Instituto Politécnico de Lisboa

ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO DE LISBOA

CONHECIMENTO DO PROFESSOR DO 1º CICLO SOBRE NÚMEROS RACIONAIS

Margarida de Jesus Lucas Perfeito

Dissertação apresentada à Escola Superior de Educação de Lisboa para obtenção do grau de mestre em Educação Matemática na Educação Pré-escolar e nos 1º e 2º Ciclos do Ensino Básico

2015

CONHECIMENTO DO PROFESSOR DO 1º CICLO SOBRE NÚMEROS RACIONAIS

Margarida de Jesus Lucas Perfeito

Dissertação apresentada à Escola Superior de Educação de Lisboa para obtenção do grau de mestre em Educação Matemática na Educação Pré-escolar e nos 1º e 2º Ciclos do Ensino Básico

Orientadora: Professora Doutora Maria Cecília Monteiro

2015

RESUMO

Este estudo visa analisar o conhecimento matemático dos professores do 1º ciclo sobre números racionais, procurando responder às seguintes questões: (1) Que conhecimento revelam os professores do 1º ciclo sobre os números racionais e as suas várias representações?; (2) Como avaliam os professores o conhecimento que têm sobre os números racionais?; e (3) Que dificuldades manifestam os professores relativamente ao trabalho dos números racionais com os alunos?

O estudo seguiu uma abordagem metodológica mista, reunindo componentes da investigação quantitativa e qualitativa.

A recolha de dados decorreu entre 3 e 10 de janeiro de 2014 e foi feita a partir da aplicação de um questionário impresso a 18 professores do 1º ciclo de três escolas públicas, de um agrupamento situado numa zona limítrofe de Lisboa. O questionário pretendeu analisar o conhecimento matemático dos professores sobre números racionais e simultaneamente recolher informações sobre o modo como analisam o seu conhecimento e as dificuldades que sentem no seu ensino.

Os dados indicam que a maioria dos professores não possui conhecimentos sólidos sobre os números racionais, precisando do aprofundamento e esclarecimento de alguns conceitos. As principais dificuldades manifestaram-se nas operações com frações, ao nível concetual. A análise que os professores fazem sobre o próprio conhecimento nem sempre correspondeu ao desempenho nas tarefas, mostrando estar pouco conscientes das suas dificuldades. Segundo os professores, o trabalho com os números racionais apresenta dificuldades inerentes aos alunos, ao próprio conhecimento e ao acesso a materiais de apoio.

Palavras-chave: Conhecimento do professor; números racionais; representações; ordenação e comparação; operações.

ABSTRACT

The main goal of this study is to analyze the mathematical knowledge of elementary level teachers about rational numbers, trying to give answer to the following questions (1) What level of knowledge do teachers have about rational numbers and their numerous representations? ; (2) How do teachers evaluate the knowledge they have about rational numbers? and (3) What are the main difficulties regarding rational numbers when working with the students?

The study had a mixed methodology approach and gathered both quantitative and qualitative components of investigation. The data was collected between the 3rd and 10th of January 2014 and was made through a questionnaire given to 18 elementary level teachers, of three different public schools located in the suburbs of Lisbon. The questionnaire intended to analyze the teachers' mathematical knowledge regarding rational numbers and simultaneously gather information about the way they analyze the knowledge and difficulties felt in teaching.

The results show that most teachers don't possess a strong knowledge about rational numbers, being necessary the deepening and enlightenment of some concepts. The main difficulties were felt in operations with fractions in a concept level. The analysis the teachers made about their own knowledge was not always consistent with the performance, indicating they are not totally aware of their own difficulties. According to teachers, working with rational numbers represents difficulties that are inherent to the students, knowledge and access to support materials.

Key words: Teachers' knowledge, rational numbers, representations, ordination and comparison, operations.

AGRADECIMENTOS

À minha orientadora, professora doutora Maria Cecília Monteiro, pela disponibilidade, pela paciência, pelos conselhos, pelas sugestões e pelas preciosas orientações. Um grande obrigada!

A todos os professores (colegas excecionais) que participaram no estudo e sem os quais ele não teria sido possível.

Ao diretor do agrupamento onde o estudo foi realizado.

À minha família que sempre me apoiou e soube compreender os momentos de ausência.

A ti, meu companheiro, pelo apoio, pela força e compreensão, e por não me deixares desistir nos momentos menos bons.

A duas amigas especiais que nunca deixaram de me dar força, coragem e apoio.

A todos aqueles que me deram força e acreditaram em mim...

ÍNDICE GERAL

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS

NCTM Princípios e Normas para a Matemática Escolar
C01 Professor 01
C02 Professor 02
C03 Professor 03
C04 Professor 04
C05 Professor 05
C06 Professor 06
C07 Professor 07
C08 Professor 08
C09 Professor 09
C10 Professor10

C11	Professor 11
C12	Professor 12
C13	Professor 13
C14	Professor 14
C15	Professor 15
C16	Professor 16
C17	Professor 17
C18	Professor 08

ÍNDICE DE ANEXOS

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Neste primeiro capítulo exponho as razões que determinaram a escolha do tema para o estudo e a pertinência do mesmo. Refiro o objetivo da investigação e as questões de investigação, e faço referência à forma como a dissertação está organizada.

1.1. Pertinência do estudo

Os números racionais são, simultaneamente, um dos temas matemáticos mais difíceis e mais importantes do currículo do ensino básico. A investigação nesta área tem tido grande destaque no panorama da investigação incidindo em diferentes aspetos do seu ensino-aprendizagem. Houve dois desses aspetos que me despertaram particular atenção e que motivaram a realização deste estudo; a dificuldade concetual que os números racionais envolvem e o conhecimento necessário para os ensinar.

A pertinência do estudo reside na necessidade de se continuar a investigar sobre os números racionais, visto que pouco se tem evoluído na descoberta da complexidade do seu ensino-aprendizagem (Lamon, 2007), na importância que o conhecimento do professor representa na aprendizagem dos alunos (Ball, Lubienski e Mewborn, 2001), e na crescente importância que estes números têm adquirido no currículo de matemática do 1º ciclo em Portugal.

Segundo Behr, Lesh, Post e Silver (1983) e Lamon (2007), os números racionais são considerados um dos tópicos matemáticos mais importantes do currículo do ensino básico, possibilitando o desenvolvimento de estruturas cognitivas fundamentais à aprendizagem matemática. O desenvolvimento dessas estruturas assenta em três vertentes distintas; uma vertente *prática*, dado que a capacidade de lidar com estes conceitos melhora a capacidade de compreender e resolver situações e problemas do dia a dia; uma vertente *psicológica,* pois proporcionam o desenvolvimento e a expressão das estruturas mentais necessárias ao crescimento inteletual; e ainda uma vertente *matemática*, uma vez que a compreensão destes conceitos constitui a base na qual assentam mais tarde as operações algébricas (Behr et al., 1983).

Segundo Lamon (2007), os números racionais são um dos mais complexos e difíceis de ensinar, revelando-se ao longo da escolaridade básica de difícil compreensão pelos alunos, mas também de difícil gestão didática para os professores Segundo a autora, a complexidade dos números racionais verifica-se tanto no aspeto matemático como pedagógico e a sua compreensão implica um entendimento dos seus significados em vários contextos, bem como o estabelecimento de relações entre as suas diferentes representações. A aprendizagem dos números racionais constitui, assim, um grande desafio tanto para os alunos como para os professores (Behr et al. 1983).

Os conhecimentos matemáticos que os alunos possuem, a capacidade de os utilizar na resolução de problemas, a confiança e a pré-disposição em relação à matemática, são influenciados pelo tipo de ensino (*Princípios e Normas para a Matemática Escolar* [NCTM], 2008) e pelas experiências que os professores lhes proporcionam. Diversos estudos ilustram as dificuldades dos alunos na aprendizagem dos números racionais, mostrando que estes estão mais confiantes no domínio dos números naturais do que nos racionais.

Tendo analisado em profundidade o conhecimento dos professores em matemática escolar, Ma (2009) sugere que para melhorar a educação matemática dos alunos é importante melhorar a qualidade do conhecimento dos professores, pois "a qualidade do conhecimento da matéria pelo professor afecta directamente a aprendizagem dos alunos" (Ma, 2009, p.246).

A matemática lecionada no ensino básico é a base sobre a qual são construídos os alicerces para aprendizagens futuras. Segundo Ma (2009) "a matemática *elementar* é um campo intelectualmente exigente, desafiador e excitante – uma base sobre a qual muito se pode construir" (p. 202), pois as ideias aparentemente simples formadas nas mentes dos alunos irão ser necessárias durante todo o percurso da sua aprendizagem matemática.

A matemática ensinada nos primeiros anos, especialmente no 1º ciclo, contém conceitos fundamentais no âmbito dos números racionais, pelo que o trabalho desenvolvido neste nível de ensino é crucial. As orientações curriculares para o ensino da matemática dão indicações precisas sobre o trabalho do professor do 1º ciclo. Cabe ao professor "organizar os meios e criar o ambiente propício à concretização do programa, de modo a que a aprendizagem seja, na sala de aula, o reflexo do dinamismo das crianças e do desafio que a própria Matemática constitui para elas" (Ministério da Educação [ME], 2007, p. 163). O professor "deve propor aos alunos a realização de diferentes tipos de tarefas, dando-lhes uma indicação clara das suas expectativas em relação ao que espera do seu trabalho, e apoiando-os na sua realização" (ME, 2007, p. 8). As situações sugeridas aos alunos devem envolver contextos matemáticos e não matemáticos e incluir outras áreas do saber e situações do quotidiano dos alunos (ME, 2007). Os professores devem também determinar quais os aspetos a realçar numa dada tarefa, como organizar e orientar o trabalho dos alunos, que perguntas fazer de modo a desafiar os diversos níveis de competência, como apoiá-los (NCTM, 2008).

O atual programa de matemática prevê que os temas em estudo sejam introduzidos de forma progressiva, começando-se por um trabalho experimental e concreto, e avançando-se faseadamente para uma conceção mais abstrata (Ministério da Educação [ME], 2013).

Vários autores, por exemplo Serrazina (2012), referem que cabe aos professores do 1º ciclo tomar decisões, de forma consciente, sobre que parte dos conhecimentos matemáticos ensinar, em que momento é conveniente ensiná-los e de que forma pode ser mais adequado tratá-los. Por outro lado, é fundamental que possuam conhecimentos matemáticos sólidos e eficazes, contrariando a ideia de que os tópicos que constituem o currículo do 1º ciclo são fáceis de ensinar e como tal não requerem um conhecimento aprofundado. Segundo Ma (2009), os professores devem ser capazes de selecionar, preparar e implementar tarefas que visem, por exemplo, a exploração de diferentes aspetos inerentes ao conceito de número racional, como as diferenças entre os seus vários significados e representações, os diferentes tipos de unidade, e as formas de comparar quantidades de diferentes ordens de grandeza.

O currículo do 1º ciclo dos últimos anos (2007 e 2013) introduziu alterações significativas no domínio dos números racionais, concedendo às frações uma importância gradual, e introduzindo conceitos anteriormente só abordados em anos subsequentes.

De acordo com o programa de matemática de 1990 (Ministério da Educação [ME], 2004), o contacto dos alunos com as frações surgia no 2º ano, através da identificação de $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{10}$, etc., enquanto operadores de um número. Este programa colocava a ênfase na representação decimal, prevendo a exploração de situações que conduzissem à descoberta dos números decimais, a representação de números decimais na reta numérica e a introdução dos algoritmos com números decimais.

O programa de matemática de 2007 sugeriu alterações significativas ao anterior, pressupondo a abordagem a outros significados das frações (quociente, parte-todo e operador), e o trabalho com as representações fracionária e decimal em paralelo. Segundo este programa, o aluno deve, em cada situação, "ser capaz de usar a representação mais adequada, mas deve igualmente ser capaz de passar com facilidade de uma representação para outra" (ME, 2007, p.7). A representação dos números na reta numérica adquiriu também uma importância significativa, assim como a reconstrução da unidade a partir das suas partes. O programa previa que o trabalho com números racionais se iniciasse nos dois primeiros anos de escolaridade, de forma intuitiva, baseada em situações de partilha equitativa e de divisão da unidade em partes iguais. O estudo dos números racionais seria aprofundado nos 3º e 4º anos, quer recorrendo a problemas que permitissem trabalhar outros significados das frações, quer introduzindo números representados na forma decimal, partindo de situações de partilha equitativa ou de medida. O trabalho com os números racionais deveria ainda incluir a exploração de situações que contribuíssem para o desenvolvimento da compreensão dos conceitos de razão e proporção.

As atuais orientações curriculares, preconizadas pelo programa de matemática de 2013, prevêem a abordagem dos racionais o mais cedo possível no percurso escolar dos alunos e introduzem novas orientações, dando grande destaque às frações e antecipando temas usualmente só abordados no 2º ciclo, como a adição e subtração com frações e a multiplicação de uma fração por um número natural.

O estudo das frações "constitui um tema chave do 1º ciclo devendo procurar-se que os alunos assimilem os diferentes aspetos relacionados com esta temática" (ME, 2013, p.6). As frações deverão ser introduzidas geometricamente a partir da decomposição de um segmento de reta em segmentos de igual comprimento e desde logo utilizadas para expressar medidas de diferentes grandezas, fixadas as unidades.

Ainda segundo este programa,

> o subsequente tratamento das frações, assim como a construção dos números racionais positivos que elas representam, devem ser efetuados com o possível rigor e de forma cuidadosa, garantindo-se, por exemplo, que os alunos interpretem

> corretamente as dízimas finitas como uma mera representação de um tipo muito particular de frações, devendo evitar o recurso sistemático às dízimas sempre que pretenderem efetuar cálculos (ME, 2013, p.6).

No domínio Números e Operações são apresentadas as quatro operações sobre os números naturais, "iniciando-se a partir do 3º ano a sua extensão aos números racionais" (ME, 2013, p. 6). A representação de números racionais sob forma de percentagem é apresentada no 4º ano no domínio Organização e Tratamento de Dados.

1.2. Objetivo e questões de investigação

Considerando as dificuldades inerentes ao estudo dos números racionais identificadas na literatura e a crescente relevância que este tema tem vindo a ocupar no currículo nacional do 1º ciclo, foi minha intenção, neste estudo, aliar a investigação sobre o conhecimento do professor e a investigação sobre os números racionais, pretendendo contribuir para uma melhor compreensão do conhecimento dos professores do 1º ciclo relativamente a esse tema. Assim, o objetivo deste estudo consiste em *analisar o conhecimento matemático dos professores do 1º ciclo sobre números racionais*, partindo das seguintes questões de investigação:

1 - Que conhecimento revelam os professores do 1º ciclo sobre os números racionais e as suas várias representações?

2 - Como avaliam os professores o conhecimento que têm sobre os números racionais?

3 - Que dificuldades manifestam os professores relativamente ao trabalho dos números racionais com os alunos?

1.3. Organização da dissertação

A dissertação encontra-se organizada em 5 capítulos. No primeiro capítulo identifico as razões que estiveram na origem da escolha do tema e a pertinência do mesmo, faço referência ao objetivo do estudo e às questões de investigação e, por fim, apresento a organização da dissertação.

No segundo capítulo apresento o enquadramento teórico, de acordo com a revisão da literatura. Este capítulo encontra-se dividido em duas temáticas; (1) o conhecimento do professor, que faz referência ao conhecimento do professor para ensinar e ao conhecimento do professor para ensinar os números racionais; e (2) o conceito de número racional, onde são abordadas as representações, a comparação e ordenação, e as operações com números racionais.

No terceiro capítulo apresento as opções metodológicas adoptadas, caraterizo os participantes e menciono as razões da sua seleção, explicito o processo de recolha de dados e refiro os instrumentos usados nessa mesma recolha.

O quarto capítulo diz respeito à análise dos dados recolhidos durante a investigação. Essa análise é apresentada em duas partes; uma relativa à análise das tarefas presentes na primeira parte do questionário, e outra sobre a avaliação dos professores em relação ao próprio conhecimento.

Por fim, no quinto e último capítulo, exponho as principais conclusões do estudo, as suas limitações, e apresento algumas considerações para estudos futuros, terminando com uma reflexão final sobre a realização deste trabalho.

CAPÍTULO 2

ENQUADRAMENTO TEÓRICO

Este capítulo encontra-se dividido em duas grandes temáticas: o conhecimento do professor e o conceito de número racional. Relativamente ao conhecimento do professor, é feita uma abordagem ao conhecimento para ensinar e ao conhecimento para ensinar os números racionais, do ponto de vista de diversos autores reconhecidos na literatura nacional e internacional. Sobre o conceito de número racional discutem-se aspetos como o significado das frações, as representações, a densidade, as operações, e a ordenação e comparação destes números.

2.1. Conhecimento do professor para ensinar

O conhecimento do professor reveste-se de uma enorme exigência e estende-se por múltiplas dimensões. O professor deve saber como os conteúdos se integram no currículo, sentir-se seguro nos conteúdos a tratar e na(s) maneira(s) de os ensinar, recorrer aos recursos educativos mais adequados, perceber os alunos com quem trabalha e a(s) forma(s) como aprendem, refletir sobre as suas atuações docentes.

Para Ponte, Oliveira, Brunheira, Varandas e Ferreira (1998b) o conhecimento profissional do professor emerge da articulação entre os saberes do conhecimento académico e a ação educativa e "baseia-se sobretudo na experiência e na reflexão sobre a experiência, não só individual mas de todo o corpo profissional" (p. 44).

Quando se fala em conhecimento do professor há acordo quanto ao ser indispensável saber os conteúdos matemáticos que tem de ensinar. No entanto, este conhecimento não é suficiente, para além de conhecer os conteúdos a ensinar, é também necessário saber como ensiná-los. Ao ensinar, o professor não se pode limitar a introduzir cada um dos tópicos "desgarrados" dos outros, tem de estabelecer conexões entre os vários domínios da matemática e relacionar o que os alunos já sabem com aquilo que vão aprender, não esquecendo aquilo que irão aprender no futuro (Ball & Bass, 2003). Uma compreensão aprofundada dos temas da matemática que ensinam permite intervenções junto dos alunos que lhes favorecem um desenvolvimento articulado de conhecimentos (Monteiro, 2009).

Ensinar, nomeadamente ensinar matemática, é uma tarefa complexa e não existem receitas para que todos os alunos aprendam ou todos os professores sejam eficientes. É certo, contudo, que os alunos aprendem matemática através das experiências que os professores lhes proporcionam e nesse sentido os conhecimentos matemáticos dos professores, a capacidade de os utilizar, a sua confiança e pré-disposição em relação à matemática, assumem-se como aspetos essenciais. “Para serem eficientes, os professores devem saber e compreender profundamente a matemática que ensinam e ser capazes de utilizar os seus conhecimentos de forma flexível no decurso das suas atividades didáticas” (NCTM, 2008, p. 18).

Parece consensual que para se ensinar um assunto o professor necessita de possuir um conhecimento aprofundado (Ma, 2009, Monteiro, 2009) que vai muito para além do conhecimento estritamente matemático que é exigido a outros profissionais que lidam com a matemática. Esse conhecimento engloba um domínio do conhecimento matemático específico, traduzido pela articulação de conhecimentos e de conceitos ligados ao currículo, aos materiais disponíveis e a um conhecimento das caraterísticas e do pensamento dos alunos.

Para Ponte (1992), a ação e a reflexão são as atividades fundamentais em que se desenvolve o saber matemático. A ação tem a ver com a manipulação de objetos e representações. A reflexão consiste no pensar sobre a ação, sendo estimulada pela explicação e discussão, a partir da comunicação e interação. Podemos distinguir, na perspetiva do autor, quatro níveis de competências no saber matemático do professor, de acordo com a sua função e nível de complexidade: *competências elementares*, i*ntermédias*, *complexas* e os *saberes de ordem geral*. Os três primeiros níveis representam uma progressiva complexidade natural, enquanto o quarto nível desempenha um papel fundamentalmente regulador. As *competências elementares* envolvem simples processos de memorização e execução. As *competências intermédias* implicam processos com maior grau de complexidade mas pouca criatividade. As *competências complexas* envolvem uma capacidade significativa de lidar com novas situações. Por fim, os *saberes de ordem geral* abarcam os meta-saberes, saberes com influência nos próprios saberes e competências. As *competências elementares* implicam o conhecimento de fatos específicos e terminologia, a identificação e compreensão de conceitos, a capacidade de execução de procedimentos, o domínio de processos de cálculo, a capacidade de “leitura” de textos matemáticos simples e a comunicação de ideias matemáticas simples. Relativamente *às competências intermédias*, estas requerem a compreensão de relações matemáticas (teoremas, proposições), a compreensão de uma argumentação matemática, a resolução de problemas (nem triviais, nem muito complexos) e a aplicação a situações simples. Como competências avançadas (ou de ordem superior) entende-se a exploração ou investigação de situações, a formulação e teste de conjeturas, a formulação de problemas, a resolução de problemas (complexos), a realização e crítica de demonstrações e a análise crítica de teorias matemáticas. Por fim, os *saberes de ordem geral* abrangem os conhecimentos dos grandes domínios da matemática e das suas inter-relações, o conhecimento de aspetos da história da matemática e das suas relações com as ciências e a cultura em geral e ainda o conhecimento de momentos determinantes da matemática. Como é referido por Ponte (2002), o trabalho num determinado nível implica a mobilização de saberes e competências dos níveis anteriores.

A natureza do conhecimento necessário para ensinar tem sido objecto de estudo e é geralmente reconhecido que, apesar de não ser o único fator a ter em conta, tem impacto na aprendizagem dos alunos. O que o professor ensina e o modo como o faz está relacionado com o nível de compreensão do assunto e como o integra no currículo escolar (Monteiro, 2009).

Para Ponte e Serrazina (2000) ”o professor precisa de se sentir à vontade na matemática que ensina” (p.15), pelo que quando inicia um novo tópico, deve considerar as ideias fundamentais desse tópico, os conceitos, representações, procedimentos e técnicas mais importantes e a diversidade de tarefas e processos matemáticos que podem surgir durante a sua abordagem. Da mesma forma, deve aferir o que alunos já devem saber de aprendizagens informais ou do seu trabalho anterior, assim como os assuntos a que mais adiante darão continuidade. (Ponte & Serrazina, 2000).

Azcárate (1999) refere que o professor, com as suas concepções sobre a matemática e o seu ensino, e com o seu conhecimento matemático, determina o tipo de atividade matemática que é proporcionado aos alunos. Por isso, se não tiver, ele próprio, desenvolvidas competências matemáticas significativas não poderá contribuir para o seu desenvolvimento pelos alunos e não terão expressão no seu ensino quaisquer inovações a que possa ter acesso, como novos currículos ou novos materiais de apoio. Quando os professores em vez de focarem a sua atenção somente nas regras e procedimentos, se envolvem em raciocínios e encontram representações alternativas, estão a desenvolver o seu conhecimento específico para ensinar (Hill & Ball, 2004).

Ball e Bass (2003) enumeram um conjunto de aspetos que se espera que o professor que ensina matemática tenha em conta, nomeadamente: (i) *encontrar explicações corretas do ponto de vista da matemática mas que sejam compreendidas pelos seus alunos.* É sabido que o conhecimento que o professor possui não pode ser "passado diretamente" para os alunos. O professor tem de "desconstruir" o conhecimento matemático, isto é torná-lo acessível, de modo que os seus alunos o possam compreender; (ii) *utilizar definições matemáticas adequadas e compreensíveis*. O professor tem de perceber o que é essencial numa definição e ser capaz de fazer uma análise crítica do que encontra nos livros. Tem de avaliar, arranjar exemplos e contra-exemplos, de modo a chegar a uma definição que seja adequada e compreensível. É fundamental que conheça as definições, mas também que tenha a sensibilidade necessária para compreender quando e como as pode trabalhar; (iii) *representar ideias matemáticas de diferentes formas*, fazendo a correspondência entre as representações concretas, icónicas e simbólicas; (iv) *interpretar e julgar do ponto de vista matemático e didático as questões, as resoluções, os problemas e as observações dos alunos* (quer os previsíveis quer os não previsíveis). O professor tem de interpretar as respostas dadas pelos alunos e pensar nas respostas possíveis para determinada tarefa; (v) *ser capaz de responder às questões e curiosidades matemáticas dos seus alunos*; (vi) *avaliar a qualidade matemática dos materiais de ensino disponíveis e modificá-los quando o considerar necessário*; (vii) *ser capaz de fazer boas perguntas e apresentar bons problemas de matemática aos seus alunos* de modo que estes progridam na sua aprendizagem; e (viii) *avaliar as aprendizagens matemáticas* dos alunos e tomar decisões sobre como continuar o seu ensino.

A investigação sobre o conhecimento profissional do professor iniciou-se com o trabalho de Shulman em 1986. O autor reuniu em três categorias de conhecimento as competências que o professor precisa de desenvolver para ensinar uma dada disciplina: *conhecimento do conteúdo*, *conhecimento pedagógico do conteúdo* e *conhecimento curricular*. Segundo o autor, o professor deve ser capaz de definir e defender perante os alunos as verdades aceites nesse domínio (*conhecimento do conteúdo*). Por outro lado, deve conhecer as formas mais úteis de representar as ideias da sua disciplina, ser capaz de fazer analogias, ilustrações, ou seja, conhecer a melhor forma de se tornar compreensível para os outros (*conhecimento pedagógico do conteúdo*). E, finalmente, o professor deve, ainda, conhecer todo o currículo, os tópicos que o compõem, o grau de profundidade com que devem ser tratados e os materiais disponíveis para apoiar a sua abordagem (*conhecimento curricular*).

Em 1987, Shulman reformulou o seu modelo sobre o conhecimento do professor apresentando sete categorias de conhecimento que, segundo o próprio, são a base para o ensino: (i) *conhecimento do conteúdo*; (ii) *conhecimento pedagógico*; (iii) *conhecimento curricular*; (iv) *conhecimento pedagógico do conteúdo*; (v) *conhecimento dos alunos e das suas caraterísticas*; (vi*) conhecimento de contextos educativos*; e (vii) *conhecimento de fins educacionais, propósitos e valores e seus fundamentos filosóficos e históricos*.

Ball, Lubienski e Mewborn (2001), analisando a investigação sobre o conhecimento matemático do professor destacam duas abordagens gerais; uma que enfatiza os professores e outra que salienta o conhecimento dos professores. A primeira abordagem centra-se nas caraterísticas dos professores e considera o *conhecimento do conteúdo* essencial para se poder ensinar. Segundo esta perspetiva, os cursos frequentados, os graus conseguidos ou a certificação recebida representam o conhecimento requerido para ensinar, podendo ser "medido" usando esses indicadores. A segunda abordagem da investigação centra-se no conhecimento dos professores e constrói-se a partir da primeira, reconhecendo a importância do *conteúdo do conhecimento matemático do professor*, e baseando-se, em parte, no conhecimento de como as ideias matemáticas devem ser representadas ou como os alunos aprendem, e no que têm dificuldade.

Hill e Ball (2004) reconhecem as relações de interdependência entre as diferentes componentes do conhecimento dos professores, mas subdividem o conhecimento do conteúdo em *conhecimento comum do conteúdo* e *conhecimento especializado*. O *conhecimento comum* integra, por exemplo, a capacidade de reconhecer as respostas erradas e as definições imprecisas nos manuais escolares, enquanto o *conhecimento especializado do conteúdo* envolve competências como a capacidade de analisar os erros dos alunos e de avaliar as suas ideias alternativas. Estes autores subdividiram ainda a categoria do *conhecimento pedagógico do conteúdo* em *conhecimento do conteúdo e dos alunos* e *conhecimento do conteúdo e do ensino*.

Hill, Ball e Shilling (2008) propõem um modelo para a concetualização do conhecimento do professor (Fig. 1) que apresenta diversas divisões das categorias apresentadas por Shulman (1986):

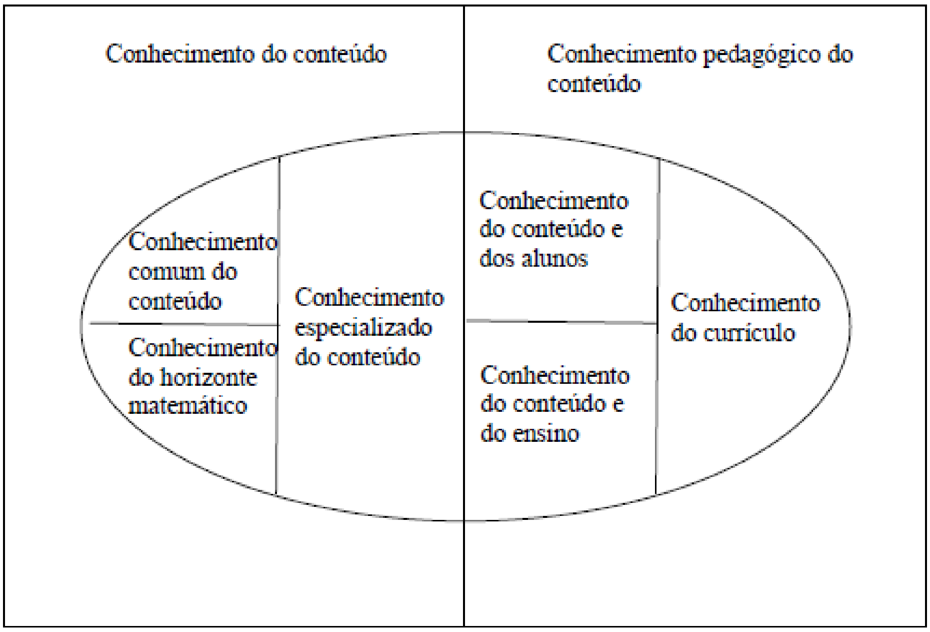


Figura 1. Conhecimento dos professores (Hill, Ball e Schiling, 2008)

Segundo este modelo, o conhecimento do professor abrange duas grandes componentes: *conhecimento do conteúdo* e *conhecimento pedagógico do conteúdo*. O *conhecimento do conteúdo* engloba *o conhecimento comum do conteúdo*, o *conhecimento especializado* e o *conhecimento do horizonte matemático*. O *conhecimento comum do conteúdo* é um conhecimento que é usado pelo professor no desenvolvimento das tarefas ao ensinar, e simultaneamente noutros contextos que não os do ensino. Pode ser considerado como o conhecimento da matemática comum a muitas outas profissões. O *conhecimento especializado do conteúdo* é um conhecimento próprio e único para planear e conduzir o ensino de determinado assunto. Relativamente ao *conhecimento do horizonte matemático*, Hill et al. (2008), definem-no como o modo como os vários tópicos estão relacionados dentro do currículo. A segunda componente do conhecimento diz respeito ao *conhecimento pedagógico do conteúdo*, que por sua vez engloba o *conhecimento do conteúdo e dos alunos*, o *conhecimento do conteúdo do ensino* e o *conhecimento do currículo*. Um aspeto importante deste tipo de conhecimento á o facto de estar dependente do *conhecimento comum do conteúdo*. O *conhecimento do conteúdo e do ensino* concilia o *conhecimento do conteúdo matemático* com os princípios pedagógicos para ensinar cada tópico. Por sua vez, o *conhecimento do conteúdo e dos alunos* interliga o conhecimento do conteúdo com o conhecimento de como os alunos pensam sobre um determinado aspeto do conteúdo e ainda o que sabem sobre esse conteúdo, ou o modo como aprendem determinado conteúdo, sendo que ao professor cabe analisar as conceções e possíveis mal-entendidos que os alunos possam apresentar. Por último, *o conhecimento do currículo* inclui o conhecimento de programas traçados para o ensino e diversos materiais relacionados com esses programas, assim como as vantagens e desvantagens de usar os diversos programas e recursos materiais em diferentes circunstâncias.

Ball,Thames e Phelps (2008) reconhecem que há situações da prática em que é difícil distinguir o *conhecimento comum* do *conhecimento especializado do conteúdo* e noutras situações *o conhecimento* especializado do conhecimento do conteúdo e dos alunos. Defendem que essas categorias precisam de ser revistas e aperfeiçoadas e reforçam a importância da continuação do trabalho em favorecimento do desenvolvimento profissional do professor.

2.1.1. Conhecimento do professor para ensinar os números racionais

O conhecimento do professor pode ser considerado sob diferentes perspetivas, cabendo neste ponto fazer uma análise sobre o conhecimento necessário para ensinar os números racionais e compreender como esse conhecimento deve ser mobilizado quando o professor ensina.

O conhecimento profundo dos diferentes conceitos associados aos números racionais é fundamental para a sua compreensão (Post, Cramer, Behr, Lesh & Harel, 1993), dado que muitas das dificuldades sentidas por alunos e professores sobre os números racionais advém de conflitos concetuais provocados pelas suas propriedades, nomeadamente o facto de ser um conjunto denso e cujos elementos apresentam múltiplas representações (Monteiro & Pinto, 2007). O conhecimento concetual é um conhecimento rico em relações, podendo ser pensado como uma teia de conhecimentos ligados, uma rede na qual são tão importantes as relações como os segmentos discretos de informação (Post & Cramer, 1989), devendo ser tido em conta quando o professor ensina.

Para ensinar os números racionais não basta ao professor ter o conhecimento dos tópicos a ensinar, é necessário que esteja atento e consciente da rede de ligações que se estabelecem entre os tópicos e como se estabelecem estas redes (Ma, 2009). A falta desse conhecimento leva a uma abordagem essencialmente processual, centrada na mecanização e consequentemente a práticas que enfatizam os processos sem explorar os significados.

Para além do conhecimento dos tópicos a ensinar e da forma como estes se articulam, Shulman (1986) salienta que o professor deve saber como transformar o seu conhecimento em conhecimento para os alunos, saber como apoiá-los, identificar o conhecimento que devem aprender, as suas dificuldades quando aprendem, e as orientações curriculares para o ensino do conteúdo. Por exemplo, é importante que o professor saiba que pode introduzir a multiplicação de números racionais, partindo de situações como a simplificação de adições sucessivas de um número racional representado por uma fração. É igualmente importante que o professor seja capaz de antever os erros e equívocos dos alunos e prever soluções em tarefas específicas. Deve reconhecer, por exemplo, que quando muitos alunos adicionam numeradores e denominadores numa adição de frações, ignoram que deveriam somar partes iguais da unidade, devendo para isso substituir as frações dadas por frações equivalentes com o mesmo denominador (Norton, McCloskey & Hudson, 2011).

O desenvolvimento de um completo conhecimento dos números racionais, assumindo o professor um papel de destaque na e para a aprendizagem dos alunos, apenas será possível se este detiver um conhecimento sobre o tema que lhe permita preparar e implementar tarefas que sejam matematicamente desafiadoras. No âmbito dos números racionais, compete ao professor, entre outros, um conhecimento que lhe permita preparar e implementar tarefas com vista à exploração dos diferentes construtos associados ao conceito de número racional, tendo em consideração a multiplicidade de possíveis formas de representação (Pinto & Ribeiro, 2013).

Para possibilitar aos alunos uma efetiva compreensão do conceito de número racional é fundamental que os professores sejam, também eles, conhecedores dos diferentes aspetos do conteúdo que pretendem abordar, das suas diferentes formas de representação e de formas de os explorar e abordar em contexto. Neste sentido, cumprirá ao professor entre outros, um conhecimento elementar que permita responder às questões do nível dos alunos, mas também um conhecimento que lhe permita levar os alunos a atribuir sentido e significado ao que fazem e porque o fazem (Pinto & Ribeiro, 2013). Por exemplo, o professor deve ser detentor de um conhecimento que lhe permita obter uma resposta correta a questões como: *que parte de uma determinada figura está pintada*; *quanto é* $\frac{3}{5}$ *de 30*; *se* $\frac{1}{3}$ *de uma unidade corresponde a 4, a que quantidade corresponde a unidade*; *a que quantidade corresponde* $1\frac{2}{5}$; *numa mesma unidade, que relação existe entre* $\frac{2}{3}$ *e* $\frac{5}{6}$; *quantos números existem entre dois números racionais,* mas deve ter também um conhecimento que lhe permita saber que quando nos referimos a "partes" de uma figura temos de ter em consideração a natureza dessas partes; que $\frac{3}{5}$ de 30 corresponde a retirar $\frac{3}{5}$ de 30, mas que retirar não corresponde a efetuar essa subtração de forma algébrica, e que a reconstrução da unidade tem que ter em consideração o valor de cada uma das partes em que se encontra dividida (Pinto & Ribeiro, 2013).

Huinker (2002) e Sharp, Garofalo e Adams (2002) consideram que, para que os alunos criem uma base de conhecimento concetual para o sentido de número racional e para o sentido de operação, e para que desenvolvam estratégias flexíveis de cálculo e de resolução de problemas que os leve a uma aprendizagem significativa dos referidos números e respetivas operações, é imprescindível que os professores possuam, eles próprios, sentido de número racional, bem como um conhecimento que lhes permita entender, efetivamente, o sentido de número racional e das operações que os envolvem.

Para Pinto (2011), o desenvolvimento do sentido de número racional é um aspeto essencial que requer o desenvolvimento integrado de cinco componentes e das respetivas capacidades:

SENTIDO DE NÚMERO RACIONAL	
Componentes	**Capacidades a desenvolver**
Familiaridade com os diferentes significados das frações em contexto	→ Reconhecer os diferentes significados das frações (partilha, parte-todo, medida, operador e razão) em situações discretas ou contínuas.
Flexibilidade com a unidade de referência das frações em contexto	→ Reconstruir a unidade de referência (discreta ou contínua) → Identificar a unidade de referência (discreta ou contínua)
Familiaridade com diferentes representações de número racional	→ Conectar diferentes representações (numeral decimal, fração e numeral misto) → Reconhecer frações equivalentes
Flexibilidade na comparação, ordenação e densidade de números racionais	→ Representar números racionais na reta numérica → Comparar e ordenar números racionais → Reconhecer a existência de outros números entre dois números racionais
Símbolos e linguagem matemática formal significativos de números racionais	→ Relacionar os símbolos com ações e conhecimentos informais. → Relacionar os símbolos com linguagem matemática formal.

Figura 2. Modelo para caraterizar o sentido de número racional (Pinto, 2011, pp. 112-113)

Segundo este esquema, o desenvolvimento do sentido de número racional envolve cinco componentes e a aquisição de determinadas capacidades que lhe estão associadas: (1) *familiaridade com os diferentes significados das frações em contexto,* que se substancia na capacidade de reconhecer os diferentes significados das frações (partilha, parte-todo, medida, operador e razão), em situações discretas ou contínuas; (2) *flexibilidade com a unidade de referência das frações em contexto*, traduzida na capacidade de reconstruir a unidade (discreta ou contínua) e de identificar a unidade de referência; (3*) familiaridade com diferentes representações do número racional*, representada na capacidade de conetar diferentes representações (numeral decimal, fração e numeral misto), e no reconhecimento de frações equivalentes; (4) *flexibilidade na comparação, ordenação e densidade de números racionais,* expressa nas capacidades de representar números racionais na reta numérica, comparar e ordenar números, e reconhecer a existência de outros números entre dois números racionais; e (5) *símbolos e linguagem matemática formal significativos de números racionais,* que pressupõe a capacidade de relacionar símbolos com ações e conhecimentos informais, mas também relacionar os símbolos com linguagem matemática formal

2.2. Números racionais

Os números racionais estão entre os temas mais complexos do currículo do ensino básico. O trabalho com estes números envolve um conjunto de problemas e situações, em que os conceitos, os procedimentos e as representações estão interligados e só poderão ser compreendidos se estiverem inseridos num sistema global de contextos, significados, operações e representações (Lamon, 2001).

O conjunto dos números racionais é um conjunto denso, pois entre quaisquer dois números é sempre possível encontrar uma infinidade de outros números, sendo esta uma caraterística que não existe no conjunto dos números inteiros, onde um número tem sempre um sucessor identificado. A densidade do conjunto e o facto de compreenderem várias representações são aspetos particulares que dificultam a sua compreensão.

Diversos estudos têm demonstrado que os alunos a presentam dificuldades de aprendizagem significativas em relação aos números racionais, estando na sua origem fatores como: (i) *a multiplicidade de significados atribuídos às frações*; (ii) a *concetualização da unidade*; (iii) *a utilização precoce de regras e algoritmos* (Behr, Harel, Post & Lesh,1983); e (iv) *os diferentes significados* que podem assumir. Os alunos têm dificuldades em perceber que os números racionais são números, e em compreender que podem ser representados de várias formas (Behr et al.,1983).

Segundo Lamon (2007), os alunos apresentam dificuldades com os números racionais, as suas representações e significados das operações, e muitos professores não parecem conscientes dos obstáculos com eles se deparam ao progredirem na concetualização dos referidos números. Muitos adultos, incluindo professores, parecem debater-se com as mesmas dificuldades dos alunos, mantendo as mesmas ideias primitivas e conceitos errados (Ma, 2009). As dificuldades evidenciadas pelos adultos podem advir da falta de tratamento adequado do campo concetual multiplicativo no currículo de matemática e da vivência das mesmas experiências escolares que as dos alunos (Lamon, 2007).

De acordo com Kieren (1976), a compreensão dos números racionais depende da apropriação de cada um dos seus significados; *razão*, *operador*, *quociente* e *medida*.

Behr et al. (1983), sugerem um modelo concetual para o ensino dos racionais onde incluem o significado parte-todo como um significado distinto dos outros. Nesse modelo (Fig. 2), todos os significados estão ligados ao processo de partilha equitativa (*partitioning*), havendo uma relação entre as diferentes interpretações de número racional e as suas operações, equivalência de frações e resolução de problemas:

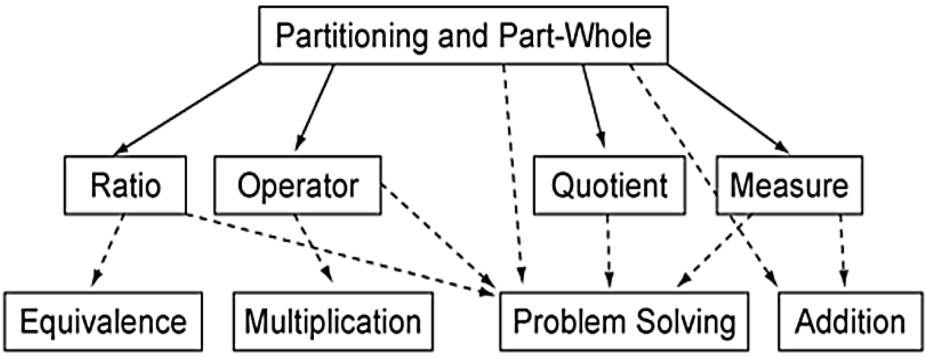


Figura 3. Modelo concetual sobre o ensino dos racionais (Behr et al., 1983)

Segundo este modelo, a compreensão do significado parte-todo e do processo de partilha (*partitioning*) levam ao desenvolvimento da compreensão dos outros quatro significados, sendo que a compreensão dos cinco significados é indispensável.

O significado *medida* traduz-se na comparação entre duas grandezas da mesma espécie, em que uma delas é considerada a unidade, pelo que emerge sempre que se fazem medições. A compreensão do número racional com o sentido *parte-todo* pretende que os alunos desenvolvam capacidades de dividir e redividir a unidade (*unitizing*) e (*reunitizing*), adquirindo a capacidade de reconstruir o todo a partir das partes. É apresentado em situações em que a quantidade contínua ou um conjunto de objetos discretos é dividido em partes de igual tamanho o que é fundamental para a compreensão dos outros significados (Lamon, 1999). Desta forma, um número racional representado na forma de fração traduz uma comparação entre o numerador (número de partes consideradas da unidade repartida), e o denominador (número total de partes iguais em que a unidade foi dividida).

O significado *razão* traduz uma comparação entre duas quantidades correspondentes a duas partes de um todo, sendo considerado um índice comparativo em vez de um número. Para Lamon (1999), a *razão* é definida como uma comparação entre duas grandezas do mesmo tipo e exige que os alunos compreendam; (i) o significado de uma relação entre duas grandezas; (ii) o significado de covariância, que implica que as duas quantidades em relação mudem juntas; (iii) que a covariância só vale para razões, pelo que esta propriedade é considerada essencial para a distinção entre a interpretação parte-todo e razão; (iv) que a covariância é necessária para o desenvolvimento da ideia de equivalência de frações, apesar da capacidade de construir frações equivalentes não implicar a capacidade de reconhecer a propriedade de invariância (Charalambos & Pantazi, 2007).

O número racional é interpretado como *operador* quando corresponde a uma função aplicada a alguns números, objetos ou conjuntos (Behr et al., 1983). Lamon (1999) define *operador* como um transformador que aumenta ou diminui um segmento de reta, aumenta ou diminui o número de elementos de um conjunto discreto de objetos, ou que amplia ou reduz uma figura. A compreensão do significado *operador* atinge-se quando se é capaz de: (i) interpretá-lo como multiplicador em diferentes contextos; (ii) indicar uma única fração para descrever uma operação de composição, quando duas operações multiplicativas são efetuadas, uma em resultado da outra e, (iii) relacionar resultados com valores iniciais (Charalambos & Pantazi, 2007).

O sentido de *quociente* pressupõe a atividade de partilha equitativa, fundamental para a repartição justa. Na fração $\frac{a}{b}$, *a* é distribuído igualmente por *b* partes, representando por isso uma divisão: dividir *a* elementos em *b* grupos, por exemplo, dividir 4 pizas igualmente por 5 pessoas. A fração $\frac{a}{b}$, indica o valor numérico obtido quando *a* é dividido por *b*, onde *a* e *b* representam números inteiros e poderá ser entendida como o *quociente* entre numerador e denominador (Kieren, 1993).

Segundo Charalambos e Pantazi (2007), no significado *quociente* não há nenhuma restrição quanto ao tamanho da fração: o numerador pode ser menor, igual ou maior que o denominador e consequentemente a quantidade que resulta da partilha equitativa pode ser menor, igual ou superior à unidade. Assim permite conduzir à compreensão do significado dos numerais mistos por frações maiores do que um.

Embora outros investigadores tenham proposto diferentes significados para os números racionais, os cinco significados acima referidos têm resistido ao longo dos tempos e ainda são considerados suficientes para compreender e clarificar o significado de número racional.

2.2.1. Representações dos números racionais

O termo representação refere-se tanto ao processo como ao resultado, isto é, "à aquisição de um conceito ou de uma relação matemática expressa numa determinada forma e à forma, em si mesma" (NCTM, 2008, p.75).

Para Goldin (2003), uma representação é uma configuração de sinais, carateres, ícones ou objetos que podem significar ou "representar" algo. Segundo o autor, é importante considerar e distinguir os *sistemas de representação internos* e *externos* dos indivíduos, de modo a que se possam explorar as relações entres eles.

Os *sistemas de representação interna* compreendem, entre outros, a linguagem natural, a capacidade de construir imagens visuais e espaciais, as representações táteis e cinestéticas, as heurísticas para resolver um problema, e as capacidades pessoais (conceções e equívocos em relação à notação matemática convencional), sendo necessário desenvolvê-las e relacioná-las para que a aprendizagem tenha significado. Por seu lado, os *sistemas de representação externa* incluem a linguagem natural normativa (padrão), os sistemas matemáticos gráficos (diagramas e notação formal), os ambientes de aprendizagem estruturados (tecnologias e materiais manipuláveis concretos), e as estruturas socioculturais como os sistemas educativos.

As representações internas e externas relacionam-se bidirecionalmente. Quando um aluno, para expressar uma ideia, desenha uma figura, está a utilizar a representação externa para substituir a representação interna e se, perante uma figura, o aluno consegue interpretar a informação dada, então está a substituir a representação externa pela interna. Neste sentido, para desenvolver o pensamento matemático é necessário compreender as múltiplas representações do mesmo conceito e as semelhanças e diferenças entre os diferentes sistemas de representação.

Algumas formas de representação (como diagramas, gráficos e expressões simbólicas) têm feito parte da matemática escolar desde há muito. Geralmente, os alunos começam por resolver questões matemáticas usando uma mistura de representações verbais e pictóricas (desenhos ou esquemas). Estes esquemas servem de base a estratégias que permitem a ligação entre a interpretação da informação do enunciado e a respetiva solução.

De acordo com o programa de matemática de 2007, “antes das representações simbólicas, muitas vezes é apropriado usar representações icónicas. Os alunos podem sentir a necessidade de representar os objetos e relações matemáticas, começando por desenvolver para isso as suas próprias representações não convencionais” (ME, 2007, p. 9).

É importante que os alunos tenham oportunidade de criar, aperfeiçoar e utilizar as suas próprias representações, mas também que beneficiem do acesso a formas de representação convencionais, enquanto ferramentas que suportam a aprendizagem (NCTM, 2008), pelo que “à medida que o trabalho prossegue, o professor tem de fazer sentir a necessidade de uma linguagem partilhada” (ME, 2007, p. 9), introduzindo progressivamente essas representações.

Segundo as normas NCTM (2008),

> as representações deverão ser tratadas como elementos essenciais no apoio à compreensão, por parte dos alunos, dos conceitos e das relações matemáticas, na comunicação de abordagens, argumentos e conhecimentos matemáticos, para si mesmos e para os outros, na identificação de conexões entre conceitos matemáticos interrelacionados, e na aplicação da matemática a problemas realistas, através da modelação. (p.75)

Os alunos devem compreender que as representações escritas das ideias matemáticas são uma componente essencial da aprendizagem da matemática (NCTM, 2008), e que os podem ajudar a organizar o seu pensamento e raciocínio, e a tornar “as ideias matemáticas mais concretas e acessíveis à reflexão” (NCTM, 2008, p. 76). Durante a sua escolaridade, os alunos devem ter oportunidade de: (i) criar e usar representações para organizar, registar e comunicar ideias matemáticas; (ii) selecionar, aplicar e traduzir representações matemáticas para resolver problemas; e (iii) usar as representações para modelar e interpretar fenómenos físicos, sociais e matemáticos (NCTM, 2008).

De acordo com Post, et al. (1993), a compreensão de número racional está relacionada com três caraterísticas do pensamento do aluno: (1) *flexibilidade na conversão entre as diferentes representações do número racional*; (2) *flexibilidade nas* *transformações dentro de cada representação*; e (3) *independência cada vez maior das representações concretas*. Segundo os autores, os alunos que são privados da utilização e conversão entre as diferentes representações do número racional poderão vir a revelar maiores dificuldades ao nível da abstração de informações sobre representações concretas, da realização de conversões e das operações com símbolos matemáticos.

O modelo de conversões criado por Lesh (1979) (Fig.4), defende que a compreensão dos números racionais requer a capacidade de representar ideias matemáticas de várias formas e aptidão para fazer conexões entre as diferentes representações.

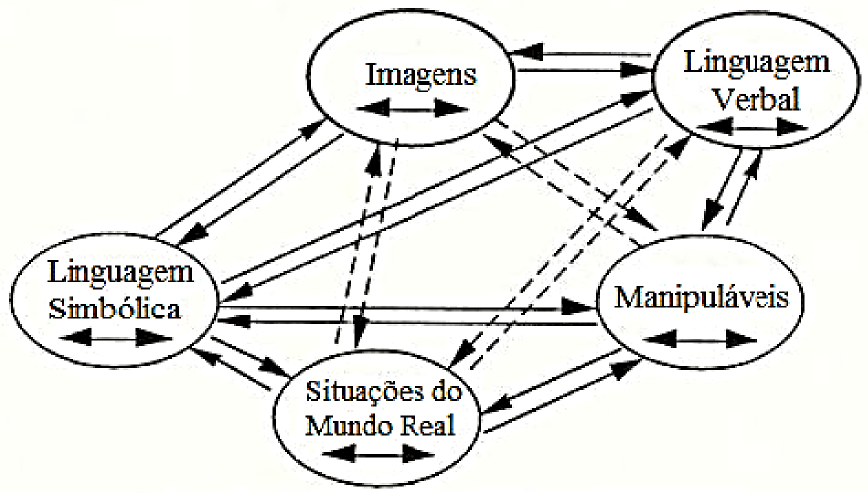


Figura 4. Modelo de conversões de Lesh (1979)

De acordo com este modelo, a compreensão profunda das ideias matemáticas exige experiência em diferentes representações e conversões, dentro e entre essas representações, pois as conversões impõem reinterpretações de ideias e conceitos. Através destes processos de reinterpretação adquirem-se novos conhecimentos e reforçam-se conhecimentos anteriores, o que se reflete numa compreensão mais ampla e profunda das ideias matemáticas.

O número racional admite várias representações; *decimal, fração, pictórica* e *percentagem.* As diferentes representações devem ser utilizadas e relacionadas em contexto escolar de forma a não limitar o ensino dos números racionais e a não conduzir a uma compreensão incompleta e fragmentada dos conceitos.

De acordo com as normas NCTM (2008), os alunos do 3º ao 5º ano devem compreender a equivalência entre frações, decimais e percentagens, assim como a informação que cada uma destas formas de representação transmite, e recorrer à utilização de modelos e outras estratégias para representarem e estudarem os números decimais. Devem investigar a relação entre frações e decimais, focando-se na sua equivalência, e reconhecer, por exemplo, que 25% e 0,25 são representações diferentes do mesmo número e correspondem a $\frac{1}{4}$.

Segundo o programa de matemática de 2007, o trabalho com os conceitos matemáticos devem envolver, sempre que possível, mais do que uma forma de representação, devendo ser "proporcionadas situações que permitam aos alunos relacionar a representação fraccionária e a decimal" (ME, 2007, p. 15).

As atuais orientações curriculares, estabelecidas pelo programa de matemática de 2013, determinam que a iniciação ao estudo das frações constitui um tema chave no 1º ciclo, "devendo procurar-se que os alunos assimilem os diferentes aspetos relacionados com esta temática" (ME, 2013, p.6). As frações são introduzidas geometricamente a partir da decomposição de um segmento de reta em segmentos de igual comprimento e desde logo utilizadas para exprimir medidas de diferentes grandezas.

Entre o 3º e o 5º ano, os alunos deverão desenvolver uma compreensão das frações enquanto partes de uma unidade e como divisão. Precisarão de ver e de explorar diversos modelos de frações, primeiramente em frações familiares como os meios, os terços, os quintos, pois "para se tornarem profundos conhecedores de frações – e de muitos outros conceitos matemáticos – os alunos necessitam de uma diversidade de representações que suportem a sua compreensão" (NCTM, 2008, p. 77).

Monteiro e Pinto (2007) consideram que "uma fração é uma representação versátil e muito rica, porque permite expressar diferentes relações" (p. 12), contudo, os seus múltiplos significados podem conduzir a ambiguidades, exigindo aos professores que estejam alerta para as dificuldades que irão surgir no decorrer do seu ensino.

Ao nível elementar, em contextos escolares, as frações podem assumir diferentes significados: (i) relação *parte-todo de uma unidade contínua* (a unidade surge da comparação entre a parte e o todo, sendo que o denominador indica o número de partes em que a unidade está dividida e o denominador o número de partes escolhidas); (ii) relação *parte-todo de uma unidade discreta*; (iii) o *quociente* entre dois números inteiros representado pela fração $\frac{a}{b}$ (que surge em situações de partilha equitativa); (iv) *operador partitivo multiplicativo* (a fração $\frac{a}{b}$ transforma o cardinal de um conjunto discreto, por exemplo $\frac{3}{5}$ x 20 (três quintos de vinte caricas); (v) *medida* (compara-se uma grandeza com outra tomada como unidade); e (vi) *razão* entre duas partes de um mesmo todo (por exemplo, a razão entre o número de rapazes e raparigas numa turma).

Segundo as autoras, os erros com frações são muito frequentes, e algumas das razões que lhe estão associadas enraízam "no facto dos alunos serem submetidos a um ensino essencialmente mecanicista baseado em símbolos como realidades próprias, sem terem ainda desenvolvido imagens e modelos que os sustentem" (Monteiro & Pinto, 2007, p.12).

Outra das dificuldades apontadas pela literatura relativamente às frações diz respeito à questão da unidade a ser fracionada. Metade de um quilo de laranjas não é o mesmo que metade de uma dúzia, da mesma forma que um terço de uma folha de papel A4 não representa a mesma quantidade que um terço de uma folha A5 (Monteiro & Pinto, 2007). Neste sentido, Lamon (2002), defende a importância de experiências de reconstrução da unidade a partir das partes e do trabalho com frações equivalentes de modo significativo, recorrendo ao processo de "*unitizing"* (reconstrução da unidade) sem recurso a regras.

De acordo com Monteiro e Pinto (2007), é fundamental discutir com os alunos a questão da unidade, alertando para o *todo* a que a fração faz referência e apresentar situações diversas em relação à unidade. Segundo as autoras podem considerar-se diferentes tipos de unidade: *simples* ou *compostas*, *discretas* ou *contínuas*. Uma dúzia de maçãs pode considerar-se uma unidade composta, pois resulta do agrupamento de um conjunto discreto de objetos, uma maçã será a unidade simples. A construção de uma unidade composta como a centena implica que os alunos coordenem diferentes tipos de unidade em simultâneo, pois uma centena integra dez dezenas, que por sua vez integra dez unidades simples. Quando se trabalha as frações ou os decimais, por vezes, não há uma alusão clara à unidade de referência, ao *todo*, o que pode provocar mal-entendidos, sobretudo quando o ensino assenta em procedimentos, desvalorizando abordagens concetuais.

Owens (1993) considera que a representação em numeral decimal e a representação fracionária devem ser trabalhadas em simultâneo, para que o aluno perceba que as duas traduzem a mesma situação e pertencem ao mesmo conjunto numérico. O autor aponta como causa das dificuldades associadas ao trabalho com decimais o facto de se ensinar a trabalhar com numerais decimais antes de estes compreenderem o próprio conceito elementar de decimal.

Para Monteiro e Pinto (2007) algumas das dificuldades dos alunos associadas aos números decimais são: "(i) a confusão entre décimas e centésimas, por exemplo confundir 2,5 com 2,05; (ii) confundir o número de algarismos com a quantidade, quando, por exemplo, confundem que 1,456 é maior que 1,5, (iii) e acharem que entre 0,1 e 0,2 não existem números racionais" (p. 11).

Diversas investigações têm demonstrado que muitos dos erros que os alunos cometem ao trabalhar com números decimais têm relação com a forma como os conceitos são introduzidos. Os números decimais são introduzidos, muitas vezes, em relação às unidades de medida. Ora, uma medida representada por um número decimal pode facilmente converter-se num número inteiro através da equivalência a outra unidade do mesmo sistema de medida. Por exemplo, 1,5 m converte-se em 15 dm e deixa de ser representado por um número decimal. Desta forma apresenta-se erradamente a ideia de que os números decimais se podem converter em números inteiros, tornando-se evidente que as propostas pedagógicas de introdução aos números decimais podem ter um papel crucial no desenvolvimento das aprendizagens dos alunos.

Da mesma forma, o dinheiro pode ser usado como introdução e motivação para os decimais. Contudo, a forma como se usa e fala do dinheiro pode não ajudar no estudo dos decimais. Para a maioria das pessoas, quando se fala em dinheiro são consideradas apenas duas casas decimais, não sendo um sistema infinito como os decimais. Os dígitos das posições dos decimais representam moedas distintas como os euros e os cêntimos. A separação de uma quantidade em duas unidades distintas pode interferir com a compreensão da relação x10 entre duas posições consecutivas. Por exemplo, 0,65 € pode ser associado ao valor monetário sessenta e cinco cêntimos, mas dificilmente como seis décimas mais cinco centésimas de um euro. Embora haja vantagens do ponto de vista do quotidiano em relacionar o sistema monetário com o decimal, há aspetos que devem ser cuidadosamente tratados.

A representação em percentagem do número racional é, segundo Parker e Leinhardt (1995), uma forma de representação vantajosa, universal, presente no dia a dia dos alunos, por exemplo, nos *media* e nas promoções de artigos, e faz a ligação entre situações do "mundo real" e os conceitos matemáticos de estruturas multiplicativas. As percentagens são, no entanto, um conceito difícil de aprender e as dificuldades dos alunos revelam-se: (i) na *compreensão do símbolo %* pois, se não lhe atribuírem um significado acabam por colocá-lo em qualquer lugar e não fazem distinção entre $\frac{3}{4}$ e $\frac{3}{4}$ %; (ii) na *utilização incorreta da "regra do numerador*", os alunos aplicam esta regra porque acreditam que o símbolo da percentagem à direita do número pode ser substituído por uma vírgula à esquerda do número, como o exemplo indica 0,35 em 35%, mas podem surgir conversões incorretas como por exemplo 150% em 0,150 e ainda 0,8 em 8%; (iii) na *procura da percentagem*; e (iv) *no cálculo de percentagens maiores que 100.*

As representações pictóricas são, segundo Cox (1999), instrumentos de ajuda úteis para o raciocínio, pois podem representar a informação do problema e também facilitar a mudança de estratégias de resolução. Muitas vezes, mesmo sem conduzirem a uma resposta correta, demonstram a forma como os alunos elaboraram as imagens mentais que serviram de apoio à interpretação das informações e a procura de estratégias de solução.

Em relação à representação geométrica, Monteiro e Pinto (2007) referem que a reta numérica é um recurso didático importante na medida em que permite evidenciar a densidade dos números racionais e as relações de grandeza. Para Bright, Behr, Post e Wachsmuth (1988) a reta numérica difere dos outros modelos em vários pontos importantes. Em primeiro lugar, porque um comprimento representa a unidade e sugere não só a iteração da unidade, mas também subdivisões simultâneas de todas as unidades iteradas, ou seja pode ser tratada como uma régua. Em segundo, porque na reta numérica não existe separação visual entre as unidades consecutivas, o modelo é totalmente contínuo. Apesar das potencialidades deste recurso, os alunos manifestam dificuldades em marcar frações na reta numérica quando o número de partições da reta é diferente do denominador das frações ou quando o número de partes é um múltiplo ou um submúltiplo do denominador, sugerindo uma noção imprecisa e inflexível da fração (Bright et al., 1988).

2.2.2. Comparação e ordenação de números racionais

Há inevitavelmente uma influência do conhecimento sobre números naturais no modo como os alunos começam a pensar a ordenação dos números racionais. Essa influência nem sempre é positiva e em alguns casos pode afetar negativamente a capacidade dos alunos compreenderem as relações de ordem dos números racionais (Post, Behr & Lesh,1986).

No conjunto dos números naturais, os alunos podem pensar de duas maneiras diferentes; ora considerando o aspeto cardinal, ora o aspeto ordinal do número. Podem comparar a "grandeza" de dois números pela correspondência com elementos de dois conjuntos finitos que representam os mesmos números, respeitando o aspeto cardinal do número, ou podem recorrer ao aspeto ordinal do número, comparando dois números naturais numa sequência de contagem em que o número maior vem depois.

Para Post, Wachsmuth, Lesh e Behr (1985), a compreensão dos alunos sobre a ordenação dos números inteiros pode dificultar a compreensão da ordenação com frações, já que os métodos de comparação utilizados para os números inteiros são inadequados para tratar com as tarefas de ordenação de frações.

A compreensão da ordenação e equivalência de frações é fundamental para a "compreensão do número racional como uma entidade (isto é, um só número) e para a compreensão da grandeza do número" (Behr, Harel, Post & Lesh,1992, p. 316). Neste caso é exigido aos alunos um grau de compreensão mais complexo que envolve: (i) entender que o tamanho da fração depende da relação entre dois números inteiros que compõem a fração; (ii) perceber que há uma relação inversa entre o número de partes em que o todo é dividido e o "tamanho" de cada parte; (iii) compreender que quando as frações têm denominadores iguais há uma relação direta entre o número de partes consideradas e a ordem das frações; (iv) compreender que quando as frações têm numeradores e denominadores diferentes as decisões acerca da sua ordem exige o uso extensivo e flexível da equivalência de frações; e (v) entender a densidade dos números racionais (Post et al.,1985).

É fundamental que os alunos compreendam que é a relação entre o numerador e o denominador que determina o significado de uma fração e não as respetivas grandezas absolutas quando encaradas de forma independente. Assim, $\frac{1}{2}$ é maior do que $\frac{4}{9}$, apesar dos dígitos que surgem em $\frac{1}{2}$ serem menores do que os seus correspondentes em $\frac{4}{9}$. (Post et al., 1986). Estes autores referem também que é necessário ajudar os alunos a combater a lacuna concetual entre as estruturas aditivas e multiplicativas pois alguns reflexos das conceções dos alunos sobre os números naturais baseados nas estruturas aditivas podem perturbar o desenvolvimento das estruturas multiplicativas.

Segundo Post et al. (1986), a noção quantitativa de número racional deve incluir a compreensão de que os números racionais têm *grandezas relativas* e *absolutas*, podendo ser entendidos tanto no sentido absoluto como no sentido relativo. A grandeza relativa de um par de quantidades representadas por números racionais pode ser avaliada apenas quando relacionadas com a unidade de que deriva o seu significado. Por exemplo, $\frac{1}{2}$ de uma pequena torta pode ter menos quantidade de torta do que $\frac{1}{3}$ de uma torta grande. Assim, uma ordenação de valores absolutos existe dentro de um conjunto de números racionais relacionados com uma unidade comum. Por exemplo, $\frac{1}{3}$ é sempre inferior a $\frac{1}{2}$, se ambos se referem ao mesmo todo. E, como elementos do sistema matemático, $\frac{1}{3}$ é inferior a $\frac{1}{2}$, por exemplo, porque a unidade de comparação é 1.

Nas suas investigações, os autores observaram que na resolução de tarefas sobre comparação de frações os alunos socorrem-se de diversas estratégias informais. Por exemplo, na comparação entre $\frac{5}{6}$ e $\frac{7}{8}$ recorrem à quantidade que é necessária para construir o todo (ou seja, ao *valor residual*). Os alunos percebem que no primeiro caso falta $\frac{1}{6}$ para completar o todo enquanto no segundo falta $\frac{1}{8}$, concluindo que $\frac{7}{8} > \frac{5}{6}$. Outra das estratégias é a utilização de *pontos de referência*, que resulta da comparação de duas frações utilizando uma terceira como referência, por exemplo, $\frac{1}{2}$ ou 1. Assim, $\frac{5}{8}$ é maior do que $\frac{3}{7}$, porque a primeira fração é maior e a segunda é menor "do que a metade". A terceira estratégia é o *pensamento diferencial*. Alguns alunos defendem que $\frac{5}{6}$ e $\frac{7}{8}$ são equivalentes, porque lhes falta apenas uma parte para formar o todo. Neste caso, focam-se na diferença entre 5 e 6 e entre 7 e 8, sem considerar a grandeza real da fração. Esta é uma caraterística do trabalho com os números naturais e pode conduzir a resultados incorretos.

Orton et al. (1995) referem que uma estratégia possível para comparar duas frações é encontrar frações equivalentes com denominadores comuns, por exemplo, para comparar $\frac{2}{5}$ e $\frac{7}{18}$ podem encontrar-se frações equivalentes às dadas com denominador 90, $\frac{36}{90}$ e $\frac{35}{90}$ e assim, podemos verificar que $\frac{2}{5}$ é maior.

Para Monteiro e Pinto (2007), a equivalência de frações pode ser explorada através de situações que emergem de situações reais. Por exemplo, comparar $\frac{3}{4}$ e $\frac{3}{5}$ não implica que o aluno aplique a regra da multiplicação reduzindo ao mesmo denominador ambas as frações. Este conceito pode ser abordado através de problemas do tipo: *o resultado da divisão de três bolos por quatro pessoas é maior ou menor do que a divisão de três bolos (os mesmos) por cinco pessoas*?

Segundo Bezuk e Cramer (1989), uma estratégia possível para comparar e ordenar números racionais é escrevê-los na representação decimal. A predominância da influência dos números naturais também se verifica, contudo, na ordenação de números racionais na representação de numeral decimal (Post et al., 1993). Os alunos apresentam dificuldades na ordenação de numerais decimais constituídos por um número diferente de casas decimais. Um erro comum acontece quando os alunos têm de ordenar 0,4 e 0,39, e afirmam que 0,39 é maior do que 0,4 porque 39 é maior do que 4 utilizando o conhecimento que têm dos números naturais. As dificuldades manifestadas na compreensão das representações decimais, prendem-se com: (i) *confusão entre décimas e centésimas* – confundir 2,5 com 2,05; (ii) *confusão entre o número de algarismos e a quantidade* – 1,456 é maior que 1,5 porque o primeiro tem mais números ou porque 456 é maior que 5; e (iii) *considerar que entre 0,1 e 0,2 não existem números racionais*, sendo que este erro pode ser explicado pela sequência discreta dos números inteiros a que os alunos estão habituados (Monteiro & Pinto, 2007).

2.2.3. Operações com números racionais positivos

Os números racionais são o primeiro conjunto de números com que as crianças contactam que não é baseado em processos de contagem de algum tipo Até ao contacto com os números racionais, contando de uma forma ou de outra (para a frente, para trás, dando saltos, fazendo combinações) as crianças poderiam resolver todos os problemasCom a introdução dos números racionais este processo de contagem já não pode ser a base do raciocínio, visto ser inadequado na resolução de problemas de ordenação de frações.

Desenvolver o sentido de número e o sentido de operação requer a construção a longo prazo de uma compreensão flexível dos números, operações e suas relações (Huinker, 2002). A manipulação prematura de símbolos promove equívocos entre conceitos, procedimentos e contextos reais dos alunos, só ultrapassados com o desenvolvimento de uma base conceptual sólida para o sentido de número racional e de operação.

Com base em autores como Huinker (2002), McIntosh, Reys e Reys (1992) e Slavit (1999), Pinto (2011) apresenta um modelo para caraterizar o sentido de operação que requer o desenvolvimento integrado de quatro componentes: (i) *estar familiarizado com diferentes significados e contextos das operações*; (ii) *ter flexibilidade no uso das propriedades das operações;* (iii) *ser razoável na análise de processos e resultados* - que requer o desenvolvimento da capacidade de conhecer o efeito de uma operação sobre um par de números, entre outras; e (iv) *usar símbolos e linguagem matemática formal com significado*. Este modelo requer o desenvolvimento integrado das suas quatro componentes.

O trabalho com números racionais e respetivas operações implica um conhecimento matemático por parte do professor a vários níveis; ao nível das componentes do sentido de número racional, ao nível das componentes do sentido das operações com números racionais, e ainda das situações que potenciam e/ou limitam o desenvolvimento dos referidos sentidos. Para entender os números racionais é preciso ter uma base sólida das quatro operações com números inteiros e uma compreensão dos conceitos de medida.

Por exemplo, a compreensão da multiplicação e divisão com números inteiros, assim como as noções básicas sobre as frações, são fundamentais para se avançar no sentido da multiplicação e divisão de números fracionários. Entender a divisão de números racionais fracionários passa por entender a divisão de números inteiros, relacionar a multiplicação com a divisão e possuir uma compreensão da noção de fração e frações equivalentes (Pinto & Monteiro, 2008).

Segundo Galen et al. (2008) desde cedo as crianças são incentivadas a comparar frações em termos de tamanho, embora para algumas esta comparação possa permanecer limitada ao raciocínio num nível bastante concreto e com frações simples. A adição e subtração se frações podem ser em grande parte limitadas ao raciocínio das crianças num contexto tangível. Na adição de frações é frequente os alunos adicionarem os denominadores e os numeradores, fruto das generalizações dos algoritmos com números inteiros (Monteiro & Pinto, 2007). Comparar frações encontrando um denominador comum é um passo para somar e subtrair frações. A adição e subtração de frações baseiam-se principalmente em encontrar o mínimo denominador comum; terços e quartos, por exemplo, só podem ser adicionados ou subtraídos, tornando-os em duodécimos. Por outro lado, quando os alunos, por exemplo, têm de calcular a diferença entre $\frac{3}{4}$ e $\frac{2}{3}$ de uma barra de chocolate, seria conveniente se essa barra estivesse dividida em 12 partes, criando uma subunidade. Usando essas "partes" como a unidade de medida, a abordagem seria como num problema de subtração (9 - 8 partes), e posteriormente estas unidades podem ser convertidos na unidade original (barra de chocolate): "nove partes menos oito partes é uma parte, então a resposta é $\frac{1}{12}$ da barra de chocolate ". Em alguns casos, os alunos podem desenvolver uma subunidade adequada a si mesmos (Galen et al. 2008).

Os números fracionários são muitas vezes considerados os números mais complexos da matemática do ensino básico e a divisão a mais difícil das quatro operações (Ma, 2009). A divisão enquadra-se nas *estruturas multiplicativas*, englobando situações como a *multiplicação*, a *divisão*, as *frações* e a *proporcionalidade*. Vergnaud (1983) considera três classes nas estruturas multiplicativas: o *isomorfismo de medidas,* onde inclui a divisão como partilha e a divisão como medida, visto estarem em jogo medidas relativas a grandezas do mesmo tipo, o *produto de medidas*, respeitantes a relações entre diferentes grandezas, como o caso dos problemas que envolvem produto cartesiano, áreas e volumes, e finalmente situações onde intervêm *proporções múltiplas*.

Em problemas de *divisão como medida* tanto o dividendo como o divisor são da mesma natureza. O divisor pode ser entendido como uma unidade com a qual vamos "medir" o dividendo, significando o quociente o número de vezes que o divisor "cabe" no dividendo, ou seja, vamos medir o dividendo tomando o divisor como unidade.

Para Sinicrope, Mick e Kolb (2002), quando se questiona os alunos acerca do significado de 4 : 2, a resposta mais comum será "significa quantas vezes o 2 cabe no 4" ou "quantos grupos de 2 cabem em 4". Da mesma forma, quando os alunos respondem que 2 + $\frac{1}{2}$ = 4, porque "$\frac{1}{2}$ cabe em 2 quatro vezes" ou " se tiver duas barras de chocolate e as dividir em metades, fico com 4 metades", estamos perante uma situação de *divisão como medida*, já que o que tem de se determinar é o número de grupos de $\frac{1}{2}$ que cabem em 2. A *divisão como medida* surge ainda em situações de comparação multiplicativa, onde existem valores de uma só variável, como a do seguinte problema: "*A Maria leu um livro em 3 $\frac{1}{5}$ h, enquanto que a Joana precisou de 4 h para ler o mesmo livro. Quantas vezes mais que o tempo da Maria precisou a Joana para ler o livro?*". A resolução desta situação passa pela identificação do número de vezes que cabe o tempo de leitura da Maria no tempo de leitura da Joana, ou seja, $4 : 3\frac{1}{5} = 1\frac{1}{4}$.

Em situações que envolvam a *divisão como partilha equitativa*, o dividendo e o quociente são da mesma natureza, por exemplo: "*O João tem 12 chocolates. Se os distribuir igualmente por 3 amigos, quantos chocolates recebe cada amigo?*" ou "*Se dois livros iguais custam 15 euros, qual é o preço de cada livro?*". Nestas situações pretende-se determinar o tamanho de cada grupo, ou seja, o valor que cabe a cada um dos elementos do divisor. Normalmente, são este tipo de situações que os alunos identificam, numa primeira fase, como problemas de divisão.

No entanto, no caso das frações, *a divisão como partilha* aparece quando o divisor é um número inteiro, mas raramente quando o divisor é um número fracionário. Este significado da divisão alargado às frações quando o divisor é um número inteiro, poderá ter o seguinte enunciado: "*A mãe da Marta fez um grande bolo de morango que dividiu em 16 fatias iguais para ela levar uma parte para a festa da escola. A Marta levou $\frac{12}{16}$ do bolo que distribuiu igualmente por 3 pratos. Com que porção de bolo ficou cada um dos pratos?*". A solução requer dividir $\frac{12}{16}$ por 3, cujo resultado é igual a $\frac{4}{16}$ ou $\frac{1}{4}$ do bolo (Monteiro & Pinto, 2008). Quando o dividendo e o divisor são números fracionários temos, por exemplo, a seguinte situação: "*O Manuel levou $\frac{1}{2}$ h a percorrer $1\frac{3}{4}$ km. Quanto percorrerá numa hora?*" Neste caso, pretende-se encontrar um número tal, que metade dele seja igual a $1\frac{3}{4}$. Ou seja, pretende-se conhecer *o todo*, sendo conhecida uma parte dele. Para determinar a unidade, nesta situação, basta multiplicar por 2. Assim, $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2} = 1\frac{3}{4} \times 2 = 3\frac{1}{2}$. Se a situação for, por exemplo: "*$\frac{4}{5}$ de uma corda mede $1\frac{3}{4}$ do metro, quanto mede a totalidade da corda?*", a resposta não é imediata e requer que se divida $1\frac{3}{4}$ por $\frac{4}{5}$. (Monteiro & Pinto, 2008).

Nas situações em que a divisão surge como *operação inversa da multiplicação* existe uma relação multiplicativa entre três medidas, sendo uma delas o produto das outras duas (*produto de medidas*, Vergnaud, 1983). Neste caso temos um produto conhecido (*b*) e um dos fatores (*a*) e precisamos de conhecer o outro fator (*x*): $a \times x = b$, então $x = b : a$. Por exemplo: *"A área de um retângulo é igual a 24 m^2, se o comprimento for igual a 12 m, quanto mede a sua largura?"* ou *"Se o volume de um cilindro for igual a 36 m^3 e a altura for igual a 4 m, qual é a medida da área da base?"*.

Segundo Ma (2009), a divisão por frações é uma operação complicada, podendo ser considerada um tópico cimeiro da aritmética. Para a autora, para se compreender o significado da divisão por frações, o professor tem que se empenhar em trabalhar o significado da multiplicação de frações e as relações entre a multiplicação e a divisão. Apesar do conceito de divisão por frações se construir sobre a aprendizagem prévia de vários conceitos, ele desempenha um papel de reforço e aprofundamento dessa aprendizagem. Refletir sobre o significado da divisão por frações irá fortalecer a compreensão dos conceitos anteriores da multiplicação com número racionais, por exemplo (Ma, 2009).

Para Pinto e Monteiro (2008), a aprendizagem da divisão de números racionais na forma de fração passa, tradicionalmente, pela enfatização do algoritmo "*inverter o divisor e multiplicar*". Segundo as autoras não é no facto de se ensinar este algoritmo que reside o problema, mas na forma como ele se ensina e quando se ensina, persistindo a ideia de que ensinar a divisão é ensinar a realizar o algoritmo em vez de desenvolver o conceito, de modo a que os alunos saibam quando devem recorrer à divisão para resolver um dado problema.

Segundo Ma (2009) mudar o dividendo e o divisor criando frações equivalentes (com o mesmo denominador) e depois efetuar a divisão é uma alternativa ao algoritmo usual da divisão por frações. Por exemplo, ao transformar um problema de dividir $1\frac{3}{4}$ de piza por $\frac{1}{2}$ piza num problema de dividir $\frac{7}{4}$ piza por $\frac{2}{4}$ piza, estamos a dividir 7 quartos de piza por 2 quartos de piza. Esta abordagem de "*denominador comum*" converte uma divisão por uma fração numa divisão de números inteiros (7 fatias divididas por 2 fatias).

Num estudo realizado com professores chineses e americanos, Ma (2009) propôs que calculassem $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$ e que posteriormente criassem um enunciado que traduzisse a expressão. No desempenho dos professores nos cálculos, a autora verificou que os professores americanos mencionam apenas uma abordagem – "*inverter e multiplicar*" – o algoritmo habitual, enquanto os professores chineses propuseram outras como *dividir por frações usando números decimais* e *aplicar a propriedade distributiva*.

O significado da multiplicação foi considerado como um elemento chave pelos professores chineses. A maioria dos professores considerou a multiplicação com frações a "base necessária" para a compreensão da divisão com frações. Por exemplo, para o professor Xie, o significado da multiplicação com frações é particularmente importante porque é dele que derivam os conceitos da divisão por frações. Segundo este professor, "se os alunos entenderem que multiplicar por uma fração significa encontrar uma parte fracionária de uma unidade, eles irão seguir esta lógica para compreender como funcionam os modelos da operação inversa" (Ma, 2009, p. 146). Para outros professores, o significado da multiplicação com frações é também importante porque relaciona vários conceitos relevantes:

> o conceito da multiplicação com fracções é como um «nó», pois «liga» vários outros conceitos importantes. Tal como a operação da multiplicação, está relacionado com os conceitos da adição e divisão com números inteiros. Mais ainda, uma vez que lida com números fracionários, está relacionado com o conceito de fração e com os da adição e divisão com frações. Entender o significado da multiplicação com frações depende da compreensão de vários conceitos. (Ma, 2009, p. 147)

Segundo Pinto e Monteiro (2008), os erros mais comuns na divisão com frações são por vezes ocasionados por aprendizagens anteriores que se tornam obstáculos à apropriação de novos conhecimentos. A passagem da multiplicação e divisão de números inteiros para os números racionais não é fácil. Podem surgir mal-entendidos do género "a multiplicação aumenta e a divisão diminui" e "não se pode dividir um número menor por um número maior". Quando a multiplicação é tratada exclusivamente como uma soma de parcelas iguais e a divisão como subtrações sucessivas, é provável que fique a ideia de que o produto terá de ser um número maior do que os fatores e que o quociente um número menor do que o dividendo (Pinto & Monteiro, 2008).

Um dos mal-entendidos mais comuns na divisão com frações resulta na confusão da *divisão por* $\frac{1}{2}$ *com a divisão por 2*. Por exemplo, quando se pede aos que alunos escrevam um enunciado para a seguinte expressão: $1\frac{1}{3} : \frac{1}{2}$, as respostas mais comuns envolvem de forma errada a partilha, levando a um enunciado que ilustra $1\frac{1}{3}$: 2, como: "*Duas amigas querem dividir igualmente* $1\frac{1}{3}$ *de piza. Com que quantidade de piza fica cada amiga?*". O erro prende-se com a interpretação de $1\frac{1}{3} : \frac{1}{2}$ como $1\frac{1}{3}$ dividido ao meio.

No estudo de Ma (2009) referido anteriormente, a propósito da criação de enunciados para a expressão $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$, entre os 23 professores americanos, 6 não conseguiram criar uma história e 16 inventaram histórias com conceções erradas. Nas 16 histórias erradas, houve 6 professores que forneceram histórias que confundiam a *divisão por* $\frac{1}{2}$ *com a multiplicação por* $\frac{1}{2}$, como a seguinte: "*Podíamos ter uma tarte inteira e três quartos de outra, como se alguém tivesse tirado um pedaço. Depois dividíamos tudo em quartos e teríamos de tirar uma metade do total*" (Ma, 2009, p. 127). As restantes 10, mostraram conceções erradas sobre o significado da divisão por frações que confundiam a *divisão por* $\frac{1}{2}$ *com a divisão por 2*. Os professores com esta ideia errada criaram histórias sobre a divisão da quantidade $1\frac{3}{4}$ dividida igualmente por duas pessoas, ou em duas partes. Por exemplo, "*podemos usar uma tarte, uma tarte inteira, e depois três quartos de outra tarte e temos duas pessoas, temos de ter a certeza que isso é dividido igualmente, para que cada pessoa obtenha uma parte igual à outra*" (Ma, 2009, p. 127).

Relativamente ao cálculo com números decimais, Galen et al.(2008) defendem que este requer compreender a natureza desses números. Por exemplo, quando na adição de uma centésima ao número 49,09 o aluno obtém 49,010, ou mesmo 50, revela falta de entendimento do sistema de numeração decimal. Da mesma forma, é comum as crianças resolverem 3 + 4,1 = 4,4 uma vez que aprendem a "colocar vírgula debaixo de vírgula" sem perceberem que números estão a adicionar (Monteiro & Pinto, 2007). Segundo os autores, os alunos devem ser incentivados a usar o seu conhecimento sobre frações no cálculo de operações com decimais, pois o cálculo com decimais dentro de um contexto pode ser usado para dar significado às frações. No cálculo de 0,14 + 0,7 os alunos inicialmente tendem a dar 0,21 como resposta, porque 14 + 7 é igual a 21. No entanto, a melhor abordagem seria estabelecer relação com frações. Neste caso, trata-se da adição de $\frac{14}{100} + \frac{7}{10}$ e para completar esta adição é necessário converter $\frac{7}{10}$ em centésimos. Outra possibilidade seria levar as crianças a pensarem em contextos de medida. Por exemplo 0,14 l + 0,7 l poder-se-ia converter em 14 cl + 7 dl, que é o mesmo que 14 cl + 70 cl, ou, 0,14 m + 0,7 m, que é 14 cm + 70 cm. Desta forma os alunos usam o seu conhecimento sobre medida para dar significado ao cálculo com decimais.

Ainda de acordo com estes autores, não é fácil para os alunos dar sentido a problemas que envolvem multiplicações com decimais. Expressões como 5 x 0,132 podem não causar muitos problemas, pois referem-se a adições sucessivas de 0,132. Mas se os números fossem invertidos, o que significaria 0,132 x 5? Tal como acontece com a multiplicação de frações, é estranho que o resultado de 0,132 x 5 seja menor do que 5. Nas crianças a multiplicação está fortemente associado a valores que se tornam maiores, pelo que no cálculo com decimais devem ser usados contextos significativos, como: "*Um metro de pano custa 6, 00 €. Se um pedaço de pano medir 0,65 m, qual é o seu custo?*"

Galen et al. (2008) defendem ainda o recurso a situações do dia a dia para ilustrar a divisão com números decimais. Dividir dois números inteiros, muitas vezes resulta num número decimal. Partilhar dinheiro é um possível contexto para investigar esse fenómeno. Se quatro filhos tiverem 5 € para partilhar, cada criança recebe 1, 25 €. As operações que as crianças compreendem para números inteiros podem ser utilizadas de várias maneiras para o cálculo com decimais, recorrendo, por exemplo: (i) à *medida*, com a expressão 2 : 0,25, podemos pensar numa situação como: "*Quantas vezes é que 0,25 m cabem em 2 m*?" ou " *Quantas vezes é que 0,25 € cabem em 2,00 €* ?". Dentro deste contexto, não parece estranho que o resultado seja maior do que os dois números com os quais começámos, o que nunca acontece quando se está dividindo por um número inteiro; (ii) *à divisão como o inverso da multiplicação*, para calcular 2 : 0,25 podemos recorrer à multiplicação ___ x 0,25 = 2; e (iii) *procurando números mais fáceis*. Por exemplo, 105 : 15 = 210: 30 (ambos os números multiplicados por 3) ou 105 : 15 = 21 : 3 (ambos divididos por 5).

CAPÍTULO 3

METODOLOGIA

Este capítulo expõe as opções metodológicas adotadas no estudo, tendo em conta o seu objetivo e as questões de investigação. São referidos os participantes e a respetiva caraterização, assim como os critérios de seleção dos mesmos. É apresentado o processo de recolha e análise dos dados e indicam-se os instrumentos utilizados.

3.1. Opções metodológicas

A natureza do problema em estudo e as respetivas questões de investigação são os principais aspetos de definem a escolha de uma metodologia. O que deve determinar a opção metodológica do investigador não é a adesão a uma ou outra metodologia, a um ou outro paradigma, mas o problema a analisar (Coutinho, 2011). Trata-se, portanto, de ponderar sobre o que se pretende com a investigação, qual a problemática que o gerou, o que precisamos de conhecer melhor.

O estudo pretende *analisar o conhecimento matemático dos professores do 1º ciclo sobre números racionais*, partindo das seguintes questões de investigação:

1 - Que conhecimento revelam os professores do 1º ciclo sobre os números racionais e as suas várias representações?

2 - Como avaliam os professores o conhecimento que têm sobre os números racionais?

3 - Que dificuldades manifestam os professores relativamente ao trabalho dos números racionais com os alunos?

Não é intenção deste estudo confirmar hipóteses, provar ideias pré-concebidas, ou fazer quaisquer generalizações. Trata-se de fazer uma análise do ponto de vista interpretativo do conhecimento matemático dos professores que nele participaram.

O estudo integra dois tipos de metodologia, o quantitativo e o qualitativo, que se relacionam e interligam, podendo ser considerado um estudo com uma abordagem metodológica mista. Esta abordagem é considerada por Teddlie e Tashakkori (2003) como o terceiro movimento metodológico, permitindo utilizar as metodologias quantitativa e qualitativa em relação às questões de investigação, aos métodos, à recolha de dados e aos procedimentos de análise. Para Creswell (1994), neste tipo de metodologia o investigador recolhe, analisa e mistura (integra ou relaciona) dados qualitativos e quantitativos num único estudo.

Segundo Reichardt e Cook (1986), um investigador poderá utilizar os métodos quantitativos e qualitativos caso a investigação o exija. Neste sentido, ao pretender analisar as respostas dos professores, considerei que fazer uma análise somente qualitativa ou quantitativa poderia revelar-se pobre ou pouco eficaz, sendo mais adequada uma metodologia mista, já que uma investigação se torna mais consistente se forem utilizados diferentes métodos de recolha de dados, incluindo a combinação de abordagens quantitativas e qualitativas (Patton,1990).

O estudo contempla componentes da investigação quantitativa, visto que apresenta dados numéricos na forma de frequência absoluta e percentagem, e da investigação qualitativa, através da análise de conteúdo das questões de reposta aberta do questionário (Anexo 1). De acordo com Esteves (2006), os dados a sujeitar a uma análise de conteúdo podem ser de origem e de natureza diversa; *invocados* pelo investigador ou *suscitados* pelo investigador (Van der Maren, citado por Esteves, 2006). Neste estudo, os dados submetidos a análise de conteúdo foram *suscitados* pelo investigador pois decorrem da análise às perguntas abertas do questionário.

A categorização é a operação central da análise de dados através da qual os dados são classificados e reduzidos, após terem sido identificados como pertinentes. As categorias ou classes onde os dados vão ser agrupados podem ser criadas segundo dois tipos de procedimentos: *fechados,* se o analista possui uma lista prévia de categorias apropriadas ao objecto em estudo e a usa para classificar os dados, e *abertos* (também designados exploratórios) sempre que as categorias emergem do próprio material, tratando-se de um processo essencialmente indutivo (Esteves, 2006).

As categorias criadas para análise das questões abertas do estudo tiveram subjacentes os dois tipos de procedimentos. Numas questões as categorias foram criadas *a posteriori* (Carmo & Ferreira, 2008), resultando das respostas dadas pelos professores, e noutras foram definidas antecipadamente (*a priori*). A definição das categorias *a posteriori* decorreu após a *leitura flutuante* (Esteves, 2004) das respostas dos professores que visou uma primeira apropriação da informação nelas contidas. Essas categorias foram sofrendo adaptações e reformulações durante o processo de análise, de forma a incorporarem toda a informação disponível e a ajustá-las aos objetivos pretendidos, uma vez que a categorização é passível de remodelações mais ou menos profundas à medida que novos dados vão sendo considerados até à inserção de todo o material analisado (Esteves, 2004).

Considerando a importância da definição de categorias numa análise de conteúdo, pretendi que estas fossem: (i) *exaustivas*, de forma a que todo o conteúdo que tomei a decisão de classificar fosse incluído; (ii) *exclusivas*, permitindo que os mesmos elementos pertencessem a uma e não a várias categorias; (iii) *objectivas*, admitindo que as caraterísticas de cada categoria fossem explicitadas sem ambiguidades e de forma suficientemente clara; e (iv) *pertinentes*, mantendo uma estreita ligação com os objetivos e com o conteúdo a ser classificado (Carmo & Ferreira, 2008).

Consciente dos cuidados que devem assistir a criação de categorias *a posteriori*, concentrei-me em conceber categorias que não fossem muito numerosas nem demasiadamente pormenorizadas ou, pelo contrário, em número insuficiente e demasiadamente englobantes.

3.2. Recolha de dados e instrumentos utilizados

A recolha de dados decorreu entre 3 e 10 de janeiro de 2014 e foi feita a partir da aplicação de um questionário impresso a 18 professores do 1º ciclo, pertencentes a três escolas públicas de um agrupamento localizado numa zona limítrofe de Lisboa. Esse questionário pretendeu, por um lado, analisar o conhecimento matemático dos professores, partindo do seu desempenho na resolução de tarefas matemáticas relacionadas com os números racionais e, por outro, recolher informações sobre o modo como os professores analisam o seu próprio conhecimento nessa área, as dificuldades que sentem no seu ensino, e as medidas que os poderiam ajudar a aprofundar/melhorar conhecimentos.

Atendendo à natureza do estudo, considerei que a utilização do questionário como instrumento de recolha de dados seria o método mais adequado, por várias razões: (i) por ser a metodologia indicada quando se pretende ter como informantes um conjunto de pessoas (Varandas, 2000), dispensando a presença do investigador, e quando as dificuldades de tempo e distância entre o investigador e os inquiridos carecem de ser equacionados (Yin, 2001); (ii) pelo facto do investigador e do inquirido não interagirem em situação presencial (Carmo & Ferreira, 2008), evitando possíveis constrangimentos na obtenção dos dados; e (iii) por ser um instrumento bastante fiável, desde que respeitados os procedimentos metodológicos quanto à conceção, seleção dos inquiridos e administração no terreno (Carmo & Ferreira, 2008).

Antes de proceder à recolha de dados estabeleci contato com o diretor do Agrupamento com vista à apresentação do estudo e dos respetivos objetivos, solicitando-lhe autorização para a distribuição dos questionários aos professores (Anexo 2). Após a devida autorização, e dada a impossibilidade de encontrar um momento comum em que todos os professores pudessem responder ao questionário em simultâneo em função do desfasamento de horários que existem no agrupamento, optei por contactar pessoalmente as coordenadoras de estabelecimento das três escolas, dando-lhe conhecimento do estudo que estava a desenvolver e dos seus objetivos e pedindo-lhes autorização para distribuir os questionários junto dos professores, assim como o devido consentimento informado (Anexo 3).

Obtida essa autorização, distribui os questionários individualmente a todos os professores e informei-os sobre os objetivos do estudo e sobre o método de recolha e distribuição dos mesmos.

Segundo Carmo e Ferreira (2008), os canais de comunicação entre inquiridor e inquirido podem ser vários, mas exigem cuidados adequados à sua natureza. Neste sentido, e de forma a respeitar algumas questões éticas (Bogdan & Biklen, 1994), tais como a proteção da identidade dos professores e das respetivas escolas, coloquei na sala de professores de cada estabelecimento uma caixa de cartão fechada, apenas com a abertura necessária à introdução do questionário e sem qualquer identificação, e pedi aos professores que colocassem o questionário dentro dessa caixa, sem identificação. Terminado o prazo dado para o preenchimento (três dias) desloquei-me às escolas e recolhi as respetivas caixas. Após a recolha das caixas atribuí aleatoriamente a cada questionário um número de ordem entre 1 e 18 ao qual acrescentei a consoante C. Assim, ao primeiro questionário a analisar foi atribuído o código C01, ao segundo C02 e assim sucessivamente até C18. Esta codificação facilitou a identificação dos questionários e dos respetivos professores.

Segundo vários autores, o recurso a um inquérito por questionário para recolha de dados de uma investigação exige especiais atenções já que não há hipóteses de esclarecimento de dúvidas no momento da inquirição, razão pela qual a sua elaboração requer certos cuidados.

A conceção e administração de um questionário exigem alguns padrões de atuação, quer em relação à construção das perguntas, quer à apresentação do próprio questionário. De forma a salvaguardar estas questões, antes da elaboração do questionário comecei por fazer uma reflexão sobre o número de questões a colocar aos professores, considerando que um número demasiado reduzido poderia não permitir recolher toda a informação necessária e que, pelo contrário, um número excessivo de perguntas poderia, por um lado, ter um efeito dissuasor aumentando a probabilidade de não resposta, e por outro, tornar a análise impraticável no tempo disponível para a investigação. Após estabelecer o número de perguntas a colocar, centrei-me em elaborar um conjunto de questões bem organizado e coerente, com perguntas pertinentes relativamente à experiência dos professores, claras, precisas e compreensíveis, de forma que o seu significado fosse percebido mesmo que os professores não soubessem responder-lhes.

Para Yin (2001) os questionários são constituídos por uma listagem de questões que podem ser mais ou menos estruturadas, bem como mais abertas à diversidade de respostas dos inquiridos, ou, pelo contrário, de resposta mais sintética e direta. Neste questionário são colocadas questões de diferentes tipologias. Tanto quanto possível foram privilegiadas as perguntas fechadas, de modo a objetivar as respostas e a não permitir respostas ambíguas, existindo, no entanto, perguntas abertas que possibilitarão obter diferentes perspetivas dos professores sobre vários aspetos, assim como perguntas de resposta única e de resposta múltipla, e questões de escala.

Para além dos aspetos referidos anteriormente, na elaboração do questionário tive igualmente em consideração o facto da apresentação formal e física funcionar como elemento legitimador (ou não), representando uma quota parte de responsabilidade no seu êxito (Carmo & Ferreira, 2008). Relativamente à apresentação formal, procedi à apresentação do investigador e dos objetivos do estudo aos participantes e tive a preocupação de apresentar o tema de forma clara e simples, tentando mostrar o valor que a participação de cada um poderia representar para a investigação. Na apresentação física, pretendi que o questionário tivesse um aspeto apelativo, que as instruções fossem claras, de forma a evitar diferentes interpretações por partes dos professores, e que a organização fosse clara e coerente.

Face ao exposto, considerei três seções distintas no questionário, sendo composto por uma seção introdutória e duas partes (1ª e 2ª). A seção introdutória é constituída por *perguntas de identificação* (Carmo & Ferreira, 2008), que permitiram caraterizar os participantes do ponto de vista das habilitações (grau académico e tempo de serviço), formação inicial (ano de conclusão e instituição) e formação contínua, específica na área dos números racionais. A primeira parte pretendeu analisar o conhecimento matemático dos professores sobre números racionais, propondo a resolução de 12 tarefas matemáticas sobre tópicos do programa do 1º ciclo. A segunda parte é formada por 5 questões que tiveram como objetivo recolher informações sobre a forma como os professores analisam o seu próprio conhecimento sobre os números racionais, as dificuldades que sentem no seu ensino, e a identificação das medidas que os poderiam ajudar a aprofundar os seus conhecimentos.

As tarefas colocadas aos professores na primeira parte do questionário abordaram diferentes tópicos previstos no programa de matemática do 1º ciclo em vigor (2013), tais como *operações com frações*, *significado medida das frações*, *comparação e ordenação na reta numérica*, *reconstrução da unidade*, *diferentes representações do mesmo número*, fração de um número e *densidade* dos números racionais.

A tabela 1 resume os tópicos matemáticos associados às diferentes tarefas.

Tabela 1

Tópicos matemáticos abordados nas tarefas

Tarefas	*Tópicos*
1	A fração como medida
2	A fração como medida
3	Reconstrução da unidade
4	Diferentes representações do número racional
5	Comparação e ordenação na reta numérica
6	Fração de um número
7	Comparação e ordenação na reta numérica
8	Densidade dos números racionais
9	Diferentes representações dos números racionais
10	Diferentes representações dos números racionais
11 a)	Adição de frações
11 b)	Divisão de frações
12	Adição e multiplicação com frações

Nas três primeiras tarefas pretendi analisar a compreensão dos professores sobre ao material *Cuisenaire*, na resolução de situações que envolvem a fração como *medida* e reconstrução da unidade. A seleção destas tarefas prendeu-se com o facto de este material potenciar a variação da unidade de medida, ser do conhecimento dos professores e ser um recurso disponível nas escolas.

As tarefas 5 e 7 envolvem a representação e ordenação de números racionais com recurso à reta numérica. A escolha destas tarefas residiu no facto de ser um recurso muito usado no 1º ciclo, que permite evidenciar a densidade dos números racionais e as relações de grandeza (Monteiro e Pinto, 2007), e que sugere não só a iteração da unidade mas também subdivisões simultâneas de todas as unidades iteradas (Bright et al., 1988), facilitando o trabalho com os alunos.

As tarefas 4, 9 e 10 dizem respeito às diferentes representações. A compreensão dos números racionais requer a capacidade de representar ideias de várias formas e aptidão para fazer conexões entre representações (Lesh, 1979).

A sexta e oitava tarefas tem subjacentes, respetivamente, os tópicos fração de um número e densidade, e finalmente, as últimas duas tarefas referem-se às operações com frações.

A segunda parte do questionário tencionou recolher informações sobre a análise que os professores fazem sobre o seu próprio conhecimento relativamente aos números racionais e as principais dificuldades que sentem no seu ensino. Pretendeu ainda identificar os tópicos onde os professores reconhecem estar menos seguros e as medidas que ajudariam na consolidação de conhecimentos. Esta parte do questionário é constituída por 6 questões. A primeira teve como objetivo recolher dados sobre a forma como os professores classificam o conhecimento que têm sobre os números racionais, utilizando uma escala composta por 4 níveis (insuficiente, suficiente, bom e muito bom). As questões 2 e 3, tiveram o propósito de aferir a opinião dos professores em relação ao trabalho dos números racionais com os alunos, na forma de fração e numeral decimal, tendo sido utilizada uma escala constituída por 5 níveis (muito fácil, fácil, nem fácil nem difícil, difícil e muito difícil. As questões 4 e 5 pretenderem, respetivamente, recolher informação sobre as principais dificuldades que sentem no trabalho com os alunos, e os tópicos matemáticos onde consideram ter mais dificuldades. A sexta e última questão pretendeu perceber quais as medidas que poderiam ajudá-los a melhorar os seus conhecimentos.

3.3. Participantes (caraterização e critérios de seleção)

Participaram no estudo 18 professores do primeiro ciclo do ensino básico, em exercício de funções, pertencentes a três escolas públicas do 1º ciclo de um agrupamento localizado numa zona limítrofe de Lisboa. O agrupamento situa-se numa zona urbana e integra quatro ciclos de ensino, do pré-escolar ao 3º ciclo. É composto por uma escola do pré-escolar, três escolas do 1º ciclo e uma escola dos 2º e 3º ciclos, num total de 1276 alunos, dos quais 446 pertencem ao 1º ciclo. Os 18 professores que participaram no estudo fazem parte do universo de 22 que constitui o corpo docente do primeiro ciclo desse agrupamento.

A escolha dos participantes obedeceu ao processo de seleção de uma *amostragem não probabilística*, na medida em que a dimensão e os elementos escolhidos dependeram dos objetivos do estudo, e uma vez que a amostra foi selecionada por um processo de escolha intencional e sistematizado, utilizado com o propósito de determinar os sujeitos que dela fazem parte (Carmo & Ferreira, 2008). Dado que a seleção dos participantes foi escolhida por um processo de conveniência (Carmo & Ferreira, 2008), sendo criteriosa e intencional, os resultados do estudo não poderão ser generalizados à população à qual pertence o grupo de conveniência.

A seleção dos intervenientes prendeu-se com o facto de reconhecer no grupo de professores das três escolas caraterísticas pessoais e profissionais distintas que poderiam tornar o estudo mais rico e abrangente, mas também com razões pessoais visto que, por estar a trabalhar a tempo inteiro e não dispor de muito tempo para deslocações, a proximidade entre as três escolas do 1º ciclo, e entre estas e a escola sede do agrupamento, facilitaram a comunicação com o diretor e a recolha de informações sobre o agrupamento, assim como a distribuição e recolha do instrumento criado para a recolha de dados (questionário).

A caraterização dos professores foi feita a partir da uma seção introdutória do questionário que serviu de base à recolha de dados e é apresentada nas tabelas seguintes:

Tabela 2

Grau académico (N=18)

	Magistério Primário	*Bacharelato*	*Licenciatura*	*Mestrado*	*Doutoramento*
Frequência	0	2	14	2	0
Percentagem	0%	11 %	78 %	11 %	0 %

Tabela 3

Tempo de serviço em anos (N=18)

	Número de anos						
	0 – 5	6 - 10	11 - 15	16 – 20	21 - 25	+ 26	Não respondeu
Frequência	0	5	4	3	2	3	1
Percentagem	0 %	28 %	22 %	17 %	11 %	17 %	5 %

No que respeita às habilitações académicas, a maioria dos professores que têm uma licenciatura. Há 1 professor com formação ao nível do magistério primário, 2 professores com bacharelato e 2 com mestrado. Não há professores com doutoramento. Metade dos professores tem entre 6 e 15 anos de serviço. Há 3 professores com o tempo de serviço compreendido entre os 16 e os 20 anos, 2 entre 21 e 25, e 3 têm mais do que 26 anos de serviço.

Tabela 4

Ano de conclusão da formação inicial (N=18)

	Anos						
	Anterior a 1980	1981 1984	1985 1989	1990 1994	1995 1999	2000 2004	Não respondeu
Frequência	1	1	0	2	6	7	1
Percentagem	6 %	6 %	0 %	11 %	33 %	39 %	5 %

Tabela 5

Formação inicial – Instituição (N=18)

	Ensino Público					Ensino Particular			
Instituição	ESE Lisboa	ESE Castelo Branco	ESE Viseu	Magis. Primário	UTAD	ISCE	ESE João Deus	ESE Jean Piaget	ISEC
Frequência	2	1	2	2	2	1	5	1	2
Percentagem	11%	6%	11%	11%	11%	6%	27%	6%	11%

Nota: UTAD – Universidade de Trás - os - Montes e Alto Douro; ISCE – Instituto Superior de Ciências Educativas; ISEC - Instituto Superior de Educação e Ciência

Em relação à formação inicial, constatou-se que metade dos professores frequentaram instituições de ensino público na sua formação inicial e metade fê-lo em instituições de ensino particular. A maioria dos professores concluiu a formação inicial entre 1995 e 2004. Entre 1981 e 1984 houve 1 professor, entre 1990 e 1994 houve 2 e apenas 1 professor concluiu antes de 1980.

Tabela 6

Formação sobre números racionais (N=18)

	"Já frequentou alguma ação de formação sobre números racionais?"		
	Sim	*Não*	*Não respondeu*
Frequência	6	11	1
Percentagem	33%	61 %	6 %

A maioria dos professores nunca frequentou qualquer formação específica no âmbito dos números racionais. Os professores que responderam afirmativamente à questão não indicaram ações específicas sobre o tema, referiram apenas ter frequentado o Programa de Formação Contínua em Matemática para professores do 1º ciclo, tendo abordado este tema em algumas sessões do referido programa.

CAPÍTULO 4

ANÁLISE DE DADOS

Este capítulo apresenta a análise dos dados recolhidos durante o estudo, resultantes da aplicação de questionários impressos a 18 professores do 1º ciclo. Esse questionário é constituído por uma seção introdutória, que permitiu fazer a caraterização dos participantes, e duas partes. A primeira parte é composta por 12 tarefas matemáticas baseadas em tópicos do currículo nacional do 1º ciclo. A segunda parte é constituída por 6 questões que pretenderam recolher informações sobre o modo como os professores analisam o seu conhecimento, as dificuldades que sentem no ensino dos números racionais, e as medidas que poderiam permitir o aprofundamento do seu conhecimento.

4.1. Análise de dados

Os dados decorrentes da análise resultaram na criação de tabelas de frequência absoluta e percentagem para tratamento estatístico das perguntas fechadas, e também na análise de conteúdo das perguntas abertas. Na análise de conteúdo, as categorias tiveram por base *procedimentos fechados* (Esteves, 2006), numas questões, tendo sido previamente criada uma lista de categorias apropriadas às questões em análise, e de *procedimentos abertos* (Esteves, 2006), noutras, que emergiram da própria análise.

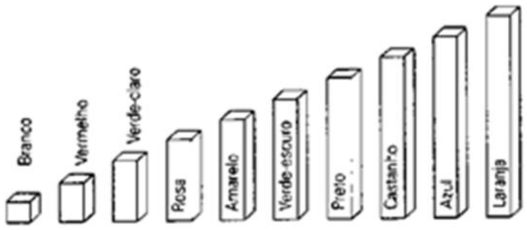
De forma a facilitar a organização dos dados, as tarefas da primeira parte do questionário foram agrupadas de acordo com os tópicos que têm subjacentes (a fração como medida, reconstrução da unidade, diferentes representações do número racional, representação de frações na reta numérica, frações equivalentes, fração de um número, comparação e ordenação de números racionais, densidade dos números racionais e operações com frações). Assim, primeiro é apresentada a análise às duas primeiras tarefas que abordam o significado *medida* da fração com recurso ao material Cuisenaire, seguindo-se a 3ª tarefa sobre *reconstrução da unidade*, e a 5ª e 7ª sobre comparação e ordenação na reta numérica. Posteriormente, é analisada a 6ª tarefa sobre a fração de um número e a 8ª sobre densidade. Finalmente serão analisadas as tarefas 4, 9 e 10 sobre as diferentes representações dos números racionais, e a 11 e 12 sobre operações com frações. Após a análise de todas as questões é feita uma síntese dessa análise.

4.1.1. Análise das tarefas

A fração como medida (tarefas1 e 2)

Tarefa 1

Tendo por base o material Cuisenaire responda às seguintes questões.



Considere como unidade a barra verde escura. Que fração da barra é representada pelas barras:

a) Vermelha b) Branca

A primeira tarefa teve como objetivo identificar as frações correspondentes às barras vermelha e branca, tomando como unidade de referência a barra verde escura. Na alínea a) foram consideradas corretas as respostas que indicaram as frações $\frac{1}{3}$ ou $\frac{2}{6}$ e na alínea b) a fração $\frac{1}{6}$. Considerou-se que apresentaram uma reposta correta os professores que responderam acertadamente a ambas as alíneas. As respostas em que ambas as frações estão incorretas foram consideradas incorretas e as respostas onde apenas a fração correspondente a uma das alíneas está correta foram classificadas como parcialmente corretas.

Analisou-se o número de respostas de cada tipo relativamente à questão no geral e em seguida fez-se essa análise para cada uma das alíneas. A tabela 7 apresenta os resultados das respostas à pergunta 1. A tabela 8 apresenta as respostas dos professores relativas a cada uma das alíneas.

Tabela 7

Respostas corretas à tarefa 1 (N=18)

Tipo de resposta	***Frequência***	***Percentagem***
Correta	15	83%
Parcialmente correta	1	5,5%
Incorreta	1	5,5%
Não respondeu	1	6%

Tabela 8

Respostas dos professores relativas a cada alínea (N=18)

a) vermelha			***b) branca***		
Tipo de resposta	*Frequência*	*Percentagem*	*Tipo de resposta*	*Frequência*	*Percentagem*
Correta	16	89 %	*Correta*	15	83 %
Incorreta	1	5,5 %	*Incorreta*	2	11 %
Não respondeu	1	5,5 %	*Não respondeu*	1	6 %

A grande maioria dos professores identificou as frações representadas pelas barras vermelha e branca relativamente à unidade (barra verde escura). No conjunto das 16 respostas corretas à alínea a) – *barra vermelha* -, foi possível identificar 2 tipos, resultantes de diferentes partições da unidade; 8 professores responderam $\frac{1}{3}$ (divisão em 3 partes), e 4 responderam $\frac{2}{6}$ (divisão em 6 partes). Houve 4 professores que utilizaram ambas as frações na resposta ($\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$), reconhecendo a sua equivalência. Registaram-se 2 respostas incorretas relativamente à barra branca ($\frac{1}{8}$ e $\frac{1}{5}$) e 1 à barra vermelha ($\frac{1}{4}$).

Tarefa 2

> *Considere agora como unidade a barra laranja. Que fração da barra laranja representam as barras:*
>
> a) Branca b) Castanha
>
> c) Qual a barra que representa 0,9?

Nas alíneas a) e b) da segunda tarefa foi pedido aos professores que, considerando como unidade de referência a *barra laranja,* indicassem as frações relativas às barras *branca* ($\frac{1}{10}$) e *castanha* ($\frac{8}{10}$), ou frações equivalentes a estas. Na alínea c) foi dada aos professores uma fração da unidade representada na forma de numeral decimal (0,9) e pretendeu-se que indicassem a barra que representa esse número (barra azul). Consideraram-se respostas corretas, aquelas que incluíram soluções certas às três alíneas. As respostas em que apenas algumas alíneas foram respondidas corretamente classificaram-se como parcialmente corretas. Consideram-se incorretas as respostas que apresentassem soluções erradas a todas as alíneas.

Foi feita a análise global da questão, tendo disso registado o número de respostas de cada tipo, e posteriormente analisou-se individualmente cada uma das alíneas. As tabelas seguintes traduzem esses dados.

Tabela 9

Respostas dos professores à tarefa 2 (N=18)

Tipo de resposta	***Frequência***	***Percentagem***
Correta	14	78 %
Parcialmente correta	2	11 %
Incorreta	1	5,5 %
Não respondeu	1	5,5 %

Tabela 10

Resposta dos professores à tarefa 2, por alíneas (N=18)

	Tipo de resposta		
Barras	***Correta***	***Incorreta***	***Não respondeu***
a) branca	**16** (89%)	**1** (5,5%)	**1** (5,5%)
b) castanha	**14** (78%)	**3** (17%)	**1** (5%)
c) azul	**16** (89%)	**1** (5,5%)	**1** (5,5%)

Os dados mostram que 14 professores deram uma resposta correta, identificando as frações da unidade (*barra laranja*) relativas às barras *branca* ($\frac{1}{10}$) e *castanha* ($\frac{8}{10}$), e reconhecendo a barra *azul* como a que representa 0,9 dessa unidade. A fração correspondente à barra *castanha* foi a mais difícil de identificar pelos professores.

Relativamente às respostas dadas, na alínea a) (*barra branca*) houve uma comum a todos os professores que acertaram ($\frac{1}{10}$). Na alínea b) (*barra castanha*) a maioria dos professores respondeu $\frac{8}{10}$, 2 professores responderam $\frac{4}{5}$, e houve 2 professores que indicaram ambas as frações na resposta ($\frac{8}{10} = \frac{4}{5}$), reconhecendo-lhe equivalência.

Reconstrução da unidade (tarefa 3)

Tarefa 3

Se a barra vermelha representar $\frac{1}{5}$ qual a barra que representa a unidade?

A terceira tarefa teve subjacente a reconstrução da unidade fracionada, dada uma fração dessa mesma unidade. Pretendeu-se que os professores identificassem a unidade de referência (*barra laranja*), partindo da *barra vermelha* que representa $\frac{1}{5}$. Foram consideradas corretas as respostas que indicaram a barra laranja. As restantes respostas consideraram-se incorretas. A tabela seguinte apresenta os dados apurados.

Tabela 11
Respostas dos professores à tarefa 3 (N=18)

Tipo de resposta	***Frequência***	***Percentagem***
Correta	14	78 %
Incorreta	2	11 %
Não respondeu	2	11 %

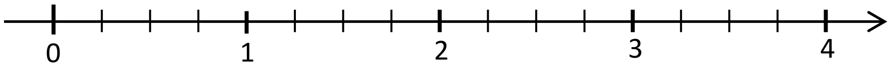
A maioria dos professores indicou corretamente a barra correspondente à unidade (*barra laranja*), 2 professores apresentaram uma resposta incorreta (amarela e verde escuro) e 2 não deram qualquer resposta.

Comparação e ordenação na reta (tarefas 7 e 5)

Tarefa 7

Na linha numérica representada abaixo, assinale os pontos correspondentes a:

$\frac{5}{2}$ *1,5* $3\frac{1}{2}$ $\frac{7}{4}$.



Nesta questão os professores foram solicitados a comparar e ordenar números na reta numérica em diferentes representações: fração, numeral decimal e numeral misto, assinalando os pontos correspondentes a $\frac{5}{2}$, $3\,\frac{1}{2}$, $\frac{7}{4}$ e 1,5.

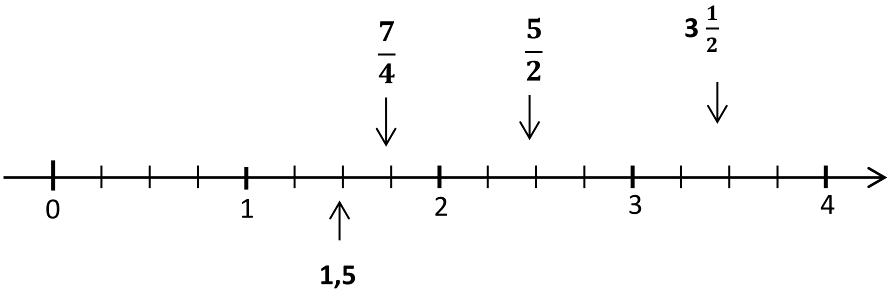


Figura 5. Resolução da tarefa 7

Na análise das respostas, classificaram-se como corretas as respostas que colocaram os 4 números na devida ordem, as respostas que apresentaram apenas alguns números na ordem correta consideraram-se parcialmente corretas. Estão incorretas as respostas em que nenhum dos números foi colocado no respetivo ponto.

Foi feita a análise global da questão e posteriormente fez-se uma análise individual sobre cada um dos números. As tabelas 12 e 13 apresentam esses dados.

Tabela 12

Respostas dos professores à tarefa 7 (N=18)

Tipo de resposta	***Frequência***	***Percentagem***
Correta	7	39 %
Parcialmente correta	10	55 %
Incorreta	0	0 %
Não respondeu	1	6 %

Tabela 13

Respostas dos professores à tarefa 7, por números (N=18)

	Números											
	$\frac{5}{2}$			**1,5**			$3\,\frac{1}{2}$			$\frac{7}{4}$		
Tipo de resposta	**C**	**I**	**NR**	**C**	**I**	**NR**	**C**	**I**	**NR**	**C**	**I**	**NR**
Frequência	13	3	2	16	1	1	11	6	1	15	1	2
Percentagem	72 %	17 %	11 %	89 %	5,5 %	5,5 %	61 %	33 %	6 %	83 %	6 %	11 %

Nota - C (correta); I (incorreta); NR (não respondeu)

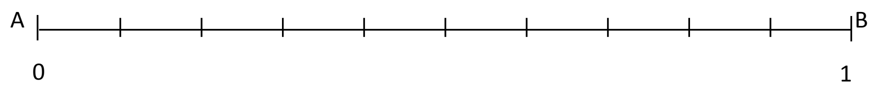
Apenas 7 professores (39%) obtiveram uma resposta correta nesta tarefa. Em relação ao desempenho individual em cada um dos números, verificou-se que a maioria dos professores (72%) assinalou corretamente $\frac{5}{2}$, 16 (89%) assinalaram no respetivo ponto da reta 1,5, e 15 assinalaram $\frac{7}{4}$. O ponto correspondente a $3\,\frac{1}{2}$ parece ter sido aquele que representou maior dificuldade, mas ainda assim a maioria dos professores (61%) assinalou-o corretamente.

Houve um dos professores que registou no enunciado a expressão $\frac{3x2+1}{2} = \frac{7}{2}$, revelando a estratégia que possivelmente o terá ajudado na ordenação; calcular uma fração imprópria equivalente a $3\,\frac{1}{2}$.

A análise das respostas permitiu identificar alguns mal-entendidos que foram comuns a vários professores. Por exemplo, 5 professores que deram respostas parcialmente corretas, assinalaram corretamente os números 1,5, $\frac{7}{4}$ e $\frac{5}{2}$, e fizeram corresponder ao mesmo ponto 1,5 e $3\,\frac{1}{2}$ como se fossem representações do mesmo número. Houve 1 professor que, para além dos números anteriores, fez corresponder a esse mesmo ponto $\frac{7}{4}$. Verificou-se também que 3 professores assinalaram todos os números corretamente à exceção de $\frac{5}{2}$.

Tarefa 5

A turma do João organizou um percurso pedestre no Parque Natural da Serra d'Aire e Candeeiros, representado na figura por [AB]. A Maria parou para descansar depois de ter feito $\frac{2}{5}$ *do percurso, a Joana parou ao fim de* $\frac{4}{10}$*, o Francisco ao fim de* $\frac{3}{5}$ *e os restantes elementos da turma ao fim de* $\frac{7}{10}$ *do percurso. Assinale no segmento [AB] abaixo traçado, o ponto que corresponde a cada uma das paragens referidas.*



Esta tarefa teve como objetivo a ordenação de números na reta numérica na forma de fração. Foi pedido aos professores que assinalassem no respetivo ponto da reta a fração correspondente ao percurso percorrido por cada uma das crianças (Maria $\frac{2}{5}$, Joana $\frac{4}{10}$, Francisco $\frac{3}{5}$ e os restantes colegas $\frac{7}{10}$).

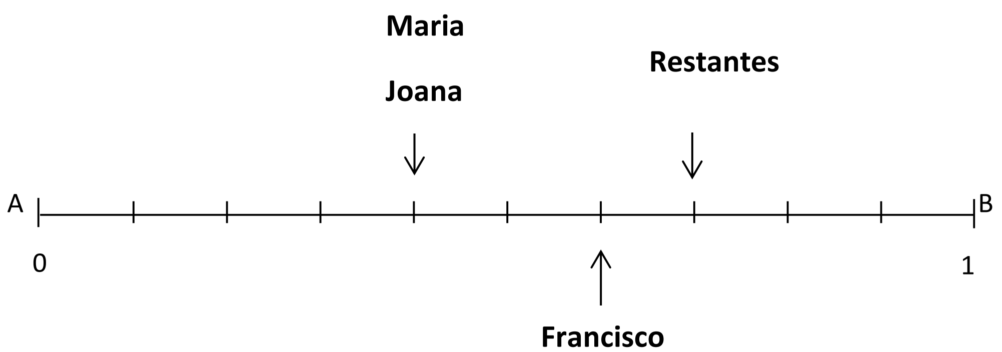


Figura 6. Resolução da tarefa 5

Nesta questão consideraram-se como corretas apenas as respostas que assinalaram os pontos referentes às 4 distâncias. Foram consideradas parcialmente corretas as respostas que assinalaram algumas distâncias, e incorretas as respostas em que todas as distâncias mal assinaladas.

Foi feita a análise global das respostas dos professores de modo a identificar o número de respostas de cada tipo, seguindo-se uma análise mais pormenorizada que permitiu identificar o número de acertos, relativamente a cada uma das distâncias.

Os resultados são apresentados nas tabelas 14 e 15.

Tabela 14

Respostas dos professores à tarefa 5 (N=18)

Tipo de resposta	***Frequência***	***Percentagem***
Correta	14	78 %
Parcialmente correta	4	22 %
Incorreta	0	0 %

Tabela 15

Respostas dos professores à tarefa 5 (por distâncias) (N=18)

	Distâncias											
	$\frac{2}{5}$			$\frac{4}{10}$			$\frac{3}{5}$			$\frac{7}{10}$		
Tipo de resposta	***C***	***I***	***NR***	***C***	***I***	***NR***	***C***	***I***	***NR***	***C***	***I***	***NR***
Frequência	14	3	1	18	0	0	15	1	2	17	0	1
Percentagem	**78 %**	**17 %**	**5 %**	**100 %**	**0 %**	**0 %**	**83 %**	**6 %**	**11 %**	**94 %**	**0 %**	**6 %**

Nota – C (correta); I (incorreta); NR (não respondeu)

A maioria dos professores (14) assinalou corretamente todos os pontos na reta e apenas 4 deu uma resposta parcialmente correta. Destes últimos, 1 professor assinalou todos os pontos exceto $\frac{4}{10}$, parecendo não reconhecer a equivalência a $\frac{2}{5}$, 1 professor assinalou $\frac{4}{10}$ e $\frac{7}{10}$ e errou $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{5}$, e à semelhança do anterior, não reconheceu que $\frac{4}{10}$ e $\frac{2}{5}$ são equivalentes. Houve 1 professor que assinalou apenas $\frac{4}{10}$ e 1 que indicou apenas as frações $\frac{4}{10}$ e $\frac{7}{10}$. Relativamente a cada uma das frações, $\frac{2}{5}$ foi assinalada pela maioria dos professores, todos os professores assinalaram corretamente $\frac{4}{10}$, 15 professores fizeram corresponder a fração $\frac{3}{5}$ ao ponto da reta e 17 identificaram o ponto relativo a $\frac{7}{10}$.

Fração de um número (tarefa 6)

Tarefa 6

Sabendo que o percurso era de 4 km, quantos quilómetros tinham sido feitos pela Maria quando parou para descansar? E pela Joana?

Na sequência da tarefa 5, foi pedido aos professores que calculassem o número de quilómetros percorridos pela Maria e pela Joana (1,6 km), dada a fração do percurso percorrida (Maria $\frac{2}{5}$ e Joana $\frac{4}{10}$), e tendo em conta a distância total (4km). Na análise das respostas classificaram-se como corretas as respostas que indicaram a distância 1,6 Km e a relacionam a ambas as amigas. As respostas que apresentaram uma distância correta e uma incorreta consideraram-se parcialmente corretas. Na tabela 16 estão registados os dados obtidos.

Tabela 16

Respostas dos professores à tarefa 6 (N=18)

Tipo de resposta	***Frequência***	***Percentagem***
Correta	*15*	*83 %*
Parcialmente correta	*2*	*11 %*
Incorreta	*1*	*6 %*
Não respondeu	*0*	*0 %*

Na sua maioria, os professores calcularam corretamente o número de quilómetros percorridos pela Maria e pela Joana. Houve 2 professores que apresentaram uma resposta parcialmente correta, tendo indicado a distância percorrida apenas por uma das crianças, parecendo não ter em conta que a distância percorrida é igual. Enquanto alguns professores escreveram apenas o número de quilómetros à frente dos nomes das crianças, outros parecem ter tido necessidade de recorrer a estratégias que os ajudassem a chegar à resposta, por exemplo, apoiando-se na reta da pergunta 5. É o caso do professor C01 que fez corresponder o comprimento do percurso (4 Km) ao comprimento da reta, e depois dividiu-o em 4 partes.

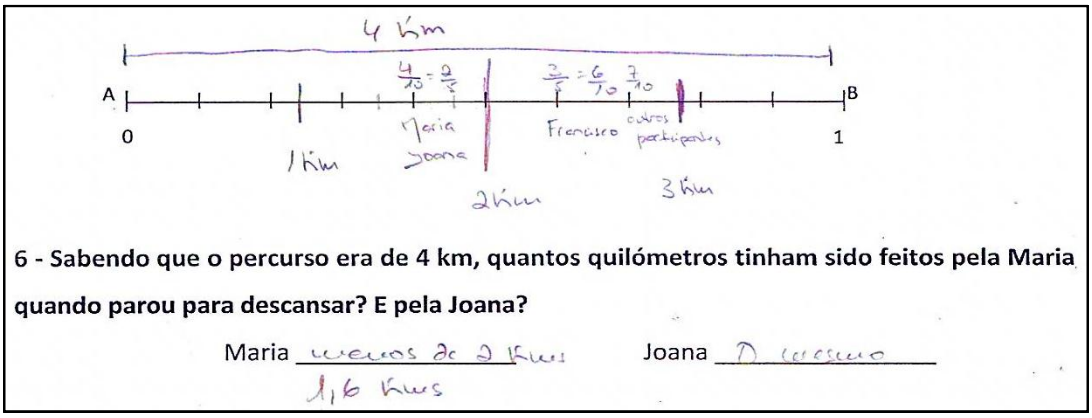


Figura 7. Estratégia usada pelo professor C01

O professor C06 atribuiu a cada ponto da reta um múltiplo de quatro, entre 0 e 36, como se esta representasse um percurso com 40 Km.

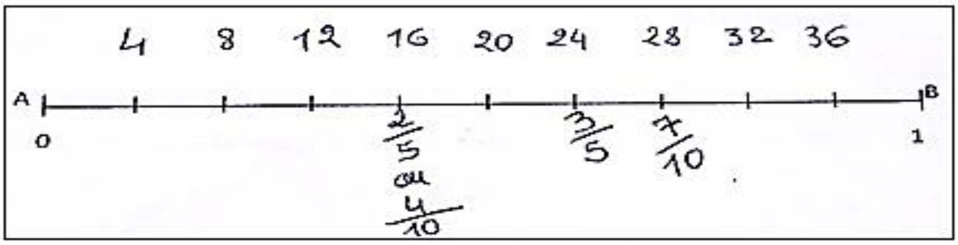


Figura 8. Estratégia usada pelo professor C06

O professor C10 começou por fazer a equivalência entre 4 km e 4 000 m e dividiu esse número em 10 partes.

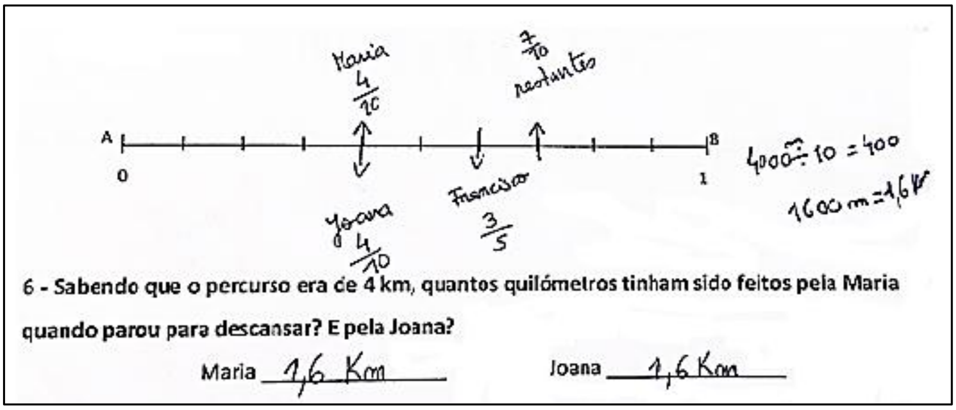


Figura 9. Estratégia usada pelo professor C10

Densidade dos números racionais (tarefa 8)

Tarefa 8

Assinale na reta numérica três números entre 0 e 1.

Na tarefa 8 foi pedido as professores para assinalarem 3 números entre 0 e 1. A análise a esta questão quis identificar não só as respostas corretas e incorretas, mas também o tipo de representação usado pelos professores. Foram consideradas corretas as respostas dos professores que assinalaram devidamente 3 pontos e os respetivos números e incorretas aquelas em que os números assinalados não corresponderam ao pedido na pergunta. Os dados obtidos são apresentados na tabela 17.

Tabela 17

Respostas dos professores à tarefa 8 (N=18)

Tipo de resposta	***Frequência***	***Percentagem***
Correta	15	83%
Incorreta	1	6%
Não respondeu	2	11%

A grande maioria dos professores (83%) assinalou na reta três números ente 0 e 1. Desses, 13 fizeram-no na forma de numeral decimal e apenas 2 usaram as frações $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$. Os professores que registaram os números na representação decimal, assinalaram pontos de referência como a metade (0,5) e pontos próximos dos assinalados na reta como 0,1 e 0,9. Nos restantes casos as respostas foram mais diversificadas, por exemplo: 0,3, 0,5, 0,6 (Prof. C06), 0,25, 0,5, 0,75 (Prof. C16) e 0,125, 0,25, 0,5 (Prof. C17).

Houve apenas 1 professor que apresentou uma resposta incorreta (1,25; 1,5; 1,75) e 2 que não responderam.

Representações dos números racionais (tarefas 4, 9 e 10)

Tarefa 4

A Sara e a irmã foram lanchar. Na fruteira havia cinco maçãs e meia.

a) Escreva uma fração que represente o número de maçãs que havia na fruteira.

b) Quando terminaram de lanchar ficaram na fruteira $\frac{9}{4}$ de maçã. Quantas maçãs inteiras sobraram?

A quarta tarefa é composta por duas perguntas. Na alínea a) foi pedido aos professores que indicassem uma fração representativa do número de maçãs que existia na fruteira (cinco maçãs e meia), por exemplo $\frac{55}{10}$ ou $\frac{11}{2}$. Na alínea b), solicitou-se que referissem o número de maçãs inteiras na fração $\frac{9}{4}$ (2 maçãs). Na análise das respostas, registaram-se como corretas as respostas que apresentaram resoluções acertadas às duas alíneas. As respostas corretas a apenas uma das alíneas foram consideradas como parcialmente corretas. Na tabela 18 são apresentados os resultados da análise.

Tabela 18

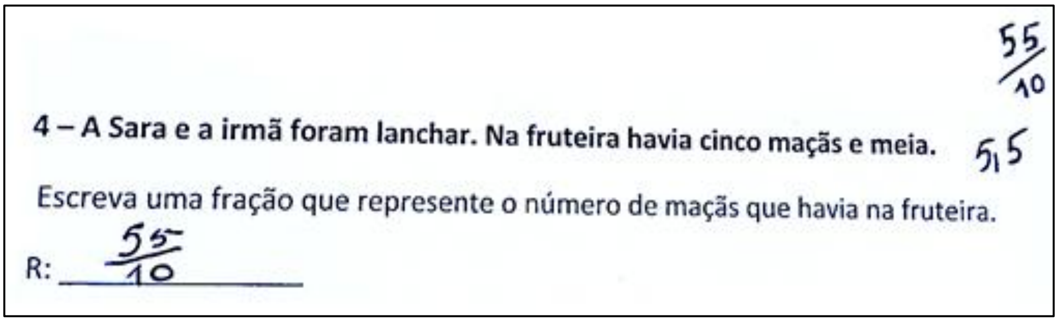
Respostas dos professores à tarefa 4 (N=18)

Tipo de resposta	***Frequência***	***Percentagem***
Correta	11	61%
Parcialmente correta	5	28%
Incorreta	0	0%
Não respondeu	2	11%

Dos 18 professores, 11 (61%) deram uma resposta correta, 5 apresentaram uma resposta parcialmente correta e 2 não responderam.

Relativamente à primeira pergunta "*Escreva uma fração que represente o número de maçãs que havia na fruteira*", a maioria dos professores (72%) escreveu uma fração representativa do número de maçãs; 8 professores usaram a fração $\frac{11}{2}$ e 2 a fração decimal $\frac{55}{10}$. Houve 2 professores que apresentaram uma resposta possível, recorrendo ao numeral misto $5\frac{1}{2}$, e não a uma fração como era pedido no enunciado. Houve 1 professor (C03) que usou diferentes representações para indicar o número de maçãs (fração, numeral misto e pictórica).

Nos enunciados de alguns professores apareceram esquemas e outros registos que parecem representar estratégias usadas para chegar à resposta. O professor C02, por exemplo, representou as cinco maçãs e meia na forma de numeral decimal e fez-lhe corresponder a fração decimal $\frac{55}{10}$.


$\frac{55}{10}$

4 – A Sara e a irmã foram lanchar. Na fruteira havia cinco maçãs e meia. 5,5

Escreva uma fração que represente o número de maçãs que havia na fruteira.

R: $\frac{55}{10}$

Figura10. Resposta do professor C02 à tarefa 4

O professor C03 representou as maçãs usando 3 representações diferentes; icónica, numeral misto e fração.


4 – A Sara e a irmã foram lanchar. Na fruteira havia cinco maçãs e meia.

Escreva uma fração que represente o número de maçãs que havia na fruteira.

R: $5\frac{1}{2}$ $\frac{11}{2}$

Figura 11. Resposta do professor C03 à tarefa 4

O professor C10 usou igualmente uma representação icónica do número de maçãs juntamente com a fração $\frac{11}{2}$.


4 – A Sara e a irmã foram lanchar. Na fruteira havia cinco maçãs e meia.

Escreva uma fração que represente o número de maçãs que havia na fruteira.

R: $\frac{11}{2}$

Figura 12. Resposta do professor C10 à tarefa 4

Em relação à segunda pergunta "*Quando terminaram de lanchar ficaram na fruteira* $\frac{9}{4}$ *de maçã. Quantas maçãs inteiras sobraram?*", a percentagem de professores que indicou a resposta correta (2 maçãs) foi de 61% (11 professores). Houve, 5 professores que deram uma resposta incorreta e 2 não apresentaram qualquer resposta. Nas repostas incorretas, 4 professores responderam 3 maçãs e um professor 4 maçãs.

Tarefa 9

Das opções seguintes assinale com X a que representa a fração $\frac{9}{2}$ *?*

☐ 3,333 ☐ 4,25 ☐ 5,01 ☐ 4,5

Nesta tarefa foi pedido aos professores que identificassem a representação decimal da fração $\frac{9}{2}$. Foram consideradas corretas as respostas que indicaram apenas a opção correta. Todos os professores assinalaram corretamente 4,5.

Tarefa 10

Do conjunto dos números apresentados circunde aqueles que representam números racionais fracionários:
$\frac{4}{2}$; $\frac{1}{3}$; 5 ; $\frac{25}{5}$; $\frac{1}{4}$; 0,15

A tarefa apresentada na pergunta 10 teve como objetivo aferir sobre o conhecimento dos professores relativamente aos números racionais fracionários. Para tal, solicitou-se que, perante os números $\frac{4}{2}$, $\frac{1}{3}$, 5, $\frac{25}{5}$, $\frac{1}{4}$ e 0,15, circundassem apenas os números fracionários ($\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ e 0,15).

No processo de análise, as respostam foram classificadas como corretas, se circundaram todos (e unicamente) os números corretos, parcialmente corretas, se assinalaram alguns números, e incorretas, se os números assinalados não são fracionários.

Foi feita uma análise global das respostas, no sentido de analisar a percentagem de respostas de cada tipo. Após a recolha desses dados, procedeu-se à análise das respostas parcialmente corretas, interpretando os mal-entendidos que estiveram na sua origem. Os dados da análise estão expressos nas tabelas 19 e 20.

Tabela 19

Respostas dos professores à tarefa 10 (N=18)

Tipo de resposta	***Frequência***	***Percentagem***
Correta	6	33%
Parcialmente correta	12	67%
Incorreta	0	0%
Não respondeu	0	0%

Os dados indicam que apenas 6 professores (33%) reconheceram os números fracionários ($\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ e 0,15). A maioria dos professores (12) apresentou respostas parcialmente corretas. Em relação a estas últimas; 3 professores circundaram todos os números do conjunto, exceto o 5, houve 6 professores que assinalaram somente os números representados na forma de fração e os restantes 3 deram outras respostas (1 professor assinalou as frações que representam números inteiros e 0,15, 1 professor assinalou corretamente $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$, mas não assinalou 0,15, e 1 terceiro professor assinalou somente as frações que representam números inteiros).

Tabela 20

Respostas dos professores à tarefa 10 (por números) (N=18

	Números					
	$\mathbf{\frac{4}{2}}$	$\mathbf{\frac{1}{3}}$	**5**	$\mathbf{\frac{25}{5}}$	$\mathbf{\frac{1}{4}}$	**0,15**
Frequência	11	16	0	11	16	10
Percentagem	61 %	89 %	0 %	61 %	89 %	56%

Os dados indicam ainda que a maioria dos professores assinalou as frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$ como números fracionários e cerca de metade assinalou 0,15. Houve 11 professores que consideraram $\frac{4}{2}$ e $\frac{25}{5}$ como números fracionários, provavelmente por estarem na forma de fração.

Operações com números racionais (tarefas 11 e 12)

Tarefa 11

Escreva um enunciado que possa ser traduzido pelas seguintes expressões:

a) $\frac{3}{5} + \frac{1}{9}$ b) $\frac{4}{5} : \frac{1}{2}$

Nesta questão pretendeu-se analisar o conhecimento dos professores em relação à adição e divisão de frações, pedindo-lhe que criassem dois enunciados com situações problemáticas passíveis de serem resolvidas pelas expressões $\frac{3}{5}+\frac{1}{9}$ e $\frac{4}{5}:\frac{1}{2}$.

Na análise das respostas, consideraram-se corretas aquelas em que os professores criaram enunciados certos para ambas as expressões. Foram consideradas parcialmente corretas as respostas que apresentaram apenas um enunciado correto, e as restantes incorretas. A tabela 21 revela os dados obtidos nesta questão.

Tabela 21

Respostas dos professores à tarefa 11 (N=18)

Tipo de resposta	**Frequência**	**Percentagem**
Correta	0	0%
Parcialmente correta	9	50%
Incorreta	6	33%
Não respondeu	3	17%

A análise revelou que nenhum professor deu respostas corretas. Metade dos professores escreveu enunciados corretos para uma das expressões, obtendo respostas parcialmente corretas. Esta questão não foi respondida por 3 professores e houve 6 que deram respostas incorretas.

Após a análise anterior fez-se uma mais pormenorizada, com o intuito de analisar o desempenho dos professores em relação a cada uma das operações, tendo sido registada na tabela 22.

Tabela 22

Respostas dos professores à tarefa 11, por alíneas (N=18)

	a) $\frac{3}{5}+\frac{1}{9}$		b) $\frac{4}{5}:\frac{1}{2}$	
Tipo de resposta	**Frequência**	**Percentagem**	**Frequência**	**Percentagem**
Correta	7	39%	2	11%
Incorreta	8	44%	11	61%
Não respondeu	3	17%	5	28%

O número de professores que apresentou enunciados corretos é reduzido em ambas as alíneas; 2 para a divisão e 7 para a adição. Quase um terço dos professores não respondeu à alínea b) e 3 não responderam à alínea a). Houve 8 professores que deram respostas incorretas à expressão a) e 11 à expressão b).

Seguidamente é apresentada uma análise mais exaustiva sobre as respostas obtidas em cada expressão; primeiro sobre a adição e depois sobre a divisão.

A análise da alínea a) iniciou-se com a *leitura flutuante* (Esteves, 2004) das respostas dos professores que visou uma primeira apropriação da informação nelas contida. Seguidamente as respostas foram agrupadas em 2 categorias, consoante estivessem concetualmente corretas ou incorretas. Posteriormente foram criadas diversas subcategorias que visaram a incorporação de toda a informação disponível e a adequação da análise aos objetivos pretendidos (Ferreira, 2008), nomeadamente a identificação das conceções presentes nas respostas e a interpretação dos erros e mal-entendidos

Os dados indicaram que apenas 7 professores conseguiram criar uma situação concetualmente correta para $\frac{3}{5}+\frac{1}{9}$, como por exemplo: "*A turma do 3º A comeu $\frac{3}{5}$ das maçãs que estavam num cesto e a turma do 3º B comeu $\frac{1}{9}$ das maçãs que estavam no mesmo cesto. Que porção de maçãs comeram os alunos das duas turmas?*" (C01), "*O António estava a fazer uma colecção de cromos. Já tinha $\frac{3}{5}$ da coleção. O seu amigo desistiu de fazer a mesma coleção e deu-lhe a sua parte que correspondia a $\frac{1}{9}$. Com* *que parte da coleção ficou o João?*" (C02), "*O Luís comeu* $\frac{3}{5}$ *de um bolo e o Quim comeu* $\frac{1}{9}$*. Qual foi a quantidade de bolo que comeram?"* (C11).

Dos restantes professores, 3 não apresentaram qualquer enunciado e 8 apresentaram enunciados que indiciavam dificuldades concetuais sobre a adição de frações. Em 39% dos casos (7 professores), foram escritos enunciados em que as frações designadas são referidas como frações de unidades distintas, e não como frações da mesma unidade. Os enunciados seguintes são disso exemplo: " *O João comeu* $\frac{3}{5}$ *de um bolo. O António comeu* $\frac{1}{9}$ *de outro. Ao todo quantas fatias foram comidas*?" (C09), "*Numa fruteira estavam 5 maçãs e 9 peras. Durante o lanche uns amigos comeram* $\frac{3}{5}$ *das maçãs e* $\frac{1}{9}$ *das peras. Que frutas sobraram?*" (C10), "*Encomendaram-se 2 pizas de tamanhos diferentes, de uma comeu-se* $\frac{3}{5}$ *e da outra* $\frac{1}{9}$*. Qual a quantidade de piza que se comeu?*" (C16).

Após a análise dos enunciados da alínea anterior, procedeu-se à análise dos enunciados relativos à expressão $\frac{4}{5} : \frac{1}{2}$. Contrariamente à expressão anterior, para a análise da segunda parte da questão foram criadas categorias *à priori* (Ferreira, 2008) com base no estudo realizado por Ma (2009) com professores chineses e americanos. As respostas foram registadas em duas tabelas distintas em função das conceções expressas; uma para as respostas concetualmente corretas e outra para as respostas que apresentaram problemas ou mal-entendidos.

Os enunciados passíveis de serem resolvidos pela expressão $\frac{4}{5} : \frac{1}{2}$ foram posteriormente analisadas de acordo com o tipo de representação utilizado: *divisão como medida (Pinto e Monteiro, 2008)* - (encontrar quantos $\frac{1}{2}$ s existem em $\frac{4}{5}$ ou encontrar quantas vezes $\frac{4}{5}$ é relativamente a $\frac{1}{2}$), *divisão como partilha equitativa (Pinto e Monteiro, 2008)* - (encontrar um número tal que $\frac{1}{2}$ dele seja $\frac{4}{5}$), e representação através do *modelo de produto e fatores* (Ma 2009) - (encontrar um fator que multiplicado por $\frac{1}{2}$ dará $\frac{4}{5}$), Os enunciados que revelaram incorreções do ponto de vista concetual foram analisados de acordo com as seguintes categorias: confusão entre a *divisão por* $\frac{1}{2}$ *e a divisão por 2* e confusão entre a *divisão por* $\frac{1}{2}$ *e a multiplicação por* $\frac{1}{2}$.

Os dados apuraram que, do grupo de 18 professores, apenas 2 escreveram um enunciado concetualmente correto. Um dos enunciados teve subjacente a *medida:* "*O*

António comprou 1 Kg de uvas. Comeu algumas e sobraram $\frac{4}{5}$. Quis distribuir o resto por caixas de $\frac{1}{2}$ Kg. Que porção de caixas vai ocupar?" (C08), e o outro *a partilha equitativa* " *A Joana leu $\frac{4}{5}$ do livro em $\frac{1}{2}$ hora. Que parte do livro conseguirá ela ler numa hora?*" (C16).

Houve 5 professores que não apresentaram qualquer enunciado e mais de metade (11) escreveram enunciados desadequados, onde se detetou a existência de mal-entendidos sobre a divisão de frações. Desses 11 professores, 6 confundiram a *divisão por $\frac{1}{2}$ com a divisão por 2*. Por exemplo: "*A Joana pretende calcular a metade de $\frac{4}{5}$. Quanto vai obter*?" (C05), "*Sobraram $\frac{4}{5}$ de uma piza. Dois amigos dividiram-na. Quantas fatias coube a cada um*?" (C09), "*O Luís dividiu a sua coleção de cromos em 5 partes, guardou uma e deu metade daquela que ficou ao seu amigo. Que parte deu ao seu amigo?" (C15).*

Houve 2 professores que confundiram a *divisão por $\frac{1}{2}$ com a multiplicação por $\frac{1}{2}$*: "*O Rui decidiu fazer um percurso na natureza*. *Fez $\frac{4}{5}$ do caminho, $\frac{1}{2}$ foi feito a pé. Que parte do percurso foi feita de bicicleta*? (C13); "*A mãe do João fez um bolo. Disse ao João que podia comer $\frac{4}{5}$ e o que sobrava era para ela*. *Entretanto chegou o irmão do João e a mãe disse para o João dar metade da sua parte ao irmão.*" (C02),

Foi ainda possível verificar que, quer os professores que indicaram enunciados adequados, quer os escreveram enunciados incorretos, tanto na alínea a) como na b), sugeriram situações problemáticas familiares aos alunos, relacionados com o seu dia a dia.

Tarefa 12

Assinale com X o resultado de cada uma das expressões:

$\boxed{3 \times \frac{1}{4}}$	$\boxed{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}}$
☐ a) $\frac{3}{12}$	☐ a) $\frac{4}{6}$
☐ b) $\frac{3}{4}$	☐ b) $\frac{5}{4}$
☐ c) $\frac{1}{12}$	☐ c) $1\frac{1}{2}$

Na última tarefa foi pedido aos professores que assinalassem o resultado das expressões *3* x $\frac{1}{4}$ *e* $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}$. Consideraram-se corretas as respostas em que ambas as opções estão certas ($\frac{3}{4}$ para a multiplicação e $\frac{5}{4}$ para a adição). As respostas em que apenas uma das opções é a correta foram consideradas parcialmente corretas. As respostas em que ambas as opções estão erradas são consideradas incorretas. A tabela 23 mostra os resultados apurados.

Tabela 23

Respostas dos professores à tarefa 12 (N=18)

Tipo de resposta	***Frequência***	***Percentagem***
Correta	15	83%
Parcialmente incorreta	3	17%
Incorreta	0	0%
Não respondeu	0	0%

Os dados revelaram que a grande maioria dos professores (15) assinalou o resultado correto de ambas expressões. A percentagem de professores que assinalou corretamente o resultado de 3 x $\frac{1}{4}$ foi de 94% (17 professores), havendo apenas um professor que assinalou a resposta $\frac{3}{12}$, ou seja, o resultado da multiplicação dos numerados e denominadores.

No caso da resposta à expressão $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}$, 16 professores assinalaram a opção correta, e 2 indicaram a fração $\frac{4}{6}$.

4.1.1.1. Desempenho global dos professores nas tarefas

Após a análise global das tarefas, foi analisado o desempenho individual dos professores, pretendendo aferir o número de respostas corretas, parcialmente corretas, incorretas e não respondidas. A tabela 24 apresenta os dados relativos a essa análise.

Tabela 24

Desempenho individual dos professores nas tarefas (N=18)

	Tipo de resposta			
Professor	***Correta***	***Parcialmente correta***	***Incorreta***	***Não respondeu***
C01	10	1	1	0
C02	10	1	0	1
C03	5	5	2	0
C04	10	0	1	1
C05	7	2	3	0
C06	6	6	0	0
C07	8	3	1	0
C08	11	1	0	0
C09	9	2	1	0
C10	9	2	1	0
C11	8	4	0	0
C12	6	3	2	1
C13	8	3	1	0
C14	11	1	0	0
C15	5	2	1	4
C16	9	3	0	0
C17	9	2	0	1
C18	2	5	0	5

Os dados mostram que nenhum dos 18 professores respondeu corretamente à totalidade das tarefas (12). Houve 2 professores que responderam a 11 perguntas de forma correta, e 3 professores a 10, sendo que os restantes 13 deram um número de respostas corretas igual ou inferior a 9.

Em relação ao número de respostas parcialmente corretas, verifica-se que este é inferior ao de respostas corretas, na maioria dos casos, exceptuando-se os professores C03 e C06 em que esse número é igual, e o professor C18 que conta com um número de respostas parcialmente corretas superior.

Houve 8 professores que não apresentaram respostas incorretas. No caso dos professores onde isso se verificou, esse número foi inferior ao de respostas corretas e parcialmente corretas, excluindo-se o professor C05.

Do total dos 18 professores, 12 responderam a todas as questões e 6 devolveram questões por responder. No caso do professor C15 e C18 o número de respostas não respondidas é considerável, correspondendo a cerca de um terço das tarefas.

A análise individual ao desempenho dos professores foi posteriormente convertida em percentagem, com o objetivo de apurar o número de professores com um total de respostas corretas igual ou inferior a 50% (entre 0 e 6 perguntas), superior a 50% e inferior a 75% (entre 7 e 9), e entre 75% e 100%, (entre 10 e 12). Esses dados são apresentados na tabela 25.

Tabela 25

Percentagem de respostas corretas (N=18)

	Percentagem		
	≤ 50 %	*> 50 % e ≤ 75 %*	*>75 % e 100%*
Frequência	5	8	5
Percentagem	28%	44%	28%

Cerca de um terço dos professores (5) deu um número de respostas corretas igual ou inferior a 50% do total. Houve 8 professores que acertaram num número de perguntas compreendido entre 50% e 75%, e apenas 5 apresentaram um total de respostas corretas igual ou superior a 75%.

4.1.1.2. Desempenho dos professores por tópicos

Pretendendo analisar o desempenho dos professores em relação aos tópicos presentes nas tarefas, procedeu-se à análise do número de respostas corretas, parcialmente corretas, incorretas e não respondidas face a cada um deles. Na tabela 26 foram registados os dados dessa análise.

Tabela 26

Número de respostas por tópicos (N=18)

		Tipo de resposta			
Tópicos	**Pergunta**	**Correta**	**Parcialmente correta**	**Incorreta**	**Não respondeu**
fração como medida	1	15	1	1	1
	2	14	2	1	1
reconstrução da unidade	3	14	2	0	2
comparação e ordenação	7	7	10	0	1
	5	14	4	0	0
fração de um número	6	15	2	1	0
densidade	8	15	1	0	2
diferentes representações	4	11	5	0	2
	9	18	0	0	0
	10	6	12	0	0
operações	11	0	9	6	3
	11 a)	7	0	8	3
	11 b)	2	0	11	5
	12	15	3	0	0

Os tópicos com maior número de respostas corretas foram a "fração como medida", "reconstrução da unidade", "fração de um número" e "densidade" (perguntas 1,2 e 3). É de relembrar que as tarefas propostas no âmbito dos dois primeiros tópicos requeriam a utilização do material *Cuisenaire*.

A maioria dos professores respondeu corretamente à pergunta 5 sobre ordenação de números racionais na forma de fração, contudo, o número de respostas corretas é consideravelmente inferior na pergunta 7, que implicava a ordenação de números racionais em diferentes representações; fração, numeral decimal e numeral misto. Recorde-se que na 5ª pergunta os professores deveriam ordenar na reta numérica os pontos referentes às frações $\frac{2}{5}, \frac{4}{10}, \frac{3}{5}$ e $\frac{7}{10}$. Já na 7ª questão foi pedido aos professores que assinalassem na linha numérica os números $\frac{5}{2}$, $3\frac{1}{2}$, $\frac{7}{4}$ e 1,5.

No que diz respeito às operações com números racionais, verifica-se que a maioria dos professores calculou corretamente o resultado das expressões 3 x $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$ + $\frac{3}{4}$, na pergunta 12. Em relação à questão 11, observa-se que o número de respostas corretas é nulo, pois nenhuma apresentou enunciados corretos para as expressões $\frac{4}{5}$: $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{5}$ + $\frac{1}{9}$, conjuntamente. Considerando o número de respostas corretas a cada uma das alíneas, continua a observar-se que o número de professores que responderam acertadamente é baixo no caso da adição de frações (7) e muito baixo na divisão (2).

A análise indicou ainda que os tópicos que reuniram um maior número de respostas parcialmente corretas foram "comparação e ordenação", "diferentes representações" e "operações".

Relativamente às respostas incorretas, o tópico "operações" reúne o maior número, sendo também este tópico que apresenta o número de questões não respondidas mais elevado. É ainda de referir que, à exceção do tópico "fração de um número", todos os outros registam perguntas não respondidas.

4.1.2. Avaliação dos professores sobre o próprio conhecimento

A primeira questão "***Como classifica o conhecimento que tem sobre os números racionais***?" pretendeu que os professores refletissem sobre o seu conhecimento. Foi pedido que assinalassem a opção adequada à sua situação, de acordo com as seguintes opções de resposta: insuficiente, suficiente, bom e muito bom. Os dados recolhidos estão reunidos na tabela 25.

Tabela 27

Respostas à primeira questão 1 (N=18)

Tipo de resposta	***Frequência***	***Percentagem***
Insuficiente	2	11%
Suficiente	10	56%
Bom	5	28%
Muito Bom	1	5%

A maioria dos professores (10) considera que o conhecimento que tem sobre os números racionais é suficiente. Dos dezoito professores, apenas 5 julgam ter um bom conhecimento e 2 dizem ter um conhecimento insuficiente.

A segunda questão "***Na sua opinião, trabalhar os números racionais com os alunos na forma de fração é*"** e a terceira **"*Na sua opinião, trabalhar os números racionais com os alunos na forma de numeral decimal é*"** tiveram como objetivo identificar o grau de dificuldade que o ensino dos números racionais representa para os professores. Nestas questões, foi usada uma escala composta por 5 níveis (muito fácil, fácil, nem fácil nem difícil, difícil e muito difícil), devendo os professores assinalar o nível que considerassem mais apropriado ao seu caso. Na análise só foram contabilizadas as respostas em que os professores assinalaram apenas um nível. Os dados obtidos podem ser observados na tabela seguinte.

Tabela 28

Respostas às segunda e terceira questões (N=18)

	Questão 2 *"Na sua opinião, trabalhar os números racionais com os alunos na forma de fração é:"*		**Questão 3** *"Na sua opinião, trabalhar os números racionais com os alunos na forma de numeral decimal é: "*	
Frequência	**Número de respostas**	**Percentagem**	**Número de respostas**	**Percentagem**
Muito fácil	0	0%	2	11%
Fácil	3	17%	2	11%
Nem fácil nem difícil	5	28%	8	45%
Difícil	10	55%	6	33%
Muito difícil	0	0%	0	0%

A maioria dos professores (10) achou que é difícil trabalhar os números racionais com os alunos na forma de fração. Houve 5 professores para os quais não é fácil nem difícil, e 3 professores consideraram fácil.

No que diz respeito à terceira questão, a hipótese mais assinalada foi “nem fácil nem difícil” (8 professores). Um terço dos docentes considerou “difícil” trabalhar os números racionais com os alunos na sua representação decimal.

Na quarta questão ***“Enumere 3 das principais dificuldades que sente quando trabalha os números racionais com os seus alunos”*** pretendeu-se identificar as dificuldades sentidas pelos professores na sua prática letiva.

A análise teve início com a *leitura flutuante* (Esteves, 2004) das respostas dos professores. Esta leitura permitiu, posteriormente, a criação de diferentes categorias.

Na análise das respostas, foi possível identificar diferentes tipos de dificuldades: *dificuldades inerentes aos alunos, dificuldades inerentes ao seu conhecimento*, e *dificuldades decorrentes da inexistência de recursos e materiais de apoio às atividades*.

Nas dificuldades que *os professores atribuem aos alunos*, destacam-se:

(1) **A capacidade de abstração**; os professores consideram que alguns dos conceitos trabalhados no 1º ciclo no âmbito dos números racionais “*exige um nível de abstração que algumas crianças ainda não têm”* (C08) neste nível de ensino;

(2) **A imaturidade;** segundo os professores a “imaturidade de alguns alunos (...)” (C13) é um constrangimento à aprendizagem, que os impede de “compreenderem os números racionais” (C13);

(3) **A capacidade de compreensão e de raciocínio**; para alguns professores, são obstáculos à aprendizagem as “dificuldades de compreensão por parte dos alunos e de raciocínio)” (C13), ou mesmo da “falta de compreensão e de raciocínio (...)” (C11).

4) **A complexidade dos conceitos;** os números racionais representam dificuldades para os alunos ao nível da ordenação *“(...) colocá-los [aos números racionais] em reta”* (C07)*, e na escrita de um mesmo número usando“ diferentes representações”* (C07).

Relativamente às *dificuldades associadas ao próprio conhecimento*, foram identificáveis dificuldades inerentes ao *conhecimento do conteúdo* e ao *conhecimento pedagógico do conteúdo* (Hill et a., 2008). Ao nível do *conhecimento do conteúdo*, os professores indicam dificuldades: (i) na “representação de números racionais na reta” (C01); (ii) nas “diferentes representações do mesmo número racional“ (C01); (iii) no “significado da medida nas frações” (C01); (iv) na “equivalência de frações” (C03); (v) na “compreensão de números maiores que a unidade” (C05); (vi) na “noção de quantidade quando o algarismo maior não representa a maior quantidade” (C16).

No que diz respeito ao *conhecimento pedagógico do conteúdo*, os professores consideram que têm dificuldades: (i) em “dar a noção de que a unidade é divisível” (C04); (ii) “falta de prática” (C06); (iii) em “concretizar as situações” (C08); (iv) “em explicar de que forma a que os alunos percebam” (C09); (v) em “explicar os conceitos” (C18); e (vi) em “fazer uso de materiais que ajudem na concretização” (C09).

Na vertente *das dificuldades associadas aos recursos e materiais de apoio*, aspeto referido apenas por dois professores, essas dificuldades prendem-se com a “falta de recursos materiais” (C11) e “falta de material digital, online, em português (jogos didáticos)” (C13).

A quinta questão ***“Enumere de 1 a 6 os temas onde considera que tem mais dificuldades (1 para o tema onde tem menos dificuldades e 6 para aquele onde tem mais)”*** pretendeu recolher informação sobre os tópicos do currículo nacional do 1º ciclo que representam maiores dificuldades para os professores, tendo sido selecionados os seguintes: *operações com números racionais na forma de fração*, *operações com números racionais na forma de numeral decimal*, *representação de números racionais na reta*, *equivalência de frações*, *diferentes significados das frações* e *várias representações do mesmo número racional.*

Tendo em conta a amplitude da escala (de 1 a 6), e de forma a tornar a leitura dos resultados mais clara, optei por agrupar os 6 níveis, dois a dois, por ordem crescente de dificuldade, criando apenas três categorias de análise. Na primeira categoria englobei os tópicos numerados pelos professores com 1 e 2, na segunda com 3 e 4, e na terceira com 5 e 6. Na análise, considerei que os tópicos numerados com 1 e 2 apresentam “pouca dificuldade” para os professores, os numerados com 3 e 4 apresentam “alguma dificuldade” e os numerados com 5 e 6 apresentam “muita dificuldade”. Após essa classificação, os dados foram reunidos na tabela seguinte:

Tabela 29

Respostas à quinta questão (N=18)

	Categorias			
Tópicos	**Pouca dificuldade**	**Alguma dificuldade**	**Muita dificuldade**	**Não respondeu**
Operações com número racionais na forma de fração	28%	39%	28%	5%
Operações com números racionais na forma de numeral decimal	77%	11%	6%	6%
Representação de números racionais na reta.	50%	28%	17%	5%
Equivalências de frações.	11%	33%	50%	6%
Diferentes significados das frações	17%	28%	50%	5%
Várias representações do mesmo número racional	5%	50%	39%	6%

A análise revelou que os tópicos onde os professores têm menos dificuldades são "*operações com números racionais na forma de numeral decimal*" e "*representação de números racionais na reta*". Os tópicos "*operações com frações*" e "*várias representações do mesmo número racional*" foram considerados como tendo alguma dificuldade para os professores. Os tópicos focados como aqueles onde têm mais dificuldade são "*equivalência de frações*" e "*diferentes significados das frações*".

A sexta e última questão "***Indique duas medidas que na sua opinião a/o poderia ajudar a aprofundar os seus conhecimentos sobre os números nacionais***" teve como objetivo fazer um levantamento das medidas que os professores consideram pertinentes para o aprofundamento de conhecimentos.

A análise das respostas iniciou-se com a *leitura flutuante* (Esteves, 2004) das respostas dos professores, tendo em vista uma primeira apropriação da informação, e seguidamente foram criadas várias categorias de análise. A tabela 28 apresenta os dados obtidos.

Tabela 30

Despostas à sexta questão (N=18)

Medidas	***Frequência***	**Percentagem**
Formação	14	78%
Partilha entre colegas	3	17%
Estabelecimento de parcerias	2	11%
Outra	1	5%
Não respondeu	3	17%

A grande maioria dos professores considerou que o aprofundamento dos seus conhecimentos passa pela formação, podendo assumir diferentes modalidades; contínua, em regime de oficina ou Workshops. A segunda medida mais referida foi a criação de momentos de partilha entre professores que possibilitem a planificação e preparação de tarefas em conjunto e a partilha de materiais. O estabelecimento de parcerias entre diferentes estruturas dos agrupamentos, por exemplo entre o departamento do 1º ciclo e o departamento de matemática, foi uma medida igualmente reconhecida.

4.1.3. Síntese da análise de dados

A maioria dos professores identificou a fração num contexto de medida, reconheceu frações da unidade e identificou a unidade de referência, dada uma fração dessa unidade, tendo por base o material *Cuisenaire*.

Os professores revelaram facilidade na comparação e ordenação de números representados na forma de fração, principalmente quando o denominador é igual ao número de divisões da unidade. Houve professores que não reconheceram equivalência entre as frações $\frac{2}{5}$ e $\frac{4}{10}$. Alguns professores revelaram dificuldade na ordenação de $3\,\frac{1}{2}$, tendo sido confundida nalguns casos como uma representação de 1,5.

Para calcular a fração de um número, houve professores que recorreram a esquemas apoiados na reta numérica como forma de chegar à resposta. A maioria calculou corretamente o número de quilómetros correspondentes a $\frac{4}{10}$ e $\frac{2}{5}$ de 4 km. Houve dois professores que não reconheceram a equivalência das frações.

Relativamente à questão sobre densidade dos números racionais, a grande maioria dos professores assinou corretamente 3 números entre 0 e 1, utilizando principalmente a representação decimal.

Os professores fizeram conexões entre as representações decimal e fracionária, e alguns associaram a estas representações icónicas. Todos os professores identificaram a representação decimal de $\frac{9}{2}$, a única questão acertada por todos.

Os professores revelaram fragilidades no reconhecimento dos números racionais fracionários do conjunto $\frac{4}{2}$, $\frac{1}{3}$, 5, $\frac{25}{5}$, $\frac{1}{4}$ e 0,15. A maioria dos professores entendeu como número fracionário todos os que se encontram na forma de fração, e cerca de metade não considerou 0,15.

No que diz respeito às operações com frações, 15 dos 18 professores assinalaram corretamente o resultado de 3 x $\frac{1}{4}$ e de $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$. Os 3 professores que deram respostas incorretas revelaram mal-entendidos como $3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{12}$ e $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{4}{6}$, reveladores de conceções erradas sobre a multiplicação e adição de frações.

Em relação à criação de situações problemáticas sob a forma de enunciado para as expressões $\frac{3}{5} + \frac{1}{9}$ e $\frac{4}{5} : \frac{1}{2}$, a grande maioria dos professores revelou problemas ao nível do sentido dessas operações. Na caso da divisão, onde apenas 2 professores criaram enunciados corretos, as resposta indicaram diversos mal-entendidos que se prenderam com a confusão entre a divisão por $\frac{1}{2}$ e a divisão por 2, e a confusão entre a divisão por $\frac{1}{2}$ e a multiplicação por $\frac{1}{2}$. No caso da adição, que apesar de tudo registou um número de respostas corretas um pouco maior (7), as principais dificuldades relacionam-se com a concetualização da unidade. Em grande parte das respostas erradas, os professores criaram situações em que as frações foram referidas como pertencentes a unidades diferentes e não a uma mesma unidade.

Nenhum professor respondeu corretamente a todas as tarefas, apesar de alguns terem apresentado um total de resposta corretas elevado. Houve professores que, tendo dado um número de respostas corretas não muito alto, apresentaram muitas parcialmente corretas. Na maioria dos casos, o número de respostas parcialmente corretas é inferior ao de respostas corretas e incorretas. Um terço dos professores devolveu o questionário com respostas não respondidas.

A análise percentual indicou que 5 professores deram um número de resposta corretas igual ou inferior a 50% do total do questionário, 8 professores acertaram num número de tarefas entre 50% a 75%, e apenas 5 apresentou um número superior a 75%.

Os tópicos onde se verificou um maior número de respostas corretas foram “a fração como medida”, “reconstrução da unidade”, “fração de um número” e “densidade”. Nos tópicos “comparação e ordenação”, “diferentes representações” e operações com frações”, verificou-se que o número de respostas corretas varia consoante o que é pedido na tarefa e o tipo de conhecimento que cada uma requer sobre o tópico. Estes são igualmente os tópicos onde existe maior número de respostas parcialmente corretas. As respostas incorretas ocorreram em maior número no tópico “operações.

Em relação ao conhecimento que pensam ter sobre os números racionais, a maioria dos professores classificou-o como suficiente. Houve 2 professores que o consideraram insuficiente e apenas 1 o classificou como muito bom.

A opinião dos docentes diverge relativamente ao grau de dificuldade que atribuem ao trabalho com os números racionais na forma de fração e numeral decimal. Contudo, consideraram que trabalhar os números racionais na forma de fração é mais difícil do que abordá-los na sua representação decimal.

As dificuldades que sentem quando abordam os racionais com os alunos, advêm de factores como a capacidade de abstração, maturidade, compreensão e capacidade de raciocínio dos alunos para aprender os tópicos e adquirir os conceitos, de dificuldades associadas ao nível do conhecimento do conteúdo e ao conhecimento pedagógico do conteúdo dos próprios professores e da falta de recursos e materiais didáticos de apoio aos números racionais.

Ao nível dos tópicos matemáticos relacionados com os racionais, os professores apontaram os “diferentes significados das frações” e a “equivalência de frações” como aqueles onde têm mais dificuldades. Os tópicos “várias representações do mesmo número racional” e “operações com números racionais na forma de fração”, apresentam algumas dificuldades para os professores. Os tópicos onde dizem ter menos dificuldades são “ representação de números racionais na reta” e “ operações com números racionais na forma de numeral decimal”.

Na opinião da maioria dos professores o aprofundamento dos seus conhecimentos sobre números racionais passa pela formação; contínua, em modelo de oficina, workshops, pelo estabelecimento de parcerias entre diferentes estruturas dos agrupamentos de escolas, poe exemplo entre o departamento do 1º ciclo e o departamento de matemática, e pelo trabalho em colaboração com outros colegas.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Neste capítulo apresento uma síntese do estudo, focando o objetivo, as questões de investigação e o quadro metodológico adotado na sua realização. Exponho as principais conclusões e refiro as suas limitações, e, por fim, faço uma reflexão final sobre o trabalho desenvolvido.

5.1. Síntese do estudo

Este estudo teve como objetivo *analisar o conhecimento matemático dos professores do 1º ciclo sobre números racionais* e assentou nas seguintes questões de investigação: (1) Que conhecimento revelam os professores do 1º ciclo sobre os números racionais e as suas várias representações?; (2) Como avaliam os professores o conhecimento que têm sobre os números racionais?; (3) Que dificuldades manifestam os professores relativamente ao trabalho dos números racionais com os alunos?

A recolha de dados decorreu entre 3 e 10 de janeiro de 2014, a partir da aplicação de um questionário impresso a 18 professores do 1º ciclo, pertencentes a um agrupamento de uma zona limítrofe de Lisboa. Este questionário pretendeu, por um lado, analisar o conhecimento dos professores a partir da resolução de tarefas matemáticas, e por outro, recolher informações sobre o modo como analisam o próprio conhecimento sobre os números racionais e as dificuldades que sentem no seu ensino.

A metodologia adotada é mista, uma vez que integra componentes da investigação quantitativa, sob a forma de dados numéricos como percentagem e frequência absoluta, e da investigação qualitativa, através da análise de conteúdo das questões de resposta aberta.

O quadro teórico que serviu de referência reúne contributos da investigação nacional e internacional e assenta em duas temáticas; o *conhecimento do professor* e os *números racionais*.

O conhecimento do professor reveste-se de uma enorme exigência e engloba múltiplas dimensões. Shulman (1986) reúne o conhecimento que o professor precisa para ensinar em 3 categorias; *conhecimento do conteúdo*, *conhecimento pedagógico do conteúdo* e *conhecimento curricular.* Ball et al. (2008) apresentam um modelo para a concetualização do conhecimento do professor que abrange duas grandes componentes; o *conhecimento do conteúdo* e o *conhecimento pedagógico do conteúdo*. O *conhecimento do conteúdo* engloba *o conhecimento comum do conteúdo*, o *conhecimento especializado* e o *conhecimento do horizonte matemático*. O *conhecimento pedagógico*, por sua vez, engloba o *conhecimento do conteúdo e dos alunos*, o *conhecimento do conteúdo e do ensino* e o *conhecimento do currículo*.

Os números racionais estão entre os temas mais complexos do ensino básico, pois envolvem um conjunto de conceitos, procedimentos e representações que estão interligados e que só poderão ser compreendidos se estiverem inseridos num sistema (Lamon, 2001). Segundo Kieren (1976), a compreensão dos números racionais depende da apropriação de cada um dos seus significados: *razão*, *operador*, *quociente* e *medida.*

Para ensinar os números racionais não basta o professor ter um conhecimento dos tópicos a ensinar, é necessário que esteja consciente da *rede* de ligações que se estabelecem entre tópicos e de como se estabelecem essas redes (Ma, 2009).

5.2. Conclusões e discussão dos resultados

As conclusões do estudo pretenderam dar resposta às questões de investigação e ao seu objetivo. De forma a facilitar a leitura dos resultados, estas são apresentadas em três partes: *conhecimento dos professores sobre números racionais e suas representações*, *análise sobre o próprio conhecimento* e *dificuldades no trabalho com os alunos*. Na primeira parte são expostas as conclusões sobre o conhecimento evidenciado nas tarefas, na segunda sobre a análise dos professores ao próprio conhecimento, e na terceira sobre as dificuldades no ensino dos números racionais com os alunos.

5.2.1. Conhecimento dos professores sobre números racionais e suas representações

A maioria dos professores revelou um bom conhecimento da fração num contexto de medida e na reconstrução da unidade, a partir de uma fração da mesma, tendo como referência o material *Cuisenaire.*

Os professores mostraram igualmente um bom reconhecimento deste material e facilidade na sua utilização. Este recurso poderá ter favorecido as respostas, na medida em que possibilitou a comparação entre frações da unidade e a própria unidade, e permitiu diferentes partições da unidade, evidenciando a equivalência de frações.

Segundo Behr et al. (1983), o significado *medida* é uma reconstrução do significado *parte-todo*, pois também aqui se considera uma quantidade em relação a uma determinada unidade. De acordo com Lamon (2006), a compreensão do significado *medida* engloba princípios como identificar a unidade de medida, determinar um comprimento, e medir um comprimento através da repetição da unidade de medida. Segundo a autora, este significado está associado ao uso da linha numérica ou a outros instrumentos de medida.

Os professores reconheceram a existência de números (3) entre 0 e 1 e recorreram sobretudo a divisões usuais da unidade em metades e quartos ou a pontos próximos do 0 e do 1 para os identificarem (Ex. 0,25 – 0,5 – 0,75; 0,1 – 0,5 – 0,9). A forma como a questão foi formulada não sugeriu nem condicionou os professores ao uso de nenhuma representação, podendo usar a que lhes fosse mais conveniente. A grande maioria dos professores adotou a representação decimal.

Para calcular a fração de um determinado número, alguns professores socorreram-se de esquemas apoiados na reta numérica como forma de chegar à resposta.

Na sua maioria, os professores demonstraram ser capazes de comparar e ordenar números racionais na forma de fração e numeral decimal, e na sua representação na reta numérica, o que segundo Berh et al. (1992) é fundamental para a "compreensão do número racional como uma entidade (isto é, um só número) e para a compreensão da grandeza do número" (p. 36).

A ordenação de frações na reta quando o denominador não correspondia ao número de divisões da unidade, pareceu ser um obstáculo para alguns professores, que mostraram dificuldades em identificar a unidade (Behr et al., 1983). Tal como Behr et al. (1988) observaram num estudo realizado com alunos, os professores tiveram dificuldades em marcar frações na reta quando o número de partições da unidade era diferente do seu denominador, ou quando o número de partes era um múltiplo ou submúltiplo do denominador, sugerindo uma noção imprecisa e inflexível da fração. Orton et al., (1995) referem que uma estratégia possível para comparar duas frações é encontrar frações equivalentes com denominadores comuns. Para Bezuk e Cramer (1989), outra estratégia possível para ordenar números racionais é escrevê-los na representação decimal.

A representação na forma de numeral misto, parece ter sido um impedimento à ordenação de números na reta. Cerca de um terço dos professores considerou $3\frac{1}{2}$ como uma representação de 1,5. O desconhecimento desta representação poderá advir do facto de ser pouco usada no 1º ciclo e pouco frequente no nosso país (Monteiro & Pinto, 2005).

Os professores estabeleceram conexões entre a representação decimal e as frações, e alguns relacionaram-nas com representações pictóricas.

O conceito de número racional fracionário parece não estar interiorizado, uma vez que apenas 33% dos professores reconheceram os números fracionários presentes num determinado conjunto. A análise das respostas indicou não ser clara a diferença entre *sentido* e *representação*, já que muitos professores consideraram como *número fracionário* todos os que se apresentaram na forma de fração. Cerca de metade dos professores não identificou 0,15 como um número fracionário, provavelmente por se encontrar na representação decimal. Estas dificuldades poderão enraizar na utilização precoce de regras que não são compreendidas (Monteiro & Costa, 1996) mas sim memorizadas, e num trabalho pouco consistente ao nível do desenvolvimento do sentido de número. Segundo Huinker (2002), desenvolver o sentido de número requer a construção a longo prazo de uma compreensão flexível dos números e suas relações, pelo que a introdução prematura de símbolos conduz a limitações que impedem o seu desenvolvimento.

No domínio das operações, a maioria dos professores mostrou facilidade no cálculo de expressões matemáticas sobre adição de frações e multiplicação de um número inteiro por uma fração, parecendo ter conhecimento das regras e procedimentos dos algoritmos. Ainda assim, houve professores (2) que assinalaram $\frac{4}{6}$ como o resultado de $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}$. Segundo Monteiro e Pinto (2007), este é um erro muito comum nas crianças que deriva das generalizações dos algoritmos com os números naturais, e que vem reforçar a ideia defendida por Ma (2009) de que muitos adultos, incluindo professores, parecem debater-se com as mesmas dificuldades dos alunos, mantendo as mesmas ideias primitivas e conceitos errados. Estes professores ignoraram que deveriam somar partes iguais da unidade, devendo para isso substituir as frações dadas por frações equivalentes com o mesmo denominador (Norton et al., 2011). De acordo com Berth et al. (1984), quando simplesmente se aplicam regras memorizadas e mecanizam procedimentos, pode ter-se tendência a interpretar a fração como 2 números distintos (numerador e denominador) e como consequência a adicionar os numeradores e os denominadores, tal como aconteceu com estes professores.

As respostas dos professores deram evidências de um conhecimento deficiente sobre o sentido da adição e divisão com frações. A criação de enunciados a partir de uma dada expressão onde intervieram frações revelou um fraco entendimento do sentido destas operações.

A diferença entre o número de professores que apresentou cálculos corretos na adição de frações (15) e aquele que criou enunciados representativos dessa operação (7), vem reforçar que os professores reconhecem os procedimentos, mas não aquilo que representam. As dificuldades concetuais evidenciadas pelos professores podem advir, de acordo com Vanhille e Baroody (2002), do facto de se dedicar muito tempo ao ensino de procedimentos para se poder “manipular” os números racionais e muito pouco ao ensino do significado dos conceitos, bem como da falta de experiências concretas necessárias à construção da compreensão concetual. Segundo Sharp et al. (2002) e Huinker (2002) introduzir algoritmos antes de uma boa compreensão concetual, ou sem relacionar o algoritmo com o conhecimento concetual, promove a falta de conexão entre conceitos e procedimentos.

Estudos anteriores indicam que tanto alunos como professores revelam dificuldades concetuais relativamente às operações com frações, que de acordo com Vanhille e Baroody (2002) podem advir da falta de vivência de experiências necessárias à construção da compreensão concetual das frações, ou ao fraco desenvolvimento do raciocínio multiplicativo indispensável a essa compreensão.

Na origem das dificuldades sobre a divisão de frações poderá estar o facto de ser uma operação complicada Ma (2009), em que a aprendizagem passa tradicionalmente pelo enfatizar do algoritmo (Pinto & Monteiro, 2008). Segundo estas duas autoras, não é no facto de se ensinar o algoritmo que reside o problema, mas na forma como ele se ensina, persistindo a ideia de que ensinar a divisão é ensinar o algoritmo em vez de desenvolver o conceito.

O estudo realizado por Ma (2009) com professores americanos e chineses é disso um exemplo. Embora 43% dos professores americanos tenham calculado o resultado de uma expressão sobre divisão de frações, quase todos falharam na tentativa de arranjar um enunciado adequado à expressão apresentada.

À semelhança dos professores americanos, os professores do estudo revelaram lacunas na criação de enunciados sobre a divisão de frações, sugerindo dificuldades em relacionar o conhecimento sobre frações com o sentido da operação (Berh et al. 1992, Kieren, 1998).

Apesar da expressão sobre a divisão de frações apresentada aos professores ($\frac{4}{5} : \frac{1}{2}$) ser mais fácil que a que foi proposta no estudo de Ma ($1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$), e de incluir frações com as quais os professores supostamente estão familiarizados, as respostas revelaram muitos pontos em comum com as do estudo realizado pela autora. Dos 18 professores, 5 não apresentaram qualquer enunciado e 10 inventaram problemas que sugeriram conceções erradas sobre a divisão de frações, confundindo a divisão *por* $\frac{1}{2}$ *com a divisão por 2*, que segundo Monteiro e Pinto (2007) é um dos mal - entendidos mais comuns na divisão de frações, ou confundindo a *divisão por* $\frac{1}{2}$ *com a multiplicação por* $\frac{1}{2}$.

Estes resultados vão ao encontro do sugerido por Ma (2009) quando refere que os professores não conseguiram criar enunciados corretos devido às suas ideias erradas sobre o significado da divisão por frações, e apesar de terem indicado ideias pedagógicas para a sua criação, face ao seu inadequado conhecimento na matéria, nenhuma os conduziu a uma resposta correta (Ma, 2009).

Para a autora, a divisão por frações é um tópico matemático complexo, que não assenta num único conceito, mas numa ligação de vários conceitos, pelo que a incapacidade dos professores em criar representações sobre o significado da divisão por frações, pode derivar da falta de outros conceitos necessários para o seu entendimento e das suas ligações ao tópico (Ma, 2009). Segundo a autora, compreender o significado da divisão por frações requer a apropriação de conceitos como a multiplicação com frações, a divisão e multiplicação com números inteiros, o conceito de fração e de unidade e o reconhecimento da divisão enquanto operação inversa da multiplicação.

Na criação de enunciados para a adição de frações, o número de professores que criou um enunciado adequado foi superior (7), mas igualmente pouco significativo. As respostas revelaram alguns mal - entendidos relativamente à concetualização da unidade (Berh et al., 1992). Na maioria das respostas incorretas, os professores atribuíram unidades diferentes a cada uma das frações. Fosnot e Dolk (2002) alertam para o facto de na adição de frações existir apenas um todo a considerar, sendo as frações consideradas em relação a esse todo, ou seja, existe apenas uma unidade de referência.

A análise global do desempenho dos professores parece denunciar algumas debilidades no conhecimento dos números racionais, já que nenhum professor conseguiu resolver todas as tarefas e aproximadamente metade respondeu com correção a um número de questões entre 50% e 75% do total. Menos de um terço dos professores (5) apresentou uma percentagem de respostas certas igual ou superior a 75%. Apenas uma tarefa foi respondida de forma correta por todos os professores. É de considerar o número de docentes que mostrou resultados preocupantes (5) ao dar um número de questões corretas igual ou inferior a 6, parecendo revelar pouco domínio dos conceitos.

É de ressalvar, contudo, que alguns professores apesar de apresentarem poucas respostas corretas, responderam à generalidade das questões e deram um número considerável de respostas parcialmente corretas, o que denota a existência de conhecimento matemático sobre os tópicos que, no entanto, parece pouco consistente ou a carecer de aprofundamento.

O elevado número de questões não respondidas por alguns docentes é também passível de reflexão. Não sendo possível perceber as razões para que isso tenha acontecido, o reduzido número de respostas corretas associado ao número de respostas não respondidas, parece indiciar a existência de dificuldades que podem advir da incompreensão dos enunciados ou do desconhecimento dos tópicos.

Os dados parecem concluir que a maioria dos professores não possui conhecimentos sólidos dos números racionais, precisando de aprofundamento e do esclarecimento de alguns conceitos. Para possibilitar aos alunos uma efetiva compreensão do número racional, é fundamental que os professores sejam, também eles, conhecedores dos diferentes aspetos do conteúdo que querem abordar, possuindo, entre outros, um conhecimento que permita responder às questões do nível dos alunos (Pinto & Ribeiro, 2013).

Os tópicos onde os professores apresentaram um melhor nível de conhecimento foram " fração como medida", "reconstrução da unidade", "fração de um número" e "densidade", contrastando com o tópico as "operações", onde se verificaram as maiores dificuldades.

5.2.2. Análise sobre o próprio conhecimento

A maioria dos professores (10) considerou ter um conhecimento suficiente sobre os números racionais. Esta análise, contudo, nem sempre pareceu corresponder ao desempenho que demonstraram. Houve professores que considerando ter um conhecimento suficiente, apresentaram um fraco desempenho. O professor C12, por exemplo, respondeu de forma correta a apenas 6 questões, deu 3 respostas parcialmente corretas, 2 incorretas e não respondeu a uma. Os professores C03 e C13 que acharam ter um bom conhecimento, apresentam resultados que parecem não o confirmar; o professor C03 deu um total de 5 respostas corretas, 5 parcialmente corretas e 2 incorretas, o professor C13, registou 8 perguntas corretas, 3 parcialmente corretas e 1 incorreta. O professor (C11), o único que considerou ter um conhecimento "muito bom", respondeu acertadamente a 8 questões e nas restantes 4 apresentou respostas parcialmente corretas, obtendo um desempenho inferior ao de outros professores que classificaram o seu conhecimento como bom ou suficiente. Apenas os 2 professores que responderam ter um conhecimento insuficiente (C06 e C18), revelaram um desempenho nas tarefas coerente com essa classificação.

Os professores consideraram que têm muitas dificuldades nos tópicos relacionados com frações, como a equivalência e diferentes significados. As operações com frações representam também algumas dificuldades, assim como as diferentes representações dos números racionais. De acordo com Monteiro e Pinto (2007), a fração é uma representação muito versátil porque permite expressar diversas relações, contudo, a multiplicidade de significados que engloba pode criar ambiguidades. Segundo Lamon (2007), as dificuldades manifestadas pelos adultos, onde se incluem os professores, podem advir da falta de tratamento do campo concetual multiplicativo nos currículos de matemática, e da vivência das mesmas experiências escolares que as dos alunos.

A dificuldade que os docentes associam às frações, poder-se-á ainda relacionar com a crescente importância que os números racionais, nomeadamente às frações e os seus significados, têm vindo a adquirir nos programas de matemática dos últimos anos. O programa de 1990 privilegiava a representação decimal em detrimento das outras representações, e as frações adquiriam um lugar pouco expressivo sendo apenas trabalhados na dimensão *operador*. As orientações curriculares expressas no programa de matemática de 2007 introduziram alterações significativas ao anterior, prevendo a abordagem a outros significados das frações e a utilização das representações decimal e fracionário em simultâneo, obrigando a uma adaptação por parte dos professores. O atual de programa veio dar ainda maior destaque às frações, introduzindo temas tradicionalmente só trabalhados do 2º ciclo, como as operações, e prevendo a utilização de diferentes representações (decimal, fração, percentagem), impondo aos professores trabalhar com os alunos temas que nunca haviam abordado ao longo da sua carreira.

Atendendo ao facto dos professores terem concluído a formação inicial entre 1976 e 2004 durante a vigência do programa de 1990, e enquanto professores terem lecionado esse programa durante bastante tempo, poderão ter uma maior familiarização com os números decimais, e um menor à vontade nos tópicos sobre frações. A estas razões poder-se-á ainda acrescentar a circuntância de apenas 6 terem frequentado ações de formação sobre números racionais na formação contínua.

Os aspetos referidos anteriormente podem igualmente ter contribuído para que os professores considerassem a realização de *operações* com números decimais como um dos tópicos onde sentem menos dificuldades, a par da representação na reta. O uso da reta numérica no 1º ciclo é bastante usual e os professores parecem estar à vontade na sua utilização. O recurso à reta reside no facto de ser muito versátil e permitir evidenciar a densidade dos números racionais e as relações de grandeza (Monteiro e Pinto, 2007), facilitando a abordagem dos números racionais com os alunos.

As operações com números racionais na forma de fração foi um dos tópicos onde os professores revelaram maiores dificuldades, parecendo não estar em conformidade com o grau de dificuldade que lhe atribuíram (algumas dificuldades). De facto, a maioria dos professores mostrou competências no cálculo do algoritmo, mas não ao nível do sentido de operação. Esta questão leva a supor que terão entendido a formulação do tópico "*operações com números racionais na forma de fração*" numa vertente associada aos procedimentos e não ao sentido de operação.

A forma como os professores classificaram o seu conhecimento dos números racionais e dos tópicos com eles relacionados, quando relacionados com o desempenho global nas tarefas, revela que a maioria parece estar pouco consciente do conhecimento que tem e das suas dificuldades.

Relativamente ao aprofundamento de conhecimentos sobre números racionais, os professores acharam que este passa pela formação em diferentes modalidades; contínua, em regime de oficina, e Workshops. O estabelecimento de parcerias entre diferentes estruturas dos agrupamentos, por exemplo entre o departamento do 1º ciclo e o departamento de matemática, e o trabalho em colaboração com outros colegas são medidas também reconhecidas pelos professores.

5.2.3. Dificuldades no trabalho com os alunos

Segundo os professores é mais difícil trabalhar os números racionais com os alunos na forma de fração do que na forma de numeral decimal, provavelmente pelas razões enunciadas no ponto anterior.

Os professores consideram que trabalhar os números racionais com os alunos apresenta dificuldades inerentes aos próprios alunos, como a capacidade de abstração, a imaturidade, a capacidade de compreensão e raciocínio, e complexidade dos conceitos.

Quando trabalham os números racionais com os alunos, os professores dizem ainda sentir dificuldades intrínsecas ao próprio conhecimento; ao nível *conhecimento do conteúdo*, nomeadamente na equivalência de frações, significado medida das frações, diferentes representações do mesmo número racional, e do *conhecimento pedagógico do conteúdo* (Hill, Ball & Schiling, 2008), ao nível de fazer uso de materiais que ajudem na concretização ou explicar de forma a que os alunos entendam.

A inexistência ou difícil acesso a recursos e materiais de apoio aos números racionais é também uma dificuldade que os professores apontam na sua prática.

As dificuldades apontadas pelos professores parecem confirmar que os números racionais são um tópico complexo e cognitivamente desafiador para os alunos, e de difícil gestão didática para os professores, tanto no aspeto matemático como pedagógico (Lamon, 2007).

5.2.4. Síntese das conclusões

Os professores revelaram conhecimentos pouco sólidos sobre os números racionais, parecendo haver tópicos que precisam de aprofundamento e conceitos que requerem esclarecimento.

Na sua maioria, os professores manifestaram um bom conhecimento sobre a fração num contexto de medida, na reconstrução da unidade, em calcular a fração de um número e na comparação e ordenação de frações. Evidenciaram conhecer a densidade dos números racionais, fizeram conexões entre diferentes representações e mostraram facilidade na utilização do material *Cuisenaire.*

Alguns professores demonstraram um fraco entendimento sobre o sentido de número racional fracionário e conceções erradas sobre a representação na forma de numeral misto. O conhecimento sobre a adição e divisão com frações revelado é deficiente, indiciando dificuldades concetuais.

A análise dos professores sobre o próprio conhecimento revelou que estes estão pouco conscientes do conhecimento que têm sobre os números racionais e das suas dificuldades. O ensino dos racionais apresenta dificuldades que segundo os professores advêm dos alunos, do próprio conhecimento, e do difícil acesso ou inexistência a material didático de apoio.

5.3. Limitações e considerações sobre o estudo

Este estudo, pelas suas caraterísticas, apresenta no meu entender, limitações, decorrentes do número de participantes na investigação e do tipo de instrumento usado na recolha de dados (questionário). Apesar do número de participantes representar uma amostra significativa dos professores do agrupamento onde foi realizado (participaram 18 professores dos 22 que compõem o grupo), os dados recolhidos não poderão ser generalizados a outras realidades.

Relativamente ao instrumento usado na recolha de dados, apesar de considerar que foi o adequado para o tipo de estudo que desenvolvi, considero que apresenta algumas limitações. O facto de não ter sido possível encontrar um momento comum para que todos os professores o preenchessem em simultâneo, e o tempo dado para o preenchimento, pode ter influenciado as respostas dos professores. Por outro lado, a elevada taxa de “não respostas” nalgumas questões não permitiu uma análise aprofundada das mesmas. Durante a análise de dados percebi que o número de questões sobre cada um dos tópicos foi insuficiente não permitindo retirar conclusões significativas.

Gostaria de referir como constrangimento ao estudo a impossibilidade de poder analisar junto dos professores algumas estratégias que usaram na resolução das tarefas, ou mesmo compreender a origem dos erros e mal - entendidos observados em algumas respostas. A realização de entrevistas a alguns dos professores com o intuito de aprofundar essas questões, seria uma forma de lhe dar continuidade.

Apesar das limitações referidas anteriormente, penso que este estudo é um bom contributo para a investigação sobre o conhecimento dos professores do 1º ciclo sobre os números racionais, podendo servir como ponto de partida para estudos semelhantes com professores de outros níveis de ensino, ou para estudos sobre o conhecimento do professor do 1º ciclo que abordem outros temas matemáticos.

5.4. Reflexão final

É inevitável chegar ao fim deste trabalho sem refletir sobre o caminho que foi percorrido e sem relembrar as certezas, as incertezas, as dúvidas, as indecisões, que acompanharam a tomada de decisões desde a escolha do tema até à sua conclusão.

Foi sempre uma motivação poder realizar um trabalho que tratasse uma perspetiva sobre o ensino que não se centrasse somente no aluno, pelo que a decisão de realizar esta investigação com professores foi quase imediata. O tema dos números racionais há muito que me despertava interesse, pela sua complexidade, pela crescente importância que tem vindo a adotar nos programas e pela necessidade de rever e aprofundar conceitos que há muito havia esquecido e que agora tenho de ensinar aos meus alunos. Aliando estes argumentos cheguei ao tema para o estudo que queria desenvolver.

Inicialmente senti algum receio que pudesse parecer pretensioso da minha parte investigar sobre o conhecimento dos professores e que o objetivo do estudo fosse mal interpretado. Dei comigo a pensar “Se alguém me pedisse para realizar um estudo deste género, o que acharia?”. Mesmo assim, decidi arriscar. A ideia inicial era realizar um estudo exploratório com todos os professores de um mesmo concelho. Essa ideia levantava, contudo, algumas questões que me preocupavam. Por um lado, a distribuição e recolha dos questionários seria um processo moroso, que requeria bastante disponibilidade da minha parte. Por outro lado, poder vir a obter um volume de dados que tornasse a sua análise incompatível com o tempo de que dispunha para a elaboração da dissertação. Mesmo assim fiz algumas diligências nesse sentido, contactando diretores de vários agrupamentos, dos quais não obtive resposta atempada. Tomei então a iniciativa de realizar o estudo no agrupamento onde leciono. No início não foi fácil “vestir” o papel de investigadora num grupo de pessoas com quem lido diariamente, tive mesmo receio que ao saberem os objetivos da investigação recusassem participar por se sentirem “avaliadas”, ou mostrassem algumas relutâncias. Fiquei agradavelmente surpreendida quando percebi o número de professores que decidiiu colaborar e participar no estudo, entrando comigo nesta “aventura”. A reação dos professores nos dias seguintes à recolha dos questionários foi surpreendente. Houve colegas que se dirigiram a mim e me disseram “tive dúvidas nalgumas perguntas”, “não consegui fazer algumas questões”, “diz-me lá a resposta à pergunta X”, e percebi que os professores não sentiram quaisquer constrangimentos em colaborar no preenchimento do questionário.

Chegada a etapa final, a conclusão a que chego é que valeu a pena todo o esforço e empenho que dediquei à realização deste projeto. Para além de considerar que pode ser um pequeno contributo para a investigação nacional sobre educação, foi também um enorme contributo para o meu desenvolvimento pessoal e sobretudo profissional. Ainda que o meu papel tenha sido apenas de investigadora, a verdade é que a elaboração deste estudo alterou a visão que tinha sobre diversos aspetos do ensino, e sobretudo do ensino da matemática. À medida que fui estudando melhor os números racionais e a sua complexidade, a abordagem deste assunto com os meus alunos alterou-se completamente. Passei a ter uma maior consciência que o trabalho desenvolvido pelo professor nos primeiros anos é fundamental no desenvolvimento contetual que acompanhará os alunos no seu percurso escolar.

Penso que deste trabalho, ressalta ainda uma questão importantíssima que é a necessidade de se investir na formação de professores. Não basta fazer estudos e analisar o conhecimento do professor, concluir sobre as suas fragilidades e pontos fortes, é necessário reivindicar formação contínua acessível a todos os professores.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abrantes, P., Serazina, M. L., & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica. Reflexão participada sobre os currículos do ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação.

Azcárate, P. (1999). El conocimiento professional: Naturaleza, fuentes, organización y desarrollo. *Quadrante*, 8, 111-138.

Ball, D. L., & Bass, H. (2003). Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. In B. Davis & E. Simmt (Eds.), *Proceedings of the 2002 annual Meeting os the Canadian Mathematics Education Study Group* (pp. 3-14). Edmonton, AB: GMESG/GCEDM.

Ball, D. L., Lubienski, S. T. & Mewborn, D. S. (2001). Research on Teaching Mathematics: The Unsolved Problem of Teachers Mathematical Knowledge. In Virginia Richardson (Org.), *Handbook of Research on Teaching*.(Fourth Edition) (pp.433-456). Washington: American Education Research Association.

Ball D. L., Thames M., & Phelps G. (2008). Content Knowledge for Teaching. What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59, 5, 389-407.

Behr, M., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio and proportion. In D. Grouws (Org.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 296-333). NY: Macmillan.

Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver, E. (1983). Rational number concepts. In R. Lesh & M. Landau (Org.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 92-126). New York, NY: Academic Press.

Bell, J. (1997). *Como realizar um Projeto de Investigação*. Lisboa: Gradiva.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Bright, G., Behr, M., Post, T., & Wachsmuth, I. (1988, May). Identifying fractions onnumber lines. *Journal for Research in Mathematics Education.,* 19(3), 215-232.

Carmo, H. & Ferreira, M. (2008). *Metodologia de investigação. Guia para a auto-aprendizagem*. Universidade Aberta: Lisboa.

Charalambous, C. Y., & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understanding of fractions. *Educational Studies in Mathematics, 64*, 293-316.

Cox, R. (1999). Representation construction, externalised cognition and individual differences. L*earning and Instruction*. V.9, 343- 363.

Coutinho, M. C. (2011). *Metodologia de investigação em Ciências Sociais e Humanas. Teoria e Prática*. Coimbra: Almedina.

Creswell, J.(1994). Research Design: Qualitative and Quantitative Approaches, Thousand Oaks: SAGE Publications

Esteves, M. (2006). Análise de conteúdo. In: Ávila, L., Pacheco, J., J.A. (Orgs). *Fazer Investigação: contributos para a elaboração de dissertações e teses*. Porto: Porto Editora.

Galen, F. v., Feijs, E., Figueiredo, N., Gravemeijer, K., Herpen, E. v.,& Keijzer, R.(2008). *Fractions, percentages, decimals and proportions – a learning-trajectory for grade 4,5 and 6*.Sense Publishers. Rotterdanm: Taipei.

Godino, J. D., Ruiz, F., Roa, R., Cid, E., Batanero, C. & Font, V. (2004a). *Didáctica de la matemática para maestros*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidade de Granada.

Goldin, G. A. (2003). Representation in school mathematics: A unifying research perspective. In J. Kilpatrick, W. G Martin & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 275-285).Reston, VA: NCTM.

Greene, J., & Caracelli, V. (2003). Making paradigmatic sense of mixed methods practice. In A. Tashakkori, & C. Teddlie (Eds.), *Handbook of mixed methods in* *social and behavioral research (pp. 3-50).* Thousand Oaks, USA: Sage Publications.

Hill, H. C., e Ball, D. L. (2004). Learning mathematics for teaching: Results from California's mathematics Professional development institutes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35(5), 330-351.

Hill, H.C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), 372-400.

Huinker, D. (2002). Examining dimensions of fractions operation sense. In B. Litwiller & G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions: 2002 Yearbook* (pp. 72-78). Reston: NCTM.

Kieren, T. (1976). On the mathematical, cognitive and instructional foundations of rational numbers. In R. Lesh & D. Bradbard (Org.), *Number and measurement: papers from a research workshop* (pp. 101-144). Columbus.

Kieren, T. E. (1993). Rational numbers and fractional numbers: from quotient field to recursive understanding. In: T. P. Carpenter, E. Fennema e T. Romberg (Ed). *Rational numbers: an integration of research* (pp. 49-84). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lamon, S.J. (1999). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding*, Lawrence Erlbaum Associates, New Jersey.

Lamon, (2002). Part – Whole Comparisions with Unitizing. Em Litwiller, B. e Bright, G. (Eds): *Making Sense of fractions, ratios, and Propostions*. NCTM, 2002 yearbook, Reston VA

Lamon, S. (2006). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Lamon, S. (2007) Rational numbers and proportional reasoning. In F. Lester (Ed), *Secondhandbook ok mathematics teaching and learning* (pp 629-667). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Ma, L. (2009). *Saber e Ensinar a Matemática Elementar*. Lisboa: Gradiva.

Monteiro, C. (2009). *Que conhecimentos são necessários para se ensinar a média aritmética*? Comunicação apresentada no XIX Encontro de Investigação em Educação Matemática: Números e Estatística: Refletindo no Presente, Perspetivando o Futuro, Vila Real, Portugal.

Monteiro, C., & Pinto, H. (2005). A aprendizagem dos números racionais. *Quadrante*, 14 (1), 89-107.

Monteiro, C & Pinto, H. (2007). *Desenvolvendo o sentido do número racional*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Ministério da Educação (2004). *Organização curricular e programas* (4.ª edição). Lisboa: Ministério da Educação.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC.

Ministério da Educação (2013). *Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

National Council of Teachers of Mathematics (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.

Norton, A., Mccloskey, A., & Hudson, R. (2011). Prediction assessments: Using video based predictions to assess prospective teachers' knowledge of students' mathematical thinking. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *14*, (pp.305-325).

Orton, R., Post, T., Behr, M., Cramer, K., Harel, G., & Lesh, R. (1995). Logical and psychological aspects of rational number pedagogical reasoning. *Hiroshima Journal of Mathematics Education,* 3, 63-75.

Owens, D. T. (1993). Teaching and learning decimal fractions. In D. T. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom: High school mathematics* (pp. 159-178). Reston: NCTM.

Parker, M., & Leinhardt, G. (1995). Percent: A privileged proportion. *Review of Educational Research*, *65*(4), 421-481.

Patton, M. Q. (1990). *Qualitative Evaluation and Research Methods*. Newbury Park: Cal. Sage Publications.

Pinto, H. (2011). *O desenvolvimento do sentido da multiplicação e da divisão de números racionais* (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: Universidade de Lisboa.

Pinto, H. & Ribeiro, C.M. (2013). Conhecimento e formação de futuros professores dos primeiros anos – o sentido de número racional. *Da Investigação às Práticas*, 3(l), 80-98.

Ponte, J.P. (Ed). (1992). Conceções dos professores de matemática e processos de formação. *Educação e Matemática: temas de investigação* (pp.185-230).Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Ponte, J. P., & Serrazina, M. L. (2000). *Didática da matemática do 1º ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. Bolema, 25 (pp. 105-132.).

Ponte, J. P., Oliveira, H., Brunheira, L., Varandas, J. M. & Ferreira, C. (1998b). O trabalho do professornuma aula de investigação Matemática. Quadrante, 7(2), 41-69.

Post, T., Behr, M., & Lesh, R. (1986). Research-Based Observations About Children's Learning of Rational Number Concepts. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 8(1), 39-48.

Post, T., & Cramer, K. (1989). Knowledge, representation and quantitative thinking. In M.Reynolds (Org.) *Knowledge base for the beginning teacher: Special publication ofthe AACTE* (pp. 221-231). Oxford: Pergamon Press.

Post, T., Cramer, K., Behr, M., Lesh, R., & Harel, G. (1993). Curriculum implications of Research on the Learning, Teaching, and Assessing of Rational Number Concepts. In T. Carpenter, E. F& Harel, G. (In press). *Designing instructionally relevant assessment reports.* In T. Carpenter & E. Fennema (Eds.), *Research on the Learning, Teaching, and Assessing of Rational Number Concepts*. Lawrence Erlbaum and Associates.

Post T., Wachsmuth I., Lesh R., & Behr M. (1985, January). Order and Equivalence of Rational Number: A Cognitive Analysis. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16(1), 18-36.

Quaresma, M. (2010). *Ordenação e comparação de números racionais em diferentes representações: Uma experiência de ensino* (tese de mestrado, Universidade de Lisboa).

Quivy, R. & Campenhoudt, L. (1998). *Manual de investigação em ciências sociais*. Lisboa: Gradiva.

Reichardt, C. S. & Cook, T. D. (1986). Hacia una superacion del enfrentamiento entre los metodos cualitativos y los cuantitativos. In C. S. Reichardt & T. D. Cook, *Metodos cualitativos y cuantitativos em investigación evaluativa* (pp. 25-52). Madrid: Ediciones Morata.

Serrazina, M. L. (2012, maio). Conhecimento matemático para ensinar: papel da planificação e da reflexão na formação de professores. *Revista Eletrônica de Educação*,v.6,n.1. http://www.reveduc.ufscar.br/index.php/reveduc/article/viewFile/355/162

Sharp, J., Garofalo, J., & Adams, B. (2002). Children'n development of meaningful fraction algorithms: a kid's cookies and a puppy's pills. In B. Litwiller, & G. Bright (Org.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions: 2002 Yearbook* (pp. 18-28). Reston: NCTM.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15 (2), 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57 (1), 1-22.

Sinicrope, R., Mick, H., & Kolb, J. Fraction division interpretations. In B. Litwiller, & G. Bright (Org), *Making sense of fractions, ratios, and proportions: 2002 Yearbook* (pp. 153-161). Reston: NCTM

Streefland, L. (1991). Fractions, an integrated perspective. In L. Streefland (Ed.),*Realistic mathematics education in primary school* (pp. 93-118). Utrecht: Freudenthal Institute.

Teddlie, C., & Tashakkori, A. (2003). Major issues and controversies in the use of mixed methods in the social and behavioral sciences. In A. Tashakkori, & C. Teddlie (Eds.),106 Handbook of mixed methods in social and behavioral research (pp. 3-50). Thousand Oaks, USA: Sage Publications.

Vanhille, L. S., & Baroody, A. J. (2002). Fraction instruction that fosters multiplicative reasoning. In B. Litwiller (Org.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions: NCTM 2002 Yearbook* (pp. 224-236). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Varandas, J. (2000). *Avaliação de investigações matemáticas: Uma experiência*. Dissertação de Mestrado. Lisboa: Faculdade de Ciências de Lisboa.

Vergnaus, G. (1983). Multiplicative Structures. In R. Lesh & M. Landau (Org.), *Acquisition pf mathematics concepts and processes* (pp. 127-174). New York: Academic Press.

ANEXOS

Anexo 1 – Questionário aplicado aos professores

Mestrado em Educação Matemática na Educação Pré-Escolar

e nos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico

Este questionário insere-se no estudo que estou a desenvolver sobre os números racionais e respetivo ensino. Os números racionais, nomeadamente as frações, têm vindo a assumir um papel cada vez mais importante no currículo do primeiro ciclo, exigindo do professor uma atualização de conhecimentos. Com este estudo pretendo analisar o conhecimento matemático dos professores do 1º ciclo sobre números racionais, e paralelamente identificar as principais dificuldades que sentem quando trabalham este tema com os alunos.

Este questionário é anónimo. Os dados recolhidos servirão apenas para este estudo.

Obrigada pela sua colaboração!

Assinale com ☒ as opções adequadas.

Habilitações:

☐ Escola do Magistério Primário ☐ Bacharelato ☐ Licenciatura

☐ Mestrado ☐ Doutoramento

Tempo de serviço (em anos): ________

Formação inicial:

Ano de conclusão ________ Instituição ____________________________

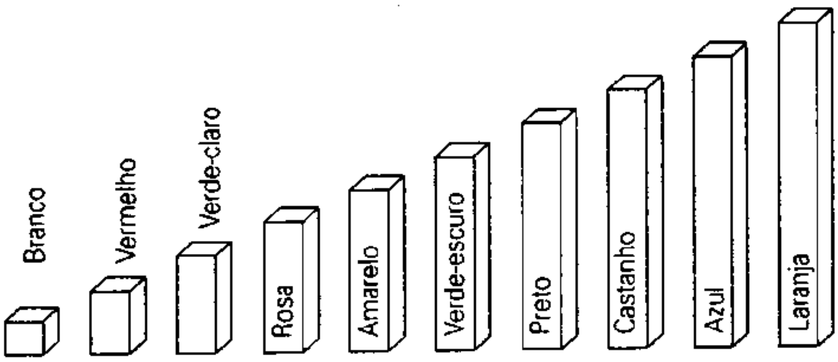
Formação contínua:

Já frequentou alguma ação de formação sobre números racionais ?

☐ Não ☐ Sim Qual (is)? ___________ Duração: ____________

PARTE I

Tendo por base o material *Cuisenaire* responda às seguintes questões.



1- Considere como unidade a barra *verde escura*. Que fração da barra é representada pelas barras:

a) Vermelha $\square$

b) Branca $\square$

2 – Considere agora como unidade a *barra laranja*. Que fração da barra laranja representam as barras:

a) Branca $\square$

b) Castanha $\square$

c) Qual a barra que representa 0,9? R: ____________

3 – Se a barra vermelha representar $\frac{1}{5}$ qual a barra que representa a unidade? R: _______________

4 – A Sara e a irmã foram lanchar. Na fruteira havia cinco maçãs e meia.

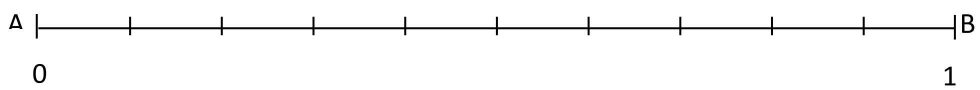
a) Escreva uma fração que represente o número de maçãs que havia na fruteira. R: _______________

b) Quando terminaram de lanchar ficaram na fruteira $\frac{9}{4}$ da maçã. Quantas maçãs inteiras sobraram? R: ______________

5 - A turma do João organizou um percurso pedestre no Parque Natural da Serra d'Aire e Candeeiros, representado na figura por [AB].

A Maria parou para descansar depois de ter feito $\frac{2}{5}$ do percurso, a Joana parou ao fim de $\frac{4}{10}$, o Francisco ao fim de $\frac{3}{5}$ e os restantes elementos da turma ao fim de $\frac{7}{10}$ do percurso.

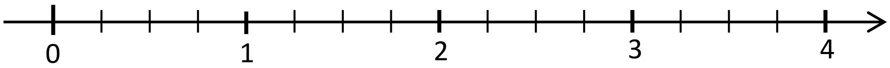
Assinale no segmento [AB] abaixo traçado, o ponto que corresponde a cada uma das paragens referidas.



6 - Sabendo que o percurso era de 4 km, quantos quilómetros tinham sido feitos pela Maria quando parou para descansar? E pela Joana?

Maria ________________ Joana ________________

7 - Na linha numérica representada abaixo, assinale os pontos correspondentes a: $\frac{5}{2}$**;** 1,5; $3\frac{1}{2}$ e $\frac{7}{4}$**.**



8 – Assinale na reta numérica três números entre *0* e *1*.

9 - Das opções seguintes assinale com X a que representa a fração $\frac{9}{2}$**.**

☐ 3,333 ☐ 4,25 ☐ 5,01 ☐ 4,5

10 – Do conjunto dos números apresentados circunde aqueles que representam números racionais fracionários:

$\frac{4}{2}$; $\frac{1}{3}$; 5 ; $\frac{25}{5}$; $\frac{1}{4}$; 0,15

11 – Escreva um enunciado que possa ser traduzido pelas seguintes expressões:

a) $\frac{3}{5} + \frac{1}{9}$

____
____
____

b) $\frac{4}{5} : \frac{1}{2}$

____

____

____

12- Assinale com X o resultado de cada uma das expressões:

$\boxed{3 \times \frac{1}{4}}$

☐ a) $\frac{3}{12}$

☐ b) $\frac{3}{4}$

☐ c) $\frac{1}{12}$

$\boxed{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}}$

☐ a) $\frac{4}{6}$

☐ b) $\frac{5}{4}$

☐ c) $1\frac{1}{2}$

PARTE II

1 - Como classifica o conhecimento que tem sobre os números racionais?

☐ Insuficiente ☐ Suficiente ☐ Bom ☐ Muito bom

2 - Na sua opinião, trabalhar os números racionais com os alunos, na forma de fração, é:

☐ Muito fácil ☐ Fácil ☐ Nem fácil nem difícil ☐ Difícil ☐ Muito difícil

3 - Na sua opinião, trabalhar os números racionais com os alunos, na forma de numeral decimal, é:

☐ Muito fácil ☐ Fácil ☐ Nem fácil nem difícil ☐ Difícil ☐ Muito difícil

4 - Enumere 3 das principais dificuldades que sente quando trabalha os números racionais com os seus alunos.

____

____

5 - Numere de 1 a 6 os temas onde considera que tem mais dificuldades: (1 para o tema onde tem menos dificuldades e 6 para aquele onde tem mais).

☐ Operações com números racionais na forma de fração.

☐ Operações com números racionais na forma de numeral decimal.

☐ Representação de números racionais na reta.

☐ Equivalência de frações.

☐ Diferentes significados das frações.

☐ Várias representações do mesmo número racional.

6 – Indique duas medidas que na sua opinião a/o poderiam ajudar a aprofundar os seus conhecimentos sobre os números racionais.

____

____

Anexo 2 – Pedido de autorização ao diretor do agrupamento

3 de janeiro de 2014

Exmo. Sr. Diretor

Estou a desenvolver um estudo sobre os números racionais e o respetivo ensino, no âmbito do mestrado em Educação Matemática que estou a frequentar. Os números racionais, nomeadamente as frações, têm vindo a assumir um papel cada vez mais importante no currículo do primeiro ciclo, exigindo do professor uma atualização de conhecimentos. Com este estudo pretendo analisar o conhecimento matemático do professor do 1º ciclo sobre números racionais. A recolha de dados para o referido estudo, será feita a através do preenchimento de questionários por professores do 1º ciclo do Ensino Básico.

Venho por este meio solicitar a colaboração dos professores deste agrupamento e a respectiva autorização para o preenchimento dos referidos questionários.

Sem mais assunto, atentamente,

A professora,

Margarida de Jesus Lucas Perfeito

Anexo 3 – Consentimento informado

Eu, ____ declaro que fui informado(a) dos objetivos e metodologia usada na pesquisa sobre "**O conhecimento do professor do 1º ciclo sobre números racionais""**

Estou consciente da minha participação nesta pesquisa e que poderei em qualquer momento recusar continuar sem nenhum prejuízo para a minha pessoa. Sei também que os usados no serão usados unicamente nesta investigação e serão destruídos após o estudo. Fui informado(a) de que não terei nenhum tipo de despesas nem receberei nenhum pagamento pela participação nesta pesquisa.

Concordo voluntariamente em participar no estudo em causa:

Participante:

____