

Processos de raciocínio espacial na articulação entre representações 3D e 2D

Joana Conceição

Colégio Atlântico, Seixal

Margarida Rodrigues

CIED, Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa & UIDEF,

Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

Raciocínio espacial (RE) é definido por Davis et al. (2015) como um conjunto de processos que se organizam em duas partes fundamentais, complementares, coenvolvidas e inextricáveis, *compreender* (mentalmente) e *transformar* (fisicamente). Esta relação que existe entre estas duas partes permite, entre outros aspetos, o estabelecimento de relações, progressivamente mais aprofundadas, entre o que é físico e concreto e o que é mental e abstrato.

Mudar de dimensão constitui um dos processos de RE enumerados por estes autores. Este processo implica a passagem de representações bidimensionais de figuras tridimensionais para representações tridimensionais e a passagem de representações tridimensionais para representações bidimensionais dessas figuras. Isto requer que haja, por um lado, um conhecimento da estrutura das figuras e, por outro lado, o conhecimento de códigos de representação. Nos casos de figuras tridimensionais, estes códigos constituem-se como representações abstratas, relativamente aos modelos 3D, e traduzem-se por símbolos, esquemas, desenhos, onde as relações espaciais presentes procuram representar as relações espaciais do modelo. São exemplos de códigos de representação as representações em perspetiva, em camadas ou a ortogonal codificada (figura 1 a, b e c, respetivamente). Gutiérrez (1996) refere, precisamente, que as representações bidimensionais de figuras tridimensionais implicam perda de informação, porque não é possível representar uma figura 3D no plano, na sua totalidade. Por isso, o conhecimento dos códigos de representação torna-se fundamental para a interpretação de um determinado tipo de representação, permitindo restituir a informação que se perdeu, na passagem do 2D para o 3D.

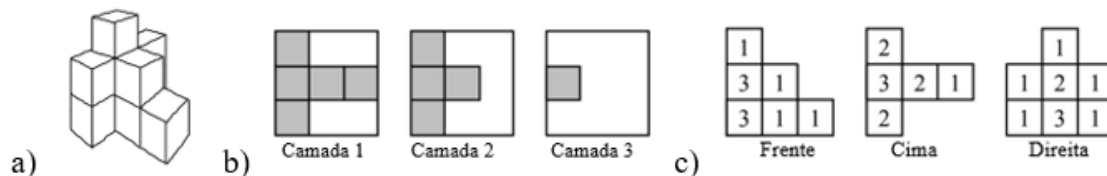


Figura 1. Exemplos de códigos de representação de figuras 3D no plano (Gutiérrez, 1996)

A falta de conhecimentos, por parte dos alunos, no que respeita à articulação entre representações bidimensionais e tridimensionais de objetos tridimensionais, tem sido descrita por diversos autores (e.g. Gutiérrez, 1996) como um dos fatores que gera dificuldade na interpretação de representações bidimensionais de figuras tridimensionais. No entanto, os trabalhos de investigação, neste âmbito, têm se debruçado sobretudo na interpretação de representações formais como as projeções em perspetiva, cavaleira ou isométrica, e poucos têm sido os trabalhos dedicados a compreender que tipo de representações intuitivas utilizam os alunos para representar figuras tridimensionais no plano. Isto parece ser sugestivo da importância de o trabalho, em sala de aula, contemplar, entre outros aspetos, a construção de figuras, a exploração das suas estruturas e das suas formas de representação. Mas sugere também a importância de trabalhar a aprendizagem

das figuras bidimensionais e tridimensionais de forma integrada e articulada, tal como sugerido por Johnston-Wilder e Mason (2005).

Neste sentido, o nosso objetivo, neste artigo, é perceber que tipo de estratégias utilizam alunos do 1.º ano para representar construções tridimensionais, no plano, e que processos de raciocínio estão envolvidos nessa articulação.

Raciocínio espacial

O esquema da figura 2 apresenta uma proposta de Davis et al. (2015) para a caracterização do RE e dos processos envolvidos.

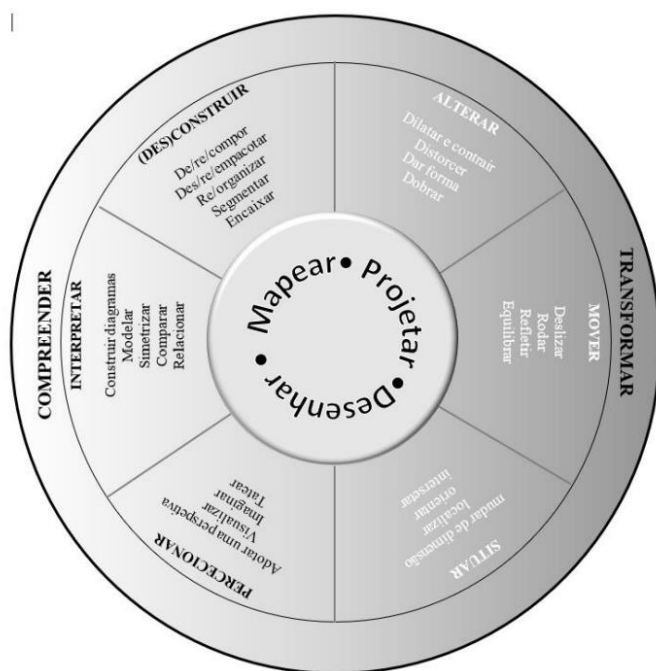


Figura 2. Proposta de Davis et al. (2015) para caracterizar o RE

Dos diferentes processos enumerados por estes autores, estão associados a *compreender*, por exemplo, compor/decompor, organizar/reorganizar, segmentar, comparar, relacionar e imaginar. Estes processos remetem para um trabalho centrado na estrutura das figuras, bidimensionais e tridimensionais, uma vez que parecem incidir em aspetos particulares na sua relação com o todo. Relativamente à parte de *transformar*, os processos incluem deslizar, rodar, refletir, mudar de dimensão, localizar, entre outros. A interação entre os processos associados a *compreender* e a *transformar* parecem contribuir para uma abstração progressiva que emerge a partir da manipulação do que é físico e concreto para a construção e manipulação de representações mentais e abstratas.

Alguns autores têm vindo a evidenciar a importância do desenho de construções na abstração matemática (Sinclair et al., 2018) e na perceção e aprofundamento de relações espaciais (Thom & McGarvey, 2015). Desenhar figuras tridimensionais implica uma mudança no tipo de representação utilizado, para a qual contribuem diferentes processos de RE: relacionar, construir diagramas, compor/decompor, organizar/reorganizar e segmentar (*compreender*) e mudar de dimensão e localizar (*transformar*). Implica também o reconhecimento de relações semelhantes entre a construção 3D e a sua representação 2D. Por isso, é importante criar condições para o trabalho dentro de diferentes tipos de representação, explorando e discutindo formas de representação pessoais para chegar a formas de representação mais formais e inteligíveis.

Por exemplo, Sack e van Niekerk (2009) descrevem diferentes formas de representação de construções com cubos, utilizadas por alunos entre os seis e os sete anos de idade (figura 3).

Figure	A	B	C	D	E	F	G	H
i								
ii								
iii								
iv								
v								
vi								
vii								
viii								

Figura 3. Diferentes categorias de desenhos de policubos (Sack & van Niekerk, 2009, p. 148)

Este trabalho é revelador do desafio que a representação de figuras 3D implica. Por exemplo, na figura 3, as construções *i* a *iv* são passíveis de assentar, totalmente, numa superfície plana, tornando mais fácil o seu registo, enquanto as construções de *v* a *viii* apresentam cubos em profundidade, o que torna o seu registo mais desafiante quando ainda não se conhecem códigos de representação. Também o tipo de relações presentes, neste último grupo de figuras, é mais complexo. Para além deste trabalho, a investigação de Nunes e Rodrigues (2018) com crianças da educação pré-escolar acrescenta o registo de cubos no verso da folha para representar níveis diferentes na construção.

Para perceber a que relações espaciais os alunos recorrem para representar, no plano, as relações espaciais que identificam nas construções tridimensionais, é preciso criar momentos de trabalho para discutir essas representações, procurando que essas discussões conduzam a formas de representação mais formais, socialmente construídas, para que sejam entendidas por todos. Esses momentos devem procurar articular as diferentes formas de representação possíveis para uma determinada figura.

Experiência de ensino

Este estudo foi desenvolvido numa turma de 1.º ano, com 24 alunos e respetiva professora e incidiu nos processos de raciocínio espacial e de estruturação espacial. Dentro das três sequências de tarefas implementadas, foram propostas duas tarefas aos alunos, uma de construção de pentacubos e outra de construção de um paralelepípedo com tricubos, assim como o registo das suas construções, na sua folha de trabalho. Para além destas duas tarefas, ao longo da experiência de ensino, foram várias as oportunidades que foram sendo criadas para levar as crianças a articular as representações bidimensionais e as representações tridimensionais.

Representações bidimensionais de figuras tridimensionais

Começamos por apresentar, na figura 4, uma construção de duas camadas feita por uma aluna da turma, Luzia, e o respetivo registo.

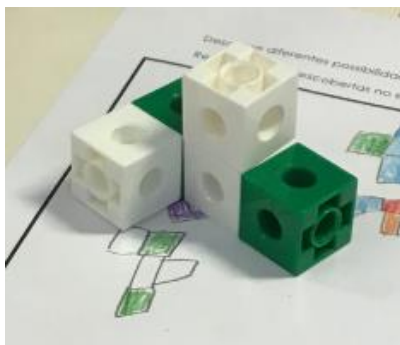


Figura 4. Registo e construção de Luzia para um pentacubo com duas camadas

Este registo é relativo a uma construção com profundidade, feita por Luzia, onde a aluna regista uma espécie de quadrado enviesado, possivelmente, para dar a ideia de níveis diferentes. Embora este registo não forneça as informações adequadas para a sua reconstrução, o modelo mental que a aluna possui, e que deu origem a esta representação, pode corresponder ao modelo 3D. Afirmamos isto, porque o registo de figuras é desafiante e esta estratégia de desenhar um quadrado enviesado parece ter sido o recurso que a aluna encontrou para tentar registar de forma fidedigna. Nesta passagem de uma representação tridimensional para uma representação bidimensional, reconhecem-se diferentes processos de RE, que surgem por força de um processo principal que é mudar de dimensão, como relacionar (diferentes representações), localizar (cubos e compostos), segmentar (a construção em partes).

O facto de o registo de Luzia suscitar dúvidas na interpretação que alguns colegas fazem quando tentam reconstruir a figura (figura 5), leva a professora a conduzir a discussão, no sentido de evidenciar essas discrepâncias e de levar os alunos a refletir sobre formas de registo adequadas:



Figura 5. Construção a partir do registo de Luzia

Professora – Quem olhar bem para esta figura (*Registo da figura 4.*) que a Luzia fez, até parece que é esta (*Mostra a construção da Figura 3.*). Na verdade, o que a Luzia queria fazer era esta (*Mostra a construção de Luzia.*).

Raquel – Porque não dava para fazer... Tinha de colocar ao lado.

Professora – Por que é que não dava para fazer por cima?

Raquel – Porque aquilo é só um papel, não dá para... Tínhamos de fazer do outro lado (*Referindo-se ao verso da folha.*).

Raquel compreende a relação por cima/por baixo, presente na construção, e sugere uma forma de registo que mantém essa relação, embora não seja eficaz nem adequada, do ponto de vista mais formal da representação de figuras tridimensionais. Esta estratégia é também referida por Nunes e Rodrigues (2018), o que sugere que pode ser uma forma de entendimento frequente em crianças destas idades.

Na figura 6, apresentamos uma outra figura construída por Gil e a forma de registo que utilizou para esta construção. Este registo foi discutido na turma por apresentar um código de representação que se começa a aproximar da projeção ortogonal codificada, apresentada por Gutiérrez (1996), embora se trate ainda de uma representação visual.

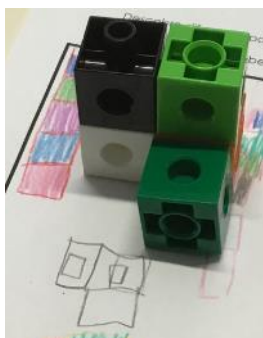


Figura 6. Registo e construção de Gil

O seguinte excerto diz respeito à explicação do aluno:

Gil – Eu fiz assim, porque era mais fácil fazer assim, percebia-se mais. Porque aqui está um cubo maior, aqui está outro cubo grande, aqui está outro cubo grande e aqui, percebia-se que está outro cubo em cima e este aqui é outro cubo.

A sua explicação sugere uma estruturação por camadas, onde o aluno, ao mudar de dimensão, mobiliza, como processos de RE segmentar (em camadas), localizar e relacionar. Embora os processos sejam semelhantes aos utilizados por Luzia, o tipo de relações que estabelece parecem ser diferentes, em parte, porque a própria figura sugere relações diferentes, mas também porque Gil recorre a outro tipo de registo. A sua explicação e o seu desenho sugerem que Gil representa a construção de acordo com o seu modelo mental, a partir da vista de cima. Neste caso, desenha primeiro os cubos da camada inferior, como se não houvesse a camada superior, e depois então os cubos da camada superior, desenhando quadrados mais pequenos para sugerir diferentes níveis.

Desta forma, Gil desenha a construção 3D de uma forma que permite representar de forma coerente relações espaciais nela presentes. No entanto, a professora salvaguardou que a estratégia de registo de Gil seria limitada, no caso de figuras com colunas com muitos cubos e, por isso, apresentou aos alunos a projeção ortogonal codificada, explicando que se poderiam usar números para indicar o total de cubos em cada coluna. Desta forma, a professora procura estabelecer uma relação entre a representação visual de Gil e uma representação simbólica.

Relativamente às construções com tricubos, apresentamos o registo da construção de Dalila (figura 5). A seta indica a perspetiva da aluna.

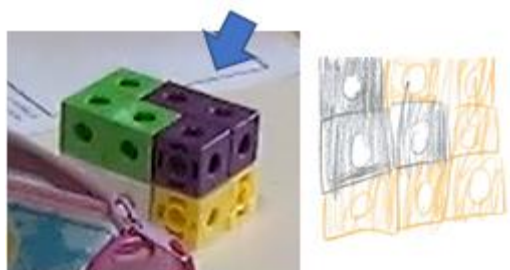


Figura 7. Construção e registo de Dalila

Dalila regista primeiro a vista de cima da construção e depois a vista da frente apenas da camada inferior. Embora a sua estratégia de registo não seja, totalmente, coerente com o modelo 3D, algumas das relações espaciais parecem ter sido tidas em conta. Na passagem da tridimensionalidade para a bidimensionalidade, Dalila parece segmentar a construção em camadas e registar o que vê de cada uma dessas camadas. Apesar de sugerir uma decomposição em camadas, tal como Gil, a forma de representação utilizada por Dalila não representa toda a informação acerca da construção. Não obstante a sua forma de registo ser ainda muito simples, sugere quase a representação em perspetiva.

Na figura 8, vemos o registo de Gil, para a construção de um paralelepípedo, onde a seta indica a perspetiva do aluno. Gil explica o seu significado:

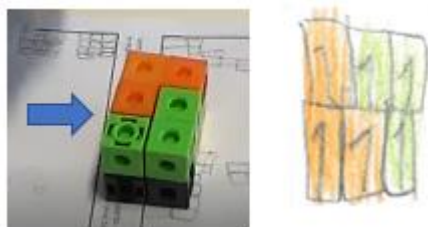


Figura 8. Construção e registo de Gil

Professora – O que significam estes 1?

Gil – Significa que estes... O quadrado que é um e o outro um que é dois.

Gil desenha seis quadrados que representam uma camada da construção, vista de cima, e, dentro de cada quadrado, escreve o número 1 para indicar o número de cubos acima da primeira camada. Contudo, este tipo de representação pode induzir a ideia de que só há um cubo em cada coluna. Gil parece recorrer aos mesmos processos de RE que tinha utilizado anteriormente, mas utiliza um tipo de representação mais abstrata, uma vez que já não desenha os quadrados da camada superior dentro dos quadrados da camada inferior, recorrendo antes a símbolos (números) que representam a quantidade de cubos acima da primeira camada.

Luísa utiliza uma representação semelhante à de Gil, embora escrevendo 2 em cada quadrado, identificando o número total de cubos em cada coluna (figura 9).

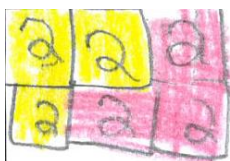


Figura 9. Registo de Luísa

Desta forma, este tipo de representação simbólica parece manter as relações espaciais presentes na construção 3D e, por não revelar ambiguidade, permite uma interpretação fiável do tipo de construção a que se refere.

Relativamente à estratégia de registo de Gil e Luísa, os alunos utilizam representações simbólicas, recorrendo a números para mostrar a quantidade de cubos, embora com significados diferentes. As suas formas de representação evidenciam processos de segmentar, relacionar, localizar, mudar de dimensão e também de modelar, pelo recurso ao registo simbólico.

Conclusões

As estratégias utilizadas por alunos do 1.º ano para representar figuras tridimensionais revelam que, por um lado, estes são capazes de utilizar estratégias informais e, por outro, que procuram manter as relações espaciais que encontram nas figuras tridimensionais. Estas estratégias merecem ser discutidas na sala de aula como forma de promover formas de representação mais sofisticadas. Essa discussão deve ter em conta a articulação entre as diferentes formas de representação.

O processo de representar figuras tridimensionais no plano, mudar de dimensão, é já, em si, um processo de RE, mas os alunos mobilizam outros, como segmentar, localizar, relacionar ou modelar, para poderem compreender melhor os diferentes aspetos das figuras, a partir das relações espaciais estabelecidas. Isto evidencia a importância dos processos de raciocínio espacial, neste tipo de trabalho.

Os desenhos das construções têm um papel fundamental, já que implicam uma análise mais aprofundada da estrutura das figuras e da procura de estratégias de representação que procurem manter as relações presentes nessa estrutura. Esta passagem de um tipo de representação 3D para uma representação 2D é fundamental no processo de abstração.

Agradecimentos:

Este trabalho foi financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia através de uma bolsa concedida à primeira autora (SFRH/BD/130505/2017).

Referências

- Davis, B., Okamoto, Y., & Whiteley, W. (2015). Spatializing school mathematics. In Davis, B. (Ed.) *Spatial reasoning in the early years: Principles, assertions, and speculations* (pp. 121–136). New York: Routledge.
- Gutiérrez, A. (1996). Children's ability for using different plane representations of space figures. In A. R. Batturo (Ed.), *New directions in geometry education* (pp. 33-42). Brisbane, Australia: Centre for Mathematics and Science Education, Q.U.T.
- Johnston-Wilder, S. & Mason, J. (Eds.). (2005). *Developing Thinking in Geometry*. London: The Open University.
- Nunes, M. J. & Rodrigues, M. (2018). Compendo e desenhando formas tridimensionais: um contributo para a caracterização do raciocínio espacial de crianças de 5 anos. *Quadrante*, 27(2). 63–88.
- Sack, J., & van Nierkerk, R. (2009). Developing the spatial operational capacity of young children using wooden cubes and dynamic simulation software. In T. Craine & R.

Rubinstein (Ed.), *Understanding geometry for a changing world: Seventy-first yearbook* (pp. 141-154). Reston: NCTM.

Sinclair, N., Moss, J., Hawes, Z., & Stephenson, C. (2018). Learning through and from drawing in Early Years Geometry. In K. Mix & M. Battista (Eds.), *Visualizing mathematics: The role of spatial reasoning in mathematical thought* (pp. 229-252). Cham, Switzerland: Springer. doi:10.1007/978-3-319-98767-5

Thom, J. S., & McGarvey, L. M. (2015). The act and artifact of drawing(s): observing geometric thinking with, in, and through children's drawings. *ZDM*, 47(3), 465–481.