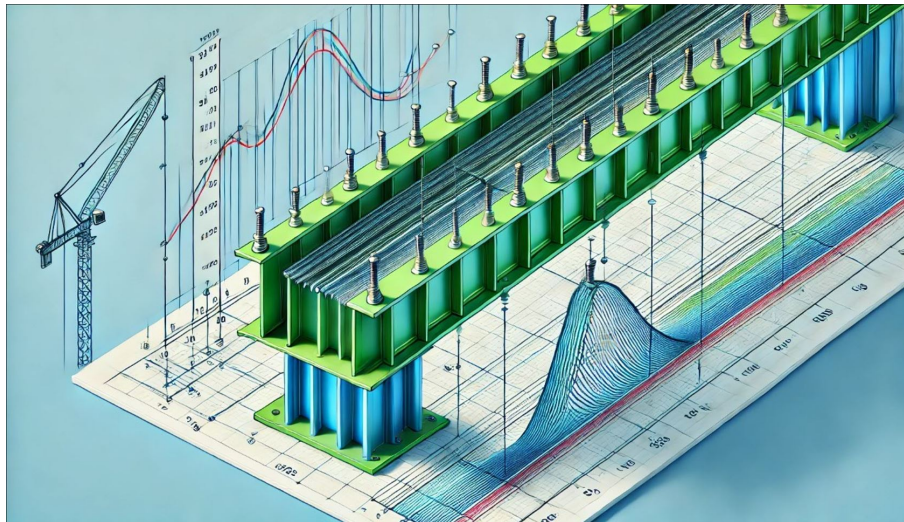




ISEL



Modelação Computacional de Estruturas do Tipo Viga Sob a Ação de Cargas Móveis

FREDERICO MIRANDA SOARES
(Licenciado em Engenharia Mecânica)

Dissertação para obtenção do grau de mestre em Engenharia Mecânica, na Área de
Especialização de Manutenção e Produção

Orientador:

Doutor Hugo Alexandre Freixial Argente dos Santos

Júri:

Presidente: Doutora Maria Amélia Ramos Loja

Vogais:

Doutor Afonso Manuel da Costa de Sousa Leite

Doutor Hugo Alexandre Freixial Argente dos Santos

Novembro de 2024

Modelação Computacional de Estruturas do Tipo Viga Sob a Ação de Cargas Móveis

FREDERICO MIRANDA SOARES
(Licenciado em Engenharia Mecânica)

Dissertação para obtenção do grau de mestre em Engenharia Mecânica, na Área de
Especialização de Manutenção e Produção

Orientador:

Doutor Hugo Alexandre Freixial Argente dos Santos, ISEL/IPL

Júri:

Presidente: Doutora Maria Amélia Ramos Loja, ISEL/IPL

Vogais:

Doutor Afonso Manuel da Costa de Sousa Leite, ISEL/IPL

Doutor Hugo Alexandre Freixial Argente dos Santos, ISEL/IPL

Novembro de 2024

Agradecimentos

Antes de mais, gostaria de expressar a minha mais profunda gratidão ao meu orientador, o professor Hugo Santos. A sua orientação, paciência e dedicação foram cruciais para a realização deste trabalho. Os seus conhecimentos não só enriqueceram o conteúdo do meu trabalho final de mestrado, como também expandiram os meus horizontes académicos e profissionais.

Aos meus familiares, um sincero agradecimento pelo apoio emocional constante que me foi proporcionado ao longo destes dois últimos anos de mestrado, principalmente nesta fase final. Todo o seu apoio foi fundamental não só no último ano de trabalho intensivo na minha dissertação, mas em todas as etapas deste trajeto académico.

Quero também agradecer aos meus colegas de trabalho, cujos gestos de amizade e solidariedade foram uma fonte constante de motivação e apoio emocional. O ambiente positivo que partilhámos contribuiu significativamente para a minha perseverança e sucesso durante este período.

A todos aqueles que, direta ou indiretamente, contribuíram para a concretização deste trabalho final de mestrado, o meu mais sincero obrigado. Este trabalho é, em parte, fruto do vosso apoio e incentivo.

Declaração de integridade

Declaro que esta dissertação é o resultado da minha investigação pessoal e independente. O seu conteúdo é original e todas as fontes listadas nas referências bibliográficas foram consultadas e estão devidamente mencionadas no texto. Mais declaro que todas as referências científicas e técnicas relevantes para o desenvolvimento do trabalho estão devidamente citadas e constam das referências bibliográficas.

O autor

A handwritten signature in black ink, reading "Frederico Miranda Soares". The signature is written in a cursive style and is positioned above a horizontal line.

Lisboa, 21 de .. novembro .. de 2024

Modelação Computacional de Estruturas do Tipo Viga Sob a Ação de Cargas Móveis

Resumo

Este trabalho centra-se na implementação computacional de modelos estruturais do tipo viga sujeitos a cargas móveis, através do uso de programas de manipulação simbólica (Maple™) e de programas de simulação numérica (ANSYS® Workbench™), prevendo assim o comportamento mecânico desses modelos, considerando análises dinâmicas do tipo transiente.

O modelo estrutural adotado baseia-se na teoria de vigas de Euler-Bernoulli. Através desta teoria, foi possível implementar o modelo de uma viga simplesmente apoiada sob a ação de uma carga móvel com a ajuda do programa Maple™ de forma a obter soluções ao nível da deformada, momento fletor e esforço transversal. De seguida, desenvolveu-se esse mesmo modelo no programa de simulação numérica ANSYS® Workbench™. Consideram-se os cenários de resposta não-amortecida e de resposta amortecida da viga. Os modelos analítico e numérico, demonstraram concordância nos resultados fornecidos. Numa fase mais avançada do trabalho, consideraram-se outros cenários, através da alteração do modelo implementado inicialmente, tais como: modelo de viga contínua, modelo de viga encastrada-apoiada, modelo de viga simplesmente apoiada de secção transversal variável, modelo de viga simplesmente apoiada de comportamento mecânico heterogéneo e modelo de viga simplesmente apoiada com duas cargas móveis. Desta forma, foi possível prever o comportamento da viga nos diferentes cenários e analisar o impacto dessas alterações no modelo base.

Espera-se que os resultados obtidos neste trabalho final de Mestrado possam contribuir para o avanço do Projeto Mecânico de estruturas do tipo viga sob ação de cargas móveis.

Palavras chave

Vigas de Euler-Bernoulli; Cargas Móveis; Método dos Elementos Finitos; Método de Newmark

Computational Modelling of Beam-type Structures Under the Action of Moving Loads

Abstract

This work involves the computational implementation of beam type structural models under the action of moving loads, using symbolic manipulation programs (Maple™) and numerical simulation programs (ANSYS® Workbench™), in order to predict the mechanical behaviour of these models, considering transient dynamic analyses.

The structural model adopted is based on the Euler-Bernoulli beams theory. Using this theory, it was possible to implement the model of a simply-supported beam under the action of a moving load with the help of Maple™ in order to obtain results in terms of deformation, bending moment and shear force. The same model was then implemented in ANSYS® Workbench™. Damped and undamped response analyses were carried out for the simply-supported beam under the action of a moving load. These analytical and numerical models always showed agreement in the results provided deformation, bending moment and shear force. At a later stage of the work, other scenarios were considered by modifying the model initially implemented, such as: a continuous beam, a clamped-supported beam, a simply-supported beam with variable cross-section, a simply-supported beam with heterogeneous mechanical behavior and a simply-supported beam with two moving loads. In this way, it was possible to predict the behaviour of beams in the different scenarios and analyse the impact of these changes on the initial model.

It is hoped that the results obtained in this work will contribute to the improvement of the mechanical design stage of beam-type structures under the action of moving loads.

Key words

Euler-Bernoulli Beams; Moving Loads; Finite Element Method; Newmark's Method

Simbologia e Abreviaturas

Simbologia

Latinas

b	Largura (Secção Transversal)
c_e	Coefficiente de Amortecimento Externo
c_i	Coefficiente de Amortecimento Interno
E	Módulo de Elasticidade
h	Altura (Secção Transversal)
I	Momento de Inércia
L	Comprimento da Viga
$M, M(x), M(t), M(x, t)$	Momento Flector
m	Massa por unidade de comprimento
n	Modos de Vibração
P	Intensidade da Carga Móvel
$q_n, q_n(t)$	Enésima Coordenada Generalizada
S_n	Enésimo Parâmetro de Velocidade
t	Tempo
$u, u(x), u(t), u(x, t)$	Deformada
$V, V(x), V(t), V(x, t)$	Esforço Transverso
$v, v(t)$	Velocidade
v_{cr}	Velocidade Crítica
x	Coordenada x
y	Coordenada y

Gregas

α_e	Coeficiente de Massa
α_i	Coeficiente de Rigidez
β	Parâmetro de Controlo do Algoritmo no Método de Newmark
γ	Parâmetro de Controlo do Algoritmo no Método de Newmark
ξ_n	Enésimo Coeficiente de Amortecimento
ρ	Densidade Mássica
$\phi_n(x)$	Enésima Forma Modal
Ω_n	Enésima Frequência de Excitação
ω_n	Enésima Frequência de Vibração
ω_{dn}	Enésima Frequência de Vibração Amortecida

Abreviaturas

CAE	Computer Aided Engineering
EF	Elementos Finitos
I-DEAS	Integrated Design and Engineering Analysis Software
LUSAS	London University Stress Analysis System
MATLAB	MATrix LABoratory
MDF	Método das Diferenças Finitas
MEF	Método dos Elementos Finitos
SA	Simplesmente Apoiada

Índice

Agradecimentos	i
Declaração de integridade	iii
Resumo	v
Abstract	vii
Simbologia e Abreviaturas	ix
1 Introdução	1
2 Estado da Arte	5
3 Modelo Analítico de Vigas de Euler-Bernoulli sob a Ação de Cargas Móveis em Regime Transiente	11
3.1 Teoria de Vigas de Euler-Bernoulli vs Timoshenko	11
3.2 Formulação do Problema	13
3.3 Soluções Analíticas	16
3.3.1 Análise de Convergência	17
3.3.2 Resposta Não-Amortecida	20
3.3.3 Resposta Amortecida	23
4 Modelo Numérico de Vigas de Euler-Bernoulli sob a Ação de Cargas Móveis em Regime Transiente	27
4.1 Conceitos Base do Método dos Elementos Finitos	27
4.1.1 Formulação Integral	31
4.1.2 Integração no Domínio do Tempo	32
5 Soluções Analíticas vs Soluções Numéricas - Viga Simplesmente Apoiada	35
5.1 Viga Simplesmente Apoiada Não-Amortecida	36
5.2 Viga Simplesmente Apoiada Amortecida	39
6 Outros Casos de Estudo Implementados em ANSYS	43
6.1 Viga Contínua	43

6.2	Viga Encastrada-Apoiada	48
6.3	Viga com Variação Geométrica da Secção Transversal	52
6.4	Viga de Comportamento Mecânico Heterogéneo	56
6.5	Viga Sob a Ação de Duas Cargas Móveis	61
6.6	Análise/Comparação dos Resultados	65
7	Conclusões e Desenvolvimentos Futuros	73
7.1	Conclusões	73
7.2	Desenvolvimentos Futuros	74
	Bibliografia	79
A	Metodologia ANSYS® Workbench™	81
A.1	Tipo de Análise	82
A.2	Definição dos Materiais	82
A.3	Definição da Geometria da Estrutura	84
A.4	Definição do Modelo	92
B	Código Maple™	105

Índice de figuras

1.1	Modelo de Carga Móvel	2
1.2	Modelo de Massa Móvel	2
1.3	Modelo de Oscilador Móvel	3
3.1	Modelo de Vigas de Euler-Bernoulli vs Modelo de Vigas de Timoshenko	12
3.2	Modelo de Viga Simplesmente Apoiada, sujeita a uma Carga Móvel (Yang et al. (2004))	13
3.3	Deformada máxima a meio-vão em função do nº de modos de vibração adotados	17
3.4	Momento fletor máximo a meio-vão em função do nº de modos de vibração adotados	18
3.5	Esforço transverso máximo a meio-vão em função do nº de modos de vibração adotados	18
3.6	Deformada máxima para $t = 0.04s$ em função do nº de modos de vibração adotados	19
3.7	Momento fletor máximo para $t = 0.04s$ em função do nº de modos de vibração adotados	19
3.8	Esforço transverso máximo para $t = 0.04s$ em função do nº de modos de vibração adotados	19
3.9	Deformada a meio-vão (resposta não-amortecida)	20
3.10	Momento fletor a meio-vão (resposta não-amortecida)	21
3.11	Esforço transverso a meio-vão (resposta não-amortecida)	21
3.12	Deformada para $t = 0.04s$ (resposta não-amortecida)	22
3.13	Momento fletor para $t = 0.04s$ (resposta não-amortecida)	22
3.14	Esforço transverso para $t = 0.04s$ (resposta não-amortecida)	23
3.15	Deformada a meio-vão (resposta amortecida)	24
3.16	Momento fletor a meio-vão (resposta amortecida)	24
3.17	Esforço transverso a meio-vão (resposta amortecida)	25
3.18	Deformada para $t = 0.04s$ (resposta amortecida)	25
3.19	Momento fletor para $t = 0.04s$ (resposta amortecida)	26
3.20	Esforço transverso para $t = 0.04s$ (resposta amortecida)	26
5.1	Exemplo do modelo implementado no programa de simulação numérica	35

5.2	Deformada obtida a meio-vão para a viga simplesmente apoiada não-amortecida - Comparação Solução Analítica vs Soluções de EF	36
5.3	Momento fletor obtido a meio-vão para a viga simplesmente apoiada não-amortecida - Comparação Solução Analítica vs Soluções de EF	37
5.4	Esforço transversal obtido a meio-vão para a viga simplesmente apoiada não-amortecida - Comparação Solução Analítica vs Soluções de EF	37
5.5	Deformada obtida para $t = 0.04s$ para a viga simplesmente apoiada não-amortecida - Comparação Solução Analítica vs Soluções de EF	38
5.6	Momento fletor obtido para $t = 0.04s$ para a viga simplesmente apoiada não-amortecida - Comparação Solução Analítica vs Soluções de EF	38
5.7	Esforço transversal obtido para $t = 0.04s$ para a viga simplesmente apoiada não-amortecida - Comparação Solução Analítica vs Soluções de EF	39
5.8	Deformada obtida a meio-vão para a viga simplesmente apoiada amortecida - Comparação Solução Analítica vs Soluções de EF	40
5.9	Momento fletor obtido a meio-vão para a viga simplesmente apoiada amortecida - Comparação Solução Analítica vs Soluções de EF	40
5.10	Esforço transversal obtido a meio-vão para a viga simplesmente apoiada amortecida - Comparação Solução Analítica vs Soluções de EF	41
5.11	Deformada obtida para $t = 0.04s$ para a viga simplesmente apoiada amortecida - Comparação Solução Analítica vs Soluções de EF	41
5.12	Momento fletor obtido para $t = 0.04s$ para a viga simplesmente apoiada amortecida - Comparação Solução Analítica vs Soluções de EF	42
5.13	Esforço transversal obtido para $t = 0.04s$ para a viga simplesmente apoiada amortecida - Comparação Solução Analítica vs Soluções de EF	42
6.1	Viga contínua	44
6.2	Deformada obtida a meio-vão para a viga contínua não-amortecida - Soluções de EF	45
6.3	Momento fletor obtido a meio-vão para a viga contínua não-amortecida - Soluções de EF	45
6.4	Esforço transversal obtido a meio-vão para a viga contínua não-amortecida - Soluções de EF	46
6.5	Deformada obtida para $t = 0.04s$ para a viga contínua não-amortecida - Soluções de EF	46
6.6	Momento fletor obtido para $t = 0.04s$ para a viga contínua não-amortecida - Soluções de EF	47
6.7	Esforço transversal obtido para $t = 0.04s$ para a viga contínua não-amortecida - Soluções de EF	47
6.8	Viga encastrada-apoiada	48
6.9	Deformada obtida a meio-vão para a viga encastrada-apoiada não-amortecida - Soluções de EF	49

6.10	Momento fletor obtido a meio-vão para a viga encastrada-apoiada não-amortecida - Soluções de EF	49
6.11	Esforço transversal obtido a meio-vão para a viga encastrada-apoiada não-amortecida - Soluções de EF	50
6.12	Deformada obtida para $t = 0.04s$ para a viga encastrada-apoiada não-amortecida - Soluções de EF	50
6.13	Momento fletor obtido para $t = 0.04s$ para a viga encastrada-apoiada não-amortecida - Soluções de EF	51
6.14	Esforço transversal obtido para $t = 0.04s$ para a viga encastrada-apoiada não-amortecida - Soluções de EF	51
6.15	Viga com variação geométrica da secção transversal	53
6.16	Deformada obtida a meio-vão para a viga com variação geométrica da secção transversal não-amortecida - Soluções de EF	53
6.17	Momento fletor obtido a meio-vão para a viga com variação geométrica da secção transversal não-amortecida - Soluções de EF	54
6.18	Esforço transversal obtido a meio-vão para a viga com variação geométrica da secção transversal não-amortecida - Soluções de EF	54
6.19	Deformada obtida para $t = 0.04s$ para a viga com variação geométrica da secção transversal não-amortecida - Soluções de EF	55
6.20	Momento fletor obtido para $t = 0.04s$ para a viga com variação geométrica da secção transversal não-amortecida - Soluções de EF	55
6.21	Esforço transversal obtido para $t = 0.04s$ para a viga com variação geométrica da secção transversal não-amortecida - Soluções de EF	56
6.22	Viga de comportamento mecânico heterogéneo	57
6.23	Deformada obtida a meio-vão para a viga de comportamento mecânico heterogéneo não-amortecida - Soluções de EF	58
6.24	Momento fletor obtido a meio-vão para a viga de comportamento mecânico heterogéneo não-amortecida - Soluções de EF	58
6.25	Esforço transversal obtido a meio-vão para a viga de comportamento mecânico heterogéneo não-amortecida - Soluções de EF	59
6.26	Deformada obtida para $t = 0.04s$ para a viga de comportamento mecânico heterogéneo não-amortecida - Soluções de EF	59
6.27	Momento fletor obtido para $t = 0.04s$ para a viga de comportamento mecânico heterogéneo não-amortecida - Soluções de EF	60
6.28	Esforço transversal obtido para $t = 0.04s$ para a viga de comportamento mecânico heterogéneo não-amortecida - Soluções de EF	60
6.29	Viga sob a ação de duas cargas móveis	61
6.30	Deformada obtida a meio-vão para a viga sob a ação de duas cargas móveis não-amortecida - Soluções de EF	62

6.31	Momento fletor obtido a meio-vão para a viga sob a ação de duas cargas móveis não-amortecida - Soluções de EF	62
6.32	Esforço transverso obtido a meio-vão para a viga sob a ação de duas cargas móveis não-amortecida - Soluções de EF	63
6.33	Deformada obtida para $t = 0.04s$ para a viga sob a ação de duas cargas móveis não-amortecida - Soluções de EF	63
6.34	Momento fletor obtido para $t = 0.04s$ para a viga sob a ação de duas cargas móveis não-amortecida - Soluções de EF	64
6.35	Esforço transverso obtido para $t = 0.04s$ para a viga sob a ação de duas cargas móveis não-amortecida - Soluções de EF	64
6.36	Deformada obtida a meio-vão - Análise/Comparação das soluções de EF	65
6.37	Momento fletor obtido a meio-vão - Análise/Comparação das soluções de EF	66
6.38	Esforço transverso obtido a meio-vão - Análise/Comparação das soluções de EF	66
6.39	Deformada obtida para $t = 0.04s$ - Análise/Comparação das soluções de EF	67
6.40	Momento fletor obtido para $t = 0.04s$ - Análise/Comparação das soluções de EF	68
6.41	Esforço transverso obtido para $t = 0.04s$ - Análise/Comparação das soluções de EF	68
A.1	Janela inicial do Workbench™	81
A.2	Selecionar o módulo <i>Transient Structural</i>	82
A.3	Janela <i>Engineering Data</i>	83
A.4	Seleção do material pretendido	83
A.5	Material selecionado	84
A.6	Abrir o <i>DesignModeler</i>	85
A.7	Janela <i>DesignModeler</i>	85
A.8	Definir o plano de trabalho e um novo <i>sketch</i>	86
A.9	Opção <i>Look at</i>	86
A.10	Ferramenta <i>Line</i>	87
A.11	Usando a ferramenta <i>Line</i>	87
A.12	Dimensionar o comprimento da viga	88
A.13	Definir a secção transversal	88
A.14	Definição das dimensões da secção transversal	89
A.15	Selecionar a opção <i>Lines From Sketches</i>	89
A.16	Usar a ferramenta <i>Lines From Sketches</i>	90
A.17	Definição da viga como um único elemento finito	90
A.18	Selecionar a ferramenta <i>Split Edges</i>	91
A.19	Definição dos parâmetros da ferramenta <i>Split Edges</i>	91
A.20	Viga definida com 8 elementos finitos	92
A.21	Janela do <i>Transient Structural - ANSYS® Mechanical™</i>	93
A.22	Informação sobre a estrutura definida	94
A.23	Ferramenta <i>Generate Mesh</i>	94

A.24 Parâmetros do <i>Analysis Settings</i>	95
A.25 Parâmetros para a definição do modelo	95
A.26 Adicionar dois apoios	96
A.27 Definição da força por instantes	97
A.28 Simulação da força a deixar de atuar sob a viga	97
A.29 Parâmetros para obter o comportamento da viga	98
A.30 Selecionar o ponto médio	99
A.31 Adicionar a ferramenta <i>Path</i>	99
A.32 Usar a ferramenta <i>Path</i>	100
A.33 Definição dos parâmetros do <i>Shear-Moment Diagram</i>	100
A.34 Selecionar a opção <i>Solve</i>	101
A.35 Momento fletor em função do tempo	101
A.36 Esforço transversal em função do tempo	102
A.37 Deformada em função do tempo	102
A.38 O diagrama dos vários parâmetros em função da coordenada x	103

Índice de tabelas

3.1	Dados do Problema	16
3.2	Coeficientes de Amortecimento	23
6.1	Dados: Viga Contínua	44
6.2	Dados: Viga com Variação Geométrica da Secção Transversal	52
6.3	Dados: Viga de Comportamento Mecânico Heterogéneo	57
6.4	Valores de deformada máximos, em módulo, a meio-vão ($\times 10^6$)	70
6.5	Valores de deformada máximos, em módulo, para $t = 0.04s$ ($\times 10^6$)	70
6.6	Valores do momento fletor máximos a meio-vão	70
6.7	Valores do momento fletor máximos para $t = 0.04s$	70
6.8	Valores do esforço transversal máximos a meio-vão	71
6.9	Valores do esforço transversal máximos para $t = 0.04s$	71

Capítulo 1

Introdução

A análise dinâmica de vigas sujeitas a cargas móveis tem vindo a ser um tópico de bastante estudo em diversas áreas tais como Engenharia Mecânica, Engenharia Civil, Engenharia Aeroespacial, etc. Como exemplos de estudo existem problemas relacionados com o movimento de um veículo numa ponte, o movimento das rodas de um comboio ou o movimento de uma montanha-russa sob as respetivas vias férreas, o movimento de uma ponte rolante usada para determinadas aplicações de fabricação ou manutenção, braços robotizados para executar tarefas como montagem e soldadura, no projeto de aeronaves, tanto para o caso do corpo do avião como na projeção das suas asas, de forma a garantir a resistência e rigidez das mesmas, etc. Este tipo de exemplos levou a que determinados estudos fossem feitos nas áreas mencionadas, nomeadamente estudos sobre a vibração das pontes das linhas férreas de alta velocidade causada pelo movimento de comboios que é completamente diferente da análise das pontes rodoviárias em que há somente a passagem de carros. Este tipo de estudos e análises foram referidos e desenvolvidos por Yang et al. (2004), de modo a perceber o significado do nível de deformações e de tensões observadas nestes problemas dinâmicos, o que não se verifica em problemas quasi-estáticos, ou seja, em problemas onde a velocidade da carga móvel é muito baixa.

A dinâmica de estruturas sob a ação de sistemas em movimento tem despertado o interesse de muitos investigadores ao longo dos últimos anos, o que levou a que fossem desenvolvidos e abordados problemas simples e fundamentais por via analítica. Após alguns estudos no domínio da dinâmica de vigas simplesmente apoiadas sujeitas a cargas móveis (Timoshenko (1922)), foi possível desenvolver diversos modelos analíticos que preveem o comportamento da estrutura através das soluções apresentadas. Assim, a melhoria destes modelos e das metodologias neles apresentadas, têm vindo a ser inevitáveis ao longo dos últimos anos.

As respostas dinâmicas de estruturas sob a ação de sistemas móveis podem ser obtidas através de três modelos distintos: modelo de carga em movimento (Figura 1.1); modelo de massa em movimento (Figura 1.2); modelo de oscilador em movimento (Figura 1.3). No desenvolvimento do presente trabalho, o modelo central de estudo é o modelo de carga em movimento representado na Figura 1.1, em que o sistema em movimento sobre a viga é descrito

como uma carga móvel que se desloca ao longo do seu comprimento. Neste tipo de modelos os efeitos da interação do sistema em movimento com a viga, são desprezados, o que representa o mais simples e comum dos modelos estudados. No que diz respeito ao modelo de massa em movimento que está representado na Figura 1.2, o sistema móvel é representado por um corpo com uma determinada massa e que se movimenta ao longo da viga, o que revela uma melhoria em relação ao modelo de carga em movimento, isto porque os efeitos da inércia do sistema móvel são tidos em consideração no estudo. De todo o modo, o efeito da rigidez do sistema móvel é considerado infinito e assim, o deslocamento do corpo móvel em relação à viga não é considerado (Santos (2024)). O modelo de oscilador em movimento representado na Figura 1.3, é o mais realista dos três modelos descritos, pois são considerados os efeitos de interação entre o oscilador e a viga, conduzindo também a modelos de análise associados significativamente mais complexos.

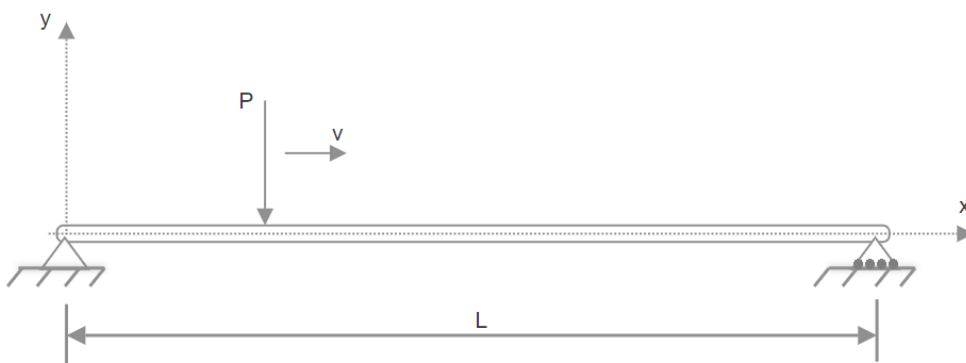


Figura 1.1 Modelo de Carga Móvel

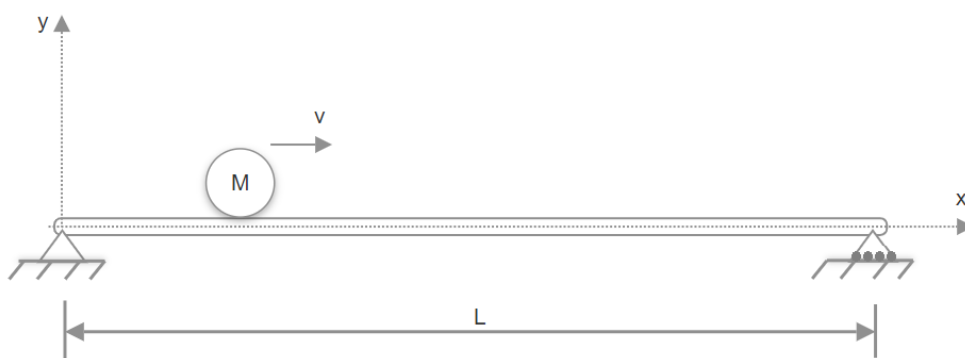


Figura 1.2 Modelo de Massa Móvel

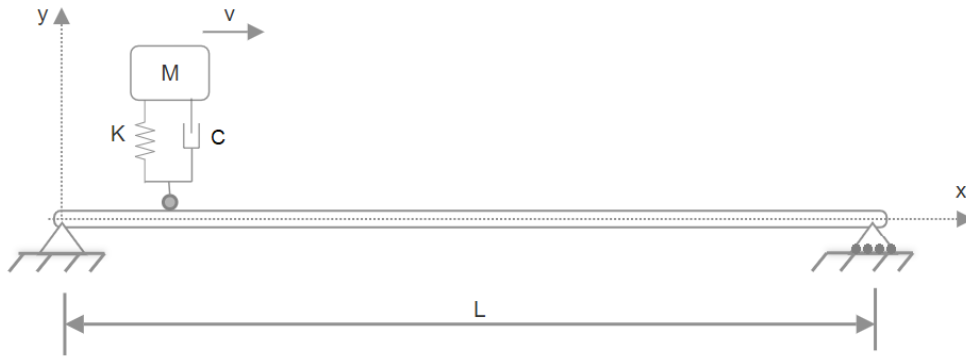


Figura 1.3 Modelo de Oscilador Móvel

Nos três modelos acima descritos, será importante referir que a consideração do amortecimento interno da própria viga poderá ser relevante e descreverá o problema de uma forma mais real e precisa. Contudo, a análise do problema torna-se mais complexa. A obtenção de soluções analíticas poderá tornar-se uma tarefa muito exigente, ou até mesmo impossível.

Por outro lado, o desenvolvimento computacional levou ao aumento alargado de métodos numéricos em Engenharia, o que tornou problemas impossíveis de se resolver analiticamente, em problemas possíveis de serem resolvidos numericamente. Assim, o poder computacional adquirido nos últimos anos tem vindo a ser uma mais valia para a previsão e obtenção de soluções precisas e realistas na análise deste tipo de problemas.

No presente trabalho a pesquisa desenvolvida envolve, numa fase inicial, a implementação computacional, analítica e numérica, do modelo do tipo viga simplesmente apoiada sob a ação de uma carga móvel. Para a análise analítica, o estudo baseou-se na implementação do modelo recorrendo ao programa Maple™ (Maple™ (2022)). Relativamente à análise numérica, implementou-se o mesmo modelo recorrendo ao programa ANSYS® Workbench™ (ANSYS® (2024)).

Através do uso de programas de simulação numérica, é possível implementar modelos estruturais do tipo viga sujeitos a cargas móveis, prevendo assim o seu comportamento mecânico. Neste tipo de problemas, a carga muda de posição na estrutura em função do tempo. Nas análises numéricas a discretização envolve duas etapas: a discretização espacial e a discretização temporal. No contexto da discretização espacial, vários métodos têm vindo a ser desenvolvidos, sendo o Método dos Elementos Finitos o mais adotado na indústria por ser uma técnica bastante versátil e capaz de analisar com precisão geometrias mais complexas. A aplicação deste método fornece um conjunto de equações diferenciais em função do tempo para cada elemento finito. Estas equações precisam, posteriormente, de ser discretizadas no tempo. Para tal, é possível recorrer-se a outro tipo de métodos, tais como: Método de Newmark, Método de Wilson, Método de Runge-Kutta. Em muitos trabalhos desenvolvidos nesta área, o Método dos Elementos Finitos e o Método de Newmark têm vindo a ser usados com bastante sucesso (Newmark (1959), Hügül (2005), Meireles (2007), Deka et al. (2018), Rampinelli (2018), Santos (2024)).

O ANSYS® Workbench™ insere-se na categoria de programas de Engenharia *Computer Aided Engineering* (CAE) e tem como finalidade auxiliar os engenheiros na tomada de decisões em determinadas etapas de um projeto em desenvolvimento, nomeadamente nas fases de análise, dimensionamento e validação (Azevedo (2015)). Este tipo de programas permite reduzir alguns custos associados às diferentes fases do projeto, e, por consequência, reduzir o tempo despendido no desenvolvimento do projeto. Desta forma, também é possível reduzir a probabilidade de falha de componentes e/ou estrutura, através das análises efetuadas nas simulações.

Os resultados numéricos obtidos permitem comparar e analisar o impacto que as diversas variáveis podem ter sobre o comportamento estrutural. Esta análise é essencial para otimizar a conceção e as condições de trabalho de determinadas estruturas em aplicações práticas, proporcionando uma maior segurança e eficiência das mesmas. Através da modelação computacional, é possível explorar diferentes cenários e identificar os principais fatores que influenciam o desempenho estrutural.

Com este trabalho, pretende-se também explorar o impacto que as alterações introduzidas ao nível da geometria, do comportamento material, etc., ao modelo de viga simplesmente apoiada implementado inicialmente, têm sobre a sua resposta estrutural. Para tal, implementaram-se através do programa de simulação numérica ANSYS® Workbench™ os seguintes cenários: modelo de viga contínua, modelo de viga encastrada-apoiada, modelo de viga simplesmente apoiada de secção transversal variável, modelo de viga simplesmente apoiada de comportamento mecânico heterogéneo e modelo de viga simplesmente apoiada sob a ação de duas cargas móveis.

Capítulo 2

Estado da Arte

A estabilidade estrutural é, desde sempre, um conceito de extrema importância. Desde as primeiras construções da humanidade (pirâmides, torres, pontes, etc.) que este conceito se tornou uma preocupação para o ser humano, tanto ao nível da segurança, como da durabilidade da estrutura em causa. Ao longo da história várias técnicas de Engenharia foram introduzidas pelas diversas civilizações e pelas suas culturas de construção. Desde povos da antiguidade até aos tempos atuais, que a preocupação pela estabilidade, segurança e resistência das estruturas, tinha, e tem, de ser garantida. Assim, ao longo dos tempos, nasceu a necessidade de explorar outras áreas relacionadas com a estabilidade estrutural, como a Mecânica dos Materiais e a Dinâmica Estrutural, que está relacionada com a análise de estruturas sujeitas a ações dinâmicas. No caso da Mecânica dos Materiais é importante entender e prever o comportamento mecânico dos diferentes materiais sob determinadas condições, nomeadamente quando se deformam, se resistem ou falham, o que proporcionará uma base de estudo para projetar estruturas seguras e eficientes. Quanto ao estudo da Dinâmica Estrutural o foco é a análise do comportamento das estruturas quando estão submetidas a ações dinâmicas, ou cargas que variam com o tempo, como por exemplo o vento, sismos, ou cargas móveis. Aqui, ao contrário das cargas estáticas (que não dependem do tempo), as ações dinâmicas provocam vibrações e movimento na estrutura, sendo o seu estudo fundamental para garantir a sua durabilidade e segurança mesmo em condições de variação rápida da ação dinâmica em causa. Neste contexto, a análise do comportamento de estruturas sob a ação de cargas móveis, tornou-se um dos temas de intensa investigação por parte de alguns autores, sendo o estudo de vigas sob a ação de cargas móveis crucial para compreender o comportamento dinâmico de estruturas.

Muitos dos estudos realizados centram-se em descrever, matematicamente, o comportamento mecânico da viga quando sujeita a ações dinâmicas. As equações que descrevem esse comportamento são conhecidas através da teoria de vigas de Euler-Bernoulli, sempre em função do tempo e da posição da carga móvel. Esta foi uma das primeiras análises realizadas neste âmbito, onde também foram introduzidos conceitos bastante importantes neste tipo de análises, nomeadamente a frequência natural, que, neste contexto, é a frequência específica de vibração da viga (Euler (1765)).

Até meados do século XX, os cientistas e engenheiros utilizavam métodos tradicionais para analisar a estabilidade das estruturas, nomeadamente métodos analíticos e empíricos. Contudo, estes métodos eram pouco precisos, lentos e bastante limitados, dada a complexidade das soluções apresentadas. Desta forma, tornou-se essencial o desenvolvimento de uma ferramenta que aumentasse a precisão dos resultados, obtendo-os com mais rapidez, podendo também ser possível analisar situações de modelos mais complexos. Assim surgiu a modelação computacional como uma ferramenta essencial na análise estrutural. Com o avanço da tecnologia ao longo dos anos, e com o desenvolvimento de métodos numéricos, é possível realizar simulações computacionais cada vez mais precisas e eficientes para prever o comportamento dinâmico das estruturas sob a ação de cargas móveis, sendo assim estas ferramentas imprescindíveis e de extrema relevância na Engenharia Mecânica. No âmbito da modelação computacional de vigas sujeitas a cargas móveis, diversos trabalhos e investigações têm vindo a ser desenvolvidos.

Um dos trabalhos mais importantes desenvolvidos no âmbito da Dinâmica Estrutural, é devido a Newmark (1959). Neste trabalho foi proposto um método computacional para resolver equações diferenciais que descrevem o comportamento dinâmico de estruturas. Baseado na discretização espacial e temporal do problema em questão, sendo considerado um dos métodos mais eficazes no cálculo da resposta dinâmica de estruturas.

No âmbito de problemas de vigas sujeitas a cargas móveis, as soluções analíticas desenvolvidas com o apoio de métodos já conhecidos, são bastante limitadas. Para contornar essa limitação, são necessárias técnicas de simulação numérica baseadas, por exemplo, no Método dos Elementos Finitos, tal como é sugerido nos trabalhos de Olsson (1991).

No trabalho realizado por Rieker et al. (1996) foi investigado o efeito da discretização de estruturas do tipo viga sob a ação de cargas móveis através do Método dos Elementos Finitos, tendo-se obtido resultados mais precisos para malhas mais finas, como seria de esperar, no caso de um ciclo de movimento. No caso de múltiplos ciclos, a malha teria de ser atualizada nas zonas de contacto da mola móvel com a viga, não obtendo resultados tão precisos nesta situação.

Siddiqui et al. (2000) investigou o comportamento dinâmico de uma viga sob a ação de uma massa-mola móvel. Neste trabalho foi analisado o efeito da massa-mola móvel na dinâmica da viga e identificou-se as características do movimento da viga em função do tempo. As abordagens realizadas idealizam o problema através da interação entre um subsistema de massa e rigidez continuamente distribuídos (a viga) e um outro subsistema de massa e rigidez fixos (a massa-mola móvel). As equações do movimento foram resolvidas numericamente através do método de Galerkin, onde as suas soluções foram obtidas utilizando equações diferenciais e comparadas com as soluções analíticas obtidas através de uma análise de perturbação. Na análise de perturbação foram utilizadas expansões de Taylor para estudar o comportamento do sistema em torno de um estado de equilíbrio. Foram também utilizadas técnicas de análise de sinais para estudar a frequência do movimento da viga em função do tempo, conhecida como análise de frequência no tempo. Este tipo de investigações contribuem

bastante para a compreensão do comportamento dinâmico de estruturas sob a ação de subsistemas massa-mola móveis, o que se torna muito importante em aplicações como robótica, automação, etc.

Foram desenvolvidos vários estudos científicos na exploração de técnicas com base em elementos finitos de forma a obter soluções que descrevem o comportamento dinâmico de estruturas quando estas estão sujeitas a cargas móveis. Um dos trabalhos que aborda a aplicação de uma técnica com base em elementos finitos, é o trabalho de Wu et al. (2000). Neste trabalho, o autor utiliza o programa I-DEAS[®] (I-DEAS[®] (1998)), mais popular no final do século XX. Para efeitos de validação do método abordado nesse artigo, a técnica é primeiramente aplicada a uma viga simplesmente apoiada sob a ação de uma única carga móvel. Posteriormente, a técnica desenvolvida é aplicada para analisar os efeitos do movimento bidimensional de um carril em resposta de uma estrutura base de um modelo de grua móvel, ou um guindaste de pórtico móvel. Em ambas as aplicações, foram obtidos resultados bastantes satisfatórios. Também é referido que a técnica utilizada terá sido aplicada somente a elementos do tipo viga, e que poderá ser adaptado a outro tipo de elementos, o que requererá alguma investigação nesse sentido, de modo a ser possível obter resultados mais credíveis e precisos. Esta técnica utiliza a combinação da discretização espacial da estrutura com a discretização temporal para resolver as equações diferenciais que descrevem o comportamento dinâmico da própria estrutura em resposta às cargas móveis.

No que diz respeito ao comportamento dinâmico de pontes de grande porte sob a ação de cargas móveis, Lee and Yhim (2005) apresentam um trabalho cujo objetivo principal é o de avaliar a validade da análise numérica utilizada, tendo sido esta implementada utilizando o programa de análise de elementos finitos LUSAS[™] (LUSAS[™] (2000)). Esta formulação numérica de elementos finitos é baseada em polinómios de Hermite e nós Lagrangeanos. Na comparação dos resultados obtidos numericamente com os resultados experimentais obtidos a partir de testes de laboratório com um modelo de escala reduzida, verificou-se uma elevada correlação.

Hügül (2005) estudou a resposta dinâmica de vigas (e pórticos) sob a ação de cargas pontuais móveis. Nesse trabalho o autor recorreu ao Método dos Elementos Finitos e ao método de integração numérica temporal (Método de Newmark) na sua análise de vibração. Nas suas análises o autor recorreu a programas como o MATLAB[®] (MATLAB[®] (2024)) e o ANSYS[®] Workbench[™], de forma a obter a resposta dinâmica da estrutura. Os resultados obtidos para ambas as análises feitas nos programas referidos demonstraram estar em concordância. O autor observou que com o aumento da velocidade da carga pontual, o instante de tempo onde se observa a deformada máxima a meio-vão, desloca-se para a direita no gráfico, ou seja, aumenta o instante de tempo, independentemente das condições de fronteira da viga. Também observou que, para vigas mais longas, de maior comprimento L , a estrutura apresenta uma menor frequência natural para o primeiro modo de vibração.

No estudo desenvolvido por Mardani (2011), onde é analisado o comportamento de uma viga sob a ação de cargas móveis com base no Princípio de Hamilton e na Equação de Euler-

Lagrange, o autor concluiu que quando o comportamento material é considerado não-linear, não há velocidade crítica e o fenômeno de ressonância não existe.

Ouyang (2011) desenvolveu um tutorial em que alguns conceitos fundamentais, sobre o comportamento de vigas sob a ação de cargas móveis, são detalhados. O conceito de velocidade crítica é um dos conceitos estudados neste tutorial, onde também são obtidas analiticamente as equações do movimento de uma viga simplesmente apoiada não-amortecida e de parâmetros como: ressonâncias combinadas, ressonâncias de modo único e frequência natural.

Um dos estudos realizados no âmbito da análise dinâmica de uma viga sujeita à ação de uma carga móvel é o de Santos et al. (2018), em que os resultados obtidos indicam que a carga móvel afeta significativamente a resposta dinâmica da viga, verificando-se um aumento dos deslocamentos e das tensões quando a carga móvel se aproxima de certas regiões críticas da viga. É referido também que o ponto de máxima deformada da viga, não é exatamente sobre o ponto médio da viga, ou seja em $x = \frac{L}{2}$. É também proposto pelos autores que para possíveis trabalhos futuros na sequência do que foi estudado, poder-se-ão reanalisar casos com diferentes secções transversais e condições de fronteira genéricas, usando assim o método dos elementos finitos e comparando os resultados analíticos com os numéricos.

Outro método muito utilizado pela comunidade científica no ramo da Engenharia é o Método das Diferenças Finitas (Roos et al. (2008)). Ramos et al. (2018) investigou a aplicabilidade do Método das Diferenças Finitas numa análise onde foi utilizado um modelo dinâmico de uma viga simplesmente apoiada de Euler-Bernoulli. Posteriormente foram feitas alterações no modelo base, testando outras condições de fronteira. Quando comparados os resultados das análises efetuadas com os resultados utilizando o Método dos Elementos Finitos, estes demonstraram ser consistentes, principalmente para malhas mais refinadas.

Ribeiro (2018) apresenta uma tese sobre o desenvolvimento de um modelo computacional que poderá prever com precisão o comportamento dinâmico de uma ponte, sendo o caso de estudo a estrutura da ponte de Várzeas. O estudo em questão foi realizado considerando vários tipos de veículos em que se variou o peso, a velocidade, a distância entre os eixos e o número de eixos, de forma a perceber esse efeito sobre os resultados obtidos. No caso da ponte, foi analisada a convergência dos resultados para a deformação e aceleração, discretizando a mesma em vários elementos finitos.

Um dos problemas encontrados nas análises numéricas, são as oscilações espúrias, devido às descontinuidades das soluções. Neto et al. (2022) apresenta um método de modo a eliminar por completo, ou em parte, essas oscilações espúrias. A validação do método é baseada na sua aplicação a problemas de difusão de calor e a propagação de ondas em meios homogêneos e heterogêneos, através do Método dos Elementos Finitos.

Santos (2024) apresenta uma nova abordagem para a análise do comportamento dinâmico de vigas de Euler-Bernoulli sob a ação de cargas móveis, introduzindo uma nova formulação de elementos finitos. Esta nova formulação foi derivada de um princípio variacional complementar de Hamilton, em que, num elemento de viga com dois nós, o impulso do mo-

mento fletor e a sua primeira derivada em ordem a x , foram tidos como os graus de liberdade nodais fundamentais. A validação desta formulação, quanto à sua exatidão e eficácia, foi efetuada recorrendo a uma análise numérica nos domínios modal e temporal, recorrendo também, a soluções analíticas. A integração no tempo foi adotada recorrendo a uma versão estável incondicional do Método de Newmark. Na comparação dos resultados foi possível verificar que no domínio modal esta nova formulação produz resultados mais precisos e estes convergem para as soluções exatas, e no domínio do tempo esta nova formulação produz distribuições contínuas e suaves para o momento fletor e para o esforço transversal, sendo estes mais precisos do que numa abordagem tradicional. Também é referido que esta nova abordagem não requer nenhum custo computacional adicional, sendo assim mais eficiente e precisa para a análise dinâmica de vigas sob a ação de cargas móveis.

Capítulo 3

Modelo Analítico de Vigas de Euler-Bernoulli sob a Ação de Cargas Móveis em Regime Transiente

O modelo estrutural adotado tem por base a Teoria de Vigas de Euler-Bernoulli. Para o caso do presente estudo, ou seja, o estudo de uma viga simplesmente apoiada, a solução analítica é conhecida (Yang et al. (2004)).

A análise analítica realizada recorrendo ao MapleTM permite estudar a influência de diferentes parâmetros, tais como a geometria da viga, as propriedades do material e a configuração da carga móvel aplicada, entre outros, no desempenho estrutural da viga simplesmente apoiada. A solução analítica é válida apenas enquanto a carga móvel se encontra em contacto direto com a viga, ou seja, tal como Yang et al. (2004) refere, as equações de estudo só se aplicam quando a posição vt da carga móvel se encontra dentro daquilo que é o comprimento da viga.

Na modelação em regime dinâmico da viga sob a ação de cargas móveis, foram consideradas duas situações distintas: viga não-amortecida e viga amortecida.

3.1 Teoria de Vigas de Euler-Bernoulli vs Timoshenko

No século XVIII o matemático e físico suíço Leonhard Euler formulou matematicamente a teoria de vigas na sua obra publicada em 1765 (Euler (1765)). Euler derivou as equações diferenciais fundamentais que descrevem o comportamento das vigas sujeitas à flexão. No desenvolvimento desta teoria de vigas, Euler teve a ajuda do matemático, físico e filósofo Daniel Bernoulli, que expandiu as suas ideias e contribuiu para a compreensão das propriedades mecânicas das vigas através das suas pesquisas sobre elasticidade e resistência dos materiais. Esta colaboração entre ambos permitiu a formulação da conhecida Teoria de Vigas de Euler-Bernoulli.

No contexto do estudo de vibrações de uma viga, existem várias teorias de vigas que po-

dem ser adotadas, havendo, segundo Migotto (2011), duas que se destacam: Euler-Bernoulli e Timoshenko. No caso da Teoria de Euler-Bernoulli a deformação por corte não é considerada e a sua curvatura após a deformação é assumidamente pequena. No Modelo de Timoshenko a deformação por corte, relacionada com o esforço de corte, é considerada. De acordo com esta teoria, as secções transversais planas, permanecem planas mas não necessariamente perpendiculares ao eixo longitudinal da viga após a deformação, pois a secção sofre distorção devido ao esforço de corte.

As equações que descrevem o comportamento dinâmico de vigas segundo os modelos de Euler-Bernoulli e Timoshenko, respetivamente, são dadas por (Migotto (2011)):

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (3.1)$$

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - \rho I \left(1 + \frac{E}{k_G G} \right) \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{k_G G} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} = 0 \quad (3.2)$$

Onde:

- u : Deslocamento Transversal
- m : Massa por Unidade de Comprimento
- ρ : Densidade Mássica
- A : Área da Secção Transversal
- E : Módulo de Young ou Módulo de Elasticidade
- I : Momento de Inércia
- k_G : Fator de Corte
- G : Módulo de Distorção

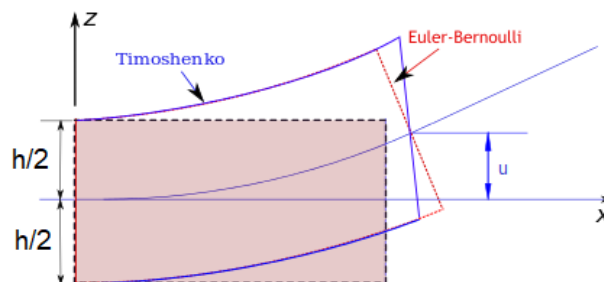


Figura 3.1 Modelo de Vigas de Euler-Bernoulli vs Modelo de Vigas de Timoshenko

Migotto (2011) refere que nos casos em que as dimensões da secção da viga não são pequenas em comparação com o comprimento da viga (conhecidas como vigas curtas), $\frac{L}{h} \leq 10$, o modelo de Timoshenko é o mais indicado para o seu estudo. Para situações onde $\frac{L}{h} > 10$ (vigas finas), a deformação por corte é desprezável (Ahmed and Rifai (2021)). Assim, no presente trabalho, o modelo adotado para o estudo de vigas sob a ação de cargas móveis é o Modelo de Vigas de Euler-Bernoulli, pois as dimensões da secção transversal da viga são pequenas em comparação com o seu comprimento.

3.2 Formulação do Problema

O modelo analítico adotado no presente estudo baseia-se nos pressupostos definidos em Fryba (1999) e Yang et al. (2004), sendo:

1. O comportamento da viga é descrito pela equação diferencial de Euler-Bernoulli deduzida nas suposições em que a teoria de pequenas deformações, a Lei de Hooke, as Hipóteses de Navier e o princípio de Saint-Venant são aplicáveis;
2. A viga é feita de um material homogéneo, tem secção transversal constante ao longo do seu comprimento (L) e a massa por unidade de comprimento (m) também é constante;
3. O sistema móvel considerado é o modelo de carga em movimento, ou seja, o modelo de carga móvel;
4. A carga móvel move-se com velocidade constante (v);
5. O amortecimento da viga é do tipo Rayleigh;
6. A viga está simplesmente apoiada, ou seja, os valores da deformada e do momento fletor serão nulos nas suas extremidades, estando a viga em repouso no instante anterior à chegada da carga móvel.

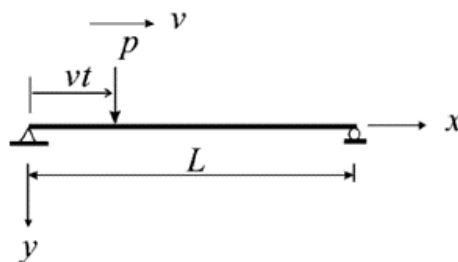


Figura 3.2 Modelo de Viga Simplesmente Apoiada, sujeita a uma Carga Móvel (Yang et al. (2004))

Com base nos pressupostos descritos e na equação descrita pela carga móvel, sendo um movimento retilíneo uniforme, a equação do movimento da viga pode ser escrita da seguinte forma:

$$m\ddot{u} + c_e\dot{u} + c_i I \dot{u}'''' + EIu'''' = P\delta(x - vt) \quad (3.3)$$

Em que:

$$0 \leq vt \leq L \quad (3.4)$$

Onde δ corresponde à função Delta de Dirac (equação 3.5), e (') e ($\dot{}$) representam a derivação em ordem à coordenada x e ao tempo t , respetivamente.

$$\delta(x - vt) = \begin{cases} 1 & x - vt = 0 \\ 0 & x - vt \neq 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

Tal como é mostrado na Figura 3.2, a viga está sujeita a uma carga móvel de magnitude P e velocidade constante v . A deformada da viga é representada pela função $u(x, t)$. A viga terá um determinado módulo de elasticidade E e um determinado momento de inércia I , e no que diz respeito à adição do amortecimento, segundo Yang et al. (2004), haverá dois parâmetros importantes a assumir: o coeficiente de amortecimento interno c_i e o coeficiente de amortecimento externo c_e .

$$c_i = \alpha_i E \quad (3.6)$$

$$c_e = \alpha_e m \quad (3.7)$$

Onde α_i corresponde ao coeficiente de rigidez e α_e corresponde ao coeficiente de massa. Com estes coeficientes, será possível definir o coeficiente de amortecimento ξ_n , dependente do modo de vibração da viga n :

$$\xi_n = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_e}{\omega_n} + \alpha_i \omega_n \right) \quad (3.8)$$

Sendo ω_n a frequência de vibração que é definida da seguinte forma:

$$\omega_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad (3.9)$$

Em relação à velocidade da carga móvel, esta não deverá ser demasiado baixa em relação à velocidade crítica associada para as condições do problema (Ouyang (2011)), o que levaria a que o problema fosse quasi-estático e não dinâmico (que é o que se pretende). Por outro lado, a aproximação da velocidade da carga móvel à velocidade crítica, poderá levar ao fenómeno conhecido como ressonância, o que poderá conduzir a um aumento descontrolado da amplitude de oscilação do sistema e, conseqüentemente, ao colapso da viga.

Assim, o conceito de velocidade crítica é bastante importante neste tipo de problemas, sendo esta calculada da seguinte forma:

$$v_{cr} = \frac{\omega_n L}{\pi} \quad (3.10)$$

Para uma viga simplesmente apoiada, as duas condições de fronteira seguintes representam a deformada nas extremidades da mesma:

$$u(0, t) = 0 \quad (3.11)$$

$$u(L, t) = 0 \quad (3.12)$$

Enquanto que as duas condições de fronteira que se seguem, representam a caracterização do momento fletor nas extremidades da viga:

$$EIu''(0, t) = 0 \quad (3.13)$$

$$EIu''(L, t) = 0 \quad (3.14)$$

Assumindo que a viga está em repouso no instante em que a carga móvel entra em contacto direto com a própria viga, as condições iniciais, ou seja, em $t = 0$, são:

$$u(x, 0) = 0 \quad (3.15)$$

$$\dot{u}(x, 0) = 0 \quad (3.16)$$

Segundo Yang et al. (2004), a deformada da viga poderá ser descrita da seguinte forma:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) q_n(t) \quad (3.17)$$

Onde ϕ_n corresponde à forma modal de vibração da viga correspondente ao modo de vibração n , e $q_n(t)$ a coordenada generalizada associada. Para uma viga simplesmente apoiada, a forma modal de vibração é:

$$\phi_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (3.18)$$

A forma modal de vibração é a capacidade da viga se deformar em resposta à vibração, podendo a viga assumir uma variedade infinita de formas, definidas por uma combinação de amplitude e frequência. Desta forma, a viga, poderá ser estudada como um sistema de infinitos graus de liberdade.

No que diz respeito à coordenada generalizada, poderá ser determinada através da fórmula que se segue (Yang et al. (2004)):

$$q_n(t) = \frac{\frac{2PL^3}{EI n^4 \pi^4}}{(1 - S_n^2)^2 + 4(\xi_n S_n)^2} \times \left\{ (1 - S_n^2) \sin \Omega_n t - 2\xi_n S_n \cos \Omega_n t \right. \\ \left. + e^{-\xi_n \omega_n t} \left[2\xi_n S_n \cos \omega_{dn} t + \frac{S_n}{\sqrt{1 - \xi_n^2}} (2\xi_n^2 + S_n^2 - 1) \sin \omega_{dn} t \right] \right\} \quad (3.19)$$

Onde ω_{dn} , Ω_n e S_n representam, respetivamente, a frequência de vibração amortecida da viga, a frequência de excitação exercida pela carga móvel e o parâmetro de velocidade adimensional, definidos por:

$$\omega_{dn} = \omega_n \sqrt{1 - \xi_n^2} \quad (3.20)$$

$$\Omega_n = \frac{n\pi v}{L} \quad (3.21)$$

$$S_n = \frac{\Omega_n}{\omega_n} \quad (3.22)$$

Com todas as variáveis acima definidas, será possível deduzir o momento fletor $M(x, t)$ e o esforço transversal $V(x, t)$, originados pela carga móvel P na viga:

$$M(x, t) = -EIu''(x, t) \quad (3.23)$$

$$V(x, t) = EIU'''(x, t) \quad (3.24)$$

Desta forma, com as deduções acima mencionadas, será possível prever o comportamento mecânico estrutural da viga quando esta está sujeita a determinadas condições. De seguida, os resultados associados às duas situações (viga não-amortecida e viga amortecida) serão apresentadas, tendo sido calculados através do programa MapleTM, já mencionado anteriormente.

3.3 Soluções Analíticas

Nesta secção apresentam-se os resultados obtidos através do modelo analítico descrito anteriormente para as situações da viga não-amortecida e da viga amortecida. Os dados adotados na análise são os indicados na Tabela 3.1.

Tabela 3.1 Dados do Problema

Dados da Viga
$\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$
$E = 200 \text{ GPa}$
$L = 2 \text{ m}$
Secção Transversal Quadrada
$h = 0.1 \text{ m}$
Carga Móvel
$v = 25 \text{ m/s}$
$P = 100 \text{ N}$

Com base nestes dados obtém-se a massa por unidade de comprimento (m) e o momento de inércia da área da secção transversal da viga (I) em relação ao eixo que passa no seu centro de gravidade:

$$m = \rho \times h \times b = 78.50 \text{ kg/m} \quad (3.25)$$

$$I = \frac{b \times h^3}{12} = 8.33 \times 10^{-6} \text{ m}^{-4} \quad (3.26)$$

3.3.1 Análise de Convergência

Com a análise de convergência pretende-se verificar se a solução obtida converge para a solução do problema. Desta forma, o objetivo será avaliar o modelo analítico desenvolvido no Maple™, validando a resposta obtida através da convergência dos valores. Nesta análise é feita a verificação dos resultados obtidos à medida que se consideram mais modos de vibração (n), sendo de esperar uma variação lenta/estabilização das soluções obtidas em relação à solução exata do problema.

Nesta análise o estudo incidiu sobre os valores máximos da deformada, do momento fletor e do esforço transversal nos seguintes casos:

1. A meio-vão da viga da viga;
2. Para o instante de tempo $t = 0.04s$.

Assumiu-se para ambos os casos uma resposta da viga não-amortecida.

Dos testes de convergência efetuados, verificou-se, de uma forma geral, que, a partir de $n = 100$, os máximos tendem a manter-se aproximadamente constantes.

Os três gráficos que se seguem (Figura 3.3, Figura 3.4 e Figura 3.5) dizem respeito ao caso do comportamento da viga a meio-vão:

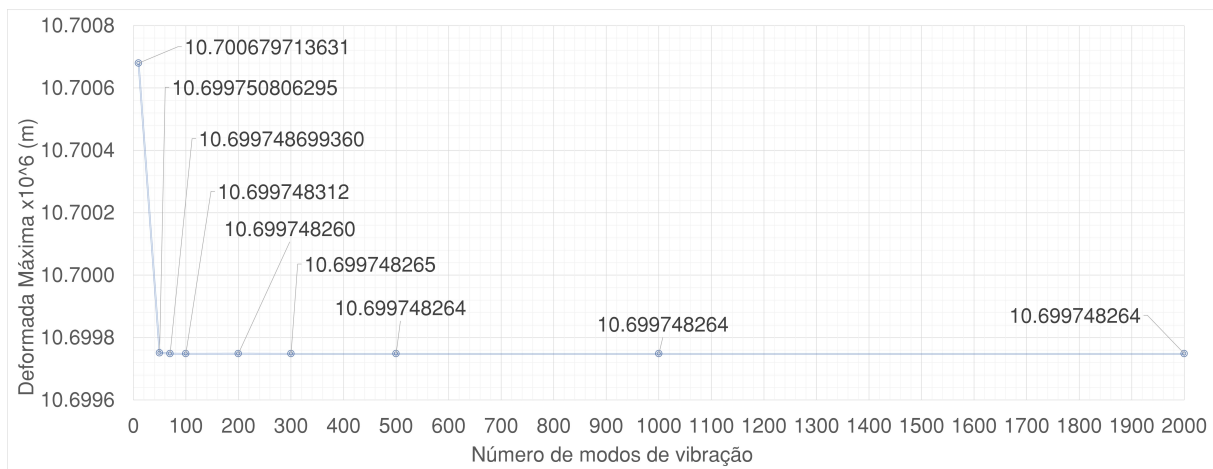


Figura 3.3 Deformada máxima a meio-vão em função do nº de modos de vibração adotados

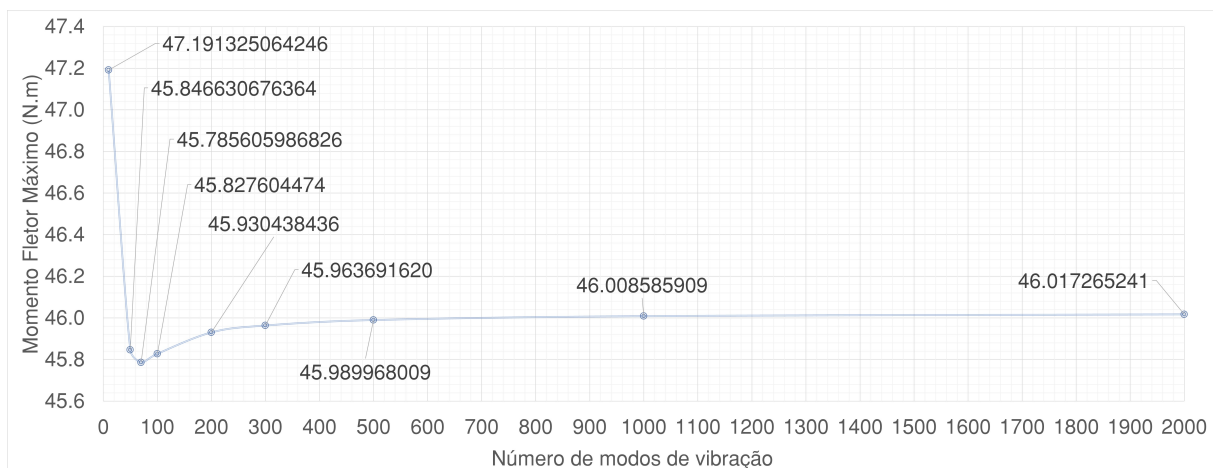


Figura 3.4 Momento fletor máximo a meio-vão em função do nº de modos de vibração adotados

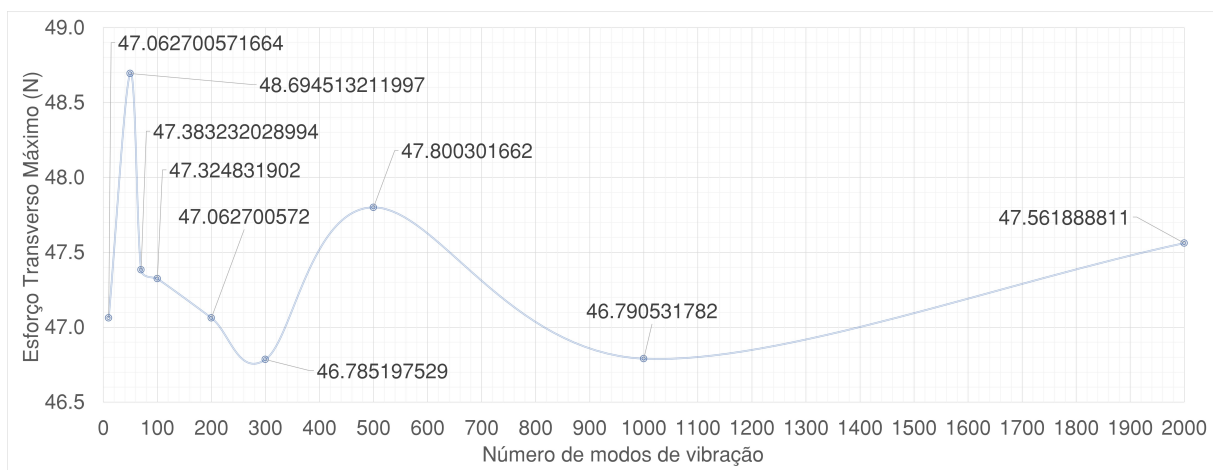


Figura 3.5 Esforço transverso máximo a meio-vão em função do nº de modos de vibração adotados

Nos dois primeiros gráficos apresentados em cima (Figuras 3.3 e 3.4), verifica-se que a variação dos máximos é pouco visível a partir dos 100 termos, sendo evidente que os gráficos convergem para um determinado valor. Em relação ao terceiro gráfico apresentado (Figura 3.5), a variação dos valores máximos em função dos modos de vibração é demasiado visível, não sendo clara a convergência a partir de um determinado valor de n .

Nos três gráficos seguintes (Figura 3.6, Figura 3.7 e Figura 3.8), são representados os valores máximos para o caso de $t = 0.04s$:

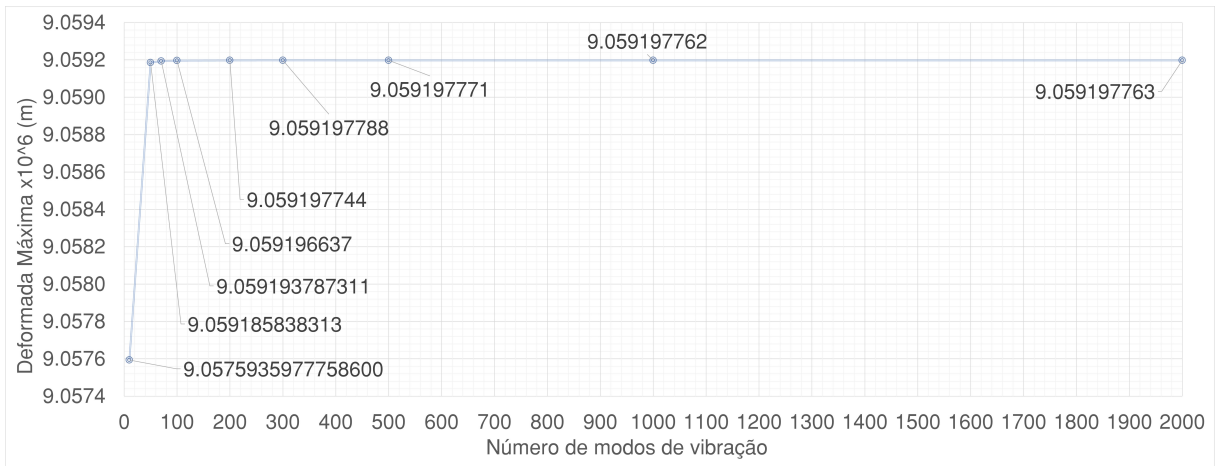


Figura 3.6 Deformada máxima para $t = 0.04s$ em função do nº de modos de vibração adotados

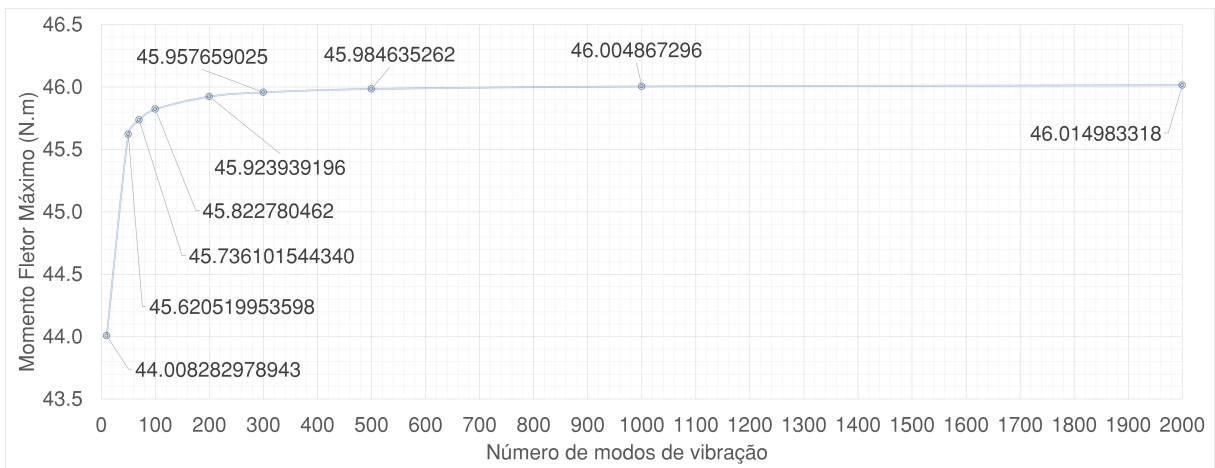


Figura 3.7 Momento fletor máximo para $t = 0.04s$ em função do nº de modos de vibração adotados

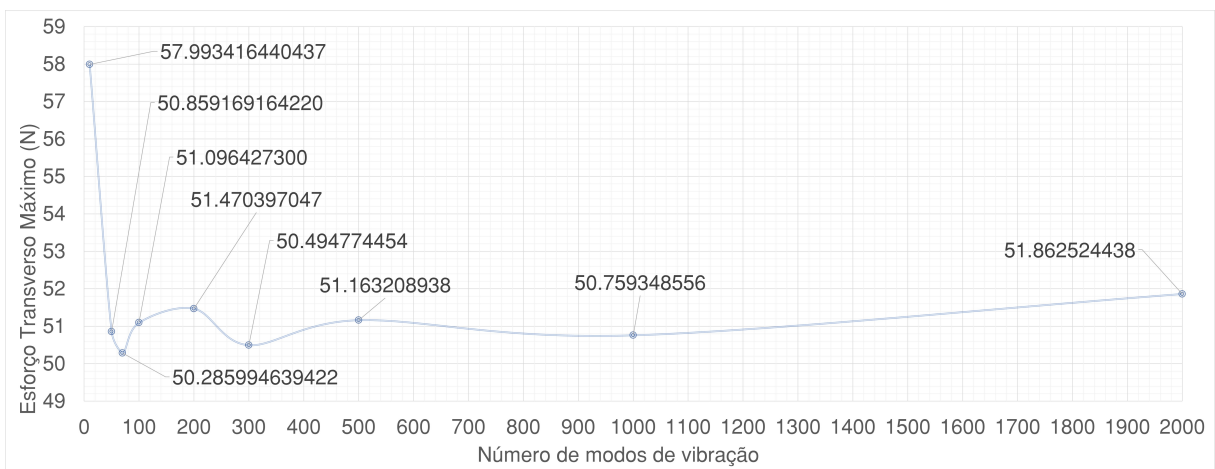


Figura 3.8 Esforço transverso máximo para $t = 0.04s$ em função do nº de modos de vibração adotados

Tal como aconteceu nos gráficos do comportamento da viga a meio-vão, nos três gráficos que se seguiram, os mesmos demonstram que a tendência dos valores máximos mantém-se praticamente constantes a partir de $n = 100$, tirando o caso do esforço transversal em que a variação é mais evidente. Esta situação demonstra que a convergência do esforço transversal é mais lenta, resultado da ordem de derivação da deformada (3ª ordem), isto à medida que se aumenta o número de modos de vibração. Em relação à convergência da deformada e do momento fletor, ambos apresentaram resultados bastante consistentes a partir de um determinado número de modos de vibração.

3.3.2 Resposta Não-Amortecida

Nos gráficos que se seguem, será representado o comportamento da viga para duas situações, uma no domínio do tempo, a meio-vão, e outra no domínio da coordenada x , para $t = 0.04s$. De acordo com a análise de convergência efetuada anteriormente, optou-se por utilizar $n = 100$ para o número de modos de vibração, e assim prosseguir com a análise da resposta da viga não-amortecida.

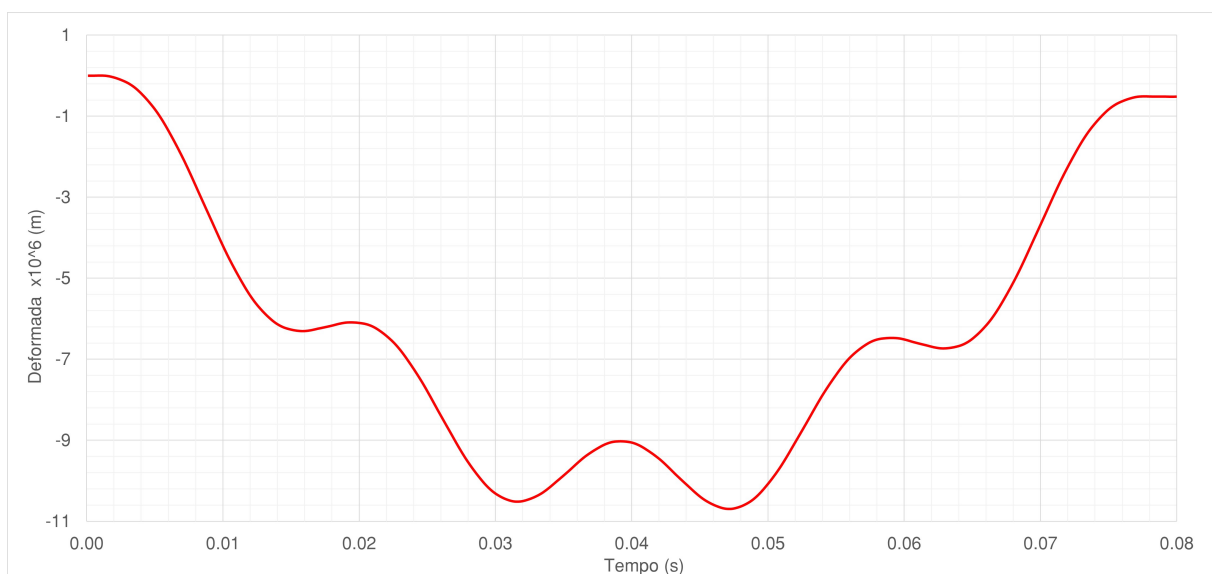


Figura 3.9 Deformada a meio-vão (resposta não-amortecida)

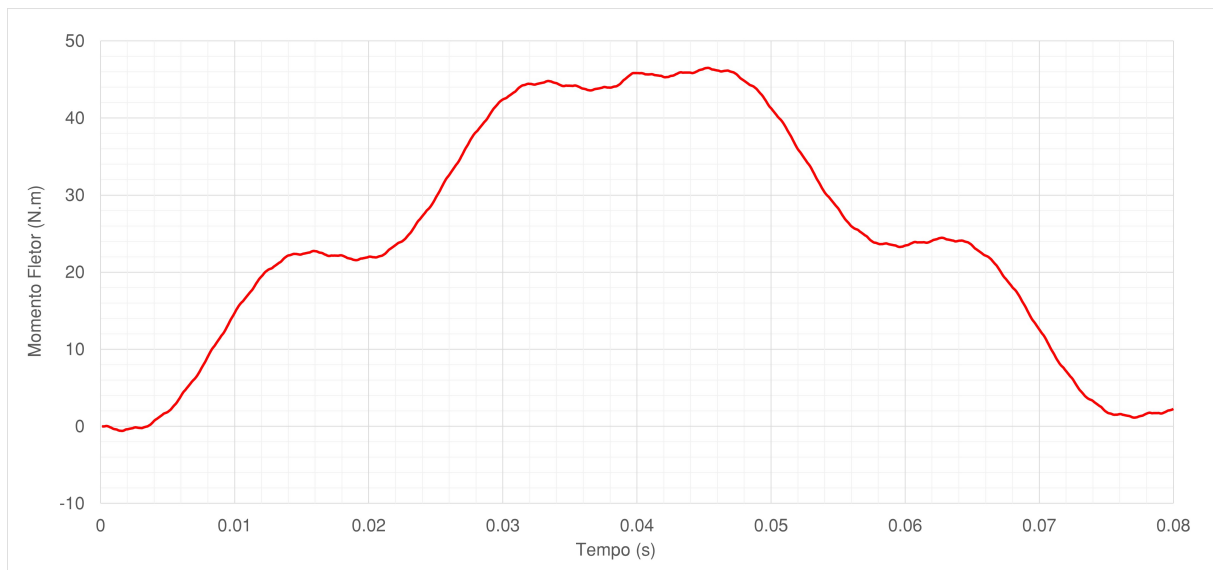


Figura 3.10 Momento fletor a meio-vão (resposta não-amortecida)



Figura 3.11 Esforço transverso a meio-vão (resposta não-amortecida)

Como se pode verificar através da análise dos gráficos anteriores (Figura 3.9, Figura 3.10 e Figura 3.11), o ponto médio da viga (a meio-vão) é mais solicitado praticamente aos $0.04s$ depois da carga móvel começar a atuar sobre a viga, instante este em que a carga móvel passa nesse mesmo ponto. A deformada máxima e o momento fletor máximo a meio-vão encontram-se muito próximos do instante $t = 0.04s$ e não exatamente nesse instante, isto devido à oscilação da própria viga à medida que a carga se desloca sob a mesma.

Nos gráficos que se seguem (Figura 3.12, Figura 3.13 e Figura 3.14), será demonstrado o comportamento da viga no domínio da coordenada x , para $t = 0.04s$:

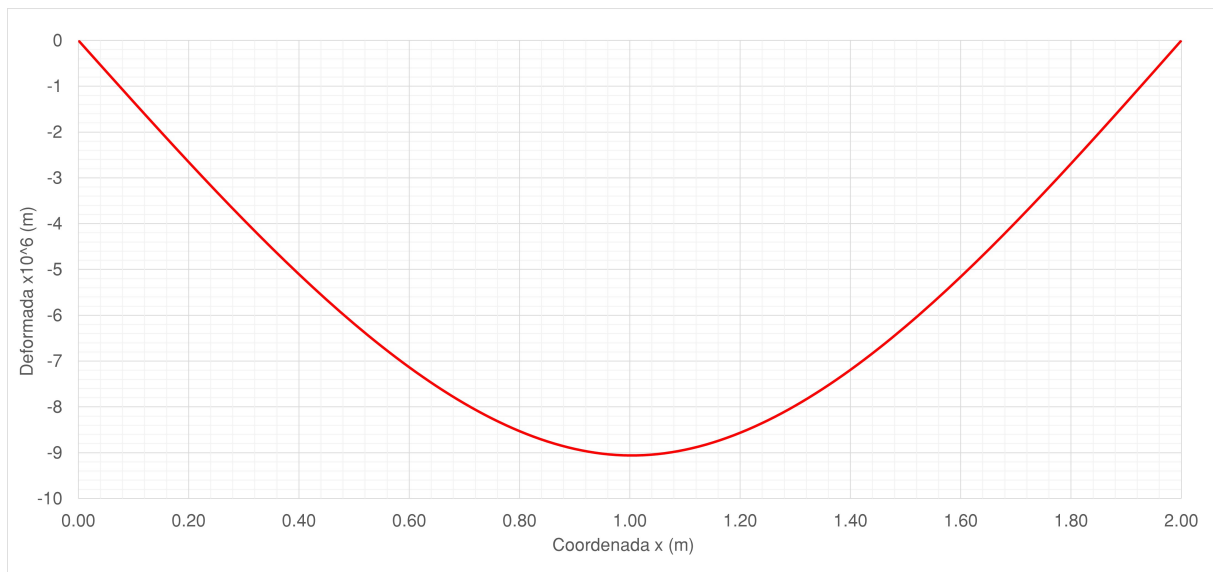


Figura 3.12 Deformada para $t = 0.04s$ (resposta não-amortecida)

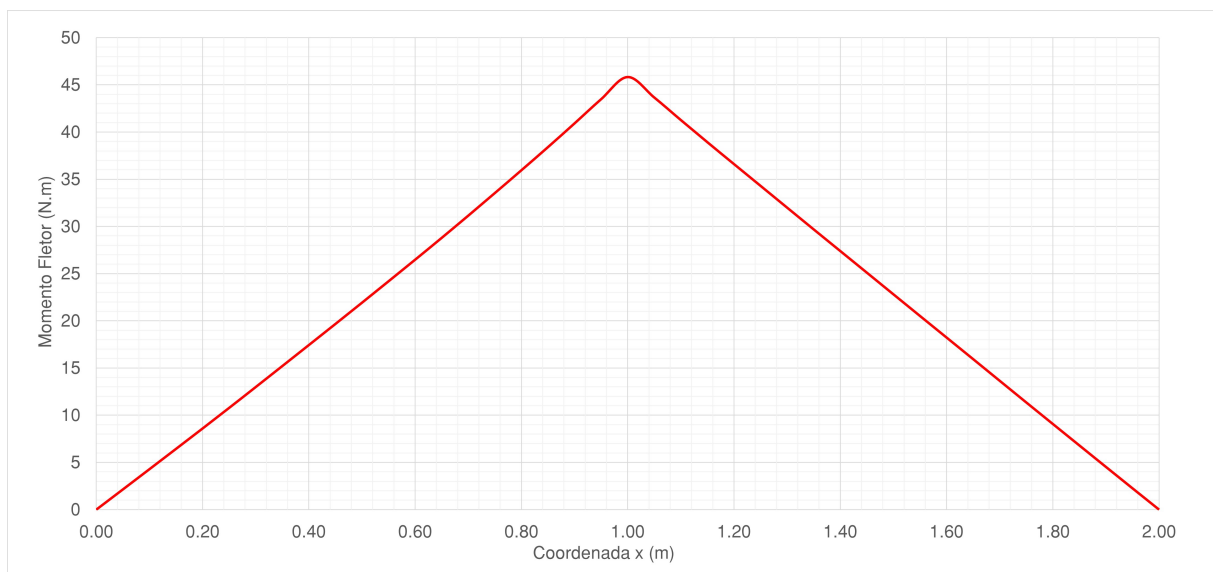


Figura 3.13 Momento fletor para $t = 0.04s$ (resposta não-amortecida)

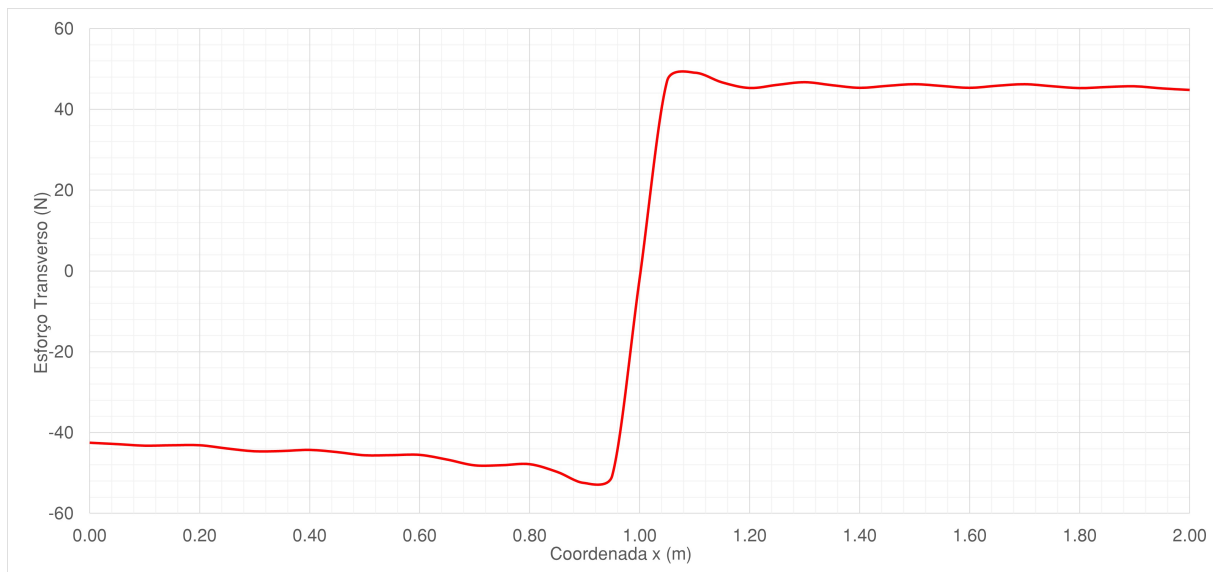


Figura 3.14 Esforço transverso para $t = 0.04s$ (resposta não-amortecida)

Verifica-se que a viga apresenta uma deformada máxima muito próxima do seu ponto médio, ou seja, em $x = 1m$, como seria de esperar. No que diz respeito ao momento fletor, este anula-se nas extremidades da viga, sendo máximo para $x = 1m$.

3.3.3 Resposta Amortecida

Nesta secção introduziu-se o amortecimento na resposta da viga de acordo com a tabela seguinte:

Tabela 3.2 Coeficientes de Amortecimento

α_e	400 m/s
α_i	0

Tal como anteriormente, e de acordo com a análise de convergência efetuada anteriormente, optou-se por utilizar $n = 100$ para o número de modos de vibração, e assim prosseguir com a análise da resposta da viga amortecida para as seguintes situações: uma no domínio do tempo t , a meio-vão, e outra no domínio da coordenada x , para $t = 0.04s$.

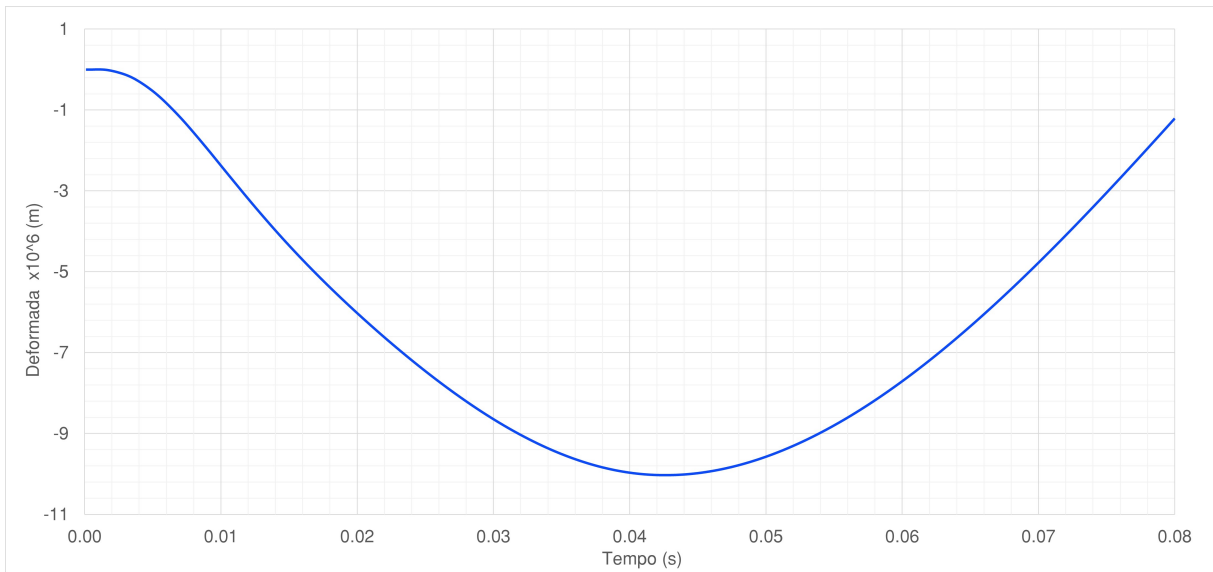


Figura 3.15 Deformada a meio-vão (resposta amortecida)

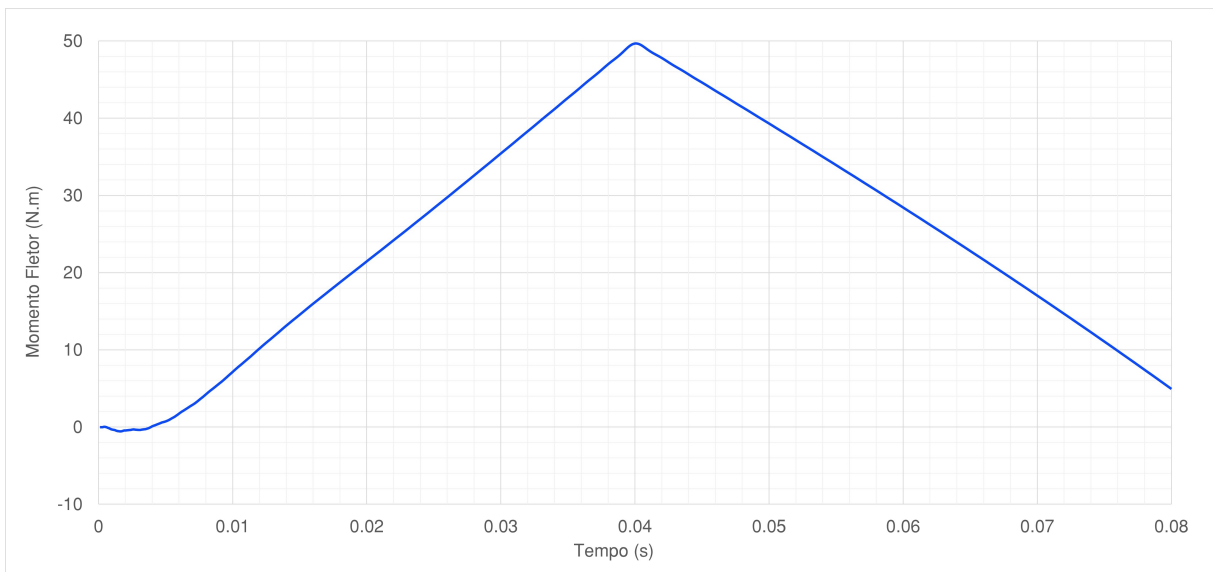


Figura 3.16 Momento fletor a meio-vão (resposta amortecida)

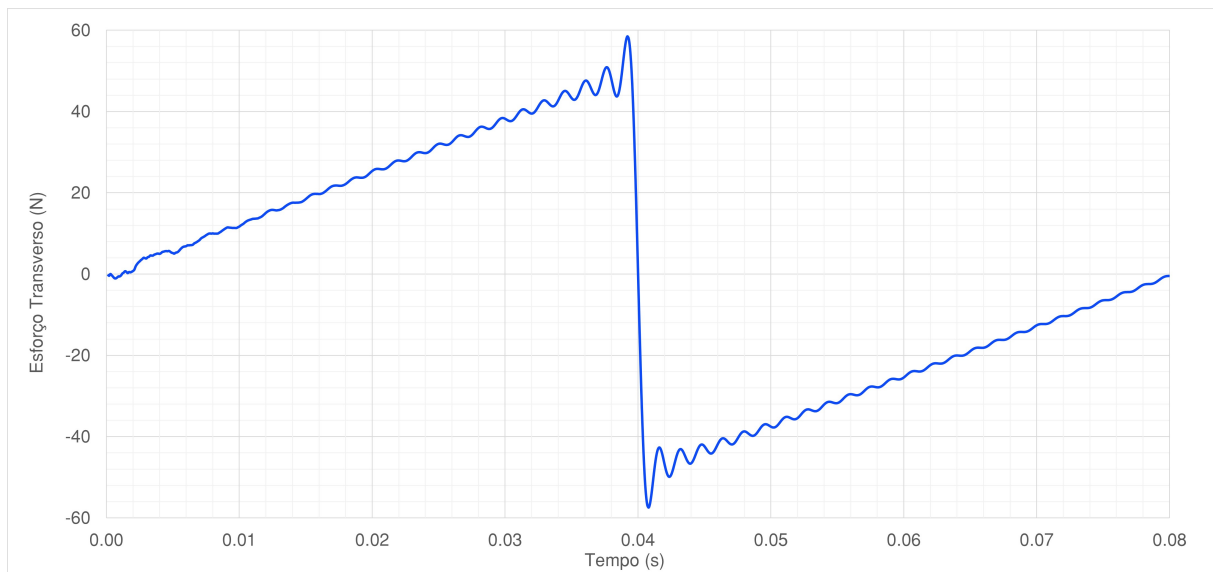


Figura 3.17 Esforço transverso a meio-vão (resposta amortecida)

Como é possível observar através da análise das Figuras 3.15, 3.16 e 3.17, as soluções obtidas para o caso da viga amortecida exibem um menor nível de oscilação comparativamente com as obtidas para a viga não-amortecida.

Nos gráficos abaixo (Figura 3.18, Figura 3.19 e Figura 3.20) estão representados o comportamento da viga no domínio da coordenada x , para $t = 0.04s$, sendo os mesmos muito semelhantes ao comportamento da viga não-amortecida, mudando significativamente os valores da deformada.

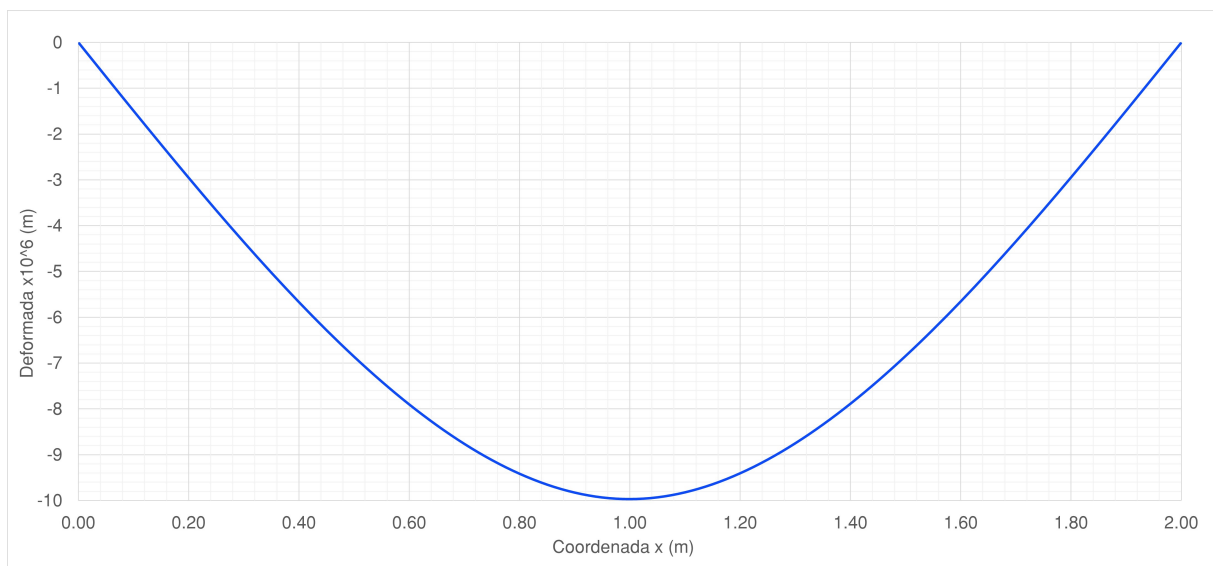


Figura 3.18 Deformada para $t = 0.04s$ (resposta amortecida)

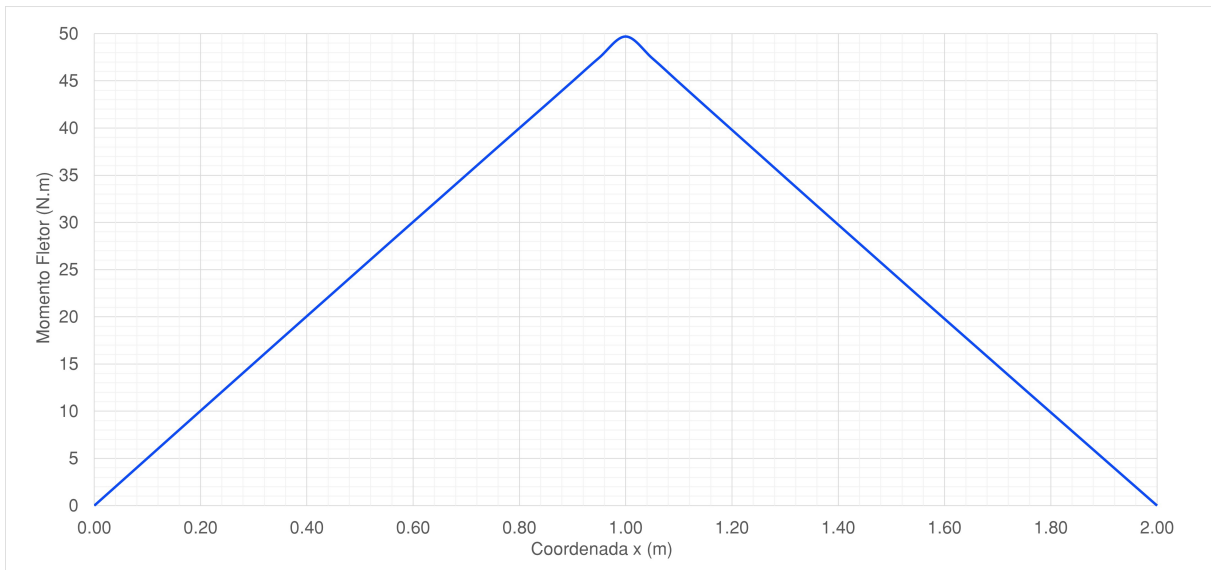


Figura 3.19 Momento fletor para $t = 0.04s$ (resposta amortecida)

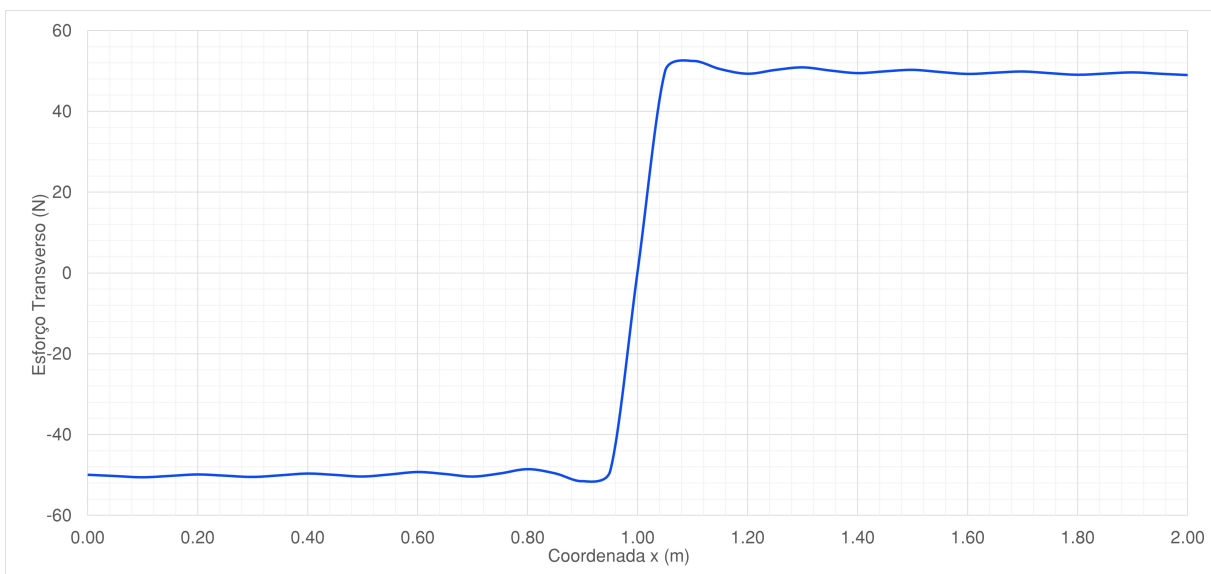


Figura 3.20 Esforço transverso para $t = 0.04s$ (resposta amortecida)

Capítulo 4

Modelo Numérico de Vigas de Euler-Bernoulli sob a Ação de Cargas Móveis em Regime Transiente

Qualquer fenômeno ou processo físico poderá ser descrito por um modelo matemático baseado em leis fundamentais, tais como os princípios da conservação do momento linear, os princípios da conservação de massa e os princípios da conservação de energia. Estes modelos matemáticos têm por base equações diferenciais e/ou integrais complexos. De uma forma geral, não é possível obter soluções exatas para essas equações devido à complexidade da geometria e/ou do material em causa. Assim, em muitos casos, recorre-se à utilização de métodos numéricos e de recursos computacionais. No contexto da Mecânica Estrutural, o Método dos Elementos Finitos surge como o método mais utilizado, dada a sua versatilidade. Existem diversos programas de base comercial baseados no MEF, tais como: ANSYS® Workbench™, SOLIDWORKS® (SOLIDWORKS® (2024)), SAP2000® (SAP2000® (2024)), ABAQUS™ (ABAQUS™ (2024)), etc.

4.1 Conceitos Base do Método dos Elementos Finitos

O Método dos Elementos Finitos (Becker et al. (1981), Azevedo (2003)) é uma ferramenta bastante importante em análises estruturais, sendo um dos métodos mais utilizados na Mecânica Estrutural. Esta é uma técnica que tem como objetivo encontrar soluções aproximadas de equações diferenciais complexas que modelam determinados problemas em Engenharia, tais como a obtenção de deslocamentos, deformações e tensões de sólidos com geometria arbitrária sujeito a diferentes solicitações externas.

Os pioneiros no desenvolvimento do Método dos Elementos Finitos foram os engenheiros Ray W. Clough, da Universidade da Califórnia, e John H. Argyris, do *Imperial College*, em Londres, em meados dos anos 50.

A introdução do computador na década de 50, também impulsionou significativamente

o desenvolvimento do MEF, tornando-o uma ferramenta essencial para análises estruturais. A evolução constante do MEF tem acompanhado os avanços tecnológicos, tornando-o uma ferramenta acessível e intuitiva para profissionais desta e de outras áreas. Para isto, são conhecidos métodos e técnicas variacionais através dos quais é possível encontrar aproximações para problemas de valores próprios e resolver equações diferenciais e integrais, que surgem em vários campos de Engenharia e ciência aplicada. Dois dos métodos mais conhecidos no contexto da modelação computacional de estruturas, são: o Método de Rayleigh-Ritz e o Método de Galerkin. Estes métodos são baseados na ideia de que a solução u , por exemplo, de uma equação diferencial, pode ser representada como uma combinação linear de graus-de-liberdade desconhecidos (d) e de funções de forma (N), selecionadas apropriadamente no domínio do problema e de modo a satisfazer as condições de fronteira do mesmo.

O Método de Rayleigh-Ritz (Chopra (2007), Megson (2016)) é uma técnica variacional utilizada na Mecânica Estrutural e análise de vibrações, para encontrar aproximações em problemas de valores próprios associados a equações diferenciais. Através do Método de Rayleigh-Ritz é possível aproximar a solução de um problema por meio de uma combinação linear de funções linearmente independentes denominadas de funções de forma. Estas funções são ponderadas por coeficientes ajustáveis, ou coeficientes de Ritz. Sendo escolhidas de forma a serem matematicamente convenientes e capazes de representar adequadamente o comportamento do sistema. A aproximação resultante é otimizada para minimizar o erro na energia total do sistema. Este método segue os seguintes passos:

1. Definir o problema em termos de equações diferenciais que descrevam o comportamento da estrutura;
2. Escolher o conjunto de funções de forma que descrevam o comportamento do sistema e de modo a satisfazer as condições de fronteira;
3. Obter a solução aproximada como uma combinação linear das funções de forma multiplicadas pelos coeficientes de Ritz, desconhecidos;
4. Aplicar o Princípio de Rayleigh, ou princípio da energia mínima total, que resulta em derivar a função de aproximação (solução aproximada) em ordem aos coeficientes de Ritz e igualar a zero;
5. Resolver o sistema de equações resultante e obter os valores dos coeficientes de Ritz.

O Método de Galerkin (Becker et al. (1981)) é uma técnica de ponderação residual utilizada para transformar equações diferenciais parciais em sistemas de equações algébricas. Este método distingue-se do Método de Rayleigh-Ritz por não haver um princípio variacional e, também, não requer o uso da energia total para obter o sistema de equações. O Método de Galerkin utiliza diretamente a equação diferencial que descreve matematicamente o problema a ser analisado. Com este método, substitui-se no sistema de equações diferenciais uma ou mais funções aproximadoras que descrevam as condições de fronteira do problema.

Para qualquer tipo de análise de uma estrutura será sempre necessário classificá-la quanto à sua geometria, modelo do material em questão e esforços aplicados. Segundo Azevedo (2003) o modo como o MEF é formulado e aplicado dependerá das simplificações

inerentes a cada tipo de problema, e assim será necessário ter em consideração alguns aspectos, tais como: o tipo de análise, sendo dinâmica ou estática, dependendo da consideração ou não das forças de inércia; análise linear ou não linear, dependendo da influência ou não da modificação da geometria da estrutura na distribuição dos esforços e das tensões (Análise Linear ou Não Linear Geométrica), e da relação entre as tensões e deformações ser linear ou não linear (Análise Linear ou Não Linear Material); o tipo de estrutura, podendo classificá-las como Reticuladas (Barras), Laminares (Parede, Laje ou Casca Plana) ou Sólidas.

O MEF é conhecido por ter como base três etapas bastante importantes (Mota (2019)):

1. O domínio da estrutura é dividido ou discretizado em sub-domínios, denominados elementos finitos, estando estes elementos interligados por pontos localizados nas suas fronteiras denominados nós. Os deslocamentos associados a estes nós constituem as variáveis primárias que são as incógnitas do problema;
2. É necessário descrever as variáveis primárias através de uma combinação linear dos valores nodais dessas variáveis e das funções aproximadoras;
3. Com a conexão dos elementos, é possível obter as soluções do problema, ou seja, o vetor de deslocamentos globais $\{u\}$, o vetor de velocidades globais $\{v\}$ e o vetor de acelerações globais $\{a\}$, para o domínio discretizado. Sendo o caso de uma análise dinâmica linear, o problema é resolvido através de um sistema de equações, em que $\{f\}^{global}$ contém o sistema de forças generalizadas aplicadas ao corpo deformável e $[K]^{global}$, $[M]^{global}$ e $[C]^{global}$ representam, respetivamente, a matriz de rigidez elástica, a matriz de massa e a matriz de amortecimento do mesmo corpo (Lapa (1987)):

$$\{f\}^{global} = [K]^{global} \cdot \{u\} + [C]^{global} \cdot \{v\} + [M]^{global} \cdot \{a\} \quad (4.1)$$

Na formulação destes problemas terá de ser necessário descrever as funções de forma dos elementos, sendo estas os deslocamentos genéricos de qualquer ponto desse mesmo elemento, e que são dependentes dos deslocamentos nodais. Desta forma, por consequência, as velocidades e acelerações de qualquer ponto do elemento, são também estas dependentes dos valores nodais, associados à velocidade e aceleração.

Em todas as análises numéricas de elementos finitos, será necessário passar por três fases (Meireles (2007)): pré-processamento, solução e pós-processamento.

O pré-processamento diz respeito a estabelecer determinadas definições antes da simulação propriamente dita. Segundo Azevedo (2015), numa análise estrutural, o pré-processamento inclui a definição da geometria da estrutura, os materiais associados, a malha a utilizar e as condições de fronteira. Ou seja:

1. A definição da geometria da estrutura, discretizando-se a mesma em elementos finitos, ou seja, subdividindo a estrutura em nós e elementos, formando assim a rede elementos finitos;
2. A escolha do tipo de elementos da estrutura, ou seja, associa-se as respetivas funções de forma que representam o domínio físico de cada elemento;

3. As equações de equilíbrio de cada elemento e , com base nestas, desenvolve-se as equações de equilíbrio do problema completo. Sendo este passo correspondente ao desenvolvimento das matrizes de rigidez e de massa, e dos vetores de carga;
4. As condições de fronteira, as condições iniciais e os esforços aplicados (condições de carregamento).

Estes passos podem ser executados de forma automática com a ajuda de programas comerciais de elementos finitos, através de interfaces gráficas, sendo que no presente trabalho, tal como já foi referido anteriormente, no desenvolvimento dos diferentes modelos, utilizou-se o programa ANSYS® Workbench™ (ver anexo A).

Numa análise numérica é possível analisar estruturas/objetos com elementos unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais.

No presente trabalho, haverá somente um tipo de elemento em análise para todos os modelos desenvolvidos, nomeadamente, o elemento do tipo viga de Euler-Bernoulli (elemento do tipo unidimensional), com três nós por elemento.

Adotaram-se malhas de 2^n elementos finitos (com $n = 1, 2, \dots, 7$), isto é, malhas com 2, 4, 8, 16, 32, 64 e 128 elementos finitos.

Uma das particularidades detetadas neste estudo desenvolvido no programa de simulação numérica ANSYS® Workbench™, foi o de uma malha específica com 100 elementos finitos, onde os resultados obtidos apresentaram bastantes oscilações comparativamente com os obtidos com as outras malhas. Este problema foi detetado somente na malha referida sendo que segundo Neto et al. (2022), este é um problema numérico que se deve à descontinuidade da solução em torno de um ponto. Neste artigo o autor apresenta métodos que reduzem estas oscilações, também conhecidas por "Oscilações Espúrias", fazendo assim reduzir, ou mesmo anular, este tipo de problemas numéricos. Assim sendo, esta situação, ou seja, a malha de 100 elementos finitos, será também apresentada nos gráficos das soluções numéricas, para assim se poder comparar e analisar com as soluções obtidas nas outras malhas e com as soluções analíticas.

Nos modelos numéricos implementados, quando analisado o comportamento da viga a meio-vão, ou seja, em função do tempo (t) em segundos, estabeleceu-se o seguinte domínio:

$$0 \leq t \leq 0.25s \quad (4.2)$$

Desta forma, poderá prever-se o comportamento da viga com a ajuda do programa de simulação numérica, mesmo depois da carga móvel deixar de atuar a viga, ou seja, depois de $t = \frac{L}{v} = 0.08s$. Esta previsão através do programa de simulação numérica, é feita com base no MEF e de integrações no domínio do tempo, sendo estes temas abordados mais detalhadamente nos subcapítulos seguintes.

As soluções numéricas obtidas serão apresentadas no capítulo seguinte (capítulo 5), e comparadas posteriormente com as soluções analíticas apresentadas no capítulo anterior (capítulo 3).

4.1.1 Formulação Integral

O Método de Galerkin acima descrito baseia-se numa formulação integral onde transforma equações diferenciais parciais em sistemas de equações algébricas que são resolvidos numericamente (Becker et al. (1981)).

O seguintes passos, representam a formulação integral aplicada ao Método dos Elementos Finitos e através da abordagem do Método de Galerkin.

Primeiramente, considera-se a seguinte equação diferencial parcial a título de exemplo:

$$L(u) = f \quad (4.3)$$

Onde $L(u)$ representa um operador diferencial e f uma função conhecida, isto para um domínio de interesse Ω .

De seguida, é escolhida uma função de teste v e multiplica-se ambos os lados da equação diferencial parcial por essa função de teste:

$$vL(u) = vf \quad (4.4)$$

Este último passo transforma a equação diferencial parcial em um integral. Integrando assim ambos os lados da equação multiplicada por v , no domínio de Ω :

$$\int_{\Omega} vL(u)d\Omega = \int_{\Omega} vfd\Omega \quad (4.5)$$

De seguida, utilizando o Método de Galerkin, escolhe-se a função de teste v da mesma família de funções usadas para aproximar a solução u , e aproxima-se u como uma combinação linear de funções base, ou seja, considerando que a solução é aproximada em todo o domínio como uma combinação linear de funções de aproximação ϕ_j e de coeficientes u_j desconhecidos. Assim sendo, tem-se:

$$u \approx u_h = \sum_{j=1}^N u_j \phi_j \quad (4.6)$$

As funções de aproximação ϕ_j devem satisfazer as condições de fronteira do problema. N representa o número total de funções base utilizadas na aproximação.

Logo de seguida, substitui-se u_h no integral e escolhe-se v como cada ϕ_i , função de aproximação, ou função base, onde $i = 1, \dots, N$:

$$\int_{\Omega} \phi_i L(u_h) d\Omega = \int_{\Omega} \phi_i f d\Omega \quad (4.7)$$

De seguida, discretiza-se a equação no domínio de Ω , em pequenos subdomínios designados por elementos finitos. O integral nos elementos finitos leva a um sistema de equações lineares (equação 4.1).

Por fim, ao resolver o sistema de equações lineares, obtêm-se os coeficientes u_j , sendo possível, por sua vez, obter a solução aproximada u_h .

4.1.2 Integração no Domínio do Tempo

Segundo Miranda (2009), as formulações analíticas no domínio do tempo envolvem o cálculo de um grande número de termos independentes que, quando somados, resultam na resposta total do sistema. A sobreposição de várias parcelas para obter o resultado final não é particularmente útil para uso prático. Os métodos de integração por passos surgem como uma alternativa para calcular a resposta a uma ação dinâmica (Miranda (2009)). Com base neste método, a integração no domínio do tempo é feita recorrendo à expressão (Sánchez (2001)):

$$\Delta x(t) = v \times \Delta t \quad (4.8)$$

Os métodos de integração por passos, procuram resolver as equações em pequenos instantes discretos no tempo, sem utilizar sobreposições e considerando a definição do sistema em cada passo, tornando-os mais adequados para os cálculos de respostas não lineares. Cada método apresenta as suas próprias características em termos de estabilidade, consistência, precisão e eficiência. Os métodos de integração por passos exigem um considerável esforço computacional, sendo que quanto menor for o intervalo de tempo definido, maior será o esforço necessário para que todos os cálculos sejam efetuados. Por outro lado, um incremento maior resulta em menor precisão nos resultados pretendidos. Portanto, é essencial determinar um intervalo que equilibre, de forma satisfatória, o esforço computacional e a precisão dos resultados. A convergência do método pode ficar comprometida se o intervalo de tempo utilizado for muito amplo. Além disso, é fundamental considerar as condições de convergência do método quando se define o intervalo de tempo. Estes métodos podem ser classificados como estáveis ou instáveis, podendo essa classificação ser condicional ou incondicional (Miranda (2009)). Os métodos instáveis, levam a uma solução crescente ao longo do tempo, enquanto que os métodos estáveis convergem. A condição de convergência condicional ou incondicional pode depender, por exemplo, de um intervalo específico de tempo.

Um dos métodos mais conhecidos baseados na integração no domínio do tempo, é o método de Newmark. Este método é também um dos métodos mais utilizados na análise de estruturas sujeitas a carregamentos dinâmicos, e foi desenvolvido pelo próprio Nathan M. Newmark (Newmark (1959)), sendo um dos métodos mais aplicados em Engenharia Civil, Mecânica, Aeroespacial, etc., numa abordagem numérica de equações diferenciais associadas ao comportamento dinâmico de uma estrutura.

Segundo Sánchez (2001), o programa de simulação numérica ANSYS® Workbench™, utilizado neste trabalho, recorre ao método de Newmark. O método baseia-se essencialmente na divisão do tempo total da análise em pequenos intervalos de tempo Δt ('time step'), permitindo analisar a estrutura em sequência, em que cada passo considera as condições finais do passo anterior. Como base, neste método, segundo Yang et al. (2004), têm-se as seguintes equações:

$$\{U\}_{t+\Delta t} = \{U\}_t + \{\dot{U}\}_t \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \{\ddot{U}\}_t + \beta \{\ddot{U}\}_{t+\Delta t} \right] (\Delta t)^2 \quad (4.9)$$

$$\{\dot{U}\}_{t+\Delta t} = \{\dot{U}\}_t + \left[(1-\gamma)\{\ddot{U}\}_t + \gamma\{\ddot{U}\}_{t+\Delta t} \right] \Delta t \quad (4.10)$$

A equação (4.9) determina o deslocamento nodal no tempo $t + \Delta t$, e a equação (4.10) determina a velocidade nodal no tempo $t + \Delta t$, sendo ($\dot{}$) a primeira derivada em ordem ao tempo t e ($\ddot{}$) a segunda derivada em ordem ao tempo t . β e γ correspondem aos parâmetros de controlo do algoritmo, em que β indica a variação da aceleração durante o incremento do intervalo de tempo Δt , de t para $t + \Delta t$, e γ está relacionado com a propriedade do amortecimento numérico ou artificial introduzido pela discretização no domínio do tempo, segundo Yang et al. (2004). Para a situação em que $\beta = 0$ o esquema caracteriza-se como sendo equivalente ao método das diferenças finitas, onde não é considerado o amortecimento na análise (Yang et al. (2004) e Newmark (1959)). Nos casos em que $\beta = \frac{1}{4}$ e $\beta = \frac{1}{6}$, considera-se um método de aceleração média constante e um método de aceleração linear, respetivamente (Yang et al. (2004)). Por outro lado, para o caso de $\gamma < \frac{1}{2}$, existe amortecimento negativo artificial, enquanto que para valores de $\gamma > \frac{1}{2}$ ocorrerá amortecimento positivo artificial (Yang et al. (2004)).

O método de Newmark demonstra ser incondicionalmente estável sob as condições seguintes, segundo Yang et al. (2004) e Sánchez (2001):

$$\beta \geq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} + \gamma \right)^2 \quad (4.11)$$

$$\gamma \geq \frac{1}{2} \quad (4.12)$$

Estes aspetos foram demonstrados nos trabalhos de Chopra (2007), onde os parâmetros em causa foram alterados e os resultados dessas alterações exemplificados graficamente.

A estrutura deste método é sempre analisada em sequência, dividindo o tempo da análise em N passos de tempo, sendo que cada passo tem uma duração, resultado dessa divisão, de Δt , como referido anteriormente. O método é repetidamente processado para todos os N passos calculando as condições da estrutura em cada momento. Assim, é possível calcular deslocamentos, velocidades e acelerações em todos os instantes do problema. Naturalmente para um Δt muito reduzido, os resultados serão mais precisos mas, em contrapartida, o tempo de análise irá aumentar, exigindo um esforço computacional muito elevado. Contrariamente, para situações onde Δt é muito alto, os resultados da análise não serão tão precisos, mas em compensação, o tempo de análise será reduzido, não exigindo tanto esforço computacional. Dito isto, é fundamental encontrar um equilíbrio entre estes dois parâmetros, de modo a maior precisão possível para os resultados obtidos, associada ao menor esforço computacional necessário para tal.

Em todas as análises numéricas desenvolvidas no presente trabalho, utilizou-se sempre um intervalo de tempo (Δt) de $0.0001s$ no programa de simulação numérica. Desta forma, foi possível garantir o equilíbrio entre a precisão dos resultados obtidos (o que será possível verificar na apresentação dos resultados quando comparados com os resultados obtidos

analiticamente, no capítulo seguinte) e o esforço computacional exigido ao equipamento. No programa de simulação numérica, este fator é também conhecido por '*time step*'.

Capítulo 5

Soluções Analíticas vs Soluções Numéricas - Viga Simplesmente Apoiada

Neste capítulo são apresentadas e comparadas as soluções analíticas e as soluções numéricas obtidas para o modelo de viga simplesmente apoiada amortecida e não-amortecida sujeita a uma carga concentrada móvel com velocidade constante.

As soluções analíticas foram obtidas recorrendo às equações (3.17), (3.23) e (3.24), apresentadas no capítulo 3.

As soluções numéricas foram obtidas recorrendo à plataforma ANSYS® Workbench™.

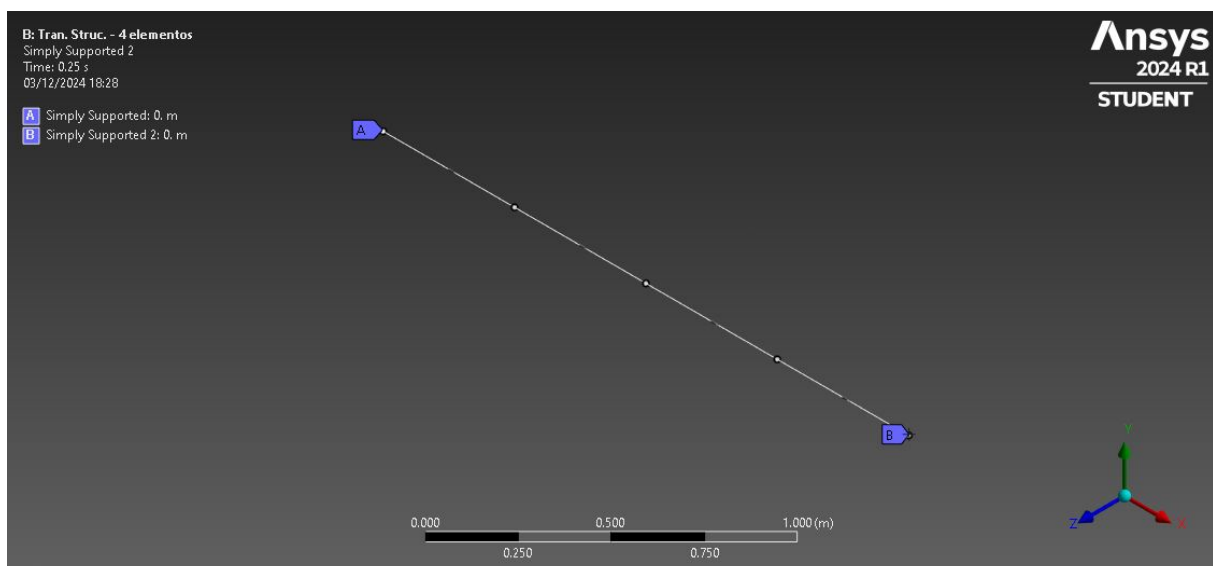


Figura 5.1 Exemplo do modelo implementado no programa de simulação numérica

Nesta análise, de modo a ser perceptível a comparação de ambos os modelos, as malhas apresentadas nos gráficos seguintes são as de 4 (Figura 5.1), 100 e 128 elementos finitos de

viga para as soluções numéricas. Tal como será possível verificar, estas malhas apresentam resultados bastante próximos dos resultados apresentados nas respectivas soluções analíticas, e por isso, optou-se por excluir dos gráficos todas as outras malhas referidas anteriormente. Estas malhas foram geradas pelo próprio programa obtendo elementos quadráticos, ou seja, cada elemento finito tem três nós, dois nas extremidades do próprio elemento e outro ao centro (*Element Order - Quadratic Elements*). Com este tipo de elemento finito, a análise numérica torna-se mais precisa, quando comparada com análises numéricas com elementos lineares que têm apenas dois nós, e, por conseguinte, menos graus de liberdade.

5.1 Viga Simplesmente Apoiada Não-Amortecida

Os dados considerados para a análise numérica da viga simplesmente apoiada sem amortecimento são os mesmos que foram considerados na Tabela 3.1.

Nas Figuras 5.2, 5.3 e 5.4 são apresentadas as soluções obtidas para a deformada, momento fletor e esforço transversal a meio-vão e em função do tempo, respetivamente.

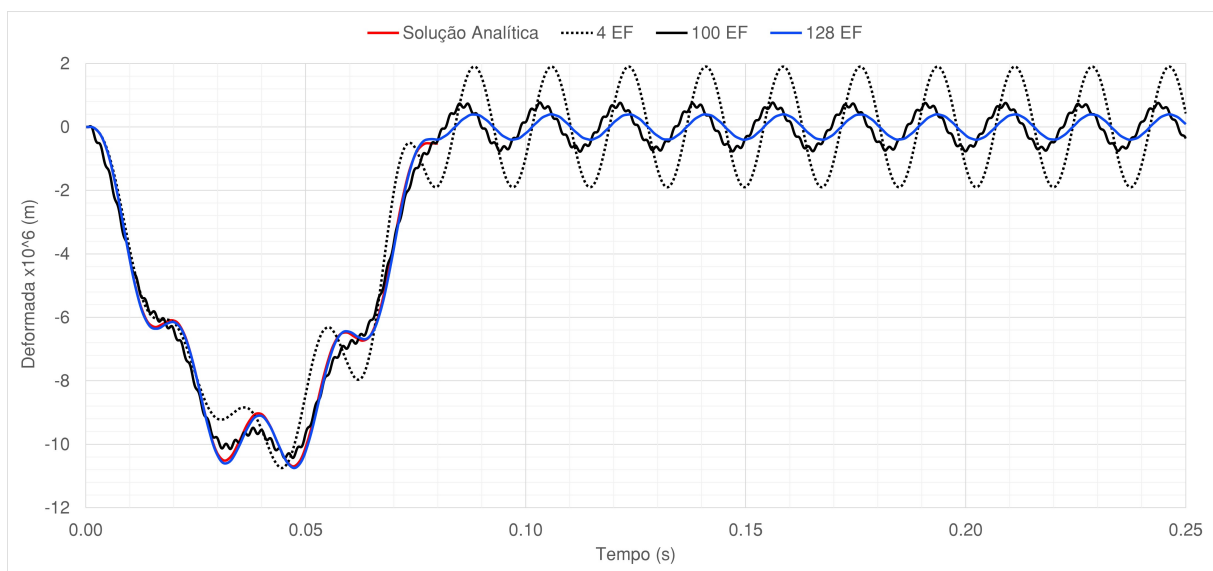


Figura 5.2 Deformada obtida a meio-vão para a viga simplesmente apoiada não-amortecida - Comparação Solução Analítica vs Soluções de EF

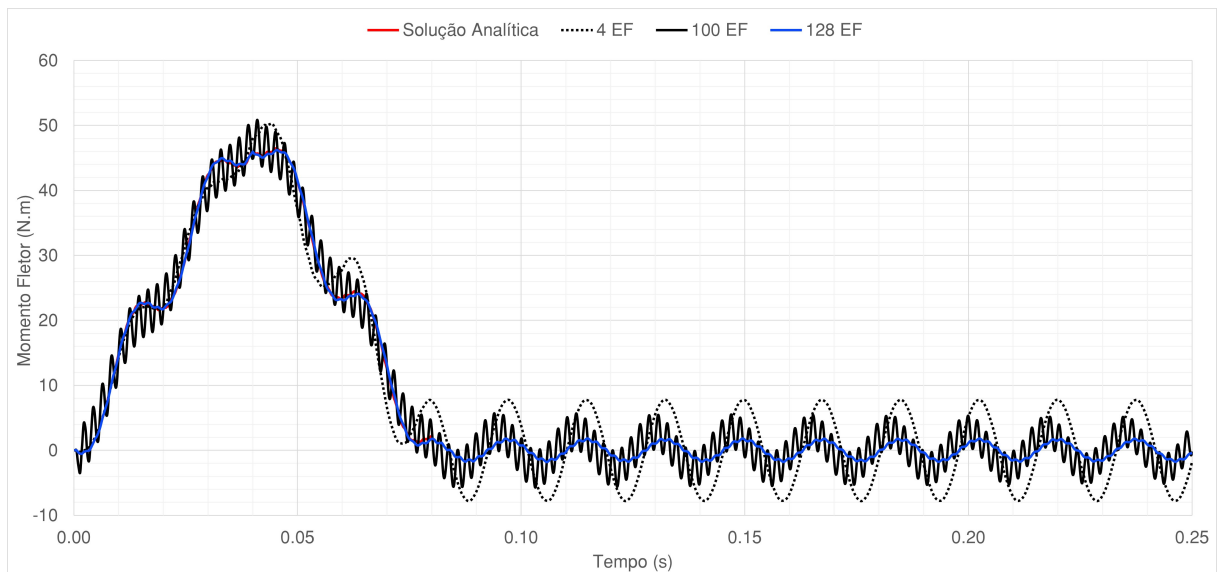


Figura 5.3 Momento fletor obtido a meio-vão para a viga simplesmente apoiada não-amortecida - Comparação Solução Analítica vs Soluções de EF

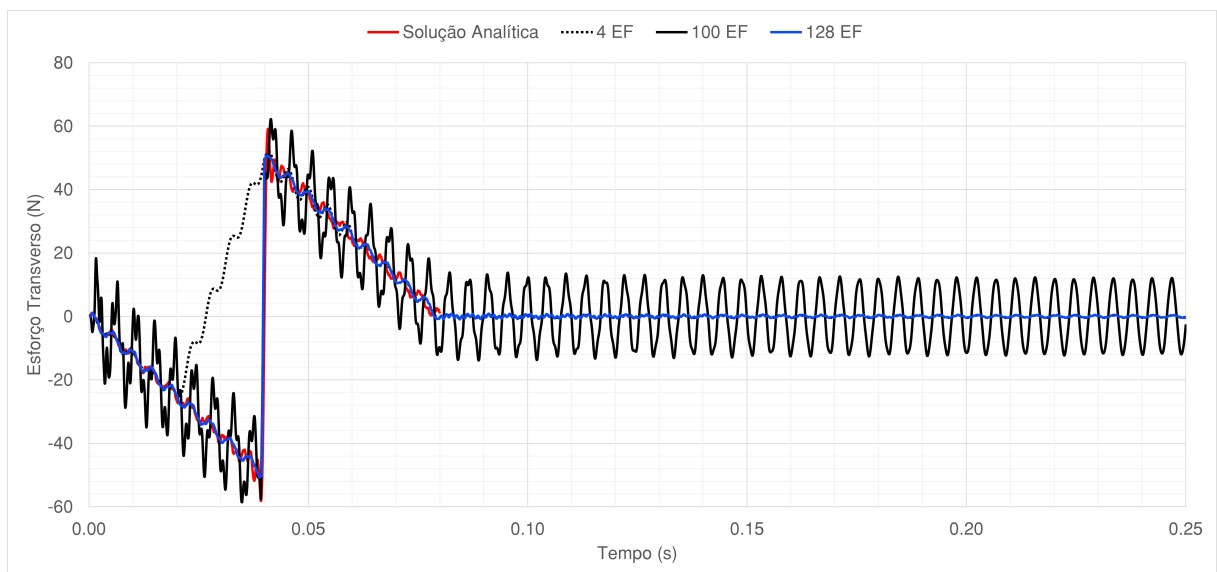


Figura 5.4 Esforço transverso obtido a meio-vão para a viga simplesmente apoiada não-amortecida - Comparação Solução Analítica vs Soluções de EF

Como se pode verificar através da análise das figuras, à exceção das soluções obtidas para a malha de 100 elementos finitos, as soluções obtidas para a malha de 4 elementos finitos são já bastante próximas das respetivas soluções analíticas, sendo as soluções referentes à malha de 128 elementos finitos praticamente coincidentes com as soluções analíticas. É de relembrar que o domínio de validade das soluções analíticas é $0 \leq t \leq \frac{L}{v}$.

Nas Figuras 5.5, 5.6 e 5.7, são apresentados as respostas da deformada, do momento fletor e do esforço transverso da viga para o instante de tempo $t = 0.04s$.

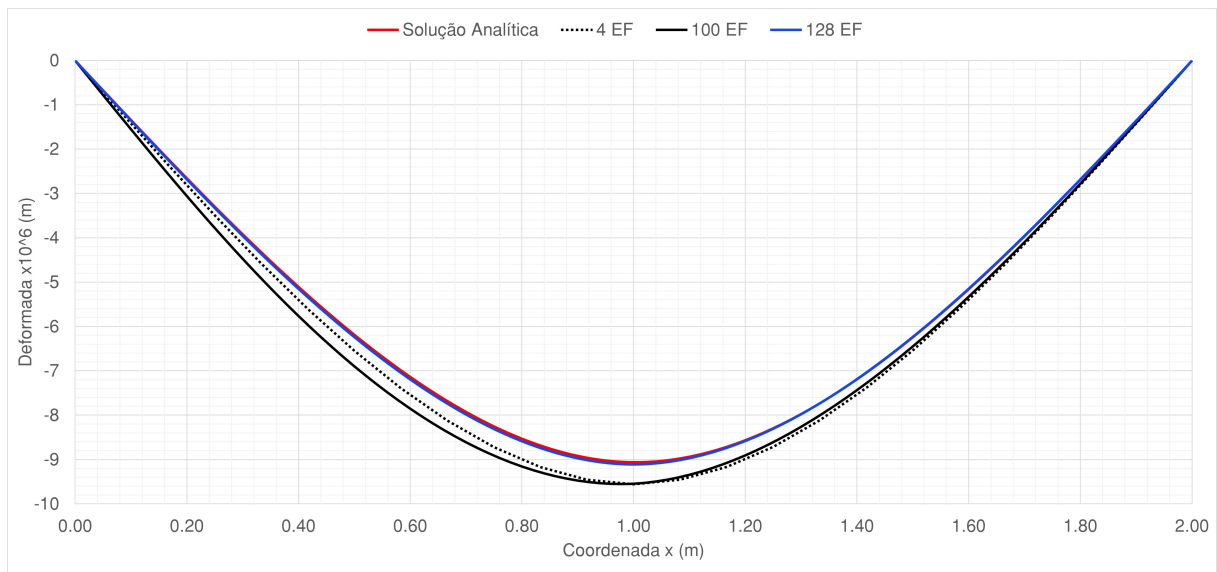


Figura 5.5 Deformada obtida para $t = 0.04s$ para a viga simplesmente apoiada não-amortecida - Comparação Solução Analítica vs Soluções de EF

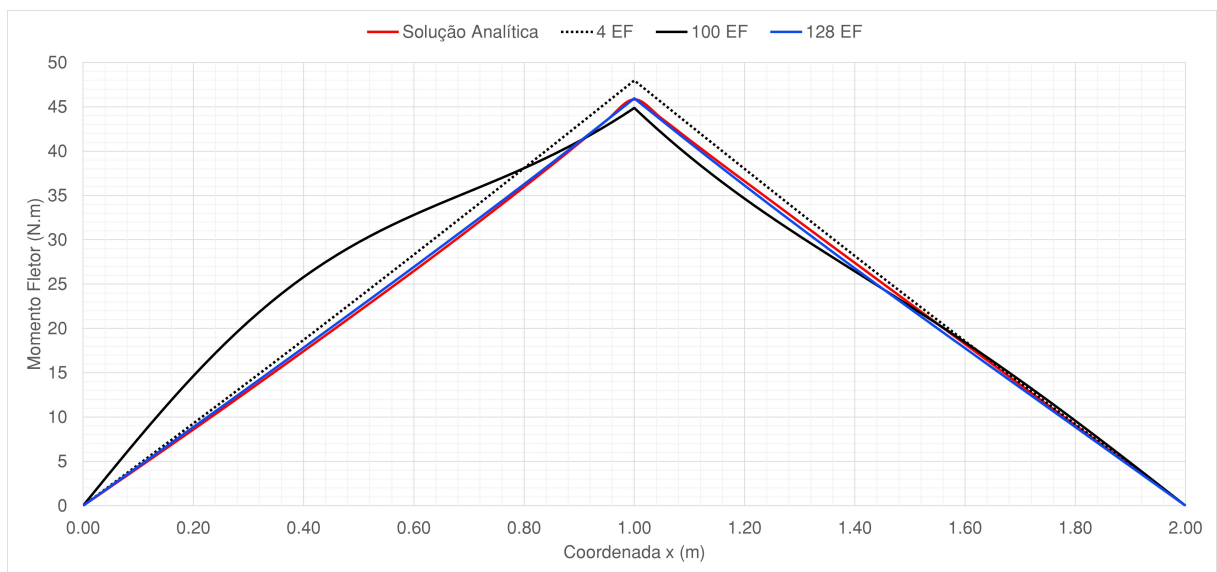


Figura 5.6 Momento fletor obtido para $t = 0.04s$ para a viga simplesmente apoiada não-amortecida - Comparação Solução Analítica vs Soluções de EF

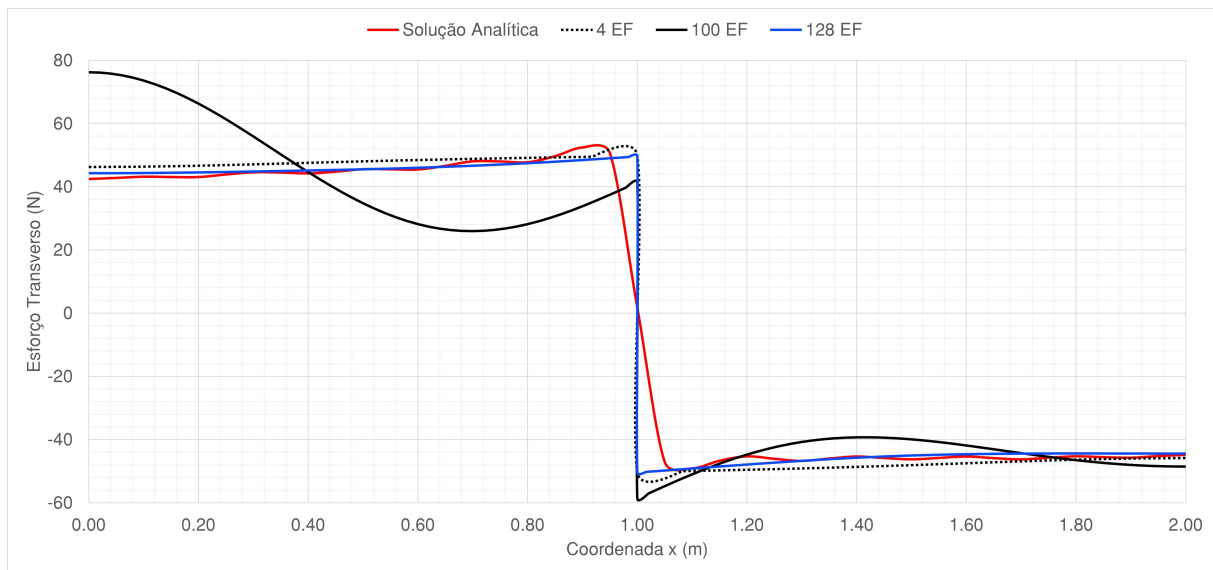


Figura 5.7 Esforço transverso obtido para $t = 0.04s$ para a viga simplesmente apoiada não-amortecida - Comparação Solução Analítica vs Soluções de EF

Como se pode verificar novamente, à excepção das soluções referentes à malha de 100 elementos finitos, as soluções obtidas para as malhas de 4 e 128 elementos finitos são muito próximas das soluções analíticas. Optou-se, assim, por não se incluírem nas figuras as soluções obtidas para discretizações intermédias.

5.2 Viga Simplesmente Apoiada Amortecida

Os dados considerados para a análise numérica da viga simplesmente apoiada amortecida são os mesmos dados referidos nas Tabelas 3.1 e 3.2.

A resposta da viga nestas condições é representada nos gráficos que se seguem, juntamente com os resultados do modelo teórico da viga amortecida. Primeiramente os três gráficos do comportamento da viga a meio-vão, no domínio do tempo (Figuras 5.8, 5.9 e 5.10, e de seguida os três gráficos do comportamento da viga aos $0.04s$, no domínio da coordenada x (Figuras 5.11, 5.12 e 5.13):

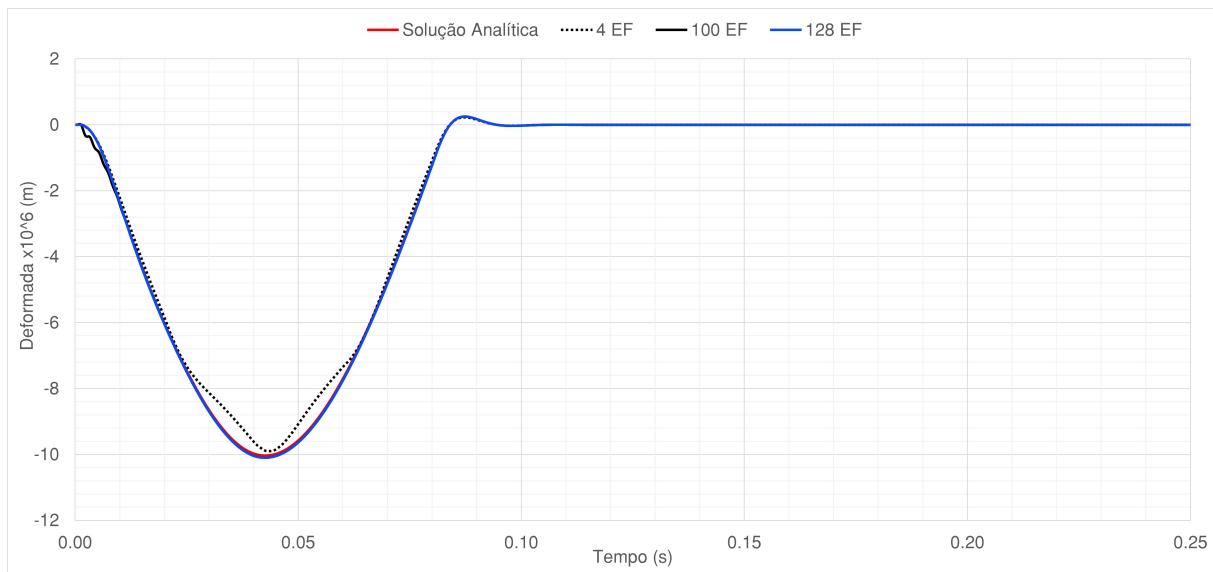


Figura 5.8 Deformada obtida a meio-vão para a viga simplesmente apoiada amortecida - Comparação Solução Analítica vs Soluções de EF

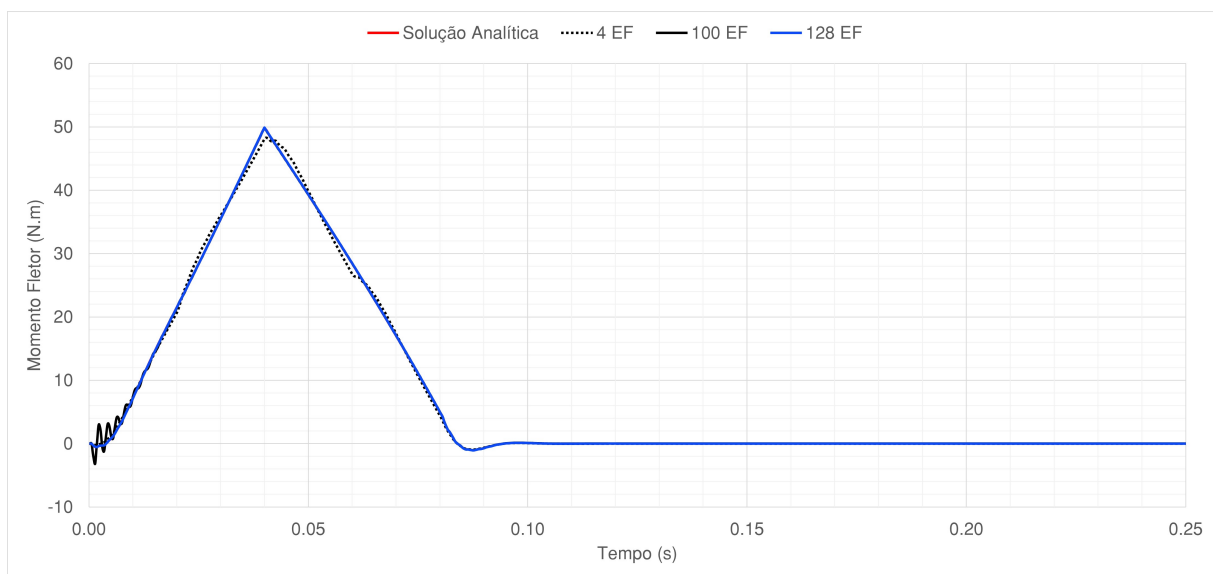


Figura 5.9 Momento fletor obtido a meio-vão para a viga simplesmente apoiada amortecida - Comparação Solução Analítica vs Soluções de EF

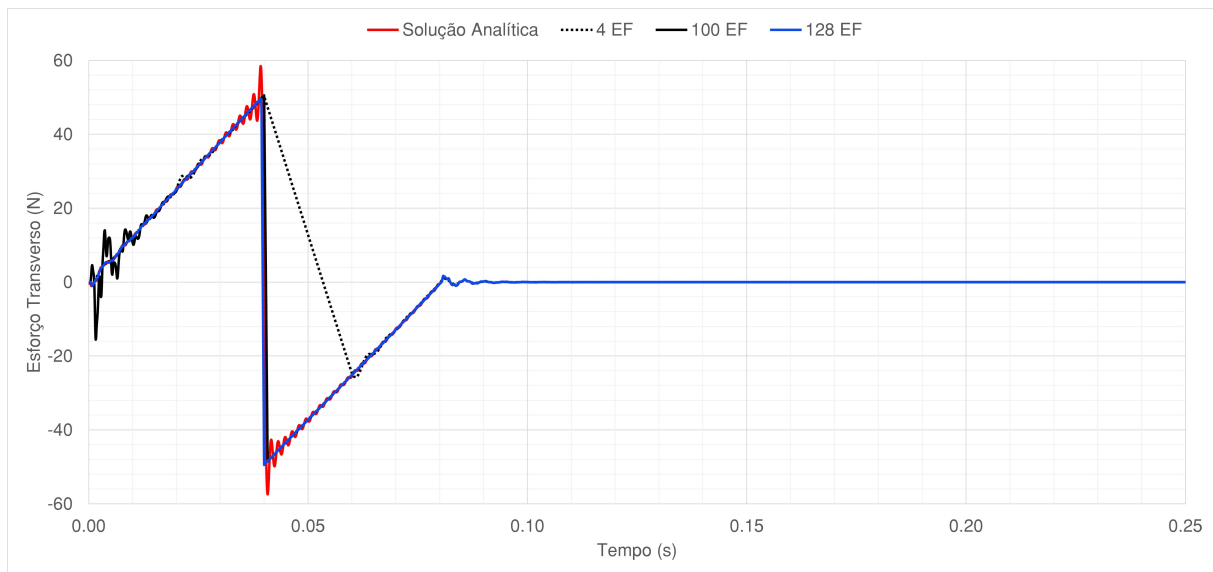


Figura 5.10 Esforço transverso obtido a meio-vão para a viga simplesmente apoiada amortecida - Comparação Solução Analítica vs Soluções de EF

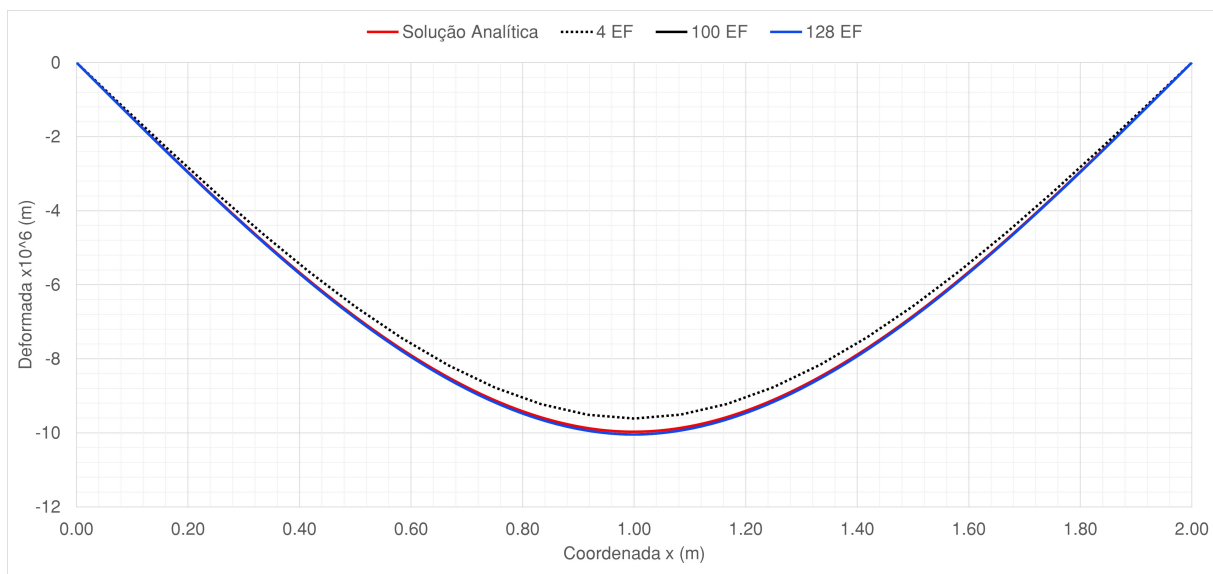


Figura 5.11 Deformada obtida para $t = 0.04s$ para a viga simplesmente apoiada amortecida - Comparação Solução Analítica vs Soluções de EF

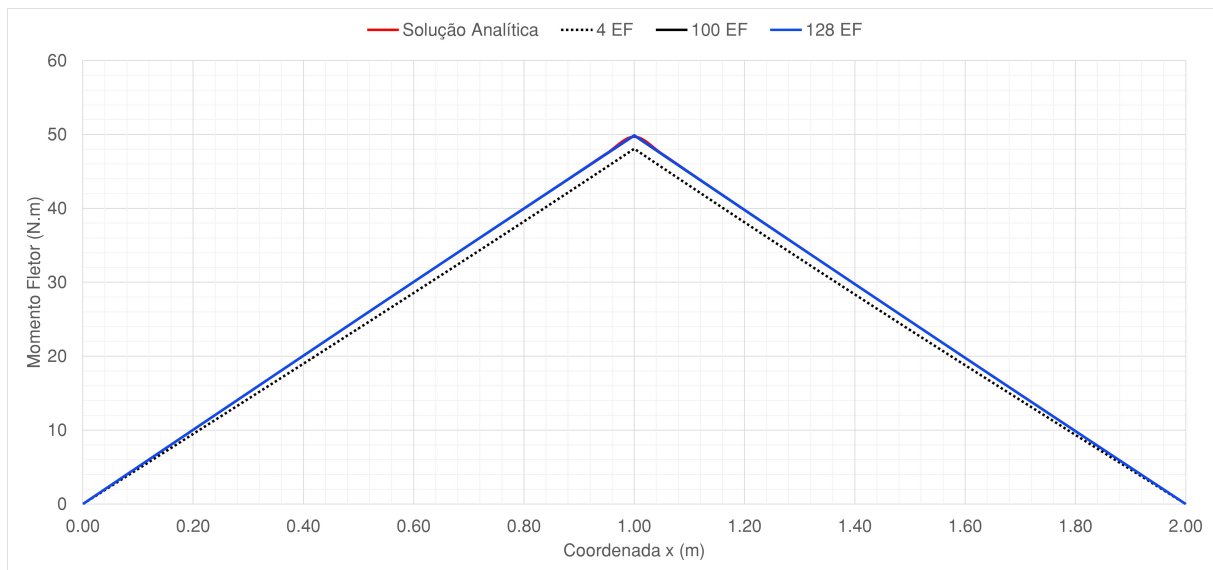


Figura 5.12 Momento fletor obtido para $t = 0.04s$ para a viga simplesmente apoiada amortecida - Comparação Solução Analítica vs Soluções de EF

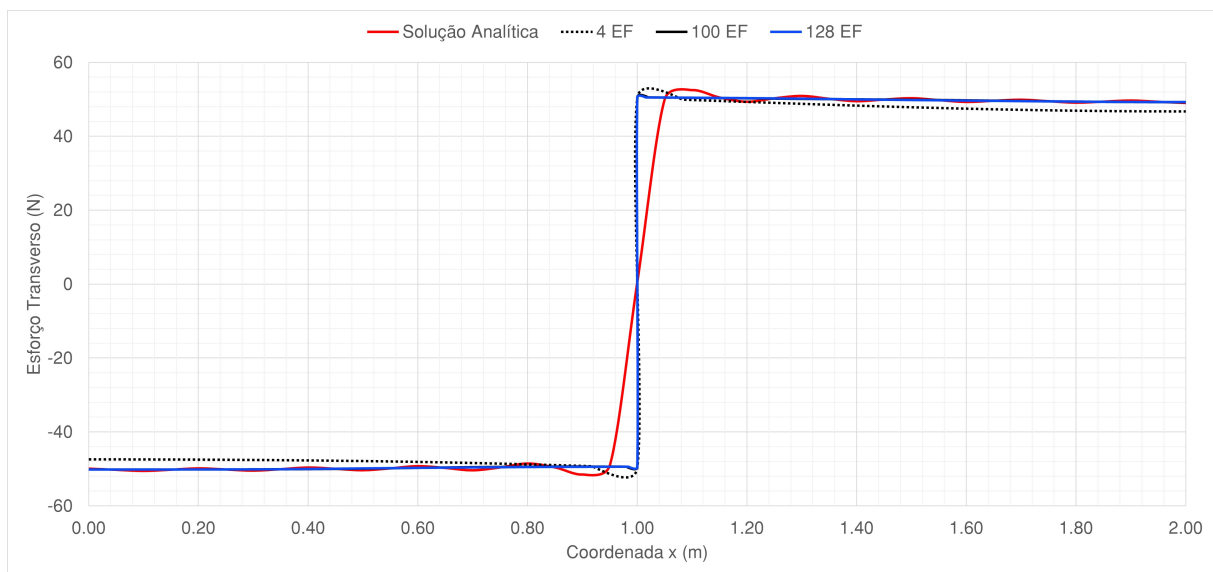


Figura 5.13 Esforço transverso obtido para $t = 0.04s$ para a viga simplesmente apoiada amortecida - Comparação Solução Analítica vs Soluções de EF

Nos gráficos apresentados em cima, verifica-se que os resultados numéricos aproximam-se bastante dos resultados teóricos (a vermelho). As soluções fornecidas pelo modelo numérico demonstram uma consistência muito grande, mesmo para a malha menos refinada, de 4 elementos finitos, relativamente às soluções analíticas respetivas.

Capítulo 6

Outros Casos de Estudo Implementados em ANSYS

Neste capítulo apresentam-se os resultados numéricos obtidos para outras situações de condições de fronteira, variação da geometria da secção transversal, variação das propriedades mecânicas do material e cargas aplicadas, para os quais não estão disponíveis soluções analíticas para comparação. Para todos os casos estudados neste capítulo, não foi considerado o amortecimento da viga. Particularmente, para o modelo de viga simplesmente apoiada sob a ação de duas cargas móveis existe solução analítica (Yang et al. (2004)), não tendo sido abordado neste estudo.

As malhas de elementos finitos adotadas seguem o padrão de 2^n elementos finitos, tendo sido representadas apenas as soluções obtidas para as malhas de 4, de 16 e de 128 elementos finitos.

6.1 Viga Contínua

Nesta secção considera-se uma viga contínua de dois troços, que resulta da colocação de um apoio simples adicional relativamente à viga simplesmente apoiada abordada anteriormente em $x = \frac{L}{4}$, conforme esquematizado na Figura 6.1. Os dados referentes a este modelo encontram-se esquematizados na Tabela 6.1.

Tabela 6.1 Dados: Viga Contínua

Dados da Viga
$\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$
$E = 200 \text{ GPa}$
$L = 2 \text{ m}$

Secção Transversal Quadrada
$h = 0.1 \text{ m}$

Carga Móvel
$v = 25 \text{ m/s}$
$P = 100 \text{ N}$

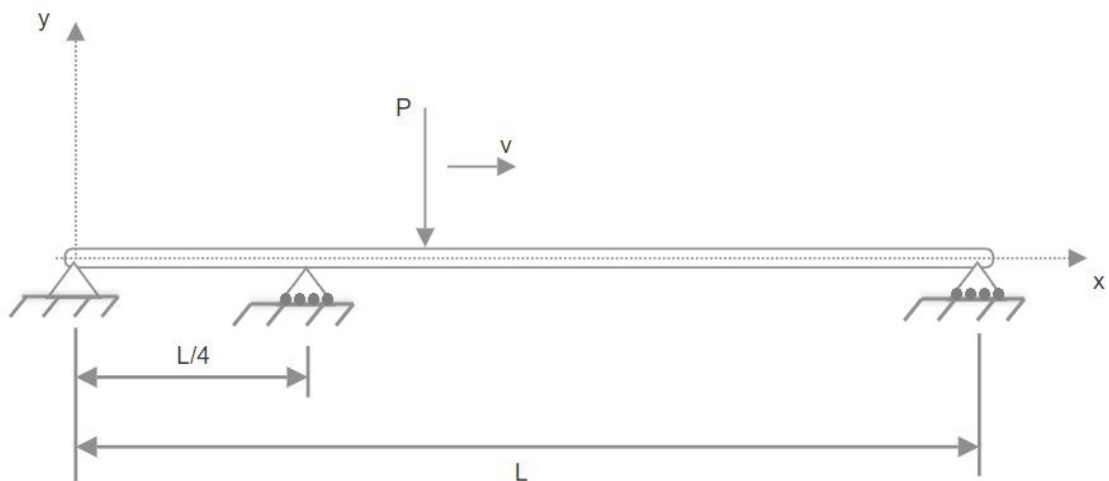


Figura 6.1 Viga contínua

Contrariamente aos casos abordados no capítulo anterior correspondentes à viga simplesmente apoiada, neste caso não estão disponíveis soluções analíticas para comparação. Assim, as soluções apresentadas nos gráficos seguintes, são as obtidas para as malhas de 4, 16 e 128 elementos finitos.

As soluções obtidas para a deformada, momento fletor e esforço transversal no domínio do tempo para o meio-vão da viga são apresentadas nas Figuras 6.2, 6.3 e 6.4, respectivamente. Da mesma forma, as soluções obtidas para $t = 0.04s$ são apresentadas nas Figuras 6.5, 6.6 e 6.7.

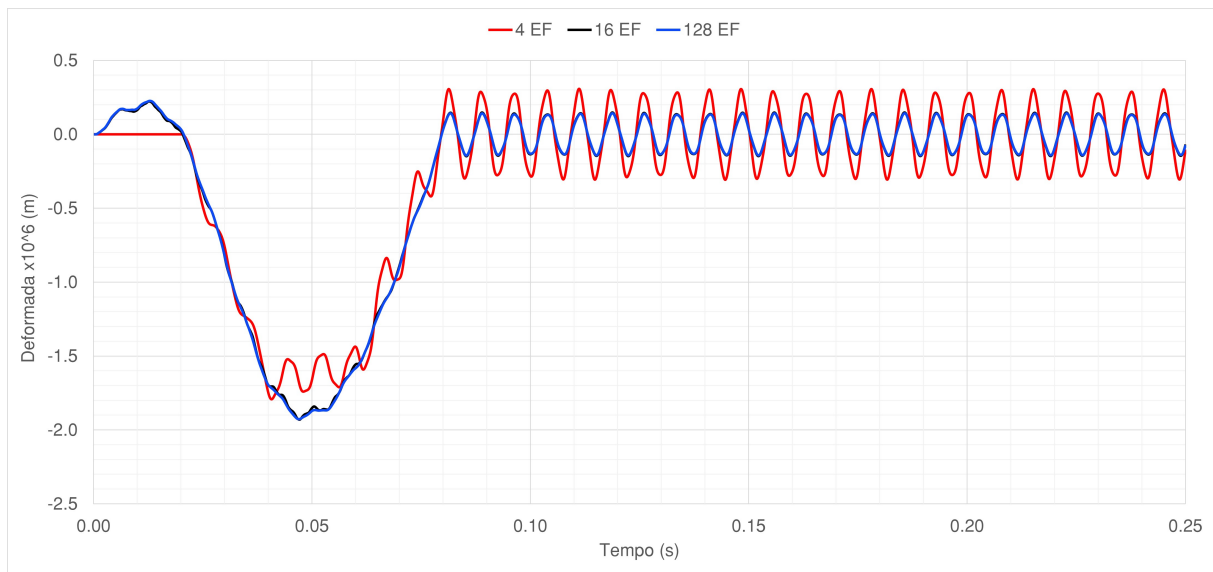


Figura 6.2 Deformada obtida a meio-vão para a viga contínua não-amortecida - Soluções de EF

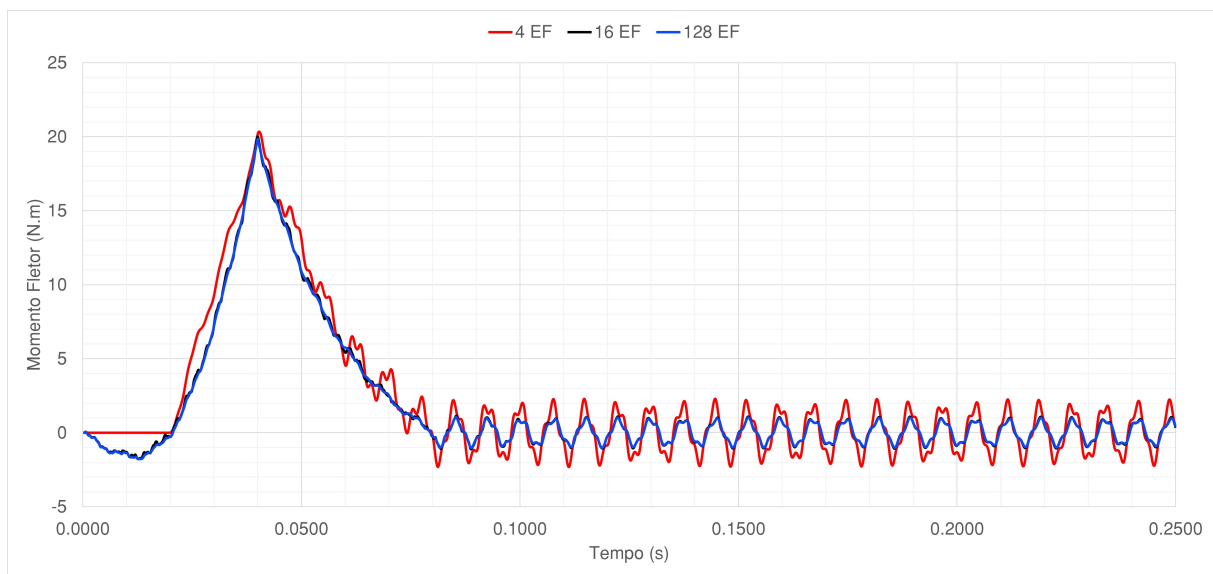


Figura 6.3 Momento fletor obtido a meio-vão para a viga contínua não-amortecida - Soluções de EF

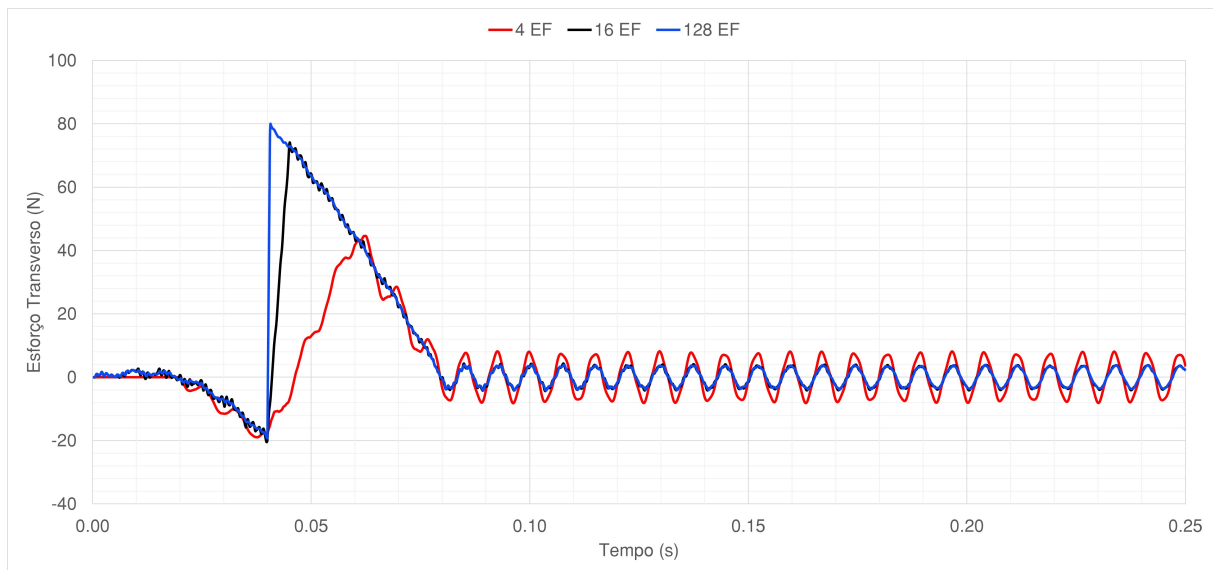


Figura 6.4 Esforço transverso obtido a meio-vão para a viga contínua não-amortecida - Soluções de EF

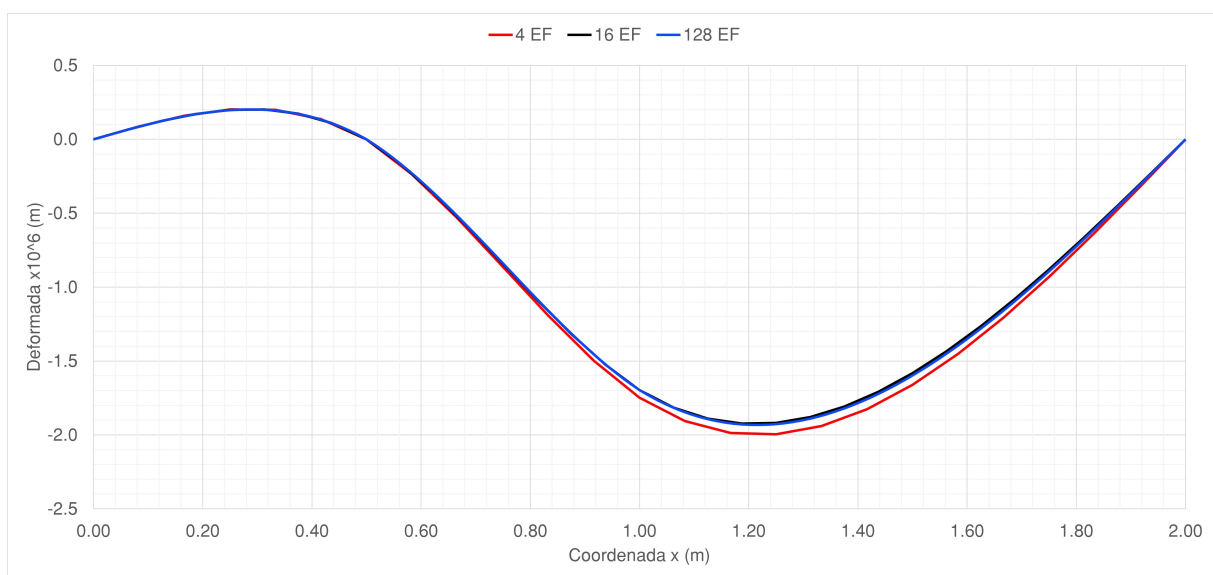


Figura 6.5 Deformada obtida para $t = 0.04s$ para a viga contínua não-amortecida - Soluções de EF

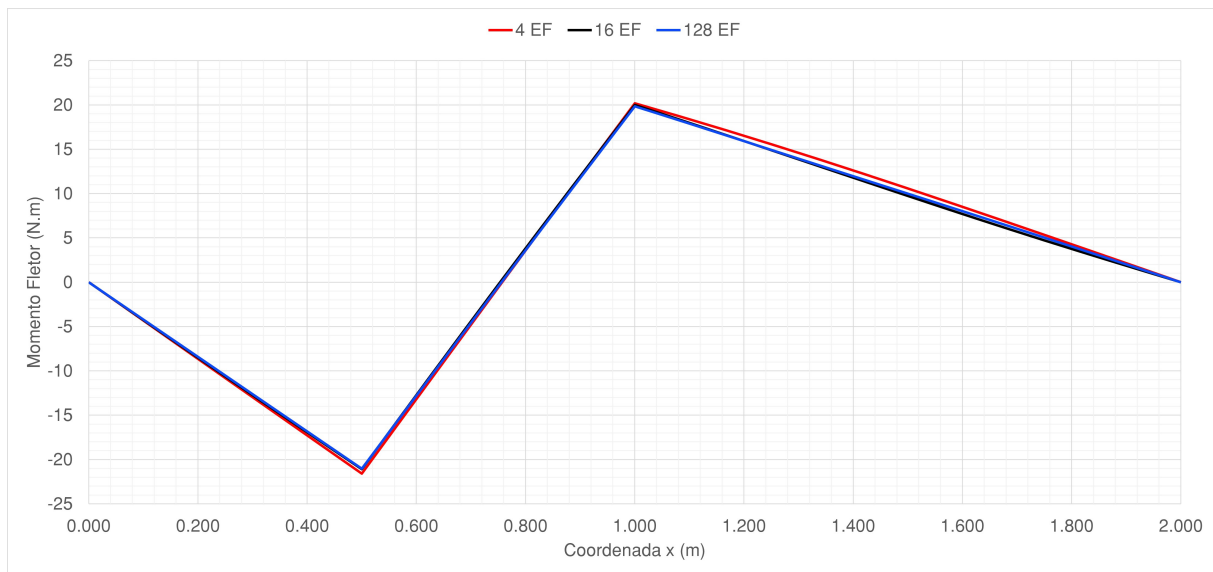


Figura 6.6 Momento fletor obtido para $t = 0.04s$ para a viga contínua não-amortecida - Soluções de EF

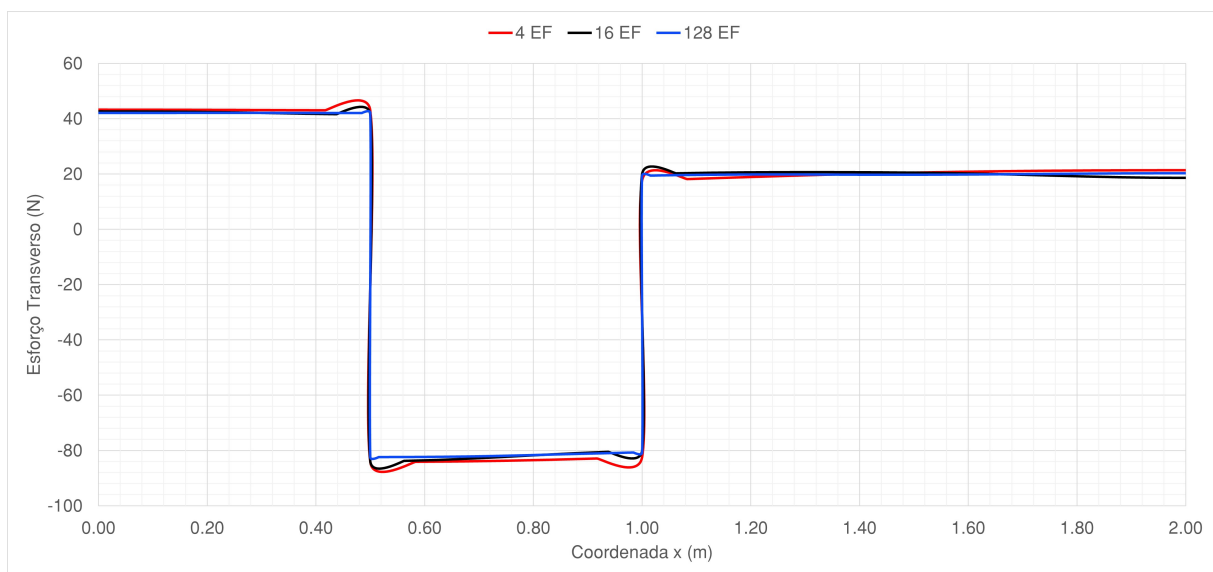


Figura 6.7 Esforço transverso obtido para $t = 0.04s$ para a viga contínua não-amortecida - Soluções de EF

Analisando as soluções obtidas no domínio do tempo, ou seja, a meio-vão, verificou-se, a partir da malha com 16 elementos finitos, que as soluções obtidas estão já bastante próximas das soluções geradas pela malha mais refinada, composta por 128 elementos finitos. As soluções apresentadas pela malha com 4 elementos finitos são significativamente diferentes das soluções apresentadas para malhas mais refinadas, isto para os três casos de estudo no domínio do tempo: deformada, momento fletor e esforço transverso.

Relativamente às soluções obtidas no domínio da coordenada x , ou seja, para $t = 0.04s$, as várias malhas apresentam soluções muito próximas umas das outras, mesmo as malhas menos refinadas, como por exemplo, a malha de 4 elementos finitos. Esta solução numérica

atingiu a convergência de resultados muito rapidamente ao demonstrar que os valores da deformada, momento fletor e esforço transversal não apresentam variações significativas.

Na Figura 6.2, é possível observar que a deformada máxima (em módulo) encontra-se muito próxima do instante $t = 0.04s$, instante este em que a carga passa no ponto médio da viga e onde se concentra o maior efeito da carga móvel. É também observável a influência da adição do apoio simples em $x = \frac{L}{4}$. Nas soluções obtidas para as malhas com 16 e 128 elementos finitos, há uma descontinuidade próxima do instante $t = 0.02s$, instante este em que a carga móvel passa no ponto de coordenada $x = \frac{L}{4}$, onde se encontra precisamente esse mesmo apoio simples. Esta situação é também observável nas Figuras 6.3 e 6.4. Verifica-se também que a viga continua a oscilar mesmo depois do instante em que a carga deixa de atuar a viga ($t = 0.08s$).

Nas Figuras 6.5, 6.6 e 6.7 verifica-se que no ponto do apoio simples ($x = \frac{L}{4}$) a deformada anula-se, o momento fletor atinge um valor mínimo e haverá uma mudança abrupta no esforço transversal. A amplitude de valores nas soluções apresentadas para o esforço transversal é equivalente ao valor da carga móvel.

6.2 Viga Encastrada-Apoiada

No presente caso de estudo, implementou-se o mesmo modelo de viga sob a ação de uma carga móvel onde as condições de fronteira são diferentes das estudadas até então. Os dados referentes a este modelo são os mesmos do modelo anterior, ou seja, encontram-se representados na Tabela 6.1.

Neste modelo a viga encontra-se encastrada numa das extremidades e apoiada na outra extremidade, tal como está esquematizado na Figura 6.8:

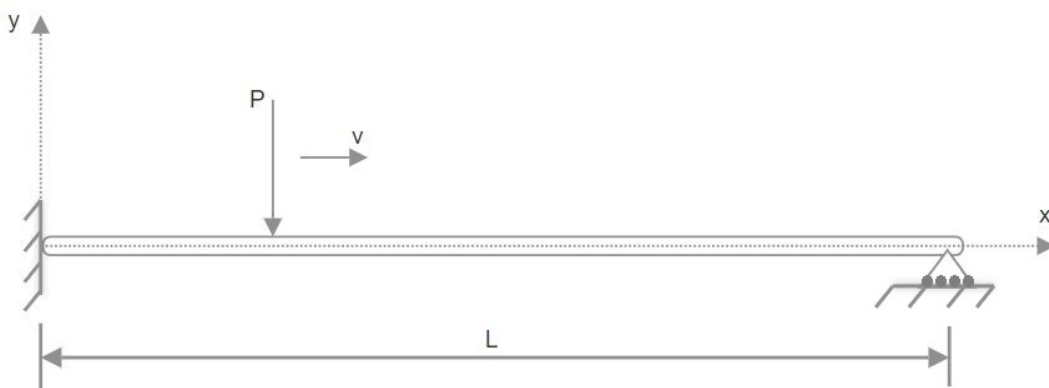


Figura 6.8 Viga encastrada-apoiada

Neste caso, o movimento de rotação para $x = 0$ passa a estar impedido.

Nas Figuras 6.9, 6.10 e 6.11 apresentam-se as soluções para a deformada, momento fle-

tor e esforço transversal no domínio do tempo t , e nas Figuras 6.12, 6.13 e 6.14, os resultados das mesmas variáveis no domínio da coordenada x :

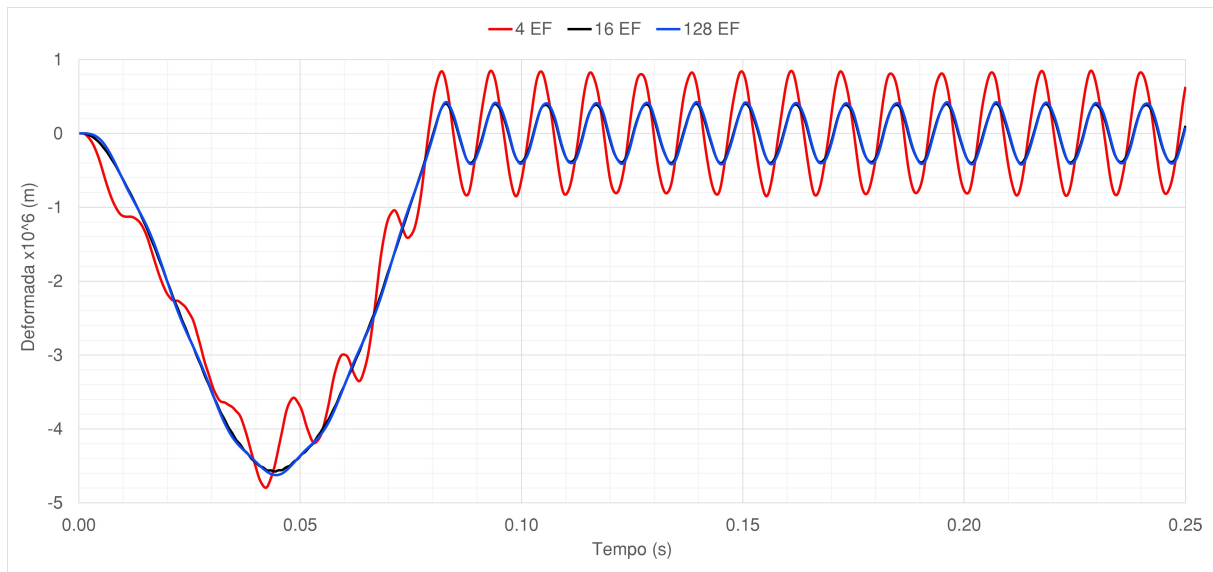


Figura 6.9 Deformada obtida a meio-vão para a viga encastrada-apoiada não-amortecida - Soluções de EF

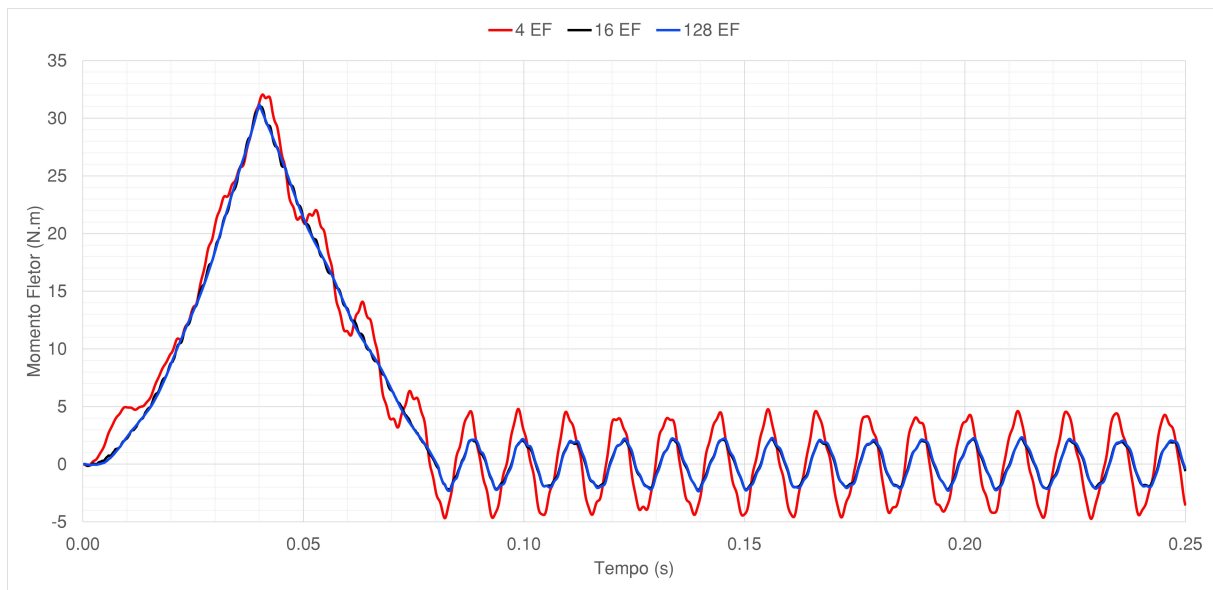


Figura 6.10 Momento fletor obtido a meio-vão para a viga encastrada-apoiada não-amortecida - Soluções de EF

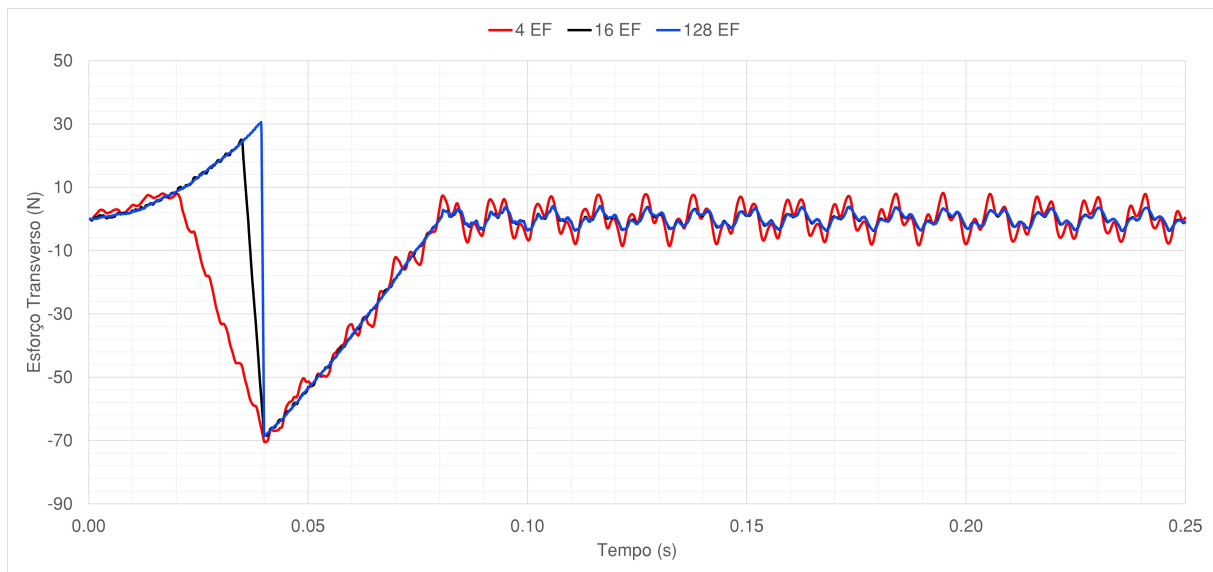


Figura 6.11 Esforço transverso obtido a meio-vão para a viga encastrada-apoiada não-amortecida - Soluções de EF

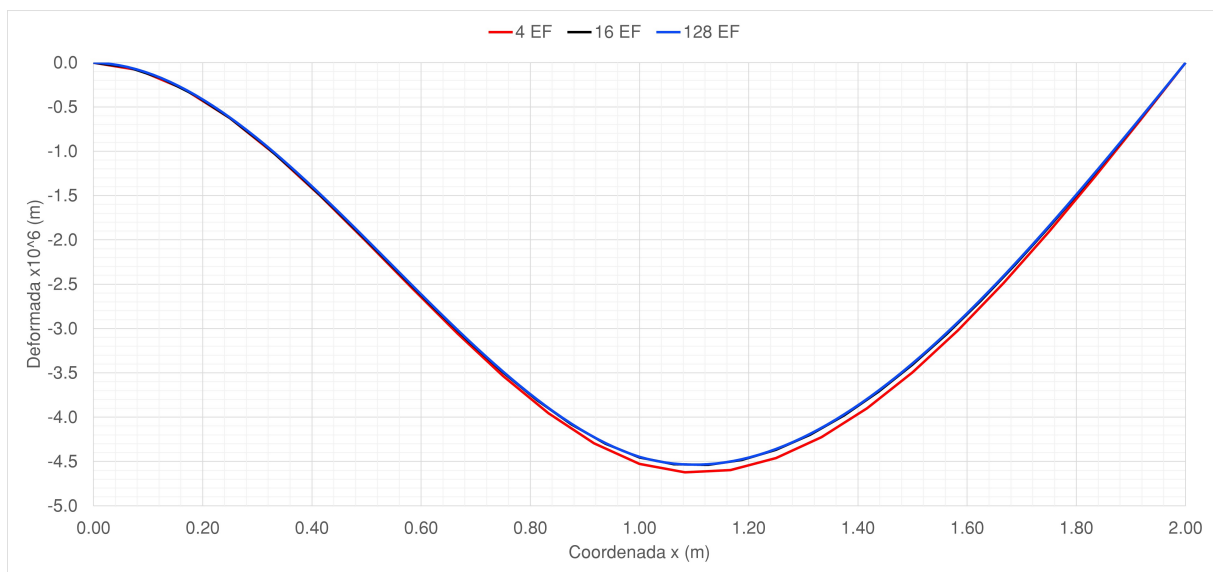


Figura 6.12 Deformada obtida para $t = 0.04s$ para a viga encastrada-apoiada não-amortecida - Soluções de EF

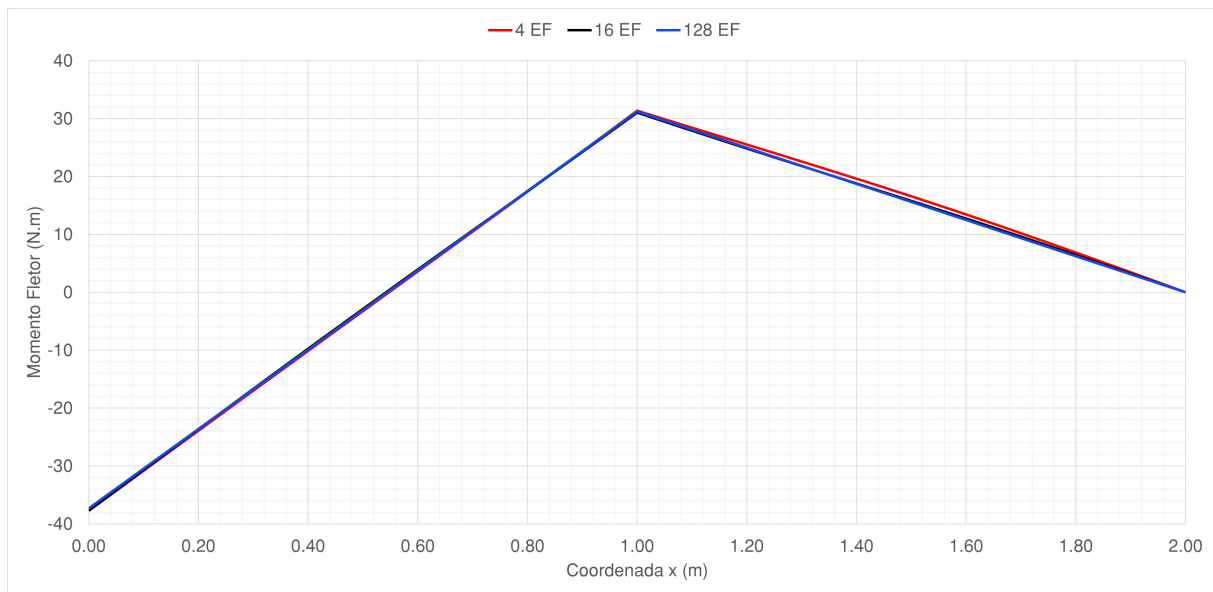


Figura 6.13 Momento fletor obtido para $t = 0.04s$ para a viga encastrada-apoiada não-amortecida - Soluções de EF

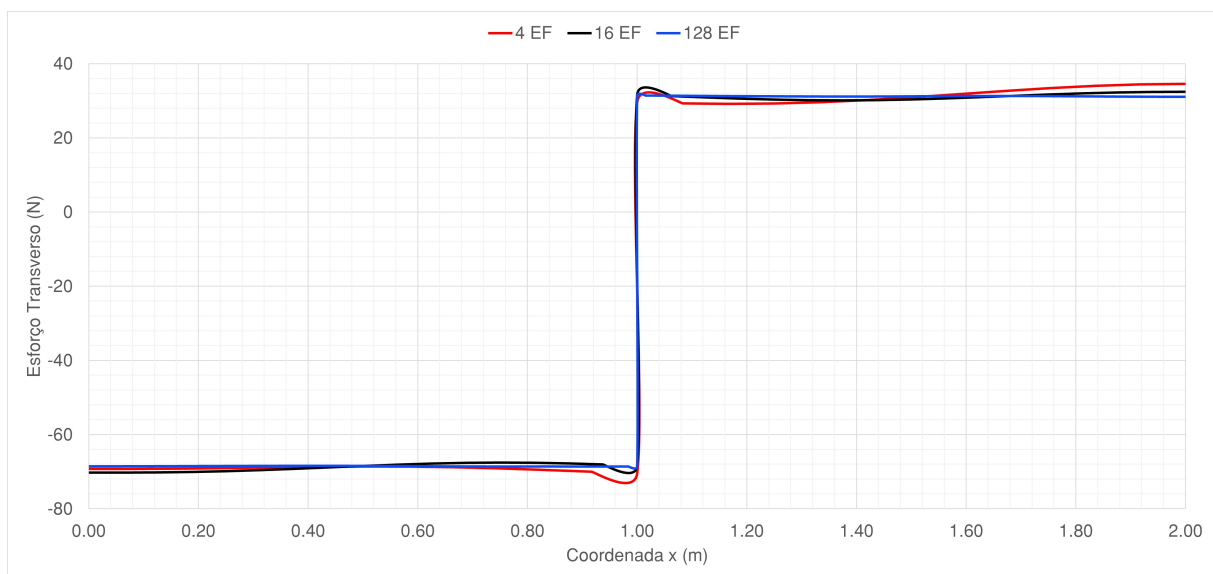


Figura 6.14 Esforço transverso obtido para $t = 0.04s$ para a viga encastrada-apoiada não-amortecida - Soluções de EF

Analisando as soluções obtidas no domínio do tempo verifica-se que, a partir da malha com 16 elementos finitos, as soluções obtidas estão já bastante próximas das soluções geradas pela malha de 128 elementos finitos. Neste caso de estudo, também se verifica que as soluções apresentadas pela malha com 4 elementos finitos, são significativamente diferentes das soluções apresentadas para malhas mais refinadas.

Em relação às soluções obtidas para a coordenada x , correspondentes ao instante $t = 0.04s$, também se observa uma rápida convergência dos resultados, visto que os valores da

deformada, do momento fletor e do esforço transversal não apresentam alterações significativas.

Neste caso de estudo em específico, verifica-se que tanto nas Figuras 6.9, 6.10 e 6.11, como nas Figuras 6.12, 6.13 e 6.14, este modelo assemelha-se ao modelo de viga simplesmente apoiada não-amortecida, com a particularidade da substituição do apoio simples numa das extremidades da viga por um encastramento, o que faz com que a própria viga adquira maior rigidez. Esta situação faz com que haja uma redução nos valores da deformada e do momento fletor, comparativamente ao modelo de viga simplesmente apoiada não-amortecida. Outra das particularidades deste modelo é o facto do momento fletor ser diferente de zero para $x = 0$ devido ao facto da existência de um encastramento neste ponto da viga (Figura 6.13).

6.3 Viga com Variação Geométrica da Secção Transversal

Um dos casos de estudo implementados numericamente é o de uma viga com variação geométrica da secção transversal. Neste caso a viga apresenta uma secção transversal variável por troços, conforme esquematizado na Figura 6.15. Ambos os troços têm secções transversais quadradas, de características conforme indicado na Tabela 6.2:

Tabela 6.2 Dados: Viga com Variação Geométrica da Secção Transversal

Dados da Viga
$\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$
$E = 200 \text{ GPa}$
$L = 2 \text{ m}$
Secções Transversais Quadradas
Troço 1
$h = 0.05 \text{ m}$
$b = 0.05 \text{ m}$
Troço 2
$h = 0.01 \text{ m}$
$b = 0.01 \text{ m}$
Carga Móvel
$v = 25 \text{ m/s}$
$P = 100 \text{ N}$

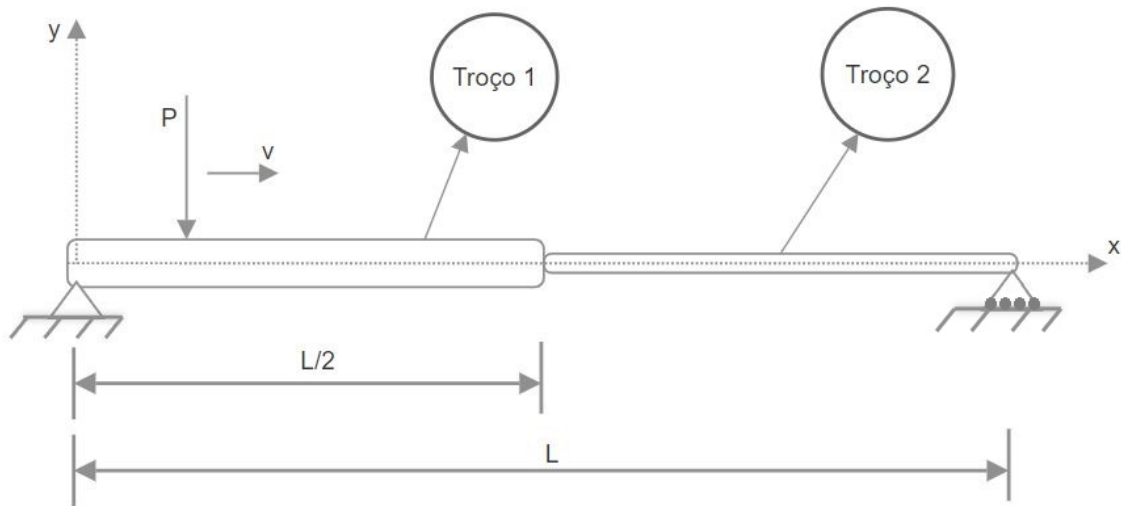


Figura 6.15 Viga com variação geométrica da secção transversal

Nas Figuras 6.16, 6.17 e 6.18 apresentam-se as soluções para a deformada, momento fletor e esforço transversal no domínio do tempo t , e nas Figuras 6.19, 6.20 e 6.21, os resultados das mesmas variáveis no domínio da coordenada x :

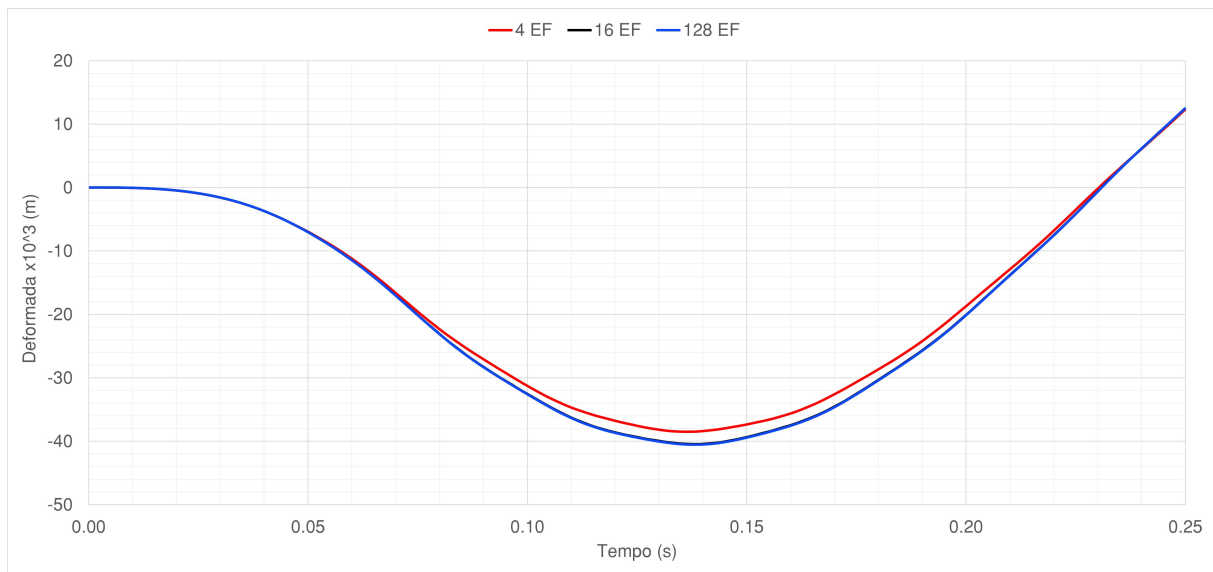


Figura 6.16 Deformada obtida a meio-vão para a viga com variação geométrica da secção transversal não-amortecida - Soluções de EF

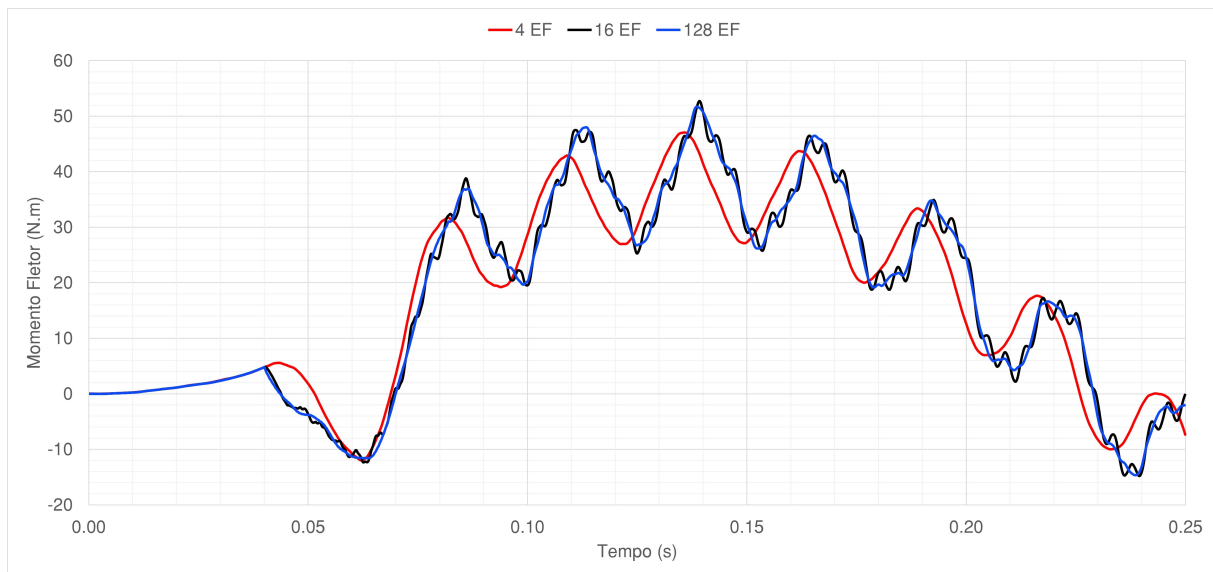


Figura 6.17 Momento fletor obtido a meio-vão para a viga com variação geométrica da secção transversal não-amortecida - Soluções de EF

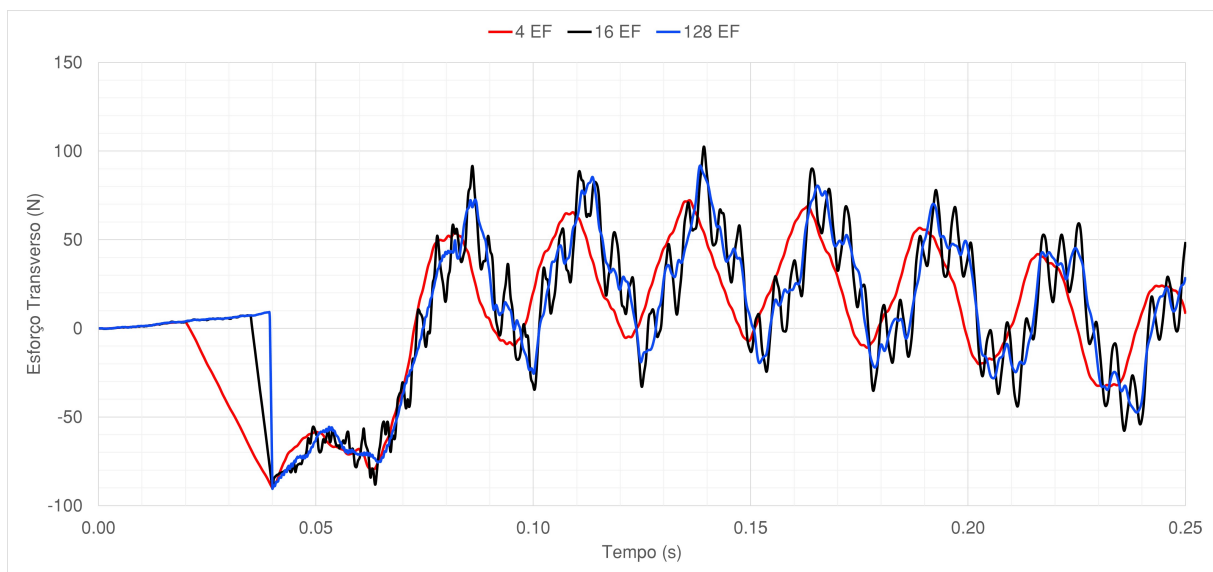


Figura 6.18 Esforço transverso obtido a meio-vão para a viga com variação geométrica da secção transversal não-amortecida - Soluções de EF

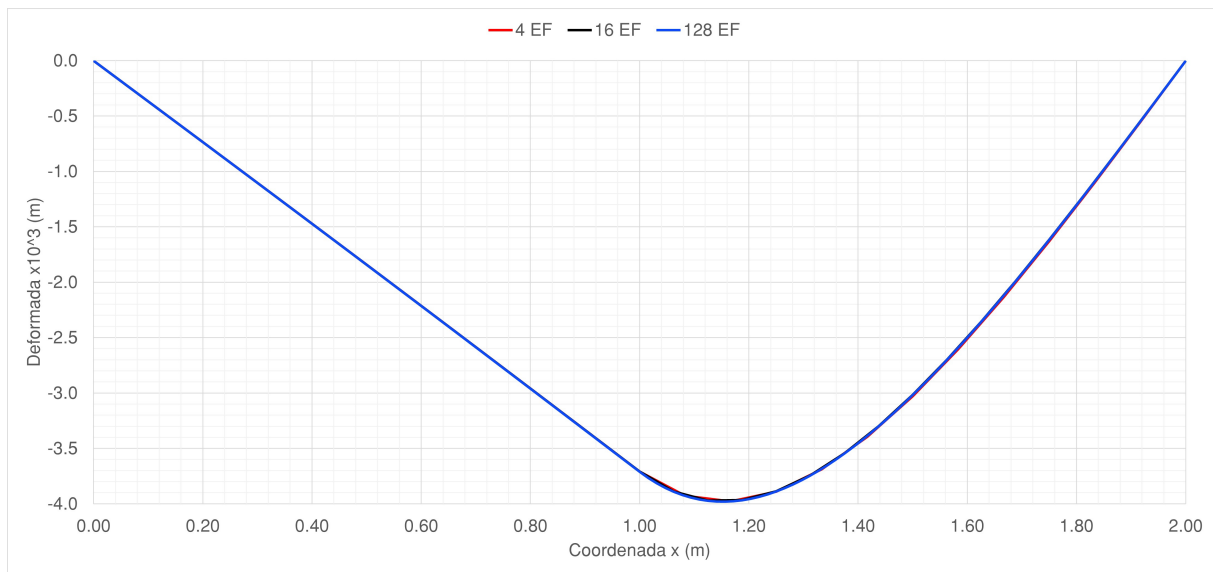


Figura 6.19 Deformada obtida para $t = 0.04s$ para a viga com variação geométrica da secção transversal não-amortecida - Soluções de EF

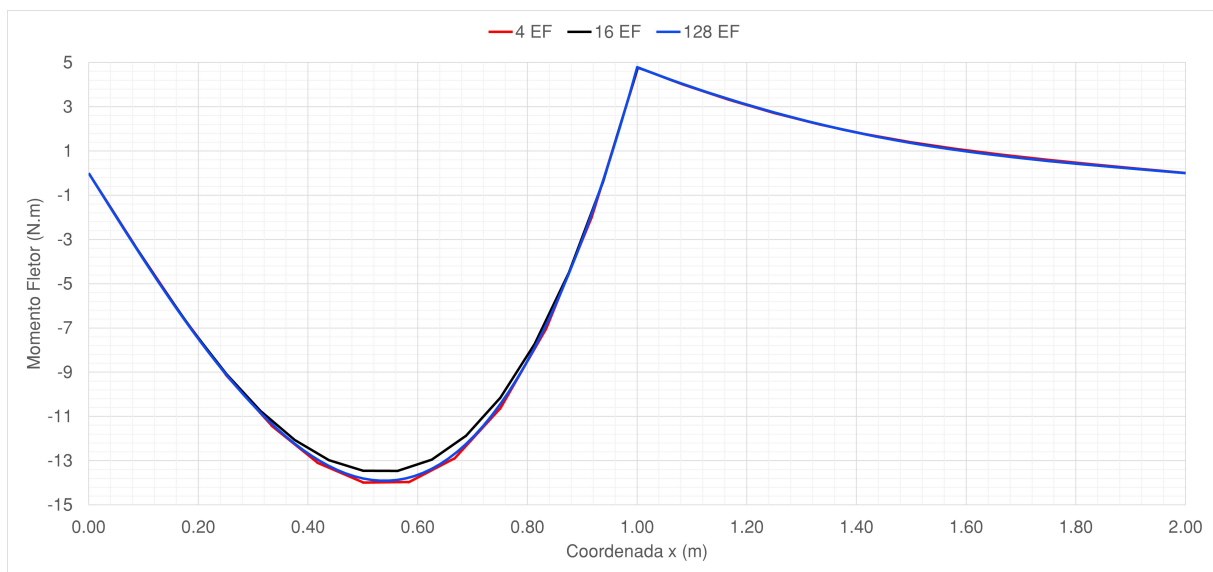


Figura 6.20 Momento fletor obtido para $t = 0.04s$ para a viga com variação geométrica da secção transversal não-amortecida - Soluções de EF

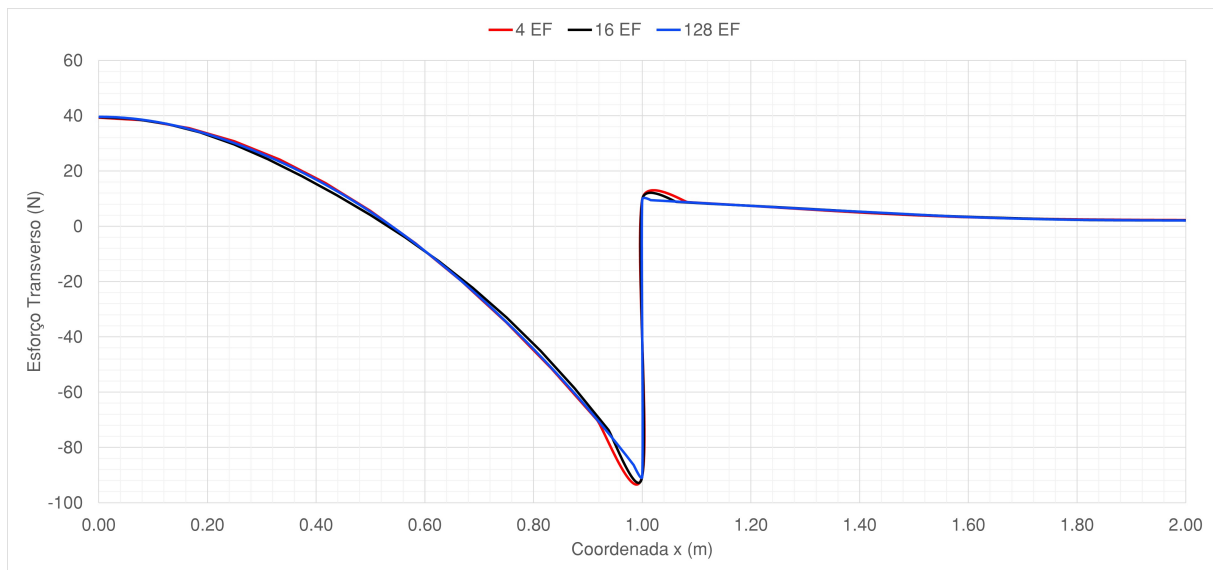


Figura 6.21 Esforço transverso obtido para $t = 0.04s$ para a viga com variação geométrica da secção transversal não-amortecida - Soluções de EF

Neste caso de estudo, também se verifica que as soluções apresentadas pela malha com 4 elementos finitos, são significativamente diferentes das soluções apresentadas para malhas mais refinadas, isto para os três casos de estudo no domínio do tempo: deformada, momento fletor e esforço transverso.

Relativamente às soluções obtidas para a coordenada x , no instante $t = 0.04s$, verifica-se também que a convergência dos resultados é alcançada de forma muito rápida, uma vez que os valores da deformada, do momento fletor e do esforço transverso não apresentam variações significativas.

Este modelo apresenta valores de deformada bastante superiores comparativamente aos outros modelos estudados. Como se poderá observar na Tabela 6.2, houve uma redução bastante significativa das secções transversais para ambos os troços.

6.4 Viga de Comportamento Mecânico Heterogéneo

Apresenta-se o caso de uma viga simplesmente apoiada constituída por dois troços formados por materiais distintos, conforme representado na Figura 6.22. O primeiro troço tem as características de um Aço Estrutural, as mesmas consideradas nos casos anteriores, enquanto o segundo troço tem as características de uma Liga de Alumínio, conforme indicado na Tabela 6.3.

Tabela 6.3 Dados: Viga de Comportamento Mecânico Heterogéneo

Dados da Viga
$L = 2 \text{ m}$
Aço Estrutural
$\rho_1 = 7850 \text{ kg/m}^3$
$E_1 = 200 \text{ GPa}$
$\nu_1 = 0.30$
Liga de Alumínio
$\rho_2 = 2770 \text{ kg/m}^3$
$E_2 = 71 \text{ GPa}$
$\nu_2 = 0.33$
Secção Transversal Quadrada
$h = 0.1 \text{ m}$
Carga Móvel
$v = 25 \text{ m/s}$
$P = 100 \text{ N}$

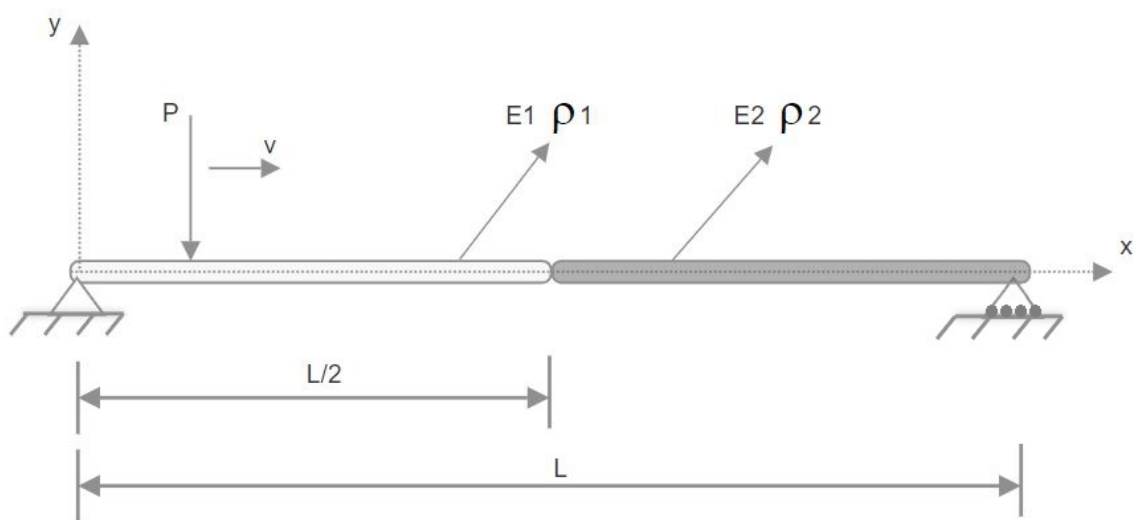


Figura 6.22 Viga de comportamento mecânico heterogéneo

Nas Figuras 6.23, 6.24 e 6.25 apresentam-se as soluções para a deformada, momento fletor e esforço transversal no domínio do tempo t , e nas Figuras 6.26, 6.27 e 6.28, os resultados das mesmas variáveis no domínio da coordenada x :

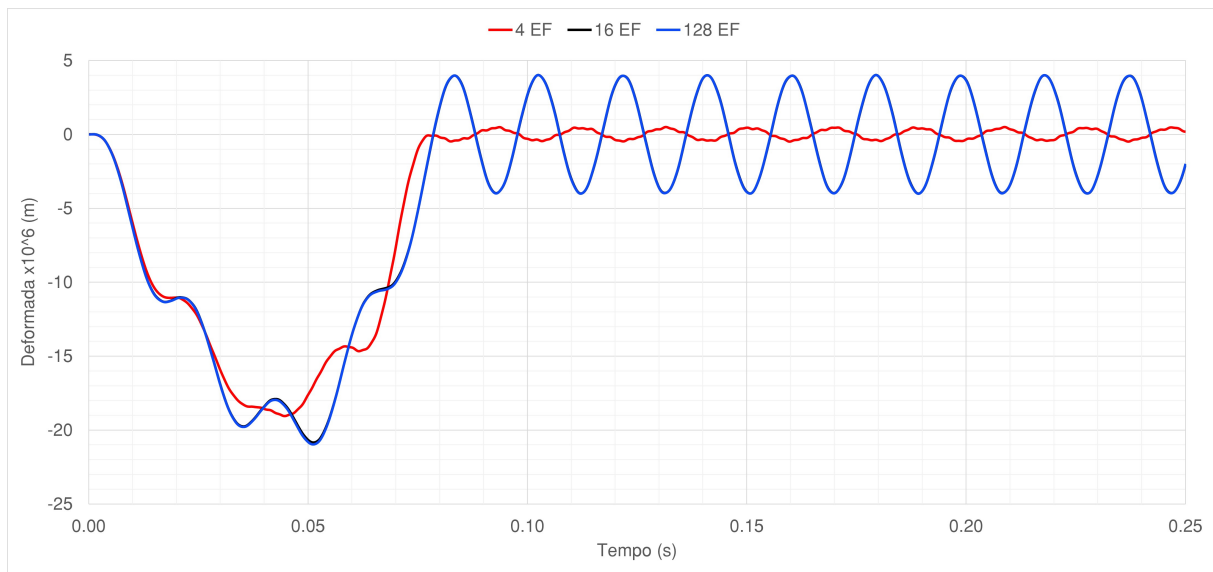


Figura 6.23 Deformada obtida a meio-vão para a viga de comportamento mecânico heterogéneo não-amortecida - Soluções de EF

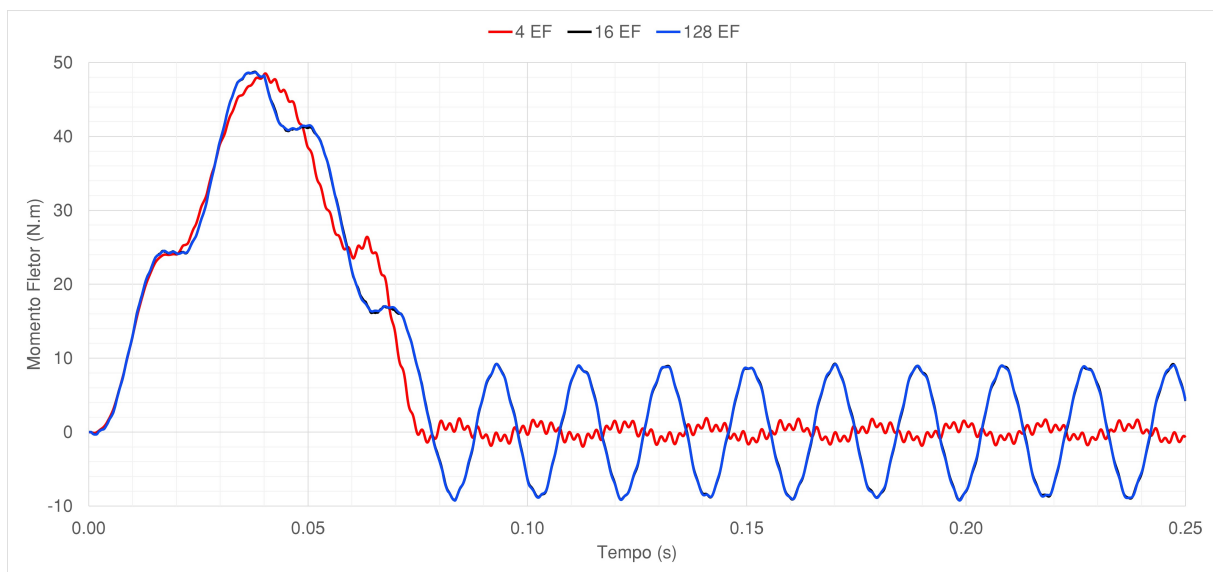


Figura 6.24 Momento fletor obtido a meio-vão para a viga de comportamento mecânico heterogéneo não-amortecida - Soluções de EF

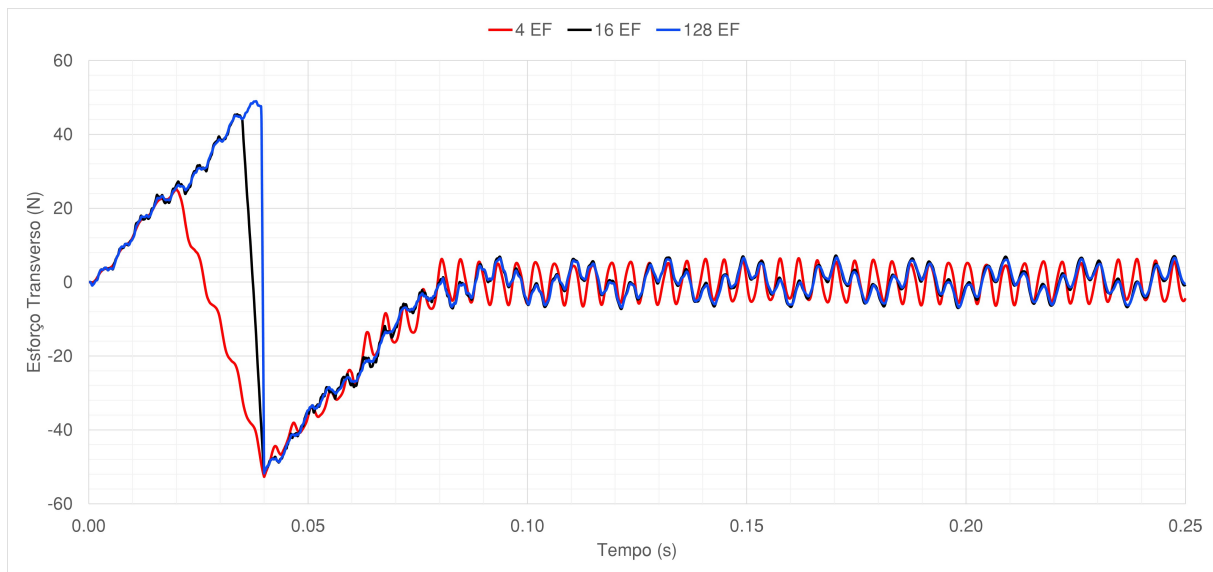


Figura 6.25 Esforço transverso obtido a meio-vão para a viga de comportamento mecânico heterogéneo não-amortecida - Soluções de EF

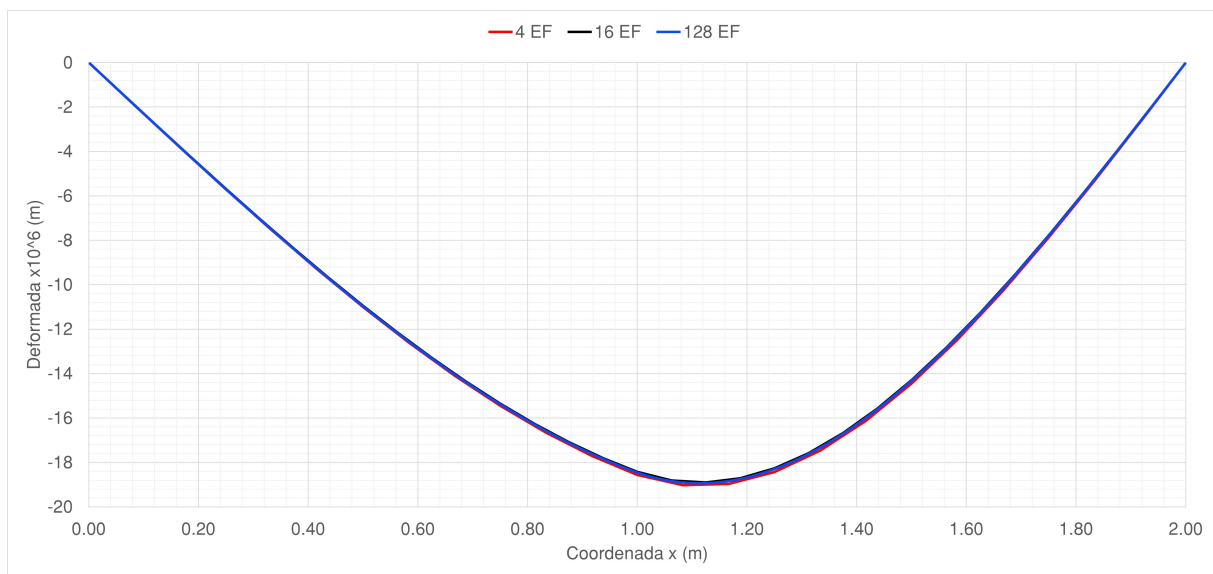


Figura 6.26 Deformada obtida para $t = 0.04s$ para a viga de comportamento mecânico heterogéneo não-amortecida - Soluções de EF

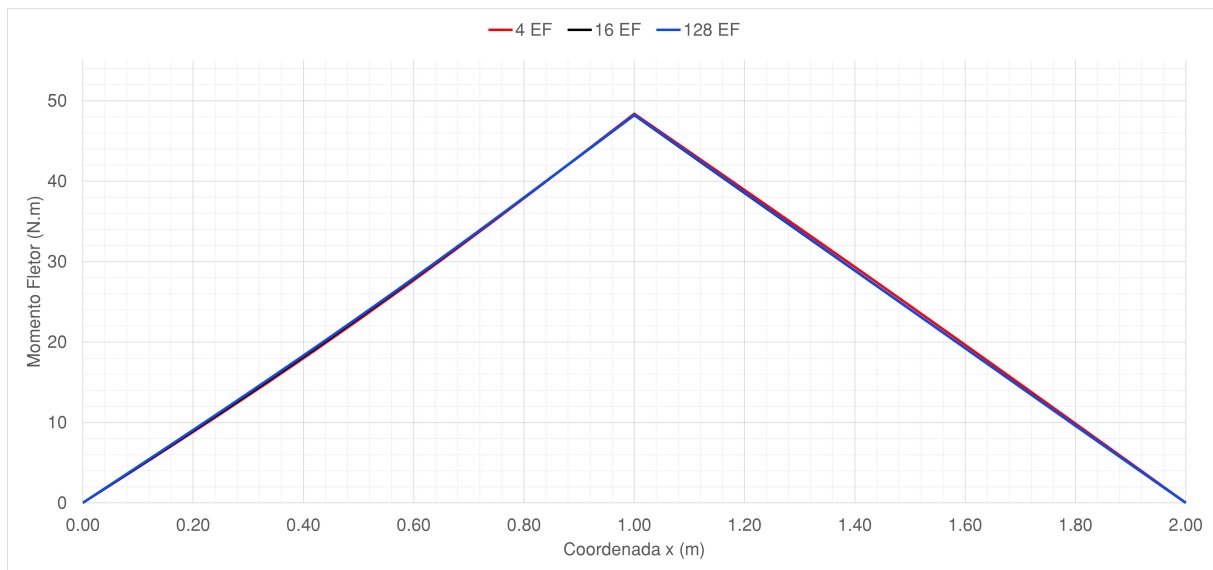


Figura 6.27 Momento fletor obtido para $t = 0.04s$ para a viga de comportamento mecânico heterogêneo não-amortecida - Soluções de EF

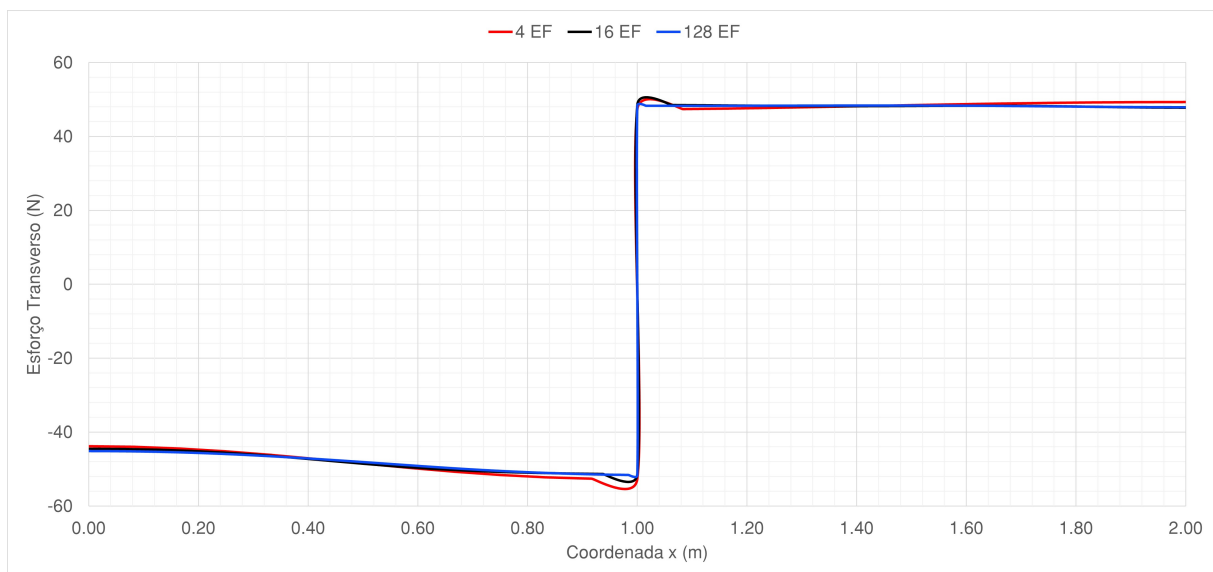


Figura 6.28 Esforço transverso obtido para $t = 0.04s$ para a viga de comportamento mecânico heterogêneo não-amortecida - Soluções de EF

Nesta situação, constata-se igualmente que as soluções obtidas, no domínio do tempo, pela malha com 4 elementos finitos diferem significativamente das soluções obtidas para malhas mais refinadas.

Em relação às soluções obtidas para a coordenada x no instante $t = 0.04s$, observa-se também que os resultados convergem rapidamente.

As soluções obtidas para este modelo revelam maior fragilidade no trecho que tem características de uma Liga de Alumínio, pois é menos rígido. Esta situação é visível nas Figuras 6.23 e 6.26, onde a deformada atinge valores máximos após o instante $t = 0.04s$, instante de

tempo a partir do qual a carga móvel passa a atuar a viga no troço de Alumínio, e após $x = 1m$, coordenada esta que corresponde ao início do troço de Alumínio.

6.5 Viga Sob a Ação de Duas Cargas Móveis

Por último, considera-se o caso de uma viga simplesmente apoiada sujeita a duas cargas concentradas móveis, conforme esquematizado na Figura 6.29, de velocidade constante, que se deslocam com a mesma velocidade e intensidade. As cargas mantêm, assim, a mesma distância entre si enquanto actuam a viga. Os dados referentes ao modelo em análise são os mesmos indicados na Tabela 6.1.

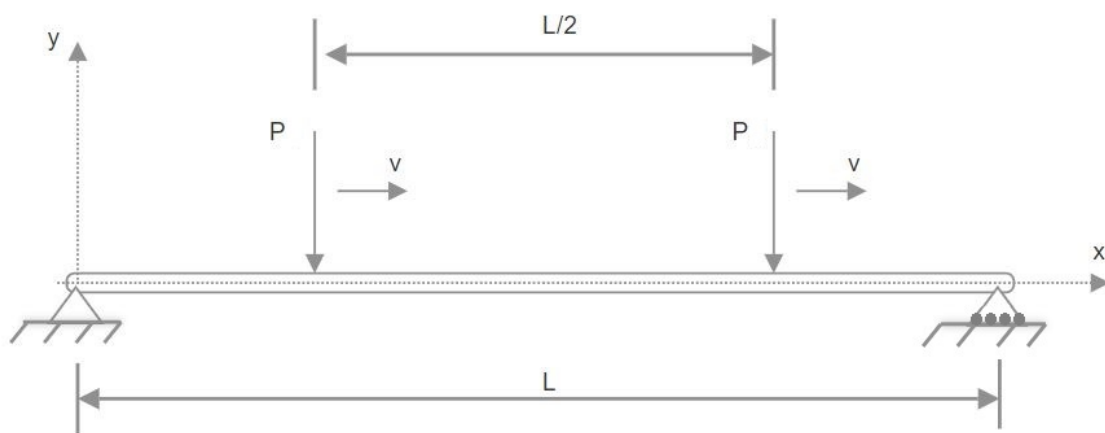


Figura 6.29 Viga sob a ação de duas cargas móveis

Nas Figuras 6.30, 6.31 e 6.32 apresentam-se as soluções para a deformada, momento fletor e esforço transversal no domínio do tempo t , e nas Figuras 6.33, 6.34 e 6.35, os resultados das mesmas variáveis no domínio da coordenada x :

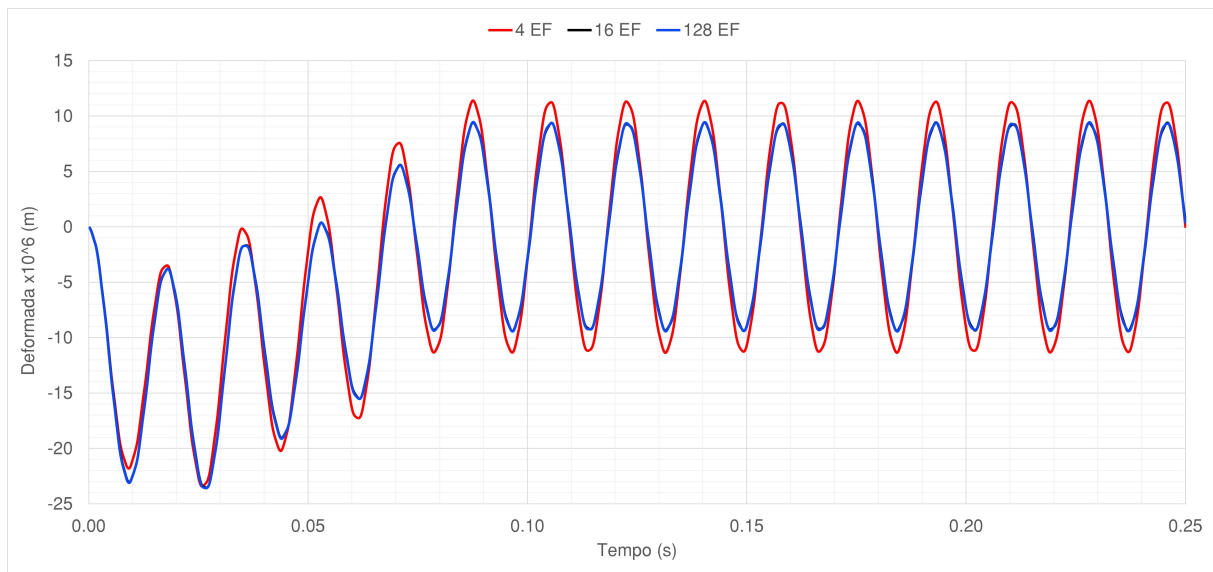


Figura 6.30 Deformada obtida a meio-vão para a viga sob a ação de duas cargas móveis não-amortecida - Soluções de EF

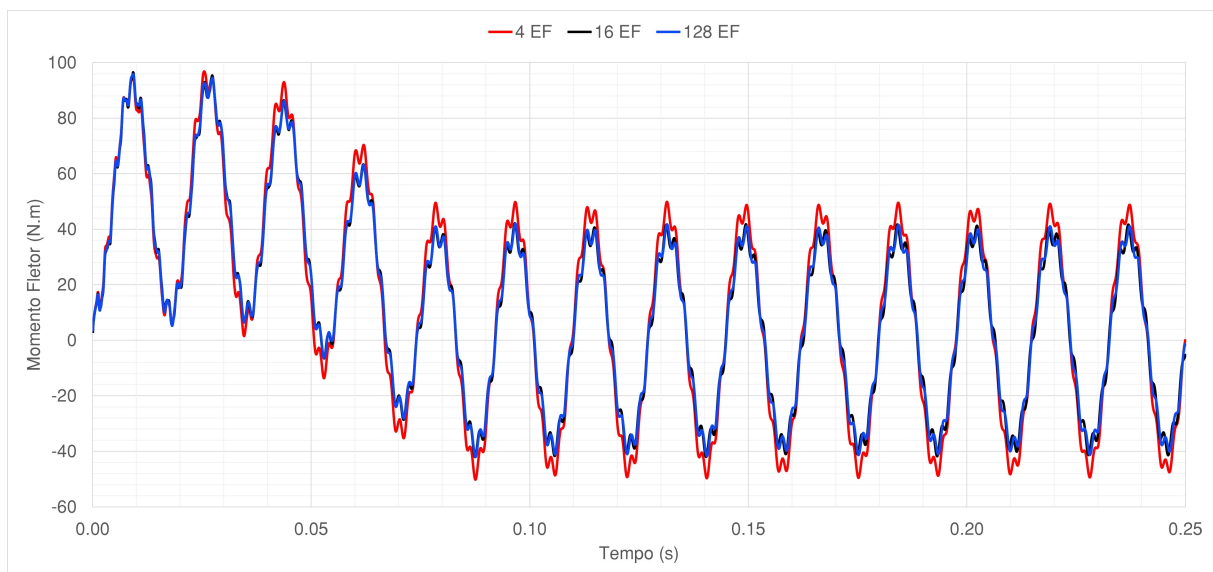


Figura 6.31 Momento fletor obtido a meio-vão para a viga sob a ação de duas cargas móveis não-amortecida - Soluções de EF

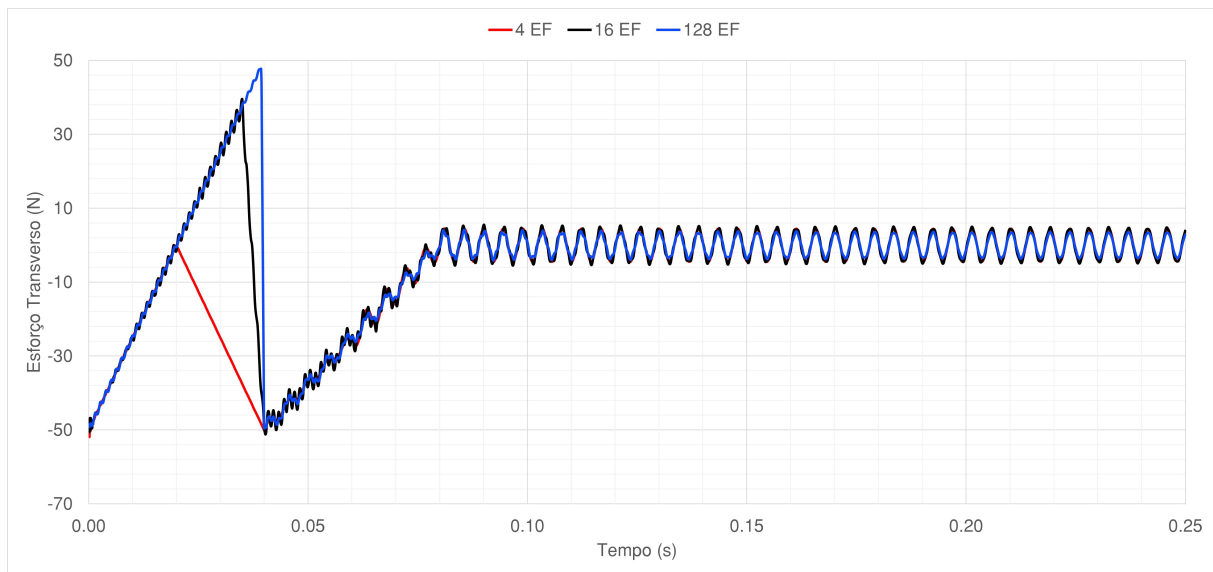


Figura 6.32 Esforço transverso obtido a meio-vão para a viga sob a ação de duas cargas móveis não-amortecida - Soluções de EF

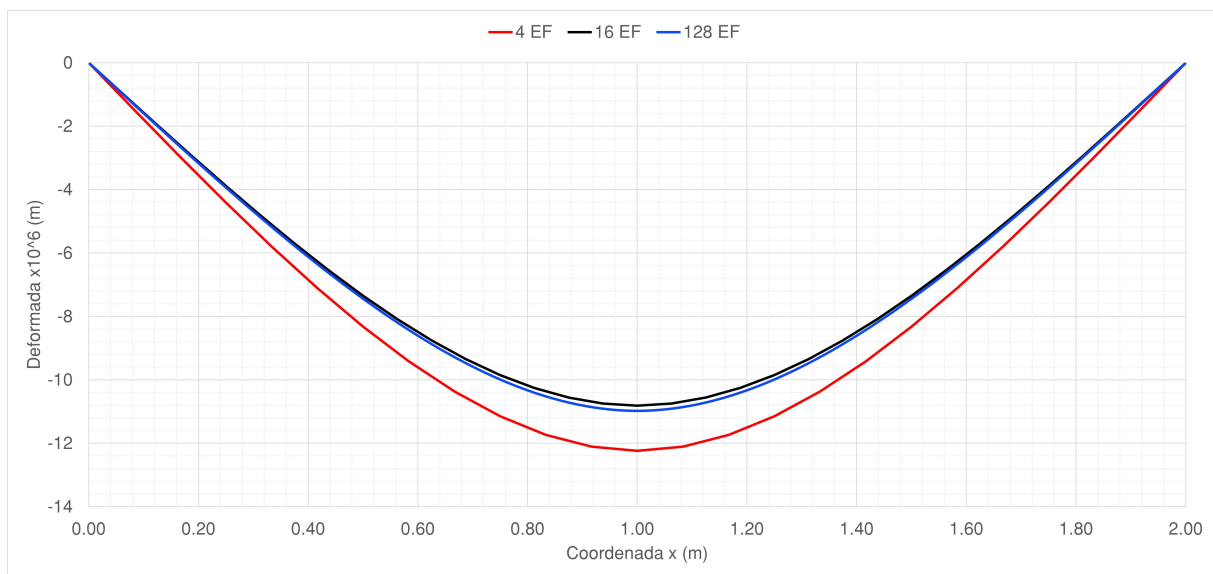


Figura 6.33 Deformada obtida para $t = 0.04s$ para a viga sob a ação de duas cargas móveis não-amortecida - Soluções de EF

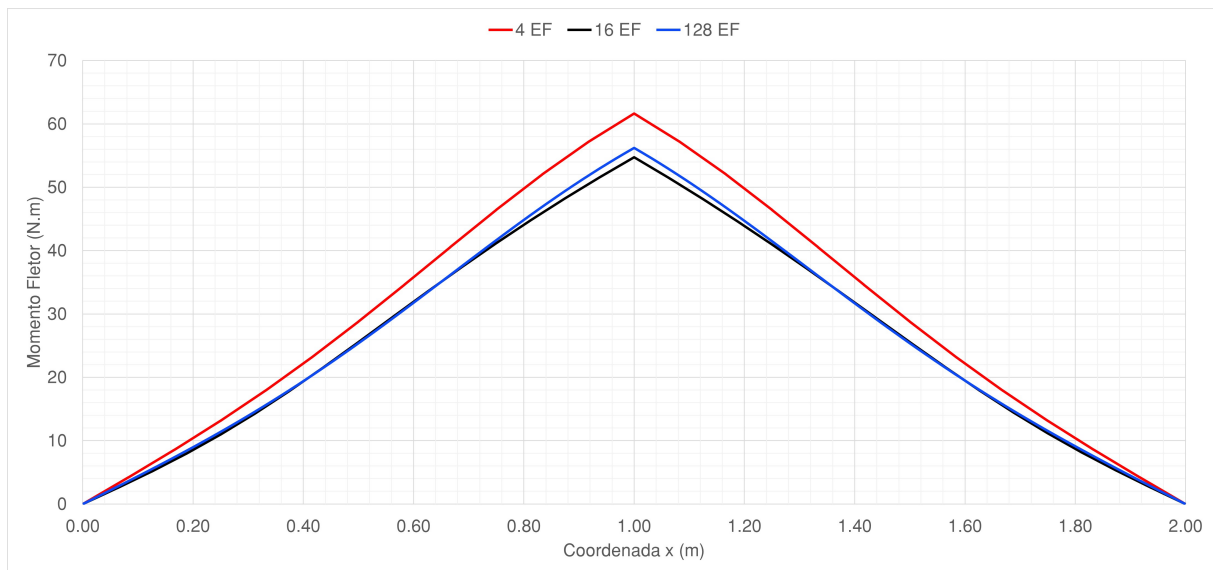


Figura 6.34 Momento fletor obtido para $t = 0.04s$ para a viga sob a ação de duas cargas móveis não-amortecida - Soluções de EF

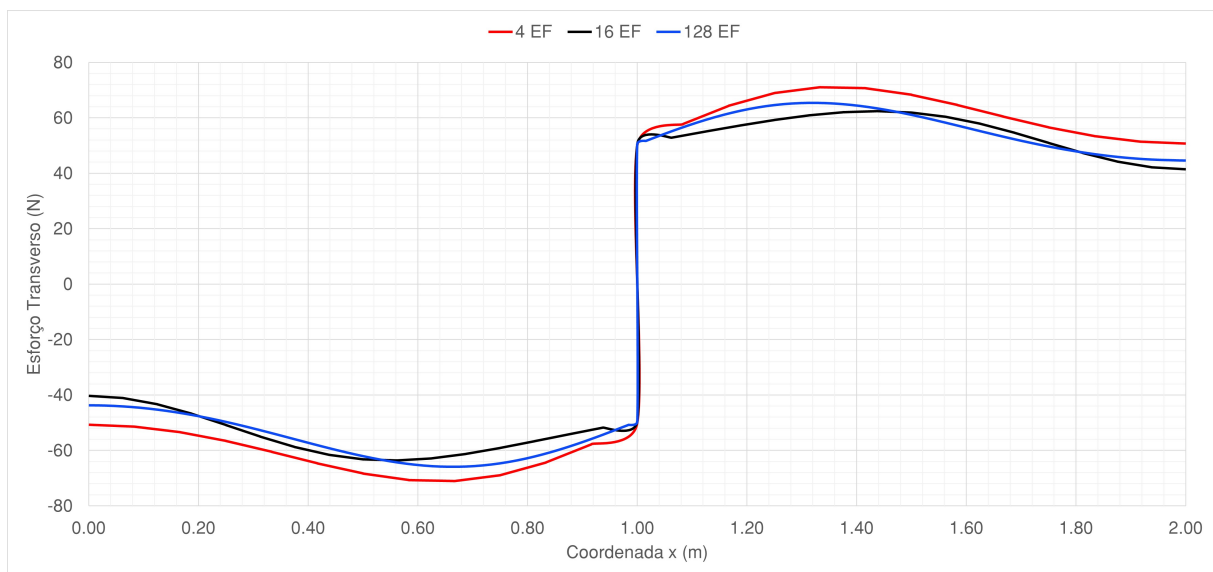


Figura 6.35 Esforço transversal obtido para $t = 0.04s$ para a viga sob a ação de duas cargas móveis não-amortecida - Soluções de EF

Assim como nos casos de estudo anteriores, é igualmente importante aumentar o número de elementos finitos na representação das soluções no domínio do tempo, ou seja, a meio-vão. Verifica-se também uma diferença significativa entre as soluções apresentadas pela malha de 4 elementos finitos e as soluções apresentadas pelas malhas mais refinadas.

Contrariamente aos casos de estudo anteriores, as soluções obtidas no domínio da coordenada x , ou seja, para $t = 0.04s$, demonstram que a malha menos refinada, ou seja, a malha de 4 elementos finitos, apresenta soluções relativamente diferentes das outras malhas, isto para a deformada, momento fletor e esforço transversal.

Analisando a Figura 6.30 é evidente que este modelo atinge vários picos de deformada máximos. Esta situação deve-se ao facto de haver uma segunda carga móvel a atuar a viga. No caso do momento fletor (Figura 6.31), a situação é semelhante à deformada, ou seja, atinge vários picos, à medida que as duas cargas móveis equidistantes ($1m$) atuam a viga. No caso das Figuras 6.33, 6.34 e 6.35 é perceptível a descontinuidade a meio-vão da viga, ou seja, em $x = 1m$, onde a carga móvel adicionada ao modelo está neste exato momento a deixar de atuar a viga, estando a passar aproximadamente numa das extremidades da mesma, ou seja, em $x = 2m$, enquanto a outra carga móvel está a passar aproximadamente no ponto médio da viga, ou seja, em $x = 1m$. Deste modo, o momento fletor atinge um valor máximo em $x = 1m$, como se poderá verificar na Figura 6.34.

6.6 Análise/Comparação dos Resultados

Nesta secção, para efeitos de comparação dos resultados obtidos para os vários casos de estudo, adotaram-se as soluções obtidas para a malha de 128 elementos finitos.

Nas Figuras 6.36, 6.37 e 6.38 apresentam-se as soluções para a deformada, momento fletor e esforço transversal, respetivamente, obtidas para $x = \frac{L}{2}$.

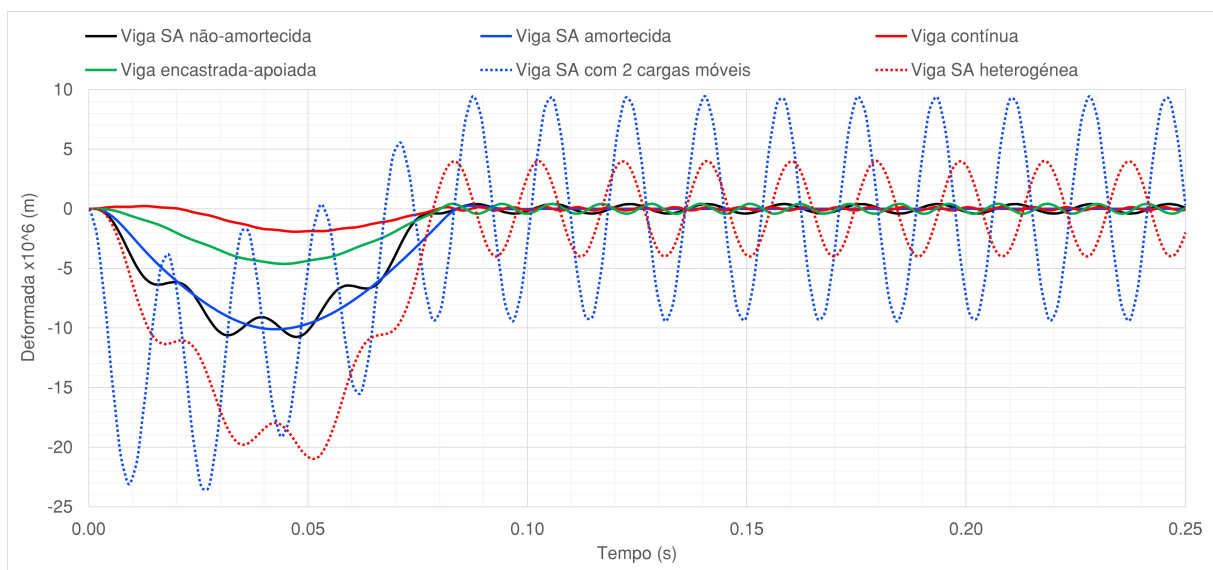


Figura 6.36 Deformada obtida a meio-vão -
Análise/Comparação das soluções de EF

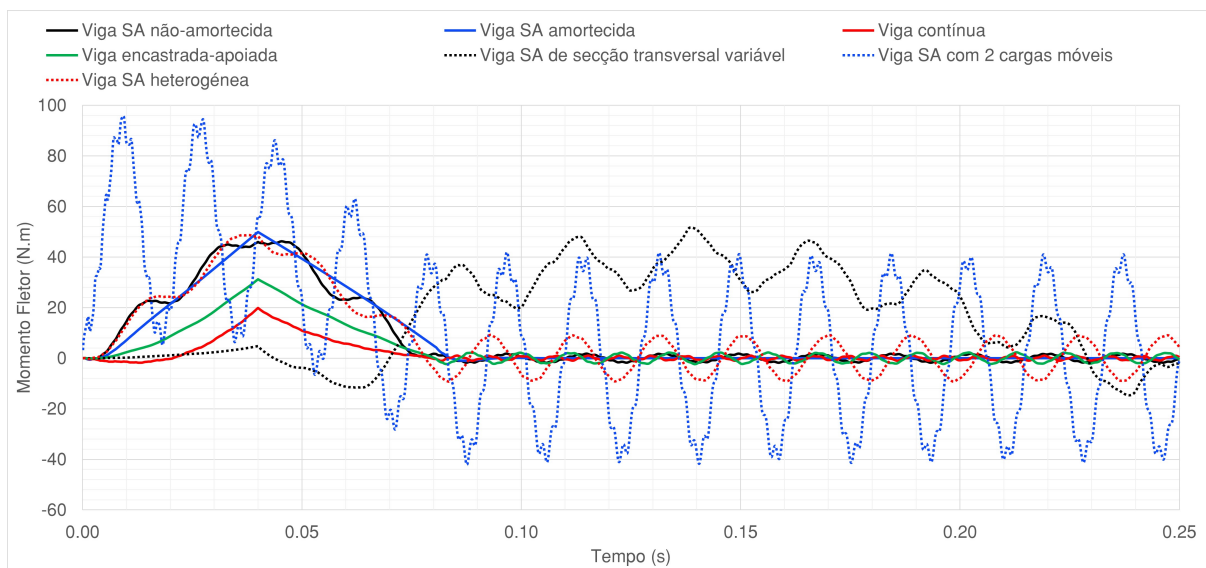


Figura 6.37 Momento fletor obtido a meio-vão -
Análise/Comparação das soluções de EF

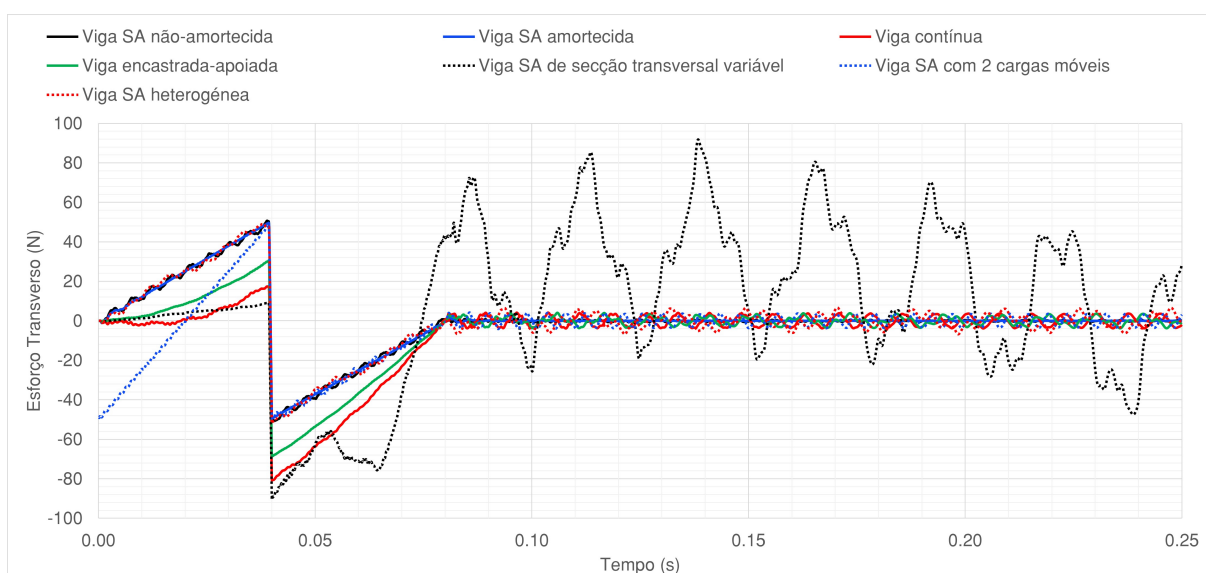


Figura 6.38 Esforço transverso obtido a meio-vão -
Análise/Comparação das soluções de EF

Verifica-se que o modelo de viga simplesmente apoiada com secção transversal variável por troços apresenta valores de deformada muito elevados comparativamente com os restantes casos de estudo, isto porque houve uma redução significativa das dimensões das secções transversais do modelo de viga simplesmente apoiada com secção transversal variável relativamente às secções transversais dos restantes modelos estudados, tal como se poderá verificar analisando as Tabelas 6.1, 6.2 e 6.3. Desta forma, optou-se por não se apresentar a solução da deformada para esse caso. A deformada máxima em termos absolutos, é da ordem dos 40mm (Figura 6.16), sendo, por exemplo, para o caso da viga simplesmente apoiada sem amortecimento da ordem dos $11\mu\text{m}$ (Figura 5.2). Verifica-se também que o modelo

de viga simplesmente apoiada amortecida, é o que tende mais rapidamente para zero. Isto, porque depois da carga móvel deixar de atuar a viga, ou seja, depois do instante $t = 0.08s$, a viga continua a vibrar, sendo que neste modelo esta vibração é menos acentuada derivado ao facto de ter sido considerado o amortecimento.

Em relação ao momento fletor, é possível verificar que o modelo de viga simplesmente apoiada com duas cargas móveis é o que apresenta valores mais elevados. A adição de mais uma carga móvel no modelo, tem um impacto muito grande no comportamento dinâmico da viga. Desta forma, o comportamento da deformada para este modelo é o que apresenta valores mais elevados, em módulo, quando comparados aos obtidos para os outros casos.

O gráfico do esforço transversal para os vários modelos, apresenta maiores valores para $t = 0.04s$, aproximadamente, instante este em que a carga móvel passa em $x = \frac{L}{2}$, o que demonstra que os valores máximos, em módulo, estão mais próximos do meio-vão da viga. Como seria de esperar, mesmo após $t = 0.08s$, o que corresponde ao instante de tempo a partir do qual a carga deixa de atuar a viga, a viga mantém a sua resposta oscilatória. No caso do modelo de viga simplesmente apoiada de secção transversal variável, esta situação acentua-se, atingindo valores de esforço transversal próximos do valor da intensidade da carga móvel, ultrapassando os valores atingidos no período de tempo em que a carga móvel atua a viga.

Nas Figuras 6.39, 6.40 e 6.41 apresentam-se as soluções para a deformada, momento fletor e esforço transversal, respetivamente, obtidas para $t = 0.04s$.

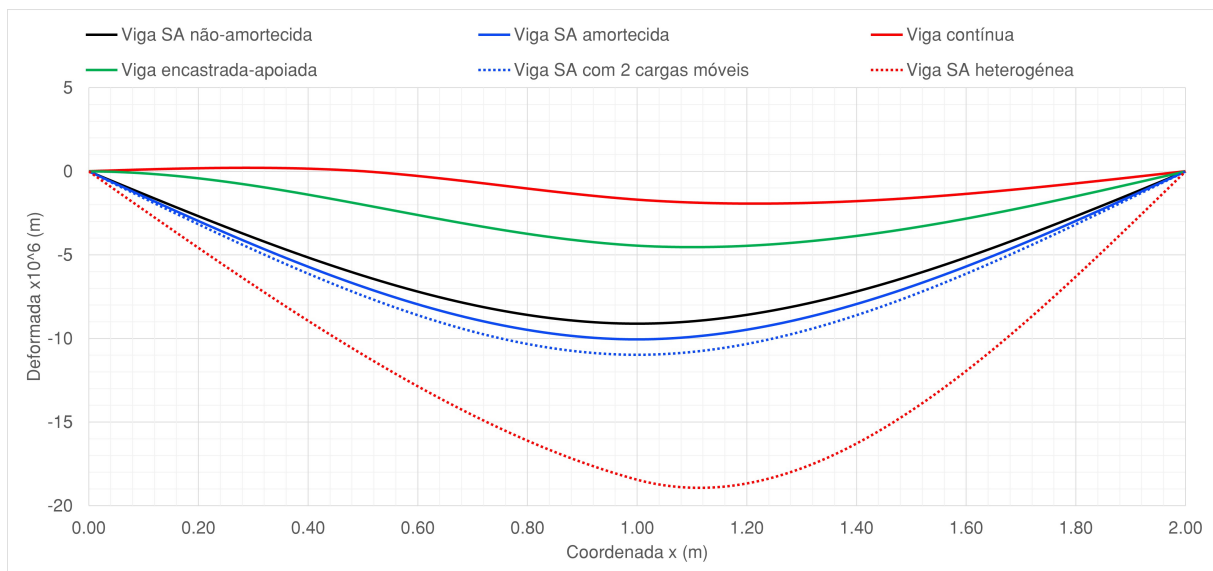


Figura 6.39 Deformada obtida para $t = 0.04s$ -
Análise/Comparação das soluções de EF

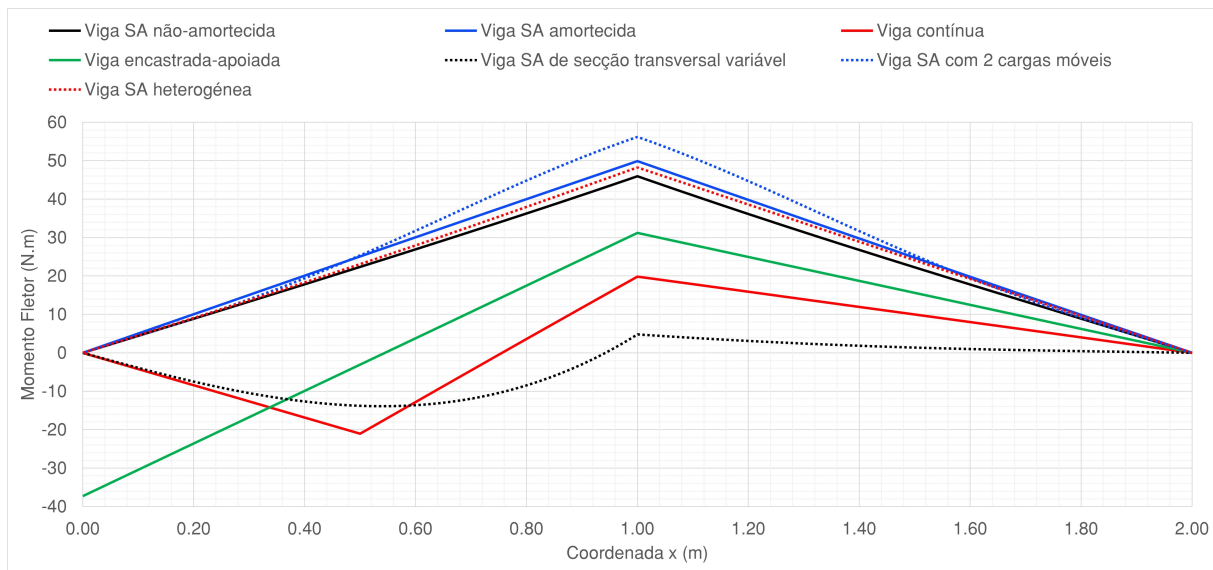


Figura 6.40 Momento fletor obtido para $t = 0.04s$ -
Análise/Comparação das soluções de EF

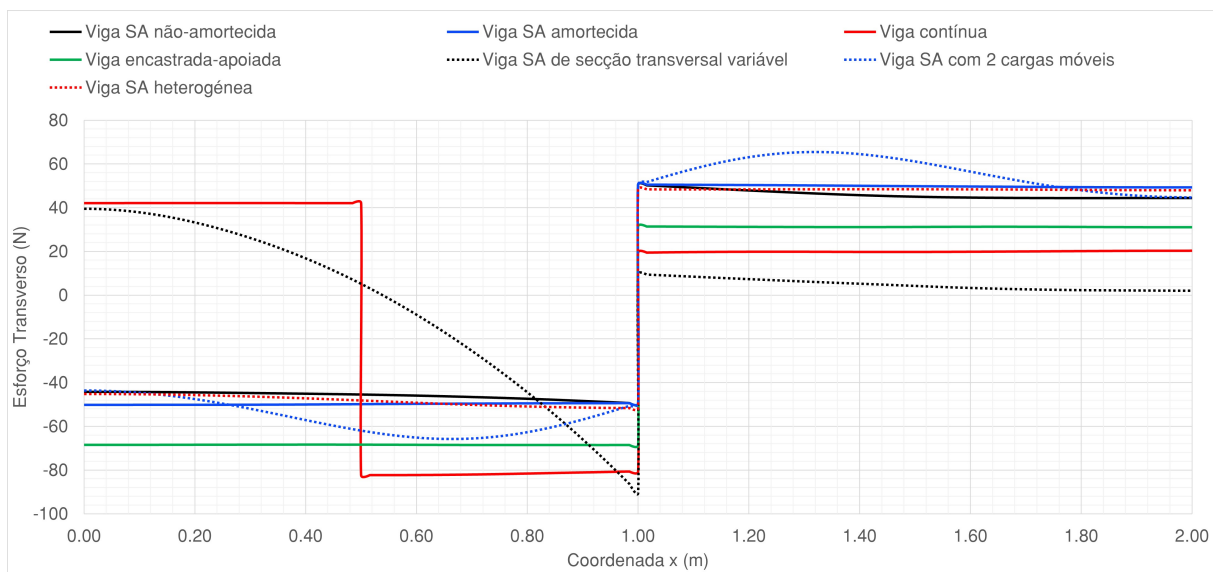


Figura 6.41 Esforço transverso obtido para $t = 0.04s$ -
Análise/Comparação das soluções de EF

Na análise do comportamento da viga, para os diferentes cenários estudados e fixando o tempo em $t = 0.04s$, notou-se que a maior deformada, em módulo, mais uma vez, é apresentada no modelo de viga simplesmente apoiada de secção transversal variável, a ultrapassar os $4mm$ (Figura 6.19), como é possível verificar no subcapítulo 6.3. Deste modo, sendo estes resultados muito superiores aos resultados apresentados pelos outros modelos numéricos estudados, optou-se por retirar os mesmos do gráfico da deformada (Figura 6.39) nesta análise e comparação dos resultados, de forma a ser simples e visível a observação dos resultados dos diferentes cenários dos casos de estudo.

As alterações efetuadas nos casos de estudo, tiveram bastante impacto no comporta-

mento da viga no que diz respeito à sua deformação. Na Figura 6.3 é possível verificar que o modelo numérico que apresenta uma deformada, em módulo, maior é o modelo numérico onde o material da viga é heterogéneo, mais concretamente, no troço em que o material apresenta as características de uma Liga de Alumínio (características estas referidas no subcapítulo 6.4). Submetendo a viga a estas características, a viga apresenta uma deformação superior quando comparada com os restantes modelos, sobretudo, com o modelo de viga simplesmente apoiada não-amortecida. Em contrapartida, os modelos que apresentam menor deformação quando comparados com os restantes, são os modelos: viga encastrada-apoiada e viga contínua. No caso do modelo de viga encastrada-apoiada, com a substituição do apoio simples por um encastramento, resulta numa condição de maior rigidez para viga, suportando não apenas esforços verticais, mas também momentos fletores, ao contrário de um apoio simples. Relativamente ao modelo de viga contínua, a adição de mais um apoio simples, faz com que a viga apresente menores deformadas, relativamente aos outros modelos, pois passa a ter maior rigidez de flexão e, conseqüentemente, menor deformação.

Em relação ao momento fletor em função da coordenada x (Figura 6.40), os resultados apresentados demonstram, mais uma vez, que o modelo de viga simplesmente apoiada com duas cargas móveis revela uma maior amplitude do mesmo, atingindo valores superiores relativamente aos outros modelos, e sendo muito próximo de $x = \frac{L}{2}$, ou seja, a meio-vão da viga. Também é verificável que o único modelo que apresenta momento fletor diferente de 0 na primeira extremidade é o modelo de viga encastrada-apoiada, derivado ao facto de se ter substituído o apoio simples por um encastramento, nessa mesma extremidade.

Relativamente ao esforço transversal em função da coordenada x (Figura 6.41), é possível verificar a descontinuidade do modelo de viga contínua na coordenada $x = \frac{L}{4}$, sendo esta a posição do apoio simples adicionado ao modelo. Também é possível verificar que a amplitude de valores do esforço transversal nos modelos estudados é praticamente igual ao valor da carga móvel que atua a viga ($P = 100N$).

De forma a analisar a implementação de cada caso de estudo no programa de simulação numérica, de seguida encontra-se as Tabelas 6.4, 6.5, 6.6, 6.7, 6.8 e 6.9, que correspondem aos valores máximos da deformada, momento fletor e esforço transversal, para as duas situações, de a meio-vão, $x = \frac{L}{2}$, e $t = 0.04s$. Serão também incluídos os modelos de viga simplesmente apoiada não-amortecida e amortecida.

Tabela 6.4 Valores de deformada máximos, em módulo, a meio-vão
($\times 10^6$)

	2 EF	4 EF	8 EF	16 EF	32 EF	64 EF	128 EF
Viga SA não-amortecida	9.397m	9.559m	8.946m	9.080m	9.104m	9.110m	9.112m
Viga SA amortecida	9.849m	9.901m	9.986m	10.068m	10.097m	10.102m	10.104m
Viga encastrada-apoiada	4.462m	4.795m	4.850m	4.577m	4.615m	4.623m	4.625m
Viga contínua	9.849m	1.793m	1.905m	1.930m	1.931m	1.927m	1.927m
Viga SA de secção transversal variável	32364m	38504m	40036m	40440m	40531m	40556m	40563m
Viga SA heterogénea	18.754m	19.053m	20.374m	20.847m	20.947m	20.971m	20.978m
Viga SA com 2 cargas móveis	20.067m	23.446m	23.285m	23.528m	23.579m	23.577m	23.580m

Tabela 6.5 Valores de deformada máximos, em módulo, para
 $t = 0.04s$ ($\times 10^6$)

	2 EF	4 EF	8 EF	16 EF	32 EF	64 EF	128 EF
Viga SA não-amortecida	10.484m	10.745m	10.618m	10.716m	10.741m	10.747m	10.749m
Viga SA amortecida	9.304m	9.559m	9.898m	10.013m	10.039m	10.044m	10.046m
Viga encastrada-apoiada	4.407m	4.623m	4.636m	4.539m	4.534m	4.536m	4.536m
Viga contínua	9.304m	1.996m	1.959m	1.923m	1.930m	1.930m	1.933m
Viga SA de secção transversal variável	3964.1m	3977.2m	3975.8m	3971.7m	3972.0m	3979.6m	3979.6m
Viga SA heterogénea	18.993m	19.028m	18.730m	18.899m	18.924m	18.930m	18.936m
Viga SA com 2 cargas móveis	11.919m	12.242m	10.782m	10.816m	10.846m	10.974m	10.976m

Tabela 6.6 Valores do momento fletor máximos a meio-vão

	2 EF	4 EF	8 EF	16 EF	32 EF	64 EF	128 EF
Viga SA não-amortecida	47.239Nm	47.974Nm	45.442Nm	45.759Nm	45.878Nm	45.939Nm	45.953Nm
Viga SA amortecida	47.239Nm	48.301Nm	49.310Nm	49.746Nm	49.866Nm	49.861Nm	49.874Nm
Viga encastrada-apoiada	30.897Nm	32.048Nm	31.929Nm	31.079Nm	31.215Nm	31.192Nm	31.204Nm
Viga contínua	48.357Nm	20.341Nm	20.118Nm	20.005Nm	20.063Nm	19.842Nm	19.851Nm
Viga SA de secção transversal variável	31.956Nm	47.066Nm	48.639Nm	52.711Nm	51.791Nm	51.680Nm	51.671Nm
Viga SA heterogénea	48.512Nm	48.520Nm	48.962Nm	48.763Nm	48.732Nm	48.681Nm	48.683Nm
Viga SA com 2 cargas móveis	94.094Nm	96.755Nm	94.630Nm	96.567Nm	96.784Nm	95.814Nm	95.814Nm

Tabela 6.7 Valores do momento fletor máximos para $t = 0.04s$

	2 EF	4 EF	8 EF	16 EF	32 EF	64 EF	128 EF
Viga SA não-amortecida	50.803Nm	50.314Nm	46.588Nm	46.212Nm	46.314Nm	46.214Nm	46.212Nm
Viga SA amortecida	46.829Nm	48.081Nm	49.247Nm	49.740Nm	49.866Nm	49.861Nm	49.874Nm
Viga encastrada-apoiada	36.206Nm	37.742Nm	31.385Nm	31.046Nm	31.215Nm	31.192Nm	31.204Nm
Viga contínua	46.829Nm	20.169Nm	20.118Nm	20.005Nm	20.063Nm	19.842Nm	19.851Nm
Viga SA de secção transversal variável	4.771Nm	4.769Nm	4.802Nm	4.777Nm	4.785Nm	4.792Nm	4.793Nm
Viga SA heterogénea	48.434Nm	48.393Nm	47.770Nm	48.209Nm	48.284Nm	48.248Nm	48.256Nm
Viga SA com 2 cargas móveis	60.182Nm	61.647Nm	55.701Nm	54.749Nm	54.899Nm	56.179Nm	56.192Nm

Tabela 6.8 Valores do esforço transversal máximos a meio-vão

	2 EF	4 EF	8 EF	16 EF	32 EF	64 EF	128 EF
Viga SA não-amortecida	50.000N	50.223N	50.488N	50.557N	50.533N	50.977N	50.384N
Viga SA amortecida	49.999N	49.659N	50.691N	50.814N	49.291N	49.349N	49.613N
Viga encastrada-apoiada	32.069N	31.886N	32.440N	31.628N	31.229N	31.439N	31.374N
Viga contínua	49.999N	44.562N	19.587N	74.147N	76.625N	78.889N	80.007N
Viga SA de secção transversal variável	29.438N	72.392N	84.720N	102.550N	92.091N	92.078N	91.842N
Viga SA heterogénea	49.408N	49.938N	49.125N	49.196N	49.362N	48.985N	49.001N
Viga SA com 2 cargas móveis	52.732N	51.849N	51.655N	51.581N	51.640N	51.829N	50.460N

Tabela 6.9 Valores do esforço transversal máximos para $t = 0.04s$

	2 EF	4 EF	8 EF	16 EF	32 EF	64 EF	128 EF
Viga SA não-amortecida	50.000N	52.131N	51.927N	51.965N	51.387N	51.266N	50.696N
Viga SA amortecida	49.999N	50.340N	50.691N	50.814N	50.707N	50.651N	50.528N
Viga encastrada-apoiada	32.069N	33.985N	35.543N	32.404N	31.322N	31.439N	31.381N
Viga contínua	49.999N	49.659N	49.389N	50.114N	50.086N	50.165N	50.214N
Viga SA de secção transversal variável	67.930N	70.410N	70.910N	70.238N	68.774N	68.664N	68.633N
Viga SA heterogénea	49.408N	49.191N	47.902N	48.547N	48.691N	48.396N	48.393N
Viga SA com 2 cargas móveis	69.315N	71.078N	65.836N	62.434N	62.637N	64.900N	65.397N

Os valores apresentados nas tabelas acima referidas, evidenciam a convergência dos mesmos à medida que se aumenta o número de elementos finitos, de acordo com 2^n . Em alguns casos, utilizando dois elementos finitos nas análises, os valores são significativamente diferentes dos valores para os quais a mesma análise tem tendência a convergir, como por exemplo, o momento fletor máximo para a situação de $t = 0.04s$ do modelo de viga contínua.

Em relação aos valores da deformada máximos, para ambos os casos, é notório que o modelo mais solicitado é o modelo de viga simplesmente apoiada de secção transversal variável, onde as secções transversais de ambos os troços são significativamente menores comparativamente às secções transversais dos outros modelos, resultando num aumento significativo da deformada para este modelo em específico. Contrariamente, o modelo de viga encastrada-apoiada é o que apresenta menores valores de deformada para as duas situações, a meio-vão e para $t = 0.04s$.

No caso dos valores do momentos fletor máximos, para ambas as situações, será possível verificar que o modelo que apresenta maiores valores é o modelo de viga simplesmente apoiada sob a ação de duas cargas móveis, principalmente a meio-vão. A adição de mais uma carga móvel a atuar a viga tem um impacto bastante significativo nos seus esforços internos, nomeadamente, no momento fletor. Por outro lado, o modelo de viga contínua, é o modelo que apresenta valores mais baixos, o que leva a concluir que adição de mais um apoio simples na posição $x = \frac{L}{4}$, reduz significativamente o momento fletor. Não havendo assim sobrecarga local ou excessiva em pontos específicos que possam causar maiores deformadas, como se concluiu no parágrafo anterior, sendo este o modelo que apresenta menores valores

de deformadas máximas.

Relativamente aos valores máximos do esforço transversal, o modelo de viga encastrada-apoiada apresenta menores valores comparativamente aos demais, para ambas as situações, resultado da substituição de um dos apoios simples por um encastramento. Desta forma, a viga passa a ter uma condição de apoio mais rígida, promovendo uma maior rigidez global. Em relação aos outros modelos, os valores máximos do esforço transversal não variam muito significativamente, à exceção do modelo de viga simplesmente apoiada de secção transversal variável e do modelo de viga simplesmente apoiada com duas cargas móveis, em que os valores tendem a ser superiores relativamente aos outros modelos, para ambas as situações. Este aumento do esforço transversal, no caso do modelo de viga simplesmente apoiada de secção transversal variável, deve-se ao facto, mais uma vez, de as secções transversais deste modelo serem significativamente menores comparativamente aos outros modelos, o que se traduz em menor rigidez da própria viga. No caso do modelo de viga simplesmente apoiada sob a ação de duas cargas móveis este aumento do esforço transversal deve-se, indiscutivelmente, ao facto de ter sido adicionada mais uma carga móvel ao modelo, aumentando assim os valores dos esforços internos da viga.

Nos casos de estudo analisados neste capítulo, em todos os cenários o problema numérico referido anteriormente, persistiu. Verificou-se as oscilações de valores nas soluções, mais uma vez, para a malha de 100 elementos finitos. Mesmo alterando as condições de fronteira, a geometria da estrutura, as propriedades mecânicas da mesma e, também, alterando as condições iniciais a que a viga estava sujeita, o problema numérico para esta malha em específico continuou a existir, havendo sempre oscilações de valores, ou seja, vales e picos nos gráficos dos resultados do comportamento dinâmico da viga.

Capítulo 7

Conclusões e Desenvolvimentos Futuros

7.1 Conclusões

Neste trabalho final de mestrado, foi realizado um estudo detalhado sobre a implementação computacional de modelos estruturais do tipo viga sujeitos a cargas móveis, utilizando o programa de simulação numérica ANSYS® Workbench™. O objetivo foi prever o comportamento mecânico das estruturas considerando análises dinâmicas do tipo transiente, onde a carga se move ao longo da viga em função do tempo. O modelo estrutural adotado baseia-se na teoria de vigas de Euler-Bernoulli, onde a deformação por corte é desprezada. Para o caso da viga simplesmente apoiada, foram implementadas as soluções analíticas disponíveis na literatura recorrendo ao Maple™, para as situações de viga não-amortecida e viga amortecida. A concordância entre ambas as abordagens valida o modelo numérico utilizado.

Diversas variações do modelo de viga simplesmente apoiada foram implementadas, utilizando o ANSYS® Workbench™, e onde as soluções analíticas não estão disponíveis, nomeadamente: viga contínua, viga encastrada-apoiada, viga simplesmente apoiada com variação geométrica da secção transversal, viga simplesmente apoiada de comportamento mecânico heterogéneo e viga simplesmente apoiada sob a ação de duas cargas móveis. A implementação destes modelos permitiu explorar cenários mais complexos e, de alguma forma, próximos de situações reais, proporcionando uma perspetiva mais abrangente sobre o comportamento dinâmico de vigas nas condições impostas em cada caso.

A análise numérica permitiu avaliar o impacto das várias variáveis dinâmicas sobre o comportamento estrutural das vigas. Fatores como as condições de fronteira, as características geométricas da viga e as propriedades materiais, influenciam diretamente as respostas dinâmicas, nomeadamente a deformada, o momento fletor e o esforço transversal. A compreensão desses efeitos é crucial para a otimização da conceção, do funcionamento e da manutenção da estrutura em análise. Analisando o impacto das diferentes variáveis dinâmicas, permitirá otimizar a conceção das estruturas, principalmente na escolha adequada da geometria e das propriedades dos materiais, que, por exemplo, poderão reduzir deformações indesejadas e

aumentar a durabilidade da estrutura em causa, o que resultará em projetos mais eficientes e económicos.

Espera-se que o presente estudo possa contribuir para a análise e projeto de estruturas do tipo viga sujeitas à ação de cargas móveis em regime dinâmico, através do desenvolvimento dos modelos numéricos e da sua validação, por intermédio das soluções analíticas existentes. Uma vez que, a validação dos modelos numéricos reforça a confiança no uso de ferramentas de simulação numérica para a previsão do comportamento dinâmico de estruturas.

Em síntese, o desenvolvimento deste trabalho proporciona conhecimentos valiosos sobre o comportamento dinâmico de estruturas do tipo viga sob a ação de cargas móveis, destacando-se o potencial da modelação computacional na previsão desse comportamento, sendo que, os modelos numéricos implementados neste estudo constituem uma base sólida para a análise do comportamento de estruturas mais complexas, assegurando uma avaliação eficaz e confiável para cenários estruturais diversificados.

7.2 Desenvolvimentos Futuros

Considerando os resultados obtidos neste trabalho, haverá uma base sólida para futuros desenvolvimentos na análise do comportamento dinâmico de vigas sujeitas a cargas móveis.

Através da implementação dos modelos estudados, considera-se relevante que os mesmos poderão vir a ser validados recorrendo a resultados experimentais, com o objetivo de aprofundar o conhecimento e, por conseguinte, a aplicabilidade prática desses mesmos modelos.

Neste trabalho foram estudadas diversas variações do modelo de viga simplesmente apoiada, contudo, outros cenários poderão ser considerados recorrendo também à modelação computacional:

1. Considerar uma variação da velocidade, direção e intensidade da carga móvel que atua a viga;
2. No modelo de viga simplesmente apoiada de comportamento mecânico heterogéneo, considerar mais materiais, ou seja, mais troços com características mecânicas distintas ou considerar a viga como um material com gradiente funcional, de modo a ter, por exemplo, um módulo de elasticidade variável ao longo da espessura da viga;
3. No modelo de viga simplesmente apoiada com variação geométrica da secção transversal, considerar uma variação da secção transversal dependente da coordenada x ou implementar mais troços na viga, de modo a ser possível ter várias secções transversais com características distintas;
4. Considerar o efeito do amortecimento nos vários cenários estudados e analisar as respostas dinâmicas da viga;
5. Implementar diferentes modelos de amortecimento nos vários cenários, permitindo avaliar o comportamento dinâmico da viga.

Relativamente aos programas de simulação numérica, considera-se também importante

o uso de outros programas de modo a ser possível comparar as soluções obtidas.

Bibliografia

- ABAQUS™ (2024). ABAQUS™. [Programa Informático] <https://www.3ds.com/>.
- Ahmed, A. M. and Rifai, A. M. (2021). Euler-Bernoulli and Timoshenko Beam Theories Analytical and Numerical Comprehensive Revision. *European Journal of Engineering and Technology Research*, 6(7):20–32.
- ANSYS® (2024). ANSYS® Inc. (Versão 2024 R2.1) [Programa Informático] <https://www.ansys.com/>.
- Azevedo, Á. (2003). *Método dos Elementos Finitos - 1ª Edição*. Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Portugal.
- Azevedo, D. (2015). *Análise Estrutural com ANSYS Workbench*. Universidade de Mogi das Cruzes.
- Becker, E., Carey, G., and Oden, J. (1981). *Finite Element: An Introduction Vol I*. Prentice Hall.
- Chopra, A. (2007). *Dynamics of Structures*. Pearson Education India.
- Deka, S., Babu, P., and Rahang, M. (2018). Transient dynamic analysis of a cantilever rod with axial impulse loading using finite element method. In *MATEC Web of Conferences*, volume 202. EDP Sciences.
- Euler, L. (1765). *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum*. AE Roser.
- Fryba, L. (1999). *Vibration of solids and structures under moving loads*. Thomas Telford.
- Hügül, S. (2005). Vibration analysis of systems subjected to moving loads by using the finite element method. *Fen Bilimleri Enstitüsü*.
- I-DEAS® (1998). I-DEAS®. [Programa Informático] <https://www.siemens.com/global/en.html>.
- Lapa, J. (1987). *Análise dinâmica linear e não-linear de estruturas*. Tese de Mestrado, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.
- Lee, S.-Y. and Yhim, S.-S. (2005). Dynamic behavior of long-span box girder bridges subjected to moving loads: Numerical analysis and experimental verification. *International Journal of Solids and Structures*, 42(18-19):5021–5035.
- LUSAS™ (1996-2000). LUSAS™. [Programa Informático] <https://www.lusas.com/>.

- Maple™ (2022). Maple™. (Versão 2022.2) [Programa Informático]. Maplesoft, uma divisão da Waterloo Maple Inc., Waterloo, Ontário. <https://www.maplesoft.com/>.
- Mardani, E. (2011). Analysis of a beam under moving loads. *International Journal of Engineering*, 24(3):227–236.
- MATLAB® (2024). MATLAB®. [Programa Informático] <https://www.mathworks.com/>.
- Megson, T. (2016). *Aircraft structures for engineering students*. Butterworth-Heinemann.
- Meiros, J. (2007). Análise dinâmica de estruturas por modelos de elementos finitos identificados experimentalmente. Tese de Mestrado, Universidade do Minho (Portugal).
- Migotto, D. (2011). Autofunções e frequências de vibração do modelo de viga Euler-Bernoulli para vigas não-clássicas. Tese de Mestrado, Universidade Federal de Santa Maria.
- Miranda, A. (2009). Análise dinâmica de estruturas com programas de cálculo automático. Tese de Mestrado, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.
- Mota, A. (2019). Modelação e otimização de estruturas sandwich com gradiente funcional e porosidades: uma abordagem científica e pedagógica. Tese de Mestrado, Instituto Superior de Engenharia de Lisboa.
- Neto, A., Mansur, W., and Ferreira, W. (2022). Spurious oscillations reduction in transient diffusion and wave propagation problems discretized with the finite element method. *Scientific Reports*, 12(1):18887.
- Newmark, N. (1959). A method of computation for structural dynamics. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 85(3):67–94.
- Olsson, M. (1991). On the fundamental moving load problem. *Journal of Sound and Vibration*, 145(2):299–307.
- Ouyang, H. (2011). Moving-load dynamic problems: A tutorial (with a brief overview). *Mechanical Systems and Signal Processing*, 25(6):2039–2060.
- Ramos, A., Amaral, L., Souza, P., Pinheiro, V., Neves, N., and Candido, D. (2018). Análise dinâmica do modelo de viga de Euler-Bernoulli via método das diferenças finitas. *Revista Eletrônica Debates em Educação Científica e Tecnológica*, 4(1):21–39.
- Rampinelli, B. (2018). Simulação numérica tridimensional de vigas em concreto armado pelo método dos elementos finitos. Trabalho para a obtenção do título de Bacharel, Universidade Federal de Santa Catarina.
- Ribeiro, R. (2018). *Dynamic analysis of a beam under moving loads*. Tese de Mestrado, Instituto Superior Técnico, Universidade de Lisboa.
- Rieker, J., Lin, Y.-H., and Trethewey, M. (1996). Discretization considerations in moving load finite element beam models. *Finite Elements in Analysis and Design*, 21(3):129–144.

- Roos, H. G., Stynes, M., and Tobiska, L. (2008). Finite Difference Methods. *Robust Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations: Convection-Diffusion-Reaction and Flow Problems*.
- Santos, H. (2024). A new finite element formulation for the dynamic analysis of beams under moving loads. *Computers & Structures*, 298:107347.
- Santos, V., Junior, C., Costa, D., and Souza, V. (2018). Análise dinâmica de uma viga sujeita a carga móvel. *Associação Brasileira de Engenharia e Ciências Mecânicas*.
- SAP2000® (2024). SAP2000®. [Programa Informático] <https://www.csiamerica.com/>.
- Siddiqui, S., Golnaraghi, M., and Heppler, G. (2000). Dynamics of a flexible beam carrying a moving mass using perturbation, numerical and time-frequency analysis techniques. *Journal of Sound and Vibration*, 229(5):1023–1055.
- SOLIDWORKS® (2024). SOLIDWORKS®. [Programa Informático] <https://www.solidworks.com/>.
- Sánchez, C. (2001). Estudo de impacto usando elementos finitos e análise não linear. Tese de Mestrado, Universidade de São Paulo.
- Timoshenko, S. (1922). Cv. On the forced vibrations of bridges. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 43(257):1018–1019.
- Wu, J.-J., Whittaker, A., and Cartmell, M. (2000). The use of finite element techniques for calculating the dynamic response of structures to moving loads. *Computers & Structures*, 78(6):789–799.
- Yang, Y., Yau, J., and Wu, Y. (2004). *Vehicle-bridge interaction dynamics: with applications to high-speed railways*. World Scientific.

Anexo A

Metodologia ANSYS® Workbench™

Um dos desafios no desenvolvimento deste trabalho foi a implementação do modelo de uma viga de Euler-Bernoulli sob a ação de uma carga móvel utilizando o programa de simulação numérica ANSYS® Workbench™.

A licença utilizada nesta implementação é a licença de estudante gratuita de 2024 disponibilizada no *site* do próprio programa (<https://www.ansys.com/>).

Após a devida instalação do programa, será necessário abrir a plataforma/módulo *Workbench* através do menu "Iniciar", de modo a dar início à modelação/simulação pretendida nesta metodologia. Assim será aberta uma janela correspondente ao projeto do *Workbench* que será iniciado (Figura A.1).



Figura A.1 Janela inicial do Workbench™

A.1 Tipo de Análise

Primeiramente será necessário definir o tipo de análise pretendida. Sendo o modelo de estudo uma viga simplesmente apoiada sob a ação de uma carga móvel com velocidade constante, trata-se então de uma análise dinâmica, pois pretende-se determinar a resposta da viga em função do tempo quando esta está sujeita à ação da carga móvel, que também é dependente do tempo. Deste modo, será selecionado na *Toolbox* da janela inicial o módulo *Transient Structural* (fazendo duplo clique ou arrastando para o sítio pretendido) (Figura A.2).

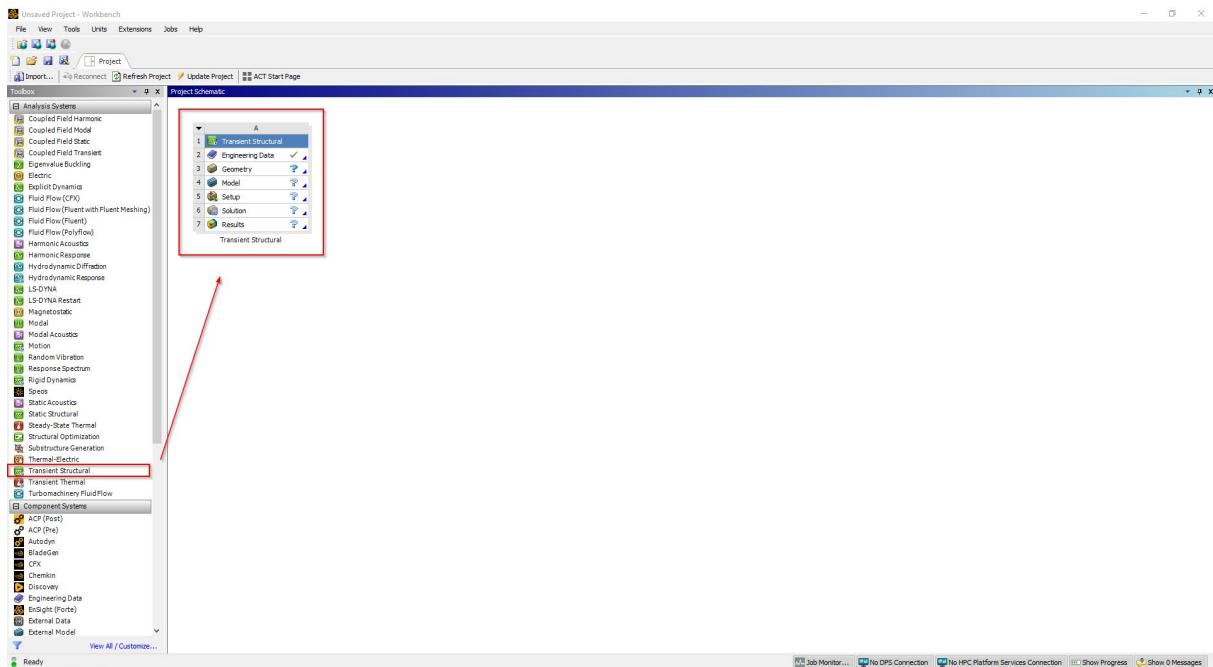


Figura A.2 Selecionar o módulo *Transient Structural*

A.2 Definição dos Materiais

Em qualquer análise deste tipo é necessário definir as características mecânicas da estrutura. Desta forma, a célula *Engineering Data* do módulo selecionado (*Transient Structural*) tem toda a informação necessária para fazer essa definição, ou seja, a definição do material que se pretende usar na análise. Fazendo duplo clique nessa opção, na janela, aparecerá o material definido por defeito do próprio programa (*Structural Steel*) juntamente com as suas características, como é mostrado na Figura A.3:

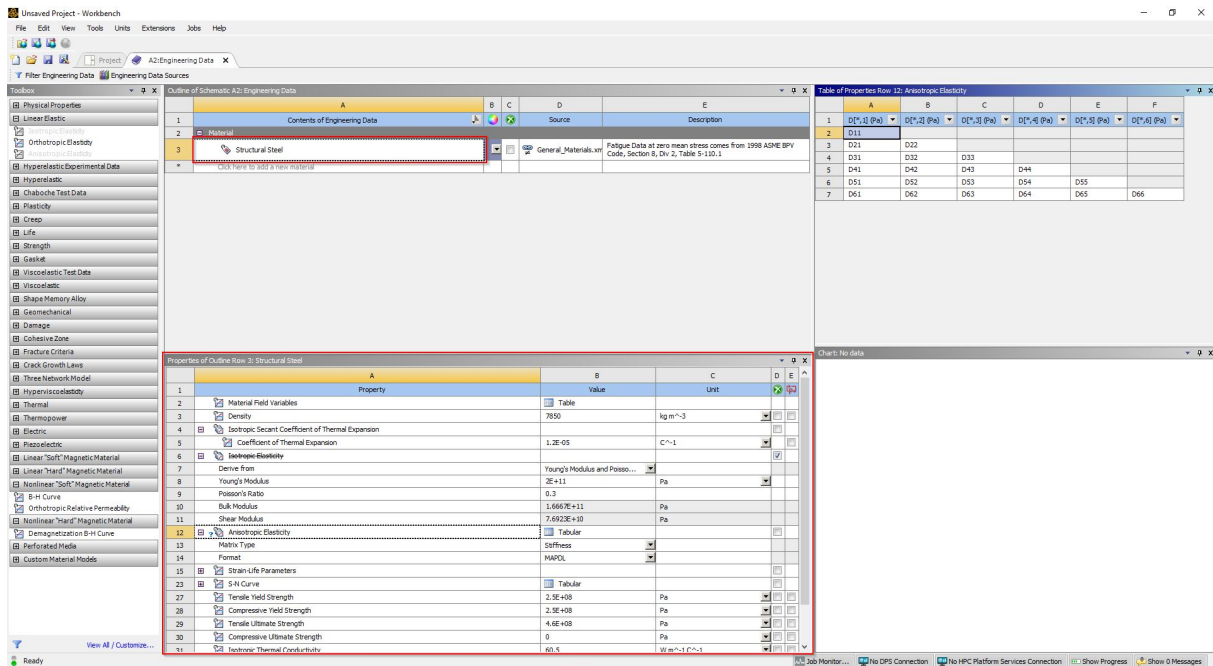


Figura A.3 Janela Engineering Data

Na opção *Engineering Data Sources* o utilizador poderá escolher o material pretendido para a análise dentro de uma vasta lista de materiais oferecidas pelo programa, clicando em adiconar e/ou escolhendo também as características que desejar na *Toolbox*:

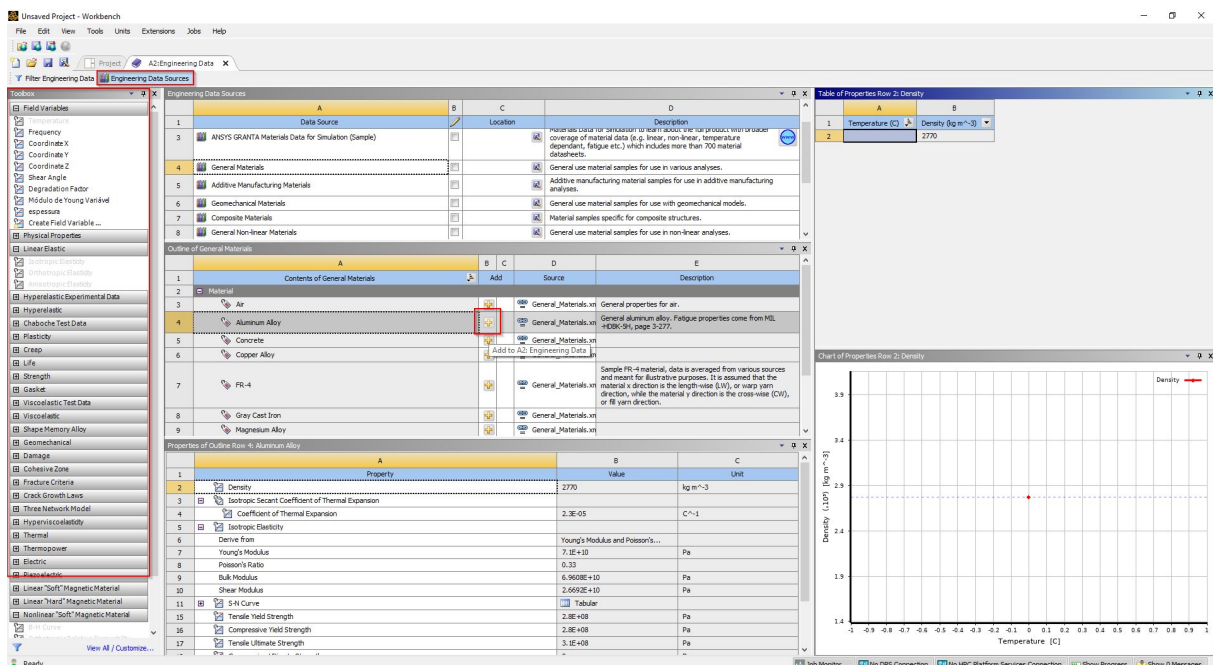


Figura A.4 Seleção do material pretendido

Selecionando o material pretendido, o mesmo aparecerá na lista de materiais da célula *Engineering Data* do módulo *Transient Structural*:

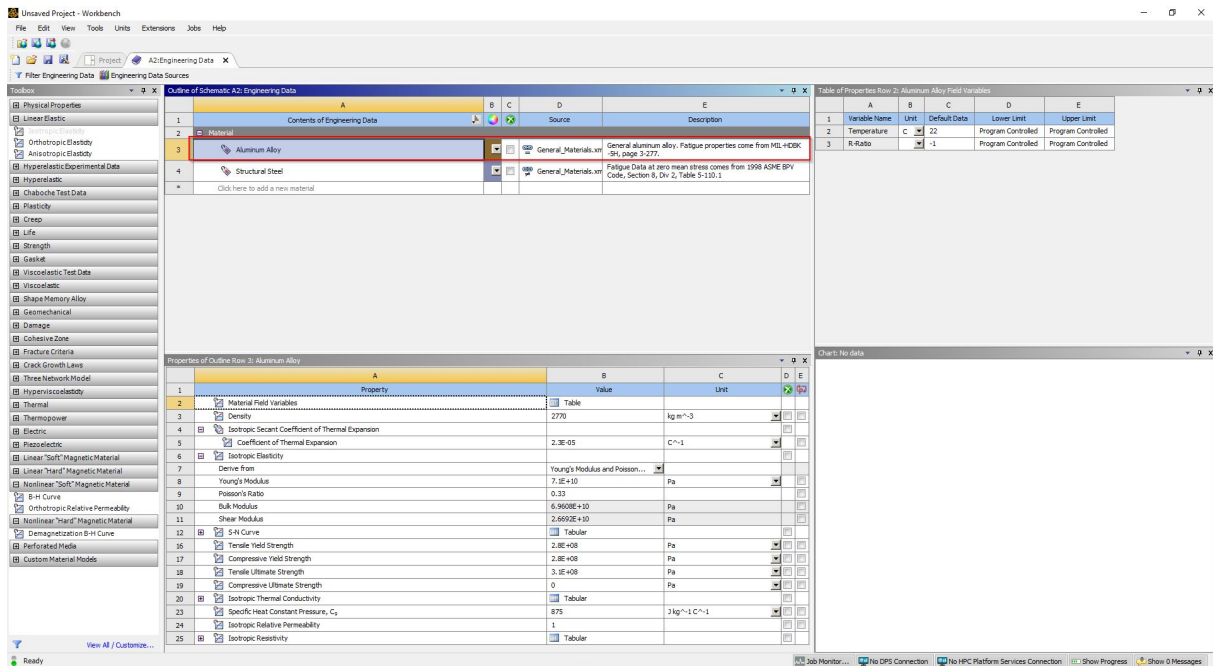


Figura A.5 Material selecionado

A.3 Definição da Geometria da Estrutura

Na definição da geometria da estrutura será importante definir também o tipo de elemento finito que vai ser usado na análise do comportamento da estrutura. Neste caso, o elemento finito que se pretende nesta análise é o elemento do tipo *Viga*.

Assim, o passo seguinte será desenhar a estrutura. A interface para esse efeito é a interface *DesignModeler* disponível na célula *Geometry* (tecla direita do rato) do módulo *Transient Structural* (Figura A.6).

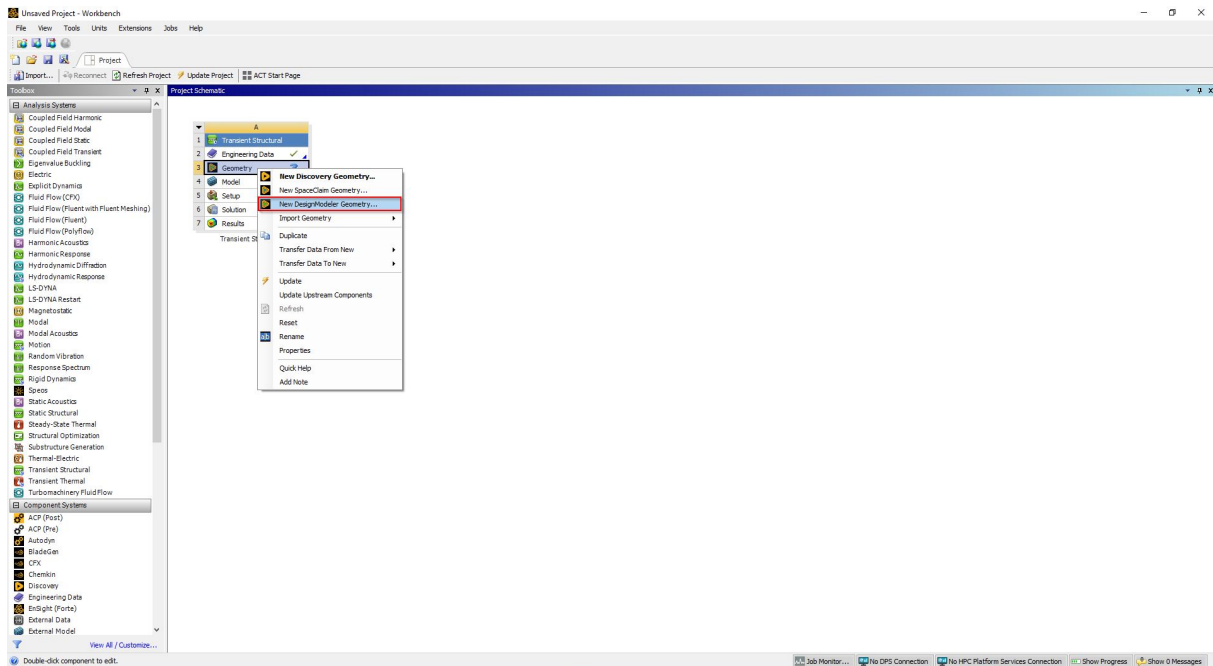


Figura A.6 Abrir o *DesignModeler*

A janela *DesignModeler* será apresentada:

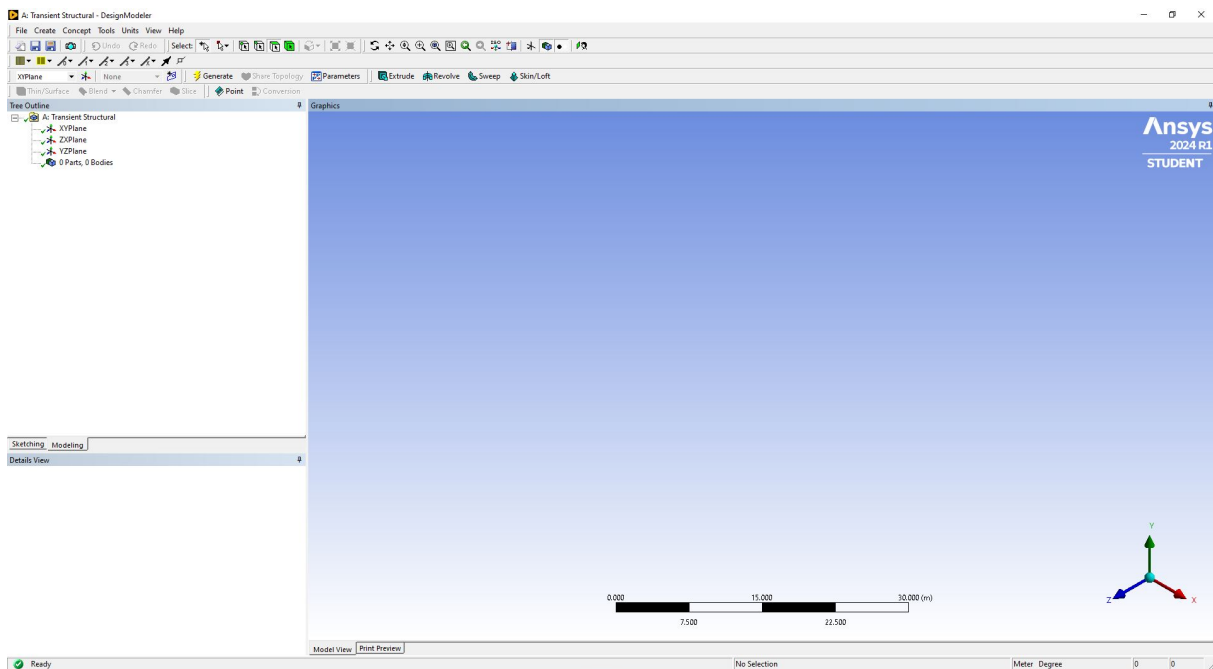


Figura A.7 Janela *DesignModeler*

Aqui, será então possível desenhar a estrutura que se pretende para a análise, sendo esta uma viga de dois metros de comprimento.

De seguida seleciona-se o plano onde se pretende trabalhar (neste caso o plano XY) e define-se um novo *sketch* (*New Sketch*):

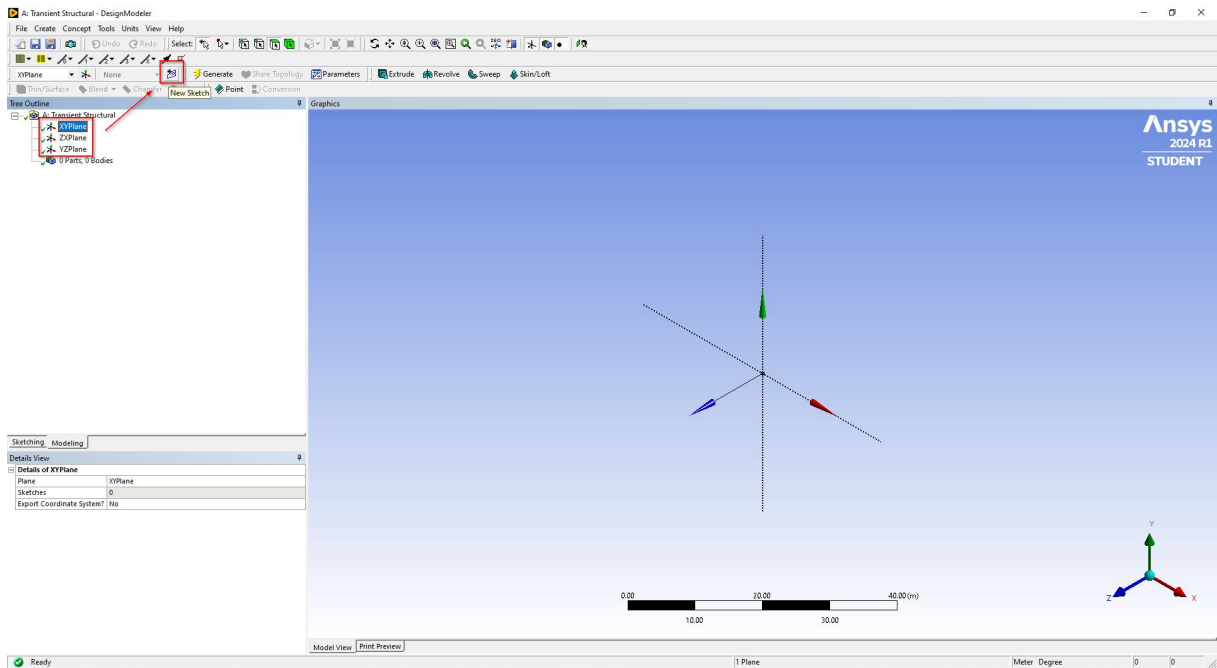


Figura A.8 Definir o plano de trabalho e um novo *sketch*

Com a opção *Look at*, será mais fácil passar para o passo seguinte, de modo a ver somente o plano de trabalho de interesse:

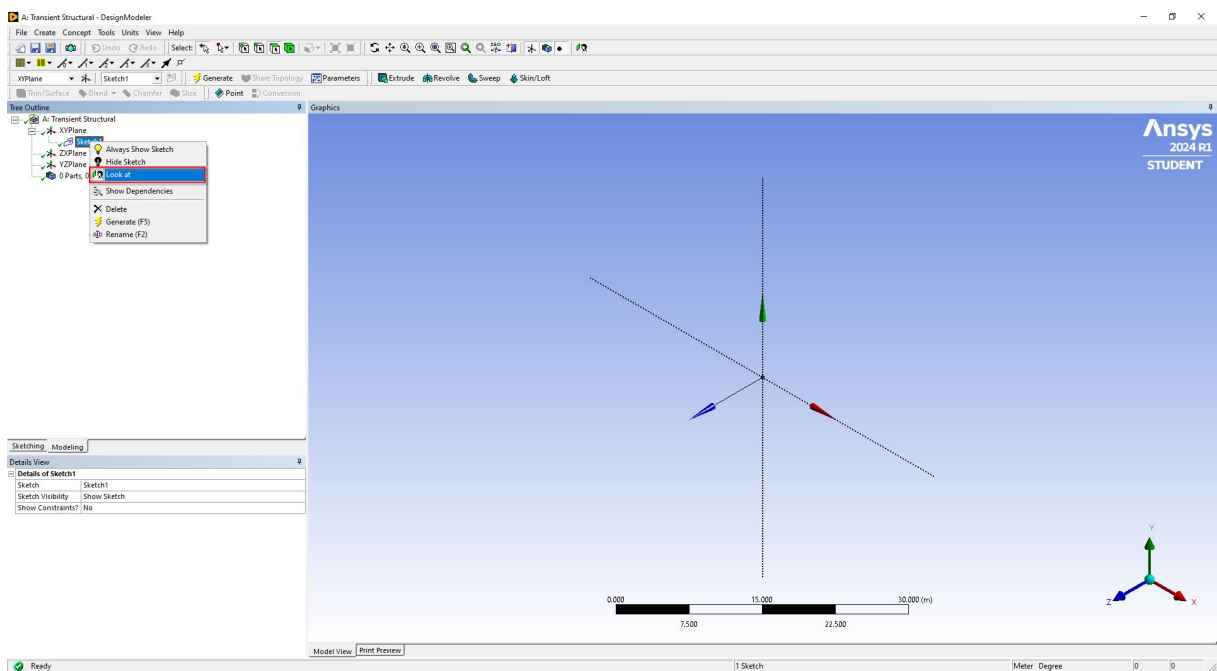


Figura A.9 Opção *Look at*

Selecionando a janela *Sketching* do *Sketching Toolboxes*, visualizar-se-á uma série de ferramentas, entre elas a ferramenta *Line* será selecionada:

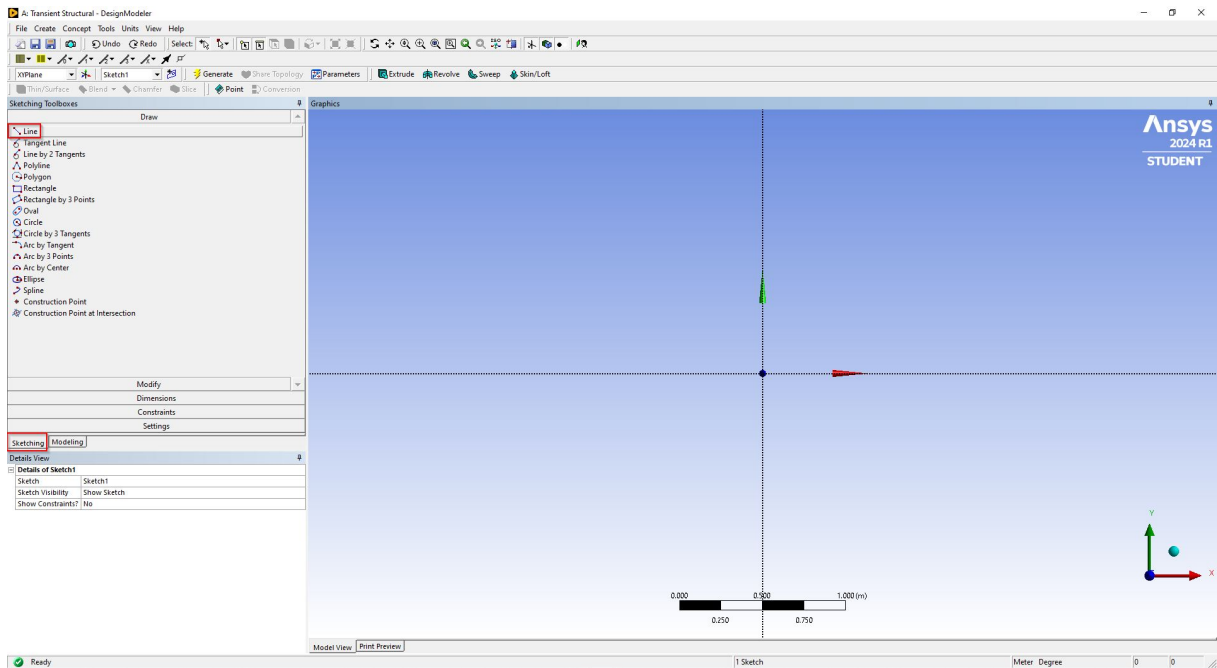


Figura A.10 Ferramenta *Line*

Com esta ferramenta é possível desenhar uma linha com um comprimento igual ao comprimento da viga do modelo em análise, neste caso dois metros de comprimento:

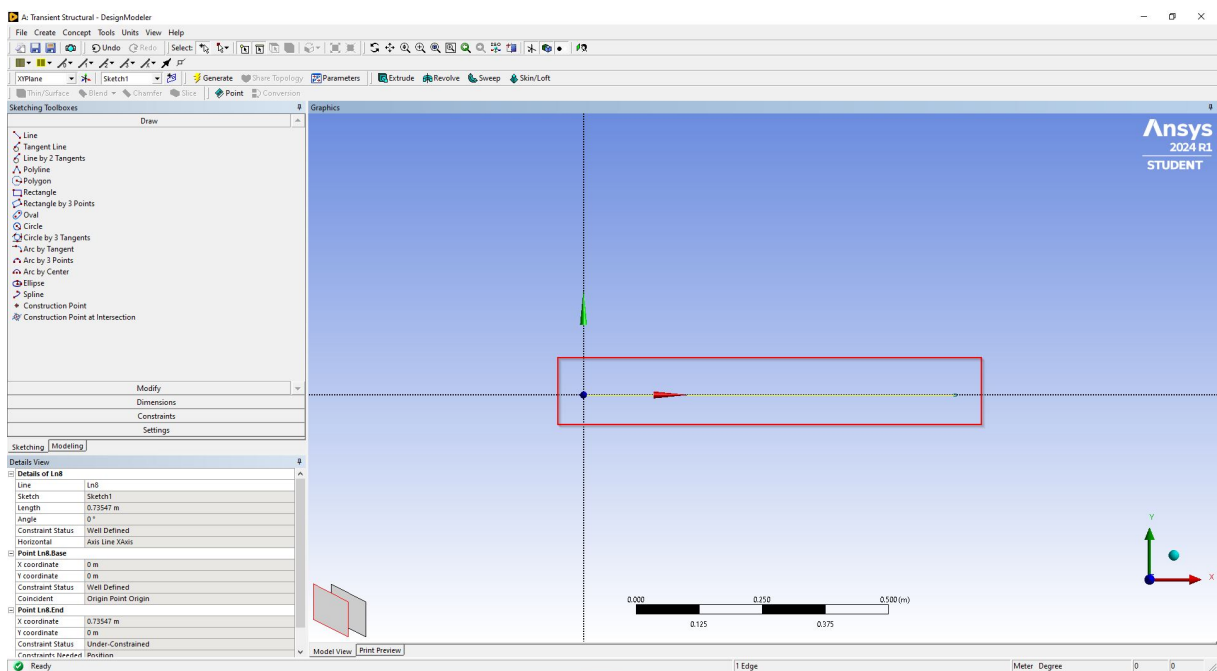


Figura A.11 Usando a ferramenta *Line*

No passo seguinte pretende-se dimensionar a linha traçada. Deste modo, seleciona-se a opção *Dimensions* do *Sketching Toolboxes*, e opta-se pela opção *General*. Assim poderá selecionar-se a linha traçada no passo anterior e definir a sua dimensão no *Details View*, tal como é demonstrado na Figura A.12:

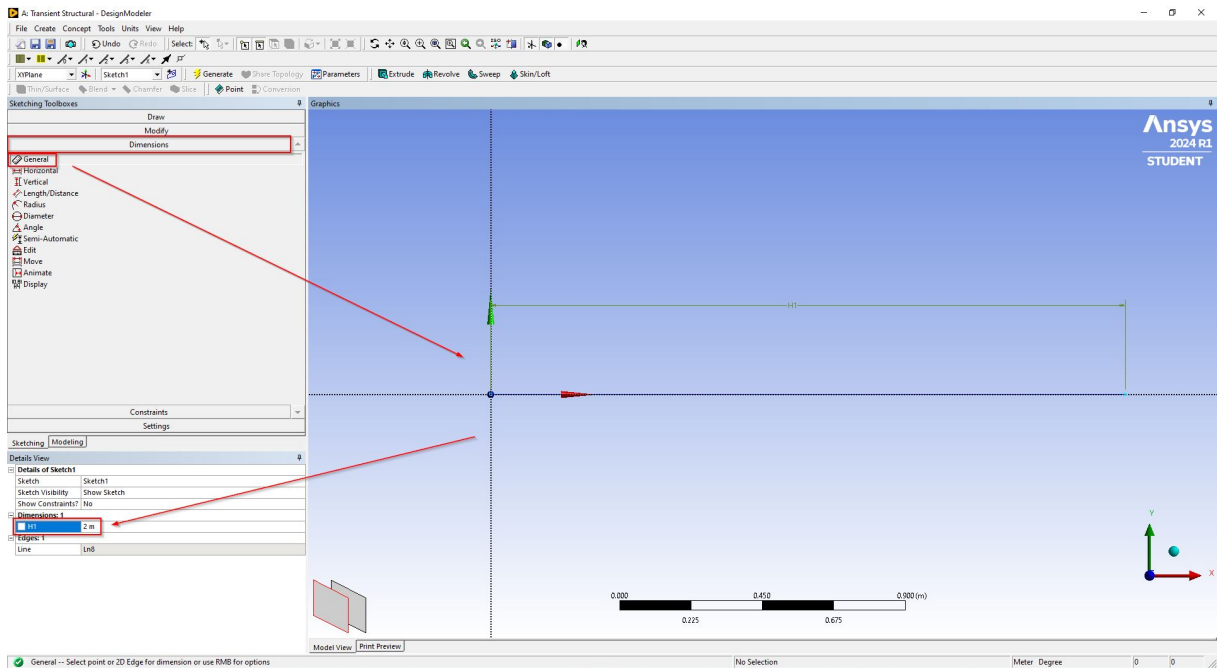


Figura A.12 Dimensionar o comprimento da viga

De seguida será importante definir a secção transversal da viga. Para isto, na opção *Concept*, da barra superior, haverá a opção *Cross Section*, onde será seleccionada a opção *Rectangular*, pois a secção transversal da viga em análise é uma secção quadrada:

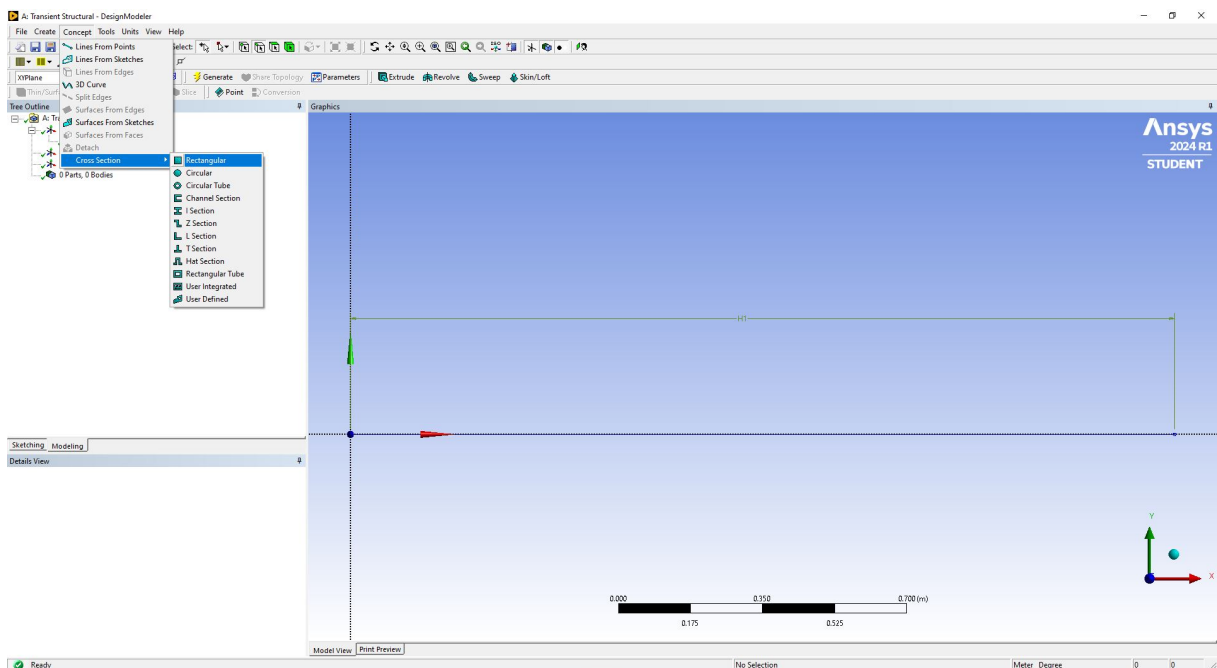


Figura A.13 Definir a secção transversal

Define-se as dimensões da secção escolhida na janela *Details View*:

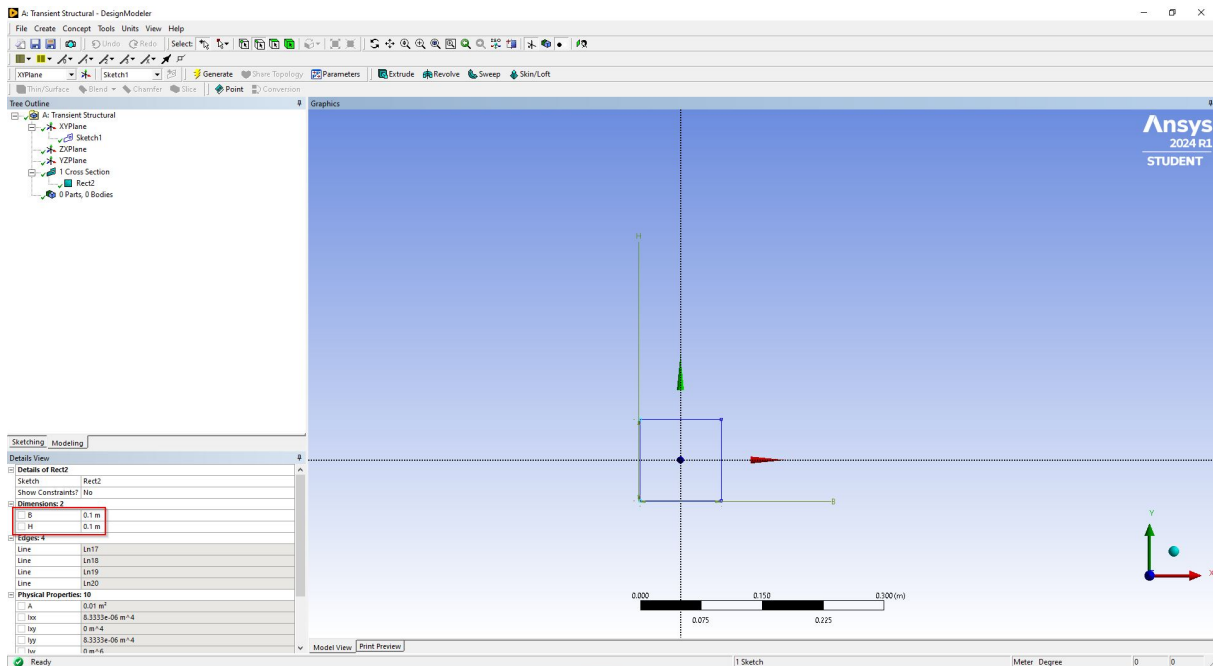


Figura A.14 Definição das dimensões da secção transversal

De seguida selecciona-se a opção *Lines From Sketches* da opção *Concept* da barra superior:

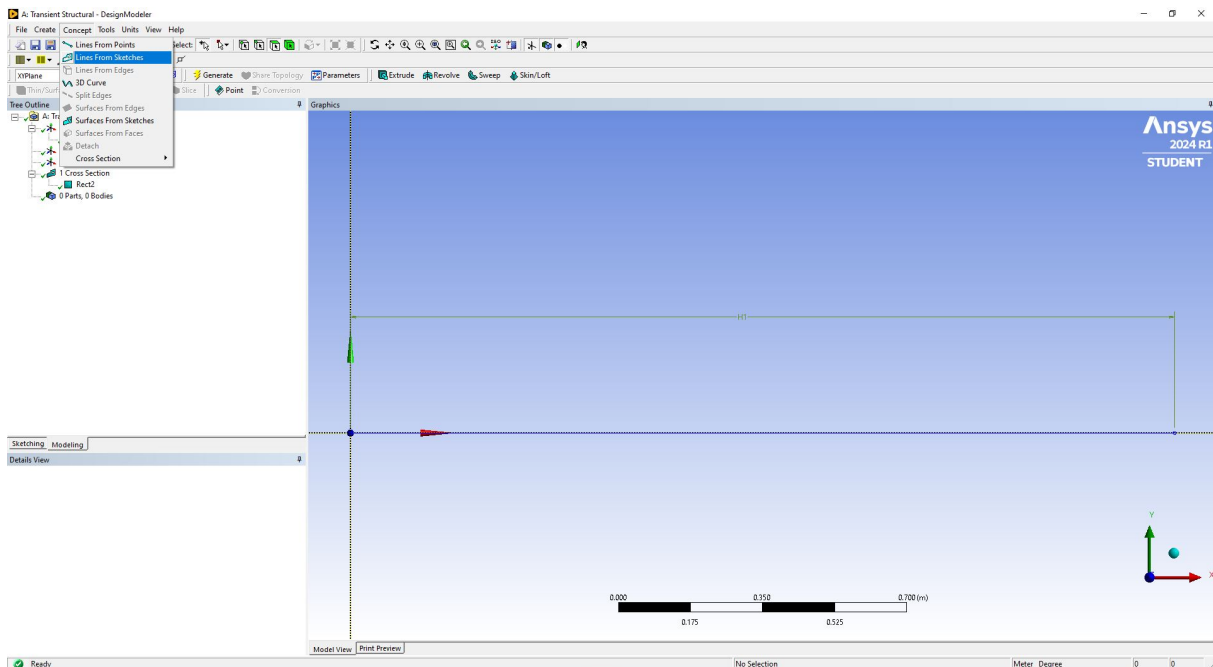


Figura A.15 Selecionar a opção *Lines From Sketches*

Com esta ferramenta será possível definir a linha traçada num elemento finito do tipo viga, seleccionando-a e clicando em *Apply* na opção *Base Objects* do *Details View*, seguido de seleccionar a opção *Generate*:

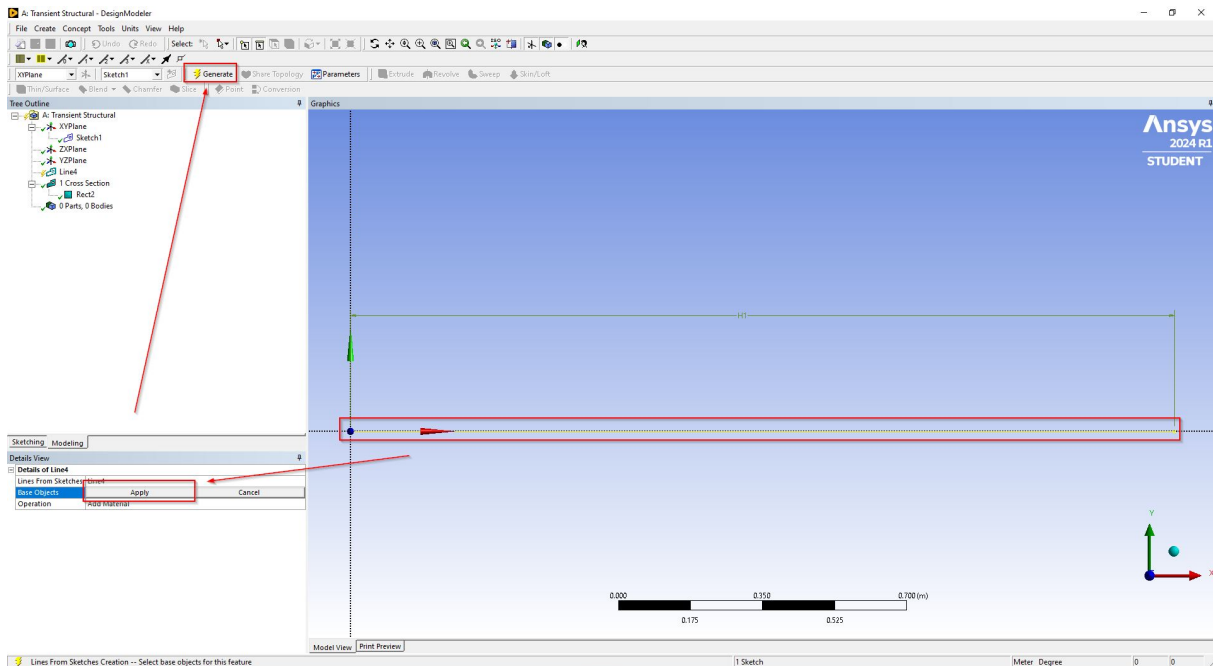


Figura A.16 Usar a ferramenta *Lines From Sketches*

De momento a viga foi gerada com um único elemento finito e dois vértices, tal como se poderá verificar nas informações do *Line Body* no *Details View*. Será também importante estabelecer nesta janela a secção transversal na opção *Cross Section*, seleccionando a secção transversal definida anteriormente, tal como está demonstrado na Figura A.17:

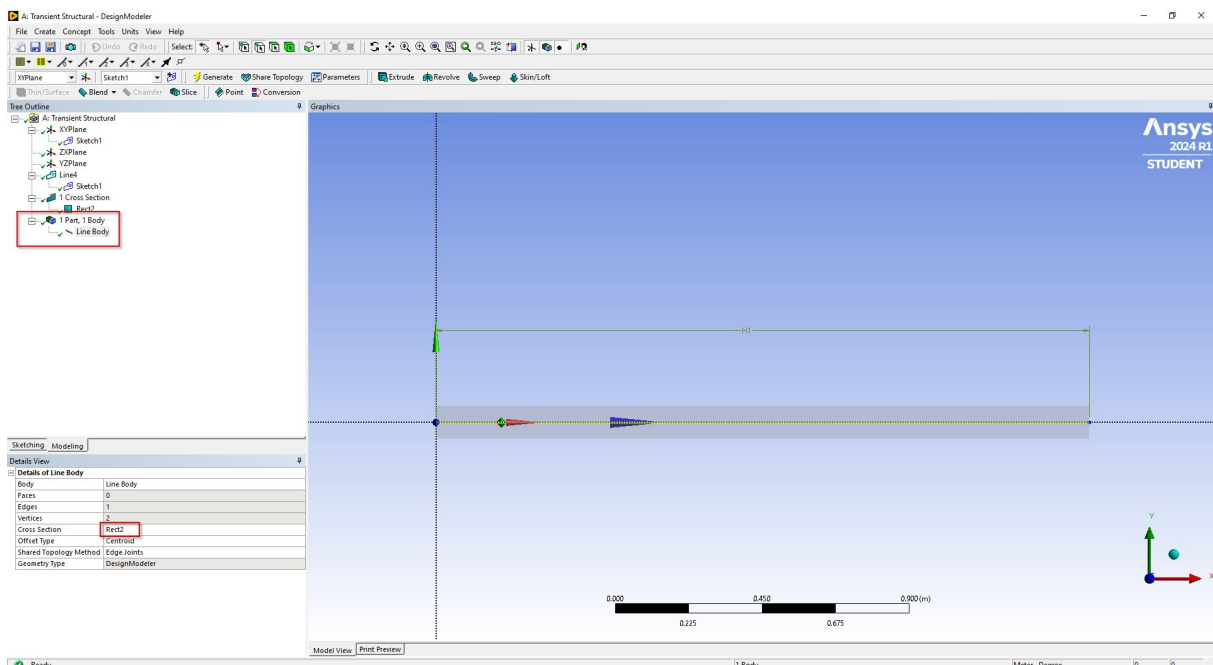


Figura A.17 Definição da viga como um único elemento finito

De modo a definir o número de elementos finitos pretendido, será necessário usar a ferramenta *Split Edges*, disponível na opção *Concept*, da barra superior:

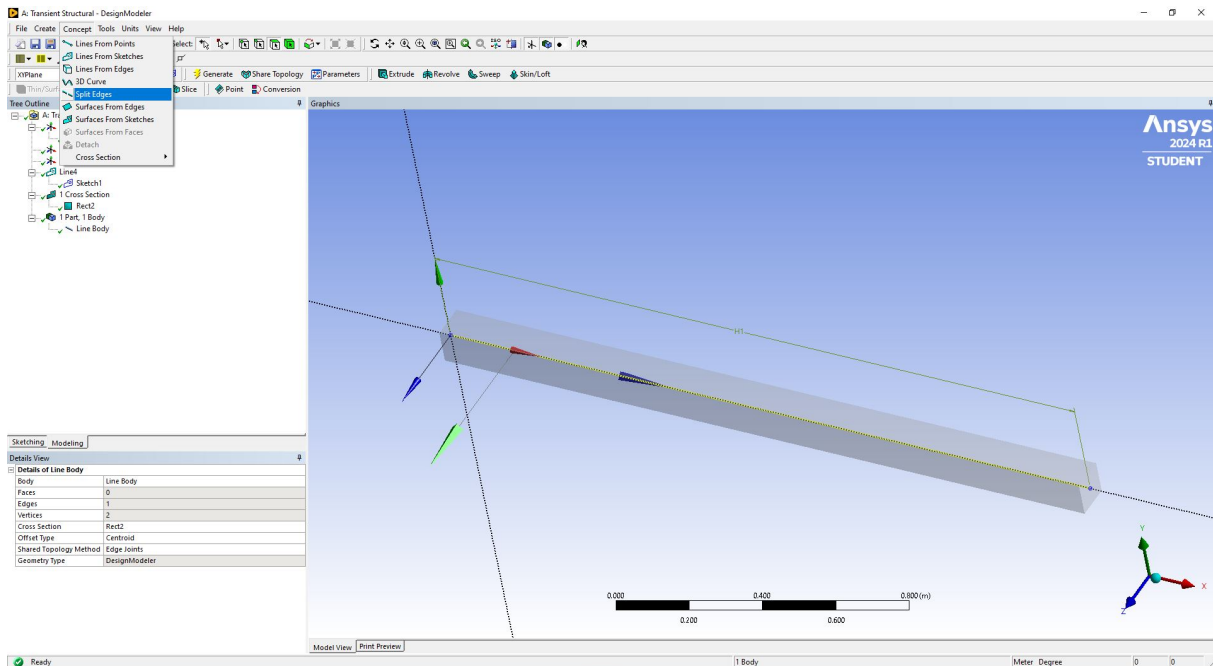


Figura A.18 Selecionar a ferramenta *Split Edges*

Nesta ferramenta será importante selecionar a estrutura que se pretende dividir em mais elementos finitos, selecionar a definição dessa divisão (*Split by N*) e definir o número de elementos finitos pretendido (no exemplo foi definido 8 elementos finitos) (Figura A.19), e no fim destas definições, selecionar a opção *Generate* de modo a gerar a estrutura pretendida, tal como está apresentado na Figura A.20:

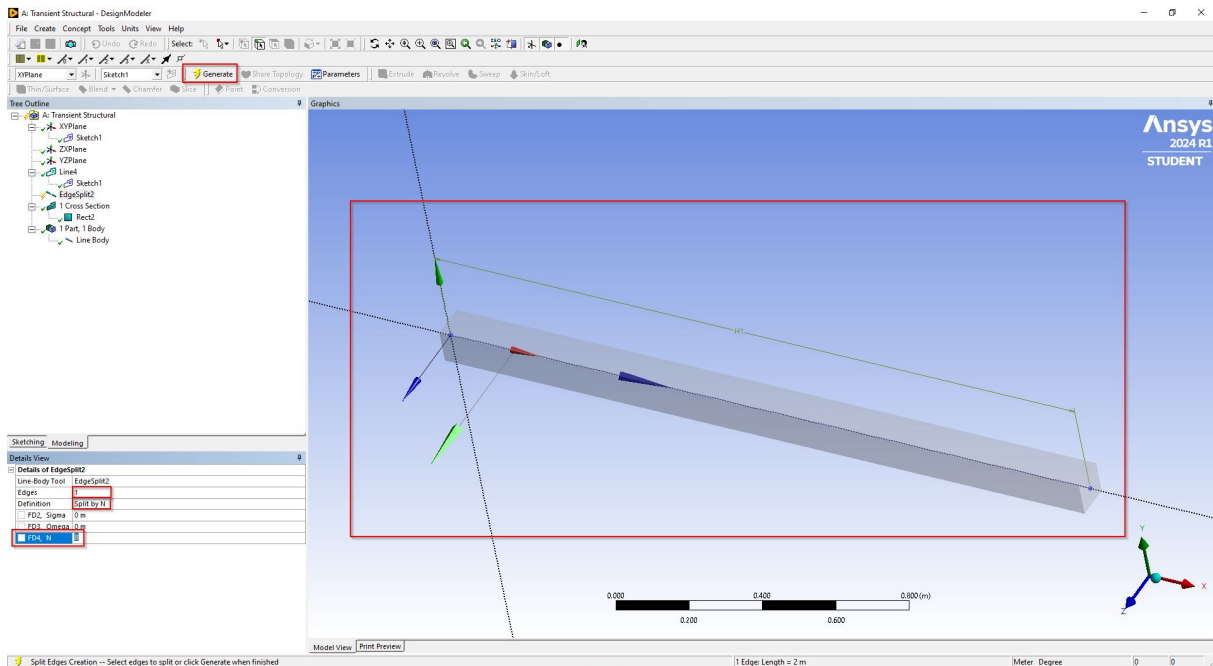


Figura A.19 Definição dos parâmetros da ferramenta *Split Edges*

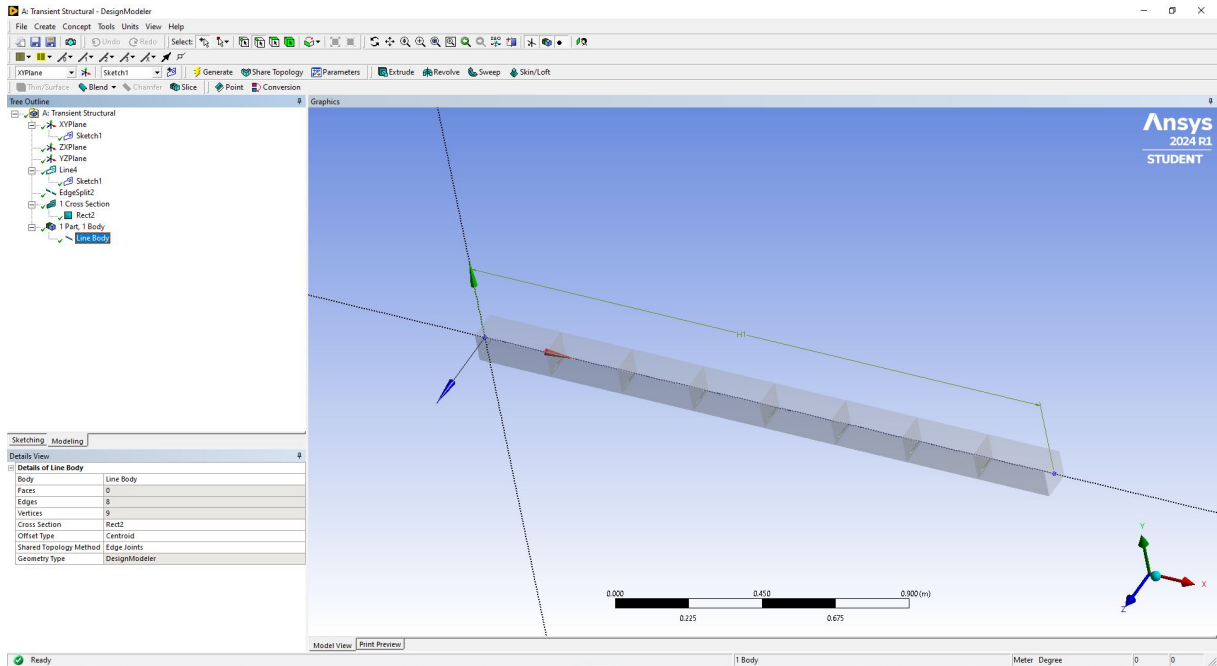


Figura A.20 Viga definida com 8 elementos finitos

Nota: Para visualizar a estrutura do sólido, neste caso a viga, o utilizador terá de seleccionar a opção *Cross Section Solids* no *View* da barra superior.

A.4 Definição do Modelo

Seleccionando a opção *Model* do *Transient Structural*, será aberta uma janela do *Transient Structural - ANSYS® Mechanical™* (Figura A.21):

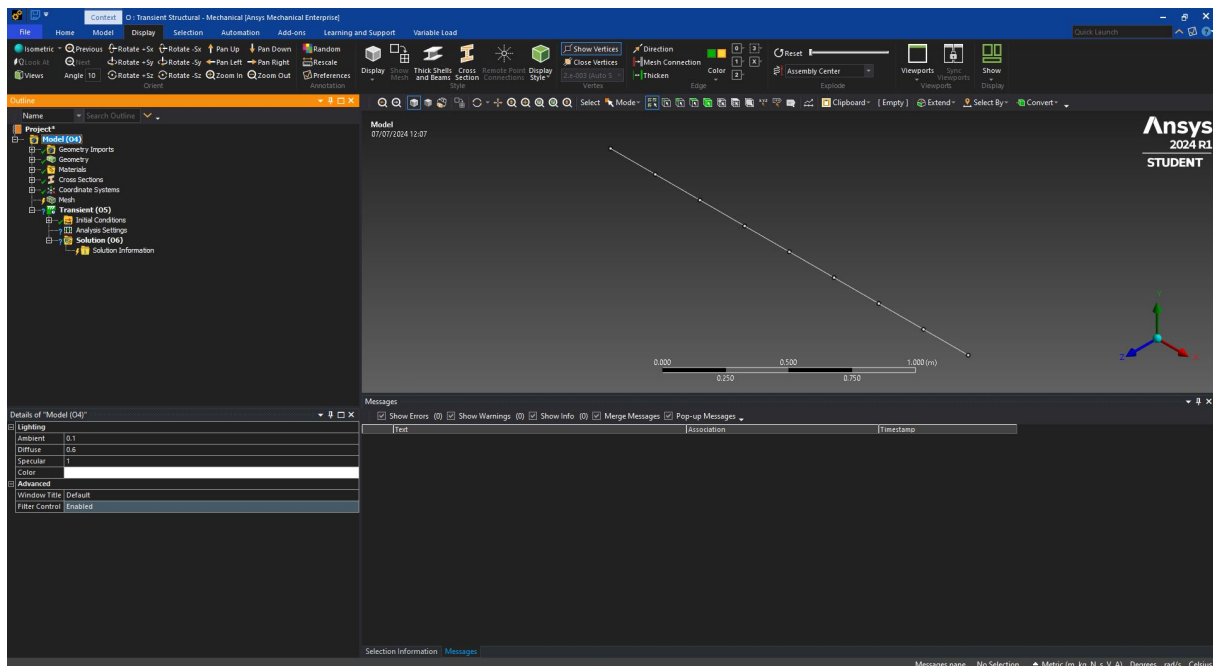


Figura A.21 Janela do *Transient Structural - ANSYS®*
Mechanical™

Nesta janela, poderá ser definido o modelo de estudo. É importante referir que algumas opções poderão ser desligadas pois não interessam para a análise em questão, nomeadamente os efeitos térmicos (*Thermal Strain Effects*) e não lineares (*Nonlinear Effects*), nos detalhes da estrutura definida (*Details of "Line Body"*). Também é importante verificar, dentro da janela dos detalhes da estrutura, as propriedades da mesma. Informações sobre o volume, a massa, o seu comprimento, etc., poderão ser consultadas e caso não estejam de acordo com as exigências do utilizador, poderão ser ajustadas em conformidade dentro da janela *Geometry*, definida anteriormente. Na Figura A.22, poderá verificar-se esta informação:

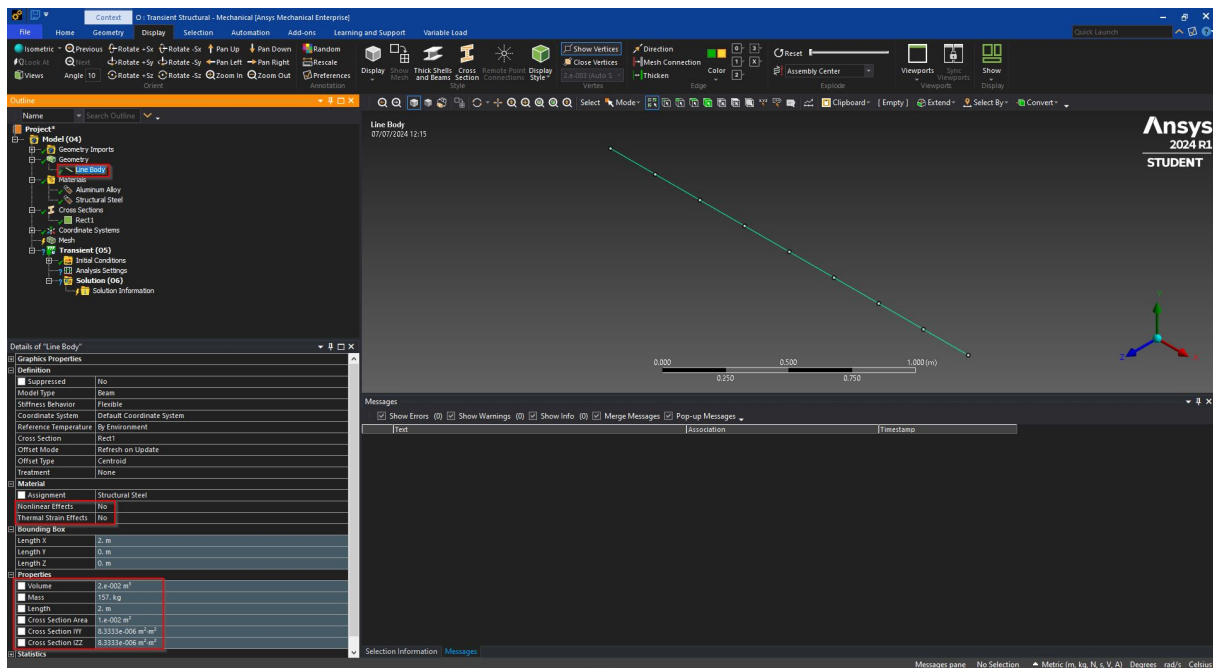


Figura A.22 Informação sobre a estrutura definida

Neste exemplo atualizou-se a malha do modelo definida por defeito pelo próprio programa. Clicando com a tecla direita do rato em *Mesh* e selecionando a ferramenta *Generate Mesh* o programa irá atualizar a malha da estrutura:

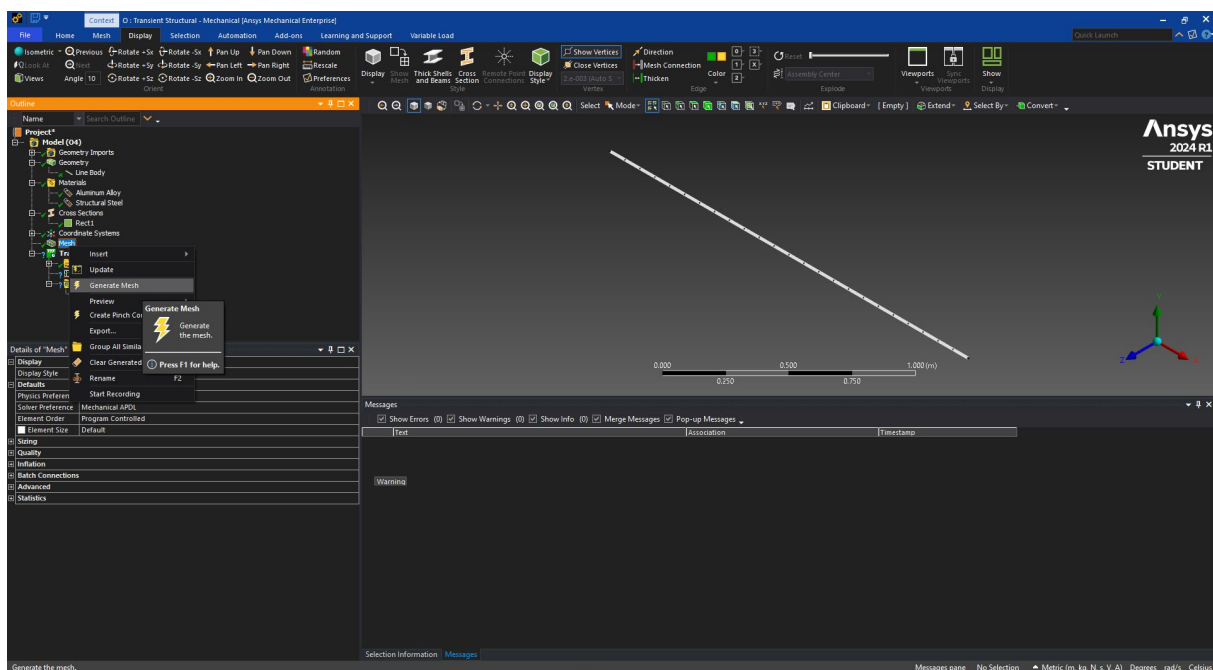


Figura A.23 Ferramenta *Generate Mesh*

No *Analysis Settings* será definido os parâmetros da análise transiente que se pretende, tendo sido desligadas as opções *Auto Time Stepping*, *Weak Springs* e *Large Deflection* (Figura A.24):

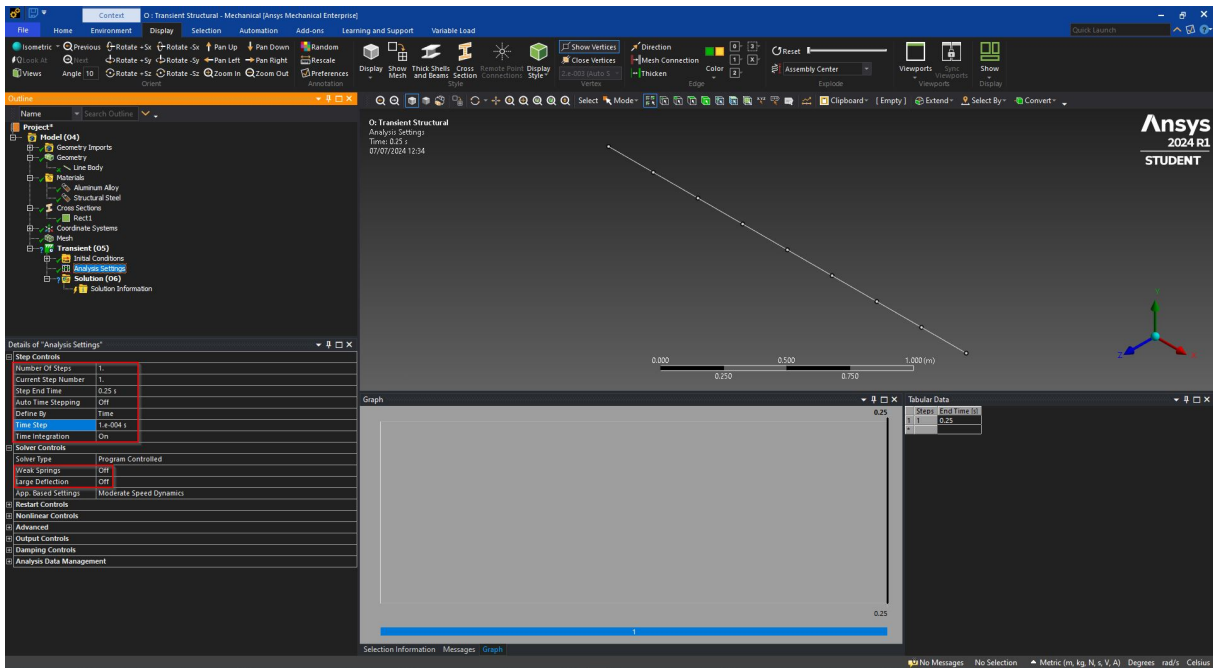


Figura A.24 Parâmetros do Analysis Settings

De seguida poderá ser adicionado as características que irão definir a análise. Clicando com a tecla direita do rato em *Transient*, e depois em *Insert*, haverá uma série de opções que poderão ser adicionadas ao modelo (Figura A.25):

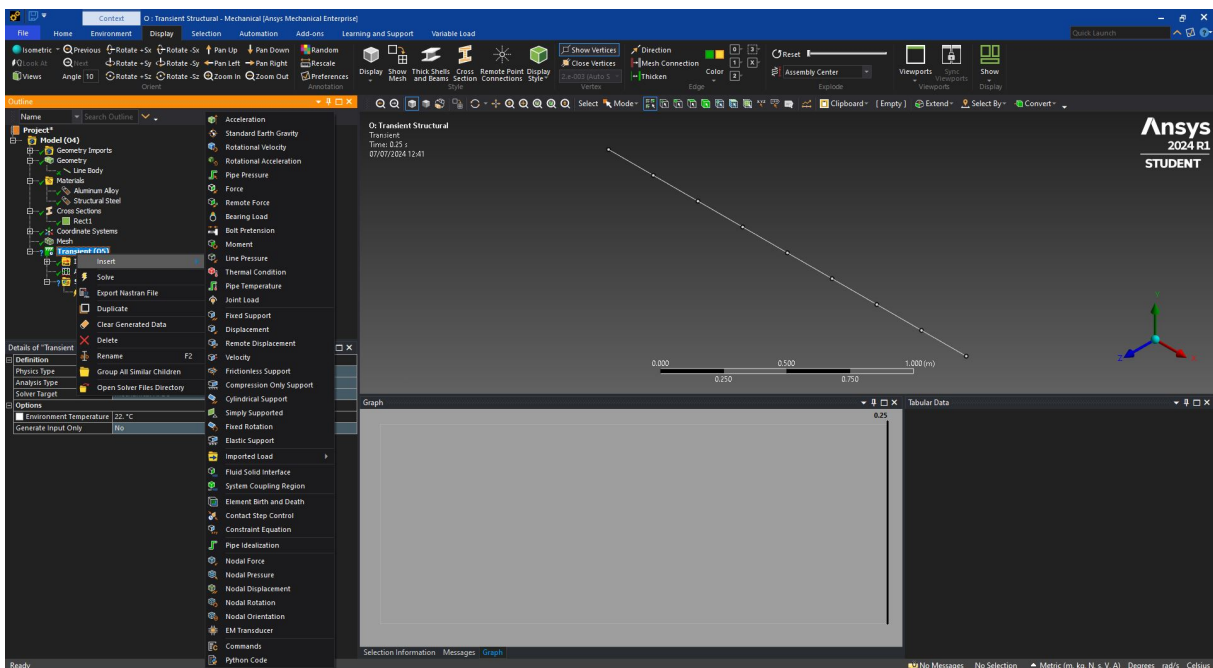


Figura A.25 Parâmetros para a definição do modelo

Inicialmente será adicionada a opção *Simply Supported*, pois a viga está simplesmente apoiada nas suas extremidades que poderão ser seleccionadas diretamente na estrutura e clicando em *Apply* em *Details of "Simply Supported"* (Figura A.26):

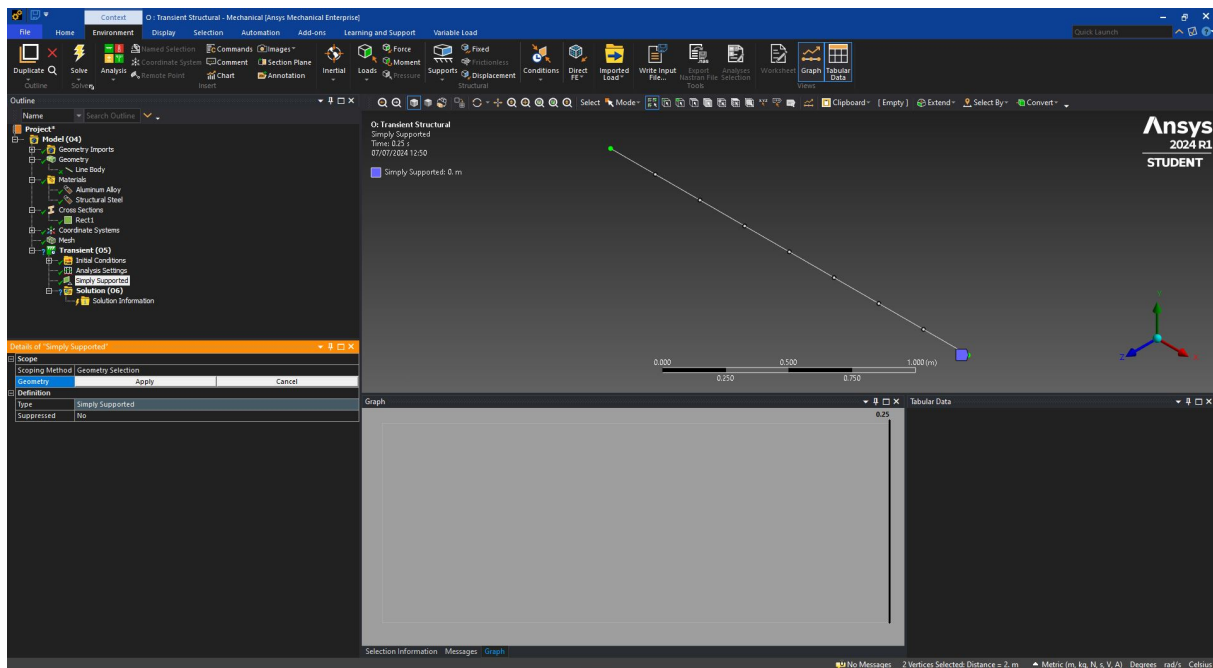


Figura A.26 Adicionar dois apoios

No passo seguinte irá adicionar-se a carga móvel que se desloca com velocidade constante de uma extremidade, até à outra extremidade de viga. Será importante referir que o número de elementos finitos definido anteriormente é importante para a definição da carga móvel. Sabendo também o tempo que a carga móvel atua diretamente a viga (0.08 segundos), dividir-se-á esse tempo pelo número de elementos finitos, obtendo 0.01 segundos, que será o tempo que a carga móvel demora a passar de um nó para outro do elemento finito. Assim, será importante definir a força adicionada de modo a implementar a situação referida em cima. Para isso, seleciona-se o nó/vértice onde se pretende adicionar a força, e de seguida define-se que a força é definida através das suas componentes (em x , em y e em z), selecionando para cada componente a opção *Tabular Data*, de modo a definir a força por instantes. De acordo com o raciocínio anterior, no quadro do *Tabular Data* que apareceu no lado direito do ecrã, poderá implementar-se a força de acordo com o que se pretende (Figura A.27):

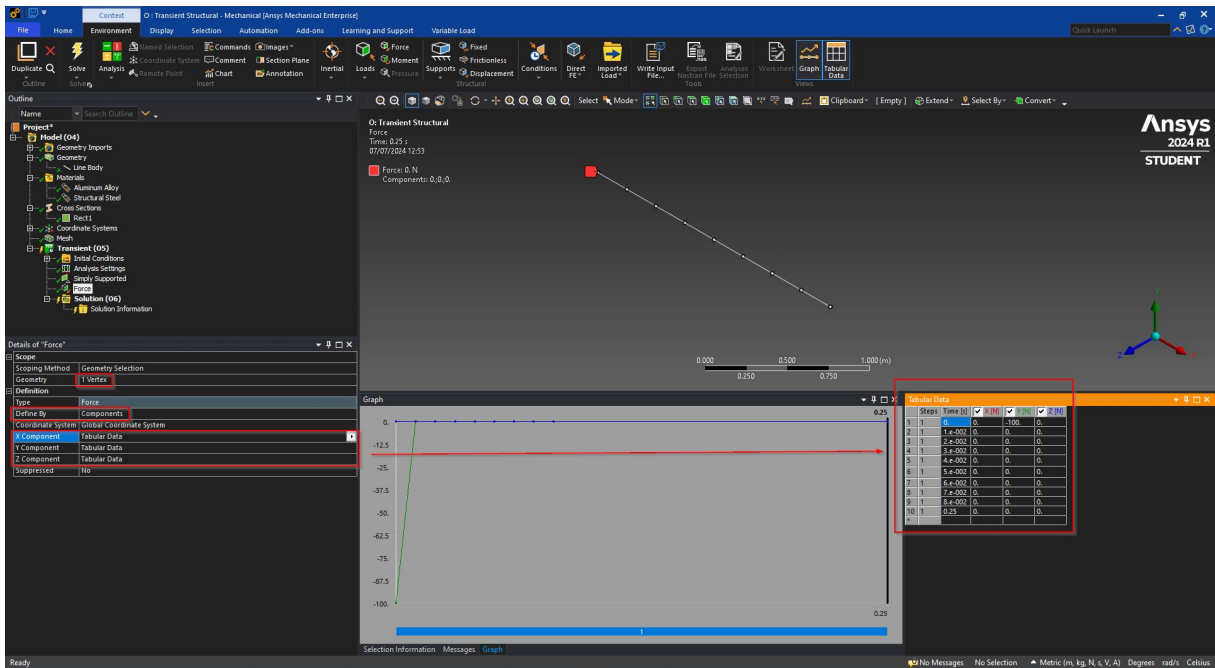


Figura A.27 Definição da força por instantes

Repetindo este processo para cada nó da estrutura (viga), sabendo sempre a posição da carga móvel, na última força adicionada terá de se adicionar um instante extra de modo a simular a situação que se pretende, ou seja, a partir do instante $t = 0.08s$ a carga móvel abandona a viga por completo. Deste modo, foi adicionado um instante igual a 0.081 segundos, que corresponderá à anulação da respetiva força, tal como é visível no gráfico da Figura A.28:

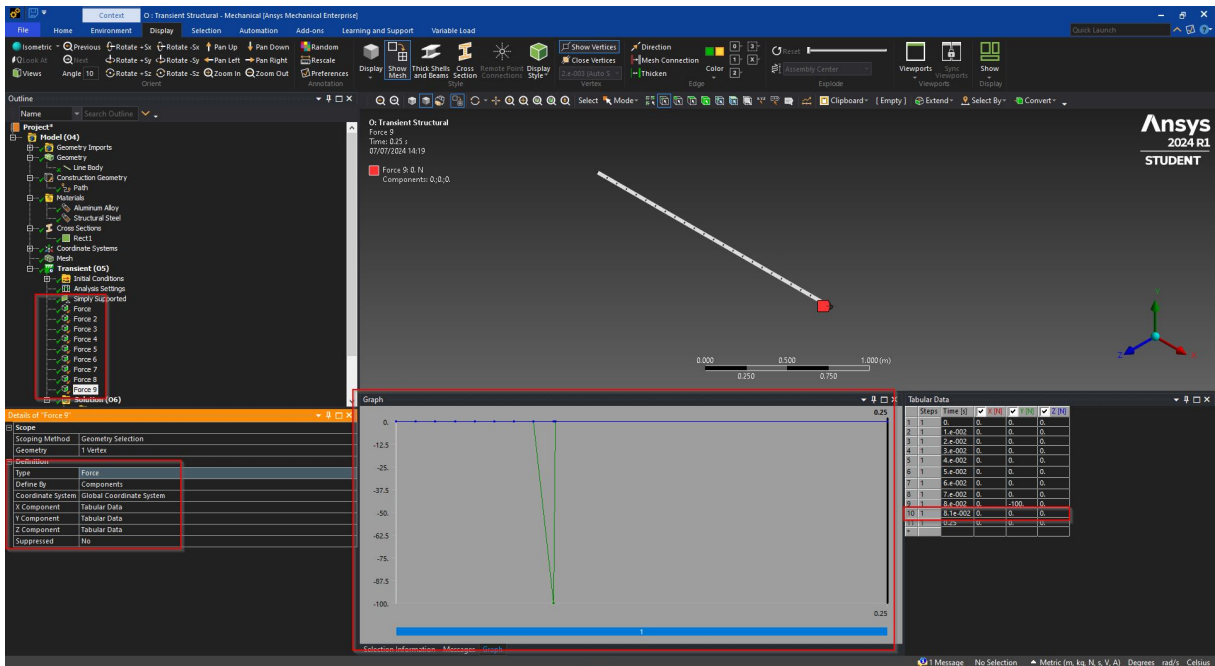


Figura A.28 Simulação da força a deixar de atuar sob a viga

Nesta análise pretende-se prever o comportamento da viga sob a ação de uma carga

móvel, e para isso, será importante visualizar esse comportamento através da deformada, momento fletor e esforço transverso. Para obter esses comportamentos em função do tempo, terá de se definir um ponto da viga, neste caso, o ponto médio da mesma ($x = \frac{L}{2} = 1m$). Assim, clicando com a tecla direita do rato em *Solution* e de seguida em *Insert*, haverá uma série de opções que podem ser adicionadas, entre elas, as opções de interesse *Beam Results* (Figura A.29):

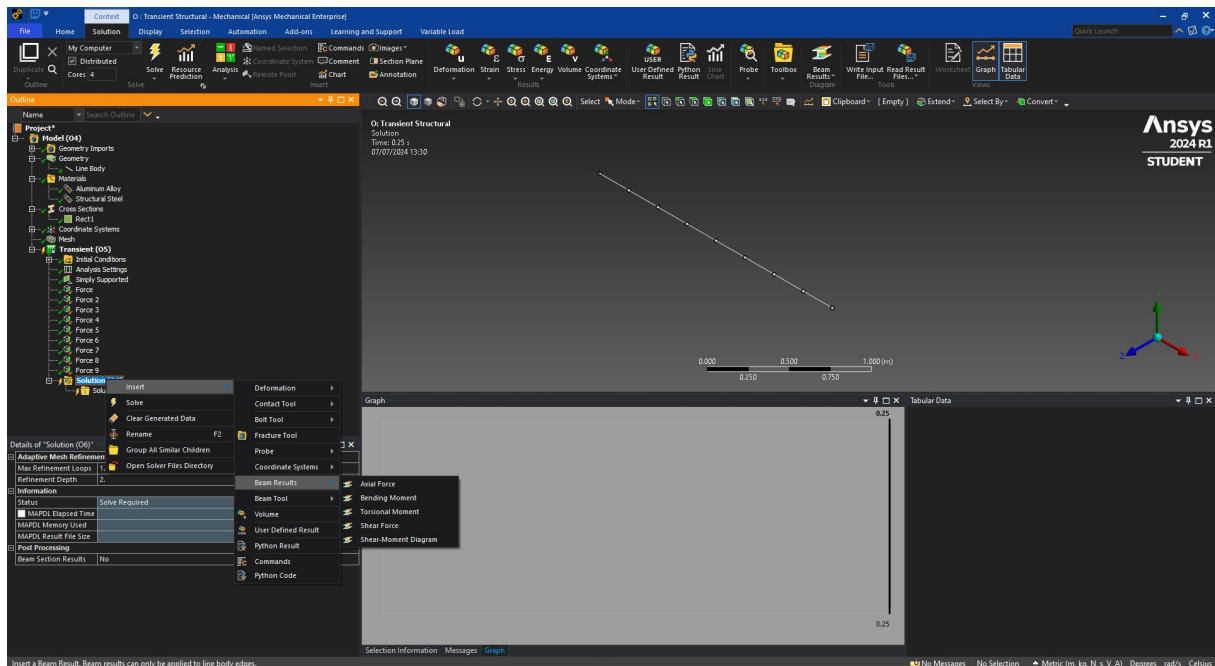


Figura A.29 Parâmetros para obter o comportamento da viga

As opções adicionadas para prever o comportamento da viga em função do tempo foram: *Bending Moment*, *Shear Force* e *Deformation - Directional*. Nestas opções será importante definir o que se pretende analisar mais em concreto, nomeadamente pretende-se analisar o ponto médio da viga. Para isso, terá de se ativar a seleção de nós, tal como está demonstrado na Figura A.30, selecionar o nó pretendido (verificando a posição do mesmo através das suas coordenadas visualizadas na barra inferior da janela) e aplicar na janela *Details* da solução. Será também importante definir o eixo de coordenadas pretendido para as soluções apresentadas.

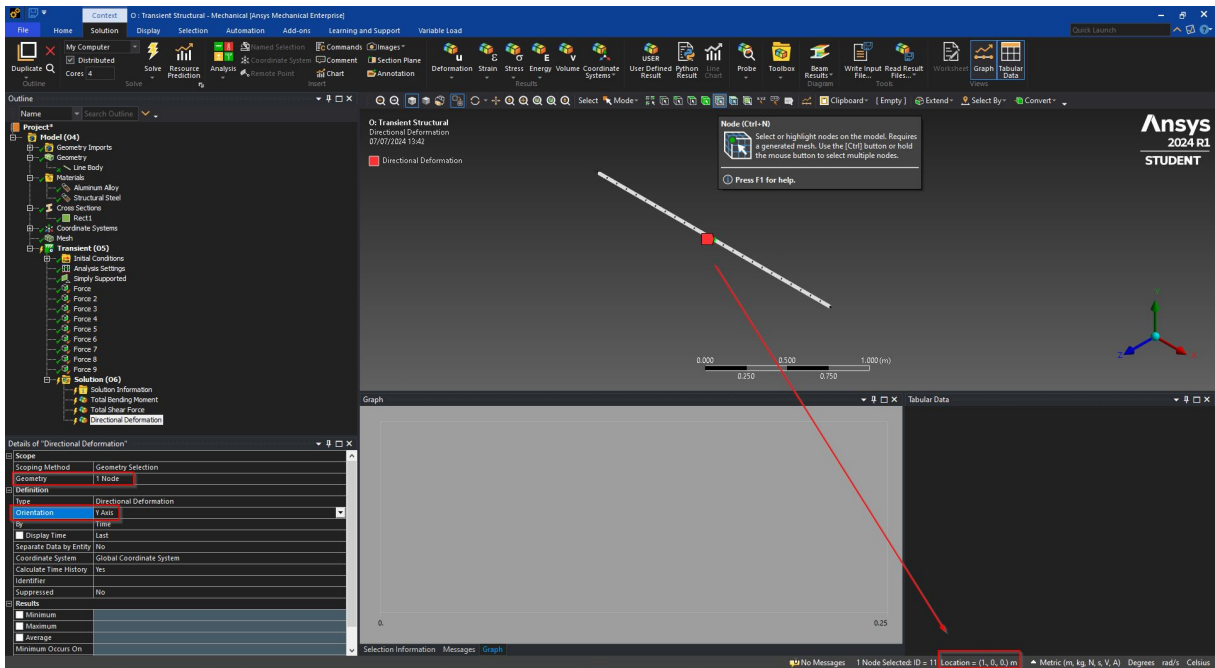


Figura A.30 Selecionar o ponto médio

Para visualizar também o comportamento da viga num determinado instante, terá de se adicionar primeiramente a ferramenta *Path* (Figura A.31):

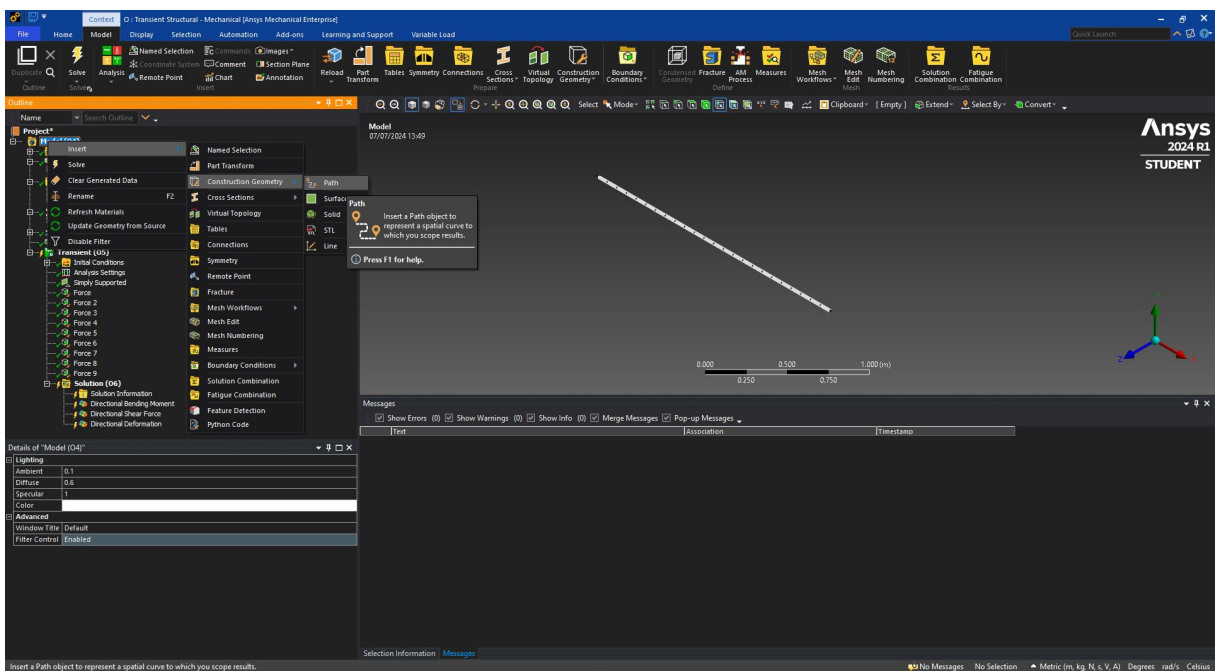


Figura A.31 Adicionar a ferramenta *Path*

Com esta ferramenta é possível desenhar uma curva espacial onde se pretende obter resultados, sendo estes resultados avaliados em pontos discretos ao longo da mesma curva. Terá de se definir o *Path Type*, neste caso *Edge*, e, ativando a seleção *Edge* na barra superior, seleciona-se todos os elementos finitos da viga, aplicando posteriormente em *Geometry* no *Details of "Path"* (Figura A.32):

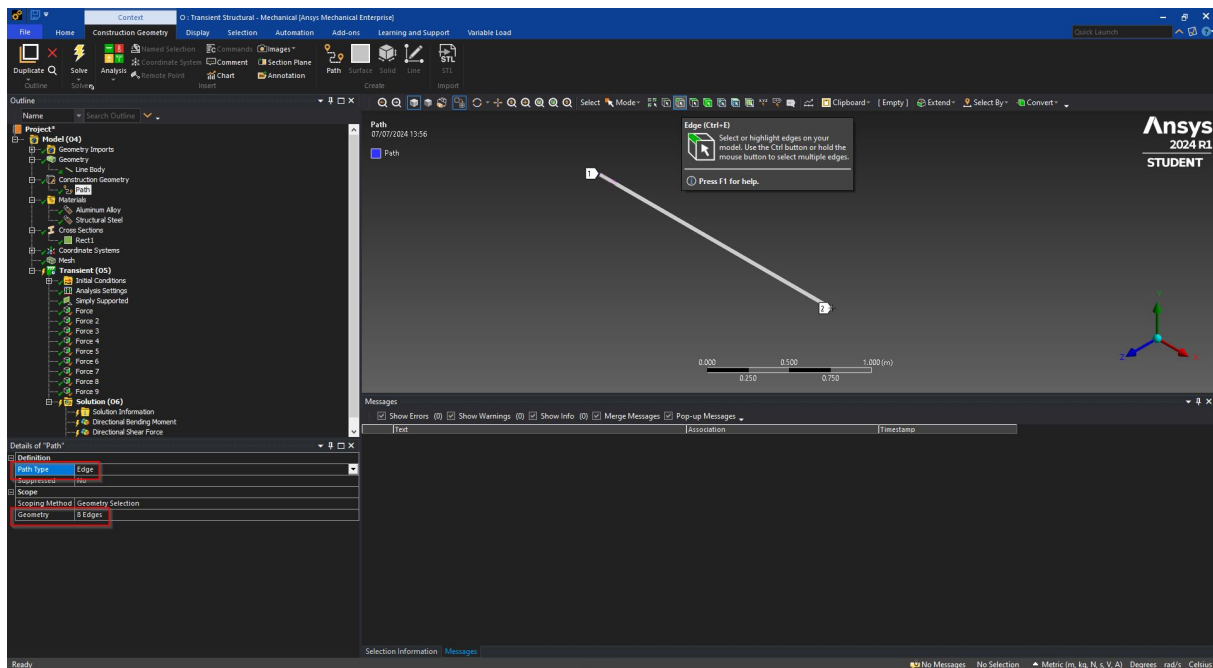


Figura A.32 Usar a ferramenta Path

De seguida poderá ser adicionado o *Shear-Moment Diagram* (uma das opções do *Beam Results*), onde será necessário definir de acordo com o que se pretende. Tal como está demonstrado na Figura A.33, terá de se adicionar o *Path* definido anteriormente, o tipo de definição do diagrama e o instante de tempo:

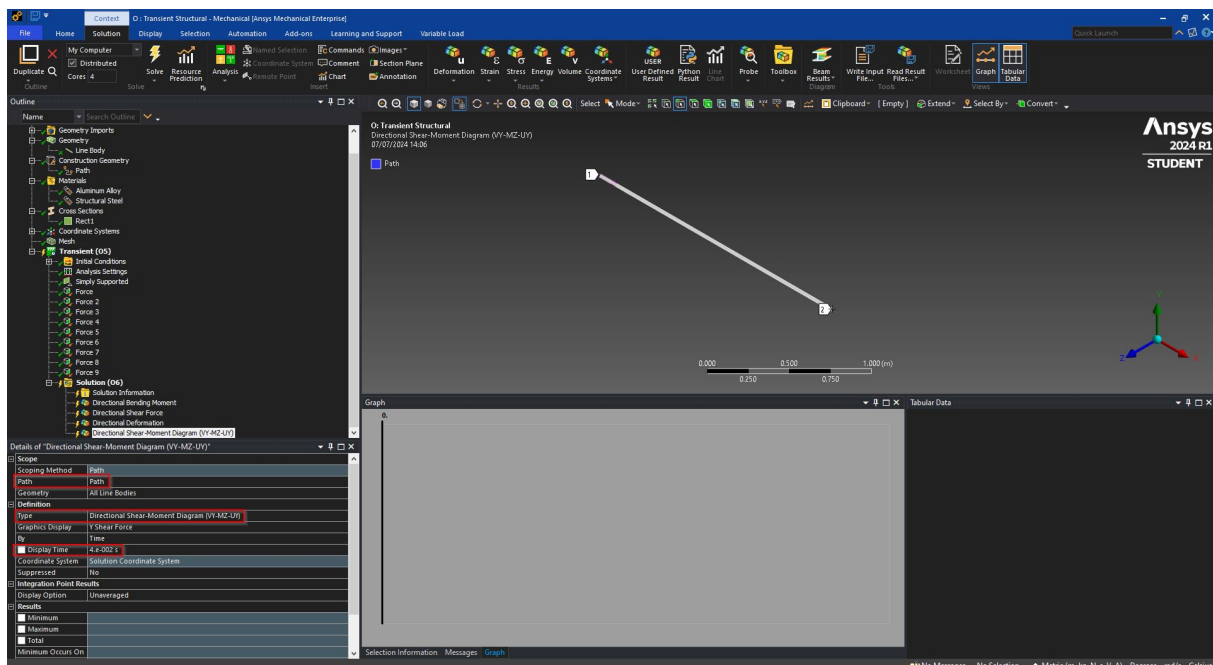


Figura A.33 Definição dos parâmetros do *Shear-Moment Diagram*

Na opção *Solve*, na barra superior, poderá ser simulado a análise implementada:

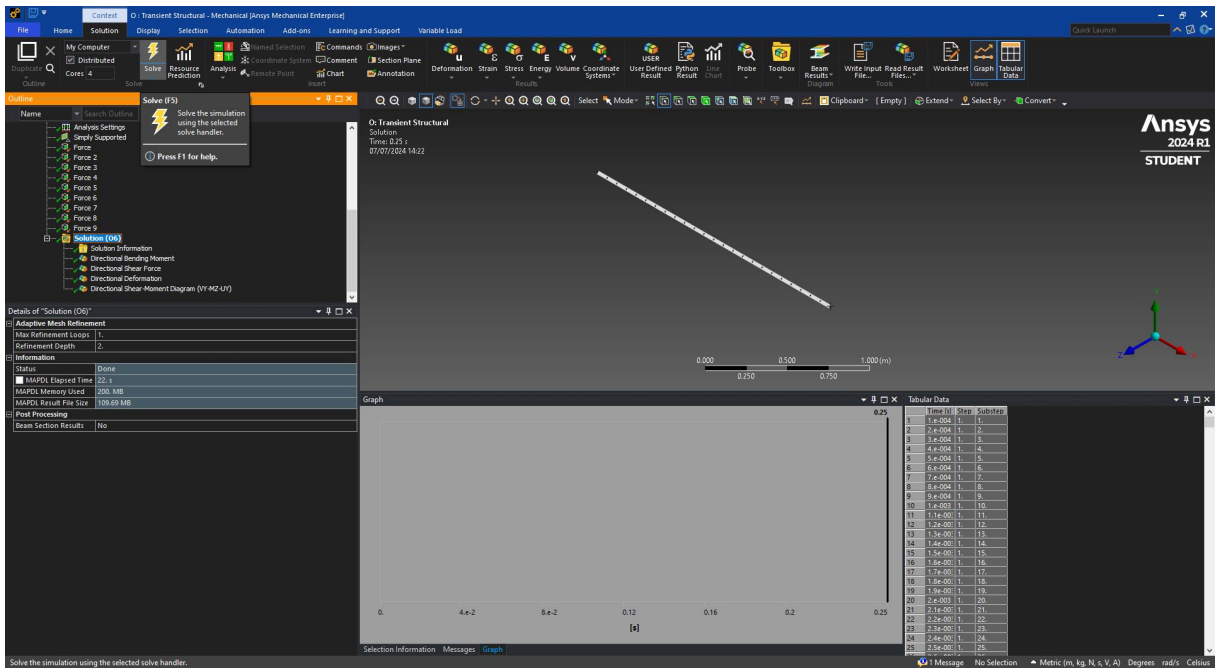


Figura A.34 Selecionar a opção *Solve*

Os resultados obtidos para as soluções pretendidas foram os que estão apresentados nas Figuras A.35, A.36, A.37 e A.38:

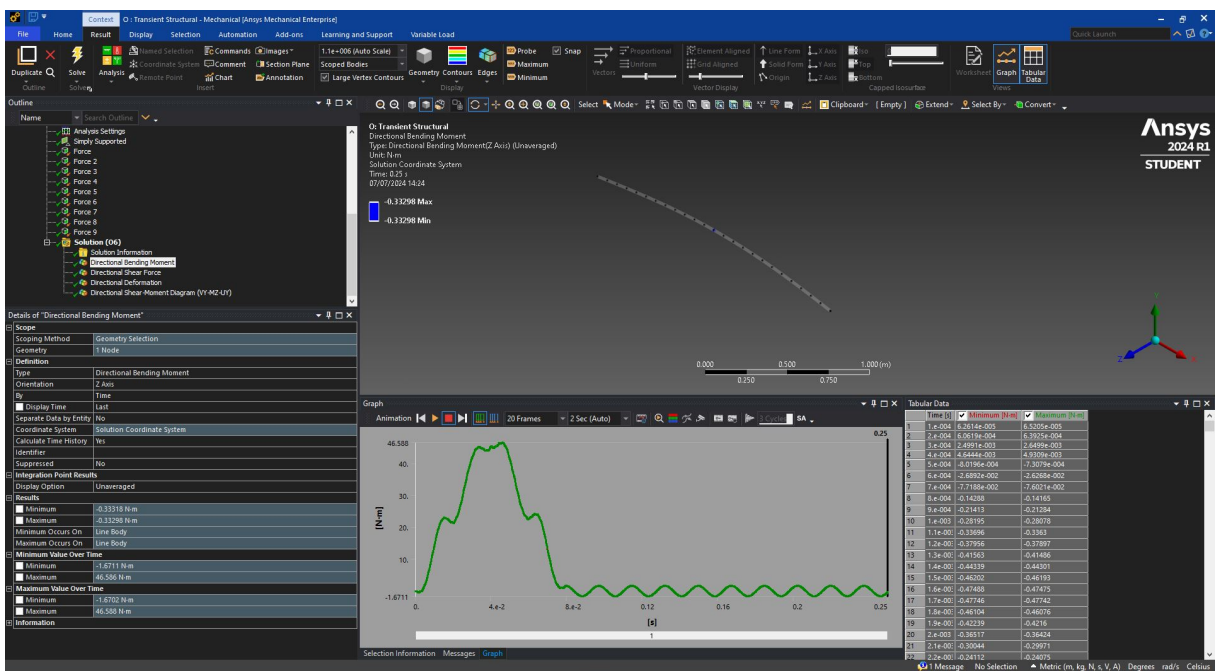


Figura A.35 Momento fletor em função do tempo

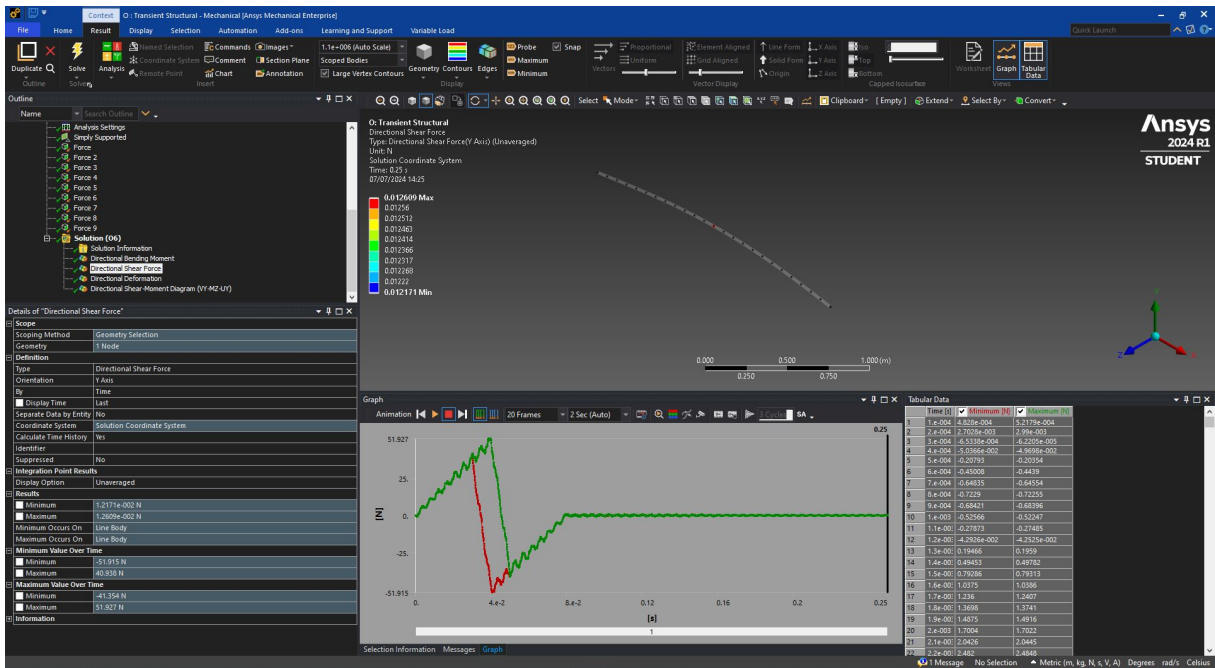


Figura A.36 Esforço transversal em função do tempo

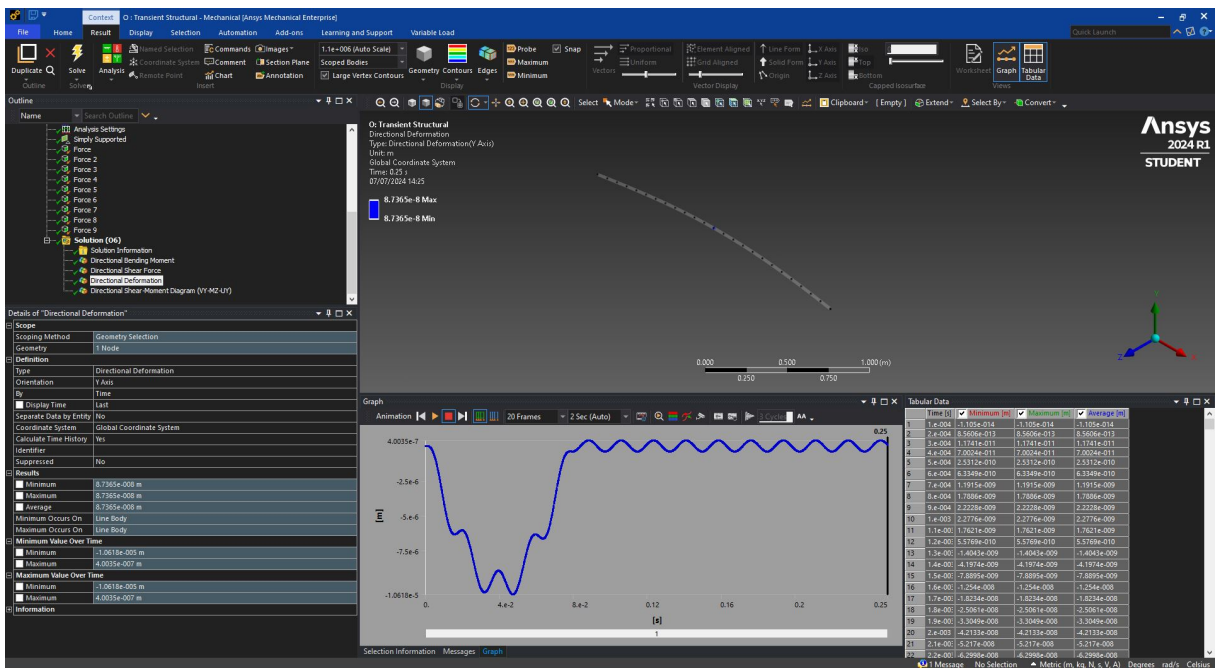


Figura A.37 Deformação em função do tempo

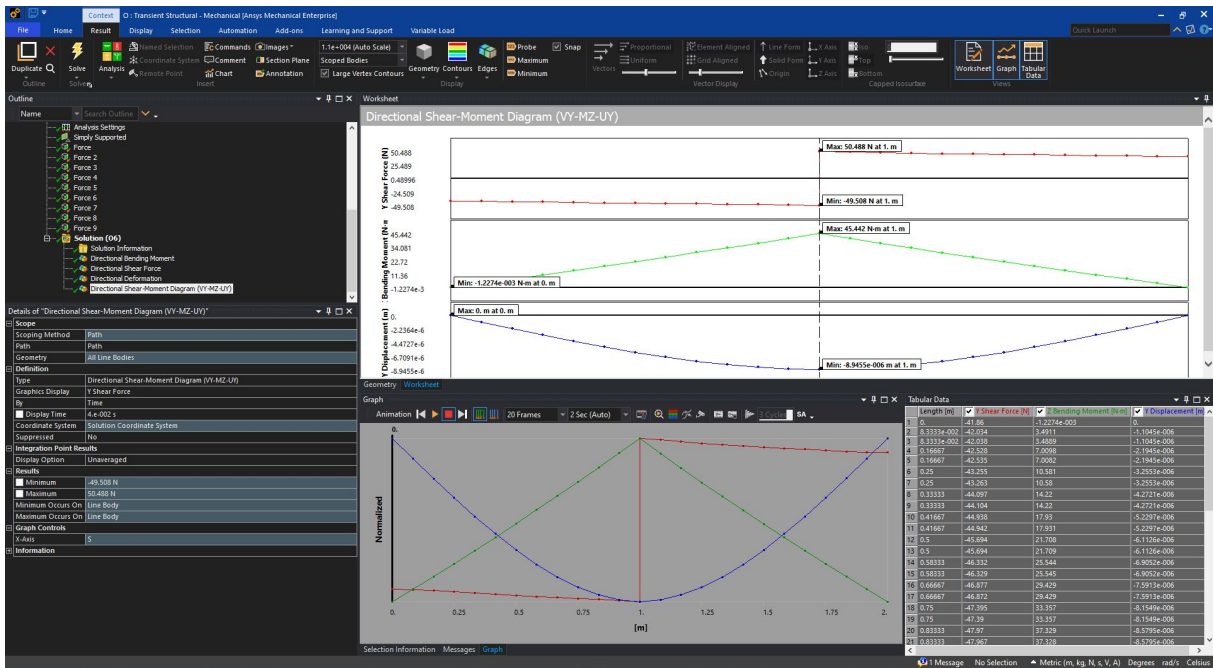


Figura A.38 O diagrama dos vários parâmetros em função da coordenada x

Anexo B

Código Maple™

```
> restart;
> # Comandos:
with(Optimization) :
with(plots) :
# Dados:
L := 2;
m := 78.5;
massa := m·L;
E := 200e9;
B := 0.1;
H := 0.1;
II :=  $\frac{2500}{3} \cdot 10^{-8}$ ;
rho :=  $\frac{m}{B \cdot H}$ ;
P := 100;
v := 25;
xi_n := 0;
# Coeficiente de Amortecimento:
c_e := alpha_e · m;
c_i := alpha_i · E;
xi_n :=  $\frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\alpha_e}{\omega_n} + \alpha_i \cdot \omega_n \right)$ ;
# Forma Modal de Vibração:
phi_n :=  $\sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right)$ ;
# Frequência de Vibração:
omega_n :=  $\frac{n^2 \cdot \pi^2}{L^2} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot II}{m}}$ ;
# Frequência de Vibração Amortecida:
omega_dn :=  $\omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi_n^2}$ ;
# Frequência de Excitação:
Omega_n :=  $\frac{n \cdot \pi \cdot v}{L}$ ;
# Velocidade Adimensional:
S_n :=  $\frac{\Omega_n}{\omega_n}$ ;
# Velocidade Crítica:
```

```

v_cr :=  $\frac{\omega_n \cdot L}{\pi}$ ;
> # Coordenada Generalizada:
q_n :=  $\frac{\left(\frac{2 \cdot P \cdot L^3}{E \cdot I \cdot n^4 \cdot \pi^4}\right)}{(1 - S_n^2)^2 + 4 \cdot (\xi_n \cdot S_n)^2} \cdot \left( (1 - S_n^2) \cdot \sin(\Omega_n \cdot t) - 2 \cdot \xi_n \cdot S_n \cdot \cos(\Omega_n \cdot t) + \exp(-\xi_n \cdot \omega_n \cdot t) \cdot \left( 2 \cdot \xi_n \cdot S_n \cdot \cos(\omega_{dn} \cdot t) + \frac{S_n}{\sqrt{1 - \xi_n^2}} \cdot (2 \cdot \xi_n^2 + S_n^2 - 1) \cdot \sin(\omega_{dn} \cdot t) \right) \right)$ ;
> # Deslocamento em x:
u :=  $\sum_{n=1}^{100} (q_n \cdot \phi_n)$ ;
> # Momento Flector:
M := -E \cdot I \cdot diff(u, x$2);
> # Esforço Transverso:
V := E \cdot I \cdot diff(u, x$3);
> # Deformada em função de t:
plot(subs(x =  $\frac{L}{2}$ , u), t = 0 ..  $\frac{L}{v}$ , gridlines);
> # Deformada em função de x:
plot(subs(t =  $\frac{\left(\frac{L}{v}\right)}{2}$ , u), x = 0 .. L, gridlines);
> # Momento Fletor em função de t:
plot(subs(x =  $\frac{L}{2}$ , M), t = 0 ..  $\frac{L}{v}$ , gridlines);
> # Momento Fletor em função de x:
plot(subs(t =  $\frac{\left(\frac{L}{v}\right)}{2}$ , M), x = 0 .. L, gridlines);
> # Esforço Transverso em função de t:
plot(subs(x =  $\frac{L}{2}$ , V), t = 0 ..  $\frac{L}{v}$ , gridlines);
> # Esforço Transverso em função de x:
plot(subs(t =  $\frac{\left(\frac{L}{v}\right)}{2}$ , V), x = 0 .. L, gridlines);
> # Deformada a Meio Vão
for t from 0.0001 by 0.0001 to 0.08 do

```

```

x :=  $\frac{L}{2}$  :
print(u);

end do:
> # Deformada em t=0.04s
for x from 0 by 0.05 to 2 do

t :=  $\frac{\left(\frac{L}{v}\right)}{2}$  :
print(u);

end do:
> # Momento Fletor a Meio Vão
for t from 0.0001 by 0.0001 to 0.08 do

x :=  $\frac{L}{2}$  :
print(M);

end do:
> # Momento Fletor em t=0.04s
for x from 0 by 0.05 to 2 do

t :=  $\frac{\left(\frac{L}{v}\right)}{2}$  :
print(M);

end do:
> # Esforço Transverso a Meio Vão
for t from 0.0001 by 0.0001 to 0.08 do

x :=  $\frac{L}{2}$  :
print(V);

end do:
> # Esforço Transverso em t=0.04s
for x from 0 by 0.05 to 2 do

t :=  $\frac{\left(\frac{L}{v}\right)}{2}$  :
print(V);

end do:

```