se deduzir a equação 3.71, equação de correcção de pressão, é necessário ter em mente que, a sua solução está dependente do número de iterações. Assim como, apenas foi deduzida com o intuito de chegar a um ponto de convergência tal, que a convergência do campo de velocidades satisfaça a equação da continuidade.

3.4 Turbulência

A maioria dos escoamentos de engenharia são turbulentos e em climatização, embora existam regiões laminares, são considerados praticamente todos turbulentos, segundo Chen Q [2002]. De acordo com as formulações tecidas na secção 3.1 e os cálculos realizados (ver anexo B), obtiveram-se números de Reynolds elevados que indicam a presença de turbulência no escoamento. Assim, deve ser aplicado um modelo de turbulência ao estudo, com o objectivo de contabilizar os efeitos da turbulência no escoamento. O modelo utilizado para contabilizar os efeitos da turbulência será o $k - \epsilon$, que foi descrito no capítulo 2.7. Foi escolhido este modelo pois, de acordo com Chen Q [2002], é um bom ponto de partida, e para se aplicar o modelo é necessário adicionar termos ao tensor das tensões nas equações de conservação de quantidade de movimento, segundo Ying Sun [2005]. Assim, estas passam a ter novas dependências que por sua vez são re-calculadas através das equações 2.73 e 2.74 de forma a satisfazerem matematicamente o sistema de equações.

De acordo com Ying Sun [2005] e Launder BE [1974], nas equações 2.73 e 2.74 do modelo $k - \epsilon$, existem constantes que devem ser definidas, estas são definidas pelos valores apresentados na tabela 3.1.

Tabela 3.1: Constantes do modelo $k - \epsilon$.

C_μ	C_1	C_2	σ_k	σ_ϵ
0,09	1,44	1,92	1,00	1,30

Segundo Versteeg H. [2007], existem parâmetros que devem ser calculados para definir inicialmente o espectro energético, sendo a velocidade para o caso 2D de 0,15 m/s. O comprimento que se considerou foi a altura da sala com 3 m. Com os valores definidos calcula-se o espectro energético do escoamento que é definido pelas seguintes grandezas:

- Escala do comprimento turbulento [L];
- Comprimento característico da sala [L_s];
- Energia cinética turbulenta [k];
- Taxa de dissipação turbulenta [ϵ];
- Viscosidade turbulenta [ν_t].

Estes parâmetros providenciam valores que irão servir como condição inicial, como se poderá observar na secção 3.5. Os parâmetros acima descritos são calculados através das equações empíricas 3.72 á 3.75, segundo Versteeg H. [2007].

$$L = 0.07L_s \quad (3.72)$$

$$k = \frac{3}{2}(uL)^2 \quad (3.73)$$

$$\epsilon = \frac{C_\mu^{0.75}(k)^{1.5}}{L} \quad (3.74)$$

$$\nu_t = \frac{C_\mu(k)^2}{\epsilon} \quad (3.75)$$

Com o espectro energético definido, os termos turbulentos que se acrescentam às equações ficam definidos para uma condição inicial. Nesta fase, as equações que governam o escoamento estão definidas. Para garantir a evolução do escoamento, é necessário definir as condições iniciais e de fronteira.

Os fenómenos de turbulência apenas serão contabilizados no programa OpenFOAM. No programa desenvolvido em MatLab, ver anexo C, não será contabilizada a turbulência. O programa desen-

volvido em MatLab apenas representa escoamentos laminares e o programa OpenFOAM, representa escoamentos turbulentos.

3.5 Condições iniciais e de fronteira

De uma forma intuitiva é possível notar-se que o escoamento por si só, sem nenhuma informação relativa à fronteira, não é capaz de se desenvolver. Num caso hipotético, se as fronteiras não fossem definidas, o escoamento não sentiria qualquer alteração e iria permanecer em repouso a nível físico. A nível matemático, simplesmente nunca se obteria uma solução pois estas condições, quando bem definidas, garantem uma solução. Assim, é necessário definir as condições iniciais e as condições de fronteira. A definição das condições iniciais e de fronteira é de extrema importância pois está intimamente relacionada com a caracterização matemática das equações diferenciais parciais. Existem 3 tipos de caracterizações distintas: as equações hiperbólicas, as elípticas e as parabólicas. Não é o objectivo do presente trabalho explicar este tema, para tal ver as referências Versteeg H. [2007], Joel H. Ferziger [2002], Pletcher [1997] e Anderson [1995].

As condições iniciais definem o problema no instante 0 segundos, onde ainda não houve nenhuma evolução. Apenas definem quais as condições iniciais de velocidade, pressão, temperatura e turbulência para $t = 0$. As condições iniciais são definidas nas matrizes e utilizadas apenas no tempo inicial. A partir do momento em que $t = 0$ passa a $t = 0 + \Delta t$, as condições iniciais deixam de ser utilizadas, dando lugar às condições de fronteira. De acordo com D. Cheng [2005] e Cooper [1998], as condições de fronteira podem ser de Dirichlet, de Von Neuman e de Robin.

- Dirichlet - Especifica os valores que a solução necessita de ter ao longo do domínio fronteira;
- Von Neuman - Especifica os valores que a derivada na direcção normal da solução necessita de ter ao longo do domínio fronteira;
- Robin - Resulta da junção das condições de Dirichlet com as de Von Neuman;

Consoante a caracterização da equação, as condições iniciais e de fronteira irão definir como se dará a evolução do escoamento.

Neste trabalho são realizados diferentes estudos, e na altura de definir as condições iniciais e de fronteira é que se diferenciam. As variáveis responsáveis por diferenciar os estudos são a velocidade e a temperatura, como se poderá observar no seguimento desta secção. Nesta fase definem-se as condições iniciais e de fronteira das velocidades em x , y e z , da pressão, da temperatura e do espectro de energia turbulenta para todo o problema. As figuras 3.5, 3.6 e 3.7 apresentadas, representam o

laboratório a 2D. As linhas das figuras 3.5, 3.6 e 3.7, representam as paredes, a seta que aponta para dentro da sala é o insuflador e a que aponta para fora é o extractor.

Serão realizados dois estudos, o caso I e o caso II. O que os diferencia é a direcção com que o ar será insuflado no laboratório. No caso I o ar é introduzido na sala com uma direcção ortogonal ao tecto, como se pode ver na figura 3.5a e no caso II o ar é introduzido na sala com direcções opostas e com um ângulo em relação ao tecto de 10° , como se pode observar na figura 3.5b. Para ambos os casos existe uma extracção cuja direcção é ortogonal com o tecto, como se pode observar na figura 3.5. Para cada um dos casos, caso I e caso II, serão realizados dois estudos um em condições de inverno, de acordo com as condições da figura 3.7a e outro em condições de verão, de acordo com as condições da figura 3.7b.

Velocidade - V

Nos casos de estudo que se irão realizar, serão utilizados dois tipos de difusores. No caso da figura 3.5a é utilizado um difusor, cuja insuflação é realizada na direcção ortogonal ao tecto. No caso da figura 3.5b é utilizado um difusor que deflete o escoamento à sua saída com um determinado ângulo. Estipulou-se que a sala tem como condição inicial na parte de dentro do escoamento o valor de 0 m/s .

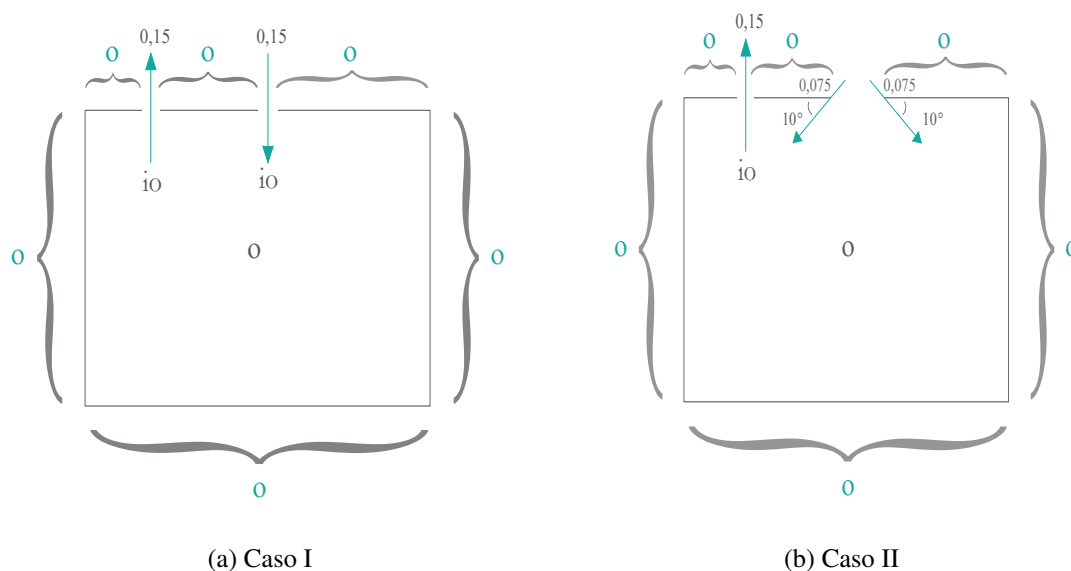


Figura 3.5: Condições de fronteira para a intensidade da velocidade a) caso I b) caso II, do perfil da sala.

Na tabela 3.2 estão indicados os valores utilizados para cada um dos casos. Como as condições são todas de Dirichlet, apenas têm de ser especificadas nas fronteiras respectivas, portanto a sua definição será do tipo $V_{i,j} = f$, onde f é o valor de uma função qualquer.

Tabela 3.2: Condições de fronteira - Velocidade V .

Fronteira	Condição	Valor (caso I)	Valor (caso II)
Chão	Dirichlet	0	0
Parede Esquerda	Dirichlet	0	0
Parede Direita	Dirichlet	0	0
Tecto	Dirichlet	0	0
Insuflador	Dirichlet	0,15	0,075
Extractor	Dirichlet	0,15	0,15

Pressão - p

As condições de pressão são iguais para todos os casos. A pressão é definida em função da velocidade pois uma depende da outra, ou seja, com as velocidades definidas não existe uma necessidade de definir a pressão, pois a equação de correcção de pressão com uma condição de fronteira adequada mantém a estabilidade do escoamento. O perfil de pressões apresentado na figura 3.6 será utilizado no caso I e no caso II.

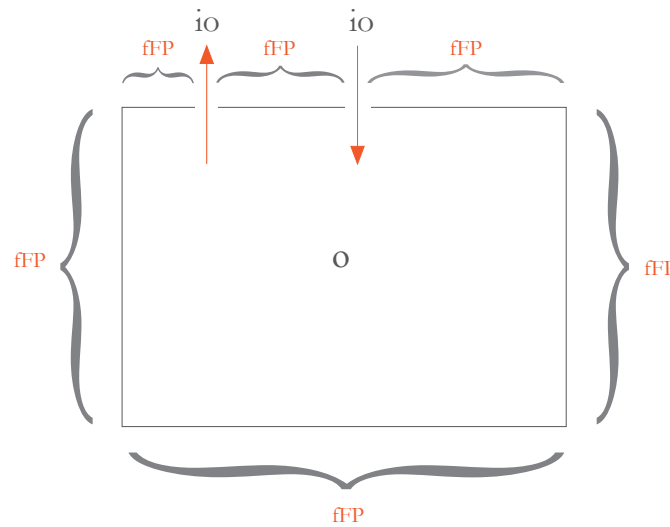


Figura 3.6: Condições de fronteira da pressão.

Na tabela 3.3 estão indicados os valores da pressão para cada um dos casos. As condições definidas são todas de Von Neuman; o que significa que os seus valores dependem todos de uma derivada, consequentemente, as fronteiras dependem das regiões à sua volta. Os valores `fixedFluxPressure` e `inletOutlet` das fronteiras chão, parede esquerda e direita e tecto são funções definidas no OpenFOAM. Para se perceber melhor a sua função, ver NEXTfoam [2014].

Tabela 3.3: Condições de fronteira - Pressão **p**.

Fronteira	Condição	Valor (caso I e II)
Chão	Von Neuman	fixedFluxPressure (fFP)
Parede Esquerda	Von Neuman	fixedFluxPressure (fFP)
Parede Direita	Von Neuman	fixedFluxPressure (fFP)
Tecto	Von Neuman	fixedFluxPressure (fFP)
Insuflador	Von Neuman	inletOutlet (io)
Extractor	Von Neuman	inletOutlet (io)

Temperatura - T

Tendo em conta que são realizados estudos para as condições de inverno e de verão, as suas condições iniciais e de fronteira da temperatura serão diferentes. Em relação aos casos de estudo da temperatura, os perfis utilizados são os da figura 3.7. Tendo como condição inicial na parte de dentro do escoamento em condições de inverno o valor de 289.15 K e em condições de verão 301.15 K .

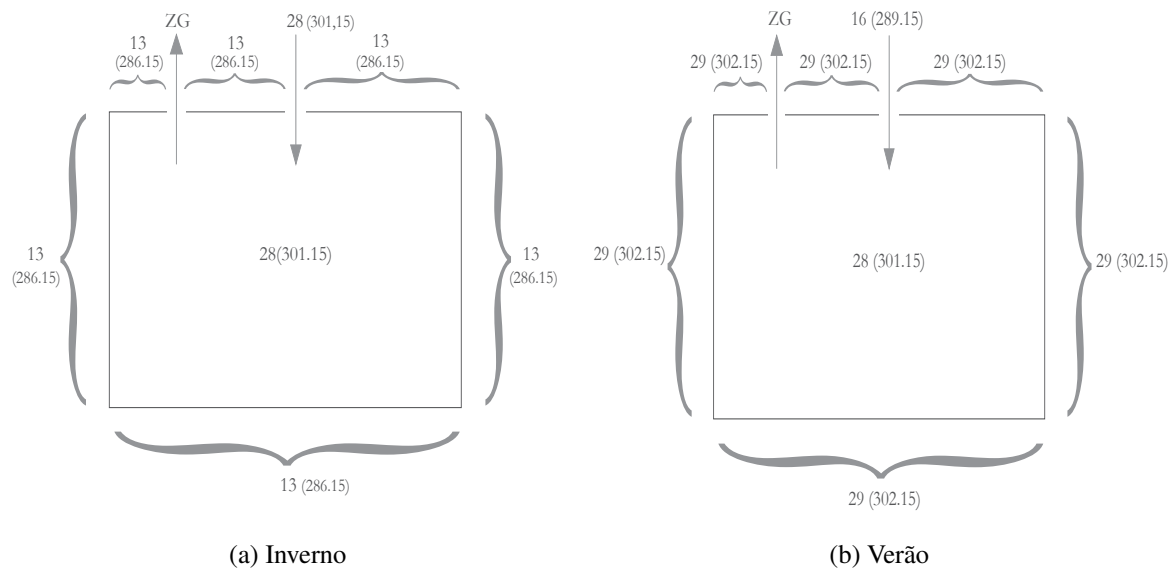


Figura 3.7: Condições de fronteira de temperatura a) condições de Inverno b) condições de Verão.

Na tabela 3.4 estão indicados os valores da temperatura utilizados para cada um dos casos. As condições de Dirichlet apenas têm de ser especificadas na fronteira respectiva, portanto a sua definição será do tipo $T_{i,j} = f$, onde f é o valor de uma função qualquer. O valor ZG no extractor representa que na fronteira se considera que $\partial T / \partial n = 0$, consistente com um tipo de condição fronteira adiabática, onde não há trocas de calor.

Tabela 3.4: Condições de fronteira - Temperatura T.

Fronteira	Condição	Inverno °C(°K)	Verão °C(°K)
Chão	Dirichlet	13 (286,15)	29 (302,15)
Parede Esquerda	Dirichlet	13 (286,15)	29 (302,15)
Parede Direita	Dirichlet	13 (286,15)	29 (302,15)
Tecto	Dirichlet	13 (286,15)	29 (302,15)
Insuflador	Dirichlet	28 (301,15)	16 (289,15)
Extractor	Von Neuman	zeroGradient (ZG)	zeroGradient (ZG)

Difusividade Térmica turbulenta - α_t

A difusividade térmica turbulenta é um parâmetro da turbulência relativo à equação da energia. As condições iniciais definidas são completamente dependentes do escoamento, tendo como condição inicial na parte de dentro do escoamento o valor de $0 \text{ m}^2/\text{s}$. Foi escolhido o valor de $0 \text{ m}^2/\text{s}$ pois este parâmetro evolui conforme os parâmetros do escoamento vão mudando. A figura 3.8, representa o perfil de condições de fronteira utilizado para o caso I e o caso II.

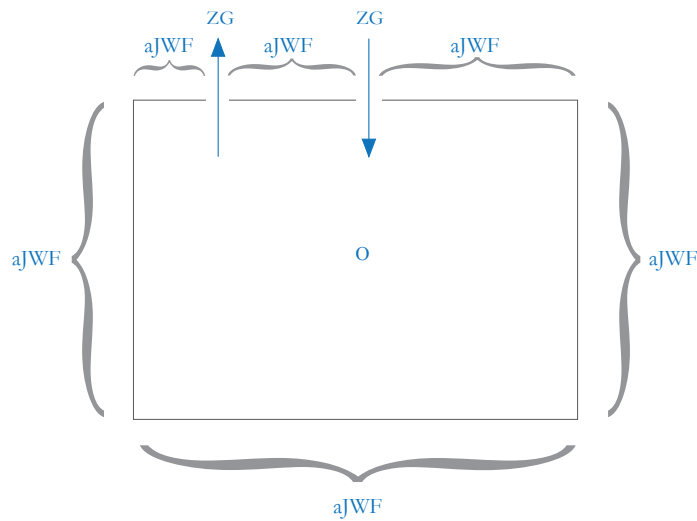


Figura 3.8: Condições de fronteira da difusividade térmica turbulenta.

Na tabela 3.5 estão indicados os valores, para cada um dos casos. As condições definidas são todas de Von Neuman, significando que os seus valores dependem todos de uma derivada. Conseqüentemente, as fronteiras dependem das regiões à sua volta. Os valores alphaJayatilekeWallFunction das fronteiras chão, parede esquerda e direita e tecto são funções definidas no OpenFOAM. Para se perceber melhor a sua função ver NEXTfoam [2014]. O valor ZG, no insuflador e no extractor, representa que na fronteira se considera que $\partial\alpha_t/\partial n = 0$.

Tabela 3.5: Condições de fronteira - Difusividade térmica turbulenta α_t .

Fronteira	Condição	Valor (caso I e II)
Chão	Von Neuman	alphaJayatillekeWallFunction (aJWF)
Parede Esquerda	Von Neuman	alphaJayatillekeWallFunction (aJWF)
Parede Direita	Von Neuman	alphaJayatillekeWallFunction (aJWF)
Tecto	Von Neuman	alphaJayatillekeWallFunction (aJWF)
Insuflador	Von Neuman	ZG
Extractor	Von Neuman	ZG

Energia cinética turbulenta - k

A energia cinética turbulenta, k , é um parâmetro da turbulência, obtido à custa da equação 3.73. Este parâmetro é utilizado para definir a viscosidade cinemática turbulenta e consequentemente as equações de Navier-Stokes e da energia. Tendo como condição inicial na parte de dentro do escoamento $0,0015 \text{ m}^2/\text{s}^2$, este valor é calculado de acordo com a equação 3.74. A figura 3.9 representa o perfil de condições de fronteira utilizado para o caso I e o caso II.

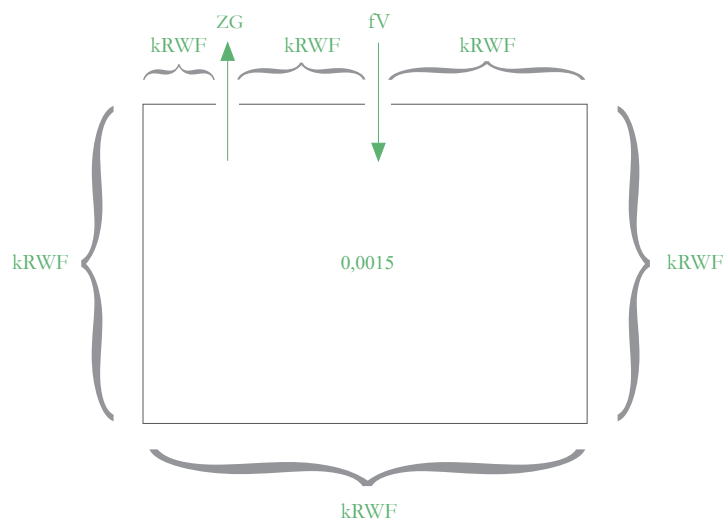


Figura 3.9: Condições de fronteira da energia cinética turbulenta.

Na tabela 3.6 estão indicados os valores de energia cinética turbulenta, para cada um dos casos. As condições definidas são todas de Von Neuman, à excepção do insuflador, o que significa que os seus valores dependem todos de uma derivada. Consequentemente, as fronteiras dependem das regiões á sua volta. Os valores $kqRWallFunction$ das fronteiras chão, parede esquerda e direita e tecto são funções definidas no OpenFOAM. Para se perceber melhor a sua função, ver NEXTfoam [2014]. O valor ZG, no extractor, representa que na fronteira se considera que $\partial k / \partial n = 0$.

Tabela 3.6: Condições de fronteira - Energia cinética turbulenta k .

Fronteira	Condição	Valor (caso I e II)
Chão	Von Neuman	kqRWallFunction (kRWF)
Parede Esquerda	Von Neuman	kqRWallFunction (kRWF)
Parede Direita	Von Neuman	kqRWallFunction (kRWF)
Tecto	Von Neuman	kqRWallFunction (kRWF)
Insuflador	Dirichlet	0,0015
Extractor	Von Neuman	ZG

Taxa de dissipação da energia turbulenta - ϵ

A taxa de dissipação da energia turbulenta, ϵ , é um parâmetro da turbulência, obtido à custa da equação 3.74, também utilizada para definir a viscosidade cinemática turbulenta e consequentemente as equações de Navier-Stokes e da energia. Tendo como condição inicial na parte de dentro do escoamento $4,4929 \times 10^{-5} m^2/s^3$, este valor é calculado de acordo com a equação 3.74. A figura 3.10 representa o perfil de condições de fronteira utilizado para o caso I e o caso II.

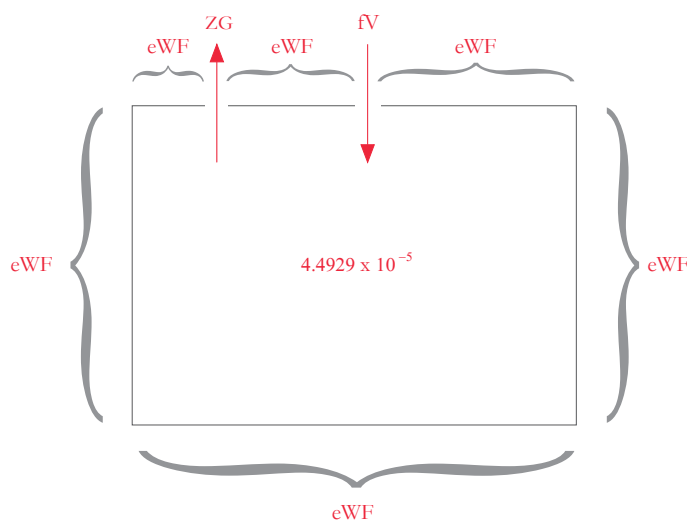


Figura 3.10: Condições de fronteira da taxa de dissipação turbulenta.

Na tabela 3.7 estão indicados os valores de taxa de dissipação da energia turbulenta, para cada um dos casos. As condições definidas são todas de Von Neuman, à excepção do insuflador, significando que os seus valores dependem todos de uma derivada. Consequentemente, as fronteiras dependem das regiões à sua volta. Os valores epsilonWallFunction das fronteiras chão, parede esquerda e direita e tecto são funções definidas no OpenFOAM. Para se perceber melhor a sua função ver NEXTfoam [2014]. O valor ZG, no extractor, representa que na fronteira se considera que $\partial\epsilon/\partial n = 0$.

Tabela 3.7: Condições de fronteira - Taxa de dissipação da energia turbulenta k .

Fronteira	Condição	Valor (caso I e II)
Chão	Von Neuman	epsilonWallFunction (eWF)
Parede Esquerda	Von Neuman	epsilonWallFunction (eWF)
Parede Direita	Von Neuman	epsilonWallFunction (eWF)
Tecto	Von Neuman	epsilonWallFunction (eWF)
Insuflador	Dirichlet	4,49E-05
Extractor	Von Neuman	ZG

Viscosidade cinemática turbulenta - ν_t

A viscosidade cinemática turbulenta é um parâmetro da turbulência, obtido à custa da equação 3.75, por sua vez dependente das equações 3.73 e 3.74. Este parâmetro tem como condição inicial na parte de dentro do escoamento $0,044 \text{ m}^2/\text{s}$, e este valor é calculado de acordo com o auxílio da equação 3.75. A figura 3.11, representa o perfil de condições de fronteira utilizado para o caso I e o caso II.

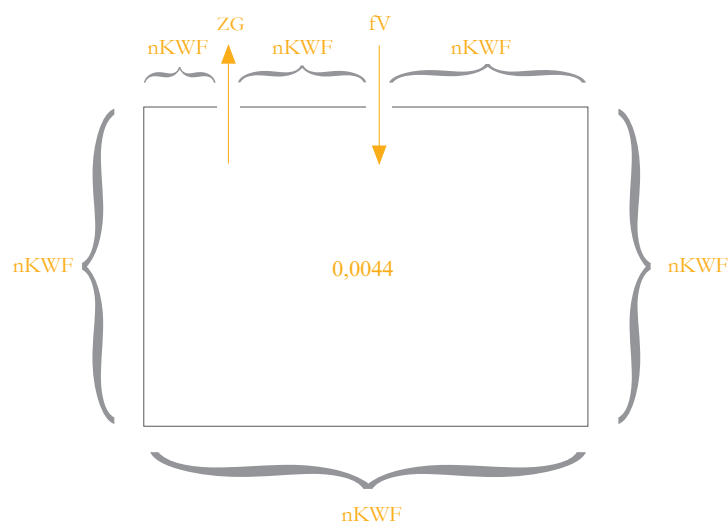


Figura 3.11: Condições de fronteira da viscosidade cinemática turbulenta.

Na tabela 3.8 estão indicados os valores de viscosidade cinemática turbulenta, para cada um dos casos. As condições definidas são todas de Von Neuman, o que significa que os seus valores dependem todos de uma derivada, o que normalmente significa que dependem das regiões á sua volta. Os valores $nKWallFunction$ das fronteiras chão, parede esquerda e direita e tecto são funções definidas no OpenFOAM. Para se perceber melhor a sua função ver NEXTfoam [2014]. O valor ZG , no extractor, representa que na fronteira se considera que $\partial\nu_t/\partial n = 0$.

Tabela 3.8: Condições de fronteira - Viscosidade cinemática turbulenta ν_t .

Fronteira	Condição	Valor (caso I e II)
Chão	Von Neuman	nutKWallFunction (nKWF)
Parede Esquerda	Von Neuman	nutKWallFunction (nKWF)
Parede Direita	Von Neuman	nutKWallFunction (nKWF)
Tecto	Von Neuman	nutKWallFunction (nKWF)
Insuflador	Dirichlet	0,0044
Extractor	Von Neuman	ZG

Definidas as condições iniciais e as de fronteira pode-se afirmar que o problema está definido. Para se encontrar correctamente definido só depois de se correrem os programas e se concluir que, o problema tem uma solução, que esta é única e que a solução depende continuamente dos parâmetros e informação formulados.

Foi desenvolvida neste capítulo a base necessária para se desenvolver um pré-processador e um *solver* em qualquer linguagem de programação. Para concluir, foram discretizadas numa malha escalonada a equação da continuidade incompressível (equação 3.27), as equações de Navier-stokes incompressíveis (equações 3.28, 3.29 e 3.30) e a equação da energia (3.31). Posteriormente, foi deduzida a equação de correcção da pressão, seguida da apresentação das equações do modelo turbulento $k - \epsilon$. Finalmente foram estabelecidas as condições iniciais e de fronteira e os parâmetros turbulentos.

Capítulo 4

Análise de resultados

Os resultados são fruto do *solver*, responsável por calcular todos os perfis do escoamento e também do que foi explicado e introduzido na formulação do caso de estudo (capítulo 3) e da teoria que o fundamenta (capítulo 2). A nível de computação, esta fase é denominada por pós-processamento, pois através dos resultados obtidos criam-se gráficos que permitem a visualização dos fenómenos físicos de forma mais perceptível. Através da observação das figuras tecem-se comentários acerca do escoamento e dos comportamentos verificados.

Neste capítulo são analisados quatro casos de estudo para o escoamento incompressível e turbulento, dominado pelas forças de impulsão. Estes casos de estudo consistem na avaliação do escoamento do ar com variação do ângulo de entrada de ar na insuflação, para condições de inverno e verão.

Para o caso I e para o caso II são definidas as condições de Verão e de Inverno, estas condições são definidas a partir das condições iniciais e de fronteira. Assim em condições de Inverno define-se como temperatura inicial a temperatura mais fria na sala e como condições de fronteira a temperatura de insuflação mais quente. Enquanto que, em condições de Verão define-se como temperatura inicial a temperatura mais quente na sala e como condições de fronteira a temperatura de insuflação mais fria. Desta forma, quando o *solver* iniciar as condições iniciais irão variar até que se atinja um perfil de temperaturas igual à temperatura de insuflação, sendo a temperatura de insuflação uma condição de fronteira que se mantém sempre constante.

Existem duas características do escoamento que irão ser avaliadas, o regime transiente e o regime estacionário. Os fenómenos transientes são caracterizados pela variação das propriedades do escoamento ao longo do tempo e os fenómenos estacionários, são caracterizados pelas residuais variações das propriedades do escoamento enquanto se realizam iterações. Estas duas caracterizações representam fases distintas do escoamento e cada uma destas fases têm características diferentes para serem

avaliadas. Isto porque podem observar-se fenómenos e movimentações de ar no escoamento, que na fase de projecto influenciam a localização e a geometria dos insufladores e das grelhas de extracção.

Serão observadas, apenas no caso transiente, variações de velocidade e de pressão devido às variações de temperatura. Este fenómeno resulta das formulações realizadas na secção 3.1 e na secção 3.2, onde é implementada a aproximação de Boussinesq. No caso estacionário é expectável que todas as propriedades estejam bem definidas e não variem muito. Relativamente ao caso transiente podem tirar-se conclusões acerca do perfil de velocidades ao longo do tempo e acerca do tempo necessário para se obterem as temperaturas desejadas no laboratório. No caso estacionário podem tirar-se conclusões acerca da energia disponível no espaço, o caudal da sala e a pressão a que estará sujeita. Existem observações que são comuns a todas as figuras. Para a descrição das mesmas não se tornar repetitiva serão enunciadas a seguir.

As figuras 4.1 e 4.3, que representam a velocidade e a pressão, são o complemento uma da outra, pois nas zonas em que a velocidade é elevada a pressão terá de ser menor e vice-versa. De acordo com a equação de Bernoulli, segundo Subramanian [2014] e White [2003], este fenómeno é comum a todos os gráficos de velocidade e de pressão, sendo um bom indicador de que o escoamento está a evoluir de forma coerente.

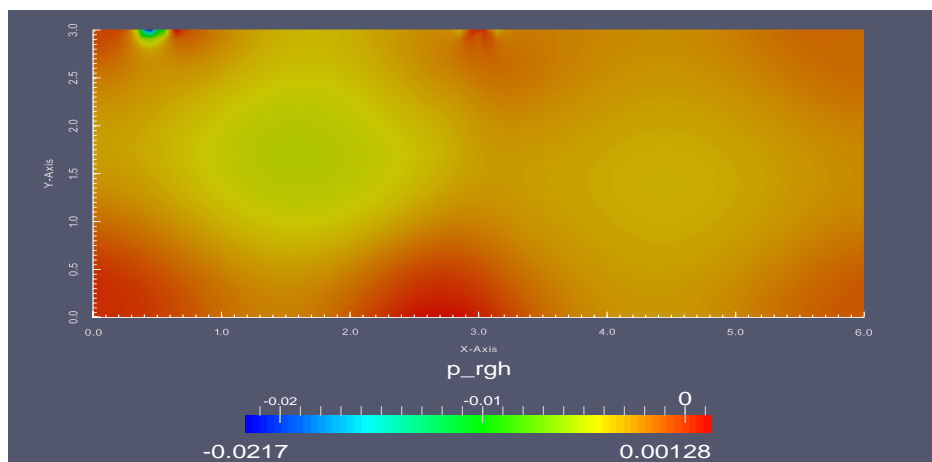


Figura 4.1: Perfil de pressão no inverno sem grelhas, caso estacionário

Há uma excepção à regra em relação ao que foi dito anteriormente. Observando-se a figura 4.1, verifica-se que na insuflação (coordenadas $(x, y) = (3, 3)$) e na extracção ((coordenadas $(x, y) = (0.5, 3)$), dá-se um aumento de pressão e uma diminuição de pressão, respectivamente. Este fenómeno é coerente, pois é necessário haver uma pressão elevada para se dar o escoamento para o interior da sala e uma pressão inferior para se dar o escoamento para fora da sala. Embora as velocidades, em sentidos opostos, sejam as duas elevadas.

Os resultados em regime estacionário e transiente do escoamento do ar em condições de Inverno e de Verão apresentados, são obtidos a partir do programa desenvolvido em MatLab e do programa OpenFOAM. No programa desenvolvido em MatLab criou-se um algoritmo que permite obter um escoamento laminar e estacionário, enquanto que no programa OpenFOAM foram desenvolvidos os casos transientes para um escoamento turbulento, dominado pelas forças de impulsão.

Desta forma pode-se observar a figura 4.2 onde se obteve um perfil de velocidades dentro da sala em estudo para um escoamento incompressível laminar em condições de Verão, obtido este através do programa desenvolvido em MatLab.

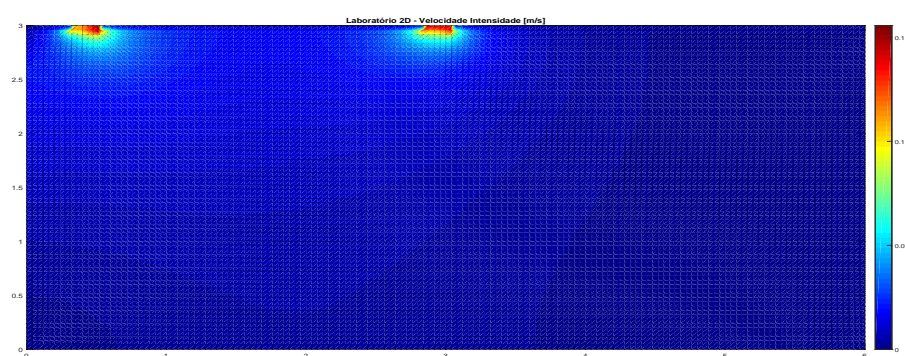


Figura 4.2: Perfil de velocidades em MatLab, regime estacionário

Na figura 4.2 é possível observar a entrada do ar ao meio da sala e a sua difusão pela sala, através das linhas que marcam a evolução da velocidade ao longo do espaço. É também possível observar a extracção a retirar o ar dentro da sala, o que demonstra alguma coerência em relação ao que era expectável no desenvolvimento do escoamento. Embora seja uma aproximação positiva, pois fornece uma ideia geral acerca do escoamento e de como este irá evoluir, este escoamento é do tipo laminar. Portanto, não é o que se pretende estudar pois na secção 3.1 verificou-se que o escoamento era turbulento e dominado pelas forças de impulsão.

Neste sentido foi necessário recorrer ao uso do programa OpenFOAM, uma ferramenta computacional para resolver problemas de mecânica dos fluidos computacional. Este programa contém vários *solvers* já desenvolvidos e utilizados actualmente por empresas, o solver que foi utilizado para este estudo foi um *solver* que tem em conta as forças de impulsão através da aproximação de Boussinesq e os fenómenos de turbulência.

Na figura 4.3 observa-se o escoamento turbulento com a aproximação de Boussinesq em regime estacionário em condições de verão.

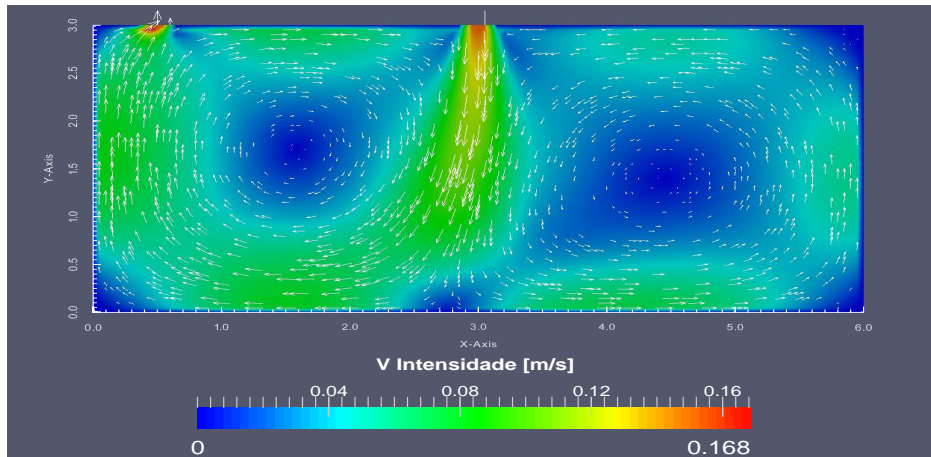


Figura 4.3: Perfil de velocidades em OpenFOAM, regime estacionário

Comparando a figura 4.3 com a figura 4.2 é possível observar que a influência da extracção e da insuflação no escoamento são muito similares embora a sua influência ao longo da sala não seja a mesma. Isto devido aos fenómenos turbulentos que não eram contabilizados assim como as diferenças de temperatura, que como se pode observar têm uma grande influência.

As velocidades ao redor das coordenadas $(x, y) = (3, 1.5)$, são superiores em relação a toda a sala. Isto porque, o insuflador (na coordenada $(x, y) = (3, 3)$) introduz ar a 0,15 m/s na direcção y . Deste modo a velocidade diminui ao longo da coordenada y e quando se aproxima do chão, diverge. Esta divergência resulta na separação do escoamento para a esquerda e para a direita, sendo esta mais acentuada para o lado esquerdo devido à influência da extracção.

A temperatura em condições de inverno e de verão em regime estacionário é igual ao longo de todo o escoamento, visto que o perfil de velocidades depende da temperatura. Somente quando as propriedades do perfil de temperaturas não variam é que o perfil de velocidades pode convergir, sendo este um indicador de que o escoamento é coerente. Portanto, apenas quando em condições de Inverno ou de Verão o perfil de temperaturas for igual ou muito similar ao das respectivas temperaturas de insuflação. Isto é, em condições de Verão a temperatura na sala em vez de quente, seja fria, e em condições de Inverno a temperatura na sala em vez de fria, seja quente.

Em termos computacionais obtém-se o caso estacionário através dos critérios de convergência.

Os critérios de convergência são verificados a cada iteração, e a cada iteração as propriedades do escoamento evoluem. Se o critério definido for alto, é provável que o escoamento tenha uma convergência mais rápida, caso o critério seja baixo, o *solver* terá de iterar mais vezes até que o critério de convergência definido seja atingido. É importante experimentar critérios mais baixos pois as propriedades do fluido podem não ter variado o suficiente.

No caso transiente, por outro lado, o critério de convergência depende do tempo que as propriedades do fluido demoram até atingir um estado próximo do regime estacionário. Logo, o parâmetro de convergência a ser definido é o Δt . Este parâmetro é muito importante, pois se for muito alto o escoamento pode nunca chegar a convergir. Quando isso acontece diz-se que o método explodiu. Uma forma de confirmar se os resultados obtidos no escoamento estacionário são coerentes, é iterar no tempo o caso transiente até que estes sejam semelhantes.

Se a variação das propriedades do fluido é nula, significa que o escoamento terá a tendência de se comportar sempre da mesma forma. A análise estacionária permite conhecer, qual o aspecto do escoamento e se a sua evolução faz sentido a nível da verificação da equação da continuidade nas insuflações e extracções. Contudo a análise transiente também é importante, pois nenhuma sala se encontra sempre à temperatura desejada, nem com o escoamento completamente desenvolvido. Tendo em conta que inicialmente a sala se encontra numa determinada condição, quando o difusor começa a insuflar ar a uma determinada temperatura ocorrem mudanças na sala que apenas podem ser observadas no regime transiente. Esta variação, grande e espontânea das propriedades, pode apresentar um comportamento dominado pelas forças advectivas e difusivas. Se assim for, pode tornar o escoamento não tão bem comportado como o da figura 4.3. Portanto a variação das propriedades do fluido ao longo do tempo, nomeadamente a temperatura, em HVAC, é o mais importante para se entender a relação entre a localização dos aparelhos terminais e o nível de conforto térmico num espaço. Como tal foram realizados 4 casos de estudo como se podem observar na figura 4.4.

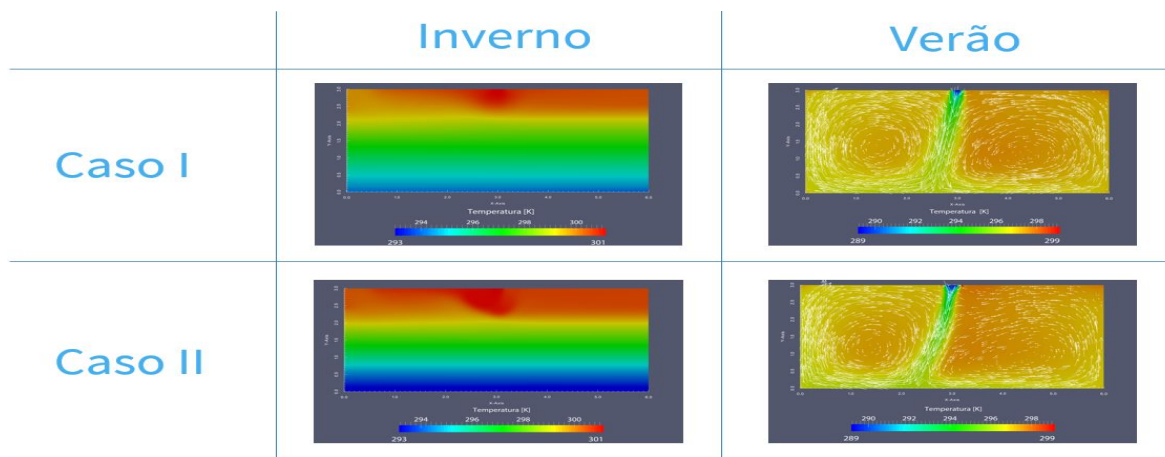


Figura 4.4: Casos de estudo em análise

Na figura 4.4 temos dois casos de Inverno e dois casos de Verão estes diferem em três aspectos: temperatura da sala, temperatura de insuflação e a direcção de insuflação. Portanto o caso de estudo será composto por 4 análises, o caso I e II no Inverno e o caso I e II no Verão, onde as análises que daí advêm permitam perceber qual a evolução a nível de conforto térmico e a nível energético ocorrido

dentro do laboratório. Assim, foram realizados vários testes recorrendo aos gráficos dos perfis de temperatura e das direcções dos vectores de velocidade. Estes testes têm como objectivo entender quanto tempo demora até que o escoamento atinja as condições ideais ao longo das coordenadas $(x, y) = (x, 1.3)$ e quando é que se atinge uma temperatura média dentro da sala, próxima da temperatura ideal. Sendo a temperatura ideal $24^{\circ}C$ ou $297K$ de acordo com Yunus Cengel [2014]. Estas coordenadas especificamente serão denominadas por coordenadas teste pois, de acordo com, Abiti [2011], a zona definida pelas coordenadas é a zona ao nível da cabeça de um ser humano sentado.

4.1 Análise em condições de Inverno

Para os casos de Inverno foram realizadas 3 picagens, duas para controlo energético e uma para controlo do conforto térmico. As duas picagens para controlo energético localizam-se uma entre a insuflação e a extracção $((x, y) = (1.5, 2.7))$, outra do lado direito da insuflação $((x, y) = (4.5, 2.7))$ e a picagem para controlo do conforto térmico debaixo da insuflação na zona da cabeça $((x, y) = (3, 1.3))$.

4.1.1 Caso I

O caso em análise, caso I, conta com uma insuflação e uma extracção sem qualquer tipo de grelha que altere a sua direcção. Os resultados apresentados de seguida são provenientes do software OpenFOAM, e avaliados nas condições de inverno..

A figura 4.5 representa a evolução do perfil de temperaturas ao longo do tempo. Inicialmente a evolução do escoamento é rápida como se pode visualizar através da alteração ocorrida entre a figura 4.5a e a figura 4.5b).

Na figura 4.5c observa-se a existência de uma diferença de temperaturas de cerca de $5^{\circ}C$ entre a altura da cabeça e dos pés $((x, y) = (x, 1.3))$ e $(x, y) = (x, 0))$. Para fazer com que essa temperatura aumente até pelo menos aos $24^{\circ}C$ ($297 K$) é necessário continuar a insuflar ar durante mais 15 minutos, obtendo-se um perfil de temperaturas como o da figura 4.5f. Na figura 4.5c, temos um perfil de temperaturas, ainda muito estratificado, com três zonas de estratificação bem definidas.

O perfil de velocidades da figura 4.5c é dominado pelas forças difusivas na zona de estratificação superior. Pode observar-se, através do perfil de velocidades, que a transferência de calor aparenta ser realizada por convecção na zona superior. Enquanto que na zona do meio e na inferior, a transferência de calor aparente ser realizada por condução.

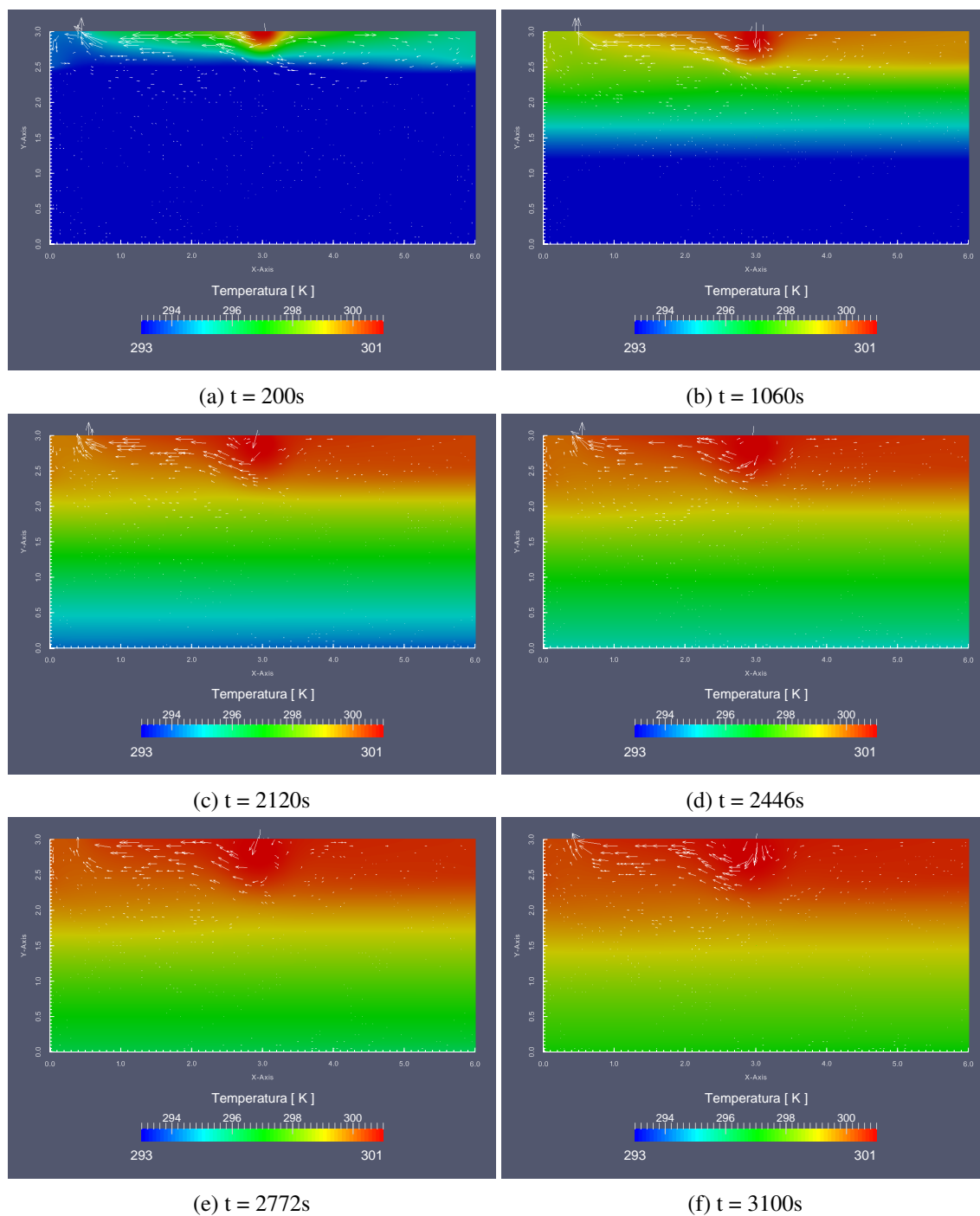


Figura 4.5: Perfil de temperaturas do caso I em regime transiente para o tempo de 200s, 1060s, 2120s, 2446s, 2772s e 3100s

Na figura 4.5c, temos um perfil de temperaturas, menos estratificado, com duas zonas de estratificação bem definidas. O perfil de velocidades da figura 4.5f é dominado pelas forças difusivas na zona de estratificação superior, e pode observar-se através do perfil de velocidades, que a transferência de calor aparenta ser realizada por convecção na zona superior. Enquanto que na zona inferior, a transferência de calor aparenta ser realizada por condução. Este escoamento é dominado pelas forças de impulsão, e a evolução do escoamento tende para um escoamento estacionário.

O facto de a insuflação ser realizada no meio da sala e com direcção ortogonal ao tecto, garante um aquecimento mais rápido da mesma, sem que se sintam grandes diferenças de temperatura nem de velocidade à altura da cabeça (ver figura 4.5c). Contudo o perfil de temperaturas estratificado pode criar diferenças de temperatura entre os pés e a cabeça ($(x, y) = (x, 1.3)$) e $(x, y) = (x, 0)$), o que pode não ser agradável ao ser humano caso a transição seja muito demorada.

A figura 4.6 representa o perfil de temperatura ao longo da sala nas coordenadas teste ($(x, y) = (x, 1.3)$), após 35 minutos, demonstrando que se atingiu a temperatura ideal à altura da cabeça. A

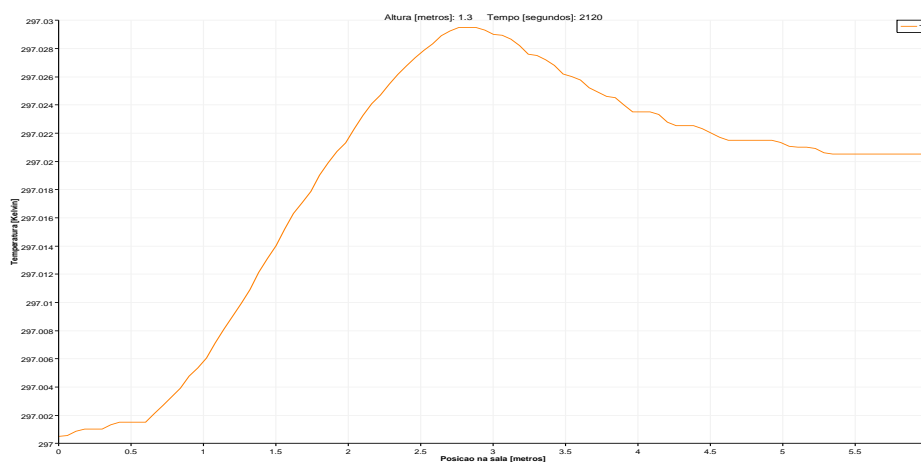


Figura 4.6: Temperatura no inverno ao longo da sala nas coordenadas teste para o caso I.

figura 4.6 foi criada para se ter uma resolução detalhada, acerca do perfil de temperatura, em relação à figura 4.5c do que acontecia nas coordenadas teste. Observa-se que a temperatura nas coordenadas teste é quase a mesma, sendo mais alta na zona de insuflação. À partida seria uma boa zona em termos de conforto térmico.

A figura 4.7 representa a evolução da temperatura ao longo do tempo para o caso I no Inverno, das referidas picagens.

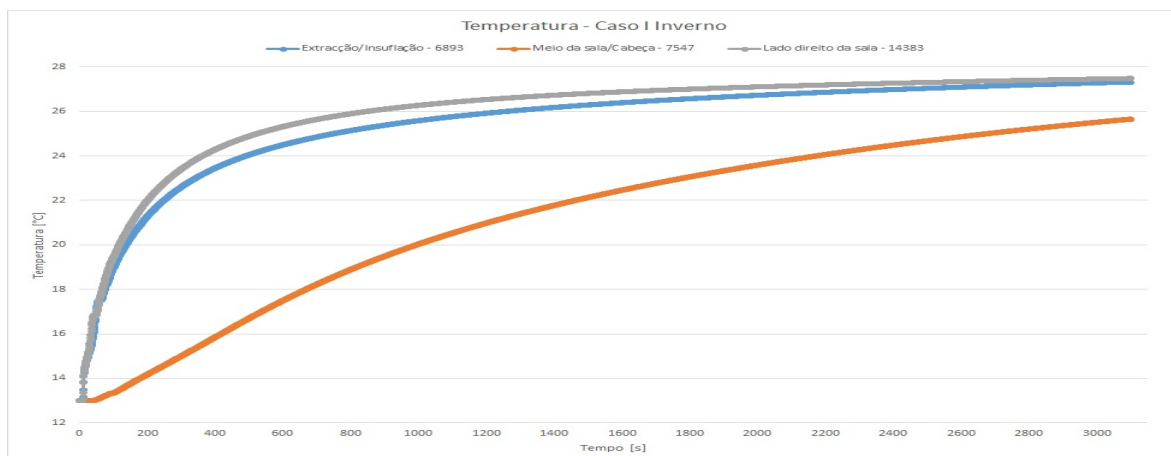


Figura 4.7: Temperatura ao longo do tempo em condições de Inverno para o caso I

Observando o gráfico da figura 4.7 é possível observar as linhas de tendência das 3 picagens, sendo a cinzenta e a azul as linhas de controlo energético e a laranja a linhas de conforto térmico. A evolução da linha laranja entre os 13 e os 20 graus demora cerca de 16 minutos a partir daí a evolução é mais lenta demorando cerca de 50 minutos até atingir a temperatura de conforto térmico. Quanto às linhas energéticas observa-se a evolução da temperatura gradualmente, de acordo com o perfil estratificado. Existe um área entre as duas linhas (cinzenta e azul) esta área representa a quantidade de energia que se ganha/perde para a estratificação, sendo que, quanto maior a sua área mais energia estará concentrada na zona de insuflação. Assim, mais rápida será a permuta de calor entre estratificações e como consequência menor gasto energético e maior conforto térmico.

4.1.2 Caso II

Como a análise estacionária do caso II é muito semelhante à do caso I, será possível obter mais informação acerca dos perfis de velocidade e de temperatura observando os casos transientes.

No caso de inverno, obtém-se um perfil semelhante ao da figura 4.5c, existindo apenas diferença no tempo em que estes demoram a atingir a temperatura ideal à altura da cabeça. No caso II, dado que a insuflação faz um ângulo de 10° com o tecto, o calor demora mais tempo a dissipar-se (ver da figura 4.8a até à figura 4.8c), ao contrário do caso I, que a insuflação faz um ângulo de 90° . Um maior ângulo promove a dissipação de calor, concentrando a energia no meio da sala, enquanto que no caso II como a insuflação faz um ângulo de 10° a energia tem tendência a espalhar-se e por conseguinte demorar mais tempo a realizar as trocas por convecção.

A figura 4.8 representa o perfil de temperaturas no inverno para o caso II. Apesar disso, o perfil de temperaturas continua a ter uma diferença de temperatura de cerca de $5^\circ C$, na zona de estratificação inferior.

Para se obter um perfil de temperaturas idêntico ao da figura 4.8e, próximo da temperatura ideal o mais homogéneo possível, é necessário introduzir ar no interior da sala durante mais 38 minutos e 46 segundos. O perfil de temperatura é obtido ao fim 55 minutos e 34 segundos para a situação de Inverno. Comparando com o caso I, figura 4.5d, o caso II demorou cerca de 20 minutos e 14 segundos para atingir um perfil de temperaturas semelhantes ao da figura 4.8c.

No entanto, no caso II, a direcção do escoamento é diferente em relação ao caso I, pois além da temperatura nas zonas estratificadas, central e inferior, serem baixas empurrando o ar quente para cima, a direcção do jacto de insuflação também mudou, criando perfis de velocidade, do lado esquerdo, bem direccionados devido à extracção.

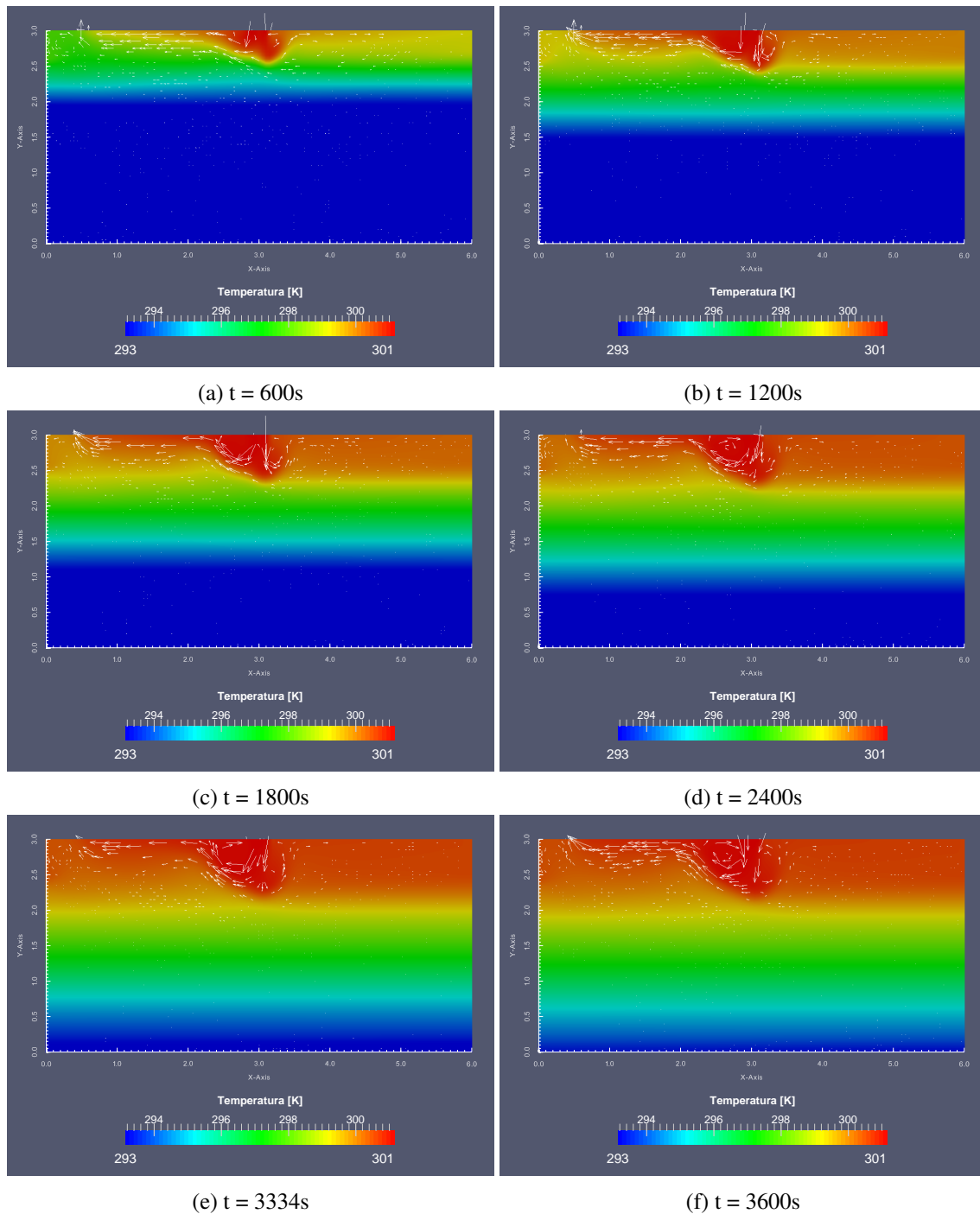


Figura 4.8: Perfil de temperaturas do caso II em regime transiente para o tempo de 600s, 1200s, 1800s, 2400s, 3334s e 3600s

Ao passo que do lado direito cria perfis dominados pela turbulência, provavelmente devido á influência da extracção, como se pode observar na figura 4.8c.

Consoante o tempo passa, os gradientes de temperatura começam a ser mais constantes até que as forças de impulsão deixam de predominar, deixando as velocidades aumentar ao longo da altura da sala, como se pode observar na figura 4.8f. O jacto de insuflação na figura 4.8f, conforme a diferença

de temperaturas diminui, e vai ganhando terreno em relação à zona inferior, mais fria, até que o perfil de velocidades se aproxime da situação estacionária.

Como as direcções da insuflação são diferentes, obtém-se um perfil de velocidades distribuído ao longo do tecto. No entanto demora mais tempo até que a sala se encontre à temperatura ideal em comparação com o caso I. É possível observar que a direcção do jacto influencia pouco a permuta de calor entre as zonas estratificadas, ao contrário do que acontece no caso I, figura 4.5c. A figura 4.8f ocorre passados 94 minutos e 20 segundos, isto é, em comparação com o caso I, demora mais 52 minutos e 40 segundos.

Como se pode observar na figura 4.9 o perfil à altura da cabeça é mais homogéneo ao longo da sala, em relação ao perfil do caso I, figura 4.6.

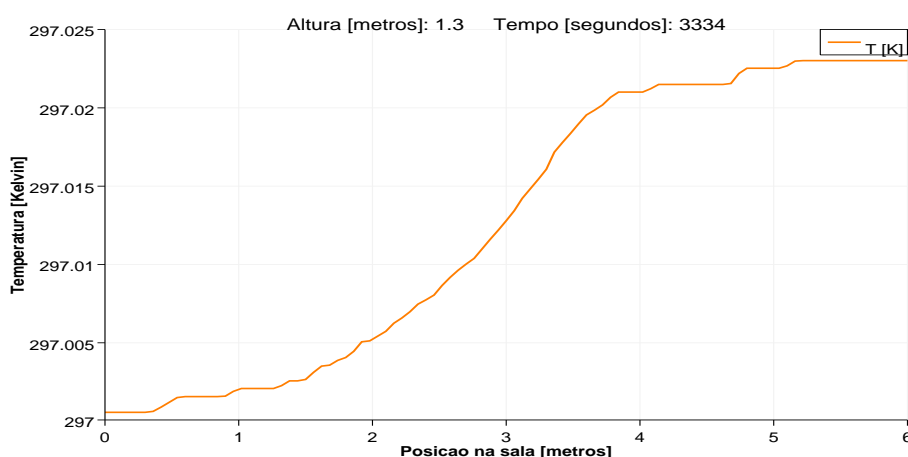


Figura 4.9: Temperatura no inverno ao longo da sala nas coordenadas teste para o caso II.

Onde se nota a homogeneidade ao longo das coordenadas teste é quando se realiza a comparação das figuras 4.9 e 4.6 ao longo da sala. Assim, observando entre as coordenadas $(x, y) = (1, y)$ e $(x, y) = (4, y)$, na figura 4.6 há uma evolução de temperatura rápida, quase linear, e depois aos 3 m existe um pico que volta a descer até aos 4 m. Na figura 4.9 visualiza-se que a evolução entre as coordenadas $(x, y) = (1, y)$ e $(x, y) = (4, y)$ é quase linear mas com um declive menos acentuado, esta evolução menos brusca deve-se ao ângulo com que o ar foi introduzido na sala (10° em relação ao tecto).

O perfil de temperatura estratificado continua a verificar-se, o que pode continuar a causar desconforto entre a zona da cabeça e dos pés. Os perfis de velocidade até se tornarem estacionários são baixos, o que não causaria desconforto no caso transiente, visto que este perfil de velocidades ocorre no mesmo tempo que o caso da figura 4.8e.

A figura 4.10 representa a evolução da temperatura ao longo do tempo para o caso II no Inverno, das

referidas picagens.

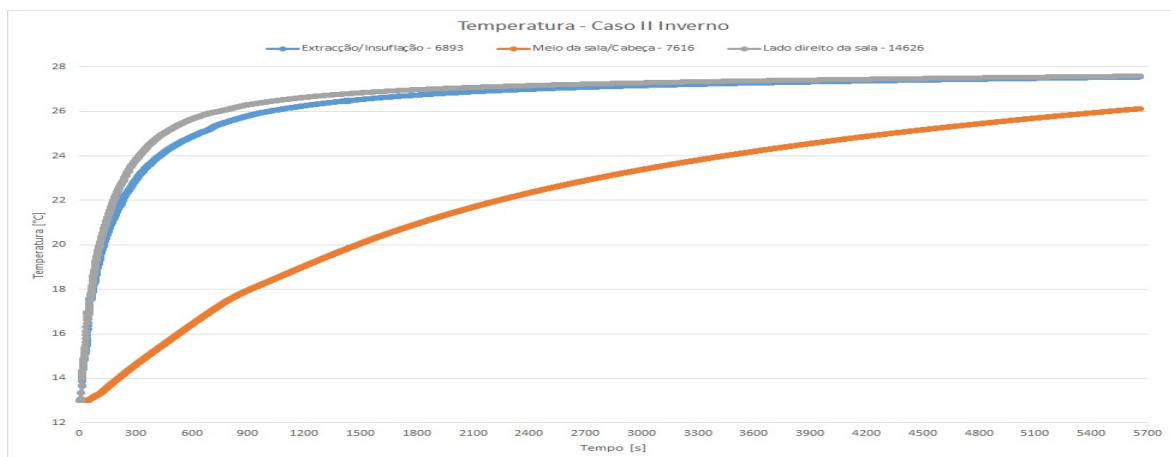


Figura 4.10: Temperatura ao longo do tempo em condições de Inverno para o caso II

Observando o gráfico da figura 4.10 é possível observar as linhas de tendência das 3 picagens, sendo a cinzenta e a azul as linhas de controlo energético e a laranja a linhas de conforto térmico. A evolução da linha laranja entre os 13 e os 18 graus demora cerca de 15 minutos o que representa uma evolução mais lenta em comparação com o caso I e demora cerca de 1 hora e 30 minutos até atingir a temperatura de conforto térmico. Este é um perfil que a nível de conforto térmico demora muito tempo até atingir uma temperatura de 24 graus à altura da cabeça o que gera algum desconforto térmico, pois existe uma diferença de temperaturas muito elevada ao nível da cabeça e do resto do corpo. Quanto às linhas de controlo energético (cinzenta e azul) comparando com o caso I houve uma redução considerável na área o que representa que houve uma perda de energia significativa para as camadas de estratificação. Resultando numa permuta mais lenta, devido ao efeito de tampão que o ar mais frio proporciona e à direcção da insuflação.

4.2 Análise em condições de Verão

Para os casos de Verão foram realizadas 4 picagens, uma para controlo energético e três para controlo do conforto térmico. A picagem para controlo energético localiza-se entre a insuflação e a extracção ((x,y) = (1.5 2.7)), e as picagens para controlo do conforto térmico localizam-se debaixo da insuflação na zona da cabeça ((x,y) = (3 1.3)), à esquerda da zona de insuflação dentro do vórtice ((x,y) = (1.5 1.3)) e à direita da zona de insuflação dentro do vórtice ((x,y) = (4.5 1.3)).

4.2.1 Caso I

A figura 4.11 representa os perfis de velocidade sobrepostos aos perfis de temperatura ao longo do tempo.

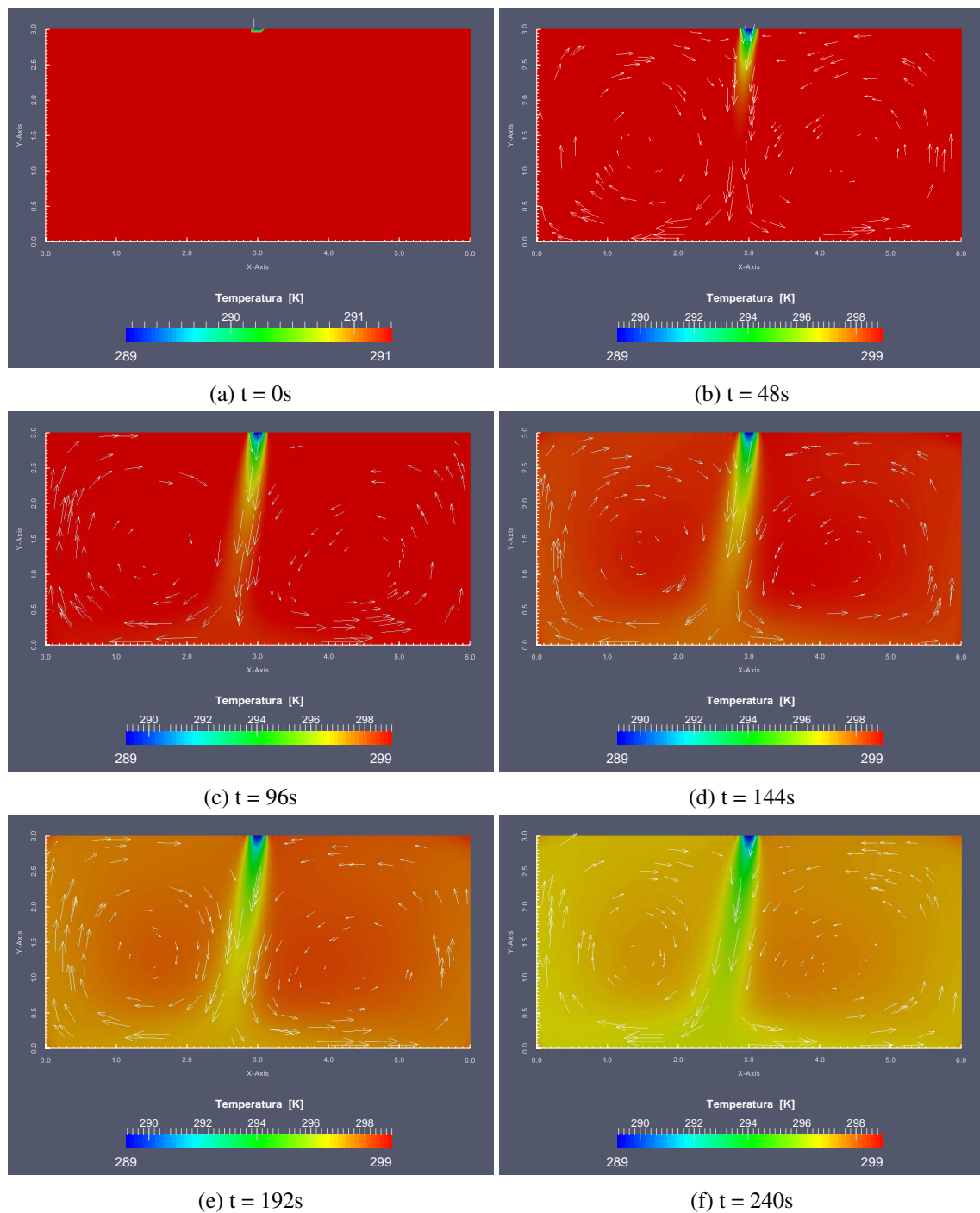


Figura 4.11: Perfil de temperaturas do caso I em regime transiente para o tempo de 0s, 48s, 96s, 144s, 192s e 240s

Na figura 4.11f os vectores da velocidade evidenciam as duas zonas, referidas anteriormente. Onde se pode observar também dois vórtices bem definidos um do lado esquerdo mais pequeno e outro do lado direito maior. Se observarmos o escoamento ao longo da coordenada $(x, y) = (2.7, y)$ existe uma tendência para o jacto proveniente do insuflador se deslocar para o lado esquerdo. Existe uma forte probabilidade de que este deslocamento seja causado pela influência da extracção.

Observando a figura 4.11f é possível constatar que a insuflação ao centro da sala, com velocidade ortogonal ao tecto, gera uma velocidade alta no centro da sala. O perfil de velocidades é elevado, não só pela velocidade do insuflador mas também pelas forças de impulsão devido à temperatura do ar ser baixa. Nestas condições um ser humano debaixo de uma corrente de ar deste género iria sentir desconforto, assim como junto das paredes, como se pode observar na figura 4.11f.

A figura 4.12 representa o perfil de temperatura ao longo da sala nas coordenadas teste, após 4 minutos, demonstrando que se atingiu a temperatura ideal à altura da cabeça. A figura 4.12 foi criada, para se ter uma resolução detalhada, em relação à figura 4.11f do que acontecia nas coordenadas teste.

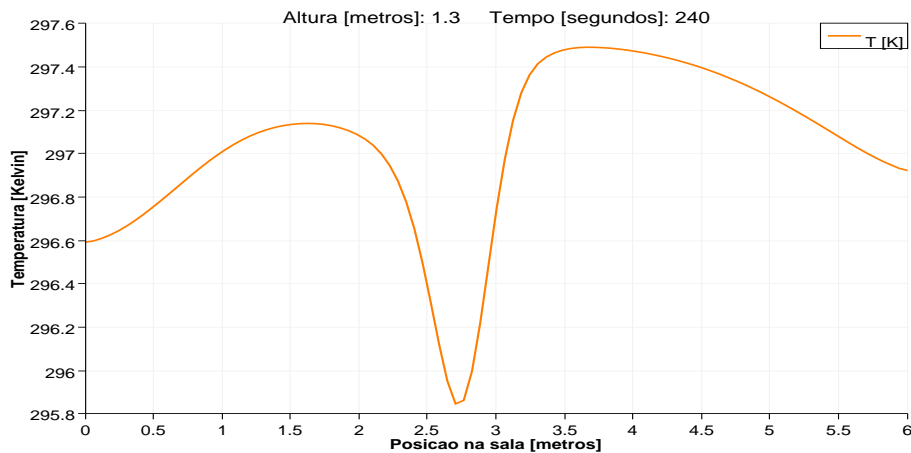


Figura 4.12: Temperatura no verão ao longo da sala nas coordenadas teste para o caso I

Segundo a figura 4.12, na zona das coordenadas teste, a temperatura média é de 297 K (24°C). Contudo a figura demonstra que ao redor da coordenada $(x, y) = (2.7, 1.3)$, existe um pico, mínimo, de temperatura numa zona fortemente influenciada pela insuflação como seria de esperar. Considera-se esta zona como uma zona de nível de conforto térmico baixo, pois a temperatura é baixa e tem um impacto directo na zona das coordenadas de teste, como se pode ver na figura 4.11f.

No caso da figura 4.11f as condições consideradas como ideais são atingidas em 4 minutos. O arrefecimento dá-se muito rapidamente na sala, pois o ar que está a ser inserido na sala encontra-se a uma temperatura muito baixa (16°C) em relação ao ar que estava dentro da sala (28°C).

Por causa desta diferença de temperaturas, surgem duas zonas de climatização distintas. Como as que se podem ver no caso estacionário (ver figura 4.3). Ao fim de 4 minutos as duas zonas encontram-se com diferenciais pequenos de temperatura.

Foi realizada uma média de todos os valores de temperatura do domínio computacional, obtendo-se um perfil de temperaturas na ordem dos 24°C (297 K). As temperaturas na sala estão distribuídas de forma homogénea, à excepção do centro e junto das paredes, o que explica o facto de não ser

necessário esperar mais tempo para que a sala arrefeça até à temperatura estipulada, como no caso da figura 4.5f. É de notar que existe uma tendência para o escoamento se desviar para a esquerda, isto deve-se à existência da extracção no lado esquerdo do laboratório.

Os perfis de temperatura, na figura 4.11f são próximos dos $24^{\circ} C$, o que à partida garante um nível de conforto térmico. Na figura 4.11f observa-se que as zonas dentro dos vórtices são as zonas com menor velocidade e gradiente de temperatura mais homogéneo e com menor variação de temperatura. Sendo nestas zonas onde provavelmente o ser humano se sentiria melhor. No entanto as velocidades junto das paredes e na zona do jacto, provenientes da insuflação, são muito elevadas o que poderia causar desconforto para o ser humano.

A figura 4.13 representa a evolução da temperatura ao longo do tempo para o caso I no Verão, das referidas picagens.

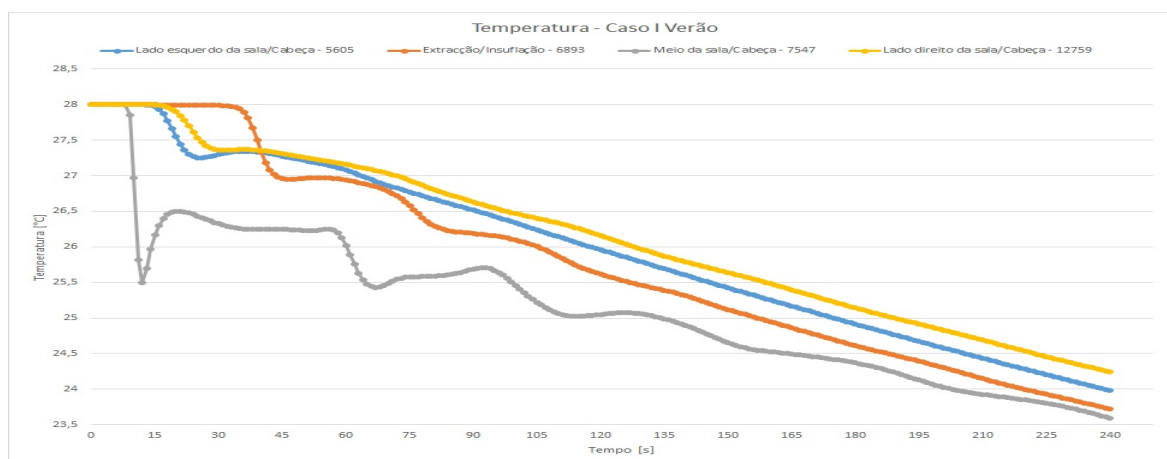


Figura 4.13: Temperatura ao longo do tempo em condições de Verão para o caso I

Observando a figura 4.13 é possível observar 4 linhas de tendência. Sendo a cinzenta, a azul e a amarela as linhas de conforto térmico e a linha laranja a linha de controlo energético. A evolução da linha cinzenta tem uma queda abrupta passados cerca de 12 segundos. Ao longo do tempo tem um comportamento que demonstra um nível de conforto térmico muito baixo pois um ser humano que se encontra-se debaixo do jacto de insuflação frio estaria a sentir frio e calor em curtos espaços de tempo.

As linhas azul e amarela representam o espaço dentro dos vórtices, sendo esta a zona mais confortável para se colocar um ser humano. Contudo a evolução destas linhas deve ser analisada em conjunto, pois como se poder observar elas ficam separadas ao longo da evolução o que significa que as temperaturas não são iguais ao longo do tempo. O objectivo é juntar as linhas garantindo perfis de temperatura parecidos e o mais homogéneos possíveis. Em relação à linha laranja que representa a

linha energética, esta representa a relação que existe entre o difusor e grelha de extracção, sendo que esta linha de tendência demonstra que a extracção deveria estar mais afastada da difusão de ar.

4.2.2 Caso II

O caso II, conta com uma insuflação e uma extracção, contudo a introdução de ar no laboratório é realizada com uma direcção diferente. A insuflação terá dois vectores com direcções opostas e a inclinação do vector é definida pelo ângulo de 10° que tem com o tecto. A extracção é realizada com direcção ortogonal ao tecto, como se pode observar na figura 3.5b.

As temperaturas apresentadas na figura 4.14f, estão distribuídas de forma homogénea, embora tenha demorado mais tempo, em comparação com o caso I, numa situação de verão. Este fenómeno é devido aos gradientes de temperatura nas zonas dos vórtices, observando a figura 4.14f, terem uma variação de temperatura mais homogénea, em comparação com o apresentado na figura 4.11f. Assim, a figura 4.14f representa o perfil de temperatura ideal que corresponde a uma sala com uma temperatura média de $24^\circ C$, ao nível da cabeça e em toda a sala.

A figura 4.14 representa o perfil de velocidades sobreposto ao de temperatura. No caso II a diferença de tempos entre o caso I e o caso II é de apenas 20 segundos.

Visto que a insuflação, introduz ar, com um ângulo diferente, os dois vórtices na figura 4.14f são diferentes.

Pode não parecer óbvio, mas ao observar-se o jacto da insuflação, este está mais desviado para a esquerda. Devido, ao difusor, que altera a direcção do jacto para a esquerda e para a direita. Sendo que, ao alterar para a esquerda, atira o ar para a zona de influência da extracção, o que obriga o jacto de insuflação a desviar-se mais para esquerda, em relação ao caso I. Assim o vórtice do lado esquerdo é influenciado pela movimentação, descrita anteriormente, aumentando de tamanho. Observa-se também que no vórtice da direita as forças de impulsão, nas redondezas da coordenada $(x, y) = (4, 3.5)$, têm uma influência muito grande.

Os perfis de velocidade na figura 4.14f não têm uma intensidade tão elevada, em comparação com os perfis da figura 4.11f, Isto deve-se à direcção imposta pelo difusor no escoamento. O facto de a intensidade não ser tão elevada, garante uma distribuição de temperatura mais homogénea na zona interior dos vórtices, em comparação com a figura 4.11f.

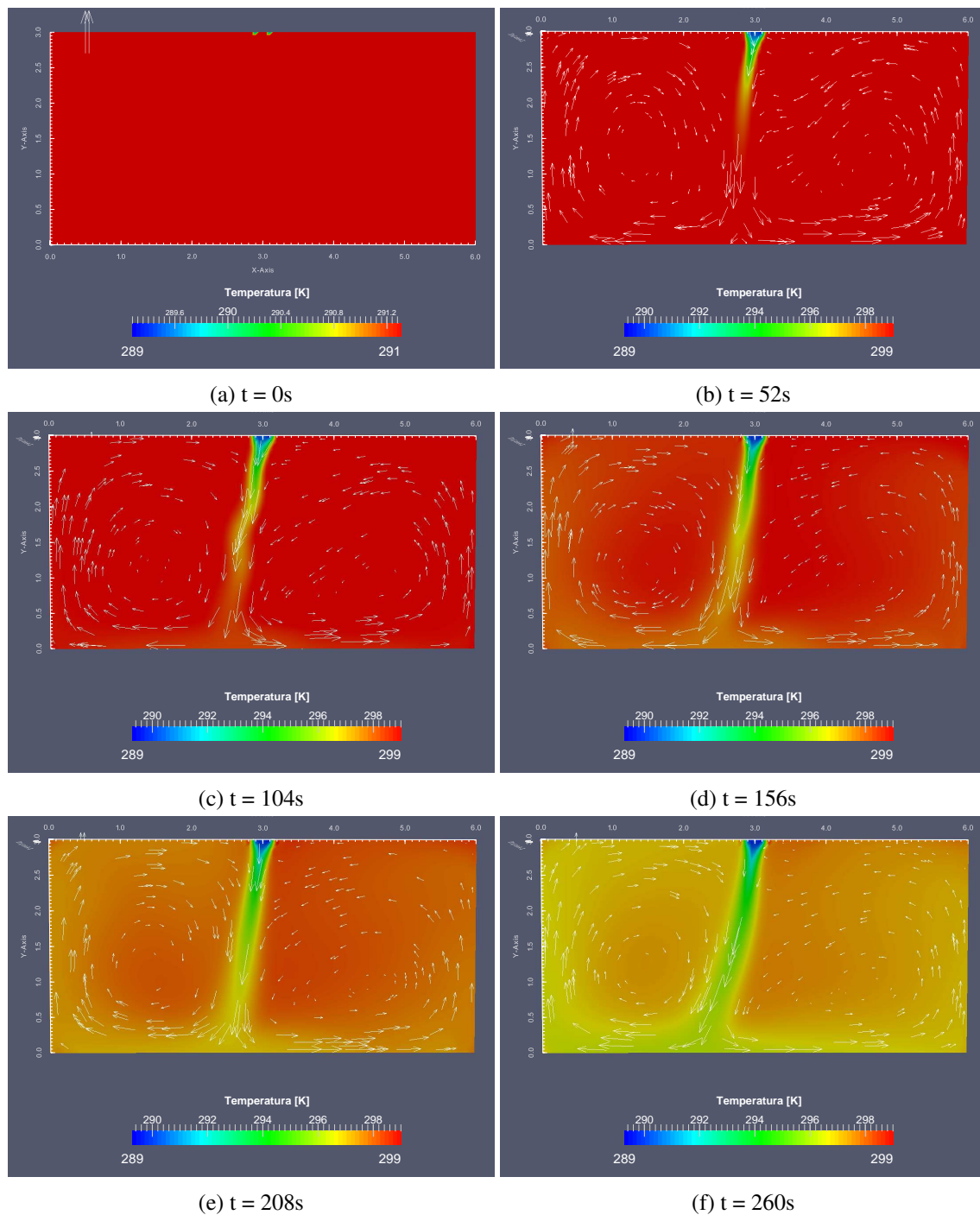


Figura 4.14: Perfil de temperaturas do caso II em regime transiente para o tempo de 0s, 52s, 104s, 156s, 208s e 260s

A figura 4.15 é similar ao caso I (figura 4.12), embora contenham diferenças a nível do tempo e na direcção do escoamento. Avaliando o tempo em condições de inverno, no caso II, observa-se que demorou 4 minutos e 20 segundos, para se obter o perfil de temperatura ideal, o mais homogéneo possível, ao longo das coordenadas teste, como se pode observar na figura 4.15. Comparando com o caso I, numa situação de verão, a diferença é de 20 segundos.

O atraso, embora bastante inferior em relação ao caso de inverno, que se verifica no caso II em relação ao caso I, deve-se à inclinação da insuflação, pois ao alargar o jacto, faz com que a transferência de calor seja maior à saída do difusor, fazendo com que a temperatura do jacto aumente e demore mais tempo a arrefecer a sala.

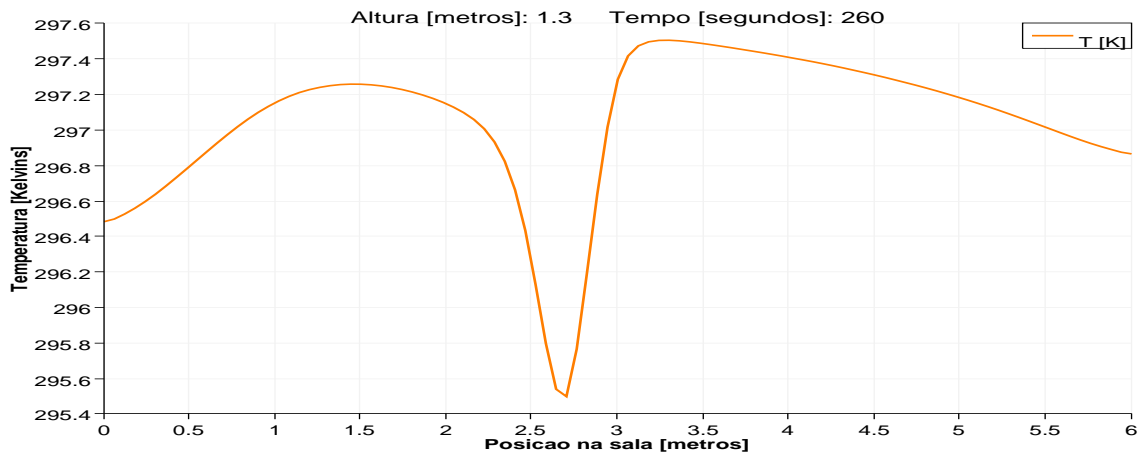


Figura 4.15: Temperatura no verão ao longo da sala nas coordenadas teste para o caso II.

A figura 4.16 representa a evolução da temperatura ao longo do tempo para o caso I no Verão, das referidas picagens.

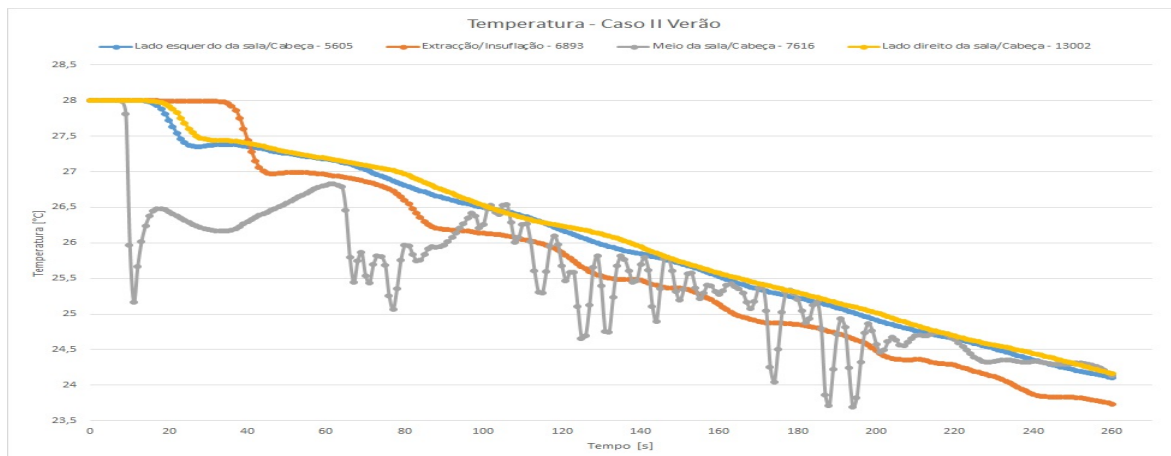


Figura 4.16: Temperatura ao longo do tempo em condições de Verão para o caso II

Observando a figura 4.16 é possível observar 4 linhas de tendência. Sendo a cinzenta, a azul e a amarela as linhas de conforto térmico e a linha laranja a linha de controlo energético. Em comparação com o caso I, numa situação de verão, a linha cinzenta continua a representar um conforto térmico muito baixo, mas neste caso nota-se que se tornou ainda mais abrupta a variação. Portanto seria uma zona a evitar para conforto térmico. No caso I se observarmos as linhas azul e amarela, comparativamente ao caso II estas ao longo do tempo ficaram mais próximas. O que significa que se obtiveram valores de temperatura muito próximos nessa zona, isto ocorre devido ao ângulo imposto na insuflação. Quanto

à linha laranja que representa a linha energética é muito similar ao caso I, demonstrando que a grelha de extracção deveria estar mais afastada do difusor.

À luz do que foi observado anteriormente, há que ter em consideração que existem variações de temperatura impostas pelo jacto proveniente da insuflação. Estas variações de temperatura, como se pode observar nas figuras do caso I e do caso II, ocorrem tanto no inverno como no verão. Como no início dos estudos as variações são grandes, cerca de $12^{\circ}C$, estas variações contribuem para acelerar ou travar o escoamento, consoante o ar a inserir na sala seja mais frio que o ar da sala ou o ar a inserir na sala seja mais quente que o ar da sala, respectivamente. Este fenómeno verifica-se, porque existem pequenas variações de massa volúmica devido à alteração da temperatura, por sua vez responsáveis pelas movimentações no escoamento, estas denominadas por forças de impulsão.

As forças de impulsão originam acelerações na direcção negativa de y , pelo facto da massa volúmica ser superior em relação à massa volúmica adjacente, como se pode ver nas figuras 4.11 e 4.14. Assim, os factores a ter em conta na descida abrupta do ar devem-se à massa volúmica superior e à força da gravidade. O caso contrário também é verificado nas figuras 4.5 e 4.14, devido à alta temperatura a que é insuflado o ar, logo menor massa volúmica, num espaço cuja temperatura é mais fria. Existe uma resistência por parte do ar mais frio, mais denso, que desacelera o escoamento, obrigando a que, o ar mais quente, tenha que encontrar outro caminho para escoar, zonas cuja massa volúmica seja a mesma, logo com temperaturas altas. Este fenómeno, descrito anteriormente, obriga a que o escoamento se desenvolva apenas no topo da sala devido ao efeito de tampão que é efectuado pelo ar frio. A permuta de calor nos perfis estratificados ocorre através dos fenómenos de convecção que por sua vez serão responsáveis pelo aumento da temperatura da sala.

De acordo com o que se observou, é possível concluir que numa fase de ante projecto, a direcção da insuflação e da extracção tendo em conta as variações no campo de velocidades devido à influência da temperatura são muito importantes para o HVAC. Visto que numa situação de Inverno e numa situação de Verão é necessário ter em conta a localização dos aparelhos terminais e a influência que têm uns sobre os outros. É possível verificar também que a correcta localização dos aparelhos e a direcção com que é realizada a insuflação, pode resultar em poupança energética assim como em conforto térmico.

Capítulo 5

Conclusão e Perspectivas de Trabalho

Futuro

Nesta dissertação explicaram-se e desenvolveram-se os principais temas que compõem a DFC. Desde a introdução dos conceitos de mecânica dos fluidos até à dedução das equações diferenciais parciais que governam os fluidos a partir das três leis básicas da física: conservação da massa, conservação da quantidade de movimento e conservação da energia. A dissertação foi desenvolvida de acordo com determinados objectivos: A dedução das equações diferenciais parciais que governam o escoamento, a partir das leis básicas da física, foi um dos objectivos mais importantes desta dissertação, pois a sua dedução envolve raciocínios e conhecimentos que a maior parte das vezes são esquecidos por parte das pessoas que pretendem utilizar as equações já deduzidas. Assim pretendeu-se, fornecer o conhecimento necessário para a dedução das equações diferenciais parciais na sua forma conservativa. Obter a informação proveniente do levantamento das medidas do laboratório, dos difusores e dos extractores, para definir as geometrias em estudo, que permite definir a malha computacional, e assim criar a malha computacional que contém a informação acerca da geometria da sala, da localização dos difusores e extractores. Na malha computacional discretizam-se as equações diferenciais que governam os fluidos, de forma explícita, e definem-se as condições iniciais e as de fronteira. Após definidos os objectivos, descritos anteriormente, desenvolveu-se o algoritmo SIMPLE, cuja finalidade é resolver as equações de Navier-Stokes incompressíveis. Desta forma, permitiu fornecer ao leitor o caminho que é necessário percorrer, no mundo do DFC, para se desenvolver uma ferramenta computacional e obter resultados, sendo possível também obter os resultados através de um programa já desenvolvido, nomeadamente, o OpenFOAM.

Inicialmente, foi formulado um problema, onde se definiram as condições em que ocorria o estudo, qual o fluido a ser estudado, as velocidades de introdução e de extracção no espaço, as temperaturas

que se iriam definir e a geometria onde se iriam verificar os fenómenos. Assim, a formulação do problema define vários aspectos a nível do fluido considerado, como a sua caracterização, a compressibilidade, a variação térmica que pode interferir nas movimentações do ar e o tipo de escoamento. De acordo com o que foi referido, na frase anterior, realizaram-se estudos com a ferramenta computacional MatLab, onde se calcularam os números adimensionais nomeadamente os números de Mach, Reynolds, Raleygh, Grashof e Archimedes, permitindo concluir com os valores obtidos que o escoamento era incompressível, turbulento e dominado pelas forças de impulsão. Estas conclusões levaram à simplificação das equações que governam os fluidos e à utilização da aproximação de Boussinesq. Com as equações redefinidas, através do uso do MatLab resolveram-se as equações que governam os fluidos de acordo com o algoritmo SIMPLE. O OpenFOAM também resolve as equações que governam os fluidos, com base no algoritmo SIMPLE.

Estudar um escoamento dentro de uma sala sem a ajuda de ferramentas computacionais é difícil. Uma das ferramentas utilizadas para a resolução do trabalho proposto foi o MatLab, onde surgiram contratemplos. Nomeadamente, na implementação em código da discretização das equações diferenciais na malha escalonada, na implementação da resolução da equação elíptica (equação da correcção da pressão) e no desenvolvimento do algoritmo SIMPLE. Como não se desenvolveu a parte turbulenta em MatLab, devido à falta de tempo disponível para a execução do mesmo, optou-se pela utilização de um programa open source o OpenFOAM que contém pré-processador, *solver* e pós-processamento já programado. Contudo este programa também gerou vários contratemplos, tendo em conta que não existe um interface gráfico. Assim foi necessário aprender a sua linguagem de programação, Linux e C++, para se conseguirem correr os estudos e obter resultados. No pré-processamento além de se desenvolverem as condições iniciais, desenvolve-se a malha, num programa incorporado também em C++, denominado por BlockMesh. Neste programa desenvolve-se a malha, assim como se especificam as camadas, sendo este passo bastante importante, pois representa a única forma de comunicar ao *solver* como definir as condições iniciais e de fronteira aquando do correr do *solver*.

Os programas foram utilizados para se obterem os campos de velocidade, pressão e de temperatura. A partir daí retirar conclusões acerca do escoamento, observando os gráficos obtido no pós processador. Assim, tanto no caso I como no caso II, em condição de inverno, quando a temperatura do ar insuflado é superior às temperaturas circundantes, naturalmente existe uma força de impulsão por parte do fluido frio que impede o escoamento de ir em direcção ao chão, devido à sua massa volúmica superior. Portanto se a velocidade do jacto tiver a direcção ortogonal ao tecto, caso I, irá promover mais rapidamente as trocas de calor, ao contrário do que acontece quando observamos o caso II, cuja direcção do jacto de insuflação não é ortogonal ao tecto. De acordo com os resultados obti-

dos, concluiu-se que numa situação de inverno, a direcção do insuflador deve ser ortogonal ao tecto, visto que, se assim for, existe uma permuta de calor com o ar frio mais rápida, através do fenómeno de convecção. Quando a diferença de temperaturas é invertida, (caso I e caso II) em condições de verão, o fluido frio, com maior massa volúmica, é o que está a ser inserido no espaço, sendo a sua tendência mover-se aceleradamente para baixo afastando o ar quente, com menor massa volúmica, à sua passagem. Deste modo, as permutas de calor são realizadas, enquanto o jacto atravessa a sala, sendo estas muito mais rápidas em comparação com os casos de inverno, no entanto o ser humano é sensível a variações de temperatura muito rápidas. Um exemplo disso é o caso I, no verão, que representa uma variação de temperatura dos 16°C para os 24°C em apenas 4 minutos. No caso II, no verão, verificou-se uma variação de temperatura da mesma ordem em apenas 4 minutos e 20 segundos. Esta variação de tempos deve-se ao facto da direcção do jacto de insuflação ter mudado e por sua vez ter criado perfis de velocidade e de temperatura, em comparação com o caso I, um pouco mais agradáveis ao ser humano. De acordo com os resultados obtidos conclui-se que numa situação de verão a direcção de insuflação deve ser feita com um determinado ângulo, mais próximo do tecto, para que a permuta não seja tão rápida e a dissipação de calor seja o mais homogénea possível.

Este estudo permitiu concluir que através do correcto posicionamento dos difusores e das grelhas de extracção se podem criar perfis de temperatura que vão de encontro ao conforto térmico de um ser humano. Portanto, em situações de inverno o escoamento deve ser ortogonal em relação ao tecto e no verão este deve ser o mais paralelo em relação ao tecto. No caso II, foi imposto um escoamento de entrada com 10° de inclinação em relação ao tecto. Ainda assim, esse declive não foi suficiente para se obter o efeito desejado: maximizar o conforto térmico. De acordo com Ying Sun [2005] aspectos como o tamanho do centro do insuflador, assim como a existência de abas, influenciam e acentuam o declive do escoamento.

Um bom estudo de DFC em fase de ante-projecto, pode ser responsável por projectos mais competitivos, que por sua vez podem evitar gastos desnecessários. Através de um bom estudo de DFC podem realizar-se poupanças energéticas, através da redução no número de horas de funcionamento das máquinas ao longo do dia.

Trabalho Futuro

Como trabalho futuro dever-se-á, realizar uma análise de estabilidade às equações diferenciais desenvolvidas para conhecer quais os limites de estabilidade, de forma a que, não se corra o risco de os métodos explodirem. Dever-se-á, também, desenvolver o modelo tridimensional e o modelo de turbulência $k - \epsilon$ e aplicá-los a um dos *solvers* desenvolvidos numa linguagem de programação.

A nível computacional, melhorar o código desenvolvido em MatLab, realizando programação orientada por objectos e desenvolver o *solver*, para o caso transiente através do algoritmo PISO. Procurar realizar um pós-processador para obter imagens dos escoamentos. Desenvolver estes *solvers* na linguagem de programação Python.

Quanto à simulação em si, seria interessante simular difusores com diferentes tipo de geometria, de forma a garantir condições de insuflação optimizadas. Bem como, mudar a localização e o número de difusores e de grelhas de extracção, de forma a verificar qual seria o posicionamento correcto, para se obterem condições de conforto térmico na sala.

Referências

- D. P. Abiti. Antropometria de la vivienda. <https://sites.google.com/site/croquisarquitecto/antropometria-en-la-vivienda>, 2011. Acedido em: 21 de Outubro 2016. (cit. na pág. 72)
- D. Acheson. *Elementary Fluid Dynamics (corr.)*. Oxford, 2003. (cit. nas pág. 15, 22, 27)
- Anderson. *Computational Fluid Dynamics*. McGraw-Hill ScienceEngineeringMath, international edition, 1995. ISBN 0071132104,9780071132107. (cit. nas pág. 1, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 23, 26, 27, 28, 30, 32, 34, 40, 44, 45, 46, 47, 53, 55, 58)
- CFD-Online. Staggered grid. http://www.cfd-online.com/Wiki/Staggered_grid, 2012. Acedido em: 21 de Outubro 2016. (cit. na pág. 45)
- S. Chen Q. A procedure for verification, validation, and reporting of indoor environment cfd analyses. *HVAC and R*, 2002. (cit. nas pág. 34, 38, 56)
- J. Cooper. *Introduction to Partial Differential Equations with MATLAB*. Applied and Numerical Harmonic Analysis. Birkhauser Basel, 1 edition, 1998. ISBN 978-1-4612-7266-3,978-1-4612-1754-1. (cit. na pág. 58)
- D. T. C. D. Cheng, Alexander H. Heritage and early history of the boundary element method. *Elsevier - Engineering Analysis with Boundary Elements* 29, 2005. (cit. na pág. 58)
- Fluent. *Fluent 12.0 Theory guide 4.4.1 5.5.2*. Fluent inc., 2009. (cit. na pág. 38)
- J. L. Gatski, Thomas B. *Simulation and Modeling of Turbulent Flows*. Oxford University Press, 1996. ISBN 978-1-61583-169-2,978-0-19-510643-5. (cit. na pág. 35)
- W. Graebel. *Engineering Fluid Mechanics*. Taylor and Francis, 1 edition, 2001. ISBN 1560327111,9781560327110. (cit. nas pág. 10, 11, 13)
- F. B. Hildebrand. *Advanced Calculus for Applications*. PRENTICE-HALL, 1962. (cit. nas pág. 19, 21, 33)

- E. T. Howard D. Goodfellow. *Industrial Ventilation Design Guidebook*. Academic, 1 edition, 2001. ISBN 0122896769,9780122896767,9780585470627. (cit. na pág. 38)
- M. P. Joel H. Ferziger. *Computational methods for fluid dynamics*. Springer, 3rd, rev. ed edition, 2002. ISBN 3540420746,9783540420743. (cit. nas págs. 35, 38, 41, 45, 58)
- L. G. A. L. A. Oliveira. *Mecânica dos Fluidos*. LIDEL - edicoes tecnicas, lda, 4 ed edition, 2012. ISBN 978-972-757-938-9. (cit. nas págs. 9, 10, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 20, 22, 27, 28, 34, 43)
- S. D. Launder BE. Numerical computation of turbulent flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 269 289, 1974. (cit. nas págs. 35, 56)
- NEXTfoam. Boundary conditions - openfoam 2.3.0. *Open Source CFD Consulting*, 2014. (cit. nas págs. 60, 62, 63, 64, 65)
- P. V. Nielsen. Fifty years of cdf for room air distribution. *Elsevier - Building and Environment*, 2015. (cit. nas págs. 1, 2)
- S. Patankar. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Hemisphere Series on Computational Methods in Mechanics and Thermal Science. Taylor and Francis, 1 edition, 1980. ISBN 9780891165224,0891165223. (cit. nas págs. 27, 44, 45, 47, 53)
- J. C. T. D. A. A. R. H. Pletcher. *Computational fluid mechanics and heat transfer*. Series in computational and physical processes in mechanics and thermal sciences. Taylor and Francis, 2nd ed edition, 1997. ISBN 156032046X,9781560320463. (cit. nas págs. 45, 58)
- T. C. R. Roger Lewandowski. *Mathematical and Numerical Foundations of Turbulence Models and Applications*. Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology. Springer New York, 2014. ISBN 978-1-4939-0454-9,978-1-4939-0455-6. (cit. nas págs. 34, 35)
- R. Schiestel. *Modeling and Simulation of Turbulent Flows*. ISTE; Wiley, 1 edition, 2008. ISBN 1848210019,9781848210011,9781905209910. (cit. na pág. 35)
- R. S. Subramanian. Engineering bernoulli equation. *Department of Chemical and Biomolecular Engineering Clarkson University*, 2014. (cit. na pág. 68)
- D. J. Tritton. *Physical fluid dynamics*. Oxford Science Publications. Oxford University Press, USA, 2 edition, 1988. ISBN 0198544936,9780198544937. (cit. nas págs. 13, 15)
- M. W. Versteeg H. *An introduction to computational fluid dynamics*. Pearson Ed., 2ed. edition, 2007. ISBN 0131274988. (cit. nas págs. 27, 35, 45, 47, 56, 57, 58)

- F. M. White. *Fluid mechanics*. McGraw-Hill series in mechanical engineering. McGraw-Hill, 5 edition, 2003. ISBN 0072402172,9780072402179,007119911X,9780071199117,0072402180,9780072. (cit. nas pág. 7, 8, 10, 11, 38, 68)
- A. Wirth. A guided tour through buoyancy driven flows and mixing. *LEGI*, 2014. (cit. na pág. 42)
- T. F. S. Ying Sun. Air flow characteristics of a room with square cone diffusers. *Elsevier - Building and Environment*, 2005. (cit. nas pág. 35, 38, 56, 89)
- A. G. Yunus Cengel. *Heat and Mass Transfer: Fundamentals and Applications*. McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 5 edition, 2014. ISBN 0073398187,9780073398181. (cit. nas pág. 34, 44, 72)
- Y. Zhang. *Indoor Air Quality Engineering*. CRC Press, 2004. ISBN 1566706742,978-1-56670-674-2,978-0-203-48855-3. (cit. na pág. 35)

Anexos

Anexo A

Cálculos

A.1 Algoritmos para os cálculos desenvolvido em Matlab®

Conteúdo

- Cálculo dos caudais e velocidades - Caso I
- Cálculo dos caudais e velocidades - Caso II
- Decomposição das velocidades - Caso I
- Decomposição das velocidades - Caso II

Cálculo dos caudais e velocidades - caso I

```
clear;clc
```

```
xf = 6; %Largura da sala
```

```
yf = 3; %Altura da sala
```

```
ren = 6; %Número de renovações por hora
```

```
xdi = 0.2; ydi = 0.2; %Dimensão de um difusor
```

```
xex = 0.2; yex = 0.2; %Dimensão de um extractor
```

```
Adi = xdi; %Area do difusor
```

```
Aex = xex; %Area do difusor
```


Cálculo dos caudais e velocidades - caso II

```

clear;clc

xf = 6; %Largura da sala
yf = 3; %Altura da sala

ren = 6; %Número de renovações por hora

xdi = 0.2; ydi = 0.2; %Dimensão de um difusor
xex = 0.2; yex = 0.2; %Dimensão de um extractor

Adi = xdi; %Area do difusor
Aex = xex; %Area do difusor

disp('«««««««««««« Valores iniciais »»»»»»»»»»»»')
Vsala = xf*yf; %Volume da sala
disp(['Volume da sala ',num2str(Vsala),' m^3'])
Qsala = Vsala/3600; %Caudal disponível na sala
disp(['Caudal disponível na sala ',num2str(Qsala),' m^3/s'])

Qf = (ren*Vsala)/3600; %Caudal necessário para o número de renovações exigido
disp(['O Caudal necessário para ',num2str(ren),' renovações de ar na sala é de '

V = 0:0.001:10; %Caudal entre 0 e 1m^3/s
N = length(V); %Dimensão da matriz
Qdi = Adi*V; %Caudal inserido na sala pelo difusor
Qex = Aex*V; %Caudal extraído

k=1;k3=1; %Inicializações para os sinalizadores
Vdi = zeros();Vex = zeros(); %Inicialização das matrizes
%Ciclo for para encontrar os valores de caudal que igualem o valor de Qf
%se encontrar usar o valor para calcular a velocidade e sinalizar em que
%zona da matriz se encontra com os k's
for i = 1:N

```

```

if abs(Qdi(i)-Qf) < 0.0001
k1=i;
Vdi(1:2,k) = [Qdi(i)/Adi k1];
k = k + 1;
end
end
for i = 1:N
if abs(Qex(i)-Qf) < 0.0001
k2=i;
Vex(1:2,k3) = [Qex(i)/Aex k2];
k3 = k3 +1;
end
end

nDif = 2; %input('Inserir número de difusores: '); %Número de difusores
nExt = 1; %input('Inserir número de extractores: '); %%Número de extractores

disp('***** Velocidades de insuflação para o caudal necessário e temperat
disp(['Para um caudal ',num2str(Qf),' m^3/s (' ,num2str(Qf*10^3),' l/s) a
velocidade de insuflação é ',num2str(mean(Vdi(1,:))),' m/s e a velocidade
de extração é ',num2str(mean(Vex(1,:))),' m/s '])
disp(['Para ',num2str(nDif),' difusore(s) e ',num2str(nExt),'
extractore(s) as velocidades necessárias para cada um são
',num2str(mean(Vdi(1,:))/nDif),' m/s e ',num2str(mean(Vex(1,:))/nExt),'
m/s , respectivamente.'])

```



```

beta1 = zeros(length(alpha1),1); %inicialização do angulo complementar de
acordo com o tamanho de alpha1
velocidades = struct(); %inicialização da struct velocidades
for i = 1:length(alpha1)
beta1(i) = deg2rad(90-alpha1(i)); %Passagem de graus para radianos do
angulo complementar calculado a partir do alpha1
velocidades(i).Vdi = Vdi_ang/cos(beta1(i)); %Velocidade a inserir antes
do difusor
velocidades(i).Vdi_alpha = velocidades(i).Vdi*cos(beta1(i)); %Módulo da
velocidade no difusor
velocidades(i).Vdi_alpha_x = velocidades(i).Vdi_alpha*cos(alpha1r(i));
%Velocidade decomposta em x no difusor
velocidades(i).Vdi_alpha_y = velocidades(i).Vdi_alpha*sin(alpha1r(i));

%Velocidade decomposta em y no difusor
end

% Vdi_alpha = Vdi*cos(beta1r);
% Vdi_alpha_x = Vdi_alpha*cos(alpha1r);
% Vdi_alpha_y = Vdi_alpha*sin(alpha1r);
disp(' ')
disp('***** Velocidades *****')
disp('')
disp(['A magnitude da velocidade decomposta é
',num2str(velocidades(1:end).Vdi_alpha),' m/s.'])
disp(['A sua decomposição em x é
',num2str(velocidades(1:end).Vdi_alpha_x),' m/s e em y é
',num2str(velocidades(1:end).Vdi_alpha_y),' m/s'])

Tg = [16 28];%input('Temperatura, em graus centigrados?: ');
Tk = 273.15 + Tg; %Temperatura em Kelvin [°K]
Rsp = 287.058;%Constante dos gases perfeito especifica [J/kgK]
gama = 1.4; %Taxa de calor especifico - cp/cv [1]
Vs = sqrt(gama*Rsp*Tk(1:end)); %Velocidade do som
disp(' ')

```

```
disp('***** Número de Mach *****')
M_vdi_alpha = zeros(1,length(Tg));
for i=1:length(Tg)
disp(['Velocidade do som é para uma temperatura de ',num2str(Tg(i)),' é
de ',num2str(Vs(i)),' m/s'])
M_vdi_alpha(i) = (velocidades(1).Vdi_alpha) ./ Vs(i); %Velocidade no
difusor / velocidade do som - N° de Mach
disp(['N° Mach da velocidade no difusor é: ',num2str(M_vdi_alpha(i))])
if M_vdi_alpha(i) < 0.3
disp(['O número de Mach é ',num2str(M_vdi_alpha(i)),' , logo inferior a
0.3, o escoamento pode-se considerar incompressivel'])
else
disp(['O número de Mach é ',num2str(M_vdi_alpha(i)),' , logo superior a
0.3, o escoamento pode-se considerar compressivel'])
end
disp(' ')
end
```

***** Angulos *****

alpha1 é o ângulo em relação ao tecto, representa a orientação do vector
velocidade

Ângulo alpha1 em graus 90° em radianos 1.5708 rad

***** Velocidades *****

A magnitude da velocidade decomposta é 0.15 m/s.

A sua decomposição em x é 9.1849e-18 m/s e em y é 0.15 m/s

***** Número de Mach *****

Velocidade do som é para uma temperatura de 16 é de 340.887 m/s

Nº Mach da velocidade no difusor é: 0.00044003

O número de Mach é 0.00044003, logo inferior a 0.3, o escoamento pode-se
considerar incompressível

Velocidade do som é para uma temperatura de 28 é de 347.8887 m/s

Nº Mach da velocidade no difusor é: 0.00043117

O número de Mach é 0.00043117, logo inferior a 0.3, o escoamento pode-se
considerar incompressível

Decomposição das velocidades - Caso II

```

clear;clc

Vdi_ang = 0.075;%0.15      %input('Inserir velocidade em y [m/s]: ');
alpha1g= 10;%90          %input('Inserir grau de decomposição da velocidade
[°]: ');

alpha1r = deg2rad(alpha1g); %Converte o ângulo de graus para
beta1r = (pi/2) - alpha1r; %Ângulo complementar em radianos
beta1g = beta1r*180/pi;    %Ângulo complementar em graus
disp('***** Angulos *****')
disp('alpha1 é o ângulo em relação ao tecto, representa a orientação do
vector velocidade')
disp(['Ângulo alpha1 em graus ',num2str(alpha1g),'° em radianos
',num2str(alpha1r),' rad'])
% disp(['Ângulo complementar beta1 em graus ',num2str(beta1g),'° e
radianos ',num2str(beta1r),' rad'])

alpha1 = alpha1g; %Definir ângulo para usar para a struct array, para não
sobrepôr variáveis
beta1 = zeros(length(alpha1),1); %inicialização do angulo complementar de
acordo com o tamanho de alpha1
velocidades = struct(); %inicialização da struct velocidades
for i = 1:length(alpha1)
beta1(i) = deg2rad(90-alpha1(i)); %Passagem de graus para radianos do
angulo complementar calculado a partir do alpha1
velocidades(i).Vdi = Vdi_ang/cos(beta1(i)); %Velocidade a inserir antes
do difusor
velocidades(i).Vdi_alpha = velocidades(i).Vdi*cos(beta1(i)); %Módulo da
velocidade no difusor
velocidades(i).Vdi_alpha_x = velocidades(i).Vdi_alpha*cos(alpha1r(i));
%Velocidade decomposta em x no difusor
velocidades(i).Vdi_alpha_y = velocidades(i).Vdi_alpha*sin(alpha1r(i));

```

```

%Velocidade decomposta em y no difusor
end

% Vdi_alpha = Vdi*cos(beta1r);
% Vdi_alpha_x = Vdi_alpha*cos(alpha1r);
% Vdi_alpha_y = Vdi_alpha*sin(alpha1r);
disp(' ')
disp('***** Velocidades *****')
disp('')
disp(['A magnitude da velocidade decomposta é
',num2str(velocidades(1:end).Vdi_alpha),' m/s.'])
disp(['A sua decomposição em x é
',num2str(velocidades(1:end).Vdi_alpha_x),' m/s e em y é
',num2str(velocidades(1:end).Vdi_alpha_y),' m/s'])

Tg = [16 28];%input('Temperatura, em graus centigrados?: ');
Tk = 273.15 + Tg; %Temperatura em Kelvin [°K]
Rsp = 287.058;%Constante dos gases perfeito especifica [J/kgK]
gama = 1.4; %Taxa de calor especifico - cp/cv [1]
Vs = sqrt(gama*Rsp*Tk(1:end)); %Velocidade do som
disp(' ')
disp('***** Número de Mach *****')
M_vdi_alpha = zeros(1,length(Tg));
for i=1:length(Tg)
disp(['Velocidade do som é para uma temperatura de ',num2str(Tg(i)), ' é
de ',num2str(Vs(i)), ' m/s'])
M_vdi_alpha(i) = (velocidades(1).Vdi_alpha) ./ Vs(i); %Velocidade no
difusor / velocidade do som - N° de Mach
disp(['N° Mach da velocidade no difusor é: ',num2str(M_vdi_alpha(i))])
if M_vdi_alpha(i) < 0.3
disp(['O número de Mach é ',num2str(M_vdi_alpha(i)),', logo inferior a
0.3, o escoamento pode-se considerar incompressivel'])
else
disp(['O número de Mach é ',num2str(M_vdi_alpha(i)),', logo superior a
0.3, o escoamento pode-se considerar compressivel'])

```

```
end
```

```
disp(' ')
```

```
end
```

```
***** Angulos *****
```

alpha1 é o ângulo em relação ao tecto, representa a orientação do vector
velocidade

Ângulo alpha1 em graus 10° em radianos 0.17453 rad

```
***** Velocidades *****
```

A magnitude da velocidade decomposta é 0.075 m/s.

A sua decomposição em x é 0.073861 m/s e em y é 0.013024 m/s

```
***** Número de Mach *****
```

Velocidade do som é para uma temperatura de 16 é de 340.887 m/s

Nº Mach da velocidade no difusor é: 0.00022001

O número de Mach é 0.00022001, logo inferior a 0.3, o escoamento pode-se
considerar incompressível

Velocidade do som é para uma temperatura de 28 é de 347.8887 m/s

Nº Mach da velocidade no difusor é: 0.00021559

O número de Mach é 0.00021559, logo inferior a 0.3, o escoamento pode-se
considerar incompressível

Anexo B

Propriedades dos fluidos e Números adimensionais

B.1 Algoritmos para os cálculos desenvolvido em Matlab®

Conteúdos

- Dados da sala
- Condições de Verão e suas propriedades
- Condições de Inverno e suas propriedades
- Número Adimensionais
- Turbulência

```
clear;clc;  
g =9.81; %constante de aceleração gravitica [m/s^2]  
convK=273.15; %Conversão de Kelvins
```

Dados da sala

```
vdi=0.15; %Velocidade de insuflação  
x = 6; y = 3; %Coordenadas da sala em x-largura e y-altura
```

Condições de Verão e suas propriedades

```

Tdi_ver=16; %Temperatura de verão Difusor [°C]
Tex_ver=27; %Temperatura de verão Extracção [°C]
Tinf_ver=28; %Temperatura de verão na sala [°C]
Tp_ver=29; %Temperatura de verão na parede [°C]
Tdi_K_ver=Tdi_ver+convK; %Temperatura de verão Difusor [°K]
Tex_K_ver=Tex_ver+convK; %Temperatura de verão Extractor [°K]
Tinf_K_ver=Tinf_ver+convK; %Temperatura de verão na sala [°K]
Tp_K_ver=Tp_ver+convK; %Temperatura de verão na parede [°K]

Tref_ver = Tdi_ver; %Temperatura de referência de verão [°C]
Tref_K_ver=Tref_ver+convK; %Temperatura de referência de verão [°K]

rho_ver = interp1([15 20],[1.225 1.204],Tref_ver); %Massa volúmica [kg/m^3]
alpha_ver = interp1([15 20],[2.009e-5 2.074e-5],Tref_ver); %Difusividade
térmica verão [m^2/s]
beta_ver = interp1([0 20],[3.67e-3 3.43e-3],Tref_ver); %Coeficiente de
expansão térmica verão [1/K]
nu_ver = interp1([15 20],[1.470e-5 1.516e-5],Tref_ver); %Viscosidade
térmica verão [m^2/s^2]
Pr_ver = interp1([15 20],[0.7323 0.7309],Tref_ver); %Prandtl verão [1]
disp('***** Verão *****')
disp(['Parametros a ',num2str(Tref_ver),' °C (' ,num2str(Tref_K_ver),' °K)
-> Rho: ',num2str(rho_ver),' kg/m3. alpha: ',num2str(alpha_ver),' m2/s.
mu: ',num2str(nu_ver),' m2/s.'])
disp(['beta: ',num2str(beta_ver),' m^2/s. nu: ',num2str(nu_ver),' Pr:
',num2str(Pr_ver),' '])

```

```

***** Verão *****
Parametros a 16°C (289.15 °K) -> Rho: 1.2208 kg/m3.
alpha: 2.022e-05 m2/s. mu: 1.4792e-05 m2/s.
beta: 0.003478 m^2/s. nu: 1.4792e-05 Pr: 0.73202

```

Condições de Inverno e suas propriedades

```

Tdi_inv=28;%Temperatura de verão Difusor [°C]
Tex_inv=14;%Temperatura de verão Extractor [°C]
Tinf_inv=13;%Temperatura de verão na sala [°C]
Tp_inv=12;%Temperatura de verão na parede [°C]
Tdi_K_inv=Tdi_inv+convK;%Temperatura de verão Difusor [°K]
Tex_K_inv=Tex_inv+convK;%Temperatura de verão Extractor [°K]
Tinf_K_inv=Tinf_inv+convK;%Temperatura de verão na sala [°K]
Tp_K_inv=Tp_inv+convK;%Temperatura de verão na parede [°K]

Tref_inv = Tdi_inv; %Temperatura de referência de inverno [°C]
Tref_K_inv=Tref_inv+convK; %Temperatura de referência de inverno [°K]

rho_inv = interp1([25 30],[1.184 1.164],Tref_inv); %Massa volúmica de
inverno [kg/m^3]
alpha_inv = interp1([25 30],[2.141e-5 2.208e-5],Tref_inv); %Difusividade
térmica de inverno [m^2/s]
beta_inv = interp1([20 40],[3.43e-3 3.20e-3],Tref_inv); %Coeficiente de
expansão térmica de inverno [1/K]
nu_inv = interp1([25 30],[1.562e-5 1.608e-5],Tref_inv); %Viscosidade
térmica de inverno [m^2/s^2]
Pr_inv = interp1([25 30],[0.7296 0.7282],Tref_inv); %Prandtl inverno [1]
disp(' ')
disp('***** Inverno
*****')
disp(['Parametros a ',num2str(Tref_inv),' °C (' ,num2str(Tref_K_inv),' °K)
-> Rho: ',num2str(rho_inv),' kg/m3. alpha: ',num2str(alpha_inv),' m2/s.
mu: ',num2str(nu_inv),' m2/s.'])
disp(['beta: ',num2str(beta_inv),' m^2/s. nu: ',num2str(nu_inv),' Pr:
',num2str(Pr_inv),' '])
disp(' ')

```

```
***** Inverno *****
Parametros a 28°C (301.15 °K) -> Rho: 1.172 kg/m3.
alpha: 2.1812e-05 m2/s. mu: 1.5896e-05 m2/s.
beta: 0.003338 m^2/s. nu: 1.5896e-05 Pr: 0.72876
```

Número Adimensionais

```
Lc=(x*y)^.5; %Comprimento Caracteristico
Re_ver=(vdi*Lc)/nu_ver;Re_inv=(vdi*Lc)/nu_inv; %Número de Reynolds verão e inverno
Gr_ver=(g*beta_ver*(24-16)*Lc^3) / (nu_ver^2); %Número de Grashof verão
Gr_inv=(g*beta_inv*(28-24)*Lc^3) / (nu_inv^2); %Número de Grashof inverno
Ra_ver= (g*beta_ver*(24-16)*Lc^3) / (nu_ver*alpha_ver); %Número de Raleigh verão
Ra_inv= (g*beta_inv*(28-24)*Lc^3) / (nu_inv*alpha_inv); %Número de Raleigh inverno
Ar_ver =Gr_ver/(Re_ver^2); %Número de Arquimedes verão
Ar_inv =Gr_inv/(Re_inv^2); %Número de Arquimedes inverno
disp('***** Numeros Adimensionais
*****')
disp(['O N° de Reynolds verão: ',num2str(Re_ver),'. O N° de Reynolds
inverno: ',num2str(Re_inv)])
disp(['O N° de Grashof verão: ',num2str(Gr_ver),'. O N° de Grashof
inverno: ',num2str(Gr_inv)])
disp(['O N° de Arquimedes verão: ',num2str(Ar_ver),'. O N° de Arquimedes
inverno: ',num2str(Ar_inv)])
disp(['O N° de Raleigh verão: ',num2str(Ra_ver),'. O N° de Raleigh
inverno: ',num2str(Ra_inv)])
```

```
***** Numeros Adimensionais *****
O N° de Reynolds verão: 43022.9924. O N° de Reynolds inverno: 40034.9838
O N° de Grashof verão: 95267229030.9028. O N° de Grashof inverno: 45716217726.4
O N° de Arquimedes verão: 51.4686. O N° de Arquimedes inverno: 28.5227
O N° de Raleigh verão: 69693019378.0967. O N° de Raleigh inverno: 28849663077.0
```

Turbulência

```
Cmu=0.09; %Constante turbulenta de viscosidade dinâmica
L = 0.07*Lc; %Comprimento turbulento
k=(3/2)*(vdi*L)^2; %Energia cinética turbulenta
epsilon=(Cmu^0.75*k^1.5)/L; %Taxa de dissipação da energia turbulenta
nut=(Cmu*k^2)/epsilon; %Viscosidade cinemática turbulenta

disp(' ')
disp('***** Turbulência
*****')
disp(['Escala do comprimento turbulento(L): ',num2str(L),' m. Energia
cinética turbulenta(k): ',num2str(k),' m2/s2.'])
disp(['Taxa de dissipação turbulenta(epsilon): ',num2str(epsilon),'
m2/s3. Viscosidade cinemática turbulento(nut): ',num2str(nut),' m2/s'])

***** Turbulência *****
Escala do comprimento turbulento(L): 0.29698 m. Energia cinética
turbulenta(k): 0.0029768 m2/s2.
Taxa de dissipação turbulenta(epsilon): 8.9859e-05 m2/s3. Viscosidade
cinemática turbulento(nut): 0.008875 m2/s
```


Anexo C

Programas desenvolvidos (Pré-processador, Solver, Pós-processador)

C.1 Algoritmos desenvolvidos em MatLab®

Conteúdos

- Dados do escoamento
- Malha 2D
- Condições iniciais
- solver incompressível com aproximação de Boussinesq
- Pós-processador

Dados do escoamento

```
%*****Velocidade*****  
g = 9.81;  
v_dif = 0.15;  
v_ext = 0.15;  
%*****Temperaturas*****  
%----Verão----  
Tdi_ver=16; %Temperatura de verão Difusor [°C]  
Tex_ver=29; %Temperatura de verão Extracção [°C]  
Tinf_ver=28; %Temperatura de verão na sala [°C]
```

```

Tp_ver=29; %Temperatura de verão na parede [°C]
%----Inverno----
Tdi_inv=28;%Temperatura de inverno Difusor [°C]
Tex_inv=12;%Temperatura de inverno Extractor [°C]
Tinf_inv=13;%Temperatura de inverno na sala [°C]
Tp_inv=12;%Temperatura de inverno na parede [°C]
%*****Propriedades termodinâmicas*****
%----Temperatura de referência verão----
Tref_ver=Tdi_ver;
%----Temperatura de referência verão----
Tref_inv=Tdi_inv;
%Verão
rho_ver = interp1([15 20],[1.225 1.204],Tref_ver); %Massa volúmica verão [kg/m^3]
alpha_ver = interp1([15 20],[2.009e-5 2.074e-5],Tref_ver); %Difusividade térmica
[m^2/s]
beta_ver = interp1([0 20],[3.67e-3 3.43e-3],Tref_ver); %Coeficiente de expansão
térmica verão [1/K]
nu_ver = interp1([15 20],[1.470e-5 1.516e-5],Tref_ver); %Viscosidade térmica ver
[m^2/s^2]
Pr_ver = interp1([15 20],[0.7323 0.7309],Tref_ver); %Prandtl verão [1]
%Inverno
rho_inv = interp1([25 30],[1.184 1.164],Tref_inv); %Massa volúmica de inverno [k
alpha_inv = interp1([25 30],[2.141e-5 2.208e-5],Tref_inv); %Difusividade térmica
inverno [m^2/s]
beta_inv = interp1([20 40],[3.43e-3 3.20e-3],Tref_inv); %Coeficiente de expansão
térmica de inverno [1/K]
nu_inv = interp1([25 30],[1.562e-5 1.608e-5],Tref_inv); %Viscosidade térmica de
inverno [m^2/s^2]
Pr_inv = interp1([25 30],[0.7296 0.7282],Tref_inv); %Prandtl inverno [1]

%Velocidades das paredes
un = 0; us = 0; uw = 0; ue = 0;
vn = 0; vs = 0; vw = 0; ve = 0;

% save('dadosVerao','Tdi_ver','Tex_ver','Tinf_ver','Tp_ver','alpha_ver','beta_ve

```

```
'nu_ver');% save('dadosInverno','Tdi_inv','Tex_inv','Tinf_inv','Tp_inv','alpha  
'nu_inv');
```

```
a = 'inverno';
```

```
if strcmp(a,'inverno')
```

```
%     load('dadosInverno')
```

```
Tdi = Tdi_inv;
```

```
Tex = Tex_inv;
```

```
Tinf = Tinf_inv;
```

```
Tp = Tp_inv;
```

```
Tref = Tref_inv;
```

```
rho = rho_inv;
```

```
alpha = alpha_inv;
```

```
beta_th = beta_inv;
```

```
nu = nu_inv;
```

```
%     clearvars -except Tdi Tex Tinf Tp alpha beta
```

```
else
```

```
%     load('dadosVerao')
```

```
Tdi = Tdi_ver;
```

```
Tex = Tex_ver;
```

```
Tinf = Tinf_ver;
```

```
Tp = Tp_ver;
```

```
Tref = Tref_ver;
```

```
rho = rho_ver;
```

```
alpha = alpha_ver;
```

```
beta_th = beta_ver;
```

```
nu = nu_ver;
```

```
%     clearvars -except Tdi Tex Tinf Tp alpha beta
```

```
end
```

```
clearvars -except Tref Tdi Tex Tinf Tp rho alpha beta_th nu v_dif v_ext g
```

Malha 2D

- Malha

- Espaço
- Discretização do espaço
- Discretizações para os gráficos

Malha

```
%Define-se o tipo de malha a utilizar, Simples ou Escalonada de acordo
%com o tipo de problema que se está a desenvolver (Diferenças finitas,
% Volumes finitos)
```

Espaço

```
xf = 6; % Largura da sala
yf = 3; % Altura da sala
NX = 219; %201 Número de pontos ao longo de x
NY = 110; %101 Número de pontos ao longo de y
```

Discretização do espaço

```
dx = xf/(NX-1); %Passo do comprimento em x [m]
dy = yf/(NY-1); %Passo do comprimento em y [m]
```

Discretizações para os gráficos

```
dx_u = xf/((NX+1)-1);
dy_u = yf/((NY+2)-1);

dx_v = xf/((NX+2)-1);
dy_v = yf/((NY+1)-1);

dx_geral = xf/((NX+2)-1);
dy_geral = yf/((NY+2)-1);
%%Gráficos descretização dimensional para aplicação gráfica
x = 0:dx:xf;
y = 0:dy:yf;
[X,Y]=meshgrid(x,y);
```

```
x_u = 0:dx_u:xf;
y_u = 0:dy_u:yf;
[X_u,Y_u]=meshgrid(x_u,y_u);
Z_u = zeros(length(x_u),length(y_u));

x_v = 0:dx_v:xf;
y_v = 0:dy_v:yf;
[X_v,Y_v]=meshgrid(x_v,y_v);
Z_v = zeros(length(x_v),length(y_v));

x_geral = 0:dx_geral:xf;
y_geral = 0:dy_geral:yf;
[X_geral,Y_geral]=meshgrid(x_geral,y_geral);
Z_geral = zeros(length(x_geral),length(y_geral));

if false
subplot(3,1,1)
surf(X_u,Y_u,Z_u');title('Velocidade - u')
subplot(3,1,2)
surf(X_v,Y_v,Z_v');title('Velocidade - v')
subplot(3,1,3)
surf(X_geral,Y_geral,Z_geral');title('geral - p e T')
end

save('malha2d')
```

Condições iniciais

- Pré alocação das matrizes
- Velocidade
- Pressão
- Temperatura
- Passagem das boundary conditions (bc) para as matrizes a calcular
- Tempo

```

%%Condições iniciais e de Fronteira
%Representam as condições iniciais do estudo, quando t = 0, para a
%Velocidade, pressão e Temperatura

dadosEscoamento %Dados do escoamento
malha2d %Informação acerca da malha
clearvars -except Tref Tdi Tex Tinf Tp alpha rho beta_th nu v_dif v_ext dx dy
g NX NY %Variáveis que ficam guardadas para uso do script

```

Pré alocação das matrizes

```

u = zeros(NX+1,NY+2);
v = zeros(NX+2,NY+1);
p = zeros(NX+2,NY+2);
Te = zeros(NX+2,NY+2);

% Subdivisão para o topo
xCeil = ceil([0.4/dx 0.2/dx 2.3/dx 0.2/dx 2.9/dx]);
Nm_g = floor((NX+2)/2); Nm_u = floor((NX+1)/2); Nm_v = floor((NX+2)/2);
Vmax = max(v_dif,v_ext);
x1 = xCeil(1);
x2 = xCeil(1)+xCeil(2);
x3 = xCeil(1)+xCeil(2)+xCeil(3);
x4 = xCeil(1)+xCeil(2)+xCeil(3)+xCeil(4);
x5 = xCeil(1)+xCeil(2)+xCeil(3)+xCeil(4)+xCeil(5);

```

Velocidade

Velocidade em x - u

```

bcu = zeros(NX+1,NY+2);
bcu(1,:) = 0; bcu(end,:) = 0; bcu(:,1) = 0; bcu(:,end) = 0;
% Velocidade em y - v
bcv = zeros(NX+2,NY+1);
bcv(1,:) = 0; bcv(end,:) = 0; bcv(:,1) = 0; bcv(:,end) = 0; %Condição de fronteira pa

```

```

% Tecto, inlet e outlet
bcv(1:x1,end) = 0;
bcv(x1+1:x2,end) = v_ext;%
bcv(x2+1:x3,end) = 0;
bcv(x3+1:x4,end) = -v_dif;
bcv(x4+1:x5,end) = 0;

```

Pressão

```

bcp = zeros(NX+2,NY+2);
bcp(1,:) = 0; bcp(end,:) = 0; bcp(:,1) = 0; bcp(:,end) = 0;

```

Temperatura

```

bcTe = zeros(NX+2,NY+2);
%Tecto, inlet e outlet
bcTe(1:x1,end)=Tp;
bcTe(x1+1:x2,end)=Tex;
bcTe(x2+1:x3,end)=Tp;
bcTe(x3+1:x4,end)=Tdi;
bcTe(x4+1:x5,end)=Tp;
bcTe(x5:end,end) = Tp;

%Paredes e Chão
bcTe(1,:)= Tp; bcTe(end,:)= Tp;
bcTe(:,1)= Tp;
%Ambiente inicial
bcTe(2:end-1,2:end-1) = Tinf;
%%Temperatura das Envolventes - Janela
%Te(1,20:end-2) = Tver(14)/Tmax;

```

Passagem das boundary conditions (bc) para as matrizes a calcular

```

u = bcu;
v = bcv;

```

```
p = bcp;
Te = bcTe;
```

Tempo

```
dt = cflNumber(1,0,dx,Vmax,dy);
if dt > 0.05
dt=0.001;
else
dt;
end
tf = 300;
T = tf;
NT = T/dt;
Ttot=0:dt:T;
```

Solver incompressível com aproximação de Boussinesq

```
% Solver Incompressível com aproximação de Boussinesq
%escoamento incompressível resolvido através do algoritmo S.I.M.P.L.E.
%com a aproximação de Boussinesq.
%São resolvidas as equações de Navier-Stokes com a aproximação de Boussinesq
%e da Energia para o regime incompressível, no caso estacionário

close all
condIniciais
load tabela

pcom = p; pstar = p;
ucom = u; ustar = u;
vcom = v; vstar = v;
Te_new = Te;

%% S.I.M.P.L.E.
tt = 0;
time_p_total = 0;
```

```

time_Tip = 120;
k1 = 0;
timer_1=tic;
pcm = struct();
for Ti = 0:NT
timer_3 = tic;
%% Velocidade
for i = 2:NX
for j = 2:NY+1
ustar(i,j) = u(i,j)+dt*(-(1/4)*((u(i+1, j)+u(i,j))^2-(u(i,j)+u(i-1,j))^2)/dx...
-(1/4)*((u(i,j)+u(i,j+1))*(v(i,j)+v(i+1,j))-(u(i,j)+u(i,j-1))*(v(i,j-1)+v(i+1,
)/dy...
+(nu/dx^2)*(u(i+1,j)-2*u(i,j)+u(i-1,j)))+(nu/dy^2)*(u(i,j+1)-2*u(i,j)+u(i,j-1))
end
end
%velocidade em v
for i = 2:NX+1
for j = 2:NY
vstar(i,j) = v(i,j)+dt*(-(1/4)*((u(i,j)+u(i,j+1))*(v(i,j)+v(i+1,j))-(u(i-1,j)+
j+1))*(v(i,j)+v(i-1,j)))/dx...
-(1/4)*((v(i,j+1)+v(i,j))^2-(v(i,j)+v(i,j-1))^2)/dy...
+(nu/dx^2)*(v(i+1,j)-2*v(i,j)+v(i-1,j)))+(nu/dy^2)*(v(i,j+1)-2*v(i,j)+v(i,j-1))
eta_th*(Te(i,j)-Tref));
end
end
%% Pressão
%% Equação de Poisson para a Pressão           %Condições de fronteira

nit = 10000;
%   pstar = pcm;
%   pstar=pcm; % Usar só no método Jacobi e Gauss-Seidel
beta = 0.5;
residual_p = zeros(nit,1);

timer_2=tic;

```

```

it = 1;
for it = 1:nit
pcomit = pcom;
i = 2:NX+1;
j = 2:NY+1;
%           for i = 2:NX+1
%           for j = 2:NY+1
a = (2*dt/dx^2)+(2*dt/dy^2);
b = -dt/dx^2;
c = -dt/dy^2;
%%Método de Jacobi
%           pstar(i, j) =(-1/a)*...
%           (b*(pcom(i+1, j)+pcom(i-1, j))+c*(pcom(i, j+1)+pcom(i, j-1))..
%           + (1/dx)*(ustar(i, j)-ustar(i-1, j)))+(1/dy)*(vstar(i, j)-vstar

%%Método de Gauss Seidel
%           pstar(i, j) =(-1/a)*...
%           (b*(pcom(i+1, j)+pstar(i-1, j))+c*(pcom(i, j+1)+pstar(i, j-1))
%           + (1/dx)*(ustar(i, j)-ustar(i-1, j)))+(1/dy)*(vstar(i, j)-vstar

%%SOR - Sucessive Over Relaxation
pcom(i, j) =(-beta/a)*...
(b*(pcom(i+1, j)+pcom(i-1, j))+c*(pcom(i, j+1)+pcom(i, j-1))...
+(1/dx)*(ustar(i, j)-ustar(i-1, j)))+(1/dy)*(vstar(i, j)-vstar(i, j-1)))+(1-beta)*pcom

[e_rms_pit,e_pit] = residuo(pcomit(2:NX,2:NY),pcom(2:NX,2:NY));
erro = e_rms_pit;
%           end
%           end

%           pcom = pstar; % Usar só no método Jacobi e Gauss-Seidel

%
```

```

if erro <= 1e-4 %it >= nit
break
end
%      figure(3)
%      surf(pcom);
%      pause(0.01)
end
[e_rms_p,e_p] = residuo(p(2:NX,2:NY),pcom(2:NX,2:NY));
%Tecto - Condição especial%%%%
pcom(1:x1,end) = pcom(1:x1,end-1);
pcom(x1+1:x2,end)= pcom(x1+1:x2,end-1);
pcom(x2+1:x3,end) = pcom(x2+1:x3,end-1);
pcom(x3+1:x4,end) = 0;
pcom(x4+1:x5,end) = pcom(x4+1:x5,end-1);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
pcom(1,:)=pcom(2,:); %Parede Lateral Esquerda
pcom(end,:)=pcom(end-1,:); %Chão
pcom(:,1)=pcom(:,2); %Parede Lateral Direita

e = (1/dx)*(ustar(i,j)-ustar(i-1,j))+(1/dy)*(vstar(i,j)-vstar(i,j-1));

time_p = toc(timer_2);

time_p_total = time_p_total+time_p;

alpha_u = 0.3;
alpha_v = 0.3;

%Atualização das velocidades u e v a partir da pressão corrigida

u(2:NX,2:NY+1) = alpha_u*ustar(2:NX,2:NY+1)...
-(dt/dx)*(pcom(3:NX+1,2:NY+1)-pcom(2:NX,2:NY+1));
v(2:NX+1,2:NY) = alpha_v*vstar(2:NX+1,2:NY)...
-(dt/dy)*(pcom(2:NX+1,3:NY+1)-pcom(2:NX+1,2:NY));

```

```

alpha_p = 0.7;
p = pstar + alpha_p*pcom;
pcom = p;
%% Temperatura
alpha_Te = 0.5;
% Equação da temperatura
for i = 2:NX+1
for j = 2:NY+1
Te_new(i, j) = Te(i, j)+dt*...
((alpha)*((Te(i+1, j)-2*Te(i, j)+Te(i-1, j))/dx^2 +
(Te(i, j+1)-2*Te(i, j)+Te(i, j-1))/dy^2)...
-u(i, j)*((Te(i+1, j)-Te(i-1, j))/(2*dx))-v(i, j)*((Te(i, j+1)-Te(i, j-1))/(2*dy)));
end
end

%Condições de fronteira
%Tecto - Condição especial%%%%
Te_new(1:x1,end) = Te_new(1:x1,end-1);
Te_new(x1+1:x2,end) = Te_new(x1+1:x2,end-1);
Te_new(x2+1:x3,end) = Te_new(x2+1:x3,end-1);
Te_new(x3+1:x4,end) = Tdi;
Te_new(x4+1:x5,end) = Te_new(x4+1:x5,end-1);
Te_new(x5:end,end) = Te_new(x5:end,end-1);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Te_new(1, :) = Te_new(2, :);
Te_new(:, 1) = Te_new(:, 2);
Te_new(end, :) = Te_new(end-1, :);
[e_rms_Te,e_Te] = residuo(Te_new(2:NX, 2:NY), Te(2:NX, 2:NY));

Te = Te_new;

[e_rms_u,e_u] = residuo(u(2:NX, 2:NY-1), ustar(2:NX, 2:NY-1));
[e_rms_v,e_v] = residuo(v(2:NX-1, 2:NY), vstar(2:NX-1, 2:NY));

day = (NT*time_Tip)/(60*60*24);hora = (day-fix(day))*24;

```



```

pcm(k1 + 1).erro_escala_p = e_p;
%          pcm(k1 + 1).residuo_p = residual_p;
pcm(k1 + 1).tempo_poisson = time_p;
pcm(k1 + 1).temperatura = Te;
pcm(k1 + 1).erro_T = e_rms_Te;
pcm(k1 + 1).erro_escala_T = e_Te;
pcm(k1 + 1).tempo_iteracao = time_Tip;
k1 = k1 + 1;
name_recover = 'recover_pcm.mat';
save(name_recover)
end
time_Tip = toc(timer_3);
if e_u <= 1e-4 && e_v <= 1e-4
break
end

iteracao(1,Ti+1)=Ti;%iteracao = zeros(1,Ti+1);
resid_p(1,Ti+1) = e_p;%resid_p = zeros(1,Ti+1);
resid_u(1,Ti+1) = e_u;%resid_u = zeros(1,Ti+1);
resid_v(1,Ti+1) = e_v;%resid_v = zeros(1,Ti+1);
resid_Te(1,Ti+1) = e_Te;%resid_Te = zeros(1,Ti+1)

figure(1);
title('Resíduo')
hold on
plot
(iteracao,resid_p,'b',iteracao,resid_u,'g',iteracao,resid_v,'c',iteracao,resid_T
r');
legend('p','u','v','Te');
pause(0.00001)

end
cf=clock;
time_Ti=toc(timer_1)/60;
disp('-----Tempo total iterações-----')

```

```

disp(['*** Escoamento total ', num2str(time_Ti), ...
' minutos *** Equação de Poisson total: ', num2str(time_p_total/60), ' minutos'])
%% Gráficos

figure(100)
subplot(2,2,1)
surf(u); xlabel('X'); ylabel('Y'); zlabel('u - m/s'); title('Velocidade - u')
subplot(2,2,2)
surf(v); xlabel('X'); ylabel('Y'); zlabel('v - m/s'); title('Velocidade - v')
subplot(2,2,3)
surf(p); xlabel('X'); ylabel('Y'); zlabel('p - m^2/s^2'); title('Pressão'), colorbar
subplot(2,2,4)
surf(Te); xlabel('X'); ylabel('Y'); zlabel('T - °C'); title('Temperatura'), colorbar

ask=input('salvar? s/n: ','s');
if ask == 's'
jata = input('Dá-lhe um nome paaah!: ','s');
save(jata)
ask1 =input('Apagar a cópia de segurança? s/n: ','s');
if ask1 == 's'
delete(name_recover)
end
end
end

```

Pós-processador

```

%Processamento de todos os dados obtidos no solver para visualização
%gráfica

malha2d
% clearvars -except NX NY X Y X_u Y_u Z_u X_v Y_v Z_v X_geral Y_geral Z_geral
% s = 1;
% if s == 1
%     load incompSimple Ti nu v u p Te resid_p resid_u resid_v resid_Te

```

```

% elseif s == 2
%     load incompSimpleBoussinesq Ti nu v u p Te resid_p resid_u resid_v resid_T
% end

pressao = figure;
figure(pressao)

uplot(1:NX,1:NY)=0.5*(u(1:NX,1:NY)+u(2:NX+1,1:NY));
vplot(1:NX,1:NY)=0.5*(v(1:NX,1:NY)+v(1:NX,2:NY+1));
Len = sqrt(uplot.^2+vplot.^2+eps);
uplot=uplot./Len; vplot=vplot./Len;
quiver(X,Y,uplot',vplot',0.6,'k-')
axis equal
axis([0 6 0 3])
hold on
pcolor(X_geral,Y_geral,p');
colormap(jet)
colorbar
shading interp
axis equal
axis([0 6 0 3])
title({'Laboratório 2D - Pressão [m^2/s^2]';[' Viscosidade cinemática =
',num2str(nu),' m^2/s'];[' Iteração = ',num2str(Ti)]})
xlabel('Coordenadas espaciais (x) \rightarrow')
ylabel('Coordenadas espaciais (y) \rightarrow')
hold off

temperatura = figure;
figure(temperatura)

uplot(1:NX,1:NY)=0.5*(u(1:NX,1:NY)+u(2:NX+1,1:NY));
vplot(1:NX,1:NY)=0.5*(v(1:NX,1:NY)+v(1:NX,2:NY+1));
Len = sqrt(uplot.^2+vplot.^2+eps);
uplot=uplot./Len; vplot=vplot./Len;
quiver(X,Y,uplot',vplot',0.6,'k-')
axis equal
axis([0 6 0 3])
hold on
pcolor(X_geral,Y_geral,Te');

```

```
colormap(jet)
colorbar
shading interp
axis equal
axis([0 6 0 3])
title({'Laboratório 2D - Temperatura [°C]'; [' Viscosidade cinemática = ', num2str(nu), ' m^2/s']; [' Iteração = ', num2str(Ti)]})
xlabel('Coordenadas espaciais (x) \rightarrow')
ylabel('Coordenadas espaciais (y) \rightarrow')
hold off
velocidade = figure;
figure(velocidade)
uplot(1:NX,1:NY)=0.5*(u(1:NX,1:NY)+u(2:NX+1,1:NY));
vplot(1:NX,1:NY)=0.5*(v(1:NX,1:NY)+v(1:NX,2:NY+1));
Len = sqrt(uplot.^2+vplot.^2+eps);
uplot=uplot./Len; vplot=vplot./Len;
Vplot(1:NX,1:NY) = sqrt(u(2:end,3:end).^2+v(2:end-1,2:end).^2);
quiver(X,Y,uplot',vplot',0.6,'k-')
axis equal
axis([0 6 0 3])
hold on
pcolor(X,Y,Vplot');
colormap(jet)
colorbar
shading interp
axis equal
axis([0 6 0 3])
title({'Laboratório 2D - Velocidade Intensidade [m/s]'; [' Viscosidade cinemática = ', num2str(nu), ' m^2/s']; [' Iteração = ', num2str(Ti)]})
xlabel('Coordenadas espaciais (x) \rightarrow')
ylabel('Coordenadas espaciais (y) \rightarrow')
hold off
```


Anexo D

BlockMesh - Programa utilizado para criar malha no OpenFOAM

D.1 Algoritmos em C++

```
/*-----*- C++ -*-----*
| ===== |
| \\      / F i e l d      | OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox
| \\      / O p e r a t i o n | Version: 2.3.0
|  \\    /   A n d          | Web:      www.OpenFOAM.org
|   \\/    M a n i p u l a t i o n |
\*-----*-----*
FoamFile
{
    version      2.0;
    format       ascii;
    class        dictionary;
    object       blockMeshDict;
}
// * * * * *

convertToMeters 1;

vertices
```

```
(
    (0 0 0) //0
    (0.4 0 0) //1
    (0.6 0 0) //2
    (2.9 0 0) //3
    (3.1 0 0) //4
    (6 0 0) //5
    (6 3 0) //6
    (3.1 3 0) //7
    (2.9 3 0) //8
    (0.6 3 0) //9
    (0.4 3 0) //10
    (0 3 0) //11
    (0 0 0.01) //12
    (0.4 0 0.01) //13
    (0.6 0 0.01) //14
    (2.9 0 0.01) //15
    (3.1 0 0.01) //16
    (6 0 0.01) //17
    (0 3 0.01) //18
    (0.4 3 0.01) //19
    (0.6 3 0.01) //20
    (2.9 3 0.01) //21
    (3.1 3 0.01) //22
    (6 3 0.01) //23
);

blocks
(
    hex (0 1 10 11 12 13 19 18) (8 60 1) simpleGrading (1 1 1) //1 sala1
    hex (1 2 9 10 13 14 20 19) (4 60 1) simpleGrading (1 1 1) //2 extracção
    hex (2 3 8 9 14 15 21 20) (46 60 1) simpleGrading (1 1 1) //3 sala2
    hex (3 4 7 8 15 16 22 21) (4 60 1) simpleGrading (1 1 1) //4 insuflação
    hex (4 5 6 7 16 17 23 22) (58 60 1) simpleGrading (1 1 1) //5 sala3
);
```

```
edges
(
);

boundary
(
    walls
    {
        type wall;
        faces
        (
            (0 12 18 11)
            (5 17 23 6)
        );
    }
    floor
    {
        type wall;
        faces
        (
            (0 12 13 1)
            (1 13 14 2)
            (2 14 15 3)
            (3 15 16 4)
            (4 16 17 5)
        );
    }
    ceiling
    {
        type wall;
        faces
        (
            (11 10 19 18)
```

```
        (9 8 21 20)
        (7 6 23 22)
    );
}
inlet
{
    type patch;
    faces
    (
        (8 7 22 21)
    );
}
outlet
{
    type patch;
    faces
    (
        (10 19 20 9)
    );
}
volume
{
    type empty;
    faces
    (
        (0 1 10 11)
        (1 2 9 10)
        (2 3 8 9)
        (3 4 7 8)
        (4 5 6 7)
        (12 18 19 13)
        (13 19 20 14)
        (14 20 21 15)
        (15 21 22 16)
        (16 22 23 17)
    );
}
```

```
        );  
    }  
);
```

```
mergePatchPairs
```

```
(  
);
```

```
// ***** /
```