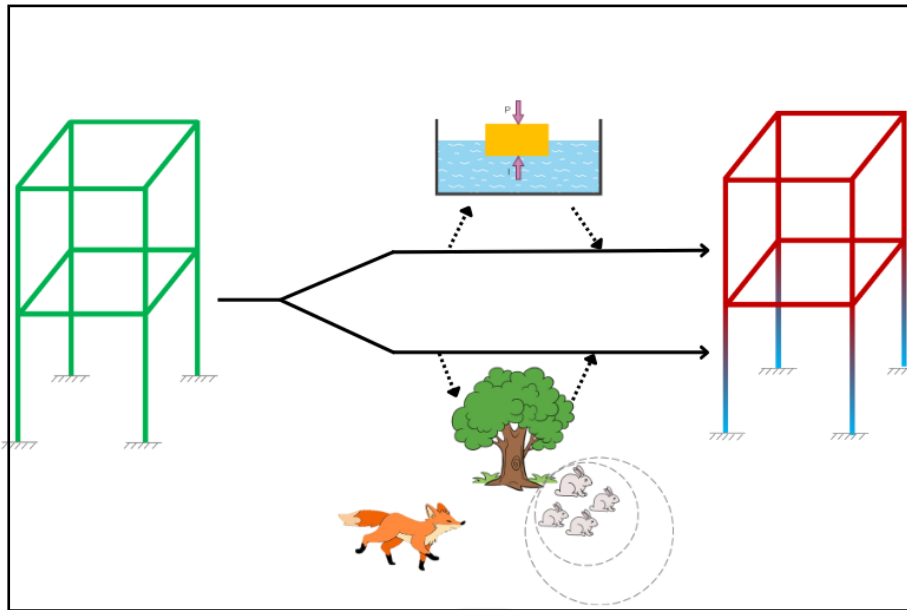


**INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DE LISBOA**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**



**Modelação e Otimização Meta-heurística de Treliças e  
Pórticos com Gradiente Funcional**

**JOANA SOFIA DOMINGUES GASPAR**  
(Licenciada em Engenharia Mecânica)

Dissertação de Natureza Científica para obtenção do grau de  
Mestre em Engenharia Mecânica

Orientadores:

Doutora Maria Amélia Ramos Loja  
Doutor Joaquim Infante Barbosa

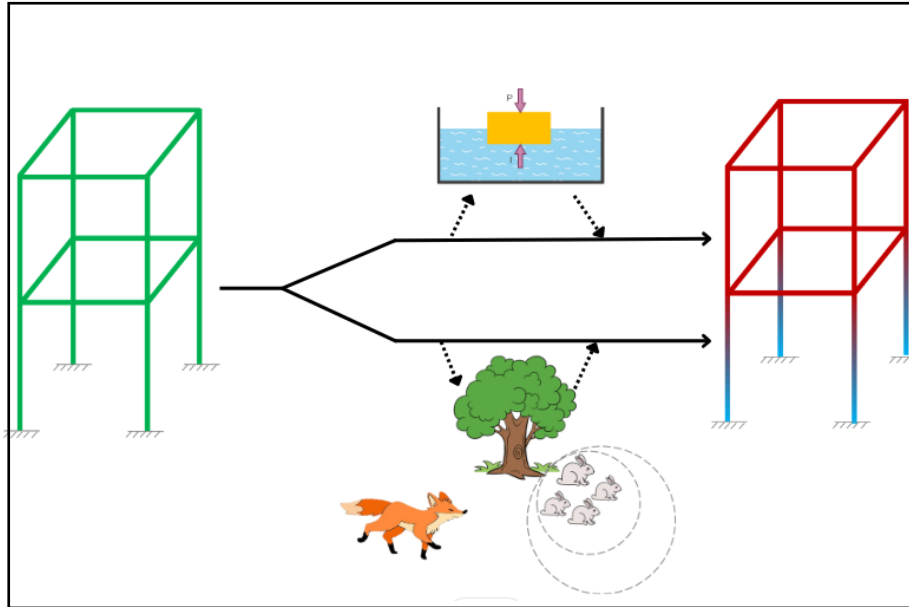
Júri:

Presidente: Doutor Mário José Gonçalves Cavaco Mendes  
Vogais:  
Doutor João Filipe de Almeida Milho  
Doutora Maria Amélia Ramos Loja

**Novembro de 2023**

Página intencionalmente deixada em branco

**INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DE LISBOA**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**



**Modelação e Otimização Meta-heurística de Treliças e  
Pórticos com Gradiente Funcional**

**JOANA SOFIA DOMINGUES GASPAR**  
(Licenciada em Engenharia Mecânica)

Dissertação de Natureza Científica para obtenção do grau de  
Mestre em Engenharia Mecânica

Orientadores:

Doutora Maria Amélia Ramos Loja  
Doutor Joaquim Infante Barbosa

Júri:

Presidente: Doutor Mário José Gonçalves Cavaco Mendes  
Vogais:  
Doutor João Filipe de Almeida Milho  
Doutora Maria Amélia Ramos Loja

**Novembro de 2023**

Página intencionalmente deixada em branco

## **Agradecimentos**

No âmbito da realização desta Dissertação de Mestrado, gostaria de agradecer, primeiramente, à Professora Maria Amélia Loja e ao Professor Joaquim Infante Barbosa, na qualidade de meus orientadores, pela disponibilidade e apoio demonstrados no decorrer da elaboração de todo o trabalho.

Gostaria também de agradecer aos meus familiares e amigos, pela motivação e apoio durante todo o processo de desenvolvimento deste trabalho.

Página intencionalmente deixada em branco

## Resumo

Os materiais com gradiente funcional (FGM) são um tipo de material compósito em que as suas propriedades resultam da combinação dos materiais constituintes, e variam em função de uma ou mais coordenadas espaciais, o que permite personalizar o componente em função da sua aplicação futura, dentro dos limites necessários, permitindo que o material adquira características específicas num dado ponto. Nos últimos anos, estes materiais têm sido o foco de muitos investigadores, já que, além da capacidade de projeto personalizado de estruturas, têm ainda a vantagem de serem minimizadas transições abruptas de tensões, comuns em compósitos laminados.

Apesar de existirem inúmeros trabalhos publicados sobre vigas, placas e cascas em FGM, em que o gradiente é função da espessura do componente, não foram encontrados estudos de treliças e pórticos construídos em FGM, nem em 2D nem 3D. O presente trabalho tem como objetivo, numa primeira fase, a análise estática e dinâmica de vibração livre desse tipo de estruturas, em que o gradiente é função da coordenada vertical dos componentes viga-barra que as constituem, e posteriormente, o projeto ótimo destas estruturas, através de duas técnicas meta heurísticas de otimização, designadamente o algoritmo de Arquimedes e o das Raposas Vermelhas.

**Palavras-chave:** Materiais com Gradiente Funcional, Análise de Elementos Finitos, Treliças e Pórticos, Análise Estática e de Vibração Livre, Gradiente na Direção da Altura da Estrutura, Algoritmo de Otimização de Arquimedes, Algoritmo de Otimização das Raposas Vermelhas

Página intencionalmente deixada em branco

# Abstract

Functionally Graded Materials (FGM) are a type of composite material in which its properties result from the combination of the constituent materials, and vary according to one or more spatial coordinates, which allows the component to be customized according to its future application, within the necessary limits, allowing the material to acquire specific characteristics at a given point. In recent years, these materials have been the focus of many researchers, since, in addition to the ability to custom design structures, they also have the advantage of minimizing abrupt stress transitions, common in laminated composites.

Although there are numerous published works on beams, plates and shells in FGM, in which the gradient is a function of the component thickness, no studies of trusses and frames built in FGM were found, neither in 2D nor 3D. The present work aims, in a preliminary phase, the static and dynamic analysis of free vibration of this type of structures, in which the gradient is a function of the vertical coordinate of the beam-bar components that constitute them, and later, the optimal design of these structures, through two meta heuristic optimization techniques, namely the Archimedes algorithm and the Red Foxes algorithm.

**Keywords:** Functionally Graded Materials, Finite Element Analysis, Trusses and Frames, Static and Free Vibration Analysis, Gradient in the Direction of Structure's Height, Archimedes Optimization Algorithm, Red Foxes Optimization Algorithm

Página intencionalmente deixada em branco

# Nomenclatura

## Siglas/Acrónimos

2D	Bidimensional
3D	Tridimensional
AOA	Algoritmo de Otimização de Arquimedes (Archimedes Optimization Algorithm)
CAD	Desenho Assistido por Computador (Computer Aided Design)
EBT	Teoria de Vigas de Euler-Bernoulli (Euler-Bernoulli Beam Theory)
FEM	Método dos Elementos Finitos (Finite Element Method)
FGM	Material com Gradiente Funcional (Functionally Graded Material)
FSDT	Teoria de Deformação de Corte de Primeira Ordem (First-order Shear Deformation Theory)
RFO	Algoritmo de Otimização das Raposas Vermelhas (Red Fox Optimization)
SW	Solidworks
TBT	Teoria de Vigas de Timoshenko (Timoshenko Beam Theory)

## Simbologia Dimensional

Símbolo	Designação	Unidade SI
L	Comprimento	[m]
M	Massa	[kg]
T	Tempo	[s]

## Sobrescritos

Símbolo	Designação	Dimensão	Unidade SI
0	Parâmetro Identificador de Associação à Superfície Média		
e	Parâmetro Referente ao Domínio do Elemento		
t	Iteração Atual		
t+1	Iteração Seguinte		
*	Associação a Informação Complementar		

## Subscritos

Símbolo	Designação	Dimensão	Unidade SI
0	Inicial		
best	Melhor Parâmetro		
mb	Componente de Membrana Flexão		
s	Componente de Corte		
t	Componente de Torção		
inf	Inferior		
sup	Superior		

c	Cerâmico
m	Metálico
mr	Parâmetro relativo a um material escolhido aleatoriamente
rand	Parâmetro cuja posição foi escolhida aleatoriamente

## Simbologia Grega

Símbolo	Designação	Dimensão	Unidade SI
$\alpha_{C ij}$	Coeficientes de Expansão Higroscópica Transformados ij, ij={xx,yy,xy,zz}		
$\alpha_{T ij}$	Coeficientes de Expansão Térmica Transformados ij, ij={xx,yy,xy,zz}		
$\Delta$	Vetor de Deslocamentos		
$\epsilon_{ij}$	Componente de extensão ij, ij={xx,yy,zz}		
$\gamma_{ij}$	Componente de distorção ij, ij={xy,xz,yz}		
$\nu$	Coeficiente de Poisson		
$\xi$	Coordenada do Referencial do Elemento		
$\omega$	Frequência	T <sup>-1</sup>	[s <sup>-1</sup> ]
$\rho$	Massa Volúmica	M L <sup>-3</sup>	[kg m <sup>-3</sup> ]
$\theta$	Condições Atmosféricas (RFO)		
$\theta_j$	Rotação na direção normal à direção j, j={x,y,z}		
$\bar{\theta}$	Rotação na direção normal ao plano Adimensionalizada		
$\Pi$	Energia Potencial Total do Sistema	M L <sup>2</sup> T <sup>-2</sup>	[kg m <sup>2</sup> s <sup>-2</sup> ]
$\delta$	Infinitesimal		
$\varphi_j$	Função de Forma j, j={1,2,3}		
$\Phi_j$	Ângulo de Visão de Cada Indivíduo (RFO) j, j={0,1,2,3,N-1}		
$\sigma_{ij}$	Componente de Tensão ij, ij={xx,yy,zz,xz,yz,xy}	M L <sup>-1</sup> T <sup>-2</sup>	[N m <sup>-2</sup> ]

## Simbologia Romana

Símbolo	Designação	Dimensão	Unidade SI
a	Aceleração	L T <sup>-2</sup>	[m s <sup>-2</sup> ]
A	Área de Secção Transversal	L <sup>2</sup>	[m <sup>2</sup> ]
$acc_i^t$	Parâmetro que caracteriza a Aceleração do Indivíduo i na Iteração atual t (AOA)		
$\overline{acc}_i^t$	Parâmetro que caracteriza a Aceleração Adimensionalizada do Indivíduo i da População na Iteração atual t (AOA)		
b	Largura da Secção	L	[m]
B	Matriz que relaciona o campo de deslocamentos com o vetor de graus de liberdade para constituição de matriz de rigidez		
c	Humidade Relativa		

den <sub>i</sub> <sup>t</sup>	Parâmetro que caracteriza a Densidade do Indivíduo i na Iteração atual t (AOA)		
E	Módulo de Elasticidade	$M L^{-1} T^{-2}$	[N m <sup>-2</sup> ]
ex	Expoente da Lei de Potência em Função da Coordenada Longitudinal		
ey	Expoente da Lei de Potência em Função da Coordenada Vertical da Estrutura		
ez	Expoente da Lei de Potência em Função da Coordenada relativa à Espessura		
f	Vetor de Forças Distribuídas		
F	Força	$M L T^{-2}$	[N]
G	Módulo de Corte	$M L^{-1} T^{-2}$	[N m <sup>-2</sup> ]
h	Espessura - Altura da Secção	L	[m]
H	Altura da Estrutura	L	[m]
J	Jacobiano		
k	Fator de Correção de Corte		
k <sub>2</sub>	Coefficiente para Cálculo do ângulo de Torsão em Secções Retangulares		
K	Matriz de Rigidez		
L	Comprimento	L	[m]
m	Massa	M	[kg]
M	Matriz de Massas		
$\bar{M}$	Matriz de Coeficientes Dielétricos Transformados		
M1	Material Metálico Selecionado pelo Algoritmo de Otimização		
M2	Material Cerâmico Selecionado pelo Algoritmo de Otimização		
M <sub>t</sub>	Momento Torsor	$M L^2 T^{-2}$	[N m]
MT	Método de Mori-Tanaka		
M <sub>T</sub>	Massa Total da Estrutura	M	[kg]
N	Dimensão da População		
Nm	Matriz que relaciona o campo de deslocamentos com o vetor de graus de liberdade para constituição de matriz de massas		
Ns	Vetor de Funções de Forma		
O <sub>i</sub>	Posição Inicial do Indivíduo i da População (AOA)		
p	Grau do Polinómio		
P	Carga Concentrada	$M L T^{-2}$	[N]
P <sub>A</sub>	Propriedade P da Fase A de um FGM Bifásico		
P <sub>B</sub>	Propriedade P da Fase B de um FGM Bifásico		
q	Carga Uniformemente Distribuída	$M T^{-2}$	[N m <sup>-1</sup> ]
Q	Matriz de Coeficientes de Rigidez Elástica Reduzidos		
r	Número de Coeficientes de Ponderação para Integração Reduzida		

rv	Raio de Visão das Raposas (RFO)		
RM	Regra de Misturas		
t	Tempo	T	[s]
T	Energia Cinética	$M L^2 T^{-2}$	[kg m <sup>2</sup> s <sup>-2</sup> ]
telem	Número Total de Elementos da Discretização Considerada		
TF	Fator de Transferência (AOA)		
tmax	Número Máximo de Iterações		
U	Energia Elástica de Deformação	$M L^2 T^{-2}$	[kg m <sup>2</sup> s <sup>-2</sup> ]
U <sub>0</sub>	Densidade de Energia de Deformação Elástica		
u	Deslocamento na Direção Ox	L	[m]
$\bar{u}$	Deslocamento na Direção Ox Adimensionalizado		
V	Volume	L <sup>3</sup>	[m <sup>3</sup> ]
v	Deslocamento na Direção Oy	L	[m]
$\bar{v}$	Deslocamento na Direção Oy Adimensionalizado		
V <sub>E</sub>	Trabalho das Forças Externas	$M L^2 T^{-2}$	[kg m <sup>2</sup> s <sup>-2</sup> ]
V <sub>f</sub>	Fração Volúmica de Material		
vol <sub>i</sub> <sup>t</sup>	Parâmetro que caracteriza o Volume do Indivíduo i na Iteração atual t (AOA)		
w	Deslocamento na Direção Oz	L	[m]
$\bar{w}$	Deslocamento na Direção Oz Adimensionalizado		
x	Coordenada no referencial espacial cartesiano (eixo Ox)	L	[m]
$x_i^t$	Posição do Indivíduo i da População na iteração t		
y	Coordenada no referencial espacial cartesiano (eixo Oy)	L	[m]
Y	Coordenada Vertical da Estrutura	L	[m]
Y <sub>0</sub>	Coordenada Vertical Inferior da Estrutura	L	[m]
z	Coordenada no referencial espacial cartesiano (eixo Oz)	L	[m]

Nota: aos símbolos que dizem respeito a parâmetros de otimização, não são associadas dimensões dado que as variáveis de projeto podem variar de problema para problema.

### Fórmulas/Símbolos Químicos

Nome do Elemento/Composto	Fórmula/Símbolo
Aço Inoxidável 304	SUS304
Alumínio	Al
Alumina	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>
Carboneto de Tungsténio	WC
Liga de Titânio	Ti 6Al 4V
Nitreto de Silício	Si <sub>3</sub> N <sub>4</sub>
Zircónia	ZrO <sub>2</sub>

# Lista de Figuras

Figura 2.1.1 - Representação Esquemática de Componente FGM com variação de Propriedades em Espessura .....	7
Figura 2.1.2 - Representação Esquemática de Componente FGM com variação de Propriedades em Comprimento.....	8
Figura 2.1.3 - Representação Esquemática de Estrutura Construída em FGM com variação de Propriedades em Função da Altura da Estrutura.....	8
Figura 2.2.1 - Elemento Viga-Barra Unidimensional Quadrático no Plano, e respectivos Graus de Liberdade.....	10
Figura 2.2.2 – Elemento Viga-Barra Unidimensional Quadrático no Espaço, e respectivos Graus de Liberdade (Adaptado de [28]).....	11
Figura 2.4.1 – Elemento Unidimensional Quadrático, e respectivas coordenadas no referencial da estrutura, do elemento, e no de coordenadas naturais .....	17
Figura 2.4.2 - Elemento Unidimensional Quadrático no Referencial do Elemento.....	18
Figura 2.4.3 - Elemento Unidimensional Quadrático no Referencial de Coordenadas Naturais	18
Figura 2.4.4 – Evolução das Funções de Forma no Referencial de Coordenadas Naturais no Elemento Unidimensional Quadrático.....	19
Figura 2.5.1 - Fluxograma do Algoritmo de Arquimedes.....	25
Figura 2.5.2 - Fluxograma do Algoritmo das Raposas Vermelhas.....	29
Figura 3.1.1 - Esquematização da Construção do Modelo de Otimização para 1 Variável de Projeto, e respectivas considerações .....	32
Figura 3.2.1 - Esquematização da Construção do Modelo de Otimização para 4 Variáveis de Projeto, e respectivas considerações .....	33
Figura 4.2.1 - Diagrama de Corpo Livre da Viga em Balanço Analisada .....	36
Figura 4.2.2 - Representação gráfica dos primeiros 4 modos de vibração associados ao deslocamento trasnversal de viga em balanço presente em [16] .....	41
Figura 4.2.3 - Representação Esquemática de Treliça constituída por 3 elementos com Carga Concentrada Aplicada no nó Livre.....	51
Figura 4.2.4 - Representação Esquemática do Diagrama de Corpo Livre da Treliça, incluindo a discretização mínima da estrutura considerando elementos unidimensionais quadráticos, e respectivos graus de liberdade.....	51
Figura 4.2.5 - Representação Esquemática do Pórtico e do Carregamento Considerado .....	53
Figura 4.2.6 - Representação Esquemática do Diagrama de Corpo Livre do Pórtico, incluindo a discretização mínima da estrutura considerando elementos unidimensionais quadráticos, e respectivos graus de liberdade.....	54

Figura 4.2.7 – Representação Esquemática de Viga em Balanço Orientada segundo eixo OY, sujeita a carga na direção axial e momento torsor na extremidade livre da viga, respetivamente .....	56
Figura 4.2.8 – Representação Esquemática de Viga em Balanço Orientada segundo eixo OY, sujeita a cargas transversais nos planos ZY e XY, respetivamente, uniformemente distribuídas ou aplicadas na extremidade livre da viga .....	57
Figura 4.2.9 - Representação Esquemática de uma Treliça 3D com Carga Aplicada no Nó Livre .....	58
Figura 4.2.10 - Representação Esquemática do Pórtico 3D com Carga Concentrada Aplicada.	59
Figura 4.5.1 - Distribuição do Módulo de Elasticidade no Pórtico 1 para a solução ótima encontrada para minimização do deslocamento resultante máximo .....	70
Figura 4.5.2 - Distribuição do Módulo de Elasticidade no Pórtico 1 para a solução ótima encontrada para maximização da frequência fundamental.....	71
Figura 5.1.1 - Representação Esquemática da Treliça 1 e do carregamento considerado .....	74
Figura 5.1.2 - Representação Esquemática da Discretização Mínima da Treliça 1 considerando Elementos Unidimensionais Quadráticos, e Evolução da Fração Volúmica de Material Metálico em função da Altura da Estrutura.....	74
Figura 5.1.3 - Evolução do Módulo de Elasticidade de um FGM ao longo Coordenada Vertical da Estrutura, constituído, na zona superior, por Alumínio, e na zona inferior, Zircónia.....	75
Figura 5.1.4 - Evolução da Massa Volúmica de um FGM ao longo da Coordenada Vertical da Estrutura, constituído, na zona superior, por Alumínio, e na zona inferior, Zircónia.....	75
Figura 5.1.5 - Representação Esquemática da Treliça 1 quando a Regra das Misturas é escrita de tal forma que a fração volúmica é relativa à Distribuição de Material Metálico.....	76
Figura 5.1.6 - Representação Esquemática da Treliça 1 quando a Regra das Misturas é escrita de tal forma que a fração volúmica é relativa à Distribuição de Material Cerâmico.....	77
Figura 5.1.7 - Representação Esquemática das Secções Transversais Consideradas nos Estudos Paramétricos Realizados .....	79
Figura 5.1.8 - Representação Gráfica do Modo 1 de Vibração da Treliça 1 .....	83
Figura 5.1.9 - Representação Gráfica do Modo 2 de Vibração da Treliça 1 .....	84
Figura 5.1.10 - Representação Gráfica do Modo 3 de Vibração da Treliça 1 .....	84
Figura 5.1.11 - Representação Esquemática da Treliça 2 e do carregamento considerado.....	84
Figura 5.1.12 - Representação Esquemática da Discretização Mínima da Treliça 2 considerando Elementos Unidimensionais Quadráticos, e Evolução da Fração Volúmica de Material Metálico em função da Altura da Estrutura.....	85
Figura 5.1.13 - Representação Esquemática da Treliça 3 e do carregamento considerado.....	88

Figura 5.1.14 - Representação Esquemática da Discretização Mínima da Treliça 3 considerando Elementos Unidimensionais Quadráticos, e Evolução da Fração Volúmica de Material Metálico em função da Altura da Estrutura.....	89
Figura 5.1.15 - Representação Esquemática do Pórtico 1 e carregamento considerado.....	92
Figura 5.1.16 - Representação Esquemática da Discretização Mínima do Pórtico 1 considerando Elementos Unidimensionais Quadráticos, e Evolução da Fração Volúmica de Material Metálico em função da Altura da Estrutura.....	93
Figura 5.1.17 - Representação Gráfica do Modo 1 de Vibração do Pórtico 1.....	96
Figura 5.1.18 - Representação Gráfica do Modo 2 de Vibração do Pórtico 1.....	96
Figura 5.1.19 - Representação Gráfica do Modo 3 de Vibração do Pórtico 1.....	97
Figura 5.1.20 - Representação Esquemática do Pórtico 2 e carregamento considerado.....	97
Figura 5.1.21 - Representação Esquemática da Discretização Mínima do Pórtico 2 considerando Elementos Unidimensionais Quadráticos, e Evolução da Fração Volúmica de Material Metálico em função da Altura da Estrutura.....	98
Figura 5.1.22 - Representação Esquemática do Pórtico 3 e carregamento considerado.....	100
Figura 5.1.23 - Representação Esquemática da Discretização Mínima do Pórtico 3 considerando Elementos Unidimensionais Quadráticos, e Evolução da Fração Volúmica de Material Metálico em função da Altura da Estrutura.....	101
Figura 5.3.1 - Avaliação da Influência dos Pontos de Gauss nas Primeiras Cinco Frequências Naturais da Treliça 1 em função do Expoente da Lei de Potência quando a Fração Volúmica descreve a Distribuição de Material Metálico na estrutura .....	107
Figura 5.3.2 - Avaliação da Influência dos Pontos de Gauss na Rotação do Nó Livre da Treliça 1 em função do Expoente da Lei de Potência quando a Fração Volúmica descreve a Distribuição de Material Metálico na estrutura.....	107
Figura 5.5.1 - Evolução do Módulo de Elasticidade da Treliça 3 pela Solução Ótima encontrada para Minimização de Deslocamento Resultante Máximo através do Modelo de 1 variável....	116
Figura 5.5.2 - Evolução do Módulo de Elasticidade da Treliça 3 pela Solução Ótima encontrada para Maximização da Frequência Natural através do Modelo de 1 variável.....	116
Figura 5.5.3 - Evolução do Módulo de Elasticidade do Pórtico 3 pela Melhor Solução Ótima encontrada para Minimização de Deslocamento Resultante Máximo através do Modelo de 1 variável.....	118
Figura 5.5.4 - Evolução do Módulo de Elasticidade do Pórtico 3 pela Melhor Solução Ótima encontrada para Maximização da Frequência Natural através do Modelo de 1 variável.....	118
Figura 5.5.5 - Evolução do Módulo de Elasticidade da Treliça 3D pela Melhor Solução Ótima encontrada para Minimização de Deslocamento Resultante Máximo através do Modelo de 1 variável.....	119

Figura 5.5.6 - Evolução do Módulo de Elasticidade da Treliça 3D pela Melhor Solução Ótima encontrada para Maximização da Frequência Fundamental através do Modelo de 1 variável	119
Figura 5.5.7 - Evolução do Módulo de Elasticidade do Pórtico 3D pela Melhor Solução Ótima encontrada para Minimização de Deslocamento Resultante Máximo através do Modelo de 1 variável.....	120
Figura 5.5.8 - Evolução do Módulo de Elasticidade do Pórtico 3D pela Melhor Solução Ótima encontrada para Maximização da Frequência Fundamental através do Modelo de 1 variável	121
Figura 5.6.1 - Evolução do Módulo de Elasticidade do Treliça 3 pela Melhor Solução Ótima encontrada para Minimização de Deslocamento Resultante Máximo através do Modelo de 4 variáveis.....	123
Figura 5.6.2 - Evolução do Módulo de Elasticidade da Treliça 3 pela Melhor Solução Ótima encontrada para Maximização da Frequência Fundamental através do Modelo de 4 variáveis	124
Figura 5.6.3 - Evolução do Módulo de Elasticidade do Pórtico 3 pela Melhor Solução Ótima encontrada para Minimização de Deslocamento Resultante Máximo através do Modelo de 4 variáveis.....	126
Figura 5.6.4 - Evolução do Módulo de Elasticidade do Pórtico 3 pelas Melhores Soluções Ótimas encontradas para Maximização da Frequência Fundamental através do Modelo de 4 variáveis .....	126
Figura 5.6.5 - Evolução do Módulo de Elasticidade da Treliça 3D pelas Melhores Soluções Ótimas encontradas para Minimização de Deslocamento Resultante Máximo através do Modelo de 4 variáveis.....	129
Figura 5.6.6 - Evolução do Módulo de Elasticidade da Treliça 3D pela Melhor Solução Ótima encontrada para Maximização da Frequência Fundamental através do Modelo de 4 variáveis	129
Figura 5.6.7 - Evolução do Módulo de Elasticidade do Pórtico 3D pela Melhor Solução Ótima encontrada para Minimização de Deslocamento Resultante Máximo através do Modelo de 4 variáveis.....	132
Figura 5.6.8 - Evolução do Módulo de Elasticidade do Pórtico 3D pela Melhor Solução Ótima encontrada para Maximização da Frequência Fundamental através do Modelo de 4 variáveis .....	132

## Lista de Tabelas

Tabela 2.2.1 - Coeficientes $k_2$ para Seções Retangulares em Torção (Adaptado de [30]) .....	12
Tabela 3.2.1 - Propriedades dos Materiais considerados para a constituição da combinação de materiais dos FGM estudados.....	33
Tabela 4.2.1 - Reações no Encastramento obtidas através de Equilíbrio Estático.....	36
Tabela 4.2.2 - Reações no Encastramento calculadas para 8, 16 e 32 elementos, e respectivos desvios .....	36
Tabela 4.2.3 - Comparação de Deslocamento Transversal e Rotação ao Longo da Viga calculados com [14].....	37
Tabela 4.2.4 - Comparação de Deslocamento Transversal na Extremidade Livre da Viga.....	38
Tabela 4.2.5 – Comparação de Deslocamento Transversal Adimensionalizados calculados com [43] .....	38
Tabela 4.2.6 - Primeiras Quatro Frequências de Ressonância da Viga Analisada, obtidas segundo a teoria de Timoshenko e a teoria de Euler-Bemoulli, para $L/h=10$ .....	39
Tabela 4.2.7 - Comparação das Primeiras Quatro Frequências de Ressonância Calculadas com recurso a 2, 4 e 8 elementos quadráticos, com o modelo de elementos finitos de [32], para $L/h=10$ .....	39
Tabela 4.2.8 - Primeiras Quatro Frequências de Ressonância da Viga Analisada, obtidas segundo a teoria de Timoshenko e a teoria de Euler-Bemoulli, para $L/h=100$ .....	40
Tabela 4.2.9 - Comparação das Primeiras Quatro Frequências de Ressonância Calculadas com recurso a 2, 4 e 8 elementos quadráticos, com o modelo de elementos finitos de [32], para $L/h=100$ .....	40
Tabela 4.2.10 - Primeira Frequência Fundamental para Viga com Gradiente Funcional a variar em espessura, com $L/h=20$ , com $\rho_{ratio}=1$ , para diferentes expoentes da lei de potência e $E_{ratio}$ .....	42
Tabela 4.2.11 - Primeira Frequência Fundamental para Viga com Gradiente Funcional a variar em espessura, com $L/h=100$ , com $\rho_{ratio}=1$ , para diferentes expoentes da lei de potência e $E_{ratio}$ .....	43
Tabela 4.2.12 - Segunda Frequência Fundamental para Viga com Gradiente Funcional a variar em espessura, com $L/h=20$ , com $\rho_{ratio}=1$ , para diferentes expoentes da lei de potência e $E_{ratio}$ .....	43
Tabela 4.2.13 - Segunda Frequência Fundamental para Viga com Gradiente Funcional a variar em espessura, com $L/h=100$ , com $\rho_{ratio}=1$ , para diferentes expoentes da lei de potência e $E_{ratio}$ .....	44
Tabela 4.2.14 - Terceira Frequência Fundamental para Viga com Gradiente Funcional a variar em espessura, com $L/h=20$ , com $\rho_{ratio}=1$ , para diferentes expoentes da lei de potência e $E_{ratio}$ ...	44

Tabela 4.2.15 - Terceira Frequência Fundamental para Viga com Gradiente Funcional a variar em espessura, com $L/h=100$ , com $\rho_{ratio}= 1$ , para diferentes expoentes da lei de potência e $E_{ratio}$ .	45
Tabela 4.2.16 - Primeira Frequência Fundamental para Viga com Gradiente Funcional a variar na direção axial, com $L/h=20$ , com $\rho_{ratio}= 1$ , para diferentes expoentes da lei de potência e $E_{ratio}$ .	45
Tabela 4.2.17 - Primeira Frequência Fundamental para Viga com Gradiente Funcional a variar na direção axial, com $L/h=100$ , com $\rho_{ratio}= 1$ , para diferentes expoentes da lei de potência e $E_{ratio}$ .	46
Tabela 4.2.18 - Segunda Frequência Fundamental para Viga com Gradiente Funcional a variar na direção axial, com $L/h=20$ , com $\rho_{ratio}= 1$ , para diferentes expoentes da lei de potência e $E_{ratio}$ .	46
Tabela 4.2.19 - Segunda Frequência Fundamental para Viga com Gradiente Funcional a variar na direção axial, com $L/h=100$ , com $\rho_{ratio}= 1$ , para diferentes expoentes da lei de potência e $E_{ratio}$ .	47
Tabela 4.2.20 - Terceira Frequência Fundamental para Viga com Gradiente Funcional a variar na direção axial, com $L/h=20$ , com $\rho_{ratio}= 1$ , para diferentes expoentes da lei de potência e $E_{ratio}$ .	47
Tabela 4.2.21 - Terceira Frequência Fundamental para Viga com Gradiente Funcional a variar na direção axial, com $L/h=100$ , com $\rho_{ratio}= 1$ , para diferentes expoentes da lei de potência e $E_{ratio}$ .	48
Tabela 4.2.22 - Propriedades dos Materiais que constituem os FGM's considerados no estudo de verificação.	49
Tabela 4.2.23 - Deslocamentos Adimensionalizados obtidos através da Regra das Misturas (RM) e do esquema de homogeneização de Mori-Tanaka (MT) para o FGM I.	50
Tabela 4.2.24 - Deslocamentos Adimensionalizados obtidos através da Regra das Misturas (RM) e do esquema de homogeneização de Mori-Tanaka (MT) para o FGM II.	50
Tabela 4.2.25 - Estudo de Convergência para as Primeiras Cinco Frequências Fundamentais da Treliça.	52
Tabela 4.2.26 - Reações nos Apoios da Treliça através de Equilíbrio Estático.	52
Tabela 4.2.27 - Estudo de Convergência para as Reações nos Apoios da Treliça.	52
Tabela 4.2.28 - Estudo de Convergência para os Deslocamentos Nodais do Nó Livre da Treliça.	52
Tabela 4.2.29 - Estudo de Convergência para as Primeiras Cinco Frequências Fundamentais do Pórtico.	53
Tabela 4.2.30 - Estudo de Convergência para as Reações no Encastramento à esquerda do Pórtico.	54
Tabela 4.2.31 - Estudo de Convergência para as Reações no Encastramento à direita do Pórtico.	54

Tabela 4.2.32 – Reações nos Encastramentos e Deslocamentos Nodais correspondentes aos Graus de Liberdade 19, 35 e 15, obtidos através do 2º Teorema de Castigliano e pela Aplicação Ftool .....	55
Tabela 4.2.33 – Deslocamentos Axial e Rotação em Torno do Eixo, respetivamente, da Viga em Balanço no Espaço .....	56
Tabela 4.2.34 - Deslocamentos Transversais e Rotações nos planos YZ e XY, respetivamente, da Viga em Balanço no Espaço.....	56
Tabela 4.2.35 - Primeiras Cinco Frequências de Ressonância calculadas para a Viga em Balanço no Espaço com recurso a 1, 2 e 3 elementos, comparando com as obtidas via Solidworks, e respetivos desvios.....	57
Tabela 4.2.36 - Coordenadas no Espaço dos Apoios Simples da Treliça 3D.....	57
Tabela 4.2.37 - Deslocamentos Nodais do Nó Livre da Estrutura sujeito a um carregamento de 1000 N segundo o eixo negativo oY .....	58
Tabela 4.2.38 – Primeiras Cinco Frequências de Ressonância da Treliça 3D obtidas com 1, 2 e 3 elementos/viga-barra, comparando com Solidworks, e respetivos desvios .....	58
Tabela 4.2.39 - Deslocamentos Nodais do Nó no qual foi aplicada a Carga de 1000 N.....	59
Tabela 4.2.40 - Primeiras Cinco Frequências de Ressonância do Pórtico 3D obtidas com 1, 2 e 3 elementos/viga-barra, comparando com Solidworks, e respetivos desvios .....	60
Tabela 4.3.1 - Funções de Benchmark Utilizadas na Verificação do Modelo de Otimização de Arquimedes Implementado .....	60
Tabela 4.3.2 – Mínimos Globais obtidos em [45] das Funções de Benchmark Utilizadas na Verificação do Modelo de Otimização de Arquimedes.....	60
Tabela 4.3.3 – Resultados do Estudo de Verificação da Função Goldstein-Price, através da realização de 30 corridas, 1000 iterações, e populações com 20 indivíduos.....	61
Tabela 4.3.4 - Resultados do Estudo de Verificação da Função Goldstein-Price com inclusão de Técnica de Reinicialização da População, através da realização de 30 corridas, 1000 iterações, e populações com 20 indivíduos.....	62
Tabela 4.3.5 - Resultados do Estudo de Verificação da Função da Esfera com Dimensão de 30, através da realização de 10 corridas, 1000 iterações, e populações com 20 indivíduos.....	62
Tabela 4.3.6 - Resultados do Estudo de Verificação da Função da Esfera com Dimensão de 10, através da realização de 10 corridas, 1000 iterações, e populações com 20 indivíduos.....	63
Tabela 4.3.7 - Resultados do Estudo de Verificação da Função da Esfera com Dimensão de 5, através da realização de 10 corridas, 1000 iterações, e populações com 20 indivíduos.....	63
Tabela 4.3.8 - Resultados do Estudo de Verificação da Função da Esfera com Dimensão de 2, através da realização de 30 corridas, 1000 iterações, e populações com 20 indivíduos.....	63
Tabela 4.3.9 - Resultados do Estudo de Verificação da Função da Esfera com Dimensão de 30, através da realização de 10 corridas, 1000 iterações, e populações com 20 indivíduos.....	64

Tabela 4.3.10 - Resultados do Estudo de Verificação da Função da Esfera com Dimensão de 30 incluindo a Técnica de Reinicialização da População a cada 10 iterações, através da realização de 10 corridas, 1000 iterações, e populações com 20 indivíduos.....	65
Tabela 4.3.11 - Resultados do Estudo de Verificação da Função da Esfera com Dimensão de 2, através da realização de 30 corridas, 1000 iterações, e populações com 20 indivíduos.....	65
Tabela 4.4.1 - Funções de Benchmark Utilizadas na Verificação do Modelo de Otimização das Raposas Vermelhas Implementado .....	66
Tabela 4.4.2 – Resultados do Estudo de Verificação da Função da Esfera com Dimensão 2, através da realização de 10 corridas, 100 iterações, e populações com 100 indivíduos .....	66
Tabela 4.4.3 - Resultados do Estudo de Verificação da Função Rastrigin com Dimensão 2, através da realização de 10 corridas, 100 iterações, e populações com 100 indivíduos .....	67
Tabela 4.4.4 - Resultados do Estudo de Verificação da Função da Soma dos Quadrados com Dimensão 20, através da realização de 20 corridas, 100 iterações, e populações com 100 indivíduos.....	67
Tabela 4.5.1 - Frequência Fundamental do Pórtico 1 para diferentes valores de expoente da Lei de Potência calculadas através de Integração Exata e Integração Aproximada, respetivamente	68
Tabela 4.5.2 - Deslocamentos Resultantes dos Nós que Constituem a Discretização Mínima do Pórtico 1 calculados com recurso a Integração Aproximada .....	69
Tabela 4.5.3 – Soluções Ótimas do Estudo de Otimização do Pórtico 1 obtidas através do algoritmo de Arquimedes e do algoritmo das Raposas Vermelhas para a minimização do deslocamento resultante máximo e para maximização da frequência fundamental da estrutura para 10 corridas, 50 iterações e populações com 10 indivíduos .....	69
Tabela 4.5.4 - Soluções Ótimas do Estudo de Otimização do Pórtico 1 obtidas através do algoritmo de Arquimedes e do algoritmo das Raposas Vermelhas para a minimização do deslocamento resultante máximo e para maximização da frequência fundamental da estrutura para 10 corridas, 10 iterações e populações com 5 indivíduos .....	70
Tabela 5.1.1 - Deslocamentos Nodais do Nó Livre da Treliça 1 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 20 mm x 20 mm.....	76
Tabela 5.1.2 – Primeiras Cinco Frequências da Treliça 1 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 20 mm x 20 mm .....	77
Tabela 5.1.3 - Deslocamentos Nodais do Nó Livre da Treliça 1 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 20 mm x 20 mm.....	78

Tabela 5.1.4 - Primeiras Cinco Frequências da Treliça 1 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 20 mm x 20 mm .....	78
Tabela 5.1.5 - Deslocamentos Nodais do Nó Livre da Treliça 1 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 40 mm x 10 mm .....	80
Tabela 5.1.6 - Primeiras Cinco Frequências da Treliça 1 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 40 mm x 10 mm .....	80
Tabela 5.1.7 - Deslocamentos Nodais do Nó Livre da Treliça 1 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 40 mm x 10 mm.....	80
Tabela 5.1.8 - Primeiras Cinco Frequências da Treliça 1 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 40 mm x 10 mm .....	81
Tabela 5.1.9 - Deslocamentos Nodais do Nó Livre da Treliça 1 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 10 mm x 40 mm.....	81
Tabela 5.1.10 - Primeiras Cinco Frequências da Treliça 1 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 10 mm x 40 mm .....	82
Tabela 5.1.11 - Deslocamentos Nodais do Nó Livre da Treliça 1 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 10 mm x 40 mm.....	82
Tabela 5.1.12 - Primeiras Cinco Frequências da Treliça 1 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 10 mm x 40 mm .....	82
Tabela 5.1.13 - Deslocamentos Nodais do Nó de Aplicação da Carga Livre da Treliça 2 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 20 mm x 20 mm ...	86
Tabela 5.1.14 - Primeiras Cinco Frequências da Treliça 2 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 20 mm x 20 mm .....	86
Tabela 5.1.15 - Deslocamentos Nodais do Nó de Aplicação da Carga da Treliça 2 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 20 mm x 20 mm .....	87

Tabela 5.1.16 - Primeiras Cinco Frequências da Treliça 2 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 20 mm x 20 mm .....	87
Tabela 5.1.17 - Deslocamentos Nodais do Nó de Aplicação da Carga da Treliça 3 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 20 mm x 20 mm .....	89
Tabela 5.1.18 - Primeiras Cinco Frequências da Treliça 3 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 20 mm x 20 mm .....	90
Tabela 5.1.19 - Deslocamentos Nodais do Nó de Aplicação da Carga da Treliça 3 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 20 mm x 20 mm .....	91
Tabela 5.1.20 - Primeiras Cinco Frequências da Treliça 3 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 20 mm x 20 mm .....	91
Tabela 5.1.21 - Deslocamentos Nodais do Nó Superior Esquerdo e Direito, respetivamente, do Pórtico 1 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 20 mm x 20 mm.....	94
Tabela 5.1.22 – Primeiras Cinco Frequências do Pórtico 1 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 20 mm x 20 mm.....	94
Tabela 5.1.23 - Deslocamentos Nodais do Nó Superior Esquerdo e Direito, respetivamente, do Pórtico 1 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 20 mm x 20 mm.....	95
Tabela 5.1.24 - Primeiras Cinco Frequências do Pórtico 1 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 20 mm x 20 mm.....	95
Tabela 5.1.25 - Deslocamentos Nodais do Nó Superior Esquerdo e Direito, respetivamente, do Pórtico 2 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 20 mm x 20 mm.....	98
Tabela 5.1.26 - Primeiras Cinco Frequências do Pórtico 2 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 20 mm x 20 mm.....	99

Tabela 5.1.27 - Deslocamentos Nodais do Nó Superior Esquerdo e Direito, respetivamente, do Pórtico 2 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 20 mm x 20 mm.....	99
Tabela 5.1.28 - Primeiras Cinco Frequências do Pórtico 2 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 20 mm x 20 mm.....	99
Tabela 5.1.29 - Deslocamentos Nodais do Nó Superior Esquerdo e Direito, respetivamente, do Pórtico 3 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 20 mm x 20 mm.....	102
Tabela 5.1.30 - Primeiras Cinco Frequências do Pórtico 3 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 20 mm x 20 mm.....	102
Tabela 5.1.31 - Deslocamentos Nodais do Nó Superior Esquerdo e Direito, respetivamente, do Pórtico 3 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 20 mm x 20 mm.....	103
Tabela 5.1.32 - Primeiras Cinco Frequências do Pórtico 3 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 20 mm x 20 mm.....	103
Tabela 5.2.1 - Fator de Comprimento Equivalente em Vigas Sujeitas a Encurvadura, adaptado de [46].....	104
Tabela 5.2.2 – Coeficientes de Esbeltez Presentes em Cada Estrutura se as mesmas fossem construídas em material metálico (aço) .....	105
Tabela 5.3.1 – Número de Pontos de Gauss a Aplicar Utilizando Integração Reduzida em Função do Expoente da Lei de Potência.....	106
Tabela 5.3.2 - Pesos e Pontos de Gauss a Aplicar quando utilizada a Quadratura de Gauss-Legendre.....	106
Tabela 5.4.1 - Resultados do Estudo Paramétrico da Função Esfera com o Algoritmo de Arquimedes .....	109
Tabela 5.4.2 - Resultados do Estudo Paramétrico da Função Goldstein-Price com o Algoritmo de Arquimedes .....	110
Tabela 5.4.3 - Resultados do Estudo Paramétrico da Função Rastrigin com o Algoritmo de Arquimedes .....	110
Tabela 5.4.4 - Resultados do Estudo Paramétrico da Função Rastrigin com o Algoritmo de Arquimedes com recurso a técnica de reinicialização de população a cada 10 iterações.....	111

Tabela 5.4.5 - Resultados do Estudo Paramétrico da Função Esfera com o Algoritmo das Raposas Vermelhas .....	112
Tabela 5.4.6 - Resultados do Estudo Paramétrico da Função Goldstein-Price com o Algoritmo das Raposas Vermelhas .....	113
Tabela 5.4.7 - Resultados do Estudo Paramétrico da Função Rastrigin com o Algoritmo das Raposas Vermelhas para Populações com 10, 20, 30, 40 e 50 Indivíduos, realizando-se 50, 100, 150, 200 e 1000 iterações, em cada corrida, num total de 10 corridas .....	113
Tabela 5.5.1 - Deslocamento resultante do nó 19 da Treliça 3 e Primeira Frequencia natural da estrutura.....	115
Tabela 5.5.2 - Resultados do Estudo de Otimização à Treliça 3 através de ambas as Meta heurísticas de Otimização Implementadas para 1 variável de projeto .....	115
Tabela 5.5.3 - Deslocamento resultante do nó 10 do Pórtico 3 e Primeira Frequencia natural da estrutura.....	117
Tabela 5.5.4 - Resultados do Estudo de Otimização ao Pórtico 3 através de ambas as Meta heurísticas de Otimização Implementadas para 1 variável de projeto .....	117
Tabela 5.5.5 - Resultados do Estudo de Otimização à Treliça 3D através de ambas as Meta heurísticas de Otimização Implementadas para 1 variável de projeto .....	119
Tabela 5.5.6 - Resultados do Estudo de Otimização ao Pórtico 3D através de ambas as Meta heurísticas de Otimização Implementadas para 1 variável de projeto .....	120
Tabela 5.6.1 - Resultados do Estudo de Otimização à Treliça 3 através do Algoritmo de Otimização de Arquimedes para 4 variáveis de projeto para Minimização de Deslocamento Resultante Máximo.....	122
Tabela 5.6.2 - Resultados do Estudo de Otimização à Treliça 3 através do Algoritmo de Otimização de Arquimedes para 4 variáveis de projeto para Maximização da Frequência Fundamental.....	122
Tabela 5.6.3 - Resultados do Estudo de Otimização à Treliça 3 através do Algoritmo de Otimização das Raposas Vermelhas para 4 variáveis de projeto para Minimização de Deslocamento Resultante Máximo.....	122
Tabela 5.6.4 - Resultados do Estudo de Otimização à Treliça 3 através do Algoritmo de Otimização das Raposas Vermelhas para 4 variáveis de projeto para Maximização da Frequência Fundamental.....	123
Tabela 5.6.5 - Resultados do Estudo de Otimização ao Pórtico 3 através do Algoritmo de Otimização de Arquimedes para 4 variáveis de projeto para Minimização de Deslocamento Resultante Máximo.....	124
Tabela 5.6.6 - Resultados do Estudo de Otimização ao Pórtico 3 através do Algoritmo de Otimização de Arquimedes para 4 variáveis de projeto para Maximização da Frequência Fundamental.....	125

Tabela 5.6.7 - Resultados do Estudo de Otimização ao Pórtico 3 através do Algoritmo de Otimização de Raposas Vermelhas para 4 variáveis de projeto para Minimização de Deslocamento Resultante Máximo.....	125
Tabela 5.6.8 - Resultados do Estudo de Otimização ao Pórtico 3 através do Algoritmo de Otimização de Raposas Vermelhas para 4 variáveis de projeto para Maximização da Frequência Fundamental.....	126
Tabela 5.6.9 - Resultados do Estudo de Otimização à Trelça 3D através do Algoritmo de Otimização de Arquimedes para 4 variáveis de projeto para Minimização de Deslocamento Resultante Máximo.....	127
Tabela 5.6.10 - Resultados do Estudo de Otimização à Trelça 3D através do Algoritmo de Otimização de Arquimedes para 4 variáveis de projeto para Maximização da Frequência Fundamental.....	128
Tabela 5.6.11 - Resultados do Estudo de Otimização à Trelça 3D através do Algoritmo de Otimização de Raposas Vermelhas para 4 variáveis de projeto para Minimização de Deslocamento Resultante Máximo.....	128
Tabela 5.6.12 - Resultados do Estudo de Otimização à Trelça 3D através do Algoritmo de Otimização de Raposas Vermelhas para 4 variáveis de projeto para Maximização da Frequência Fundamental.....	128
Tabela 5.6.13 - Resultados do Estudo de Otimização ao Pórtico 3D através do Algoritmo de Otimização de Arquimedes para 4 variáveis de projeto para Minimização de Deslocamento Resultante Máximo.....	130
Tabela 5.6.14 - Resultados do Estudo de Otimização ao Pórtico 3D através do Algoritmo de Otimização de Arquimedes para 4 variáveis de projeto para Maximização da Frequência Fundamental.....	130
Tabela 5.6.15 - Resultados do Estudo de Otimização ao Pórtico 3D através do Algoritmo de Otimização de Raposas Vermelhas para 4 variáveis de projeto para Minimização de Deslocamento Resultante Máximo.....	131
Tabela 5.6.16 - Resultados do Estudo de Otimização ao Pórtico 3D através do Algoritmo de Otimização de Raposas Vermelhas para 4 variáveis de projeto para Maximização da Frequência Fundamental.....	131
Tabela 5.7.1 – Massa Total das Estruturas Tridimensionais Estudadas quando construídas em material isotrópico.....	133
Tabela 5.7.2 – Resultados do Estudo de Otimização com Constrangimento (restrição de massa), realizado à Trelça 3D para Minimização de Deslocamento Resultante Máximo através do modelo de 1 variável de projeto.....	133

Tabela 5.7.3 - Resultados do Estudo de Otimização com Constrangimento (restrição de massa), para Maximização da Frequência Fundamental realizado à Treliça 3D através do modelo de 1 variável de projeto.....	134
Tabela 5.7.4 - Resultados do Estudo de Otimização com Constrangimento (restrição de massa), realizado ao Pórtico 3D para Minimização de Deslocamento Resultante Máximo através do modelo de 1 variável de projeto.....	134
Tabela 5.7.5 - Resultados do Estudo de Otimização com Constrangimento (restrição de massa), para Maximização da Frequência Fundamental realizado ao Pórtico 3D através do modelo de 1 variável de projeto.....	135
Tabela 5.7.6 - Resultados do Estudo de Otimização com Constrangimento (restrição de massa), realizado à Treliça 3D para Minimização de Deslocamento Resultante Máximo através do modelo de 4 variáveis de projeto com o algoritmo das Raposas Vermelhas .....	135
Tabela 5.7.7 - Resultados do Estudo de Otimização com Constrangimento (restrição de massa), realizado à Treliça 3D para Minimização de Deslocamento Resultante Máximo através do modelo de 4 variáveis de projeto com o algoritmo de Arquimedes.....	136
Tabela 5.7.8 - Resultados do Estudo de Otimização com Constrangimento (restrição de massa), realizado à Treliça 3D para Maximização da Frequência Fundamental através do modelo de 4 variáveis de projeto com o algoritmo de Arquimedes .....	136
Tabela 5.7.9 - Resultados do Estudo de Otimização com Constrangimento (restrição de massa), realizado à Treliça 3D para Maximização da Frequência Fundamental através do modelo de 4 variáveis de projeto com o algoritmo das Raposas Vermelhas.....	137
Tabela 5.7.10 - Resultados do Estudo de Otimização com Constrangimento (restrição de massa), realizado ao Pórtico 3D para Minimização de Deslocamento Resultante Máximo através do modelo de 4 variáveis de projeto com o algoritmo de Arquimedes .....	138
Tabela 5.7.11 - Resultados do Estudo de Otimização com Constrangimento (restrição de massa), realizado ao Pórtico 3D para Minimização de Deslocamento Resultante Máximo através do modelo de 4 variáveis de projeto com o algoritmo das Raposas Vermelhas .....	138
Tabela 5.7.12 - Resultados do Estudo de Otimização com Constrangimento (restrição de massa) realizado ao Pórtico 3D para Maximização da Frequência Fundamental através do modelo de 4 variáveis de projeto com o algoritmo de Arquimedes .....	139
Tabela 5.7.13 - Resultados do Estudo de Otimização com Constrangimento (restrição de massa), realizado ao Pórtico 3D para Maximização da Frequência Fundamental através do modelo de 4 variáveis de projeto com o algoritmo das Raposas Vermelhas.....	139

Tabela A. 1 - Deslocamentos Nodais do Nó de Aplicação da Carga da Treliça 2 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 40 mm x 10 mm.....	152
Tabela A. 2 - Primeiras Cinco Frequências da Treliça 2 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 40 mm x 10 mm.....	152
Tabela A. 3 - Deslocamentos Nodais do Nó de Aplicação da Carga da Treliça 2 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 40 mm x 10 mm .....	153
Tabela A. 4 - Primeiras Cinco Frequências da Treliça 2 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 40 mm x 10 mm.....	153
Tabela A. 5 - Deslocamentos Nodais do Nó de Aplicação da Carga da Treliça 2 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 10 mm x 40 mm.....	153
Tabela A. 6 - Primeiras Cinco Frequências da Treliça 2 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 10 mm x 40 mm.....	154
Tabela A. 7 - Deslocamentos Nodais do Nó de Aplicação da Carga da Treliça 2 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 10 mm x 40 mm .....	154
Tabela A. 8 - Primeiras Cinco Frequências da Treliça 2 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 10 mm x 40 mm.....	154
Tabela A. 9 - Deslocamentos Nodais do Nó de Aplicação da Carga da Treliça 3 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 40 mm x 10 mm.....	155
Tabela A. 10 - Primeiras Cinco Frequências da Treliça 3 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 40 mm x 10 mm.....	155
Tabela A. 11 - Deslocamentos Nodais do Nó de Aplicação da Carga da Treliça 3 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 40 mm x 10 mm .....	155
Tabela A. 12 - Primeiras Cinco Frequências da Treliça 3 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 40 mm x 10 mm.....	156

Tabela A. 13 - Deslocamentos Nodais do Nó de Aplicação de Carga da Treliça 3 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 10 mm x 40 mm.....	156
Tabela A. 14 - Primeiras Cinco Frequências da Treliça 3 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 10 mm x 40 mm.....	157
Tabela A. 15 - Deslocamentos Nodais do Nó de Aplicação da Carga da Treliça 3 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 10 mm x 40 mm .....	157
Tabela A. 16 - Primeiras Cinco Frequências da Treliça 3 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 10 mm x 40 mm.....	157
Tabela A. 17 - Deslocamentos Nodais do Nó Superior Esquerdo e Direito, respetivamente, do Pórtico 1 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 158	
Tabela A. 18 - Primeiras Cinco Frequências do Pórtico 1 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 40 mm x 10 mm.....	158
Tabela A. 19 - Deslocamentos Nodais do Nó Superior Esquerdo e Direito, respetivamente, do Pórtico 1 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 159	
Tabela A. 20 - Primeiras Cinco Frequências do Pórtico 1 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 40 mm x 10 mm.....	159
Tabela A. 21 - Deslocamentos Nodais do Nó Superior Esquerdo e Direito, respetivamente, do Pórtico 1 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 159	
Tabela A. 22 - Primeiras Cinco Frequências do Pórtico 1 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 10 mm x 40 mm.....	160
Tabela A. 23 - Deslocamentos Nodais do Nó Superior Esquerdo e Direito, respetivamente, do Pórtico 1 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 160	
Tabela A. 24 - Primeiras Cinco Frequências do Pórtico 1 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 10 mm x 40 mm.....	160

Tabela A. 25 - Deslocamentos Nodais do Nó Superior Esquerdo e Direito, respetivamente, do Pórtico 2 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 161	
Tabela A. 26 - Primeiras Cinco Frequências do Pórtico 2 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 40 mm x 10 mm.....	161
Tabela A. 27 - Deslocamentos Nodais do Nó Superior Esquerdo e Direito, respetivamente, do Pórtico 2 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 162	
Tabela A. 28 - Primeiras Cinco Frequências do Pórtico 2 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 40 mm x 10 mm.....	162
Tabela A. 29 - Deslocamentos Nodais do Nó Superior Esquerdo e Direito, respetivamente, do Pórtico 2 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 162	
Tabela A. 30 - Primeiras Cinco Frequências do Pórtico 2 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 10 mm x 40 mm.....	163
Tabela A. 31 - Deslocamentos Nodais do Nó Superior Esquerdo e Direito, respetivamente, do Pórtico 2 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 163	
Tabela A. 32 - Primeiras Cinco Frequências do Pórtico 2 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 10 mm x 40 mm.....	163
Tabela A. 33 - Deslocamentos Nodais do Nó Superior Esquerdo e Direito, respetivamente, do Pórtico 3 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 164	
Tabela A. 34 - Primeiras Cinco Frequências do Pórtico 3 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 40 mm x 10 mm.....	164
Tabela A. 35 - Deslocamentos Nodais do Nó Superior Esquerdo e Direito, respetivamente, do Pórtico 3 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 165	
Tabela A. 36 - Primeiras Cinco Frequências do Pórtico 3 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 40 mm x 10 mm.....	165

Tabela A. 37 - Deslocamentos Nodais do Nó Superior Esquerdo e Direito, respetivamente, do Pórtico 3 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 166	
Tabela A. 38 - Primeiras Cinco Frequências do Pórtico 3 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 10 mm x 40 mm.....	166
Tabela A. 39 - Deslocamentos Nodais do Nó Superior Esquerdo e Direito, respetivamente, do Pórtico 3 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 166	
Tabela A. 40 - Primeiras Cinco Frequências do Pórtico 3 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO <sub>2</sub> , e secção transversal 10 mm x 40 mm.....	167
Tabela B. 1 - Primeiras Cinco Frequências Naturais da Treliça 1 obtidas com Diferente Número de Pontos de Gauss para Integração Numérica, em função do Grau dos Polinómios que Caracterizam a Matriz de Rigidez ao Corte Transversal .....	168
Tabela B. 2 - Deslocamentos Nodais do Nó Livre da Treliça 1 obtidas com Diferente Número de Pontos de Gauss para Integração Numérica, em função do Grau dos Polinómios que Caracterizam a Matriz de Rigidez ao Corte Transversal.....	168
Tabela B. 3 - Primeiras Cinco Frequências Naturais da Treliça 2 obtidas com Diferente Número de Pontos de Gauss para Integração Numérica, em função do Grau dos Polinómios que Caracterizam a Matriz de Rigidez ao Corte Transversal .....	169
Tabela B. 4 - Deslocamentos Nodais do Nó Superior da Treliça 2 obtidas com Diferente Número de Pontos de Gauss para Integração Numérica, em função do Grau dos Polinómios que Caracterizam a Matriz de Rigidez ao Corte Transversal .....	169
Tabela B. 5 - Primeiras Cinco Frequências Naturais da Treliça 3 obtidas com Diferente Número de Pontos de Gauss para Integração Numérica, em função do Grau dos Polinómios que Caracterizam a Matriz de Rigidez ao Corte Transversal .....	170
Tabela B. 6 - Deslocamentos Nodais do Nó Superior Central da Treliça 3 obtidas com Diferente Número de Pontos de Gauss para Integração Numérica, em função do Grau dos Polinómios que Caracterizam a Matriz de Rigidez ao Corte Transversal .....	170
Tabela B. 7 - Primeiras Cinco Frequências Naturais do Pórtico 1 obtidas com Diferente Número de Pontos de Gauss para Integração Numérica, em função do Grau dos Polinómios que Caracterizam a Matriz de Rigidez ao Corte Transversal .....	170

Tabela B. 8 - Deslocamentos Nodais do Nó Superior Esquerdo do Pórtico 1 obtidas com Diferente Número de Pontos de Gauss para Integração Numérica, em função do Grau dos Polinómios que Caracterizam a Matriz de Rigidez ao Corte Transversal .....	171
Tabela B. 9 - Primeiras Cinco Frequências Naturais do Pórtico 2 obtidas com Diferente Número de Pontos de Gauss para Integração Numérica, em função do Grau dos Polinómios que Caracterizam a Matriz de Rigidez ao Corte Transversal .....	171
Tabela B. 10 - Deslocamentos Nodais do Nó Superior Esquerdo do Pórtico 2 obtidas com Diferente Número de Pontos de Gauss para Integração Numérica, em função do Grau dos Polinómios que Caracterizam a Matriz de Rigidez ao Corte Transversal.....	171
Tabela B. 11 - Primeiras Cinco Frequências Naturais do Pórtico 3 obtidas com Diferente Número de Pontos de Gauss para Integração Numérica, em função do Grau dos Polinómios que Caracterizam a Matriz de Rigidez ao Corte Transversal .....	172
Tabela B. 12 - Deslocamentos Nodais do Nó Superior Esquerdo do Pórtico 3 obtidas com Diferente Número de Pontos de Gauss para Integração Numérica, em função do Grau dos Polinómios que Caracterizam a Matriz de Rigidez ao Corte Transversal.....	172

Página intencionalmente deixada em branco

# Índice

Agradecimentos .....	iii
Resumo .....	v
Abstract.....	vii
Nomenclatura.....	ix
Lista de Figuras.....	xiii
Lista de Tabelas .....	xvii
1 Introdução.....	1
1.1 Motivação.....	1
1.2 Objetivos .....	1
1.3 Enquadramento .....	1
1.4 Estrutura da Dissertação.....	4
2 Tópicos Estruturantes.....	5
2.1 Materiais Compósitos com Gradiente Funcional.....	5
2.2 Teoria de Deformação de Corte de 1ª Ordem.....	9
2.2.1 Leis Constitutivas no Plano.....	10
2.2.2 Leis Constitutivas no Espaço.....	11
2.3 Princípio da Energia Potencial Mínima e Princípio de Hamilton .....	13
2.4 Método dos Elementos Finitos.....	15
2.4.1 Integração Numérica.....	16
2.4.2 Equações do Elemento.....	17
2.4.3 Matrizes de Rigidez e de Massa.....	19
2.4.4 Efeito de Bloqueio ao Corte (Shear Locking).....	20
2.5 Otimização de Estruturas FGM.....	22
2.5.1 Meta heurísticas de Otimização .....	22
2.5.2 Algoritmo de Otimização de Arquimedes.....	23
2.5.3 Algoritmo de Otimização das Raposas Vermelhas .....	26
3 Metodologia .....	31
3.1 Aplicação Desenvolvida para 1 Variável de Projeto .....	31
3.2 Aplicação Desenvolvida para 4 Variáveis de Projeto.....	32
4 Verificação do Modelo .....	35
4.1 Aplicações Utilizadas para Comparação de Resultados .....	35
4.2 Verificação do Modelo de Análise de Resposta Estrutural .....	36
4.3 Verificação do Modelo de Otimização de Arquimedes.....	60
4.4 Verificação do Modelo de Otimização das Raposas Vermelhas.....	66
4.5 Verificação do Modelo de 1 Variável de Projeto .....	68
5 Casos de Estudo.....	73
5.1 Estudos Paramétricos das Estruturas .....	73

5.1.1	Treliça 1 .....	74
5.1.2	Treliça 2 .....	84
5.1.3	Treliça 3 .....	88
5.1.4	Pórtico 1 .....	92
5.1.5	Pórtico 2 .....	97
5.1.6	Pórtico 3 .....	100
5.2	Coeficiente de Esbeltez dos Constituintes das Estruturas .....	104
5.3	Avaliação da Influência do N° de Pontos de Gauss.....	105
5.4	Estudos Paramétricos das Meta heurísticas de Otimização .....	109
5.4.1	Algoritmo de Arquimedes.....	109
5.4.2	Algoritmo da Raposa Vermelha.....	112
5.5	Estudos de Otimização com 1 Variável de Projeto .....	114
5.5.1	Treliça 3 .....	115
5.5.2	Pórtico 3 .....	116
5.5.3	Treliça 3D.....	118
5.5.4	Pórtico 3D .....	120
5.6	Estudos de Otimização com 4 Variáveis de Projeto.....	121
5.6.1	Treliça 3 .....	121
5.6.2	Pórtico 3 .....	124
5.6.3	Treliça 3D.....	127
5.6.4	Pórtico 3D .....	130
5.7	Estudos de Otimização com Restrição de Massa .....	132
6	Conclusões e Proposta de Trabalho Futuro.....	141
	Referências Bibliográficas .....	149
	Apêndice A. Resultados dos Estudos Paramétricos das Estruturas com Secção Transversal Retangular .....	152
	Apêndice B. Avaliação da Influência do N° de Pontos de Gauss no Comportamento da Estrutura .....	168
	Apêndice C. Resumo da Apresentação Realizada na SYMCOMP 2023.....	173
	Apêndice D. Artigo de Natureza Científica Publicado no <i>Journal of Composites Science</i> .....	174

# 1 Introdução

Neste capítulo que inicia a presente dissertação, são apresentadas a motivação que conduziu ao desenvolvimento do presente trabalho, os objetivos propostos, um breve enquadramento ao tema da dissertação, e ainda a estrutura do documento.

## 1.1 Motivação

A primeira razão que constitui os motivos da realização deste trabalho prende-se com o facto de, na fase de pesquisa bibliográfica sobre o tema, não terem sido encontrados estudos relacionados com a análise de estruturas tipo treliça e pórtico construídas em material com gradiente funcional cuja mistura dependesse da cota em altura da estrutura, assim como no que à otimização deste tipo de estrutura diz respeito.

Além disso, ao longo do meu percurso académico, as unidades curriculares que mais me suscitaram interesse abrangem a Mecânica dos Materiais, e mais especificamente o estudo de soluções para uma determinada estrutura, sujeita a determinadas condições de funcionamento, e os parâmetros que permitem uma melhor resposta da mesma. A procura das melhores soluções para um determinado problema pode ser realizada através de diferentes métodos, e sendo um processo importante para o projeto de estruturas, suscita a necessidade de desenvolvimento de ferramentas que permitam, dentro de determinados limites, e de forma rápida, a seleção dos parâmetros que permitam a melhor resposta possível. A conjugação destas duas vertentes constituiu um assunto que ia de encontro aos meus interesses científicos.

## 1.2 Objetivos

O presente trabalho tem como objetivo o estudo da resposta estática e dinâmica em regime de vibração livre de estruturas tipo treliça ou pórtico, para o qual foi desenvolvido um pacote de aplicações, através do software *Maple*, com vista, numa primeira fase, ao estudo paramétrico da resposta dessas estruturas, e posterior otimização baseada em algoritmos de otimização bio inspirados recentemente divulgados.

## 1.3 Enquadramento

As propriedades melhoradas dos compósitos, em particular os FGM, permitem uma cada vez mais frequente utilização dos mesmos, com uma vasta aplicabilidade em aeronaves, naves e estruturas espaciais, dos quais depende a exploração espacial, peças de automóveis, equipamento eletrónico e médico, revestimentos térmicos para motores cerâmicos, indústria marinha, turbinas a gás, biomedicina, entre outros. Estes materiais são muito promissores para próteses ortopédicas, uma

vez que o gradiente funcional pode ser adaptado de modo a reproduzir as propriedades locais do osso original, minimizando adaptações de rigidez e resistência mecânica do osso e a tensão de corte entre o implante e o tecido ósseo circundante, dois pré-requisitos muito importantes para uma maior durabilidade do implante [1]–[6].

Os FGMs são muito comuns na natureza, como por exemplo as estruturas em bambu, as cascas dos moluscos, com arquitetura hierárquica e respectivos ligamentos gradados, os exoesqueletos dos artrópodes, que são nanocompósitos à base de quitina mineralizada com uma hierarquia estrita, e muitos outros. O corpo humano é constituído, também, por compósitos, nomeadamente, a pele é um sistema complexo multicamada, constituído pela epiderme, derme e hipoderme, em que cada uma tem um comportamento mecânico específico e relacionado com a idade. As interfaces tecido-osso atuam como materiais com gradiente funcional, já que estão localizados entre dois tecidos extremamente diferentes através de uma região com milímetros de largura, e têm a capacidade de resistir a uma diferença significativa no comportamento mecânico graças de um gradiente de composição e estrutural [1].

Para averiguar as vantagens da utilização dos materiais com gradiente funcional, vários autores desenvolveram modelos através dos quais foram realizadas análises estáticas e em vibração livre, de modo a averiguar a influência dos parâmetros característicos do material no seu comportamento. Neste sentido, Chakraborty et al. [7] verificou que a presença de camadas FGM em vigas resulta num comportamento significativamente diferente de vigas constituídas por apenas um dos materiais de base, devido à combinação das propriedades dos mesmos. Em [8] foram estudadas as tensões e deformações nas interfaces das camadas de um componente sandwich, no qual foi verificado que a utilização de FGM permite uma redução da presença de tensões residuais, e desta forma, limita-se a ocorrência de delaminação e microfissuras nas interfaces. Em [9] foram estudadas vigas isotrópicas, ortotrópicas e com gradiente funcional, num caso em que a variação das propriedades do mesmo ocorre na espessura, o que permitiu constatar que as vigas FGM com diferentes índices para a lei de potência tem maior resistência a cargas distribuídas e a cargas concentradas relativamente a vigas isotrópicas e ortotrópicas para as diferentes condições de fronteira, com diferentes comprimentos, e que o aumento do índice da lei de potencia leva a uma maior resistência a diferentes carregamentos estáticos. Em [10] foi apresentado um modelo de otimização para a melhoria do desempenho de diferentes tipos de compósitos estruturais, tendo sido aplicado também o conceito de FGM nos modelos matemáticos, nos quais foram considerados vários cenários para a modelação da variação espacial das propriedades destes materiais. As estratégias de otimização propostas incluem a maximização de frequências naturais em vigas compósitas finas, otimização de eixos de transmissão contra a ocorrência de encurvadura por torção e instabilidade rotacional, e maximização da velocidade de voo crítica de asas subsónicas de aeronaves.

Em [11] verificou-se que em vigas com gradiente funcional a variar na espessura, a variação do módulo de elasticidade tem a maior influência nas distribuições de tensões e deslocamentos da viga, pelo que a escolha do expoente da lei de potência de forma adequada permite modelar as propriedades do material de modo a cumprir os requisitos relativos à minimização de tensões e deslocamentos em vigas. Em [12] foram analisadas as características de vibração livre e comportamento dinâmico de vigas com variação das propriedades em relação à espessura e à direção axial, com recurso ao método dos elementos finitos, e no qual foi verificado que a variação da distribuição do material ao longo da direção axial traduz-se na variação da rigidez da viga ao longo do seu comprimento, o que afeta as frequências e os respetivos modos de vibração, no entanto, os modos de vibração não são afetados pela variação de propriedades em espessura. Neste estudo, foi também averiguado que as frequências naturais aumentam com o aumento do expoente da lei de potencia quando a razão entre os módulos de elasticidade é inferior a 1, e diminuem no caso contrário.

Ao nível da investigação, existe bastante conteúdo relativamente ao estudo de vigas e placas em FGM, no entanto, esses estudos não têm sido muito aprofundados para estruturas 2D e 3D, razão pela qual o foco do presente trabalho é precisamente o estudo de estruturas 2D e 3D com gradiente funcional relativamente à coordenada vertical, com o intuito, numa primeira fase, de verificar o modelo de elementos finitos com base em bibliografia relativa a estudos de vigas isotrópicas e com gradiente funcional, de modo a, posteriormente, se apresentarem estudos de estruturas típicas 2D e 3D, como treliças e pórticos, com as respetivas análises estáticas e dinâmicas de vibração livre. Assim, verificando-se a importância de explorar a possibilidade de construção de estruturas com gradientes com direções distintas das estudadas na literatura existente, em [13] estudaram-se duas estruturas tipo treliça e dois pórticos planos, e através do qual se verificou que esta solução pode melhorar a resposta mecânica das estruturas, principalmente no que ao comportamento estático e em regime de vibração livre, e contribuir para a sua personalização para condições específicas de operação.

Este trabalho compreende ainda o projeto ótimo deste tipo de estruturas, recorrendo a duas técnicas meta-heurísticas de otimização recentemente publicadas – uma das técnicas baseada no princípio de Arquimedes (2020) e a outra tem por base o comportamento das Raposas Vermelhas na natureza (2021) –, com vista à maximização de frequências e à minimização de deslocamentos máximos em cada estrutura. Nesse sentido, em [14] foi apresentado um conjunto de casos ilustrativos de estruturas do tipo treliça e pórtico, quer no plano, quer no espaço, analisadas segundo os algoritmos supracitados, num modelo não restringido. Nesse estudo, foram consideradas duas possibilidades para cada material a aplicar no par metal-cerâmico do FGM, e no qual a fração volúmica pode caracterizar a distribuição de qualquer das fases. A partir desta

análise foi possível salientar a importância da utilização de algoritmos bio-inspirados para o estudo das melhores opções de projeto para uma dada estrutura construída em FGM, em função dos materiais que podem ser utilizados, possibilitando uma análise rápida sem a necessidade de efetuar extensos estudos paramétricos, além do interesse na adição de restrições, como por exemplo de massa, pois podem ditar a aplicabilidade ou não de determinado par de materiais, apesar de, em termos de resposta mecânica, ser a melhor opção.

## **1.4 Estrutura da Dissertação**

A presente dissertação é composta por 6 capítulos, de modo a abranger, de forma organizada, todo o trabalho desenvolvido e os conceitos associados. O presente capítulo introduz a temática abordada neste documento, e inclui a motivação e os objetivos que conduziram ao desenvolvimento deste trabalho. No capítulo 2 são apresentados os conceitos que sustentam o trabalho desenvolvido, nomeadamente os materiais compósitos com gradiente funcional, a teoria utilizada para a análise das estruturas, o método dos elementos finitos e as meta heurísticas utilizadas.

No capítulo 3 encontram-se descritas as aplicações desenvolvidas para otimização de estruturas FGM com 1 e com 4 variáveis de projeto. O capítulo 4 contém os estudos de verificação realizados, que permitem justificar a veracidade dos resultados a apresentar. No capítulo 5 apresentam-se os estudos paramétricos realizados a estruturas bidimensionais típicas, e os estudos de otimização executados em estruturas bidimensionais e tridimensionais. Por fim, no capítulo 6 expõem-se, de forma sucinta, as conclusões que os resultados do trabalho desenvolvido permitem registar, assim como propostas de trabalho futuro, que poderão dar continuidade ao tema apresentado. O documento contém ainda os apêndices A e B, de modo a complementar os estudos realizados nos subcapítulos 5.1 e 5.3. respetivamente, e os apêndices C e D, nos quais estão presentes o resumo da apresentação efetuada na conferência SYMCOMP 2023 e a primeira página do artigo de natureza científica publicado no *Journal of Composites*.

## 2 Tópicos Estruturantes

O presente capítulo contempla conceitos fundamentais ao desenvolvimento desta dissertação, relativamente não só à análise de estruturas construídas em material compósito com gradiente funcional, onde se incluem as características gerais deste tipo de material, a teoria utilizada para análise estática e dinâmica em regime de vibração livre e o método dos elementos finitos, mas também as meta heurísticas de otimização consideradas, que serão expostas sucintamente.

### 2.1 Materiais Compósitos com Gradiente Funcional

Os materiais compósitos são materiais constituídos por dois ou mais materiais, de propriedades físicas e químicas distintas, e através de cuja combinação, é possível obter um material com propriedades globalmente superiores relativamente aos seus constituintes individualmente, em que estes mantêm a sua individualidade [4]. Contrariamente às ligas metálicas, nos compósitos, cada constituinte mantêm as suas propriedades físicas, químicas e mecânicas, o que permite combinar características vantajosas, como elevada resistência mecânica, rigidez, tenacidade, resistência à corrosão, entre outras [4], [15].

Os compósitos combinam duas fases: a matriz, ou fase contínua, que tem função estrutural, e mantêm as fibras na orientação e posição correta, protegendo-as de ataques químicos ambientais, e o reforço, ou fase descontínua, normalmente caracterizado por uma maior resistência mecânica, rigidez e dureza. As propriedades efetivas do compósito são determinadas em função do tipo, quantidade e orientação das fibras [15].

Os compósitos podem classificar-se em dois grandes grupos: os compósitos laminados e os compósitos de partículas, nos quais se enquadram os materiais com gradiente funcional (FGMs), sendo estes últimos o foco do presente trabalho [4], [5]. Genericamente, a relação constitutiva para um material ortotrópico em que as direções de ortotropia poderão não coincidir com as direções do referencial cartesiano a utilizar, e considerando o efeito elástico, térmico e higroscópico, é definida através do sistema de equações [16]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} & 0 & 0 & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} & 0 & 0 & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{13} & \bar{Q}_{23} & \bar{Q}_{33} & 0 & 0 & \bar{Q}_{36} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{36} & 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} - \alpha_{T xx} \Delta T - \alpha_{C xx} \Delta c \\ \varepsilon_{yy} - \alpha_{T yy} \Delta T - \alpha_{C yy} \Delta c \\ \varepsilon_{zz} - \alpha_{T zz} \Delta T - \alpha_{C zz} \Delta c \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xy} - 2\alpha_{T xy} \Delta T - 2\alpha_{C xy} \Delta c \end{Bmatrix} \quad (2.1.1)$$

Os FGMs são materiais compósitos em que as frações volúmicas dos seus dois ou mais materiais constituintes variam continuamente em função de uma determinada coordenada espacial [10], [17]. O conceito surgiu no Japão em 1984, num projeto espacial, para aplicação como material de barreira térmica, capaz de suportar elevados gradientes de temperatura [3], [10], [18].

Uma solução para este tipo de condições de funcionamento é a combinação de material cerâmico, que tem bom comportamento a temperaturas elevadas, mas é mecanicamente frágil, com material metálico, caracterizado pela elevada ductilidade e boa condutividade térmica, mas não deve ser sujeito a temperaturas elevadas. Assim, a mesma estrutura pode ser maioritariamente cerâmica em zonas sujeitas a maiores temperaturas, e metálica nas zonas mais frias [19]–[21].

A vantagem da utilização dos FGMs é notada através da rigidez torsional maximizada em veios de transmissão, da distribuição de tensões residuais, propriedades térmicas aprimoradas, frequências naturais mais elevadas em vigas, e limites de estabilidade aeroelástica mais amplos em aeronaves, para referir apenas alguns aspetos em contexto de aplicações diversificadas [10].

Geralmente, a composição destes materiais varia entre uma superfície rica em material cerâmico para uma rica em material metálico, com uma determinada distribuição dos mesmos entre as duas superfícies, resultando numa variação contínua na microestrutura [17].

Esta variação contínua permite que as propriedades efetivas dos FGMs apresentem uma evolução gradual e contínua, o que permite contornar situações indesejáveis que ocorrem nas estruturas laminadas reforçadas por fibras devidas à anisotropia das mesmas, nomeadamente concentrações de tensões na vizinhança das descontinuidades materiais e geométricas e tensões residuais, que podem levar à ocorrência de danos sob a forma de delaminação, fissuras na matriz e separação da ligação adesiva [5], [22].

De referir que os FGMs, enquanto compósitos de partículas, possuem a particularidade de as suas propriedades serem consideradas isotrópicas ponto a ponto, razão pela qual, nestas condições, a relação constitutiva, desprezando os efeitos de gradientes de temperatura e de potenciais elétricos, e considerando a possibilidade de as propriedades do mesmo serem função de diferentes coordenadas espaciais, passa a poder escrever-se de acordo com[23], [24]:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}(x, y, z) & Q_{12}(x, y, z) & Q_{13}(x, y, z) & 0 & 0 & Q_{16}(x, y, z) \\ Q_{12}(x, y, z) & Q_{22}(x, y, z) & Q_{23}(x, y, z) & 0 & 0 & Q_{26}(x, y, z) \\ Q_{13}(x, y, z) & Q_{23}(x, y, z) & Q_{33}(x, y, z) & 0 & 0 & Q_{36}(x, y, z) \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44}(x, y, z) & Q_{45}(x, y, z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{45}(x, y, z) & Q_{55}(x, y, z) & 0 \\ Q_{16}(x, y, z) & Q_{26}(x, y, z) & Q_{36}(x, y, z) & 0 & 0 & Q_{66}(x, y, z) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (2.1.2)$$

Quando são conhecidas as condições de funcionamento de uma determinada estrutura, é possível combinar as melhores propriedades de diferentes materiais e ajustar os parâmetros que controlam a distribuição dos constituintes ao longo da mesma, otimizando-se as propriedades do material em função das necessidades [5], [22].

As propriedades efetivas dos FGMs são estimadas a partir das propriedades dos seus constituintes, assim como das respectivas frações volúmicas, e existem vários modelos, destacando-se os mais frequentemente utilizados: Regra das Misturas e Método de Mori-Tanaka [5]. A propriedade genérica  $P$  do compósito segundo a Regra de Misturas de um FGM bifásico é estimada através da expressão [24]:

$$P(z) = P_A V_f + P_B (1 - V_f) \quad (2.1.3)$$

Os termos  $P_A$  e  $P_B$  correspondem às propriedades dos materiais da superfície superior e inferior da estrutura, respetivamente, e por sua vez,  $V_f$  e  $(1-V_f)$  correspondem às frações volúmicas desses materiais. A soma das frações volúmicas deve ser unitária no caso de FGM bifásicos, considerando o pressuposto de ausência de porosidades.

As expressões aplicáveis podem corresponder à variação da distribuição de material apenas numa direção, ou multidirecionais. Por exemplo, no caso de uma estrutura em que a distribuição de material ocorre apenas ao longo da espessura, é frequente a utilização da expressão:

$$V_f = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^{ez} \quad (2.1.4)$$

Em que  $h$  corresponde à espessura da placa FGM,  $z$  é a coordenada em espessura que varia entre  $-h/2$  e  $h/2$ , e  $ez$  é um parâmetro que toma valores reais positivos e define o perfil de variação das propriedades ao longo da espessura. A Figura 2.1.1 representa um componente FGM com variação das propriedades em espessura.

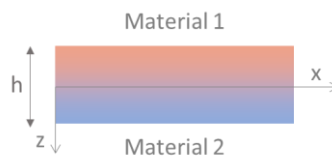


Figura 2.1.1 - Representação Esquemática de Componente FGM com variação de Propriedades em Espessura

No caso, por exemplo, de uma barra ou uma viga FGM com variação da mistura de material na direção longitudinal, uma expressão que poderá caracterizar a fração volúmica de determinado material pode ser:

$$V_f = \left(\frac{x}{L}\right)^{ex} \quad (2.1.5)$$

Em que  $L$  corresponde ao comprimento da barra ou viga,  $x$  é a coordenada longitudinal que varia entre 0 e  $L$ , e  $ex$  define o perfil de variação das propriedades ao longo do comprimento dessa estrutura. A Figura 2.1.2 representa um componente FGM com variação de propriedades em comprimento.

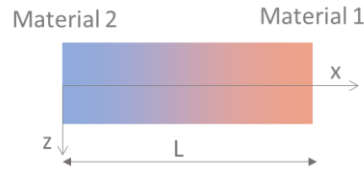


Figura 2.1.2 - Representação Esquemática de Componente FGM com variação de Propriedades em Comprimento

A abordagem seguida no presente trabalho consiste na modelação de estruturas bidimensionais e tridimensionais, em que a variação da distribuição de determinado material ocorre segundo a coordenada vertical da estrutura – treliça ou pórtico – para as quais foram definidas expressões adequadas a cada caso, em função da respetiva altura máxima. A Figura 2.1.3 representa um pórtico simples com variação de propriedades em função da coordenada vertical.

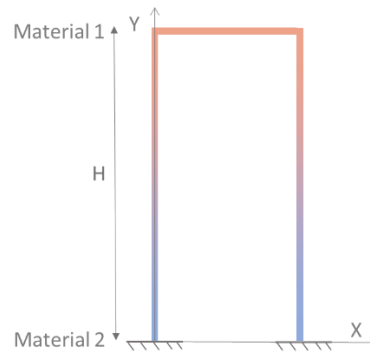


Figura 2.1.3 - Representação Esquemática de Estrutura Construída em FGM com variação de Propriedades em Função da Altura da Estrutura

Assim, apresentando, por exemplo, a primeira estrutura estudada, a expressão da fração volúmica toma a forma:

$$V_f = \left(\frac{Y}{H}\right)^{e_y} \quad (2.1.6)$$

Neste caso, H corresponde à altura máxima da estrutura, Y é a coordenada vertical que varia entre 0 e H, e  $e_y$  caracteriza o perfil de variação de propriedades ao longo da coordenada vertical. Estas expressões podem ser adaptadas, como já referido, a qualquer estrutura e ao referencial considerado, desde que sejam cumpridas as frações volúmicas características das extremidades, nomeadamente  $V_f$  nulo para uma das extremidades, e  $V_f$  unitário para a outra extremidade. Para uma situação em que a origem do referencial não coincida com a extremidade inferior esquerda da estrutura, seja  $Y_0$  a ordenada dessa extremidade, e H a altura máxima da estrutura, a expressão da fração volúmica pode ser escrita da forma:

$$V_f = \left(\frac{Y - Y_0}{H}\right)^{e_y} \quad (2.1.7)$$

Recordando a expressão que caracteriza o cálculo de uma propriedade genérica P do FGM, podem, a partir dessas propriedades, calcular-se os coeficientes de rigidez elástica, que permitem o cálculo de tensões. Os coeficientes de rigidez elástica de um FGM unidirecional (viga-barra), em que  $E_{FGM}$  e  $\nu_{FGM}$  correspondem, respetivamente, ao módulo de elasticidade e ao coeficiente de Poisson do FGM, são [23]:

$$Q_{11} = E_{FGM} \quad (2.1.8)$$

$$Q_{55} = \frac{E_{FGM}}{2(1 + \nu_{FGM})} k$$

Assim, as tensões envolvidas podem calcular-se através de:

$$\sigma_x = Q_{11} \cdot \varepsilon_x \quad (2.1.9)$$

$$\sigma_{xz} = Q_{55} \cdot \gamma_{xz}$$

## 2.2 Teoria de Deformação de Corte de 1ª Ordem

O estudo de estruturas, numa fase de projeto, implica o cálculo de deslocamentos, reações de apoios, componentes de tensão, frequências naturais, entre outros, para prever o seu comportamento, de forma a definir parâmetros que permitam satisfazer as necessidades. Para isso, devem utilizar-se teorias que permitam prever o comportamento da estruturas da forma mais aproximada possível ao real, de modo a prevenir falhas nas estruturas [25], [26].

A análise de estruturas compósitas pode ser realizada através de diferentes abordagens. As mais comumente utilizadas correspondem às teorias de camada única equivalente – com frequência a teoria clássica de placas laminadas e as teorias de deformação de corte – em que o conjunto das N camadas é sujeito a um processo de homogeneização, permitindo simplificar a abordagem de um problema multicamada 3D para uma situação de uma camada única com características materiais homogeneizadas, equivalentes, que podem ser analisados com um problema de camada única reduzido a um problema 2D. Na teoria clássica de placas é considerado um estado de tensão plana, ou seja, as tensões normal e de corte transversais são nulas, visto que a maioria das estruturas apresentam relações de aspeto muito elevadas (estruturas finas) [24].

No caso de estruturas constituídas genericamente por vigas, temos uma situação ainda mais simples, podendo as mesmas ser analisadas como problemas unidimensionais. A referida teoria, quando aplicada a vigas, é conhecida como a teoria de vigas de Euler-Bernoulli. No caso da teoria de deformação de corte de primeira ordem, quando aplicada a vigas é conhecida por teoria de vigas de Timoshenko, sendo que neste caso as tensões de corte transversais não são nulas [24].

A teoria de Euler-Bernoulli ignora o efeito das deformações de corte, o que, no caso dos compósitos, não pode ser desprezado, devido às diferenças entre as propriedades dos seus constituintes. Por isso, foi utilizada a teoria de vigas de Timoshenko, na qual as deformações de corte não são desprezadas, sendo, no entanto, consideradas constantes ao longo da espessura. Em [24] recorda-se que, pela teoria elementar de vigas homogéneas, a tensão de corte transversal apresenta uma variação parabólica ao longo da espessura, pelo que, em vigas ou placas em material compósito, esta variação é, no mínimo, quadrática ao longo da espessura. Assim, a discrepância entre a situação real e a consideração da teoria de Timoshenko implica uma correção das forças resultantes das tensões de corte transversais (esforços transversos), através da introdução do fator de correção de corte  $k$ . Para vigas em flexão no plano  $xz$ , o esforço transversal existente é dado pela expressão [25]:

$$Q_x = k \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xz} dz \quad (2.2.1)$$

Este fator  $k$  assume valores que permitem obter uma energia de deformação proveniente das tensões de corte transversais calculada similar à energia de deformação real, que é prevista na teoria de elasticidade tridimensional. Neste caso, e para secções transversais retangulares e material isotrópico e homogéneo, toma o valor de  $5/6$  [24].

### 2.2.1 Leis Constitutivas no Plano

As equações que correspondem ao campo de deslocamentos da teoria de deformação de corte de primeira ordem para uma estrutura unidirecional com comportamento de viga-barra, no plano  $xz$ , apresentam-se da forma [24]:

$$u(x, y, z, t) = u^0(x, y, t) + z \theta_y^0(x, y, t) \quad (2.2.2)$$

$$w(x, y, z, t) = w^0(x, y, t)$$

A Figura 2.2.1 representa esquematicamente o elemento viga-barra unidimensional quadrático no plano, e os graus de liberdade associados a cada nó.

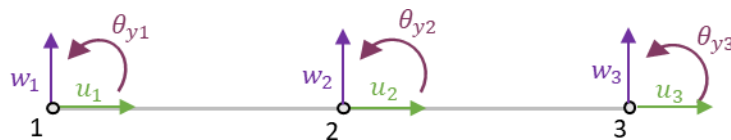


Figura 2.2.1 - Elemento Viga-Barra Unidimensional Quadrático no Plano, e respetivos Graus de Liberdade

Os termos  $u^0$  e  $w^0$  correspondem, respetivamente, aos deslocamentos longitudinais e transversais do plano médio da estrutura. O termo  $\theta_y^0$  corresponde à rotação do plano médio da viga relativamente à direção perpendicular ao plano  $xz$ . A partir destas equações é possível conhecer os deslocamentos em qualquer ponto da viga-barra FGM.

O campo de deformações correspondente pode definir-se através das expressões:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u^0}{\partial x} + z \frac{\partial \theta_y^0}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{zz} = 0$$
(2.2.3)

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w^0}{\partial x} + \theta_y^0$$

Os coeficientes de rigidez elástica do elemento, pela FSDT, são também distinguidos entre a rigidez da membrana-flexão e quanto ao corte, correspondendo a:

$$Q_{mb} = Q_{11}$$
(2.2.4)

$$Q_s = Q_{55}$$
(2.2.5)

## 2.2.2 Leis Constitutivas no Espaço

As equações que correspondem ao campo de deslocamentos da teoria de deformação de corte de primeira ordem para uma estrutura unidirecional com comportamento de viga-barra, admitindo agora uma orientação arbitrária no espaço 3D, e portanto, considerando flexão nos dois planos xz e xy, bem como torção do elemento, apresentam-se da forma [27]–[31] :

$$u(x, y, z, t) = u^0(x, y, t) + z \theta_y^0(x, y, t) - y \theta_z^0(x, y, t)$$

$$v(x, y, z, t) = v^0(x, y, t) - z \theta_x^0(x, y, t)$$
(2.2.6)

$$w(x, y, z, t) = w^0(x, y, t) + y \theta_x^0(x, y, t)$$

A Figura 2.2.2 representa esquematicamente o elemento viga-barra unidimensional quadrático no espaço, e os graus de liberdade associados a cada nó.

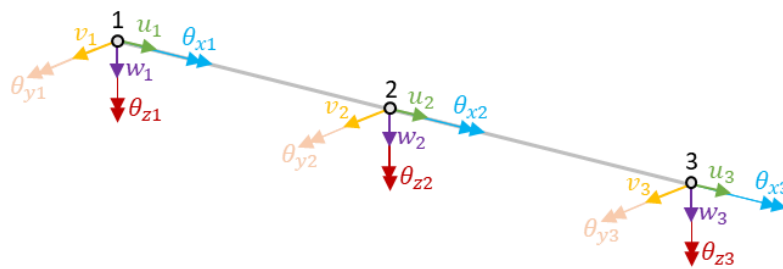


Figura 2.2.2 – Elemento Viga-Barra Unidimensional Quadrático no Espaço, e respetivos Graus de Liberdade (Adaptado de [28])

Os termos  $u^0, v^0$  e  $w^0$  correspondem, respetivamente, aos deslocamentos longitudinal e transversais do plano médio da estrutura segundo os planos xz e xy,  $\theta_x^0$  corresponde ao ângulo de torção,  $\theta_y^0$  e  $\theta_z^0$  correspondem à rotação do plano médio da viga relativamente à direção perpendicular ao plano xz e plano xy, respetivamente. A partir destas equações é possível conhecer os deslocamentos em qualquer ponto da viga-barra FGM.

O campo de deformações correspondente pode definir-se através das expressões:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u^0}{\partial x} + z \frac{\partial \theta_y^0}{\partial x} - y \frac{\partial \theta_z^0}{\partial x} \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial v^0}{\partial x} - z \frac{\partial \theta_x^0}{\partial x} - \theta_y^0 \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{\partial w^0}{\partial x} + y \frac{\partial \theta_x^0}{\partial x} + \theta_z^0\end{aligned}\quad (2.2.7)$$

Quanto se trata de uma estrutura no espaço, há que considerar a componente de torção. O ângulo de torção em secções transversais não circulares, nomeadamente retangulares, pode calcular-se com recurso à expressão [32]:

$$\theta_x = \frac{M_t L}{k_2 h b^3 G} \quad (2.2.8)$$

Na Tabela 2.2.1 são apresentados os valores do coeficiente  $k_2$  para diferentes relações entre a altura e a largura da secção retangular sujeita a torção.

Tabela 2.2.1 - Coeficientes  $k_2$  para Secções Retangulares em Torção (Adaptado de [32])

<b>h/b</b>	<b>1,0</b>	<b>1,5</b>	<b>1,75</b>	<b>2,0</b>	<b>2,5</b>	<b>3,0</b>	<b>4,0</b>	<b>6,0</b>	<b>8,0</b>	<b>10,0</b>	$\infty$
<b><math>k_2</math></b>	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333

Concretamente, para secções quadradas de lado  $a$ , como é o caso de verificação estudado, o ângulo de torção calcula-se através da expressão:

$$\theta_x = \frac{7,1 M_t L}{a^4 G} \quad (2.2.9)$$

Os coeficientes de rigidez elástica de um FGM (viga-barra) são:

$$\begin{aligned}Q_{11} &= E_{FGM} \\ Q_{44} = Q_{55} &= \frac{E_{FGM}}{2(1 + \nu_{FGM})} k \\ Q_{66} &= \frac{E_{FGM}}{2(1 + \nu_{FGM})}\end{aligned}\quad (2.2.10)$$

Assim, as tensões envolvidas podem calcular-se através de:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= Q_{11} \cdot \varepsilon_x \\ \sigma_{yz} &= Q_{44} \cdot \gamma_{yz} \\ \sigma_{xz} &= Q_{55} \cdot \gamma_{xz} \\ \sigma_{xy} &= Q_{66} \cdot \gamma_{xy}\end{aligned}\quad (2.2.11)$$

Os coeficientes de rigidez elástica do elemento, pela FSDT, são também distinguidos entre a rigidez da membrana-flexão, quanto ao corte e ainda à torção, correspondendo a:

$$Q_{mb} = Q_{11} \quad (2.2.12)$$

$$Q_s = Q_{66} = Q_{55} \quad (2.2.13)$$

$$Q_t = Q_{66} \quad (2.2.14)$$

### 2.3 Princípio da Energia Potencial Mínima e Princípio de Hamilton

Os princípios e teoremas baseados na energia armazenada e o trabalho realizado num sistema permitem derivar as equações que regem um determinado sistema. O princípio da energia potencial (total) mínima permite a obtenção das equações de equilíbrio de um sistema em termos de deslocamentos, contrariamente ao princípio dos deslocamentos virtuais, que caracterizam as equações de equilíbrio em termos de tensões ou tensão resultante. Com este princípio, através de leis constitutivas e relações cinemáticas, é possível definir as tensões em termos de deslocamentos. No entanto, o mesmo é limitado ao equilíbrio estático dos sólidos. Para a análise dinâmica de um sistema (resposta dependente do tempo), o princípio dos deslocamentos virtuais sofreu uma generalização – o princípio de Hamilton – no qual é assumido que o sistema é caracterizado por duas energias: a energia cinética  $T$  e a energia potencial  $\Pi$  [33].

A segunda lei de Newton para um corpo contínuo pode escrever-se genericamente, através da expressão (2.6.1), em que  $m$  é a massa do corpo,  $a$  é o vetor aceleração, e  $F$  é a resultante de todas as forças que atuam no corpo:

$$F - ma = 0 \quad (2.3.1)$$

A trajetória real  $u = u(x, t)$  de uma partícula material varia desde a posição  $x$ , consistentemente com as condições de fronteira cinemáticas, até  $u + \delta u$ , em que  $\delta u$  é um deslocamento virtual da trajetória, e supõe-se que a trajetória variável é diferente da trajetória real exceto nas condições inicial e final,  $t_1$  e  $t_2$ , respetivamente.

$$\delta u(x, t_1) = \delta u(x, t_2) = 0, \forall x \quad (2.3.2)$$

O trabalho realizado pela força inercial  $ma$  em termos de deslocamentos virtuais é dado pela expressão (2.6.3), em que  $\rho$  é a massa volúmica (que pode ser função da posição):

$$\int_V \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdot \delta u \, dV \quad (2.3.3)$$

Daqui resulta:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_V \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdot \delta u \, dV - \left[ \int_V (f \cdot \delta u - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}) \, dV + \oint_{\Gamma} t \cdot \delta u \, d\Gamma \right] \right\} dt = 0 \quad (2.3.4)$$

Ou

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_V \rho \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial \delta u}{\partial t} dV - \left[ \int_V (f \cdot \delta u - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}) dV + \oint_{\Gamma} t \cdot \delta u d\Gamma \right] \right\} dt = 0 \quad (2.3.5)$$

Manipulando as equações já apresentadas, tem-se o princípio de Hamilton:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} [T - (V_E + U)] dt = 0 \quad (2.3.6)$$

Em que  $T$ ,  $V_E$  e  $U$  correspondem à energia cinética, trabalho das forças externas e energia elástica de deformação, respetivamente:

$$T = \int_V \frac{\rho}{2} \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} dV \quad (2.3.7)$$

$$V_E = \int_V f \cdot u dV + \oint_{\Gamma} t \cdot u d\Gamma \quad (2.3.8)$$

$$U = \int_V U_0 dV = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} dV \quad (2.3.9)$$

O somatório da energia elástica de deformação e do trabalho das forças externas corresponde à energia potencial total do sistema  $\Pi$ , em que a energia de deformação elástica advém do desenvolvimento interno de forças devido à aplicação de cargas externas no corpo, e o trabalho das forças externas é caracterizado pelo somatório entre o trabalho realizado por uma força externa em todas as partículas do corpo com volume  $V$  e o trabalho realizado sobre todas as partículas da superfície do corpo. A densidade de energia de deformação elástica  $U_0$  é função das deformações num ponto e é assumida como positiva, e o trabalho das forças externas assume valor negativo pois representa o trabalho despendido no corpo, em oposição ao trabalho armazenado no corpo.

A diferença entre a energia cinética e a energia potencial total é conhecida pelo funcional Lagrangeano. O princípio de Hamilton diz-nos que o movimento de uma partícula solicitada por forças conservativas entre dois instantes de tempo arbitrários é tal que o integral de linha do funcional Lagrangeano é um extremo da trajetória do momento da partícula, ou seja, de todas as trajetórias possíveis que a partícula pode percorrer desde a posição em  $t_1$  até  $t_2$ , a trajetória efetiva é tal que o integral  $I$ , em (2.3.10), é um extremo. Quando as forças atuantes são não conservativas, o integral  $I$  não existe [34].

$$I \equiv \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad (2.3.10)$$

Para a derivação das equações do movimento, utiliza-se o princípio de Hamilton, em que  $\delta L$  corresponde à primeira variação do funcional Lagrangeano, tal que:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = 0 \quad (2.3.11)$$

Após a substituição das expressões que caracterizam os deslocamentos generalizados na equação, obtêm-se as equações do elemento:

$$[M^e]\{\ddot{\Delta}^e\} + [K^e]\{\Delta^e\} = \{F^e\} \quad (2.3.12)$$

Para análise estática, o termo inercial  $\ddot{\Delta}$  é nulo, o que significa que a energia cinética não é considerada, e o princípio de Hamilton é transformado no princípio da energia potencial mínima, pelo que  $\delta\Pi \equiv \delta(U + V_E) = 0$ . Assim, as equações do elemento são escritas da forma:

$$[K^e]\{\Delta^e\} = \{F^e\} \quad (2.3.13)$$

No caso da análise de problemas de vibração livre,  $\{\ddot{\Delta}\} = -\omega^2\{\Delta\}$ , e assim, tem-se um problema de valores e vetores próprios, e através dos quais se obtêm as frequências naturais e respetivos modos de vibração de uma estrutura.

$$([K^e] - \omega^2[M^e])\{\Delta^e\} = \{0\} \quad (2.3.14)$$

## 2.4 Método dos Elementos Finitos

A complexidade associada à previsão do comportamento de componentes devida a diversos fatores, nomeadamente a nível de geometria, materiais, condições de fronteira e condições de funcionamento, leva à utilização de métodos de aproximação numérica [35]. Estes métodos utilizam modelos variacionais que, quando aplicados às equações que descrevem o problema, permitem formulá-lo integralmente.

O método dos elementos finitos é frequentemente utilizado para o estudo de estruturas, devido às vantagens que a sua utilização apresenta face a outros métodos variacionais tradicionais, fornecendo um procedimento sistemático para derivar as funções de aproximação em sub-regiões do domínio em estudo. Com este método, é possível representar um domínio geometricamente complexo num conjunto de subdomínios de geometria simples – os elementos finitos –, sobre os quais são derivadas funções de aproximação, de maneira a representar-se uma função contínua sob a forma de uma combinação linear de polinómios algébricos. Assim, e através da imposição das condições que governam o sistema, obtêm-se as relações algébricas entre coeficientes indeterminados (valores nodais).

A divisão de um domínio em subdomínios permite obter uma solução aproximada para o problema, sendo possível representar de forma precisa, geometrias complexas, e incluir materiais diferentes, além de permitir representar soluções dentro de cada elemento, possibilitando a verificação de efeitos locais [16].

Resumidamente, o método dos elementos finitos pode ser descrito em etapas:

1. Discretização do domínio em elementos finitos pré-selecionados, a que corresponde à criação de malha, no qual é definido o tipo de elemento finito a implementar, a quantidade de elementos e de nós, e as propriedades geométricas, onde se incluem as coordenadas dos nós e as matrizes de conectividades.
2. Derivação das relações algébricas entre as variáveis primárias e secundárias do problema, na qual se assume uma variável dependente típica para cada elemento sob a forma  $u(x) \approx u_h^e(x) = \sum_{j=1}^n u_j^e \varphi_j^e(x)$  para obter equações do elemento na forma  $K^e u^e = F^e$ , por exemplo, no contexto de uma análise estática linear.
3. Montagem das equações dos elementos de forma a representar o problema completo, através das condições de continuidade entre os elementos, definidas através das matrizes de conectividades que permitem relacionar os nós locais com os nós globais, e consequentemente, relacionar os graus de liberdade locais com os globais. O mesmo procedimento é realizado relativamente às variáveis secundárias, definindo-se as forças aplicadas globalmente com base na localização das forças aplicadas nos elementos.
4. Imposição das condições de fronteira, através da identificação dos graus de liberdade restringidos pelas condições de fronteira, e das forças exteriores aplicadas.
5. Resolução do sistema de equações e processamento de resultados [35].

### 2.4.1 Integração Numérica

A integração numérica, em concreto de funções integrandas de natureza polinomial, permite aproximar o resultado do que seria a integração analítica dessa função, usando para o efeito um polinómio de grau suficiente, já que a integração de um polinómio pode ser determinada de forma exata. Estas integrações são escritas em função das coordenadas do problema. Considerando o integral:

$$I = \int_{x_a}^{x_b} F(x) dx \quad (2.4.1)$$

A função  $F(x)$  pode ser aproximada pelo polinómio:

$$F(x) \approx \sum_{l=1}^N F_l \varphi_l(x) \quad (2.4.2)$$

Em que  $F_l$  correspondem aos valores de  $F(x)$  no  $l^o$  ponto do intervalo  $[x_a, x_b]$ , e  $\varphi_l(x)$  são os polinómios de grau  $N - 1$ . Tendo por base as teorias anteriormente expostas, a situação mais comum é que estes polinómios sejam de *Lagrange* ou de *Hermite*. A substituição de (2.4.2) em (2.4.1) permite obter a fórmula geral da quadratura numérica, que tem a forma:

$$I = \int_{x_a}^{x_b} F(x) dx \approx \sum_{l=1}^r F(x_l)W_l \quad (2.4.3)$$

Em que  $x_l$  correspondem aos pontos de quadratura, e  $W_l$  são os respectivos pesos de cada ponto de quadratura, e produzem valores exatos do integral I sempre que  $F(x)$  é um polinómio de grau  $r-1$ .

A Quadratura de Gauss-Legendre é o método de integração numérica mais utilizado, já que requer menos pontos base para a mesma precisão quando comparado com a Quadratura de Newton-Côtes, por exemplo, e é representada pela expressão:

$$\int_a^b F(x) dx = \int_{-1}^1 \hat{F}(\xi) d\xi \approx \sum_{l=1}^r \hat{F}(\xi_l)w_l \quad (2.4.4)$$

Este método requer a transformação dos limites de integração, de forma que a integração ocorra entre  $[-1,1]$ . Para isso, é necessário transformar as coordenadas do problema ( $x$ ) em coordenadas locais ( $\xi$ ), tal que:

$$f(\xi) = x_A + \frac{1}{2}h_e(1 + \xi) \quad (2.4.5)$$

A Figura 2.4.1 representa esquematicamente um elemento unidimensional quadrático no referencial da estrutura, do elemento e no referencial de coordenadas naturais.

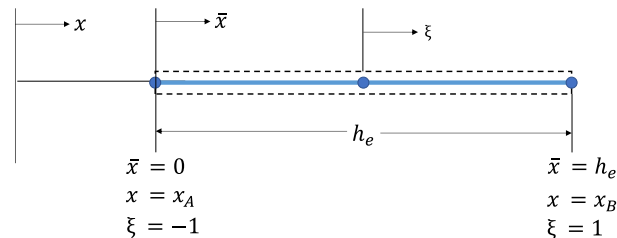


Figura 2.4.1 – Elemento Unidimensional Quadrático, e respectivas coordenadas no referencial da estrutura, do elemento, e no de coordenadas naturais

Em que  $x_A$  corresponde à coordenada global do nó esquerdo do elemento, e  $h_e$  é o comprimento do elemento. A coordenada  $\xi$  é denominada coordenada natural ou normal, e varia sempre entre  $-1$  e  $1$ .  $\hat{F}$  corresponde à função integranda transformada pela mudança de coordenadas, através de (2.4.6), em que  $J$  é o Jacobiano da transformação de  $x$  para  $\xi$ , que no caso de vigas, toma o valor  $h_e/2$ .

$$\hat{F}(\xi) = F(x(\xi)) J(\xi) \quad (2.4.6)$$

## 2.4.2 Equações do Elemento

O elemento utilizado nos estudos efetuados no presente trabalho foi o elemento quadrático Lagrangeano, que, através da utilização de funções de aproximação de grau 2, permite uma

melhor modelação quer da geometria, quer da resposta do elemento, quando comparado com elementos lineares. Assim, o elemento adotado apresenta 3 nós e está representado na Figura 2.4.2, em que o elemento é representado no referencial do elemento em coordenadas cartesianas.

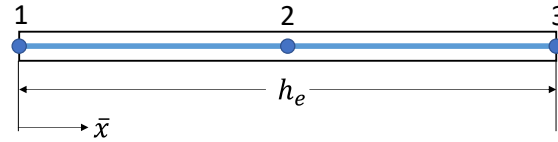


Figura 2.4.2 - Elemento Unidimensional Quadrático no Referencial do Elemento

O elemento quadrático de Lagrange é definido pelas funções de aproximação, também designadas de funções de interpolação ou funções de forma [16]:

$$\begin{aligned}\varphi_1^e(\bar{x}) &= \left(1 - \frac{\bar{x}}{h}\right) \left(1 - \frac{2\bar{x}}{h}\right) \\ \varphi_2^e(\bar{x}) &= 4 \frac{\bar{x}}{h} \left(1 - \frac{\bar{x}}{h}\right) \\ \varphi_3^e(\bar{x}) &= -\frac{\bar{x}}{h} \left(1 - \frac{2\bar{x}}{h}\right)\end{aligned}\tag{2.4.7}$$

Em coordenadas naturais, as funções de interpolação do elemento são:

$$\begin{aligned}\varphi_1(\xi) &= \frac{1}{2} \xi (\xi - 1) \\ \varphi_2(\xi) &= (1 - \xi^2) \\ \varphi_3(\xi) &= \frac{1}{2} \xi (1 + \xi)\end{aligned}\tag{2.4.8}$$

A Figura 2.4.3 representa o elemento unidimensional quadrático no referencial do elemento em coordenadas naturais.

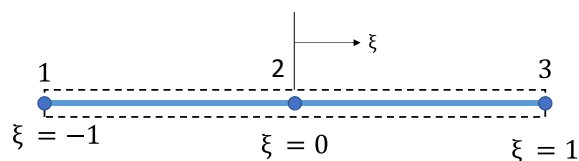


Figura 2.4.3 - Elemento Unidimensional Quadrático no Referencial de Coordenadas Naturais

A Figura 2.4.4 apresenta a evolução das funções de forma que caracterizam o elemento unidimensional quadrático no referencial de coordenadas naturais.

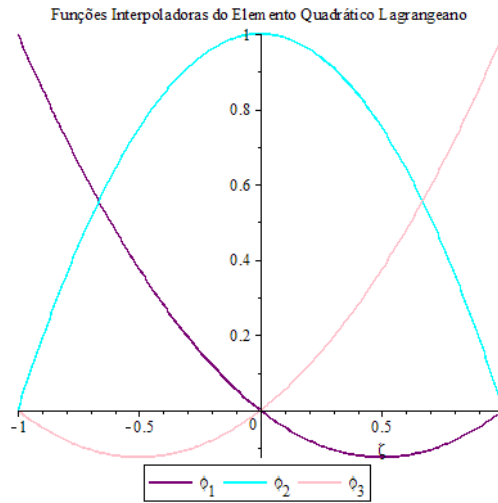


Figura 2.4.4 – Evolução das Funções de Forma no Referencial de Coordenadas Naturais no Elemento Unidimensional Quadrático

### 2.4.3 Matrizes de Rigidez e de Massa

A matriz de rigidez genérica de um elemento a que se refere a equação (2.3.12), definida pelo integral de volume (2.4.9), em que  $Q$  corresponde à matriz dos coeficientes de rigidez elástica reduzidos, e  $B$  é a matriz que relaciona deformações com deslocamentos, resultando, portanto, da derivação do vetor de funções de forma, tendo em consideração as deformações existentes e a forma como qualquer grau de liberdade é aproximado, é obtida através de [34]:

$$K^e = \iiint B^T Q B dV \quad (2.4.9)$$

Por outro lado, lembrando a expressão que caracteriza o equilíbrio estático do sistema, o vetor de forças distribuídas ao longo de uma linha pode definir-se através de:

$$F^e = \int N_s^T f dL \quad (2.4.10)$$

Considerando a utilização da FSDT, a matriz de rigidez do elemento é obtida pela soma da matriz de rigidez de membrana-flexão e da matriz de rigidez ao corte transversal. A formulação dessas matrizes é realizada em separado, sendo, para isso, utilizadas as matrizes que relacionam, respetivamente, as deformações de membrana e as deformações de corte transversal,  $B_{mb}$  e  $B_s$ , com os deslocamentos. Assim, estas matrizes são obtidas considerando o vetor das funções de forma apresentadas em (2.4.8):

$$N_s = \left[ \frac{1}{2} \xi (\xi - 1) \quad (1 - \xi^2) \quad \frac{1}{2} \xi (1 + \xi) \right] \quad (2.4.11)$$

No caso da análise do elemento viga-barra no plano, as matrizes  $B_m$  e  $B_s$ , para cada nó  $k$  do elemento, tomam a forma:

$$B_{mb} = \left[ \frac{dN_s}{dx} \quad 0 \quad z \cdot \frac{dN_s}{dx} \right]_k, k = 1..3 \quad (2.4.12)$$

$$B_s = \left[ 0 \quad \frac{dN_s}{dx} \quad N_s \right]_k, k = 1..3 \quad (2.4.13)$$

No caso da análise do elemento viga-barra no espaço, os vetores  $B_m$ ,  $B_s$  e  $B_t$  tomam a forma:

$$B_{mb} = \left[ \frac{dN_s}{dx} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad z \cdot \frac{dN_s}{dx} \quad -y \cdot \frac{dN_s}{dx} \right]_k, k = 1..3 \quad (2.4.14)$$

$$B_s = \left[ \begin{array}{cccccc} 0 & \frac{dN_s}{dx} & 0 & -z \frac{dN_s}{dx} & 0 & -N_s \\ 0 & 0 & \frac{dN_s}{dx} & y \frac{dN_s}{dx} & N_s & 0 \end{array} \right]_k, k = 1..3 \quad (2.4.15)$$

$$B_t = \left[ 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{dN_s}{dx} \quad 0 \quad 0 \right]_k, k = 1..3 \quad (2.4.16)$$

A matriz de massas será construída através do integral [25]:

$$M^e = \iiint N_m^T \rho N_m dV \quad (2.4.17)$$

Em que  $N_m$  corresponde à matriz que compreende as funções de interpolação que descrevem os deslocamentos do campo considerado e que deste modo irá incluir as componentes inerciais translacionais e rotacionais, respetivamente, para a obtenção da matriz de massas completa para uma análise bidimensional [35]:

$$N_m = \left[ \begin{array}{ccc} N_s & 0 & z \cdot N_s \\ 0 & N_s & 0 \end{array} \right] \quad (2.4.18)$$

No caso da análise no espaço 3D, a matriz  $N_m$  reflete o campo de deslocamentos para este caso, tomando a forma:

$$N_m = \left[ \begin{array}{cccccc} N_s & 0 & 0 & 0 & 0 & z \cdot N_s \\ 0 & N_s & 0 & -z \cdot N_s & 0 & -N_s \\ 0 & 0 & N_s & y \cdot N_s & S & 0 \end{array} \right] \quad (2.4.19)$$

#### 2.4.4 Efeito de Bloqueio ao Corte (Shear Locking)

Para estruturas com relações de aspeto  $L/h \geq 50$ , as deformações de corte transversal são desprezáveis, no entanto, os elementos cuja formulação é baseada na teoria de deformação de corte de primeira ordem, em conjunto com uma interpolação igual e de baixo grau (quadrático ou menor) para  $w$  e  $\theta_y$ , tornam-se excessivamente rígidos, devido à incapacidade de o modelo numérico respeitar a condição  $\theta_y + \frac{\partial w}{\partial x} = 0$  [33], [36].

Para evitar a rigidificação do elemento, e relembrando o campo de deformações definido em (2.2.3), a deformação de corte transversal é aproximada a uma constante através da utilização da integração reduzida dos coeficientes de rigidez de corte, enquanto se utiliza graus de interpolação iguais para  $w$  e  $\theta_y$ . No entanto, um estado constante de  $\theta_y$  implicaria que a energia de deformação devida à flexão fosse nula, no entanto, o elemento não tem mecanismos para derivar, em limite de viga fina, para o elemento de viga de Euler-Bernoulli, ou seja,  $\theta_y^e \rightarrow -\frac{dw_h^e}{dx}$  [35].

$$\int_{x_a}^{x_b} \frac{EI}{2} \left( \frac{d\theta_y}{dx} \right)^2 dx \quad (2.4.20)$$

Para isso, os termos correspondentes ao corte transversal da matriz de rigidez devem ser construídos utilizando uma regra de integração que trate  $\theta_y$  como um polinómio da mesma ordem que  $\frac{\partial w}{\partial x}$  [36].

Assim, tendo por base os polinómios que caracterizam as funções de forma do elemento quadrático, foi verificado que o maior grau entre os polinómios que resultam da multiplicação da matriz  $Q_s$  com o vetor constituído pelas funções de forma do elemento é 4, e recorrendo à expressão consultada em [16] que permite calcular o número de coeficientes de ponderação necessários para a integração exata, pela Quadratura de Newton-Cotes, em função do grau do polinómio  $p$ .

$$n = \frac{1}{2} (p + 1) \quad (2.4.21)$$

Por exemplo, para um polinómio de grau 4 ( $p=4$ ), utilizar-se-iam 3 pontos base e os correspondentes coeficientes de ponderação para a integração exata dos polinómios, no entanto, atendendo a que é utilizada a integração reduzida, o número de pontos a utilizar é 2, ou seja, número de coeficientes de ponderação a utilizar é dado por  $r = n - 1$ .

A formulação da matriz de rigidez do elemento quadrático resulta, como já referido no subcapítulo 2.4.3, da junção das matrizes de rigidez de membrana-flexão e de corte transversal em separado. Com a aplicação do método dos elementos finitos, quando é realizada a multiplicação das matrizes (2.4.12) e (2.4.13) com as respetivas matrizes de coeficientes de rigidez elástica reduzidos (2.2.5), correspondentes à componente de membrana-flexão e de corte, obtém-se matrizes em função da coordenada natural  $\xi$  e da coordenada  $z$ . Avaliando cada matriz relativamente ao termo de grau mais elevado, numa situação em que se considera material isotrópico ( $V_f = 1$ ), verifica-se que, no caso da rigidez de membrana-flexão, o termo de maior grau tem  $p = 2$ , e nos termos de rigidez ao corte transversal tem-se  $p = 4$ . Desta forma, e como já referido no exemplo para um polinómio de grau 4, a integração da componente de corte transversal da matriz de rigidez do elemento deverá ser integrada, de forma reduzida, com recurso a 2 pontos. Desta forma, a componente que

corresponde ao corte, proveniente do termo  $\phi_y$  (rotação da secção transversal relativamente ao eixo coordenado  $y$ ) da expressão de  $\gamma_{xz}$  será tratada como se apresentasse o mesmo grau que  $\frac{\partial w}{\partial x}$ , que é linear.

## 2.5 Otimização de Estruturas FGM

A vasta aplicabilidade dos FGM fomenta a utilização de técnicas de otimização para que uma determinada estrutura apresente as melhores propriedades materiais e comportamento mecânico para uma determinada situação. Os parâmetros que normalmente são considerados variáveis de projeto caracterizam, por um lado, a evolução das frações volúmicas de material (expoente da lei de potência) e, por outro lado, as características geométricas da secção transversal. As funções objetivo podem ter em vista a maximização ou minimização de massa, de tensões máximas, de resistência à fratura, comportamento em situações com gradientes de temperatura, resposta dinâmica em vibração livre e forçada e encurvadura [10], [37].

Nesse sentido, destaca-se o caso de otimização realizado em [10], no qual foi estudada a influência da dimensão relativamente à qual a fração volúmica é definida numa viga fina em balanço com perfil oco, e para o qual foi verificado que, relativamente à maximização das frequências naturais, a distribuição do material na direção longitudinal apresentava melhores resultados do que na direção da espessura.

### 2.5.1 Meta heurísticas de Otimização

A crescente complexidade dos problemas de otimização numérica reais tem exigido o desenvolvimento de métodos de otimização eficientes, com precisão e velocidade de otimização elevada aliadas a uma baixa complexidade computacional [38], [39]. As meta-heurísticas são técnicas de otimização com características que permitem a resolução de problemas cujo espaço de resultados nem sempre é bem definido, com base em fenómenos da natureza [39]. As meta-heurísticas geralmente funcionam através de simulações reais e baseadas nas regras existentes na natureza com aleatoriedade, para imitar algumas das características de comportamento biológico, fenómenos naturais ou físicos naturais [40]. Com vista à otimização de estruturas, foram selecionados dois algoritmos de otimização baseados, respetivamente, no princípio de Arquimedes e no comportamento na natureza das Raposas Vermelhas, para comparação dos resultados ótimos obtidos através de cada uma das técnicas, cujos fenómenos de inspiração derivam de princípios físicos e de comportamento biológico, respetivamente.

## 2.5.2 Algoritmo de Otimização de Arquimedes

O princípio de Arquimedes explica a lei da impulsão, através da relação entre um objeto imerso num fluido e a impulsão nele aplicada, que se traduz numa força ascendente de igual valor ao peso de fluido deslocado devido à presença do objeto, em que, se o peso do objeto for superior ao peso do fluido deslocado, o objeto afunda; quando há igualdade entre o peso do objeto e o peso do fluido deslocado, o objeto flutua. Neste algoritmo, os indivíduos da população correspondem a objetos imersos num fluido, que são caracterizados por densidade, volume e aceleração, dos quais depende a impulsão. Assim, o objetivo deste algoritmo é chegar a um ponto em que os objetos flutuem, de modo que a força líquida do fluido seja nula.

Passo 1 – População Inicial – O primeiro passo do algoritmo consiste na obtenção das posições iniciais dos objetos, utilizando a expressão:

$$O_i = lb_i + rand(ub_i - lb_i), i = 1 \dots N \quad (2.5.1)$$

$O_i$  corresponde ao objeto de ordem  $i$  numa população de  $N$  objetos,  $lb_i$  e  $ub_i$  são os limites inferior e superior, respetivamente, do espaço de resultados, e  $rand$  é um vetor com a dimensão igual à quantidade de variáveis de projeto que gera valores aleatórios no intervalo  $[0,1]$ . Como já descrito, cada objeto é caracterizado por densidade, volume e aceleração, que, inicialmente, são obtidos através de:

$$\begin{aligned} den_i &= rand \\ vol_i &= rand \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

$$acc_i = lb_i + rand(ub_i - lb_i), i = 1 \dots N$$

Nesta fase, cada objeto é avaliado segundo a função objetivo, sendo retirados os valores que caracterizam a posição que permite o melhor valor da função avaliada, registando-se  $x_{best}$ ,  $den_{best}$ ,  $vol_{best}$  e  $acc_{best}$ , que correspondem aos resultados da primeira iteração.

Passo 2 – Atualização da densidade e do volume – Com os melhores valores registados, procede-se à atualização da densidade e do volume através de (2.5.3), em que  $den_{best}$  e  $vol_{best}$  correspondem à densidade e ao volume associados ao melhor objeto até ao momento.

$$den_i^{t+1} = den_i^t + rand(den_{best} - den_i^{t+1}) \quad (2.5.3)$$

$$vol_i^{t+1} = vol_i^t + rand(vol_{best} - vol_i^{t+1})$$

Passo 3 – Fator de Transferência e Fator de Densidade – Inicialmente, há colisão entre objetos e, após um período, os objetos tendem a atingir um estado de equilíbrio, fenómeno que é implementado através do fator de transferência TF, que aumenta gradualmente com o tempo até 1, convertendo a exploração global em exploração local, através da expressão (2.5.4), em que  $t$  corresponde ao número da iteração, e  $t_{max}$  é o número máximo de iterações.

$$TF = \exp\left(\frac{t - t_{max}}{t_{max}}\right) \quad (2.5.4)$$

A densidade dos objetos diminui com o tempo, o que permite a convergência para zonas promissoras, através de:

$$d^{t+1} = \exp\left(\frac{t_{max} - t}{t_{max}}\right) - \frac{t}{t_{max}} \quad (2.5.5)$$

Este parâmetro assegura um equilíbrio entre a procura global (exploration) e a procura local (exploitation).

Passo 4.1 – Fase de Procura Global – Quando  $TF \leq 0,5$ , ocorre colisão entre os objetos, é selecionado um material aleatório ( $mr$ ), que é utilizado para a atualização da aceleração da iteração  $t+1$  através da expressão:

$$acc_i^{t+1} = \frac{den_{mr} + vol_{mr} \cdot acc_{mr}}{den_i^{t+1} \cdot vol_i^{t+1}} \quad (2.5.6)$$

Em que  $den_i$ ,  $vol_i$  e  $acc_i$  são a densidade, volume e aceleração do objeto  $i$ , e  $den_{mr}$ ,  $vol_{mr}$  e  $acc_{mr}$  são a densidade, volume e aceleração do material selecionado aleatoriamente  $mr$ . Quando  $TF \leq 0,5$ , é assegurada a procura global para um terço das iterações. Quando este parâmetro é alterado, a procura global passa a procura local.

Passo 4.2 – Fase da Procura Local – Quando  $TF > 0,5$ , não ocorre colisão entre os objetos, pelo que a atualização da aceleração é realizada através da expressão:

$$acc_i^{t+1} = \frac{den_{best} + vol_{best} \cdot acc_{best}}{den_i^{t+1} \cdot vol_i^{t+1}} \quad (2.5.7)$$

Passo 4.3 – Normalização da Aceleração – De modo a determinar o comportamento de cada objeto para alcançar o valor ótimo, realiza-se a normalização da aceleração, através de (2.5.8), em que  $u$  e  $l$  traduzem o intervalo de normalização, definidos para 0.9 e 0.1, respetivamente. O parâmetro  $\overline{acc}_i^{t+1}$  determina o movimento dos objetos, tal que, quando o objeto  $i$  se encontra longe do valor ótimo global, a aceleração deste vai ser alta, o que significa que o objeto se encontrará em fase de procura global; caso contrário, o objeto realiza uma procura local. Este parâmetro permite que os objetos se movam para a solução ótima global, enquanto se afastam das soluções ótimas locais.

$$\overline{acc}_i^{t+1} = u \frac{acc_i^{t+1} - \min(acc)}{\max(acc) - \min(acc)} + l \quad (2.5.8)$$

Passo 5 – Atualização das Posições dos objetos – Quando  $TF \leq 0,5$ , a posição do objeto  $i$  da iteração  $t+1$  é atualizada através da expressão (2.5.9), em que  $C_1$  é uma constante que toma o valor 2.

$$x_i^{t+1} = x_i^t + C_1 \times rand \times \overline{acc}_i^{t+1} \times d (x_{rand} - x_i^t) \quad (2.5.9)$$

Quando  $TF > 0,5$ , a posição do objeto  $i$  atualiza através da equação (2.5.10), em que  $C_2$  é uma constante que toma o valor 6.

$$x_i^{t+1} = x_{best}^t + F \times C_2 \times rand \times \overline{acc}_i^{t+1} \times d (T \times x_{best} - x_i^t) \quad (2.5.10)$$

O parâmetro  $T$  é proporcional a  $TF$  tal que  $T = C_3 \times TF$ . O parâmetro  $F$  permite a mudança de direção do movimento, através de (2.5.11), em que  $P = 2 \times rand - C_4$ .

$$F = \begin{cases} 1, & P < 0,5 \\ -1, & P \geq 0,5 \end{cases} \quad (2.5.11)$$

Passo 6 – Avaliação de cada objeto de acordo com a função objetivo – A partir da função objetivo, registam-se os valores ótimos  $x_{best}$ ,  $den_{best}$ ,  $vol_{best}$  e  $acc_{best}$ .

Na Figura 2.5.1 é apresentado um fluxograma no qual é resumido o processo de otimização do algoritmo de Arquimedes.

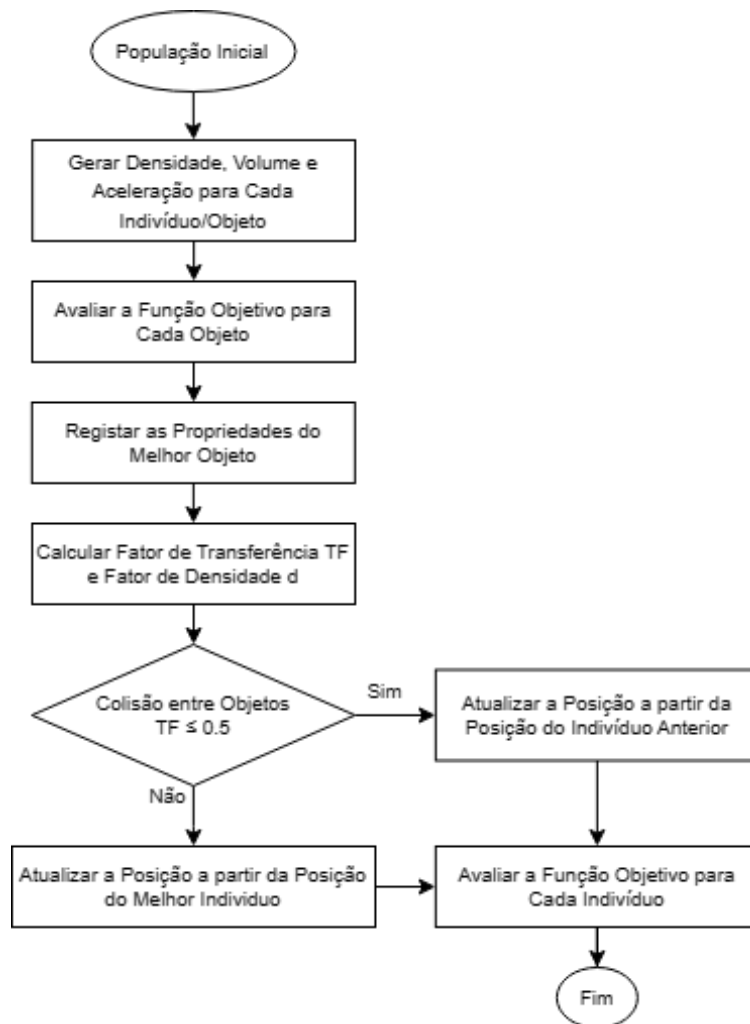


Figura 2.5.1 - Fluxograma do Algoritmo de Arquimedes

### 2.5.3 Algoritmo de Otimização das Raposas Vermelhas

A raposa vermelha é um predador astuto e inteligente, que caça não só animais selvagens, como também animais de quinta, e por sua vez pode ser caçado por humanos que os intercetem nesses ataques. As relações existentes entre a presas e predadores, caçadores e raposas, e mesmo entre indivíduos da mesma matilha podem ser imitadas matematicamente com vista à otimização, já que apenas os indivíduos mais aptos sobrevivem para caçar nos diferentes territórios e/ou formar uma nova matilha noutra local. O modelo proposto assume que o domínio da otimização é comparável a regiões e florestas, nas quais as raposas realizam a sua pesquisa por alimento. As raposas têm um mecanismo de caça que consiste em duas fases: a procura global e a procura local, em que os indivíduos trocam informação sobre o território durante a procura global, enquanto na procura local cada elemento depende das suas capacidades de procura. Além dessas duas fases, foi também proposto um modelo de controlo da população, através da simulação do abandono do grupo para outra localização ou da morte devido por parte dos caçadores. Para isso, selecionam-se os dois melhores indivíduos – casal alfa – para se reproduzirem e substituírem os elementos mais fracos de cada iteração. Este mecanismo permite que o modelo abranja todo o domínio de modo a chegar ao extremo global, em vez de ficar retido em extremos locais [39].

Passo 1 – População Inicial – Para a inicialização do algoritmo, é necessário definir a população inicial, com base no espaço de resultados da função objetivo. A população tem um número constante de raposas, e em cada iteração, cada elemento é representado pela notação  $(\bar{x}_i^j)^t$ , em que  $i$  corresponde à designação do individuo da população,  $j$  representa a coordenada de acordo com a dimensão do espaço de resultados, e  $t$  é a iteração corrente.

A partir da avaliação realizada à população gerada através da função objetivo, registam-se os melhores indivíduos que permitem a melhor solução, que correspondem à população da primeira iteração.

Passo 2 – Procura Global – Numa matilha, cada raposa é essencial para a sobrevivência de todos os elementos do grupo, por isso, se não houver alimento no seu habitat ou para a exploração de outros territórios, os membros da matilha movimentam-se para locais remotos, e a informação que recolhem é partilhada posteriormente com os restantes membros para garantir a sua sobrevivência e desenvolvimento. A exploração do território circundante é modelada com base na função objetivo, e é assumido que o melhor elemento explora os territórios mais interessantes e partilha essa informação com o grupo. Assim, regista-se o melhor individuo da população, e calcula-se a distância euclidiana de cada uma das restantes raposas através de:

$$d((\bar{x}_i)^t, (\bar{x}_{best})^t) = \sqrt{\|((\bar{x}_i)^t - (\bar{x}_{best})^t)\|} \quad (2.5.12)$$

Os indivíduos irão movimentar-se para junto do melhor individuo, através de:

$$(\bar{x}_i)^t = (\bar{x}_i)^{t-1} + \alpha \text{sign}((\bar{x}_{best})^t - (\bar{x}_i)^t) \quad (2.5.13)$$

Em que  $\alpha$  é um parâmetro gerado aleatoriamente para todos os indivíduos de cada iteração, pertencente ao intervalo  $[0, d((\bar{x}_i)^t, (\bar{x}_{best})^t)]$ . Neste momento, avalia-se a nova população com recurso à função objetivo, e se os valores ótimos forem melhores, os indivíduos tomam as novas posições, caso contrário, retornam à posição inicial. Isto simula o trajeto que os restantes membros do grupo deverão seguir após a partilha de informação por partes dos elementos que exploraram os territórios circundantes, em que devem continuar a procura em zonas promissoras, correspondente ao passo 3, caso contrário, voltam a casa, de “mãos vazias”. Além disso, assume-se ainda uma situação em que indivíduos se movimentam para zonas remotas, nas quais as raposas ficam vulneráveis, e podem morrer. Para isso, foi considerado um modelo que prevê a morte dos piores indivíduos da população, ou a reprodução dos melhores indivíduos de acordo com as equações do passo 4.

Passo 3 – Procura Local – Quando as raposas avistam uma presa, tentam aproximar-se lentamente com um movimento circular, e de forma a não serem vistas, e quando estão próximas o suficiente, movimentam-se o mais rapidamente possível para apanharem a presa. Este comportamento foi modelado com recurso ao parâmetro  $\mu$ . Este parâmetro é gerado aleatoriamente no intervalo  $[0,1]$  e simula a possibilidade de a raposa ser vista pela presa durante o movimento de aproximação. Para  $\mu > 0.75$ , a raposa aproxima-se da presa, caso contrário, afasta-se.

O movimento de observação e aproximação de cada indivíduo à presa foi aproximado com base numa equação modificada de *Cochleoid*, através dos parâmetros  $a$  - que é um parâmetro escalar gerado aleatoriamente para cada iteração no intervalo  $[0,0.2]$ , e caracteriza a mudança da distância à presa -, e  $\phi_0$ , que modela o ângulo de visão de cada indivíduo e é gerado aleatoriamente no intervalo  $[0, 2\pi]$  para todos os indivíduos. O raio de visão ( $rv$ ) das raposas é obtido por:

$$rv = \begin{cases} a \frac{\sin(\phi_0)}{\phi_0}, & \phi_0 \neq 0 \\ \theta, & \phi_0 = 0 \end{cases} \quad (2.5.14)$$

Em que  $\theta$  é um valor aleatório entre  $[0,1]$  gerado no início do algoritmo e caracteriza a influência das condições atmosféricas como o nevoeiro, chuva, entre outros. Para os indivíduos da população, o seu movimento é modelado através do sistema de equações (2.5.15) para coordenadas espaciais, em que cada valor angular é gerado aleatoriamente no intervalo  $[0, 2\pi]$ .

$$\begin{cases} x_{nova}^0 = a r \cos(\phi_1) + x_{atual}^0 \\ x_{nova}^1 = a r \sin(\phi_1) + a r \cos(\phi_2) + x_{atual}^1 \\ x_{nova}^2 = a r \sin(\phi_1) + a r \sin(\phi_2) + a r \cos(\phi_3) + x_{atual}^2 \\ \dots \\ x_{nova}^{n-2} = a r \sum_{k=1}^{n-2} \sin(\phi_k) + a r \cos(\phi_{n-1}) + x_{atual}^{n-2} \\ x_{nova}^{n-1} = a r \sin(\phi_1) + a r \sin(\phi_2) + \dots + a r \sin(\phi_{n-1}) + x_{atual}^{n-1} \end{cases} \quad (2.5.15)$$

Passo 4 – Reprodução e Abandono da Matilha – para o controlo dinâmico da população, seleciona-se 5% dos piores indivíduos da população de acordo com a função objetivo, para introduzir pequenas alterações na matilha. Como se trata dos piores indivíduos, assume-se que ou mudaram de território ou foram mortas por caçadores, no entanto, de modo a garantir que a população é constante, os piores indivíduos são substituídos por novos indivíduos, que resultam da reprodução do casal alfa num novo habitat.

Em cada iteração, selecionam-se os dois melhores indivíduos,  $(\bar{x}^{(1)})^t$  e  $(\bar{x}^{(2)})^t$ , que representam o casal alfa, e calcula-se o centro do respetivo habitat e o diâmetro:

$$(\text{habitat}^{\text{centro}})^t = \frac{(\bar{x}^{(1)})^t + (\bar{x}^{(2)})^t}{2} \quad (2.5.16)$$

$$(\text{habitat}^{\text{diametro}})^t = \sqrt{|(\bar{x}^{(1)})^t - (\bar{x}^{(2)})^t|}$$

Para cada iteração, é gerado um parâmetro aleatório  $\kappa$  no intervalo  $[0,1]$ , que define as substituições de indivíduos. Para  $\kappa \geq 0.45$ , introduzem-se novos indivíduos na população, e caso contrário, ocorre a reprodução do casal alfa. No primeiro caso, assume-se que novos membros da família se tornam nómadas, movimentando-se para outros territórios, podendo reproduzir-se. No segundo caso, assume-se que os novos indivíduos são fruto da reprodução do casal alfa, que resulta em:

$$(\bar{x}^{\text{(reproduzido)}})^t = \kappa \frac{(\bar{x}^{(1)})^t + (\bar{x}^{(2)})^t}{2} \quad (2.5.17)$$

Passo 5 – Avaliação de cada objeto de acordo com a função objetivo – A partir da função objetivo, registam-se os valores ótimos  $x_{best}$ .

Na Figura 2.5.2 é apresentado um fluxograma no qual é resumido o processo de otimização do algoritmo nas raposas vermelhas.

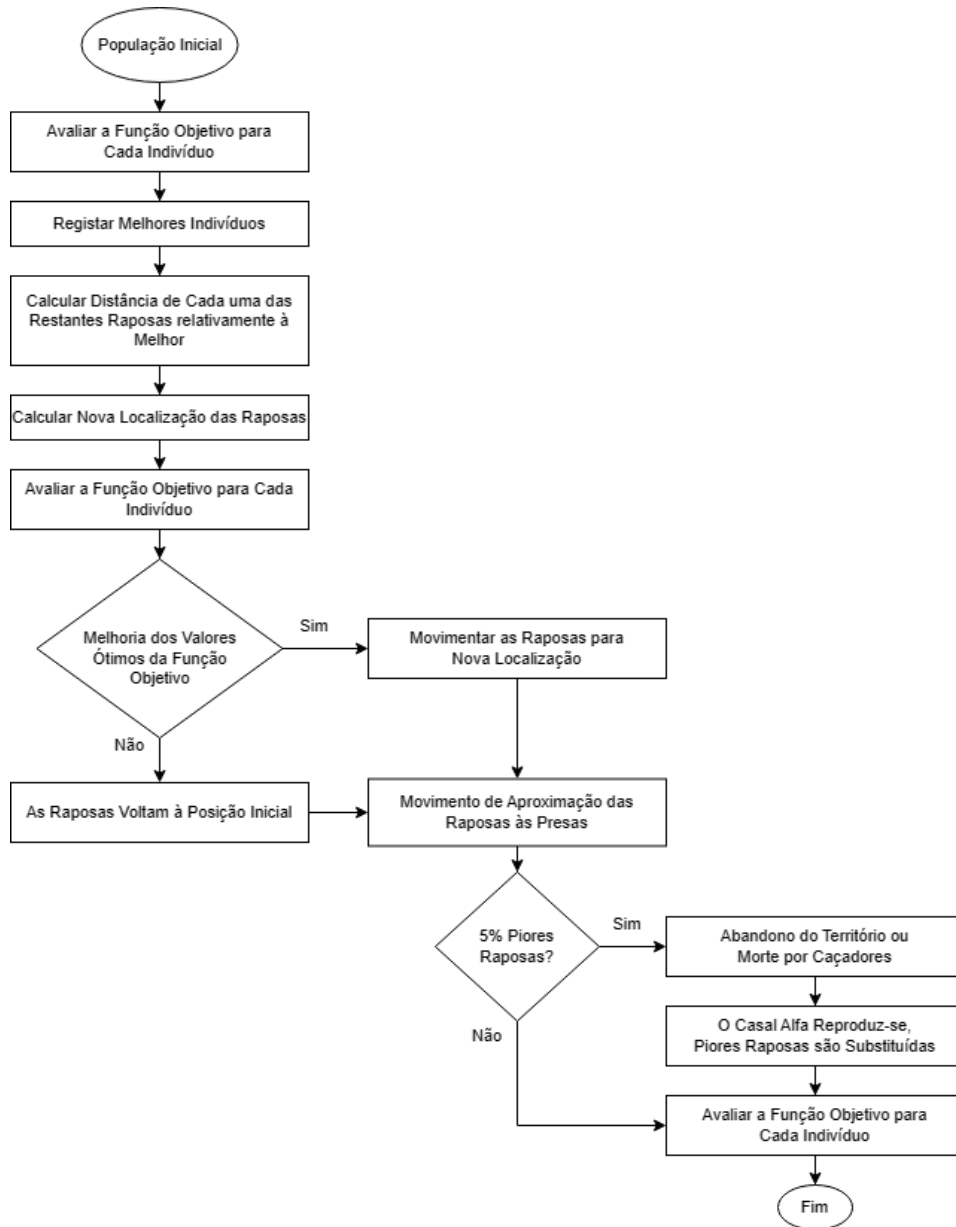


Figura 2.5.2 - Fluxograma do Algoritmo das Raposas Vermelhas

Página intencionalmente deixada em branco

### 3 Metodologia

A aplicação de meta-heurísticas de otimização ao projeto ótimo de estruturas do tipo treliça ou pórtico podeter vários objetivos, no que às variáveis de projeto diz respeito. No caso de estruturas FGM, pode ter interesse, para um determinado par de materiais, avaliar o expoente da lei de potência, ou intervalo de valores, que permite um melhor comportamento da estrutura. Por outro lado, pode também ter interesse o estudo de uma mesma estrutura com diferentes pares de materiais a constituir o FGM, assim como a escrita da expressão da regra das misturas, entre outras possibilidades que poderão surgir com o alargamento do âmbito do presente trabalho.

O desenvolvimento das aplicações para otimização de estruturas implicou a implementação de uma aplicação através do qual fosse possível proceder à análise estática e de vibração em regime de vibração livre de qualquer estrutura tipo treliça ou pórtico, através da utilização do software Maple, permitindo a realização de estudos paramétricos, para posterior avaliação da resposta da estrutura e identificação de tendências. Após este processo, foram implementadas as meta heurísticas de otimização descritas no capítulo 2.

O presente capítulo contém a descrição das considerações realizadas no desenvolvimento das aplicações de otimização da resposta estrutural de treliças ou pórticos construídos em material com gradiente funcional, função da coordenada vertical.

#### 3.1 Aplicação Desenvolvida para 1 Variável de Projeto

Numa primeira fase, desenvolveu-se uma aplicação para otimização com apenas uma variável de projeto, correspondente ao expoente da lei de potência para material metálico, considerando a sua variação contínua no intervalo  $[0.1, 10]$ . Para isso, o modelo de elementos finitos foi acoplado ao algoritmo da técnica de otimização, quando é realizada a avaliação da função objetivo, com o intuito de gerar matrizes de rigidez e de massa globais dependentes do expoente  $ey$ , procedendo-se à substituição de  $ey$  após a geração das populações. Este método permite explorar, numericamente, a aplicabilidade de qualquer valor de expoente, que permitam a maximização da frequência natural da estrutura ou a minimização do deslocamento resultante máximo existente na estrutura, podendo adotar-se os valores inteiros mais próximos dos reais obtidos para a constituição de uma estrutura com propriedades otimizadas de acordo com a aplicação futura.

Na Figura 3.1.1, é apresentada, esquematicamente, a construção do modelo descrito, no qual foi considerado que a estrutura é construída em alumínio e zircónia, e a regra de misturas é escrita tal que a lei de potência descreve a distribuição de material metálico ao longo da altura da estrutura.

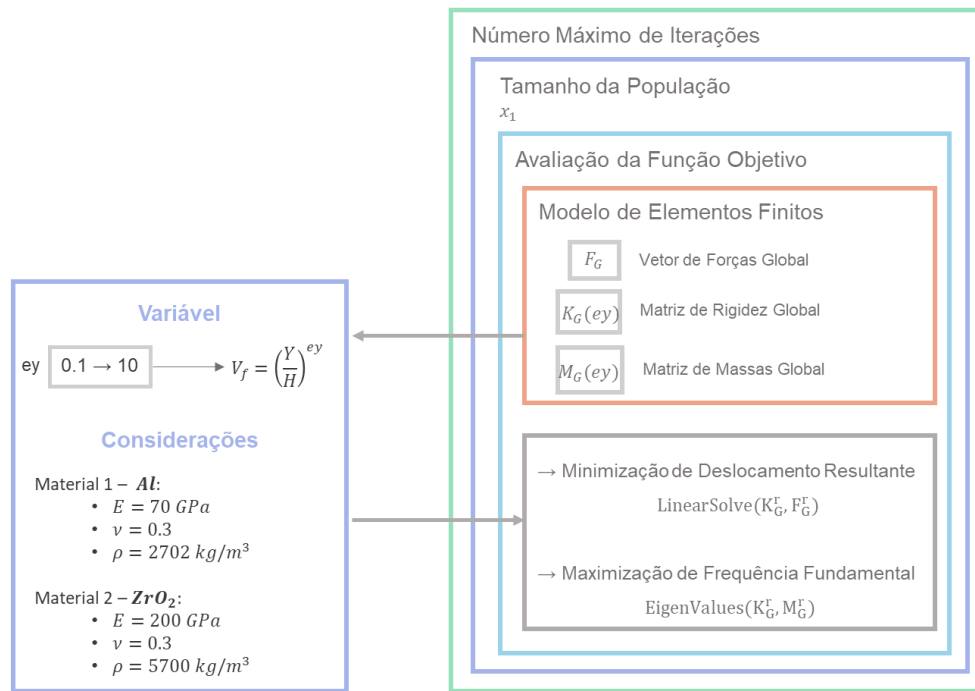


Figura 3.1.1 - Esquematização da Construção do Modelo de Otimização para 1 Variável de Projeto, e respectivas considerações

## 3.2 Aplicação Desenvolvida para 4 Variáveis de Projeto

Numa fase posterior, foi desenvolvido um modelo com 4 variáveis de projeto, através do qual é possível estudar a melhor opção para uma estrutura relativamente a vários parâmetros. Além do expoente da lei de potência, implementado anteriormente, adicionaram-se outras 3 variáveis, que apenas podem tomar valores inteiros 1 ou 2. A primeira corresponde à escrita da regra das misturas, ou seja, se o resultado for 1, a fração volúmica caracteriza a distribuição de material metálico; se for 2, é relativa ao material cerâmico. A segunda define o material metálico a utilizar, tendo-se considerado, neste caso, alumínio e titânio. A última variável define o material cerâmico a utilizar, tendo-se considerado zircónia e carboneto de tungsténio.

Para isso, analogamente ao modelo de 1 variável de projeto, introduziu-se o modelo de elementos finitos no modelo de otimização, com o objetivo de gerar matrizes de rigidez e de massa globais dependentes do expoente  $ey$  e das propriedades dos materiais a considerar, procedendo-se posteriormente à substituição desses valores após a geração das populações.

Neste caso, para as 3 variáveis introduzidas que apenas podem tomar os valores 1 ou 2, a expressão que caracteriza a atualização posição do objeto  $i$  em cada iteração de cada algoritmo foi ajustada, através do arredondamento para o valor inteiro mais próximo, com a utilização da função *round*:

$$x_i^t = \text{round}(x_i^t) \quad (3.2.1)$$

Este estudo vem no seguimento do anterior, pelo que se tem como objetivo minimizar deslocamentos resultantes e maximizar frequência fundamental da estrutura. A Figura 3.2.1 apresenta, esquematicamente, a construção do modelo de otimização com 4 variáveis de projeto, e apresenta os materiais considerados para o estudo.

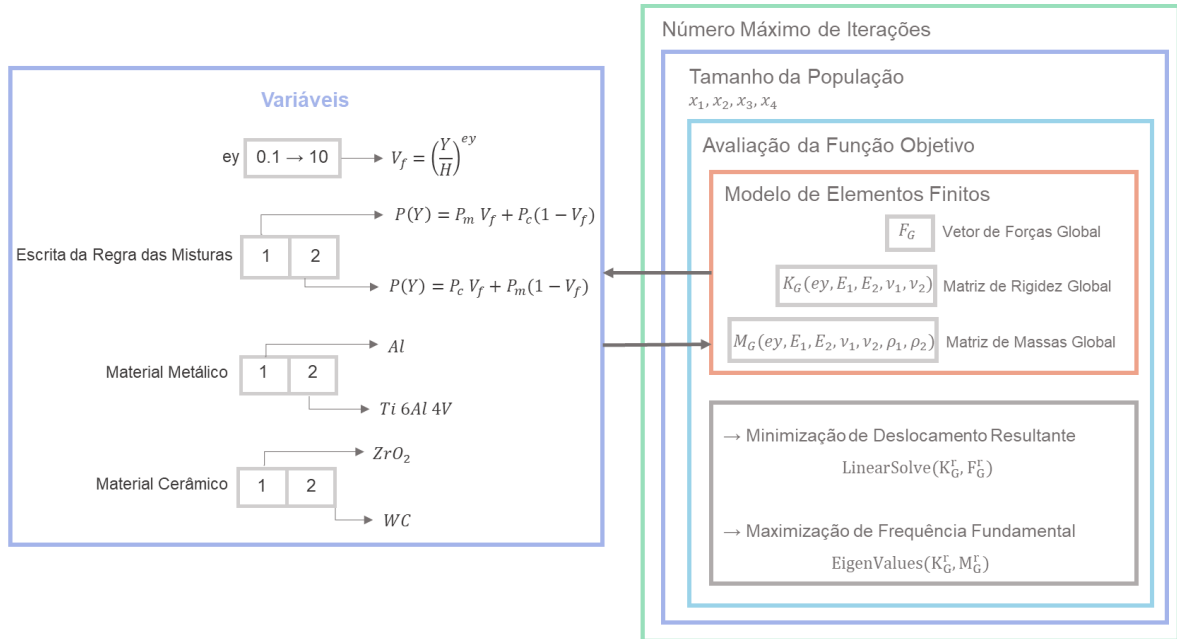


Figura 3.2.1 - Esquemática da Construção do Modelo de Otimização para 4 Variáveis de Projeto, e respectivas considerações

As propriedades dos materiais que foram considerados como constituintes dos FGMs estudados são apresentadas na Tabela 3.2.1.

Tabela 3.2.1 - Propriedades dos Materiais considerados para a constituição da combinação de materiais dos FGM estudados

Material	Símbolo/Fórmula	Módulo de Elasticidade (GPa)	Coefficiente de Poisson $\nu$	Massa Volúmica (kg/m <sup>3</sup> )
Alumínio	Al	70	0,3	2702
Zircónia	ZrO <sub>2</sub>	200	0,3	5700
Titânio Ti-6Al-4V	Ti-6Al-4V	114	0,3	4430
Carboneto de Tungsténio	WC	696	0,3	15700

Página intencionalmente deixada em branco

## 4 Verificação do Modelo

No presente capítulo são apresentados estudos de verificação do modelo de análise da resposta estática e dinâmica em regime de vibração livre, comparando os resultados com outras aplicações cuja base é o método dos elementos finitos e/ou com literatura existente, e também estudos de verificação dos algoritmos de otimização considerados com recurso a funções de Benchmark, comparando com resultados presentes na literatura.

### 4.1 Aplicações Utilizadas para Comparação de Resultados

O Ftool é uma aplicação de análise estática por elementos finitos de utilização livre e gratuita, desenvolvida no final da década de 1990, através de um projeto de pesquisa integrado, com o objetivo de complementar o ensino do comportamento de estruturas em betão armado e metal. Esta ferramenta permite analisar um modelo estrutural bidimensional, a partir quer da teoria de vigas de Euler-Bernoulli (EB) (por defeito), quer de Timoshenko [41], [42]. Neste trabalho, optou-se por se utilizar esta ferramenta com o objetivo de verificar os resultados obtidos através do modelo no plano de uma forma rápida, sendo também utilizadas, em paralelo e numa fase inicial, métodos analíticos, para comparar os resultados, e prosseguir-se para a análise de estruturas bidimensionais mais complexas. Como, por defeito, a aplicação considera que a deformação de corte é nula, consideraram-se estruturas cuja relação de aspeto  $L/h$  fosse superior a 50, visto que, a partir desse valor, as deformações de corte transversais podem ser consideradas desprezáveis, obtendo-se desvios muito reduzidos.

O *Solidworks (SW) Simulation* é uma ferramenta comercial integrada no software CAD Solidworks, e que utiliza a análise de elementos finitos para a resolução de problemas de projeto de estruturas, através da análise de deslocamentos, tensões, frequências naturais, encurvadura, entre outros, a partir da modelação do componente ou conjunto em CAD [43], [44]. No presente trabalho, optou-se pela utilização do *SW Simulation* para a verificação do modelo de implementado no espaço. O software tem disponíveis elementos barra e viga apenas para estudos estáticos, de frequência natural, entre outros, e através dos quais é possível obter a geometria e tensões precisos para esses dois tipos de elementos com poucas equações a resolver. Para uma qualquer estrutura com elementos viga-barra, é necessária a respetiva modelação simplificada através de linhas no espaço, e através de uma função denominada *Weldments*, constrói-se um modelo de viga com os elementos considerados, em que cada nó apresenta seis graus de liberdade: 3 deslocamentos e 3 rotações, analogamente aos pressupostos do modelo implementado. Com este *software*, foi possível verificar os resultados com relativa rapidez, visto que o mesmo considera a existência de deformações de corte transversais em vigas espessas, prosseguindo-se com os estudos de otimização nas aplicações desenvolvidas [44].

No decorrer do presente trabalho, os desvios foram calculados através da expressão geral:

$$Desvio(\%) = \frac{Valor\ Calculado - Valor\ Referência}{Valor\ Referência} \times 100 \quad (4.1.1)$$

## 4.2 Verificação do Modelo de Análise de Resposta Estrutural

### Caso 1 – Viga em Balanço

O caso de verificação 1 consiste no estudo de uma viga em balanço, com as características que se encontram descritas em [16]. A viga é constituída por material isotrópico com módulo de elasticidade de 200 GPa, tem 3 m de comprimento, e uma secção transversal tal que  $I_x = 29 \cdot 10^{-6} m^4$ . Para a verificação da validade dos resultados do modelo de elementos finitos, considerou-se que a secção transversal da viga do modelo implementado é quadrada. A viga é solicitada pontualmente na extremidade livre com uma carga de 60 kN, e uma carga uniformemente distribuída em todo o seu comprimento de 24 kN/m, como é apresentado esquematicamente na Figura 4.2.1.

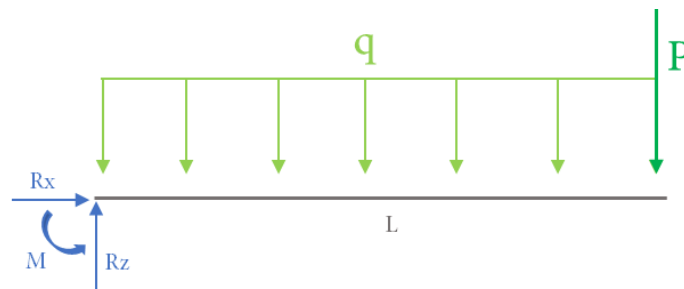


Figura 4.2.1 - Diagrama de Corpo Livre da Viga em Balanço Analisada

A Tabela 2.2.1 contém as reações no encastramento obtidas através da análise estática da estrutura.

Tabela 4.2.1 - Reações no Encastramento obtidas através de Equilíbrio Estático

$R_x$ [N]	$R_z$ [kN]	$M_y$ [kN m]
0	132	288

Na Tabela 4.2.2 apresentam-se os valores das reações nos apoios calculadas, comparando com os resultados das equações de equilíbrio estático.

Tabela 4.2.2 - Reações no Encastramento calculadas para 8, 16 e 32 elementos, e respetivos desvios

Discretização	$R_z$ [N]	Desvio (%)	$M_y$ [N]	Desvio (%)
8 elementos	130498,3387	1,1376	287996,3146	0,0013
16 elementos	131218,5304	0,5920	287931,2144	0,0239
32 elementos	131664,8121	0,2539	288087,0711	0,0302

Assim, de modo a comparar os valores obtidos através do código implementado, foram realizados estudos para 8, 16 e 32 elementos, tendo sido retirados os resultados das reações no encastramento e dos deslocamentos transversais em cada estudo correspondentes às coordenadas longitudinais presentes na tabela. Na Tabela 4.2.3 são apresentados resultados de deslocamento transversal e de rotação da viga ao longo do seu comprimento, obtidos através do método de elementos finitos e da solução de referência, proveniente das expressões definidas pelo método da integração direta. Neste caso, como se trata de uma viga com uma relação de aspecto bastante elevada, os resultados da teoria de Timoshenko são bastante próximos aos calculados através da EBT.

Tabela 4.2.3 - Comparação de Deslocamento Transversal e Rotação ao Longo da Viga calculados com [16]

x [m]	Deslocamento Transversal [m]			Rotação [rad]		
	FEM [16]	Exata [16]	Presente*	FEM [16]	Exata [16]	Presente*
<b>0</b>	0,0000	0,0000	0,0000	0,00000	0,00000	0,00000
<b>0,1875</b>	0,0008	0,0008	0,0009	0,00880	0,00891	0,00891
<b>0,375</b>	0,0033	0,0033	0,0033	0,01690	0,01706	0,01706
<b>0,5625</b>	0,0071	0,0072	0,0073	0,02440	0,02445	0,02445
<b>0,75</b>	0,0124	0,01242	0,0125	0,03110	0,03113	0,03113
<b>0,9375</b>	0,0188	0,0188	0,0189	0,03720	0,03712	0,03712
<b>1,125</b>	0,0263	0,0263	0,0264	0,04260	0,04244	0,04244
<b>1,3125</b>	0,0347	0,0347	0,0348	0,04720	0,04713	0,04713
<b>1,5</b>	0,0439	0,0439	0,0441	0,05120	0,05121	0,05121
<b>1,6875</b>	0,0539	0,05387	0,0540	0,05460	0,05470	0,05470
<b>1,875</b>	0,0644	0,0644	0,0646	0,05750	0,05764	0,05764
<b>2,0625</b>	0,0754	0,0755	0,0756	0,06000	0,06006	0,06006
<b>2,25</b>	0,0868	0,0869	0,0871	0,06200	0,06197	0,06197
<b>2,4375</b>	0,0986	0,0987	0,0989	0,06350	0,06341	0,06341
<b>2,625</b>	0,1106	0,1107	0,1109	0,06450	0,06441	0,06441
<b>2,8025</b>	0,1228	0,1228	0,1230	0,06510	0,06497	0,06499
<b>3</b>	0,135	0,135	0,1352	0,06520	0,06517	0,06517

\*resultados correspondentes à discretização com 8 elementos quadráticos

### Caso 2 – Viga Isotrópica em Balanço com Diferentes Relações de Aspecto L/h

No segundo caso de verificação, foi estudado o comportamento de uma viga em balanço constituída por material isotrópico homogéneo com módulo de elasticidade de 29 MPa, largura de 1 m, coeficiente de Poisson de 0.3, sujeita a uma carga concentrada transversal de 100 N na extremidade livre, estudada em [9]. Neste estudo, pretendia-se verificar a convergência de deslocamentos transversais para a viga com diferentes relações de aspecto.

Para isso, foi considerada, no modelo implementado, uma viga constituída por um elemento, e os resultados obtidos para o deslocamento transversal da extremidade livre da viga estão apresentados na Tabela 4.2.4.

Tabela 4.2.4 - Comparação de Deslocamento Transversal na Extremidade Livre da Viga

L [m]	h [m]	L/h	Deslocamento Transversal [m] [9]	Deslocamento Transversal [m] [Presente]
160	12	13,3333	32,837	32,838
80		6,6667	4,158	4,159
40		3,3333	0,546	0,547
12		1	0,024	0,02455
160	1	160	56498,000	56499,924
80		80	7062,900	7062,962
40		40	883,180	883,191
12		12	23,962	23,964

### Caso 3 – Análise Estática de Viga FGM

Para verificação do modelo para análise estática de vigas em FGM, foram comparados resultados com V. H. Nam et al [45], no qual é considerada uma viga simplesmente apoiada com  $L/h=20$ , constituída por alumínio ( $E_m=70$  GPa,  $\nu_m=0,3$ ) e alumina ( $E_c=380$  GPa,  $\nu_c=0,3$ ), e os valores de deslocamento transversal são adimensionalizados através do multiplicador:

$$\bar{w} = \frac{100 E_m h^3}{q L^4} w \left( \frac{L}{2} \right) \quad (4.2.1)$$

Nesta verificação, cujos resultados serão adimensionalizados, considerou-se uma viga simplesmente apoiada com secção quadrada com 1 m de lado, 20 m de comprimento, sujeita a uma carga uniformemente distribuída de 100 N/m, e calculou-se o deslocamento transversal máximo para  $L/2$  para diferentes valores de expoente da lei de potência. As propriedades da viga são determinadas usando a lei das misturas já referida anteriormente:

$$P(z) = (P_c - P_m) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^{ez} + P_m \quad (4.2.2)$$

Na Tabela 4.2.5 apresenta-se a comparação do deslocamento transversal adimensionalizados calculado com a literatura [45].

Tabela 4.2.5 – Comparação de Deslocamento Transversal Adimensionalizados calculados com [45]

ez	Deslocamento Transversal [45]	Deslocamento Transversal [Presente]
0	2,8962	2,8963
0,5	4,4648	4,4648
1	5,8049	5,8049
2	7,4397	7,4397
5	8,8069	8,8068
10	9,6767	9,6768

#### Caso 4 – Vibração Livre de Viga Isotrópica em Balanço

O caso de verificação 4 consiste na análise de vibração livre de uma viga em balanço constituída por material isotrópico, com 1 m de comprimento, secção transversal retangular de altura  $h$  e largura  $b$ , módulo de elasticidade  $E$ , massa volúmica  $\rho$ , 2º momento de área  $I$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 0,25$ , com  $EI = 1$ ,  $\rho I = 1$ , e  $h$  tomará valores tal que  $L/h = 10$  e  $L/h = 100$ . Os resultados a comparar serão transformados em valores de frequência adimensionais, através da expressão:

$$\bar{\omega} = \omega L^2 \left( \frac{\rho A}{EI} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.2.3)$$

Assim, foram realizados estudos para 2, 4 e 8 elementos quadráticos, de modo a comparar com os resultados apresentados em [14] obtidos pelas teorias de vigas de Timoshenko (TBT) e de Euler-Bernoulli (EBT e EBT\*), em que EBT corresponde à teoria de vigas de Euler-Bernoulli considerando a inércia à rotação, e EBT\* corresponde à teoria de Euler-Bernoulli considerando desprezável a inércia à rotação (os resultados são independentes de  $L/h$ ), para a estrutura em estudo, e pelo método de elementos finitos. Por observação dos resultados apresentados por Reddy [14] para as soluções exatas segundo as teorias de vigas tanto de Euler-Bernoulli como de Timoshenko (Tabela 4.2.6 e Tabela 4.2.8), é de notar que, quando a inercia de rotação é desprezada (EBT\*), as frequências de ressonância são ligeiramente superiores às restantes soluções. Nas tabelas 4.2.7 e 4.2.9 apresentam-se as primeiras quatro frequências de ressonância da viga em balanço, para  $L/h=10$  e  $L/h=100$ , respetivamente, previstas pelo modelo de Reddy [14], e as frequências de ressonância obtidas através do modelo implementado.

Tabela 4.2.6 - Primeiras Quatro Frequências de Ressonância da Viga Analisada, obtidas segundo a teoria de Timoshenko e a teoria de Euler-Bernoulli, para  $L/h=10$

$\bar{\omega}$	TBT	EBT	EBT*
$\bar{\omega}1$ [16]	3,5158	3,5158	3,5160
$\bar{\omega}2$ [16]	22,0226	22,0315	22,0345
$\bar{\omega}3$ [16]	61,6179	61,6774	61,6972
$\bar{\omega}4$ [16]	120,6152	120,8300	120,9019

Tabela 4.2.7 - Comparação das Primeiras Quatro Frequências de Ressonância Calculadas com recurso a 2, 4 e 8 elementos quadráticos, com o modelo de elementos finitos de [32], para  $L/h=10$

$\bar{\omega}$	2 elementos	4 elementos	8 elementos
$\bar{\omega}1$ [16]	3,5214	3,5161	3,5158
$\bar{\omega}1$	3,5214	3,5161	3,5130
$\bar{\omega}2$ [16]	23,3226	22,1054	22,0280
$\bar{\omega}2$	23,3226	22,1054	22,0275
$\bar{\omega}3$ [16]	78,3115	63,3271	61,7325
$\bar{\omega}3$	78,3115	63,3271	61,7323
$\bar{\omega}4$ [16]	328,3250	133,9828	121,4458
$\bar{\omega}4$	328,3251	133,9828	121,4456

Tabela 4.2.8 - Primeiras Quatro Frequências de Ressonância da Viga Analisada, obtidas segundo a teoria de Timoshenko e a teoria de Euler-Bernoulli, para  $L/h=100$

$\bar{\omega}$	TBT	EBT	EBT*
$\bar{\omega}1$ [16]	3,4892	3,5092	3,5160
$\bar{\omega}2$ [16]	20,9374	21,7425	22,0345
$\bar{\omega}3$ [16]	55,1530	59,8013	61,6972
$\bar{\omega}4$ [16]	100,2116	114,2898	120,9019

Tabela 4.2.9 - Comparação das Primeiras Quatro Frequências de Ressonância Calculadas com recurso a 2, 4 e 8 elementos quadráticos, com o modelo de elementos finitos de [32], para  $L/h=100$

$\bar{\omega}$	2 elementos	4 elementos	8 elementos
$\bar{\omega}1$ [16]	3,4947	3,4895	3,4892
$\bar{\omega}1$	3,4947	3,4895	3,4891
$\bar{\omega}2$ [16]	22,0762	21,0103	20,4421
$\bar{\omega}2$	22,0762	21,0103	20,9421
$\bar{\omega}3$ [16]	67,0884	56,4572	55,2405
$\bar{\omega}3$	54,4279	54,4149	54,4140
$\bar{\omega}4$	67,0884	56,4572	55,2406
$\bar{\omega}4$ [16]	181,0682	108,6060	100,7496
$\bar{\omega}5$	67,0884	56,4581	100,7496
$\bar{\omega}6$	165,9379	108,6060	-
$\bar{\omega}7$	181,0683	-	-

De notar que, como pode ser observado na tabela 4.2.9, o modelo implementado permite obter não só as frequências de ressonância associadas ao deslocamento transversal, mas também para deslocamento axial, razão pela qual as posições das frequências de ressonância obtidas não correspondem diretamente às de Reddy [16]. Por exemplo, no caso da modelação da viga com 8 elementos quadráticos, a terceira frequência fundamental apresentada em Reddy [16] corresponde à quarta frequência obtida com o presente modelo. Para efeitos de verificação, apresenta-se, ainda, a representação gráfica dos primeiros 4 modos de vibração associados ao deslocamento transversal da viga considerando 8 elementos quadráticos na Figura 4.2.2, de modo a comparar com [16], no qual foram representados os mesmos modos de vibração considerando 16 elementos lineares, tendo sido notado que, no caso do modo 4 calculado, o mesmo encontra-se desfasado do modo de referência, no entanto o modelo, em termos de representação de modos de vibração encontra-se verificado, visto que neste caso a comparação ocorre entre elementos lineares (na bibliografia) e elementos quadráticos (no modelo desenvolvido).

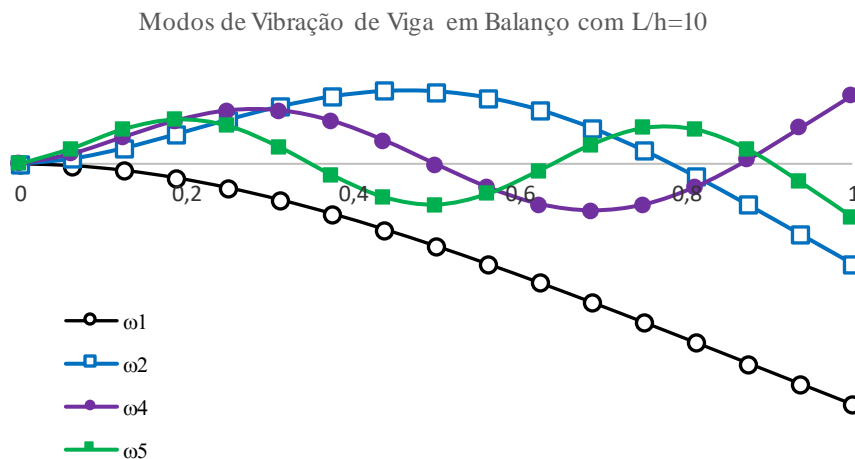


Figura 4.2.2 - Representação gráfica dos primeiros 4 modos de vibração associados ao deslocamento transversal de viga em balanço presente em [16]

#### Caso 5 – Análise de Vibração Livre de Viga FGM

No caso de verificação 5 é apresentada a verificação do modelo implementado para vigas constituídas por material compósito com gradiente funcional para análise de vibração livre, para vigas com variação de fração volúmica na espessura e na direção axial, com base nos estudos realizados em [12]. Para isso, Alshorbagy et al [12] aplicaram o método dos elementos finitos para obterem aproximações numéricas, com base na teoria de vigas de Euler-Bernoulli para a definição do campo de deslocamentos, para a equação do movimento em diferentes condições de fronteira e relações de aspecto L/h, de modo a compararem os resultados com publicações prévias, e assim, verificarem o modelo.

Para o modelo de viga bi-apoiada, foi considerado  $L = 20$  m e  $b = 0,4$  m, e que a mesma seria constituída por materiais com diferentes relações entre os respetivos módulos de Young e massas volúmicas, e para diferentes valores de expoente da lei de potência, de modo a concluir sobre a influência que estes parâmetros têm nas frequências naturais.

Para o caso da viga com gradiente funcional com variação na espessura, foi aplicada a lei das misturas descrita na equação (4.2.4), que representa uma superfície inferior ( $z = -h/2$ ) totalmente metálica, e superfície superior ( $z = h/2$ ) da viga totalmente cerâmica:

$$P(z) = (P_{sup} - P_{inf}) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^{ez} + P_{inf} \quad (4.2.4)$$

Para o caso da viga com gradiente funcional com variação na direção axial, foi aplicada a lei das misturas descrita na equação (4.2.5), que representa uma superfície à esquerda ( $x = 0$ ) totalmente cerâmica, e superfície à direita ( $x = L$ ) totalmente metálica:

$$P(x) = (P_{esq} - P_{dir}) \left(1 - \frac{x}{L}\right)^{ex} + P_{dir} \quad (4.2.5)$$

Para a comparação de resultados, realiza-se a transformação em quantidades adimensionais às características da estrutura, através de:

$$\bar{x} = \frac{x}{L} \quad (4.2.6)$$

$$E_{ratio} = \frac{E_{sup}}{E_{inf}} \text{ ou } E_{ratio} = \frac{E_{dir}}{E_{esq}} \quad (4.2.7)$$

$$\rho_{ratio} = \frac{\rho_{sup}}{\rho_{inf}} \text{ ou } \rho_{ratio} = \frac{\rho_{dir}}{\rho_{esq}} \quad (4.2.8)$$

$$\lambda^2 = \omega L^2 \sqrt{\frac{\rho_L A}{E_L I}} \quad (4.2.9)$$

As tabelas 4.2.10 a 4.2.15 contêm os resultados para as primeiras três frequências fundamentais da viga bi-apoiada estudada em função de  $E_{ratio}$  e do expoente da lei de potência  $ez$ , quando  $L/h=20$  e  $L/h=100$ , para a viga com variação de propriedades em espessura.

Tabela 4.2.10 - Primeira Frequência Fundamental para Viga com Gradiente Funcional a variar em espessura, com  $L/h=20$ , com  $\rho_{ratio} = 1$ , para diferentes expoentes da lei de potência e  $E_{ratio}$

	ez	E <sub>ratio</sub>				
		0,25	0,5	1	2	4
0	Presente	2,2168	2,6362	3,1350	3,7282	4,4336
	[12]	2,2203	2,6404	3,14	3,7341	4,4406
0,1	Presente	2,3707	2,7064	3,1350	3,6715	4,3299
	[12]	2,3746	2,7107	3,14	3,6773	4,3366
0,2	Presente	2,4572	2,7531	3,1350	3,6243	4,2390
	[12]	2,4614	2,7576	3,14	3,63	4,2455
0,5	Presente	2,5936	2,8317	3,1350	3,5241	4,0284
	[12]	2,5979	2,8363	3,14	3,5296	4,0346
1	Presente	2,6998	2,8901	3,1350	3,4369	3,8181
	[12]	2,7041	2,8946	3,14	3,4423	3,8241
2	Presente	2,8016	2,9417	3,1350	3,3712	3,6433
	[12]	2,8057	2,9461	3,14	3,3768	3,6496
5	Presente	2,9261	3,0066	3,1350	3,3139	3,5257
	[12]	2,9302	3,011	3,14	3,3196	3,5326
10	Presente	3,0042	3,0517	3,1350	3,2670	3,4481
	[12]	3,0085	3,0563	3,14	3,2726	3,4549

Tabela 4.2.11 - Primeira Frequência Fundamental para Viga com Gradiente Funcional a variar em espessura, com  $L/h=100$ , com  $\rho_{ratio}=1$ , para diferentes expoentes da lei de potência e  $E_{ratio}$

ez		$E_{ratio}$				
		0,25	0,5	1	2	4
0	Presente	2,2213	2,6416	3,1414	3,7357	4,4426
	[12]	2,2214	2,6417	3,1415	3,7359	4,4428
0,1	Presente	2,3770	2,7119	3,1414	3,6791	4,3382
	[12]	2,3798	2,7121	3,1415	3,6791	4,3388
0,2	Presente	2,4625	2,7589	3,1414	3,6317	4,2473
	[12]	2,4683	2,759	3,1415	3,6317	4,2476
0,5	Presente	2,5990	2,8375	3,1414	3,5311	4,0364
	[12]	2,6074	2,8377	3,1415	3,5313	4,0366
1	Presente	2,7052	2,8959	3,1413	3,4436	3,8259
	[12]	2,7159	2,8961	3,1415	3,444	3,826
2	Presente	2,8070	2,9474	3,1413	3,3783	3,6511
	[12]	2,8071	2,9476	3,1415	3,3784	3,6514
5	Presente	2,9318	3,0123	3,1413	3,3210	3,5341
	[12]	2,9317	3,0125	3,1415	3,3213	3,5343
10	Presente	3,0098	3,0576	3,1413	3,2739	3,4564
	[12]	3,01	3,0578	3,1415	3,2743	3,4566

Tabela 4.2.12 - Segunda Frequência Fundamental para Viga com Gradiente Funcional a variar em espessura, com  $L/h=20$ , com  $\rho_{ratio}=1$ , para diferentes expoentes da lei de potência e  $E_{ratio}$

ez		$E_{ratio}$				
		0,25	0,5	1	2	4
0	Presente	4,4069	5,2407	6,2323	7,4115	8,8139
	[12]	4,4338	5,2727	6,2703	7,4567	8,8676
0,1	Presente	4,7115	5,3796	6,2323	7,2993	8,6085
	[12]	4,7419	5,4132	6,2703	7,4567	8,6599
0,2	Presente	4,8831	5,4723	6,2323	7,2058	8,4283
	[12]	4,9152	5,5068	6,2703	7,2488	8,478
0,5	Presente	5,1544	5,6285	6,2323	7,0066	8,0097
	[12]	5,1877	5,6638	6,2703	7,0483	8,0567
1	Presente	5,3670	5,7453	6,2323	6,8324	7,5901
	[12]	5,3997	5,7804	6,2703	6,874	7,6363
2	Presente	5,5711	5,8490	6,2323	6,7002	7,2391
	[12]	5,6028	5,8832	6,2703	6,7431	7,2877
5	Presente	5,8196	5,9787	6,2323	6,5847	7,0012
	[12]	5,8514	6,0128	6,2703	6,6291	7,0541
10	Presente	5,9745	6,0683	6,2323	6,4918	6,8468
	[12]	6,0078	6,1032	6,2703	6,5352	6,8991

Tabela 4.2.13 - Segunda Frequência Fundamental para Viga com Gradiente Funcional a variar em espessura, com  $L/h=100$ , com  $\rho_{ratio}=1$ , para diferentes expoentes da lei de potência e  $E_{ratio}$

<b>ez</b>		<b>E<sub>ratio</sub></b>				
		0,25	0,5	1	2	4
<b>0</b>	Presente	4,4421	5,2826	6,2821	7,4707	8,8842
	[12]	4,4425	5,2831	6,2827	7,4714	8,885
<b>0,1</b>	Presente	4,7508	5,4232	6,2821	7,3570	8,6761
	[12]	4,7592	5,4238	6,2827	7,3577	8,677
<b>0,2</b>	Presente	4,9243	5,5171	6,2821	7,2624	8,4939
	[12]	4,9362	5,5176	6,2827	7,263	8,4947
<b>0,5</b>	Presente	5,1974	5,6744	6,2821	7,0616	8,0719
	[12]	5,2145	5,675	6,2827	7,0622	8,0726
<b>1</b>	Presente	5,4099	5,7912	6,2821	6,8869	7,6508
	[12]	5,4314	5,7918	6,2827	6,8876	7,6515
<b>2</b>	Presente	5,6134	5,8943	6,2821	6,7557	7,3014
	[12]	5,6139	5,8948	6,2827	6,7564	7,3023
<b>5</b>	Presente	5,8626	6,0241	6,2821	6,6413	7,0672
	[12]	5,8629	6,0246	6,2827	6,6421	7,0683
<b>10</b>	Presente	6,0192	6,1147	6,2821	6,5473	6,9117
	[12]	6,0196	6,1152	6,2827	6,5481	6,9128

Tabela 4.2.14 - Terceira Frequência Fundamental para Viga com Gradiente Funcional a variar em espessura, com  $L/h=20$ , com  $\rho_{ratio}=1$ , para diferentes expoentes da lei de potência e  $E_{ratio}$

<b>ez</b>		<b>E<sub>ratio</sub></b>				
		0,25	0,5	1	2	4
<b>0</b>	Presente	6,5495	7,7887	9,2623	11,0148	13,0989
	[12]	6,6338	7,889	9,3817	11,157	13,268
<b>0,1</b>	Presente	6,9967	7,9933	9,2623	10,8489	12,7951
	[12]	7,0947	8,0991	9,3817	10,987	12,957
<b>0,2</b>	Presente	7,2479	8,1298	9,2623	10,7100	12,5273
	[12]	7,3537	8,2392	9,3817	10,846	12,685
<b>0,5</b>	Presente	7,6490	8,3606	9,2623	10,4128	11,9017
	[12]	7,7611	8,474	9,3817	10,546	12,054
<b>1</b>	Presente	7,9687	8,5355	9,2623	10,1504	11,2695
	[12]	8,0783	8,6483	9,3817	10,285	11,424
<b>2</b>	Presente	8,2785	8,6928	9,2623	9,9491	10,7337
	[12]	8,3823	8,8022	9,3817	10,089	10,902
<b>5</b>	Presente	8,6532	8,8885	9,2623	9,7752	10,3655
	[12]	8,7546	8,9962	9,3817	9,9182	10,553
<b>10</b>	Presente	8,8836	9,0217	9,2623	9,6396	10,1428
	[12]	8,9888	9,1316	9,3817	9,779	10,322

Tabela 4.2.15 - Terceira Frequência Fundamental para Viga com Gradiente Funcional a variar em espessura, com  $L/h=100$ , com  $\rho_{ratio}=1$ , para diferentes expoentes da lei de potência e  $E_{ratio}$

	<b>ez</b>	<b>E<sub>ratio</sub></b>				
		0,25	0,5	1	2	4
<b>0</b>	Presente	6,6645	7,9255	9,4250	11,2083	13,3290
	[12]	6,6631	7,9238	9,423	11,206	13,326
<b>0,1</b>	Presente	7,1275	8,1365	9,4250	11,0378	13,0170
	[12]	7,1381	8,1349	9,423	11,035	13,014
<b>0,2</b>	Presente	7,3878	8,2772	9,4250	10,8959	12,7437
	[12]	7,4036	8,2756	9,423	10,893	12,741
<b>0,5</b>	Presente	7,7976	8,5133	9,4250	10,5946	12,1105
	[12]	7,8209	8,5116	9,423	10,592	12,108
<b>1</b>	Presente	8,1166	8,6886	9,4250	10,3325	11,4786
	[12]	8,1462	8,6868	9,423	10,33	11,476
<b>2</b>	Presente	8,4221	8,8434	9,4250	10,1355	10,9540
	[12]	8,4199	8,8413	9,423	10,134	10,952
<b>5</b>	Presente	8,7959	9,0382	9,4250	9,9637	10,6021
	[12]	8,7935	9,036	9,423	9,9622	10,601
<b>10</b>	Presente	9,0308	9,1741	9,4250	9,8227	10,3688
	[12]	9,0285	9,1719	9,423	9,8212	10,368

As tabelas 4.2.16 a 4.2.21 contêm os resultados para as primeiras três frequências fundamentais da viga bi-apoiada estudada em função de  $E_{ratio}$  e do expoente da lei de potência  $ex$ , quando  $L/h=20$  e  $L/h=100$ , para a viga com variação de propriedades longitudinalmente.

Tabela 4.2.16 - Primeira Frequência Fundamental para Viga com Gradiente Funcional a variar na direção axial, com  $L/h=20$ , com  $\rho_{ratio}=1$ , para diferentes expoentes da lei de potência e  $E_{ratio}$

	<b>ex</b>	<b>E<sub>ratio</sub></b>				
		0,25	0,5	1	2	4
<b>0</b>	Presente	2,2168	2,6362	3,1350	3,7282	4,4336
	[12]	2,2203	2,6404	3,14	3,7341	4,4406
<b>0,1</b>	Presente	2,3250	2,6826	3,1350	3,6928	4,3696
	[12]	2,3285	2,6868	3,14	3,6988	4,3768
<b>0,2</b>	Presente	2,4068	2,7216	3,1350	3,6593	4,3072
	[12]	2,4106	2,7258	3,14	3,6653	4,3144
<b>0,5</b>	Presente	2,5777	2,8103	3,1350	3,5698	4,1311
	[12]	2,5821	2,8148	3,14	3,5758	4,1387
<b>1</b>	Presente	2,7480	2,9056	3,1350	3,4554	3,8863
	[12]	2,7533	2,9104	3,14	3,4611	3,8937
<b>2</b>	Presente	2,9218	3,0069	3,1350	3,3192	3,5734
	[12]	2,9278	3,0122	3,14	3,3244	3,5795
<b>5</b>	Presente	3,0770	3,0996	3,1350	3,1877	3,2623
	[12]	3,0834	3,1052	3,14	3,1923	3,2668
<b>10</b>	Presente	3,1206	3,1262	3,1350	3,1486	3,1684
	[12]	3,1265	3,1316	3,14	3,1531	3,1726

Tabela 4.2.17 - Primeira Frequência Fundamental para Viga com Gradiente Funcional a variar na direção axial, com  $L/h=100$ , com  $\rho_{ratio}=1$ , para diferentes expoentes da lei de potência e  $E_{ratio}$

ex		$E_{ratio}$				
		0,25	0,5	1	2	4
0	Presente	2,2213	2,6416	3,1414	3,7357	4,4426
	[12]	2,2214	2,6417	3,1415	3,7359	4,4428
0,1	Presente	2,3295	2,6880	3,1414	3,7003	4,3787
	[12]	2,3297	2,6881	3,1415	3,7006	4,3789
0,2	Presente	2,4117	2,7270	3,1414	3,6669	4,3163
	[12]	2,4118	2,7271	3,1415	3,6671	4,3166
0,5	Presente	2,5832	2,8160	3,1414	3,5773	4,1405
	[12]	2,5834	2,8162	3,1415	3,5775	4,1408
1	Presente	2,7544	2,9116	3,1414	3,4626	3,8954
	[12]	2,7546	2,9119	3,1415	3,4628	3,8957
2	Presente	2,9291	3,0134	3,1414	3,3258	3,5810
	[12]	2,9293	3,0137	3,1415	3,326	3,5812
5	Presente	3,0848	3,1066	3,1414	3,1937	3,2682
	[12]	3,0849	3,1067	3,1415	3,1939	3,2684
10	Presente	3,1279	3,1330	3,1414	3,1546	3,1740
	[12]	3,1281	3,1332	3,1415	3,1547	3,1742

Tabela 4.2.18 - Segunda Frequência Fundamental para Viga com Gradiente Funcional a variar na direção axial, com  $L/h=20$ , com  $\rho_{ratio}=1$ , para diferentes expoentes da lei de potência e  $E_{ratio}$

ex		$E_{ratio}$				
		0,25	0,5	1	2	4
0	Presente	4,4069	5,24075	6,2323	7,41154	8,8139
	[12]	4,4338	5,2727	6,2703	7,4567	8,8676
0,1	Presente	4,6414	5,3430	6,2323	7,3323	8,6699
	[12]	4,6693	5,3752	6,2703	7,3774	8,7236
0,2	Presente	4,8082	5,4246	6,2323	7,2589	8,53149
	[12]	4,8374	5,4573	6,2703	7,3039	8,5853
0,5	Presente	5,1351	5,5985	6,2323	7,0733	8,1577
	[12]	5,1675	5,6327	6,2703	7,1176	8,2113
1	Presente	5,4373	5,7690	6,2323	6,8605	7,6896
	[12]	5,473	5,8048	6,2703	6,9031	7,7399
2	Presente	5,7283	5,9364	6,2323	6,6378	7,1757
	[12]	5,7674	5,9739	6,2703	6,6783	7,2209
5	Presente	6,0210	6,1064	6,2323	6,4099	6,6495
	[12]	6,0636	6,1459	6,2703	6,4483	6,6902
10	Presente	6,1556	6,1861	6,2323	6,2997	6,3935
	[12]	6,1987	6,2263	6,2703	6,3365	6,4302

Tabela 4.2.19 - Segunda Frequência Fundamental para Viga com Gradiente Funcional a variar na direção axial, com  $L/h=100$ , com  $\rho_{ratio}=1$ , para diferentes expoentes da lei de potência e  $E_{ratio}$

ex		E <sub>ratio</sub>				
		0,25	0,5	1	2	4
0	Presente	4,4421	5,2826	6,2821	7,4707	8,8842
	[12]	4,4425	5,2831	6,2827	7,4714	8,885
0,1	Presente	4,6781	5,3853	6,2821	7,3912	8,7399
	[12]	4,6785	5,3858	6,2827	7,3919	8,7407
0,2	Presente	4,8465	5,4675	6,2821	7,3176	8,6014
	[12]	4,847	5,4681	6,2827	7,3183	8,6022
0,5	Presente	5,1773	5,6433	6,2821	7,1309	8,2269
	[12]	5,1778	5,6438	6,2827	7,1316	8,2276
1	Presente	5,4835	5,8157	6,2821	6,9160	7,7548
	[12]	5,484	5,8162	6,2827	6,9167	7,7555
2	Presente	5,7785	5,9852	6,2821	6,6909	7,2349
	[12]	5,7789	5,9858	6,2827	6,6915	7,2356
5	Presente	6,0752	6,1575	6,2821	6,4604	6,7030
	[12]	6,0756	6,158	6,2827	6,4611	6,7036
10	Presente	6,2105	6,2380	6,2821	6,3484	6,4424
	[12]	6,2109	6,2386	6,2827	6,349	6,443

Tabela 4.2.20 - Terceira Frequência Fundamental para Viga com Gradiente Funcional a variar na direção axial, com  $L/h=20$ , com  $\rho_{ratio}=1$ , para diferentes expoentes da lei de potência e  $E_{ratio}$

ex		E <sub>ratio</sub>				
		0,25	0,5	1	2	4
0	Presente	6,5495	7,7887	9,2623	11,0148	13,0989
	[12]	6,6338	7,889	9,3817	11,157	13,268
0,1	Presente	6,9065	7,9454	9,2623	10,8922	12,8756
	[12]	6,9949	8,0472	9,3817	11,033	13,043
0,2	Presente	7,1547	8,0682	9,2623	10,7796	12,6621
	[12]	7,247	8,1715	9,3817	10,92	12,829
0,5	Presente	7,6325	8,3243	9,2623	10,5007	12,0943
	[12]	7,733	8,4317	9,3817	10,638	12,258
1	Presente	8,0667	8,5698	9,2623	10,1912	11,4081
	[12]	8,1753	8,6814	9,3817	10,324	11,562
2	Presente	8,4823	8,8088	9,2623	9,8731	10,6733
	[12]	8,5989	8,9246	9,3817	10,001	10,815
5	Presente	8,9002	9,0503	9,2623	9,5510	9,9292
	[12]	9,0262	9,1708	9,3817	9,6735	10,059
10	Presente	9,1007	9,1669	9,2623	9,3952	9,5725
	[12]	9,2305	9,2901	9,3817	9,5139	9,6942

Tabela 4.2.21 - Terceira Frequência Fundamental para Viga com Gradiente Funcional a variar na direção axial, com  $L/h=100$ , com  $\rho_{ratio}=1$ , para diferentes expoentes da lei de potência e  $E_{ratio}$

ex		$E_{ratio}$				
		0,25	0,5	1	2	4
0	Presente	6,6645	7,9255	9,4250	11,2083	13,3290
	[12]	6,6631	7,9238	9,423	11,206	13,326
0,1	Presente	7,0274	8,0844	9,4250	11,0844	13,1037
	[12]	7,0259	8,0827	9,423	11,082	13,101
0,2	Presente	7,2809	8,2094	9,4250	10,9707	12,8886
	[12]	7,2792	8,2076	9,423	10,968	12,886
0,5	Presente	7,7699	8,4709	9,4250	10,6878	12,3157
	[12]	7,7678	8,4691	9,423	10,685	12,313
1	Presente	8,2146	8,7219	9,4250	10,3721	11,6173
	[12]	8,2133	8,7199	9,423	10,37	11,614
2	Presente	8,6404	8,9663	9,4250	10,0474	10,8669
	[12]	8,6377	8,9642	9,423	10,045	10,864
5	Presente	9,0691	9,2136	9,4250	9,7185	10,1073
	[12]	9,0664	9,2114	9,423	9,7163	10,105
10	Presente	9,2737	9,3333	9,4250	9,5580	9,7397
	[12]	9,2713	9,3311	9,423	9,5559	9,7373

Os resultados obtidos para os casos cuja relação de aspecto é 20 apresentam uma ligeira discrepância face aos de referência, que são justificados pelo facto de em [12] utilizarem o campo de deslocamento definido segundo a teoria de vigas de Euler-Bernoulli, contrariamente ao presente modelo, que utiliza a teoria de vigas de Timoshenko. Esta discrepância é minimizada nos casos com relação de aspecto de 100, sendo verificada a partir da 3ª casa decimal.

Pela Tabela 4.2.10, é verificado que, para  $E_{ratio}$  inferior a 1, a frequência fundamental tende a aumentar com o aumento do expoente da lei de potência, visto que a expressão da fração volúmica caracteriza a distribuição de material com menor módulo de elasticidade, pelo que, com a progressão do expoente da lei de potência, existe progressivamente maior quantidade de material mais rígido, razão pela qual as frequências aumentam, tendo em consideração que a razão entre massas volúmicas é unitária; para  $E_{ratio}$  superior a 1, a frequência fundamental apresenta a tendência contrária, ou seja, diminui com o aumento do expoente da lei de potência, já que, neste caso, a expressão da fração volúmica caracteriza a distribuição com maior módulo de elasticidade, havendo, por isso, sucessivamente menor quantidade de material mais rígido. O mesmo comportamento é notado para as restantes frequências de ressonância apresentadas, tanto para a viga com gradiente funcional função da espessura como quando o gradiente é função do comprimento da estrutura.

## Caso 6 – Esquema de Homogeneização Mori Tanaka

As propriedades efetivas de um FGM podem ser modeladas, como já foi descrito, a partir da ponderação das frações volúmicas dos seus componentes, através da utilização de modelos micromecânicos, como a regra das misturas, que é a mais utilizada, e o esquema de homogeneização de Mori-Tanaka (MT). Com o intuito de comparar o comportamento estrutural de um componente FGM com diferentes esquemas de homogeneização, Barros e Junior [46] apresentaram um estudo de uma viga em balanço com duas constituições materiais distintas, e os dois esquemas de homogeneização referidos. Neste caso, o campo de deslocamentos foi aproximado com recurso a B-splines, que permitem uma representação muito precisa de estruturas complexas. As propriedades dos FGMs considerados apresentam-se na Tabela 4.2.22.

Tabela 4.2.22 - Propriedades dos Materiais que constituem os FGM's considerados no estudo de verificação

FGM I			FGM II		
Material	E [GPa]	$\nu$	Material	E [GPa]	$\nu$
<b>Si<sub>3</sub>N<sub>4</sub> (c)</b>	322,76	0,28	<b>Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> (c)</b>	380	0,3
<b>SUS304 (m)</b>	207,89	0,28	<b>Al (m)</b>	70	0,3

Os casos de estudos foram analisados a partir da FSDT, em que uma viga em balanço é sujeita a uma carga uniformemente distribuída de -1 kN/m, e a viga apresenta relações de aspeto  $L/h = 15$  e  $L/b = 16$ . O modelo implementado por Barros e Junior utiliza 10 nós, e a matriz de rigidez é construída através da integração exata com recurso à Quadratura de Gauss. Os autores apresentam os deslocamentos nodais sob a forma adimensional através das expressões, e m que a denominação TCV corresponde ao respetivo resultado obtido através da teoria clássica de vigas.

$$\begin{aligned}\bar{u}_0 &= \frac{u_0}{w_{TCV}} \\ \bar{w}_0 &= \frac{w}{w_{TCV}} \\ \bar{\theta}_0 &= \frac{\theta}{\theta_{TCV}}\end{aligned}\tag{4.2.10}$$

Para a mesma fração volúmica de material cerâmico, a regra de Misturas estima um módulo de elasticidade superior comparativamente ao modelo de Mori-Tanaka, o que resulta numa estrutura mais rígida, sendo que, no caso do FGM I, os resultados segundo MT são 2,62% inferiores, e para o FGM II, são 36,38% inferiores. Os resultados obtidos pelos autores e os calculados com o modelo desenvolvido e implementado neste trabalho são apresentados nas tabelas 4.2.23 e 4.2.24, para cada um dos FGMs, respetivamente. Neste caso, considerou-se uma viga com secção quadrada, com dimensões definidas em função do comprimento da viga, de 10 m.

Tabela 4.2.23 - Deslocamentos Adimensionalizados obtidos através da Regra das Misturas (RM) e do esquema de homogeneização de Mori-Tanaka (MT) para o FGM I

FGM I	ez	0	1	2	5	10	$\infty$
$\bar{u}_0$	RM	0	0,0040	0,0045	0,0036	0,0025	0
	RM [46]	0	0,0040	0,0045	0,0036	0,0025	0
	MT	0	0,0040	0,0044	0,0034	0,0023	0
	MT [46]	0	0,0041	0,0043	0,0034	0,0022	0
$\bar{w}_0$	RM	1,0045	1,2414	1,3003	1,3613	1,4141	1,5597
	RM [46]	1,0046	1,2413	1,3003	1,3612	1,4177	1,5595
	MT	1,0045	1,2523	1,3090	1,3711	1,4236	1,5597
	MT [46]	1,0046	1,2549	1,3112	1,3746	1,4332	1,5595
$\bar{\theta}_0$	RM	0,9999	1,2359	1,2943	1,3548	1,4074	1,5526
	RM [46]	1,0000	1,2357	1,2943	1,3547	1,4109	1,5525
	MT	0,9999	1,2466	1,3030	1,3645	1,4169	1,5527
	MT [46]	1,0000	1,2492	1,3051	1,3680	1,4264	1,5525

Tabela 4.2.24 - Deslocamentos Adimensionalizados obtidos através da Regra das Misturas (RM) e do esquema de homogeneização de Mori-Tanaka (MT) para o FGM II

FGM II	ez	0	1	2	5	10	$\infty$
$\bar{u}_0$	RM	0	0,02048	0,03406	0,04099	0,03548	0
	RM [46]	0	0,02050	0,03410	0,04100	0,03550	0
	MT	0	0,02511	0,03637	0,03857	0,03173	0
	MT [46]	0	0,03010	0,03720	0,03370	0,02360	0
$\bar{w}_0$	RM	1,0046	2,0141	2,5813	3,0548	3,3557	5,4536
	RM [46]	1,0046	2,0146	2,5820	3,0555	3,3952	5,4537
	MT	1,0046	2,2374	2,7537	3,1989	3,5522	5,4536
	MT [46]	1,0046	2,5212	2,9857	3,5241	4,0872	5,4537
$\bar{\theta}_0$	RM	1,0000	2,0063	2,5712	3,0404	3,3378	5,4285
	RM [46]	1,0000	2,0063	2,5711	3,0403	3,3766	5,4286
	MT	1,0000	2,2286	2,7422	3,1830	3,5331	5,4285
	MT [46]	1,0000	2,5101	3,5056	3,5056	4,0657	5,4286

Para o FGM II, verifica-se um ligeiro desvio nos deslocamentos adimensionais quando o expoente toma valores maiores, o que pode ser explicado pela diferença nos métodos de integração numérica utilizados nos modelos numéricos, aliado à maior diferença entre os módulos de elasticidade dos constituintes do material. Como o modelo de Barros e Junior utiliza integração exata, enquanto o modelo numérico implementado aplica a integração reduzida para avaliação dos coeficientes de rigidez de corte transversal, foi obtida uma viga com um comportamento menos rígido. No entanto, como no FGM I, os desvios são negligenciáveis, considera-se validado o modelo quanto ao esquema de homogeneização de Mori-Tanaka.

### Caso 7 – Treliça constituída por Material Isotrópico e Homogéneo

Após a verificação do modelo para estruturas unidimensionais, quer para material isotrópico homogéneo, quer para FGM, considerou-se pertinente a verificação de resultados, nomeadamente para reações nos apoios, deslocamentos nodais e frequências fundamentais, em estruturas bidimensionais (treliças e pórticos) em material isotrópico homogéneo, que posteriormente serão objeto de estudo como constituídas por material com gradiente funcional. A estrutura apresentada na Figura 4.2.3 é uma treliça constituída por 3 elementos viga-barra, em que cada elemento apresenta 3 nós, e por isso, 9 graus de liberdade, sujeita a uma carga vertical  $P$  no nó livre, com  $P = 100 \text{ N}$ .

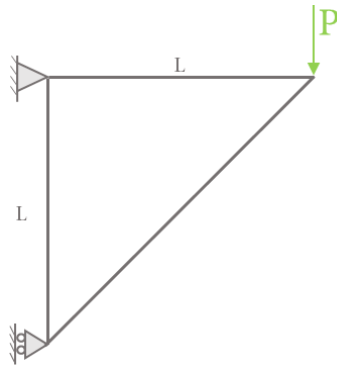


Figura 4.2.3 - Representação Esquemática de Treliça constituída por 3 elementos com Carga Concentrada Aplicada no nó Livre

Para a análise estática da estrutura, considerou-se que os elementos são constituídos por material metálico, isotrópico e homogéneo com módulo de elasticidade de  $200 \text{ GPa}$ , secção transversal quadrada com  $0,02 \text{ m}$  de lado, e que os elementos com orientação horizontal e vertical apresentam um comprimento ( $L$ ) de  $1 \text{ m}$ .

A Figura 4.2.4 representa a discretização mínima da treliça estudada e os graus de liberdade associados, e inclui o diagrama de corpo livre da mesma.

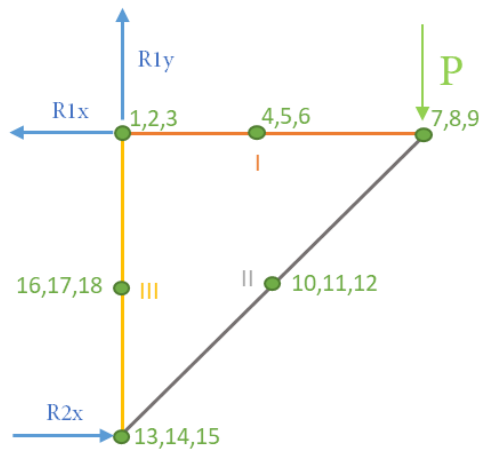


Figura 4.2.4 - Representação Esquemática do Diagrama de Corpo Livre da Treliça, incluindo a discretização mínima da estrutura considerando elementos unidimensionais quadráticos, e respetivos graus de liberdade

Realizando uma análise de vibração livre da estrutura em estudo, foram obtidos valores das primeiras 5 frequências fundamentais, apresentadas na Tabela 4.2.25, e na qual é verificada a convergência dos resultados obtidos com o aumento do número de elementos.

Tabela 4.2.25 - Estudo de Convergência para as Primeiras Cinco Frequências Fundamentais da Treliça

Nº elementos por viga-barra			1ª Frequência [rad/s]	2ª Frequência [rad/s]	3ª Frequência [rad/s]	4ª Frequência [rad/s]	5ª Frequência [rad/s]
I	II	III					
1	2	1	227,4732	400,7256	1013,2694	1064,9061	3356,0483
2	3	2	221,2066	351,8515	595,1156	778,1782	1537,1384
3	4	3	220,3388	347,4007	572,5513	746,8030	1376,9879
6	8	6	219,9760	346,2697	567,4019	734,2915	1319,1889
10	14	10	219,9583	346,2040	567,1005	733,5082	1315,5666

Recorrendo às equações de equilíbrio estático, e considerando que P toma um valor de 100 N, calcularam-se as reações nos apoios na Tabela 4.2.26.

Tabela 4.2.26 - Reações nos Apoios da Treliça através de Equilíbrio Estático

R1 <sub>x</sub> [N]	R2 <sub>x</sub> [N]	R1 <sub>y</sub> [N]
100	100	100

As tabelas 4.2.27 e 4.2.28 contêm, respectivamente, estudos de convergência relativos às reações nos apoios da treliça e aos deslocamentos nodais do nó de aplicação do carregamento pontual considerado.

Tabela 4.2.27 - Estudo de Convergência para as Reações nos Apoios da Treliça

Nº elementos por viga-barra principal			R1 <sub>x</sub> [N]	R1 <sub>y</sub> [N]	R2 <sub>x</sub> [N]
I	II	III			
1	2	1	100,0000	100,0000	100,0000
2	3	2	100,0000	100,0000	100,0000
3	4	3	100,0000	100,0000	100,0000
6	8	6	100,0000	99,9999	99,9999
10	14	10	100,0000	100,0000	100,0000

Tabela 4.2.28 - Estudo de Convergência para os Deslocamentos Nodais do Nó Livre da Treliça

Nº elementos por viga-barra principal			Deslocamento x [µm]	Deslocamento y [µm]	Rotação [rad] x10 <sup>-6</sup>
I	II	III			
1	2	1	1,2495	6,0329	6,3574
2	3	2	1,2495	6,0329	6,3574
3	4	3	1,2495	6,0329	6,3574
6	8	6	1,2495	6,0329	6,3574
10	14	10	1,2495	6,0329	6,3574

### Caso 8 – Pórtico constituído por Material Isotrópico e Homogéneo

A estrutura apresentada consiste num pórtico hiperestático constituído por 6 elementos viga-barra, em que cada elemento apresenta 3 nós, e por isso, 9 graus de liberdade, e cuja representação esquemática e carregamento considerado são apresentados na Figura 4.2.4 .

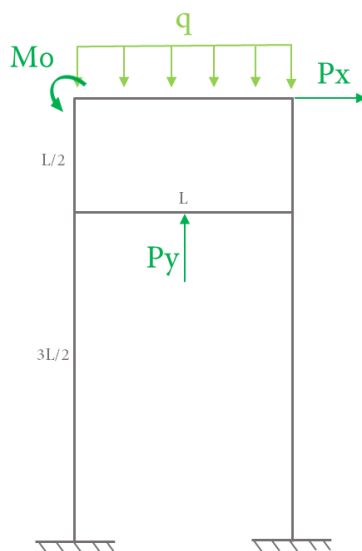


Figura 4.2.5 - Representação Esquemática do Pórtico e do Carregamento Considerado

Para a análise estática da estrutura, considerou-se que os elementos são constituídos por material metálico, isotrópico e homogéneo com módulo de elasticidade de 200 GPa, secção transversal quadrada com 0,02 m de lado, que os elementos com orientação horizontal apresentam um comprimento (L) de 1 m, e a altura da estrutura é de 2L, com  $P_x = 100$  N,  $P_y = 1000$  N,  $M_0 = 250$  Nm e  $q = 90$  N/m.

Para cada discretização considerada, tendo sido realizada uma divisão dos membros da estrutura de tal modo que os comprimentos dos elementos fossem aproximados entre si, obtiveram-se as primeiras 5 frequências fundamentais da estrutura, apresentadas na Tabela 4.2.29.

Tabela 4.2.29 - Estudo de Convergência para as Primeiras Cinco Frequências Fundamentais do Pórtico

Nº elementos por viga-barra principal						Frequências [rad/s]				
I	II	III	IV	V	VI	1 <sup>a</sup>	2 <sup>a</sup>	3 <sup>a</sup>	4 <sup>a</sup>	5 <sup>a</sup>
1	1	1	1	1	1	34,0064	253,4746	426,2850	725,3306	840,2685
2	2	2	2	2	2	33,6577	216,8093	266,4129	405,3898	467,4172
3	1	2	1	3	2	33,6382	214,1387	256,4574	388,4417	463,4579
6	2	4	2	6	4	33,6194	212,9027	254,1673	381,7959	451,0197
9	3	6	3	9	6	33,6349	212,8347	254,0387	381,4347	450,3395

A Figura 4.2.6 apresenta esquematicamente o diagrama de corpo livre do pórtico estudado, o carregamento considerado, e inclui a discretização mínima com elementos quadráticos e os graus de liberdade existentes na estrutura.

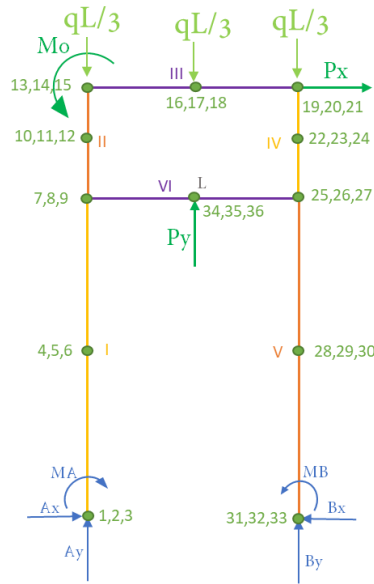


Figura 4.2.6 - Representação Esquemática do Diagrama de Corpo Livre do Pórtico, incluindo a discretização mínima da estrutura considerando elementos unidimensionais quadráticos, e respectivos graus de liberdade

Para as mesmas discretizações consideradas, foram calculadas as reações nos encastramentos da estrutura. Neste caso, assumiu-se que as forças suportadas nos nós do elemento III devido ao carregamento transversal distribuído, eram equitativamente alocadas. Nas tabelas 4.2.30 e 4.2.31 são apresentados estudos de convergência para as reações dos encastramentos do pórtico considerado.

Tabela 4.2.30 - Estudo de Convergência para as Reações no Encastramento à esquerda do Pórtico

Nº elementos por viga-barra principal						Ax [N]	Ay [N]	MA [Nm]
I	II	III	IV	V	VI			
1	1	1	1	1	1	44,7968	73,5445	36,6813
2	2	2	2	2	2	44,7967	73,5432	36,6814
3	1	2	1	3	2	44,8049	73,5311	36,6878
6	2	4	2	6	4	44,8342	73,4699	36,7131
9	3	6	3	9	6	44,8350	73,4990	36,7094

Tabela 4.2.31 - Estudo de Convergência para as Reações no Encastramento à direita do Pórtico

Nº elementos por viga-barra principal						Bx [N]	By [N]	MB [Nm]
I	II	III	IV	V	VI			
1	1	1	1	1	1	55,2132	183,5445	41,8804
2	2	2	2	2	2	55,2131	183,5435	41,8805
3	1	2	1	3	2	55,2214	183,5313	41,8870
6	2	4	2	6	4	55,2505	183,4686	41,9121
9	3	6	3	9	6	55,2522	183,5039	41,9089

De modo a verificar os resultados obtidos através do método dos elementos finitos, foram também calculadas as reações nos encastramentos e o deslocamento dos graus de liberdade sujeitos às cargas externas aplicadas à estrutura, através do 2º Teorema de Castigliano e pela aplicação Ftool, e cujos resultados são apresentados na Tabela 4.2.32.

Tabela 4.2.32 – Reações nos Encastramentos e Deslocamentos Nodais correspondentes aos Graus de Liberdade 19, 35 e 15, obtidos através do 2º Teorema de Castigliano e pela Aplicação Ftool

		2º Teorema de Castigliano	Ftool
<b>Reações</b>	Ax [N]	45,1041	44,7438
	Ay [N]	73,4626	73,5544
	MA [N]	36,7870	36,6529
	Bx [N]	54,8959	55,2562
	By [N]	183,4626	183,5544
	MB [N]	41,6755	41,9015
<b>Deslocamentos GdL</b>	19 (Px) [mm]	5,1593	5,2130
	35 (Py) [mm]	0,2190	0,2063
	15 (M0) [rad]	9,6906 x 10 <sup>-3</sup>	9,740 x 10 <sup>-3</sup>

### Caso 9 – Análise de Viga Isotrópica Homogénea em Balanço no Espaço

Numa primeira verificação (de carácter académico) do modelo de elementos finitos implementado para uma estrutura no espaço 3D, considerou-se uma viga orientada segundo o eixo coordenado Oy, com 400 mm de comprimento, secção transversal quadrada com 20 mm de lado, tendo-se uma relação de aspeto L/h = 20 (para os quais a teoria clássica de vigas apresenta ainda resultados satisfatórios face à teoria de Timoshenko), e para os quais foram testados diferentes carregamentos aplicados na extremidade livre da viga, ou distribuídos uniformemente ao longo do seu comprimento.

Para uma carga axial aplicada na extremidade livre da viga, considerando que se trata de uma viga constituída por alumínio, E = 70 GPa, o deslocamento axial neste ponto pode calcular-se através da expressão (da lei de Hooke):

$$\Delta x^e = \frac{PL}{EA} \quad (4.2.11)$$

Para uma viga com uma carga transversal aplicada na extremidade livre, o deslocamento transversal e rotação desse ponto podem calcular-se através das equações universais, pelas expressões:

$$\Delta z^e = \frac{PL^3}{3 E I_y} \quad (4.2.12)$$

$$\theta_y^e = \frac{PL^2}{2 E I_y} \quad (4.2.13)$$

Para uma viga com uma carga uniformemente distribuída em todo o seu comprimento, o deslocamento transversal e rotação desse ponto podem calcular-se através das equações universais, pelas expressões:

$$\Delta z^e = \frac{PL^4}{8 E I_y} \quad (4.2.14)$$

$$\theta_y^e = \frac{PL^3}{6 E I_y} \quad (4.2.15)$$

Para o caso de uma viga em balanço coincidente com o eixo Oy global, para os diferentes carregamentos considerados obtiveram-se os valores dos deslocamentos nodais no referencial global. Na Tabela 4.2.33 apresentam-se os deslocamentos axiais e rotação resultantes da aplicação das cargas, representadas esquematicamente na Figura 4.2.7.

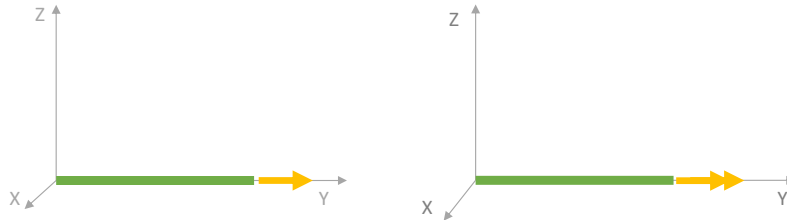


Figura 4.2.7 – Representação Esquemática de Viga em Balanço Orientada segundo eixo OY, sujeita a carga na direção axial e momento torsor na extremidade livre da viga, respetivamente

Tabela 4.2.33 – Deslocamentos Axial e Rotação em Torno do Eixo, respetivamente, da Viga em Balanço no Espaço

	<b>GdL</b>	<b>Carga Pontual</b>	<b>Momento Torsor</b>
<b>v</b>	Presente [ $\mu\text{m}$ ]	14,2757	
	Equações Universais [ $\mu\text{m}$ ]	14,2857	0
	Solidworks [ $\mu\text{m}$ ]	14,2857	
<b><math>\theta_y</math></b>	Presente [rad]		0,6683
	Equações Universais [rad]	0	0,6593
	Solidworks [rad]		0,6602

Na Tabela 4.2.34 apresentam-se os deslocamentos transversais e rotações resultantes da aplicação das cargas, representadas esquematicamente na Figura 4.2.8.

Tabela 4.2.34 - Deslocamentos Transversais e Rotações nos planos YZ e XY, respetivamente, da Viga em Balanço no Espaço

	<b>GdL</b>	<b>Carga Pontual</b>	<b>Carga Distribuída</b>
<b>u/w</b>	Presente [mm]	22,9017	3,4375
	Equações Universais [mm]	22,8571	3,4276
	Solidworks [mm]	22,9017	3,4375
<b><math>\theta_z/\theta_x</math></b>	Presente [rad]	0,0857	0,0114
	Equações Universais [rad]	0,0857	0,0114
	Solidworks [rad]	0,0857	0,0114

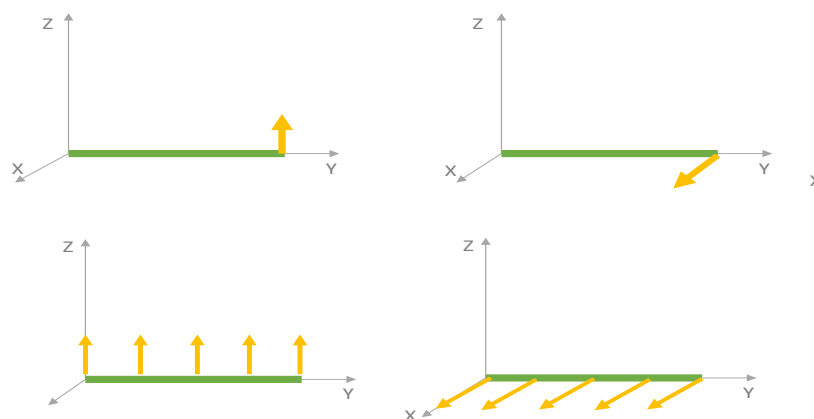


Figura 4.2.8 – Representação Esquemática de Viga em Balanço Orientada segundo eixo OY, sujeita a cargas transversais nos planos ZY e XY, respetivamente, uniformemente distribuídas ou aplicadas na extremidade livre da viga

Na Tabela 4.2.35 são apresentadas as primeiras 5 frequências fundamentais da viga obtidas com o modelo para uma viga com 1, 2 e 3 elementos, de modo a comparar com as frequências obtidas através do software Solidworks, com respetivos desvios.

Tabela 4.2.35 - Primeiras Cinco Frequências de Ressonância calculadas para a Viga em Balanço no Espaço com recurso a 1, 2 e 3 elementos, comparando com as obtidas via Solidworks, e respetivos desvios

Modo	Frequência [rad/s] (solidworks)	Frequência [rad/s] (1 elemento)	Desvio (%)	Frequência [rad/s] (2 elementos)	Desvio (%)	Frequência [rad/s] (3 elementos)	Desvio (%)
1	645,09	662,0230	2,6249	645,5166	0,0661	644,6887	-0,0622
2	645,09	662,0230	2,6249	645,5166	0,0661	644,6887	-0,0622
3	4018,7	5341,6085	32,9188	4222,5245	5,0719	4037,1981	0,4603
4	4018,7	5341,6085	32,9188	4222,5245	5,0719	4037,1981	0,4603
5	11148	11360,6804	1,9078	11321,0884	1,5526	11318,7730	1,5319

### Caso 10 – Treliça Isotrópica e Homogénea 3D

Para o posterior estudo ótimo de uma treliça no espaço, foi considerada uma estrutura com 3 componentes, com uma carga vertical aplicada no nó central. A secção transversal de cada é quadrada com 60 mm de lado, e as coordenadas espaciais dos apoios simples da estrutura resultam em barras com relações de aspeto entre 30 e 35. A Figura 4.2.9 apresenta a representação esquemática da estrutura, e a Tabela 4.2.36 contém as coordenadas espaciais dos apoios da estrutura.

Tabela 4.2.36 - Coordenadas no Espaço dos Apoios Simples da Treliça 3D

Apoio Simples	X [m]	Y [m]	Z [m]
1	0	1,5	-1
2	-1	1,5	1
3	1	1,5	1

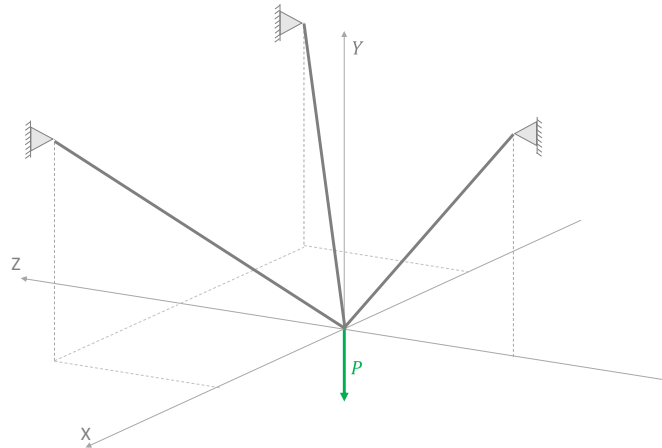


Figura 4.2.9 - Representação Esquemática de uma Treliça 3D com Carga Aplicada no Nó Livre

Para a verificação das estruturas no espaço, recorreu-se ao software Solidworks, e do qual foram retirados os deslocamentos nodais do nó solicitado com uma carga de 1000 N, apresentados na Tabela 4.2.37, e as primeiras cinco frequências naturais da estrutura, apresentadas na Tabela 4.2.38, de modo a comparar os resultados do modelo implementado.

Tabela 4.2.37 - Deslocamentos Nodais do Nó Livre da Estrutura sujeito a um carregamento de 1000 N segundo o eixo negativo oY

GdL	Deslocamento [SW]	Deslocamento [Presente]	Desvio (%)
$u_x$ [ $\mu\text{m}$ ]	6,912e-3	4,0063e-30	-100,0000
$u_y$ [ $\mu\text{m}$ ]	- 4,517	- 4,5142	-0,0620
$u_z$ [ $\mu\text{m}$ ]	0,9743	0,9777	0,3490

Para as frequências naturais, realizou-se um estudo de convergência, devido à ligeira discrepância entre as frequências obtidas para a primeira discretização. Apesar de haver um ligeiro desvio entre os resultados provenientes do Solidworks e os obtidos no presente trabalho, o modelo encontra-se verificado, visto que os mesmos podem ter a sua origem na utilização, por parte do software, de uma discretização com 56 nós e 52 elementos.

Tabela 4.2.38 – Primeiras Cinco Frequências de Ressonância da Treliça 3D obtidas com 1, 2 e 3 elementos/viga-barras, comparando com Solidworks, e respetivos desvios

Modo	Frequência [rad/s] (SW)	Frequência [rad/s] (1 elemento)	Desvio (%)	Frequência [rad/s] (2 elementos)	Desvio (%)	Frequência [rad/s] (3 elementos)	Desvio (%)
1	203,96	225,9306	10,7720	206,1020	1,05021	204,2924	0,1630
2	220,95	246,8335	11,7146	223,4620	1,13691	221,3219	0,1683
3	235,07	263,4497	12,0729	237,8326	1,17522	235,3219	0,1072
4	319,35	450,5555	41,0852	327,8658	2,66660	320,3868	0,3247
5	361,04	503,3285	39,4107	370,0510	2,49585	362,0566	0,2816

### Caso 11 – Pórtico Isotrópico e Homogéneo 3D

Para o estudo e projeto ótimo de um pórtico no espaço, considerou-se uma estrutura semelhante à representação esquemática da Figura 4.2.10. A secção transversal de cada viga é quadrada com 50 mm de lado, com 1 m de comprimento, pelo que a relação de aspeto de todas os elementos viga-barra é de 20.

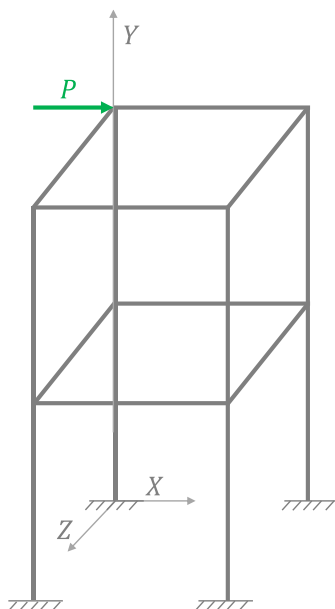


Figura 4.2.10 - Representação Esquemática do Pórtico 3D com Carga Concentrada Aplicada

Analogamente ao caso de verificação 10, para a verificação das estruturas no espaço, recorreu-se ao software Solidworks, e do qual foram retirados os deslocamentos nodais do nó solicitado com uma carga de 1000 N, presentes na Tabela 4.2.39, e as primeiras cinco frequências naturais da estrutura, apresentadas na Tabela 4.2.40, de modo a comparar os resultados do modelo implementado.

Tabela 4.2.39 - Deslocamentos Nodais do Nó no qual foi aplicada a Carga de 1000 N

GdL	Deslocamento [SW]	Deslocamento [Presente]	Desvio (%)
$u_x$ [mm]	3,380	3,4561	2,2515
$u_y$ [mm]	0,0151	0,0061	-59,5759
$u_z$ [mm]	-0,7909	-0,7991	1,0368

Para as frequências naturais, realizou-se um estudo de convergência, devido à ligeira discrepância entre as frequências obtidas para a primeira discretização. Apesar de haver um ligeiro desvio entre os resultados provenientes do Solidworks, que utiliza uma discretização com 712 nós e 700 elementos, e os obtidos no presente trabalho, o modelo encontra-se verificado.

Tabela 4.2.40 - Primeiras Cinco Frequências de Ressonância do Pórtico 3D obtidas com 1, 2 e 3 elementos/viga-barras, comparando com Solidworks, e respectivos desvios

Modo	Frequência [rad/s] (SW)	Frequência [rad/s] (1 elemento)	Desvio (%)	Frequência [rad/s] (2 elementos)	Desvio (%)	Frequência [rad/s] (3 elementos)	Desvio (%)
1	90,885	90,4259	-0,5051	90,1666	-0,7904	90,1535	-0,8049
2	90,896	90,4259	-0,5172	90,1666	-0,8025	90,1535	-0,8169
3	116,37	115,9469	-0,3636	115,4462	-0,7938	115,4201	-0,8163
4	292,38	299,1564	2,3177	290,6082	-0,6060	290,1865	-0,7502
5	292,46	299,1564	2,2897	290,6082	-0,6332	290,1865	-0,7774

### 4.3 Verificação do Modelo de Otimização de Arquimedes

Para a verificação do modelo de otimização de Arquimedes implementado, procurou-se apresentar uma verificação dos valores ótimos calculados através do presente algoritmo relativamente aos obtidos pelo autor [47], em três tipos de funções de *Benchmark*, cujas expressões são apresentadas na Tabela 4.3.1.

Tabela 4.3.1 - Funções de Benchmark Utilizadas na Verificação do Modelo de Otimização de Arquimedes Implementado

Nome da Função	$f$	Dim	$f_{min}$	$\bar{x}^*$
Goldstein-Price	$f_1 = (1 + (x_1 + x_2 + 1)^2(19 - 14x_1 + 3x_1^2 - 14x_2 + 6x_1x_2 + 3x_2^2))(30 + (2x_1 - 3x_2))^2(18 - 32x_1 + 12x_1^2 + 48x_2 - 36x_1x_2 + 27x_2^2)$	2	3	(0, -1)
Esfera	$f_2 = \sum_{i=1}^N x_i^2$	30	0	(0, ..., 0)
Rastrigin	$f_3 = 10 + \sum_{i=1}^N [x_i^2 - 10\cos(2\pi x_i)]$	30	0	(0, ..., 0)

Nos estudos efetuados na literatura [47], foram consideradas 30 corridas independentes, 1000 iterações em cada corrida, e populações de 20 indivíduos. Os resultados presentes na literatura para os mínimos globais de cada uma das funções são apresentados na Tabela 4.3.2.

Tabela 4.3.2 – Mínimos Globais obtidos em [47] das Funções de Benchmark Utilizadas na Verificação do Modelo de Otimização de Arquimedes

$f$	Dim	$x_{min}$	$x_{max}$	$f_{min}$ [47]
$f_1$	2	-2	2	3,0017
$f_2$	30	-100	100	1,2E-222
$f_3$	30	-5,12	5,12	10,4661

Para a verificação do modelo de otimização implementado, no caso da primeira função de Benchmark, que é uma função multimodal, foram considerados os parâmetros já referidos: 30

corridas, 1000 iterações e 20 indivíduos, e apresentam-se os valores obtidos para o mínimo global na Tabela 4.3.3.

Tabela 4.3.3 – Resultados do Estudo de Verificação da Função Goldstein-Price, através da realização de 30 corridas, 1000 iterações, e populações com 20 indivíduos

Corrida	Valor ótimo	x1	x2	Corrida	Valor ótimo	x1	x2
1	3,0002	1,1102E-04	-0,9994	16	3,0001	4,7648E-04	-0,9999
2	30,0977	-5,8577E-01	-0,4156	17	3,0001	-4,7412E-04	-1,0001
3	3,0001	-3,3235E-04	-0,9996	18	30,0361	-5,9060E-01	-0,4089
4	3,0000	2,6756E-04	-0,9999	19	3,0000	1,9420E-04	-1,0000
5	3,0000	3,1329E-04	-0,9999	20	3,0000	4,5786E-05	-1,0000
6	3,0004	1,3275E-03	-0,9996	21	3,0000	-4,5688E-05	-1,0002
7	3,0000	-2,0849E-04	-0,9998	22	3,0002	-9,3851E-04	-1,0001
8	3,0001	3,9645E-04	-0,9997	23	30,0001	-6,0049E-01	-0,3997
9	34,9873	-4,0628E-01	-0,5930	24	31,2376	-5,3654E-01	-0,4538
10	3,0001	-4,5672E-04	-0,9998	25	30,1436	-5,8133E-01	-0,4186
11	3,0000	-4,0537E-04	-1,0001	26	3,0002	-2,1037E-04	-1,0007
12	3,0000	-6,9610E-05	-1,0001	27	3,0000	7,5610E-05	-0,9999
13	3,0000	1,2492E-04	-1,0000	28	34,9464	-4,1426E-01	-0,5867
14	34,9675	-3,9006E-01	-0,6108	29	3,0000	-1,6536E-04	-0,9999
15	30,0733	-5,8613E-01	-0,4122	30	3,0001	0,00047848	-1,0000
<b>Média</b>					11,6497		
<b>Desvio Padrão</b>					13,2696		

Por observação dos resultados obtidos na Tabela 4.3.3, pode verificar-se que o modelo tende, por vezes, a convergir para mínimos locais, nomeadamente nas corridas 2, 9, 14, 15, 18, 23, 24, 25 e 28. Para contornar este problema, considerou-se a possibilidade de implementar uma técnica de reinicialização inicialmente considerada conjuntamente com a técnica dos algoritmos genéticos, neste último caso, conjugado com populações de dimensão reduzida (micro-GA), que consiste na renovação da população ao fim de um determinado número de iterações. Para isso, de 10 em 10 iterações foi registado e mantido o melhor valor, e renovou-se a restante população. A utilização desta técnica tem como objetivo minimizar possíveis convergências locais precoces e o refrescamento da diversidade da população a um menor custo computacional, dado serem utilizadas com populações mais pequenas. Neste caso, consideraram-se os mesmos parâmetros, de modo a avaliar o comportamento do algoritmo, e apresentam-se os resultados obtidos na Tabela 4.3.4.

Tabela 4.3.4 - Resultados do Estudo de Verificação da Função Goldstein-Price com inclusão de Técnica de Reinicialização da População, através da realização de 30 corridas, 1000 iterações, e populações com 20 indivíduos

Corrida	Valor ótimo	x1	x2	Corrida	Valor ótimo	x1	x2
1	3,0000	-9,104E-05	-1,0001	16	3,0001	-5,058E-04	-1,0002
2	3,0000	-2,402E-04	-1,0002	17	3,0000	-1,210E-04	-1,0001
3	3,0003	-1,048E-03	-1,0005	18	3,0000	1,125E-04	-0,9998
4	3,0001	-5,879E-04	-1,0003	19	3,0001	-3,505E-04	-0,9998
5	3,0010	1,873E-03	-0,9989	20	3,0000	1,019E-04	-0,9999
6	3,0001	-4,284E-04	-1,0004	21	3,0001	5,071E-04	-0,9998
7	3,0036	2,260E-03	-1,0018	22	3,0000	-2,140E-04	-1,0001
8	3,0010	5,578E-05	-0,9985	23	3,0000	-9,104E-05	-1,0001
9	3,0000	-3,553E-05	-1,0000	24	3,0000	-2,402E-04	-1,0002
10	3,0000	1,147E-04	-0,9999	25	3,0003	-1,048E-03	-1,0005
11	3,0001	-5,802E-04	-1,0003	26	3,0001	-5,879E-04	-1,0003
12	3,0000	-1,462E-04	-0,9999	27	3,0010	1,873E-03	-0,9989
13	3,0001	-5,722E-04	-0,9997	28	3,0001	-4,284E-04	-1,0004
14	3,0001	7,095E-04	-0,9999	29	3,0036	2,260E-03	-1,0018
15	3,0000	-6,933E-05	-0,9999	30	3,0010	5,578E-05	-0,9985
<b>Média</b>					3,0002		
<b>Desvio Padrão</b>					0,0007		

A aplicação da técnica de reinicialização da população, no caso da função Goldstein-Price, permitiu ao algoritmo convergir para o extremo global em todas as corridas efetuadas, sem que fosse necessário o aumento dos parâmetros, que implicariam um maior custo computacional.

Para as funções de Benchmark para as quais em [47] foi considerada dimensão 30, foram realizados estudos com populações e número máximo de iterações idênticas às da literatura, no entanto, foram consideradas dimensões diferentes, com o intuito de avaliar o comportamento do algoritmo. Assim, realizaram-se séries de 10 corridas, visto que cada corrida implica um peso computacional bastante elevado, para dimensão 30, 10 e 5. Os resultados desses estudos são apresentados nas tabelas 4.3.5, 4.3.6 e 4.3.7, respectivamente.

Tabela 4.3.5 - Resultados do Estudo de Verificação da Função da Esfera com Dimensão de 30, através da realização de 10 corridas, 1000 iterações, e populações com 20 indivíduos

Corrida	Valor ótimo	Corrida	Valor ótimo
1	0,6679	6	0,0057
2	0,0047	7	0,0059
3	0,0059	8	0,4575
4	0,0087	9	0,0081
5	0,0046	10	0,0081
<b>Média</b>		0,1177	
<b>Desvio Padrão</b>		0,2274	

Tabela 4.3.6 - Resultados do Estudo de Verificação da Função da Esfera com Dimensão de 10, através da realização de 10 corridas, 1000 iterações, e populações com 20 indivíduos

<b>Corrida</b>	<b>Valor ótimo</b>	<b>Corrida</b>	<b>Valor ótimo</b>
<b>1</b>	2,1747E-04	<b>6</b>	2,3956E-04
<b>2</b>	7,3474E-05	<b>7</b>	3,3896E-04
<b>3</b>	2,8913E-02	<b>8</b>	2,6810E-04
<b>4</b>	4,4930E-03	<b>9</b>	1,1240E-04
<b>5</b>	6,0464E-05	<b>10</b>	1,5916E-04
<b>Média</b>		3,4876E-03	
<b>Desvio Padrão</b>		8,5724E-03	

Tabela 4.3.7 - Resultados do Estudo de Verificação da Função da Esfera com Dimensão de 5, através da realização de 10 corridas, 1000 iterações, e populações com 20 indivíduos

<b>Corrida</b>	<b>Valor ótimo</b>	<b>Corrida</b>	<b>Valor ótimo</b>
<b>1</b>	1,5113E-05	<b>6</b>	9,6662E-06
<b>2</b>	4,7203E-06	<b>7</b>	2,1062E-05
<b>3</b>	6,0332E-04	<b>8</b>	4,2217E-05
<b>4</b>	3,4619E-04	<b>9</b>	6,6066E-06
<b>5</b>	3,7461E-04	<b>10</b>	2,8057E-05
<b>Média</b>		1,4516E-04	
<b>Desvio Padrão</b>		2,0417E-04	

Tabela 4.3.8 - Resultados do Estudo de Verificação da Função da Esfera com Dimensão de 2, através da realização de 30 corridas, 1000 iterações, e populações com 20 indivíduos

<b>Corrida</b>	<b>Valor ótimo</b>	<b>x1</b>	<b>x2</b>	<b>Corrida</b>	<b>Valor ótimo</b>	<b>x1</b>	<b>x2</b>
<b>1</b>	3,6562E-07	2,6163E-04	-5,4513E-04	<b>16</b>	5,0920E-08	2,1654E-04	-6,3475E-05
<b>2</b>	5,0441E-07	7,0688E-04	6,8797E-05	<b>17</b>	4,0154E-08	1,0168E-04	-1,7267E-04
<b>3</b>	3,2827E-10	-1,6628E-05	-7,1963E-06	<b>18</b>	7,7451E-08	-2,2570E-04	-1,6283E-04
<b>4</b>	3,2671E-08	1,6794E-04	6,6830E-05	<b>19</b>	1,9488E-08	-2,0595E-05	1,3807E-04
<b>5</b>	9,7023E-07	9,7064E-04	-1,6761E-04	<b>20</b>	2,5073E-07	-4,3811E-04	2,4246E-04
<b>6</b>	6,6777E-08	-1,7222E-04	-1,9266E-04	<b>21</b>	1,4535E-07	-3,8125E-04	-8,7104E-07
<b>7</b>	4,9175E-07	3,1464E-05	-7,0054E-04	<b>22</b>	6,1947E-08	1,4259E-04	2,0400E-04
<b>8</b>	1,1934E-07	-2,0033E-04	2,8144E-04	<b>23</b>	1,2631E-08	3,6911E-05	1,0615E-04
<b>9</b>	2,1695E-07	4,1393E-04	-2,1357E-04	<b>24</b>	1,2202E-06	5,3236E-05	-1,1033E-03
<b>10</b>	1,0607E-08	1,0275E-04	7,0147E-06	<b>25</b>	3,7686E-08	6,5380E-05	-1,8279E-04
<b>11</b>	6,4217E-07	-3,0060E-04	-7,4284E-04	<b>26</b>	2,7144E-07	2,9385E-04	-4,3023E-04
<b>12</b>	2,1608E-07	1,3705E-04	4,4418E-04	<b>27</b>	1,6715E-09	-3,1453E-05	2,6118E-05
<b>13</b>	3,1922E-07	1,9014E-04	-5,3204E-04	<b>28</b>	8,9330E-07	2,0204E-04	9,2330E-04
<b>14</b>	2,7189E-08	1,2716E-04	-1,0498E-04	<b>29</b>	1,0035E-07	2,3730E-04	2,0985E-04
<b>15</b>	5,5599E-08	-9,9493E-05	2,1378E-04	<b>30</b>	1,6814E-07	3,4183E-04	2,2648E-04
<b>Média</b>					2,4635E-07		
<b>Desvio Padrão</b>					3,0991E-07		

Os estudos apresentados nas tabelas 4.3.5, 4.3.6 e 4.3.7 mostram que, para problemas com as dimensões avaliadas, seria necessário aumentar os parâmetros relativos ao número máximo de iterações e à dimensão da população para que o valor médio da série de corridas tivesse a mesma ordem de grandeza que em [45] (no caso de dimensão 30), o que implicaria tempos computacionais muito elevados. No entanto, como se pretende otimizar estruturas FGM, em que o número de variáveis de projeto consideradas é reduzido, procedeu-se ao estudo do comportamento do algoritmo para dimensão 2, cujos resultados são apresentados na Tabela 4.3.8. Para a função da esfera com dimensão 2 da Tabela 4.3.8, os resultados obtidos para o mínimo global da função estudada e respetivas soluções ótimas apresentam ordem de grandeza compatível com os valores expectáveis indicados na Tabela 4.3.1.

Por fim, relativamente à função Rastrigin, realizaram-se 10 corridas em vez de 30 para os parâmetros definidos em [47], e para os quais se obtiveram os valores presentes na Tabela 4.3.9.

Tabela 4.3.9 - Resultados do Estudo de Verificação da Função da Esfera com Dimensão de 30, através da realização de 10 corridas, 1000 iterações, e populações com 20 indivíduos

<b>Corrida</b>	<b>Valor ótimo</b>	<b>Corrida</b>	<b>Valor ótimo</b>
<b>1</b>	149,7459	6	191,5407
<b>2</b>	151,9400	7	141,6163
<b>3</b>	192,2579	8	133,4298
<b>4</b>	131,3572	9	180,4365
<b>5</b>	185,6333	10	231,9137
<b>Média</b>		168,9871	
<b>Desvio Padrão</b>		30,8358	

Os mínimos globais obtidos na série de 10 corridas para 30 variáveis, apresentados na Tabela 4.3.9, sugerem que, para que o valor médio dos mesmos tomasse um valor próximo do obtido em [47] seria necessário aumentar os parâmetros de entrada, nomeadamente o número de indivíduos na população e as iterações, assim como restringir os limites que caracterizam cada variável, no entanto, isso traria um peso computacional muito elevado. Analogamente à função da esfera, optou-se por introduzir a técnica da renovação da população em determinadas iterações, com o intuito de averiguar o efeito da mesma no valor médio. Os resultados obtidos são apresentados na Tabela 4.3.10.

Neste caso, a utilização da técnica de reinicialização não introduz uma redução significativa no valor médio. Mais uma vez, como se pretende otimizar estruturas FGM, em que o número de variáveis de projeto consideradas é reduzido, procedeu-se ao estudo do comportamento do algoritmo para esta função para dimensão 2. Assim, na Tabela 4.3.11 são apresentados os resultados obtidos numa série de 30 corridas para uma população com 20 indivíduos, 1000 iterações, e 2 variáveis.

Tabela 4.3.10 - Resultados do Estudo de Verificação da Função da Esfera com Dimensão de 30 incluindo a Técnica de Reinicialização da População a cada 10 iterações, através da realização de 10 corridas, 1000 iterações, e populações com 20 indivíduos

<b>Corrida</b>	<b>Valor ótimo</b>	<b>Corrida</b>	<b>Valor ótimo</b>
<b>1</b>	182,7640	<b>6</b>	176,6780
<b>2</b>	128,2823	<b>7</b>	164,3218
<b>3</b>	132,5087	<b>8</b>	175,7749
<b>4</b>	213,2652	<b>9</b>	193,8015
<b>5</b>	123,3375	<b>10</b>	155,8608
<b>Média</b>		164,6595	
<b>Desvio Padrão</b>		28,1949	

Tabela 4.3.11 - Resultados do Estudo de Verificação da Função da Esfera com Dimensão de 2, através da realização de 30 corridas, 1000 iterações, e populações com 20 indivíduos

<b>Corrida</b>	<b>Valor ótimo</b>	<b>x1</b>	<b>x2</b>	<b>Corrida</b>	<b>Valor ótimo</b>	<b>x1</b>	<b>x2</b>
<b>1</b>	2,2261E-06	7,1575E-05	-7,8086E-05	<b>16</b>	7,5106E-06	-9,7429E-05	1,6842E-04
<b>2</b>	8,7611E-05	-6,4460E-04	-1,6155E-04	<b>17</b>	9,7786E-06	-5,8530E-05	-2,1416E-04
<b>3</b>	3,2354E-05	2,0283E-04	-3,4920E-04	<b>18</b>	4,4038E-05	2,2631E-04	4,1323E-04
<b>4</b>	2,0809E-05	3,1148E-04	8,8684E-05	<b>19</b>	1,1002E-04	7,9916E-05	7,4038E-04
<b>5</b>	6,0460E-04	1,3181E-03	-1,1446E-03	<b>20</b>	2,9182E-05	3,7090E-04	-9,7611E-05
<b>6</b>	3,5706E-05	-4,1523E-04	-8,6955E-05	<b>21</b>	8,8181E-06	-1,7562E-04	-1,1664E-04
<b>7</b>	3,8134E-04	-4,7342E-04	1,3031E-03	<b>22</b>	6,2623E-05	3,6919E-04	-4,2350E-04
<b>8</b>	7,2106E-05	1,9886E-04	5,6913E-04	<b>23</b>	9,3279E-08	-1,3761E-05	1,6757E-05
<b>9</b>	1,3137E-06	4,9995E-05	-6,4204E-05	<b>24</b>	6,5966E-06	-1,5477E-04	-9,6421E-05
<b>10</b>	1,6951E-04	-8,6029E-05	9,2034E-04	<b>25</b>	3,8960E-06	1,1958E-04	7,3065E-05
<b>11</b>	2,6723E-06	1,1170E-04	-3,1524E-05	<b>26</b>	1,9488E-04	2,4492E-04	-9,6037E-04
<b>12</b>	1,2621E-05	-1,9397E-04	1,6122E-04	<b>27</b>	2,5494E-05	-3,4838E-04	-8,4494E-05
<b>13</b>	8,4976E-07	-2,3366E-05	6,1133E-05	<b>28</b>	2,3699E-05	-1,6866E-04	-3,0168E-04
<b>14</b>	5,1541E-06	7,9984E-05	1,3993E-04	<b>29</b>	4,5645E-08	1,3583E-05	-6,7504E-06
<b>15</b>	4,4782E-05	3,9299E-04	2,6698E-04	<b>30</b>	4,5579E-05	-4,0122E-04	-2,6223E-04
<b>Média</b>					6,8197E-05		
<b>Desvio Padrão</b>					1,2628E-04		

Para a função Rastrigin com dimensão 2, o algoritmo de Arquimedes permitiu obter resultados obtidos para o mínimo global da função estudada e respectivas soluções ótimas cuja ordem de grandeza é compatível com os valores expectáveis indicados na Tabela 4.3.1.

## 4.4 Verificação do Modelo de Otimização das Raposas Vermelhas

Para a verificação do modelo de otimização das Raposas Vermelhas implementado, realizou-se a verificação dos valores ótimos obtidos através do presente algoritmo relativamente aos obtidos pelo autor [39], em três tipos de funções de *benchmark*, em que cada função foi testada em 100 corridas independentes, 100 iterações e 100 indivíduos. Para a verificação do modelo de otimização, foram realizadas apenas 10 corridas independentes para as funções de *benchmark* com duas variáveis, e 20 corridas independentes para a função com 20 variáveis, considerando-se para cada função 100 iterações e 100 indivíduos. As funções testadas são apresentadas na Tabela 4.4.1.

Tabela 4.4.1 - Funções de Benchmark Utilizadas na Verificação do Modelo de Otimização das Raposas Vermelhas Implementado

Nome da Função	$f$	Dim	$x_{min}$	$x_{max}$	$f_{min}$	$\bar{x}^*$
Esfera	$f_1 = \sum_{i=1}^N x_i^2$	2	-10	10	0	(0, ..., 0)
Rastrigin	$f_2 = 10 + \sum_{i=1}^N [x_i^2 - 10\cos(2\pi x_i)]$	2	-10	10	0	(0, ..., 0)
Soma dos Quadrados	$f_3 = \sum_{i=1}^N i \cdot x_i^2$	20	-10	10	0	(0, ..., 0)

A primeira função utilizada é unimodal, e para a verificação do modelo de otimização, foram realizadas 10 corridas independentes, 100 iterações e 100 indivíduos, cujos resultados estão presentes na Tabela 4.4.2.

Tabela 4.4.2 – Resultados do Estudo de Verificação da Função da Esfera com Dimensão 2, através da realização de 10 corridas, 100 iterações, e populações com 100 indivíduos

Corrida	x1	x2	$f_{min}$
1	1,8361E-25	-4,1521E-13	1,8361E-25
2	4,6098E-18	-2,1467E-09	4,6098E-18
3	1,8651E-24	-3,4829E-13	1,8651E-24
4	1,4830E-18	3,4113E-10	1,4830E-18
5	1,7701E-20	-5,5185E-11	1,7701E-20
6	1,4319E-20	9,6300E-11	1,4319E-20
7	1,7838E-23	1,0361E-12	1,7838E-23
8	7,8485E-21	2,4849E-11	7,8485E-21
9	4,9898E-23	5,1449E-12	4,9898E-23
10	2,7335E-19	-5,1258E-10	2,7335E-19
<b>Média Calculada</b>			6,4061E-19
<b>Média [39]</b>			1,2990E-07
<b>Desvio Padrão Calculado</b>			1,3287E-18
<b>Desvio Padrão [39]</b>			3,2200E-08

A segunda função utilizada é multimodal, mas neste caso tem a dimensão fixa de 2 variáveis de projeto, e para a qual foram realizadas 10 corridas, e cujos resultados das corridas efetuadas estão presentes na Tabela 4.4.3.

Tabela 4.4.3 - Resultados do Estudo de Verificação da Função Rastrigin com Dimensão 2, através da realização de 10 corridas, 100 iterações, e populações com 100 indivíduos

Corrida	x1	x2	f <sub>min</sub>
1	2,1372E-09	1,9420E-10	9,1367E-16
2	-6,7385E-08	-8,2852E-08	2,2627E-12
3	7,1884E-11	1,3883E-10	4,8489E-18
4	-7,0627E-10	6,3963E-10	1,8013E-16
5	5,6276E-10	-3,9101E-10	9,3162E-17
6	-7,7343E-11	4,0890E-11	1,5185E-18
7	-2,4210E-11	-7,3662E-11	1,1928E-18
8	-5,8023E-09	-8,7128E-09	2,1740E-14
9	-6,1365E-11	1,5509E-10	5,5191E-18
10	-1,4728E-14	-2,3298E-13	1,0812E-23
<b>Média Calculada</b>			2,2856E-13
<b>Média [39]</b>			1,3740E-07
<b>Desvio Padrão Calculado</b>			6,7808E-13
<b>Desvio Padrão [39]</b>			3,7200E-08

A terceira função utilizada é multimodal, e foram obtidos os valores ótimos da função com recurso a 20 variáveis de projeto, e como tal, foram realizadas 20 corridas, e cujos resultados são apresentados na Tabela 4.4.4.

Tabela 4.4.4 - Resultados do Estudo de Verificação da Função da Soma dos Quadrados com Dimensão 20, através da realização de 20 corridas, 100 iterações, e populações com 100 indivíduos

Corrida	f <sub>min</sub>	Corrida	f <sub>min</sub>
1	5,2493E-08	11	8,4226E-07
2	6,6234E-08	12	1,1592E-06
3	1,3214E-07	13	5,9515E-08
4	6,8963E-09	14	8,1866E-07
5	3,9354E-09	15	6,0568E-06
6	5,3984E-09	16	3,5550E-07
7	4,7102E-08	17	1,8613E-09
8	8,2362E-08	18	3,0456E-10
9	1,0905E-07	19	3,1400E-09
10	1,0499E-06	20	3,5231E-08
<b>Média calculada</b>		5,4440E-07	
<b>Média [39]</b>		7,5400E-08	
<b>Desvio Padrão calculado</b>		1,3183E-06	
<b>Desvio Padrão [39]</b>		2,7800E-08	

Pelos resultados apresentados nas tabelas 4.4.1, 4.4.2, 4.4.3 e 4.4.4, considera-se o comportamento do algoritmo nas funções avaliadas muito satisfatório, apresentando valores médios para os mínimos globais das funções com uma ordem de grandeza bastante próxima dos presentes na literatura.

## 4.5 Verificação do Modelo de 1 Variável de Projeto

Para a verificação do modelo desenvolvido para 1 variável de projeto, e considerando os estudos paramétricos realizados para cada estrutura (apresentados no capítulo 5), optou-se pelo estudo do Pórtico 1, pela sua simplicidade, associada ao menor peso computacional que o seu estudo implica. Para a discretização mínima do Pórtico 1, a maximização da frequência fundamental deve levar à obtenção da solução ótima (2, 39.3221), ou a um valor ótimo superior a 39.3221.

Para a redução do tempo que cada corrida demoraria com a utilização de integração exata na construção das matrizes de rigidez de membrana-flexão e de massas de cada elemento (através da função *Int*), foi considerada a integração aproximada (integração numérica, realizada através da função *ApproximateInt*) do *Maple*, e apresenta-se, na Tabela 4.5.1 a frequência fundamental da estrutura calculada para cada expoente para os dois tipos de integração, podendo verificar-se que os resultados são bastante aproximados, pelo que, nos estudos de otimização, a integração a utilizar será a aproximada.

Tabela 4.5.1 - Frequência Fundamental do Pórtico 1 para diferentes valores de expoente da Lei de Potência calculadas através de Integração Exata e Integração Aproximada, respetivamente

<b>ey</b>	<b>1ª Frequência [rad/s] (Integração Exata)</b>	<b>1ª Frequência [rad/s] (Integração Aproximada)</b>
<b>0</b>	30,7859	30,6588
<b>0,1</b>	33,5754	33,2675
<b>0,2</b>	35,4086	35,0613
<b>0,5</b>	38,1721	37,8981
<b>1</b>	39,4551	39,2785
<b>2</b>	39,4660	39,3221
<b>5</b>	38,5265	38,3893
<b>10</b>	37,9670	37,8254
$\infty$	35,8244	35,6800

Para a minimização dos deslocamentos resultantes nodais, e carregamento correspondente ao considerado nos estudos previamente realizados ( $P_x = 50 \text{ N}$ ,  $p_z = -1000 \text{ N/m}$ ), a solução ótima será a que caracteriza o menor deslocamento resultante do nó mais solicitado – nó 4 – da estrutura, correspondendo a (10, 10.9900), como é apresentado na Tabela 4.5.2.

Tabela 4.5.2 - Deslocamentos Resultantes [mm] dos Nós que Constituem a Discretização Mínima do Pórtico 1 calculados com recurso a Integração Aproximada

ey	0	1	2	5	10
<b>Nó 1</b>	0	0	0	0	0
<b>Nó 2</b>	4,4625	0,6908	0,6618	0,8857	1,0258
<b>Nó 3</b>	22,2142	12,1260	11,3076	10,7763	10,4648
<b>Nó 4</b>	22,9209	12,9616	12,0627	11,3875	10,9900
<b>Nó 5</b>	22,2122	12,1236	11,3053	10,7739	10,4623
<b>Nó 6</b>	15,6657	9,7842	9,0057	8,1962	7,6918
<b>Nó 7</b>	0	0	0	0	0

Para o estudo desta estrutura, foram definidas 50 iterações, e uma população de 10 indivíduos, cujos resultados são apresentados na Tabela 4.5.3 para 10 corridas, para análise estática e dinâmica.

Tabela 4.5.3 – Soluções Ótimas do Estudo de Otimização do Pórtico 1 obtidas através do algoritmo de Arquimedes e do algoritmo das Raposas Vermelhas para a minimização do deslocamento resultante máximo e para maximização da frequência fundamental da estrutura para 10 corridas, 50 iterações e populações com 10 indivíduos

Corrida	AOA				RFO			
	ey	f <sub>min</sub> [mm]	ey	f <sub>max</sub> [rad/s]	ey	f <sub>min</sub> [mm]	ey	f <sub>max</sub> [rad/s]
<b>1</b>	10	10,9900	1,4236	39,4528	10	10,9900	1,4114	39,4529
<b>2</b>	10	10,9900	1,4236	39,4528	10	10,9900	1,4231	39,4530
<b>3</b>	10	10,9900	1,4217	39,4528	10	10,9900	1,4265	39,4530
<b>4</b>	10	10,9900	1,4223	39,4528	10	10,9900	1,4231	39,4531
<b>5</b>	10	10,9900	1,4229	39,4528	0,7427	10,9952	1,4310	39,4530
<b>6</b>	10	10,9900	1,4233	39,4528	10	10,9900	1,4224	39,4530
<b>7</b>	10	10,9900	1,4235	39,4528	10	10,9900	1,4224	39,4530
<b>8</b>	10	10,9900	1,4237	39,4528	10	10,9900	1,4306	39,4530
<b>9</b>	10	10,9900	1,4239	39,4528	10	10,9900	1,4152	39,4530
<b>10</b>	10	10,9900	1,4234	39,4528	10	10,9900	1,4345	39,4530
<b>MO</b>	10	10,9900	1,4217	39,4528	10	10,9900	1,4231	39,4531
<b>PO</b>	10	10,9900	1,4229	39,4528	0,7427	10,9952	1,4114	39,4529
<b>Média</b>	10,9900		39,4528		10,9905		39,4530	
<b>Dp</b>	0		3,0259E-07		0,0016		3,6797E-05	

De modo a tornar o processo menos demorado, considerou-se uma situação em que, para cada corrida, a população é constituída por 5 indivíduos, e realizam-se 10 iterações, com o intuito de verificar se o modelo converge para as mesmas soluções que a serie com parâmetros superiores, e os resultados são apresentados na Tabela 4.5.4.

Tabela 4.5.4 - Soluções Ótimas do Estudo de Otimização do Pórtico 1 obtidas através do algoritmo de Arquimedes e do algoritmo das Raposas Vermelhas para a minimização do deslocamento resultante máximo e para maximização da frequência fundamental da estrutura para 10 corridas, 10 iterações e populações com 5 indivíduos

Corrida	AOA				RFO			
	ey	f <sub>min</sub> [mm]	ey	f <sub>max</sub> [rad/s]	ey	f <sub>min</sub> [mm]	ey	f <sub>max</sub> [rad/s]
<b>1</b>	10	10,9900	2,1800	39,2555	10	10,9900	1,4972	39,4496
<b>2</b>	10	10,9900	1,6089	39,4342	7,0298	11,1833	1,4495	39,4524
<b>3</b>	10	10,9900	1,5758	39,4399	10	10,9900	1,7502	39,4017
<b>4</b>	10	10,9900	5,3205	38,3277	10	10,9900	1,6666	39,4226
<b>5</b>	8,4396	11,0805	1,4200	39,4528	10	10,9900	1,6756	39,4205
<b>6</b>	10	10,9900	1,6429	39,4276	10	10,9900	1,4754	39,4512
<b>7</b>	10	10,9900	1,4189	39,4528	10	10,9900	1,4251	39,4530
<b>8</b>	10	10,9900	1,4639	39,4518	9,9839	10,9909	1,4154	39,4530
<b>9</b>	10	10,9900	1,4030	39,4526	10	10,9900	1,5220	39,4474
<b>10</b>	10	10,9900	1,5883	39,4379	10	10,9900	2,3277	39,1983
<b>MO</b>	10	10,9900	1,4200	39,4528	10	10,9900	1,4251	39,4530
<b>PO</b>	8,4396	11,0805	5,3205	38,3277	7,0298	11,1833	2,3277	39,1983
<b>Média</b>	10,9991		39,3133		11,0094		39,4150	
<b>Dp</b>	0,027144		0,3334		0,0579		0,0742	

As figuras 4.5.1 e 4.5.2 representam esquematicamente a configuração obtida com as soluções ótimas encontradas para minimização do deslocamento resultante máximo da estrutura e para a maximização da frequência fundamental, respetivamente, com o modelo de 1 variável de projeto.

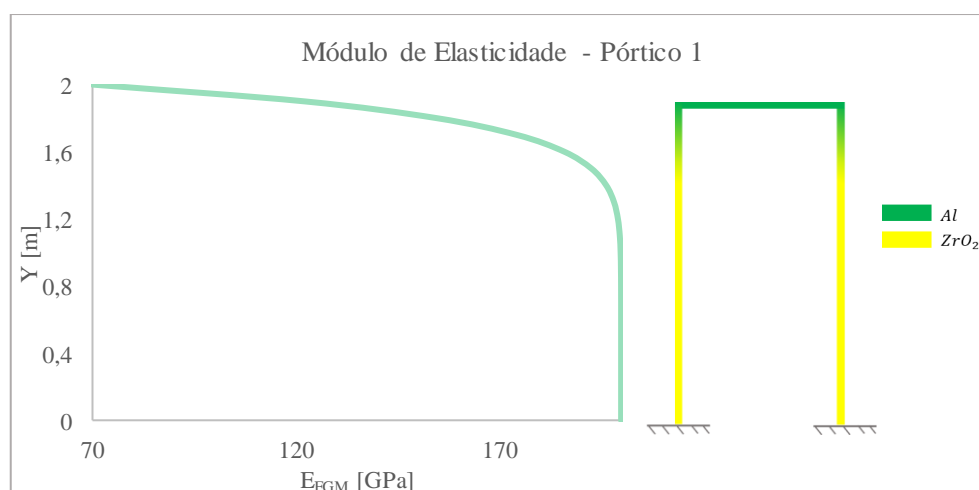


Figura 4.5.1 - Distribuição do Módulo de Elasticidade no Pórtico 1 para a solução ótima encontrada para minimização do deslocamento resultante máximo

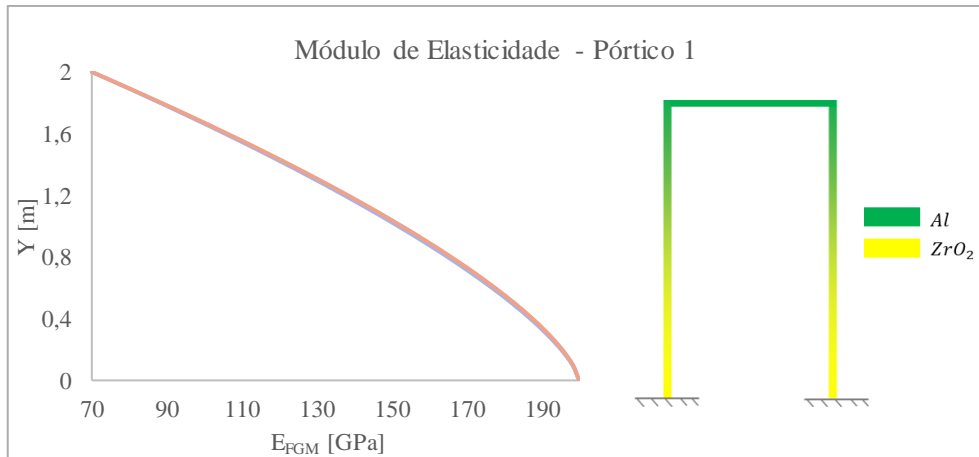


Figura 4.5.2 - Distribuição do Módulo de Elasticidade no Pórtico 1 para a solução ótima encontrada para maximização da frequência fundamental

A melhor solução encontrada em termos de minimização de deslocamento resultante máximo neste caso de verificação do modelo de otimização corresponde a uma estrutura maioritariamente construída em Zircónia desde a zona inferior até a uma altura de aproximadamente 1,2 m, aproximadamente. No caso da maximização de frequência fundamental, a solução ótima é caracterizada por uma distribuição aproximadamente linear de material em função da coordenada vertical.

Página intencionalmente deixada em branco

## 5 Casos de Estudo

O capítulo 5 do presente trabalho engloba os estudos realizados às estruturas típicas consideradas. Numa primeira fase, foram realizados estudos paramétricos a 6 estruturas diferentes – 3 treliças e 3 pórticos – para averiguar a influência de parâmetros como o expoente da lei de potência do FGM, escrita da lei de misturas que rege a distribuição das propriedades do FGM ao longo da coordenada vertical, e segundo momento de área, na resposta estática e dinâmica de vibração livre de cada estrutura, tendo sido realizadas, posteriormente, duas verificações relativamente à possibilidade de ocorrência de encurvadura se as estruturas fossem construídas em aço, e ao número de pontos de Gauss a utilizar aquando da constituição das matrizes de rigidez ao corte transversal através de integração numérica. Após análise de resultados e identificação de tendências, procedeu-se à realização de estudos de otimização de estruturas com recursos às meta heurísticas de otimização descritas no subcapítulo 2.5, considerando as aplicações desenvolvidas e apresentadas no capítulo 3.

### 5.1 Estudos Paramétricos das Estruturas

No presente subcapítulo são apresentados os estudos paramétricos realizados às estruturas bidimensionais consideradas, com análise de resultados e identificação de tendências. A análise das estruturas estudadas foi realizada com algumas considerações, nomeadamente:

- a relação de aspeto dos componentes viga-barra que constituem cada estrutura é  $L/h > 50$ .
- o gradiente material ocorre em função da altura da estrutura, tendo sido considerado que, como a espessura de cada elemento é muito inferior ao respetivo comprimento, quando a espessura coincide com a direção da altura da estrutura, a fração volúmica se mantém constante em cada coordenada vertical.
- nestes estudos, não foi considerada a ocorrência de encurvadura, no entanto, foi efetuada uma verificação pós-estudos da possibilidade de ocorrência de encurvadura no caso de a estrutura ser totalmente constituída por material metálico.
- considera-se que a realização de análises de instabilidade será um aspeto complementar e relevante a considerar, mas atendendo à abrangência do presente trabalho, iria ultrapassar o âmbito de uma dissertação de Mestrado.

Para cada caso de estudo, apresentam-se resultados para deslocamentos nodais e as primeiras cinco frequências naturais de cada estrutura, para diferentes valores de expoente da lei de potência, cuja expressão traduz a variação da quantidade de um determinado material ao longo da coordenada vertical (Y) da estrutura. Neste subcapítulo, considerou-se que todas as estruturas são constituídas por FGM composto por Alumínio e Zircónia, cujas propriedades constam na Tabela 3.2.1.

### 5.1.1 Treliça 1

O primeiro caso de estudo consiste numa treliça constituída por 3 barras, semelhante ao caso de verificação 7, sujeita a uma carga concentrada  $P = 100 \text{ N}$  no nó livre.

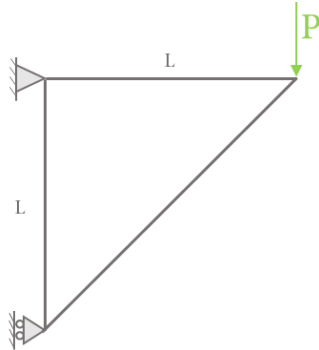


Figura 5.1.1 - Representação Esquemática da Treliça 1 e do carregamento considerado

Nesta estrutura, foi considerado que o comprimento dos elementos horizontais e verticais é unitário, correspondendo a  $L$  e os elementos apresentam secção quadrada com  $20 \text{ mm}$  de lado. A origem do referencial da estrutura localiza-se no apoio simples, pelo que a expressão da fração volúmica metálica é definida por:

$$V_f(Y) = \left(\frac{Y}{L} + 1\right)^{ey} \quad (5.1.1)$$

Para o estudo do comportamento da estrutura em FGM, foram consideradas 3 discretizações, com o consecutivo aumento do número de elementos, de modo a verificar a convergência de resultados.

A Figura 5.1.2 apresenta esquematicamente a discretização mínima da estrutura, com 3 elementos quadráticos, e a evolução da fração volúmica em função da coordenada vertical  $Y$ .

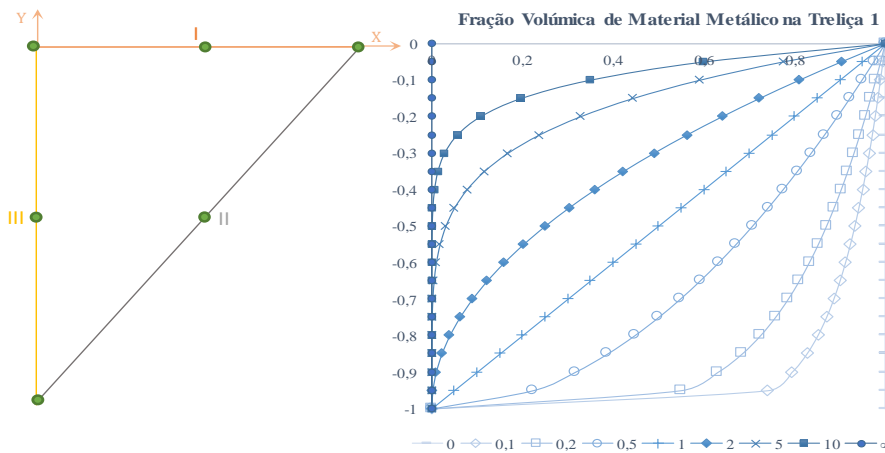


Figura 5.1.2 - Representação Esquemática da Discretização Mínima da Treliça 1 considerando Elementos Unidimensionais Quadráticos, e Evolução da Fração Volúmica de Material Metálico em função da Altura da Estrutura

As figuras 5.1.3 e 5.1.4 apresentam a evolução do Módulo de Elasticidade e da Massa Volúmica do FGM constituído por Alumínio e Zircónia considerado em função da coordenada vertical da estrutura, respetivamente, numa situação em que a expressão da fração volúmica exprime a distribuição de material metálico em função da coordenada vertical da estrutura.

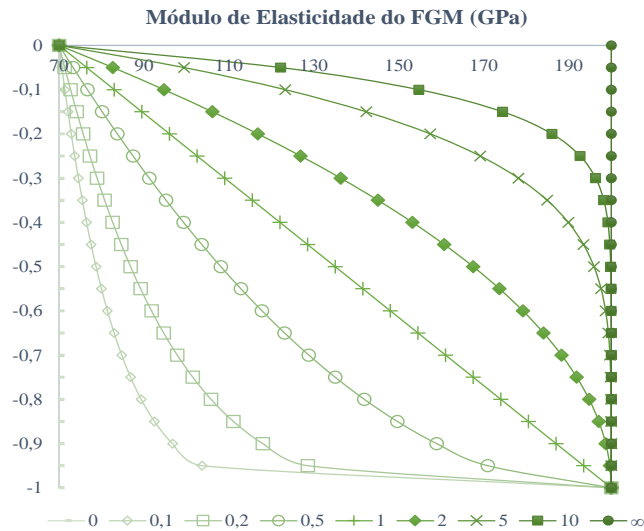


Figura 5.1.3 - Evolução do Módulo de Elasticidade de um FGM ao longo Coordenada Vertical da Estrutura, constituído, na zona superior, por Alumínio, e na zona inferior, Zircónia

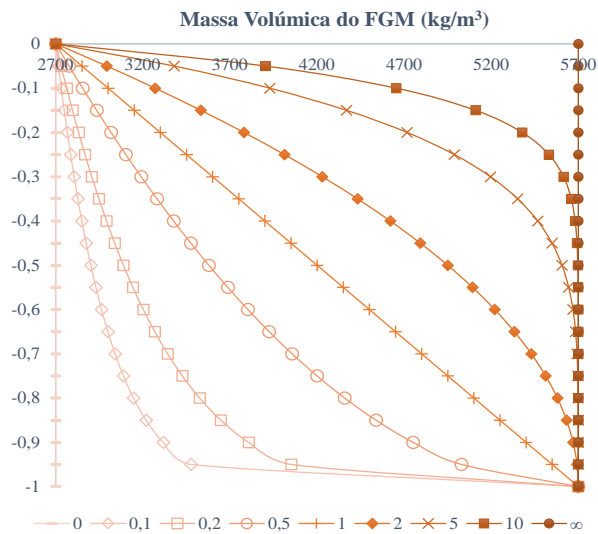


Figura 5.1.4 - Evolução da Massa Volúmica de um FGM ao longo da Coordenada Vertical da Estrutura, constituído, na zona superior, por Alumínio, e na zona inferior, Zircónia

A primeira discretização considerada apresenta 4 elementos quadráticos, sendo que as barras horizontal e vertical são caracterizadas por um elemento cada uma, e a barra oblíqua é constituída por 2 elementos, tal que a estrutura seja analisada através de elementos com comprimentos aproximados. A segunda discretização tem um total de 7 elementos, em que as barras vertical e horizontal são caracterizadas por 2 elementos cada, e a barra oblíqua apresenta 3 elementos.

A terceira discretização tem um total de 10 elementos, em que as barras vertical e horizontal são caracterizadas por 3 elementos cada, e a barra oblíqua apresenta 4 elementos. Para o presente caso de estudo, os resultados apresentados dos deslocamentos nodais correspondem aos obtidos com a primeira discretização, já que apresentam resultados satisfatórios face ao número de elementos considerados. No caso das frequências naturais, são apresentados os resultados obtidos com a discretização mais completa, quando é verificada convergência das mesmas.

O primeiro estudo paramétrico realizado consiste na estrutura FGM cuja lei de potência para a fração volúmica descrita em (5.1.1) constitui a variação do material metálico na estrutura em função da coordenada vertical da estrutura, sendo a Regra de Misturas escrita através da equação (5.1.2), cujos resultados para os deslocamentos nodais são apresentados na Tabela 5.1.1, e as primeiras 5 frequências naturais na Tabela 5.1.2.

$$P_{FGM}(Y) = P_{Al} V_f + P_{ZrO_2} (1 - V_f) \quad (5.1.2)$$

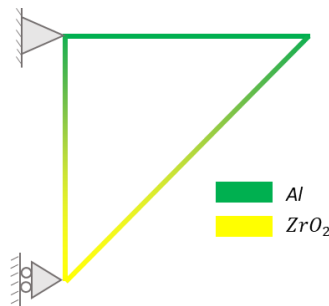


Figura 5.1.5 - Representação Esquemática da Treliça 1 quando a Regra das Misturas é escrita de tal forma que a fração volúmica é relativa à Distribuição de Material Metálico

Tabela 5.1.1 - Deslocamentos Nodais do Nó Livre da Treliça 1 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal 20 mm x 20 mm

ey	Deslocamento x [μm]	Deslocamento y [μm]	Rotação [rad]
0	3,5699	-17,2370	1,8164E-05
0,1	3,5699	-15,4318	1,6552E-05
0,2	3,5699	-14,3664	1,5579E-05
0,5	3,5698	-12,6222	1,3906E-05
1	3,5698	-11,2803	1,2510E-05
2	3,5698	-10,1445	1,1214E-05
5	3,5699	-9,1413	9,9548E-06
10	3,5699	-8,7346	9,4077E-06
∞	1,2495	-6,0329	6,3574E-06

Os deslocamentos nodais obtidos permitem verificar que ocorre uma diminuição do deslocamento vertical e da rotação do nó em estudo com o aumento do expoente da lei de potência, devido à existência crescente de material com maior módulo de elasticidade (neste caso, cerâmico).

Na Tabela 5.1.1 é notado ainda que o deslocamento nodal na direção x da estrutura totalmente metálica é mantido para os diferentes expoentes estudados.

Tabela 5.1.2 – Primeiras Cinco Frequências da Treliça 1 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal 20 mm x 20 mm

ey	1ª Frequência [rad/s]	2ª Frequência [rad/s]	3ª Frequência [rad/s]	4ª Frequência [rad/s]	5ª Frequência [rad/s]
0	221,4770	349,1966	575,5106	750,6624	1384,1043
0,1	227,4448	357,6705	589,6909	773,9224	1412,7562
0,2	230,3535	362,9582	596,5771	787,3944	1427,7406
0,5	233,5317	371,7801	603,4569	806,5315	1448,2246
1	<b>234,2136</b>	378,5760	603,9065	817,2049	1462,5000
2	233,6079	384,9476	602,7151	822,9459	1478,5614
5	232,6224	393,2762	606,8558	825,7050	1506,2052
10	232,2437	<b>398,4635</b>	<b>614,6431</b>	<b>825,9015</b>	<b>1528,7442</b>
∞	257,7513	406,3877	669,7679	873,6067	1610,7939

Os resultados obtidos para as primeiras 5 frequências naturais da estrutura evidenciam, para a primeira frequência natural da estrutura, um aumento desde ey=0 (estrutura totalmente metálica) para ey=1, e uma diminuição desde ey=1 para ey=10, e para as restantes frequências, este aumento verifica-se desde ey=0 até ey=∞. Em todos os casos, quando ey=∞ (estrutura totalmente cerâmica), estas tomam valores superiores, em virtude do material que constitui a estrutura possuir uma maior massa volúmica, e por lhe conferir uma rigidez superior.

Por outro lado, se for considerado que a lei de potência caracteriza a distribuição do material cerâmico em função da coordenada vertical da estrutura, é verificado um comportamento idêntico ao considerado no estudo previamente descrito, mas invertido, em função da configuração material. Nesse caso, a lei de Misturas é escrita da forma:

$$P_{FGM}(Y) = P_{ZrO_2} V_f + P_{Al} (1 - V_f) \quad (5.1.3)$$

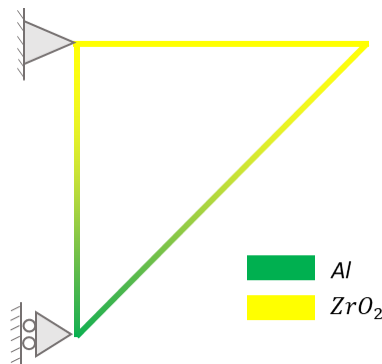


Figura 5.1.6 - Representação Esquemática da Treliça 1 quando a Regra das Misturas é escrita de tal forma que a fração volúmica é relativa à Distribuição de Material Cerâmico

Os deslocamentos nodais e as frequências naturais obtidas para esta distribuição de material são apresentados nas tabelas 5.1.3 e 5.1.4, respetivamente.

Tabela 5.1.3 - Deslocamentos Nodais do Nó Livre da Trelça 1 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal 20 mm x 20 mm

ey	Deslocamento x [μm]	Deslocamento y [μm]	Rotação [rad]
0	1,2495	-6,0329	6,3574E-06
0,1	1,2495	-6,3490	6,6427E-06
0,2	1,2495	-6,6713	6,9418E-06
0,5	1,2494	-7,6214	7,8583E-06
1	1,2494	-8,9586	9,2151E-06
2	1,2493	-10,6487	1,1039E-05
5	1,2493	-12,6082	1,3284E-05
10	1,2493	-13,5429	1,4314E-05
∞	3,5699	-17,2370	1,8164E-05

Os deslocamentos nodais apresentados permitem evidenciar o comportamento já verificado para a situação contrária, pelo que, quanto menor a quantidade de material cerâmico, cujo módulo de elasticidade é superior ao do material metálico, maiores são os deslocamentos nodais diretamente afetados pelo carregamento (deslocamento segundo y e rotação). Da Tabela 5.1.3 é possível notar que, para o deslocamento nodal na direção x, é mantido o valor obtido quando a estrutura é totalmente cerâmica para os diferentes expoentes. A discrepância na resposta para as duas escritas possíveis para a lei de misturas pode dever-se à localização do nó analisado, que à coordenada vertical a que se encontra, sendo uma estrutura assimétrica, mantém as características do material que constitui a zona superior.

Tabela 5.1.4 - Primeiras Cinco Frequências da Trelça 1 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal 20 mm x 20 mm

ey	1ª Frequência [rad/s]	2ª Frequência [rad/s]	3ª Frequência [rad/s]	4ª Frequência [rad/s]	5ª Frequência [rad/s]
0	257,7513	406,3877	669,7679	873,6067	1610,7939
0,1	255,5531	403,1320	663,8800	866,0617	1599,2675
0,2	253,6898	400,3341	659,2949	859,8454	1589,7764
0,5	250,0545	394,1020	651,4369	846,5098	1569,7335
1	<b>248,2639</b>	387,9951	648,4440	833,8669	1550,8235
2	249,4478	381,9102	650,4140	822,1832	1528,9579
5	253,2231	374,8986	650,1533	814,2952	1495,6903
10	253,8509	<b>370,0182</b>	<b>639,8775</b>	<b>815,6029</b>	<b>1474,6951</b>
∞	221,4770	349,1966	575,5106	750,6624	1384,1043

Os resultados das frequências naturais da Tabela 5.1.4 permitem verificar uma diminuição da primeira frequência desde  $e_y=0$  (estrutura totalmente cerâmica) até  $e_y=1$ , seguida de um aumento desde  $e_y=1$  até  $e_y=10$ , e para as seguintes frequências, ocorre diminuição desde  $e_y=0$  até  $e_y=\infty$ . Os resultados menores são verificados para uma situação em que a estrutura é totalmente metálica ( $e_y=\infty$ ). Esta tendência lembra o comportamento da estrutura no caso anterior, embora a evolução dos valores seja contrária: os expoentes cujos valores das frequências naturais da estrutura em FGM no caso em que a lei de potência avalia a distribuição de material metálico apresentam valores máximos correspondem aos expoentes cujos valores das frequências naturais da estrutura em FGM no caso em que a lei de potência traduz a distribuição de material cerâmico ao longo da coordenada vertical da estrutura têm valores mínimos.

Após a análise do comportamento da estrutura quando a secção transversal é quadrada (secção A), foram consideradas duas situações de secção retangular em que a área da secção transversal é mantida constante, mas o 2º momento de área é diferente. Num primeiro caso, a altura do retângulo tem o dobro da altura da secção quadrada (40 mm), e por sua vez, a largura tem metade da mesma dimensão (10 mm). Desta forma, o segundo momento de área quadruplica face à secção inicial A. No segundo caso, a altura do retângulo tem metade da altura da secção quadrada (10 mm) e a largura tem o dobro (40 mm), e assim, o segundo momento de área torna-se 4 vezes inferior ao da secção A. Na Figura 5.1.7 apresenta-se uma representação esquemática das secções transversais consideradas nos estudos paramétricos.

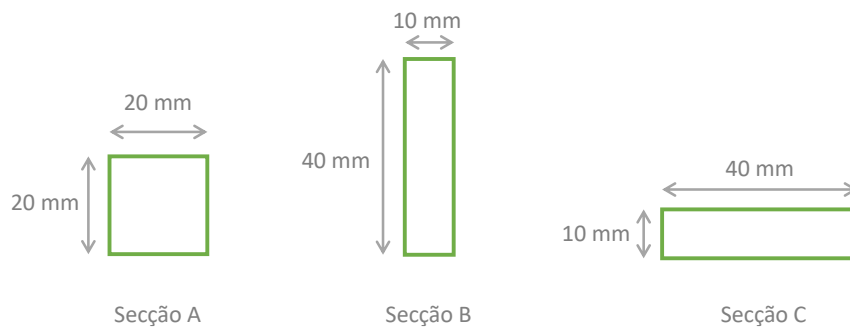


Figura 5.1.7 - Representação Esquemática das Secções Transversais Consideradas nos Estudos Paramétricos Realizados

Para o caso da estrutura com secção retangular com as dimensões 40 mm x 10 mm (secção B), estudou-se o comportamento da estrutura para um FGM cuja lei de potência descreve a distribuição do material metálico e para um FGM cuja lei de potência traduz a distribuição do material cerâmico, e os resultados são apresentados nas tabelas 5.1.5 e 5.1.7 para os deslocamentos nodais, e tabelas 5.1.6 e 5.1.8 para as primeiras 5 frequências naturais da estrutura, respetivamente.

Tabela 5.1.5 - Deslocamentos Nodais do Nó Livre da Treliça 1 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal 40 mm x 10 mm

ey	Deslocamento x [μm]	Deslocamento y [μm]	Rotação [rad]
0	3,5653	-17,2148	1,8125E-05
0,1	3,5653	-15,4127	1,6517E-05
0,2	3,5652	-14,3488	1,5545E-05
0,5	3,5650	-12,6069	1,3875E-05
1	3,5650	-11,2667	1,2482E-05
2	3,5650	-10,1324	1,1189E-05
5	3,5652	-9,1304	9,9330E-06
10	3,5652	-8,7242	9,3874E-06
∞	1,2479	-6,0252	6,3437E-06

Tabela 5.1.6 - Primeiras Cinco Frequências da Treliça 1 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal 40 mm x 10 mm

ey	1ª Frequência [rad/s]	2ª Frequência [rad/s]	3ª Frequência [rad/s]	4ª Frequência [rad/s]	5ª Frequência [rad/s]
0	440,5345	693,3911	1139,2493	1482,0161	2571,5776
0,1	452,4078	710,2204	1168,4376	1527,0394	2637,5736
0,2	458,1798	720,7702	1182,5943	1553,1438	2674,7751
0,5	464,4424	738,4678	1196,8044	1590,1355	2732,0848
1	465,7079	752,1791	1197,8881	1610,4001	2775,7106
2	464,3842	765,0075	1195,5162	1620,4946	2819,6169
5	462,3180	781,5699	1203,6102	1623,5471	2878,7850
10	461,5582	791,8398	1218,8849	1622,2501	2918,1834
∞	512,6859	806,9554	1325,8366	1724,7421	2992,7528

Tabela 5.1.7 - Deslocamentos Nodais do Nó Livre da Treliça 1 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal 40 mm x 10 mm

ey	Deslocamento x [μm]	Deslocamento y [μm]	Rotação [rad]
0	1,2479	-6,0252	6,3437E-06
0,1	1,2478	-6,3406	6,6282E-06
0,2	1,2478	-6,6623	6,9266E-06
0,5	1,2477	-7,6103	7,8404E-06
1	1,2476	-8,9443	9,1929E-06
2	1,2474	-10,6303	1,1012E-05
5	1,2473	-12,5863	1,3250E-05
10	1,2473	-13,5201	1,4279E-05
∞	3,5653	-17,2148	1,8125E-05

Tabela 5.1.8 - Primeiras Cinco Frequências da Treliça 1 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal 40 mm x 10 mm

ey	1ª Frequência [rad/s]	2ª Frequência [rad/s]	3ª Frequência [rad/s]	4ª Frequência [rad/s]	5ª Frequência [rad/s]
0	512,6859	806,9554	1325,8366	1724,7421	2992,7528
0,1	508,2910	800,4856	1313,5386	1710,1391	2962,8898
0,2	504,5608	794,8873	1303,8461	1698,0632	2934,1333
0,5	497,2661	782,2428	1286,6798	1672,0200	2856,4757
1	493,6513	769,5638	1278,9824	1647,2962	2761,5556
2	495,9913	756,6992	1281,4137	1624,6511	2662,3444
5	503,4517	741,9330	1280,4826	1609,9374	2576,8574
10	504,6557	731,8415	1261,0553	1612,9765	2547,6991
∞	440,5345	693,3911	1139,2493	1482,0161	2571,5776

No caso de uma secção transversal dos elementos da estrutura coincidente com a secção C, são apresentados os valores dos deslocamentos nodais do nó livre e das primeiras 5 frequências naturais da estrutura para uma situação em que a regra de misturas traduz a distribuição do material metálico nas tabelas 5.1.9 e 5.1.10, respetivamente, e posteriormente, uma situação em que a regra de misturas é relativa à distribuição do material cerâmico em função da coordenada vertical nas tabelas 5.1.11 e 5.1.12, respetivamente.

A tendência que foi verificada relativamente à evolução dos deslocamentos nodais e às frequências naturais da estrutura nas situações da secção B e C é análoga à secção A, em que os deslocamentos nodais aumentam com a progressão de ey quando existe maior quantidade de material metálico, e o aumento/diminuição das frequências segue o mesmo comportamento que a primeira variante do presente caso de estudo.

Tabela 5.1.9 - Deslocamentos Nodais do Nó Livre da Treliça 1 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal 10 mm x 40 mm

ey	Deslocamento x [µm]	Deslocamento y [µm]	Rotação [rad]
0	3,5710	-17,2425	1,8174E-05
0,1	3,5710	-15,4366	1,6561E-05
0,2	3,5710	-14,3708	1,5587E-05
0,5	3,5710	-12,6260	1,3914E-05
1	3,5710	-11,2837	1,2517E-05
2	3,5710	-10,1475	1,1221E-05
5	3,5710	-9,1440	9,9602E-06
10	3,5710	-8,7372	9,4128E-06
∞	1,2499	-6,0349	6,3609E-06

Tabela 5.1.10 - Primeiras Cinco Frequências da Trelça 1 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal 10 mm x 40 mm

ey	1ª Frequência [rad/s]	2ª Frequência [rad/s]	3ª Frequência [rad/s]	4ª Frequência [rad/s]	5ª Frequência [rad/s]
0	110,8897	174,9093	288,4854	376,5318	697,5001
0,1	113,8770	179,1547	295,5291	388,2535	712,3229
0,2	115,3341	181,8004	298,9505	395,0414	720,0168
0,5	116,9294	186,2086	302,3650	404,6905	730,2517
1	117,2758	189,5990	302,5792	410,0948	737,1037
2	116,9809	192,7798	301,9833	413,0512	744,7417
5	116,4938	196,9507	304,0652	414,5797	757,9193
10	116,3051	199,5500	307,9766	414,7762	768,2907
∞	129,0532	203,5554	335,7334	438,2011	811,7370

Tabela 5.1.11 - Deslocamentos Nodais do Nó Livre da Trelça 1 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal 10 mm x 40 mm

ey	Deslocamento x [μm]	Deslocamento y [μm]	Rotação [rad]
0	1,2499	-6,0349	6,3609E-06
0,1	1,2499	-6,3510	6,6463E-06
0,2	1,2499	-6,6735	6,9456E-06
0,5	1,2499	-7,6242	7,8628E-06
1	1,2498	-8,9622	9,2207E-06
2	1,2498	-10,6533	1,1046E-05
5	1,2498	-12,6138	1,3292E-05
10	1,2498	-13,5486	1,4322E-05
∞	3,5710	-17,2425	1,8174E-05

Tabela 5.1.12 - Primeiras Cinco Frequências da Trelça 1 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal 10 mm x 40 mm

ey	1ª Frequência [rad/s]	2ª Frequência [rad/s]	3ª Frequência [rad/s]	4ª Frequência [rad/s]	5ª Frequência [rad/s]
0	129,0532	203,5554	335,7334	438,2011	811,7370
0,1	127,9514	201,9248	332,8190	434,3970	805,9945
0,2	127,0203	200,5258	330,5559	431,2661	801,2867
0,5	125,2038	197,4195	326,7066	424,5566	791,4449
1	124,3099	194,3933	325,3010	418,1962	782,3595
2	124,9028	191,3923	326,3618	412,3062	772,0317
5	126,7964	187,9312	326,2506	408,2998	758,0120
10	127,1135	185,5123	321,0556	408,9307	750,3889
∞	110,8897	174,9093	288,4854	376,5318	697,5001

Quanto às frequências naturais obtidas, pode verificar-se que a estrutura que apresenta frequências superiores é a que corresponde à estrutura em que a lei de potência reflete a distribuição do material cerâmico e secção transversal B, apresentando comportamento mais satisfatório para  $e_y=0.1$  e para  $e_y=10$ , seguida da estrutura com a mesma secção (B) com lei de potência correspondente à distribuição do material metálico, cujo melhor comportamento estrutural é obtido para  $e_y=1$ .

Além disso, é possível notar que existe uma razão entre as frequências para cada secção, na medida em que, quando a secção passa de A para B, as frequências aumentam para o dobro; quando a secção passa de A para C, as mesmas diminuem para aproximadamente metade das obtidas inicialmente. Os deslocamentos nodais mantêm-se para secções transversais com geometria diferente, visto que o valor da área da secção é constante.

As figuras 5.1.8, 5.1.9 e 5.1.10 representam graficamente os primeiros 3 modos de vibração da treliça 1, respetivamente, para a estrutura totalmente metálica e para os expoentes da lei de potência de 0,1 e 10 quando a expressão da fração volúmica caracteriza a distribuição do material metálico. A representação destes modos de vibração permite evidenciar o comportamento verificado para as frequências naturais registadas, em que o aumento/diminuição da frequência associada a um determinado modo em função do expoente da lei de potência nem sempre coincide com o aumento/diminuição da frequência noutro modo de vibração.

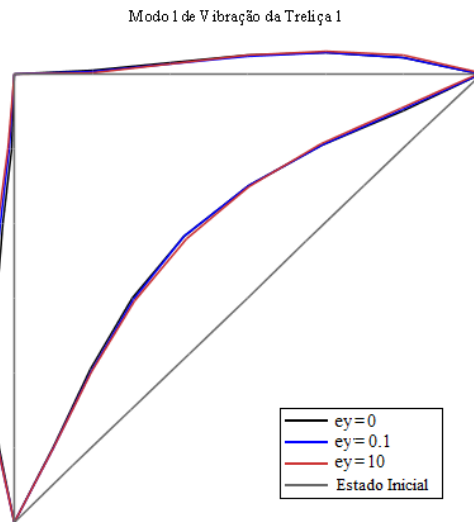


Figura 5.1.8 - Representação Gráfica do Modo 1 de Vibração da Treliça 1

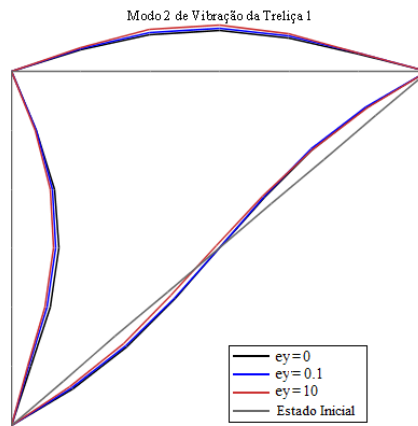


Figura 5.1.9 - Representação Gráfica do Modo 2 de Vibração da Treliza 1

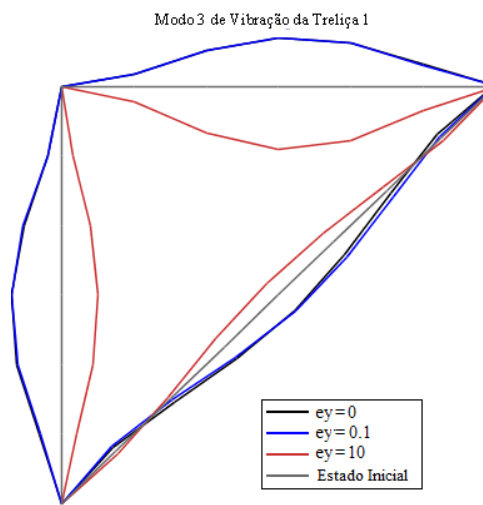


Figura 5.1.10 - Representação Gráfica do Modo 3 de Vibração da Treliza 1

### 5.1.2 Treliza 2

O segundo caso de estudo consiste numa treliça constituída por 19 barras, sujeita a uma carga concentrada  $P = 1000 \text{ N}$  no nó superior da estrutura, como representado na Figura 5.1.11.

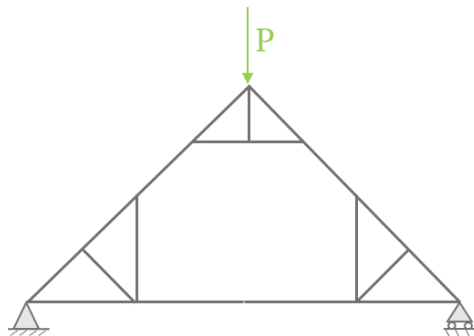


Figura 5.1.11 - Representação Esquemática da Treliza 2 e do carregamento considerado

Para esta estrutura, considerou-se uma distância entre os apoios de 7 m, e uma altura máxima correspondente à metade dessa distância, e em que L toma um valor unitário, e a secção transversal é quadrada de lado 20 mm. A origem do referencial da estrutura localiza-se no apoio simples, e a fração volúmica metálica é definida pela expressão:

$$V_f(Y) = \left( \frac{Y}{\frac{7}{2}L} \right)^{e^y} \quad (5.1.4)$$

A Figura 5.1.12 apresenta esquematicamente a discretização mínima da estrutura, com 19 elementos quadráticos, e a evolução da fração volúmica em função da coordenada vertical Y.

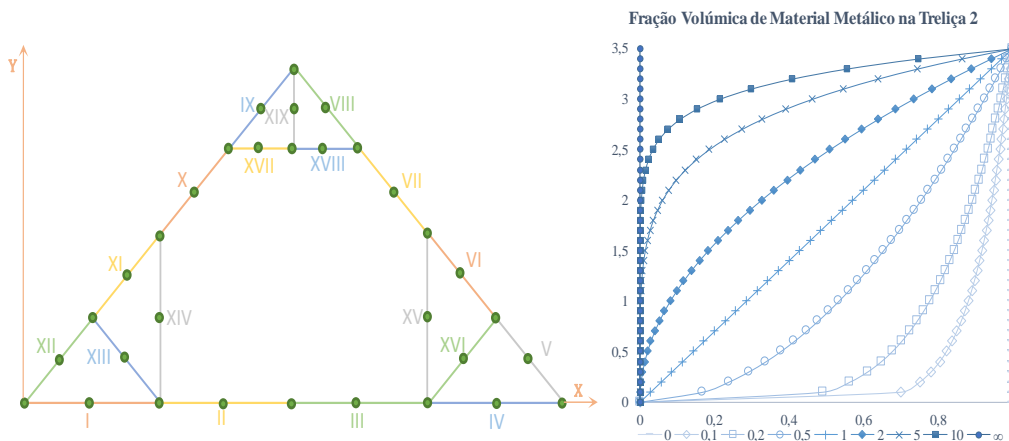


Figura 5.1.12 - Representação Esquemática da Discretização Mínima da Treliça 2 considerando Elementos Unidimensionais Quadráticos, e Evolução da Fração Volúmica de Material Metálico em função da Altura da Estrutura

Para o estudo do comportamento da estrutura, foram consideradas 3 discretizações, com o consecutivo aumento do número de elementos, de modo a verificar a convergência de resultados. A primeira discretização apresenta 19 elementos quadráticos, sendo que cada barra é caracterizada por um elemento quadrático. A segunda discretização tem, no total, 50 elementos, em que as barras da estrutura são caracterizadas por 2, 3 ou 4 elementos em função do comprimento, para que os elementos quadráticos em que são divididas as barras apresentem um comprimento aproximado entre si. A terceira discretização tem, no total, 100 elementos quadráticos, em que as barras da estrutura são caracterizadas por 4, 6 ou 8 elementos em função do comprimento, para que os elementos em que são divididas as barras da estrutura apresentem um comprimento aproximado entre si.

O primeiro estudo paramétrico realizado consiste na estrutura FGM cuja fração volúmica constitui a variação do material metálico na estrutura em função da coordenada vertical da estrutura, cujos resultados para os deslocamentos nodais são apresentados na Tabela 5.1.13, que correspondem aos obtidos para a primeira discretização, e as primeiras 5 frequências naturais na Tabela 5.1.14, obtidas para a discretização mais completa.

Tabela 5.1.13 - Deslocamentos Nodais do Nó de Aplicação da Carga Livre da Trelça 2 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal 20 mm x 20 mm

ey	Deslocamento x [µm]	Deslocamento y [µm]	Rotação [rad]
0	62,4864	-239,2186	6,1112E-09
0,1	21,8706	-175,3372	6,8938E-10
0,2	21,8707	-161,5362	6,4658E-10
0,5	21,8708	-138,9344	5,6950E-10
1	21,8706	-121,7585	4,4618E-10
2	21,8706	-107,4425	2,5373E-10
5	21,8705	-94,7549	1,0409E-10
10	21,8704	-89,2960	-1,4863E-11
∞	21,8703	-83,7265	-2,1357E-09

Relativamente aos resultados obtidos para os deslocamentos nodais, é verificado que ocorre uma diminuição do deslocamento vertical do nó em estudo com o aumento do expoente da lei de potência, devido à existência cada vez mais frequente de material com maior módulo de elasticidade (neste caso, cerâmico). Um aspeto a salientar é relativo ao deslocamento segundo a direção x, em que para os diferentes expoentes, o deslocamento é mantido semelhante ao da estrutura totalmente cerâmica.

Tabela 5.1.14 - Primeiras Cinco Frequências da Trelça 2 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal 20 mm x 20 mm

ey	1ª Frequência [rad/s]	2ª Frequência [rad/s]	3ª Frequência [rad/s]	4ª Frequência [rad/s]	5ª Frequência [rad/s]
0	15,6135	24,7411	51,5665	59,4895	108,7904
0,1	<b>19,2510</b>	22,2343	59,5937	59,7399	122,8151
0,2	19,1054	22,7637	59,7899	60,7131	124,3798
0,5	18,7349	23,9856	59,4925	63,1756	126,0905
1	18,4218	25,3433	59,1425	65,6430	126,5831
2	18,2584	26,8426	59,0888	67,9000	126,5688
5	18,2158	28,2626	59,5850	<b>69,2059</b>	126,5359
10	18,1743	<b>28,6698</b>	<b>59,8865</b>	69,1567	<b>126,5677</b>
∞	18,1311	28,7966	60,0079	69,2218	126,6111

Os resultados obtidos para as primeiras 5 frequências naturais da estrutura evidenciam que, para a primeira frequência natural da estrutura, estas aumentam desde ey=0 até ey=0.1, diminuem ligeiramente desde ey=0,1 até ey=∞; para a segunda frequência, existe uma diminuição desde ey=0 até ey=0.1, seguida de aumento desde ey=0.1 até ey=∞; para a terceira e quinta frequências, as mesmas aumentam desde ey=0 até ey=0.2, seguidas de uma ligeira diminuição desde ey=0.2 até ey=2, e aumento desde ey=2 até ey=∞; para a quarta frequência, as frequências aumentam desde ey=0 até ey=5, diminuem desde ey=5 até ey=10, e posteriormente voltam a aumentar em ey=∞.

Por outro lado, considerando que a lei de potência caracteriza a distribuição do material cerâmico em função da coordenada vertical da estrutura, os deslocamentos nodais e as cinco primeiras frequências naturais da estrutura são apresentados nas tabelas 5.1.15 e 5.1.16, respetivamente.

Tabela 5.1.15 - Deslocamentos Nodais do Nó de Aplicação da Carga da Trelça 2 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal 20 mm x 20 mm

ey	Deslocamento x [μm]	Deslocamento y [μm]	Rotação [rad]
0	21,8703	-83,7265	-2,1357E-09
0,1	62,4794	-128,4471	-8,5064E-10
0,2	62,4804	-132,6806	4,8952E-09
0,5	62,4824	-145,1688	7,2667E-11
1	62,4843	-162,3874	-1,1081E-09
2	62,4856	-184,1000	-8,7118E-10
5	62,4859	-209,8865	-2,4132E-09
10	62,4860	-222,7829	-1,8789E-09
∞	62,4864	-239,2186	6,1112E-09

Relativamente aos resultados obtidos para os deslocamentos nodais, é verificado que ocorre um aumento do deslocamento vertical do nó em estudo com o aumento do expoente da lei de potência, devido à existência cada vez mais frequente de material com menor módulo de elasticidade (metálico). Neste caso, é de salientar que o deslocamento segundo a direção x mantém o valor obtido quando a estrutura é totalmente metálica para os diferentes expoentes.

Tabela 5.1.16 - Primeiras Cinco Frequências da Trelça 2 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal 20 mm x 20 mm

ey	1ª Frequência [rad/s]	2ª Frequência [rad/s]	3ª Frequência [rad/s]	4ª Frequência [rad/s]	5ª Frequência [rad/s]
0	18,1311	28,7966	60,0079	69,2218	126,6111
0,1	15,5012	<b>31,0876</b>	52,7389	<b>70,0461</b>	<b>112,0707</b>
0,2	15,5849	30,8615	53,0569	69,7275	111,4732
0,5	15,7541	30,1940	53,6531	68,7014	110,1081
1	<b>15,8447</b>	29,2467	<b>54,0413</b>	66,9612	109,2404
2	15,7899	27,8264	53,8257	64,0684	109,0516
5	15,5708	25,7706	52,4897	60,4233	108,9685
10	15,5622	24,9748	51,7912	59,6048	108,8551
∞	15,6135	24,7411	51,5665	59,4895	108,7904

Da Tabela 5.1.16 é notado que os resultados menores são verificados para uma situação em que a estrutura é totalmente metálica (ey=∞), à exceção da frequência fundamental, que toma valores inferiores ao da configuração totalmente metálica quando o expoente toma os valores 0.1, 0.2, 5 e 10.

Além disso, para as primeiras três e quinta frequências, uma diminuição de  $e_y=0$  para  $e_y=0,1$ ; para a primeira e terceira frequências, ocorre um aumento desde  $e_y=0,1$  até  $e_y=1$ , e no caso da primeira frequência, ocorre uma diminuição desde  $e_y=0,1$  até  $e_y=10$ , seguida de um aumento em  $e_y=\infty$ , e para a terceira frequência ocorre uma diminuição desde  $e_y=1$  até  $e_y=\infty$ ; nas restantes frequências ocorre uma diminuição desde  $e_y=0,1$  até  $e_y=\infty$ .

A tendência que foi verificada relativamente à evolução dos deslocamentos nodais e às frequências naturais da estrutura nas situações da secção B e C é análoga à secção A, em que o deslocamento vertical aumenta com a progressão de  $e_y$  quando a mesma apresenta maior quantidade de material metálico, e o aumento/diminuição das frequências segue o mesmo comportamento que as primeiras variantes do presente caso de estudo. Comparando as estruturas com a mesma secção transversal, pode verificar-se que a estrutura que apresenta melhor comportamento dinâmico em regime de vibração livre corresponde a uma estrutura com secção transversal B, para ambos os casos estudados relativamente à distribuição dos materiais. Os resultados desses estudos, tanto para a treliça 2 como para as restantes estruturas, são apresentados no apêndice A.

### 5.1.3 Treliça 3

O terceiro caso de estudo consiste numa treliça constituída por 21 barras, sujeita a uma carga concentrada  $P = 1000$  N no nó central superior da estrutura, e cuja representação é apresentada na Figura 5.1.13.

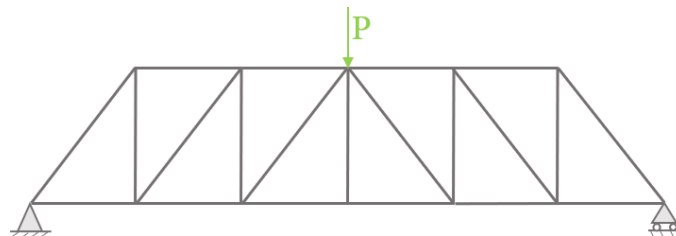


Figura 5.1.13 - Representação Esquemática da Treliça 3 e do carregamento considerado

Para esta estrutura, e considerando que as coordenadas dos nós da estrutura foram definidos em função de  $L$ , com  $L = 1$  m correspondente ao valor da coordenada vertical das barras superiores, assim como o comprimento de cada constituinte horizontal. A origem do referencial da estrutura coincide com o apoio simples e a expressão da fração volúmica é definida pela expressão:

$$V_f(Y) = \left(\frac{Y}{L}\right)^{e_y} \quad (5.1.5)$$

Para o estudo do comportamento da estrutura, foram consideradas 3 discretizações, com o consecutivo aumento do número de elementos, de modo a verificar a convergência de resultados. A primeira discretização apresenta 21 elementos quadráticos, sendo que cada barra é caracterizada por um elemento quadrático.

A segunda discretização apresenta 48 elementos quadráticos, sendo que as barras são caracterizadas por 2 ou 3 elementos em função do comprimento de cada barra, para que a estrutura seja analisada com elementos em que as barras são divididas apresentem comprimentos aproximados entre si. Da mesma forma, a terceira discretização apresenta 69 elementos quadráticos, sendo que as barras são caracterizadas por 3 ou 4 elementos em função do comprimento de cada barra.

O primeiro estudo paramétrico realizado consiste na estrutura FGM cuja lei de potência para a fração volúmica descrita em (5.1.5) constitui a variação do material metálico na estrutura em função da coordenada vertical da estrutura, cujos resultados para os deslocamentos nodais, provenientes da análise da estrutura com a primeira discretização, são apresentados na Tabela 5.1.17, e as primeiras 5 frequências naturais, resultantes da análise da estrutura com a discretização mais completa, na Tabela 5.1.18.

A Figura 5.1.14 apresenta esquematicamente a discretização mínima da estrutura, com 21 elementos quadráticos, e a evolução da fração volúmica em função da coordenada vertical Y.

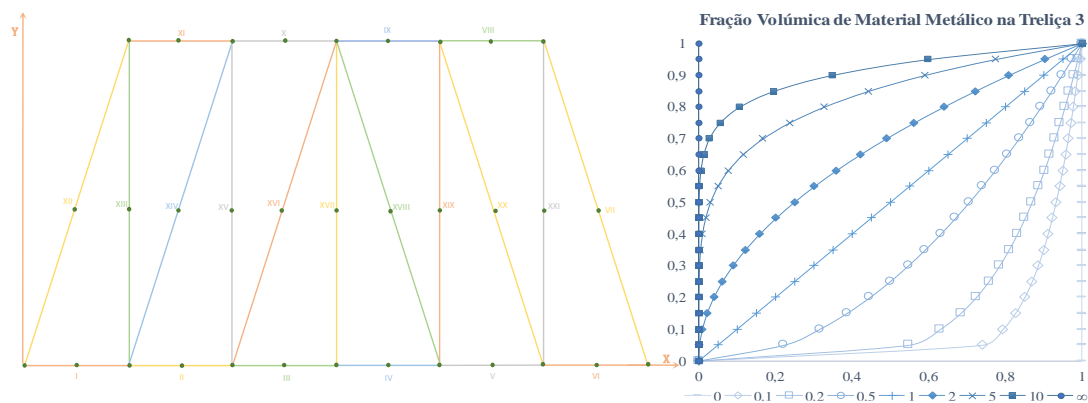


Figura 5.1.14 - Representação Esquemática da Discretização Mínima da Treliça 3 considerando Elementos Unidimensionais Quadráticos, e Evolução da Fração Volúmica de Material Metálico em função da Altura da Estrutura

Tabela 5.1.17 - Deslocamentos Nodais do Nó de Aplicação da Carga da Treliça 3 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal 20 mm x 20 mm

ey	Deslocamento x [μm]	Deslocamento y [μm]	Rotação [rad]
0	107,0915	-526,1675	6,4705E-11
0,1	37,4813	-338,9403	4,7936E-12
0,2	37,4818	-324,3968	9,3448E-12
0,5	37,4828	-300,5817	5,8877E-12
1	37,4839	-281,8495	-1,2021E-11
2	37,4851	-265,7296	4,3961E-12
5	37,4860	-252,0409	1,2261E-11
10	37,4862	-246,9596	-4,0025E-12
∞	37,4821	-184,1588	-9,9749E-12

Relativamente aos resultados aos deslocamentos nodais, ocorre uma diminuição do deslocamento vertical do nó em estudo com o aumento do expoente da lei de potência, devido à existência cada vez mais frequente de material com maior módulo de elasticidade. Analogamente à treliça 2, verifica-se a manutenção do deslocamento que caracteriza a estrutura totalmente cerâmica para os diferentes expoentes estudados.

Tabela 5.1.18 - Primeiras Cinco Frequências da Treliça 3 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal 20 mm x 20 mm

$e_y$	1ª Frequência [rad/s]	2ª Frequência [rad/s]	3ª Frequência [rad/s]	4ª Frequência [rad/s]	5ª Frequência [rad/s]
<b>0</b>	230,3399	231,5420	247,4769	258,3883	264,6864
<b>0,1</b>	253,3700	255,7401	268,8388	282,4591	289,8927
<b>0,2</b>	255,1297	<b>256,9846</b>	271,8747	<b>284,7352</b>	292,7013
<b>0,5</b>	<b>255,1334</b>	256,3048	<b>273,6116</b>	284,3819	<b>292,8696</b>
<b>1</b>	253,0888	253,9074	271,9947	280,6268	289,2129
<b>2</b>	251,1698	251,7997	269,4350	276,1570	284,7869
<b>5</b>	251,5227	252,0211	268,4811	273,5379	282,4255
<b>10</b>	253,6946	254,1314	269,5822	274,1852	283,2597
$\infty$	268,0657	269,4646	288,0093	300,7078	308,0374

Os resultados das frequências naturais da Tabela 5.1.18 permitem evidenciar um aumento da primeira frequência desde  $e_y=0$  até  $e_y=0,5$ , seguida de uma diminuição desde  $e_y=0,5$  até  $e_y=2$ , e aumento desde  $e_y=2$  até  $e_y=\infty$ ; a terceira e quinta frequências aumentam desde  $e_y=0$  até  $e_y=0,5$ , seguida de uma diminuição desde  $e_y=0,5$  até  $e_y=5$ , e posteriormente, um aumento desde  $e_y=5$  até  $e_y=\infty$ , e para as restantes frequências, ocorre um aumento desde  $e_y=0$  até  $e_y=0,2$ ; no caso da segunda frequência, ocorre uma diminuição desde  $e_y=0,2$  até  $e_y=2$ , e posterior aumento desde  $e_y=2$  até  $e_y=\infty$ ; no caso da quarta frequência, ocorre diminuição desde  $e_y=0,2$  até  $e_y=5$ , e posteriormente, um aumento desde  $e_y=5$  até  $e_y=\infty$ . Os resultados menores são verificados para uma situação em que a estrutura é totalmente metálica ( $e_y=0$ ).

Por outro lado, considerando uma situação em que a lei de potência caracteriza a distribuição do material cerâmico em função da coordenada vertical da estrutura, os deslocamentos nodais e as primeiras cinco frequências naturais da estrutura são apresentados nas tabelas 5.1.19 e 5.1.20, respetivamente.

Tabela 5.1.19 - Deslocamentos Nodais do Nó de Aplicação da Carga da Treliça 3 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal 20 mm x 20 mm

ey	Deslocamento x [μm]	Deslocamento y [μm]	Rotação [rad]
0	37,4821	-184,1588	-9,9749E-12
0,1	107,0719	-350,8037	-1,6798E-12
0,2	107,0716	-355,1475	-3,7633E-12
0,5	107,0702	-367,8785	1,4047E-11
1	107,0676	-386,0853	-2,6927E-11
2	107,0643	-409,5547	7,2151E-11
5	107,0626	-434,9801	-2,1133E-11
10	107,0634	-447,0768	1,5483E-11
∞	107,0915	-526,1675	6,4705E-11

Relativamente aos resultados obtidos para os deslocamentos nodais, é verificado que ocorre um aumento do deslocamento vertical do nó em estudo com o aumento do expoente da lei de potência, devido à existência cada vez mais frequente de material com menor módulo de elasticidade (metálico). De salientar também que o deslocamento segundo a direção x característico da estrutura totalmente metálica se mantém para os diferentes expoentes (exceto 0, em que a estrutura é totalmente cerâmica). Esta discrepância no comportamento do deslocamento segundo a direção x face à situação contrária pode dever-se ao facto de, analogamente à treliça 2, o nó analisado encontrar-se localizado à coordenada vertical superior, à qual a quantidade de material existente na globalidade da estrutura é superior ao material que constitui a estrutura a essa coordenada vertical, pelo que o que prevalece é o comportamento do material em maior quantidade na estrutura e que está associado às condições de fronteira.

Tabela 5.1.20 - Primeiras Cinco Frequências da Treliça 3 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal 20 mm x 20 mm

ey	1ª Frequência [rad/s]	2ª Frequência [rad/s]	3ª Frequência [rad/s]	4ª Frequência [rad/s]	5ª Frequência [rad/s]
0	268,0657	269,4646	288,0093	300,7078	308,0374
0,1	<b>245,1545</b>	<b>249,1337</b>	<b>264,8554</b>	276,1929	288,7226
0,2	245,7970	249,5166	265,1496	274,4678	287,9182
0,5	247,0591	250,3279	265,8464	<b>271,9677</b>	<b>286,9816</b>
1	248,4834	251,4724	267,2148	272,9011	288,4057
2	250,6501	253,4950	270,4639	277,4995	293,0145
5	<b>252,5763</b>	<b>255,4495</b>	274,7851	283,6432	<b>298,7442</b>
10	251,4537	254,2850	<b>275,0148</b>	<b>284,3128</b>	298,1550
∞	230,3399	231,5420	247,4769	258,3883	264,6864

Os resultados das frequências naturais da Tabela 5.1.20 permitem evidenciar, para as primeiras três frequências, uma diminuição desde ey=0 até ey=0.1, seguida de um aumento desde ey=0.1 até ey=5, e diminuição desde ey=5 até ey=∞ no caso da primeira e segunda frequências; na

terceira, o aumento ocorre desde  $e_y=0.1$  até  $e_y=10$ , seguido de uma diminuição até  $e_y=\infty$ ; para a quarta frequência, ocorre diminuição desde  $e_y=0$  até  $e_y=0.5$ , seguida de aumento desde  $e_y=0.5$  até  $e_y=10$ , e posterior diminuição; para a quinta frequência, ocorre diminuição desde  $e_y=0$  até  $e_y=0.5$ , seguida de aumento desde  $e_y=0.5$  até  $e_y=5$ , e posterior diminuição desde  $e_y=5$  até  $e_y=\infty$ .

A tendência que foi verificada relativamente à evolução dos deslocamentos nodais e às frequências naturais da estrutura nas situações da secção B e C é análoga à secção A, em que os deslocamentos nodais aumentam com a progressão de  $e_y$  quando a mesma apresenta maior quantidade de material metálico, e o aumento/diminuição das frequências segue o mesmo comportamento que as primeiras variantes do presente caso de estudo.

Comparando as estruturas com a mesma secção transversal, pode verificar-se que a estrutura que apresenta melhor resposta dinâmica corresponde a uma estrutura com secção transversal B, para ambos os casos estudados relativamente à distribuição dos materiais, apresentando um comportamento mais rígido para o caso em que a fração volúmica caracteriza o volume da fase metálica presente.

Ainda relativamente aos deslocamentos nodais horizontais, tanto da treliça 2 como da treliça 3, constata-se que nestas estruturas, na ausência de carregamentos na direção horizontal, é o material localizado ao nível dos apoios que determina o deslocamento nessa direção quando a mesma é construída em FGM relativamente à cota Y.

#### 5.1.4 Pórtico 1

O quarto caso de estudo consiste num pórtico simples constituído por 3 vigas sujeito a uma carga uniformemente distribuída no elemento horizontal superior e uma carga concentrada horizontal no nó superior esquerdo, cuja representação esquemática é apresentada na Figura 5.1.15.

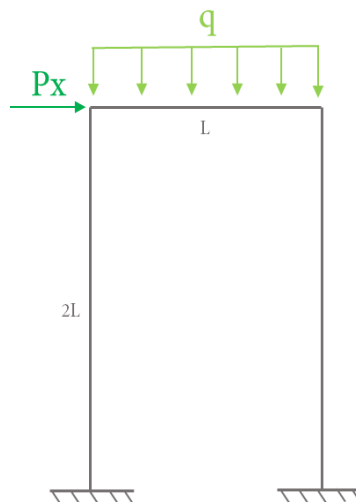


Figura 5.1.15 - Representação Esquemática do Pórtico 1 e carregamento considerado

Neste caso, foi considerado que o comprimento dos elementos verticais corresponde ao dobro dos elementos horizontais, cujo valor corresponde a  $L = 1$  m. Os elementos apresentam secção quadrada de 20 mm de lado, tendo-se uma relação de aspeto  $L/h \geq 50$ , e a origem do referencial da estrutura coincide com o encastramento localizado à esquerda. A expressão da fração volúmica traduz, numa primeira fase, à distribuição de material metálico em função da coordenada vertical (Y) da estrutura, através da expressão:

$$V_f(Y) = \left(\frac{Y}{2L}\right)^{e_y} \quad (5.1.6)$$

Para o estudo do comportamento da estrutura, foram consideradas 3 discretizações, com o consecutivo aumento do número de elementos, de modo a verificar a convergência de resultados. A primeira discretização apresenta 3 elementos quadráticos, em que cada viga é caracterizada por um elemento, como mostra a Figura 5.1.16. A segunda discretização tem um total de 10 elementos, em que as barras verticais são caracterizadas por 4 elementos cada, e a horizontal é caracterizada por 2 elementos, tal que os elementos através dos quais as vigas são divididas apresentem comprimentos aproximados, e neste caso, iguais. Da mesma forma, a terceira discretização tem um total de 20 elementos, em que as barras verticais são caracterizadas por 8 elementos cada, e a horizontal é caracterizada por 4 elementos.

A Figura 5.1.16 apresenta esquematicamente a discretização mínima da estrutura, com 3 elementos quadráticos, e a evolução da fração volúmica em função da coordenada vertical Y.

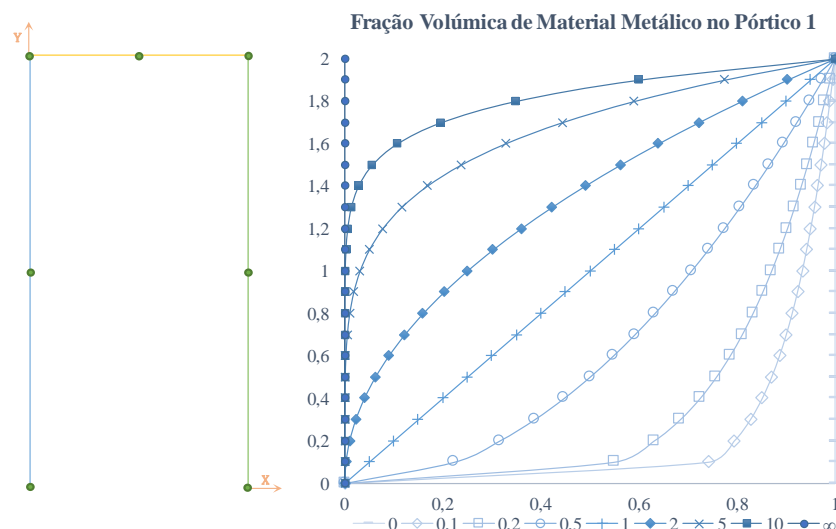


Figura 5.1.16 - Representação Esquemática da Discretização Mínima do Pórtico 1 considerando Elementos Unidimensionais Quadráticos, e Evolução da Fração Volúmica de Material Metálico em função da Altura da Estrutura

No presente capítulo, os resultados apresentados para os deslocamentos nodais e reações nos encastramentos correspondem aos obtidos com a primeira discretização, já que apresentam resultados satisfatórios face ao número de elementos utilizados.

No caso das frequências naturais, são apresentados os resultados obtidos com a segunda discretização, quando é verificada convergência das mesmas relativamente à mais completa.

O primeiro estudo paramétrico realizado consiste na estrutura FGM cuja lei de potência para a fração volúmica constitui a variação do material metálico na estrutura em função da coordenada vertical da estrutura, cujos resultados para os deslocamentos nodais são apresentados na Tabela 5.1.21, e as primeiras 5 frequências naturais na Tabela 5.1.22.

Tabela 5.1.21 - Deslocamentos Nodais do Nó Superior Esquerdo e Direito, respetivamente, do Pórtico 1 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal 20 mm x 20 mm

ey	Desl. x [mm]	Desl. y [ $\mu$ m]	Rotação [rad]	Desl. x [mm]	Desl. y [ $\mu$ m]	Rotação [rad]
0	21,9895	-32,4192	2,6455E-02	21,9875	-39,0094	-1,8194E-02
0,1	18,5147	-28,3643	2,5351E-02	18,5126	-33,6603	-1,7707E-02
0,2	16,6890	-25,9245	2,4632E-02	16,6869	-30,5230	-1,7340E-02
0,5	14,1139	-21,8697	2,3304E-02	14,1116	-25,4455	-1,6540E-02
1	12,5842	-18,7312	2,2071E-02	12,5819	-21,6444	-1,5615E-02
2	11,6645	-16,0680	2,0692E-02	11,6622	-18,5284	-1,4329E-02
5	11,0059	-13,6615	1,8716E-02	11,0036	-15,8265	-1,2148E-02
10	10,6032	-12,6056	1,7340E-02	10,6008	-14,6836	-1,0528E-02
$\infty$	7,7012	-11,3460	9,2602E-03	7,7005	-13,6540	-6,3670E-03

Tabela 5.1.22 – Primeiras Cinco Frequências do Pórtico 1 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal 20 mm x 20 mm

ey	1ª Frequências [rad/s]	2ª Frequências [rad/s]	3ª Frequências [rad/s]	4ª Frequências [rad/s]	5ª Frequências [rad/s]
0	29,8278	130,6897	175,1141	351,5229	455,3377
0,1	32,6295	137,8133	184,1185	362,9163	473,8697
0,2	34,3377	141,3716	188,7245	368,8737	483,6228
0,5	36,9493	145,0632	194,0882	376,9117	496,0172
1	38,2750	<b>145,1146</b>	195,8318	382,0864	502,5574
2	<b>38,3341</b>	143,2675	196,4375	387,4668	508,0146
5	37,3299	141,4884	197,8057	396,3459	515,7549
10	36,7351	140,9934	198,4439	403,1481	519,7374
$\infty$	34,7022	<b>152,0939</b>	<b>203,7936</b>	<b>409,0955</b>	<b>529,9131</b>

Por outro lado, se for considerado que a lei de potência caracteriza a distribuição do material cerâmico em função da coordenada vertical da estrutura, os resultados dos deslocamentos nodais e das frequências naturais são apresentados nas tabelas 5.1.23 e 5.1.24, respetivamente.

Tabela 5.1.23 - Deslocamentos Nodais do Nó Superior Esquerdo e Direito, respetivamente, do Pórtico 1 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal 20 mm x 20 mm

ey	Desl. x [mm]	Desl.y [µm]	Rotação [rad]	Desl. x [mm]	Desl. y [µm]	Rotação [rad]
0	7,7012	-11,3460	9,2602E-03	7,7005	-13,6540	-6,3670E-03
0,1	8,3379	-12,0552	9,4352E-03	8,3372	-14,6061	-6,4365E-03
0,2	8,9471	-12,7839	9,5961E-03	8,9465	-15,5859	-6,5003E-03
0,5	10,4688	-14,9375	9,9877E-03	10,4682	-18,4748	-6,6682E-03
1	11,9649	-17,9377	1,0409E-02	11,9643	-22,4379	-6,9125E-03
2	13,2076	-21,7957	1,0896E-02	13,2070	-27,3542	-7,3460E-03
5	14,7287	-26,5395	1,1658E-02	14,7281	-33,0325	-8,2349E-03
10	16,0755	-29,0020	1,2205E-02	16,0749	-35,7895	-8,9139E-03
∞	21,9895	-32,4192	2,6455E-02	21,9875	-39,0094	-1,8194E-02

Tabela 5.1.24 - Primeiras Cinco Frequências do Pórtico 1 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal 20 mm x 20 mm

ey	1ª Frequências [rad/s]	2ª Frequências [rad/s]	3ª Frequências [rad/s]	4ª Frequências [rad/s]	5ª Frequências [rad/s]
0	34,7022	152,0939	203,7936	409,0955	529,9131
0,1	33,3036	148,8331	199,7622	404,2857	522,7049
0,2	32,1317	146,2845	196,5979	400,4413	517,0878
0,5	29,7782	141,9096	190,9876	393,0329	506,5443
1	28,1599	<b>140,3405</b>	<b>188,3391</b>	387,5234	498,8518
2	27,4307	141,9643	188,7417	382,4912	492,4405
5	27,0968	145,6986	189,4137	372,4889	484,6241
10	26,7666	147,3921	187,5318	365,1897	481,8890
∞	29,8278	130,6897	175,1141	351,5229	455,3377

Os valores obtidos para as primeiras 5 frequências naturais no estudo do pórtico 1, cuja regra de misturas corresponde à distribuição de material metálico em função de Y, permitem verificar um aumento da primeira frequência desde ey=0 até ey=2, seguida de diminuição até ey=∞; para a segunda frequência, a mesma aumenta desde ey=0 até ey=1, com posterior diminuição até ey=10, seguida de aumento em ey=∞; nas restantes, ocorre aumento desde ey=0 até ey=∞. Quanto aos deslocamentos, é verificada a mesma tendência que nas estruturas anteriormente estudadas, nas quais os deslocamentos nodais diminuem com a crescente presença de material cerâmico, com maior módulo de elasticidade, como seria esperado.

O estudo das frequências naturais no caso do pórtico 1 cuja regra de misturas apresenta a distribuição de material cerâmico permite a verificação de uma diminuição da primeira frequência desde ey=0 até ey=10, seguida de aumento em ey=∞; a segunda e terceira frequências diminuem desde ey=0 até ey=1, ocorrendo, para a segunda frequência, um aumento desde ey=1 até ey=10 e posterior diminuição em ey=∞, e para a terceira frequência, ocorre um aumento desde ey=1 até ey=5, seguida de uma diminuição até ey=∞; a quarta e quinta frequências desde ey=0 até ey=∞.

O estudo do pórtico 1 com as secções B e C permite verificar uma tendência semelhante, quer para as frequências quer para os deslocamentos nodais. Comparando os estudos realizados, a estrutura com secção B apresenta maior estabilidade, com comportamento mais favorável no caso em que a regra de misturas traduz a distribuição de material metálico ao longo da coordenada vertical da estrutura.

Analogamente à treliça 1, as figuras 5.1.17, 5.1.18 e 5.1.19 representam graficamente os primeiros 3 modos de vibração do pórtico 1, respetivamente, para a estrutura totalmente metálica e para os expoentes da lei de potência de 0.1 e 10 quando a expressão da fração volúmica caracteriza a distribuição do material metálico.

A representação destes modos de vibração permite evidenciar o comportamento verificado para as frequências naturais registadas, em que o aumento/diminuição da frequência associada a um determinado modo em função do expoente da lei de potência nem sempre coincide com o aumento/diminuição da frequência noutro modo de vibração.

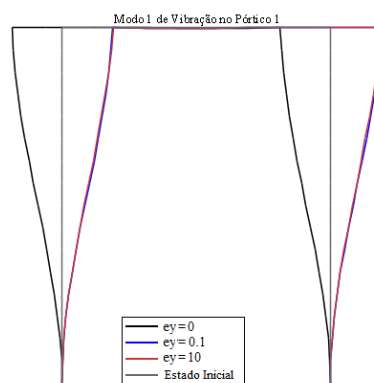


Figura 5.1.17 - Representação Gráfica do Modo 1 de Vibração do Pórtico 1

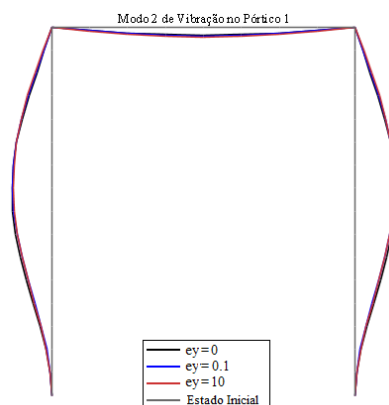


Figura 5.1.18 - Representação Gráfica do Modo 2 de Vibração do Pórtico 1

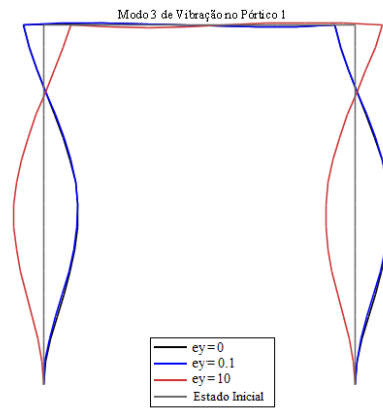


Figura 5.1.19 - Representação Gráfica do Modo 3 de Vibração do Pórtico 1

### 5.1.5 Pórtico 2

O quinto caso de estudo consiste num pórtico que resulta da adição de uma viga ao pórtico 1 (constituído por 3 vigas) sujeito a uma carga uniformemente distribuída no elemento horizontal superior e uma carga concentrada horizontal no nó superior esquerdo, cuja representação esquemática é apresentada na Figura 5.1.20.

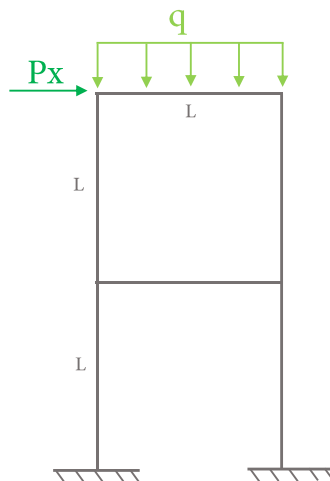


Figura 5.1.20 - Representação Esquemática do Pórtico 2 e carregamento considerado

Neste caso, foi considerado que o comprimento dos elementos verticais corresponde ao dobro dos elementos horizontais, cujo valor corresponde a  $L = 1$  m. Os elementos apresentam secção quadrada de 20 mm de lado, e a origem do referencial da estrutura coincide com o encastramento localizado à esquerda. A expressão da fração volúmica é dada por (5.1.6).

Para o estudo do comportamento da estrutura, foram consideradas 3 discretizações, com o consecutivo aumento do número de elementos, de modo a verificar a convergência de resultados. A Figura 5.1.21 apresenta esquematicamente a discretização mínima da estrutura, com 6 elementos quadráticos, e a evolução da fração volúmica em função da coordenada vertical Y.

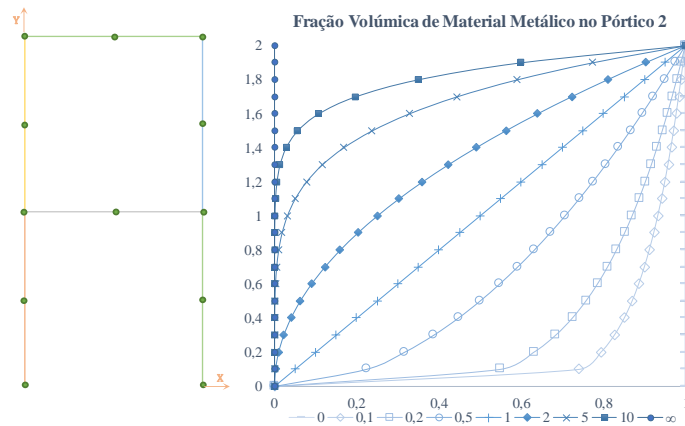


Figura 5.1.21 - Representação Esquemática da Discretização Mínima do Pórtico 2 considerando Elementos Unidimensionais Quadráticos, e Evolução da Fração Volumica de Material Metálico em função da Altura da Estrutura

A primeira discretização apresenta 6 elementos quadráticos, em que cada viga é caracterizada por um elemento. A segunda discretização tem um total de 12 elementos, em que cada viga é dividida em dois elementos tal que os respectivos comprimentos sejam iguais. A terceira discretização tem um total de 18 elementos, em que cada viga é dividida em três elementos tal que os respectivos comprimentos sejam iguais. No presente capítulo, os resultados apresentados para os deslocamentos nodais dos nós superiores esquerdo e direito correspondem aos obtidos com a primeira discretização, já que apresentam resultados satisfatórios face ao número de elementos utilizados. No caso das frequências naturais, são apresentados os resultados obtidos com a segunda discretização, quando é verificada convergência das mesmas.

O primeiro estudo paramétrico realizado consiste na estrutura FGM cuja lei de potência para a fração volúmica descrita em (5.1.6) constitui a variação do material metálico na estrutura em função da coordenada vertical da estrutura, cujos resultados para os deslocamentos nodais são apresentados na Tabela 5.1.25, e as primeiras 5 frequências naturais na Tabela 5.1.26.

Tabela 5.1.25 - Deslocamentos Nodais do Nó Superior Esquerdo e Direito, respetivamente, do Pórtico 2 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volumica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal 20 mm x 20 mm

ey	Desl. x [mm]	Desl. o y [ $\mu$ m]	Rotação [rad]	Desl. x [mm]	Desl. y [ $\mu$ m]	Rotação [rad]
0	9,3543	-32,3060	1,8399E-02	9,3508	-39,1226	-1,3510E-02
0,1	8,0661	-28,2583	1,7979E-02	8,0626	-33,7476	-1,3291E-02
0,2	7,3349	-25,8274	1,7626E-02	7,3314	-30,6059	-1,3085E-02
0,5	6,1949	-21,7843	1,6785E-02	6,1913	-25,5282	-1,2533E-02
1	5,3629	-18,6352	1,5776E-02	5,3591	-21,7158	-1,1785E-02
2	4,7001	-15,9281	1,4467E-02	4,6961	-18,5660	-1,0702E-02
5	4,2269	-13,4421	1,2590E-02	4,2228	-15,8040	-8,9413E-03
10	4,1165	-12,3855	1,1356E-02	4,1125	-14,6699	-7,6434E-03
$\infty$	3,2744	-11,3070	6,4397E-03	3,2731	-13,6930	-4,7283E-03

Tabela 5.1.26 - Primeiras Cinco Frequências do Pórtico 2 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal 20 mm x 20 mm

ey	1ª Frequência [rad/s]	2ª Frequência [rad/s]	3ª Frequência [rad/s]	4ª Frequência [rad/s]	5ª Frequência [rad/s]
0	43,9921	144,4886	318,2772	453,5923	499,8121
0,1	47,9111	150,7673	324,9689	464,7397	517,7151
0,2	50,3416	154,2895	329,4327	471,3933	527,1581
0,5	54,3266	159,0650	337,7945	482,1147	540,7091
1	56,9080	161,4984	345,1595	489,9145	549,7032
2	<b>58,1118</b>	163,3293	352,0267	497,1278	557,5877
5	57,5302	165,6642	358,9197	507,3224	566,0864
10	56,4163	166,2676	362,9464	515,4645	569,6177
∞	51,1988	<b>168,1537</b>	<b>370,4040</b>	<b>527,8814</b>	<b>581,6713</b>

Por outro lado, se for considerado que a lei de potência caracteriza a distribuição do material cerâmico em função da coordenada vertical da estrutura, os resultados dos deslocamentos nodais e das frequências naturais são apresentados nas tabelas 5.1.27 e 5.1.28, respetivamente.

Tabela 5.1.27 - Deslocamentos Nodais do Nó Superior Esquerdo e Direito, respetivamente, do Pórtico 2 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal 20 mm x 20 mm

ey	Desl. x [mm]	Desl. o y [µm]	Rotação [rad]	Desl. x [mm]	Desl. y [µm]	Rotação [rad]
0	3,2744	-11,3070	6,4397E-03	3,2731	-13,6930	-4,7283E-03
0,1	3,4947	-12,0113	6,4959E-03	3,4935	-14,6438	-4,7548E-03
0,2	3,7042	-12,7321	6,5498E-03	3,7030	-15,6166	-4,7805E-03
0,5	4,2571	-14,8657	6,6993E-03	4,2559	-18,4851	-4,8549E-03
1	4,9524	-17,8783	6,9162E-03	4,9513	-22,4727	-4,9750E-03
2	5,8363	-21,7407	7,2639E-03	5,8352	-27,3943	-5,2015E-03
5	6,8646	-26,4915	7,9126E-03	6,8635	-33,0684	-5,7565E-03
10	7,2320	-28,8337	8,4928E-03	7,2310	-35,7017	-6,3796E-03
∞	9,3543	-32,3060	1,8399E-02	9,3508	-39,1226	-1,3510E-02

Tabela 5.1.28 - Primeiras Cinco Frequências do Pórtico 2 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal 20 mm x 20 mm

ey	1ª Frequência [rad/s]	2ª Frequência [rad/s]	3ª Frequência [rad/s]	4ª Frequência [rad/s]	5ª Frequência [rad/s]
0	51,1988	168,1537	370,4040	527,8814	581,6713
0,1	49,2463	165,4572	367,7648	523,7429	574,2988
0,2	47,5817	163,3150	365,4231	520,2160	568,2919
0,5	44,1087	159,4238	360,0088	512,6972	556,7492
1	41,3438	157,2461	354,3017	505,4425	548,3769
2	39,2886	156,4988	347,3270	494,9265	539,6519
5	<b>38,0059</b>	154,9672	338,1728	475,4959	527,4384
10	38,1318	152,1345	334,4278	465,5881	525,4977
∞	43,9921	144,4886	318,2772	453,5923	499,8121

A introdução de um elemento contraventamento no pórtico 2 face ao pórtico 1 permite aumentar as frequências naturais, sendo possível verificar uma alteração no comportamento da estrutura, na qual é visível um aumento da primeira frequência desde  $e_y=0$  até  $e_y=2$ , seguida de diminuição até  $e_y=\infty$  (tendência semelhante ao pórtico 1), e nas restantes, as frequências aumentam desde  $e_y=0$  até  $e_y=\infty$ , no caso da estrutura com regra de misturas relativa à distribuição de material metálico.

Quanto à estrutura em que a regra de misturas traduz a distribuição de material cerâmico, é verificada uma diminuição da primeira frequência desde  $e_y=0$  até  $e_y=5$ , seguida de aumento até  $e_y=\infty$ , e nas restantes, ocorre diminuição desde  $e_y=0$  até  $e_y=\infty$ . Quanto aos deslocamentos em estudo, é verificada uma diminuição notável nos deslocamentos segundo  $x$  dos nós analisados, ocorrendo, como esperado, uma diminuição dos deslocamentos nodais com o aumento de material cerâmico na estrutura.

O estudo do pórtico 2 com as secções B e C permite verificar uma tendência semelhante, quer para as frequências quer para os deslocamentos nodais. Comparando os estudos realizados, a estrutura com secção B apresenta maior estabilidade, com comportamento mais favorável no caso em que a regra de misturas traduz a distribuição de material metálico ao longo da coordenada vertical da estrutura.

### 5.1.6 Pórtico 3

O sexto caso de estudo consiste num pórtico que resulta da adição de 4 vigas ao pórtico 2 sujeito a uma carga uniformemente distribuída no elemento horizontal superior e uma carga concentrada horizontal no nó superior esquerdo, cuja representação esquemática é apresentada na Figura 5.1.21.

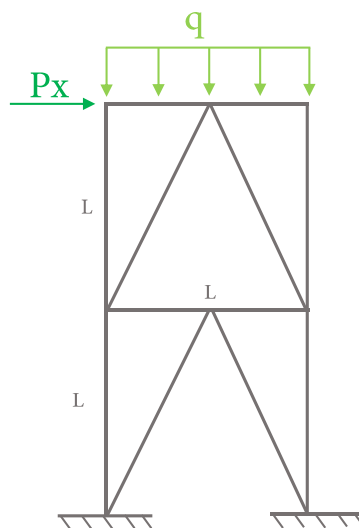


Figura 5.1.22 - Representação Esquemática do Pórtico 3 e carregamento considerado

Neste caso, foi considerado que o comprimento dos elementos verticais corresponde ao dobro dos elementos horizontais, cujo valor corresponde a  $L = 1$  m. Os elementos apresentam secção quadrada de 20 mm de lado, e a origem do referencial da estrutura coincide com o encastramento localizado à esquerda. A expressão da fração volúmica é dada por (5.1.6).

Para o estudo do comportamento da estrutura, foram consideradas 3 discretizações, com o consecutivo aumento do número de elementos, de modo a verificar a convergência de resultados. A primeira discretização apresenta 12 elementos quadráticos, em que cada viga é caracterizada por um elemento. A segunda discretização tem um total de 20 elementos, em que cada viga é dividida em um ou dois elementos tal que os respectivos comprimentos sejam iguais. A terceira discretização tem um total de 40 elementos, em que cada viga é dividida em dois ou quatro elementos tal que os respectivos comprimentos sejam iguais.

A Figura 5.1.23 apresenta esquematicamente a discretização mínima da estrutura, com 12 elementos quadráticos, e a evolução da fração volúmica em função da coordenada vertical Y.

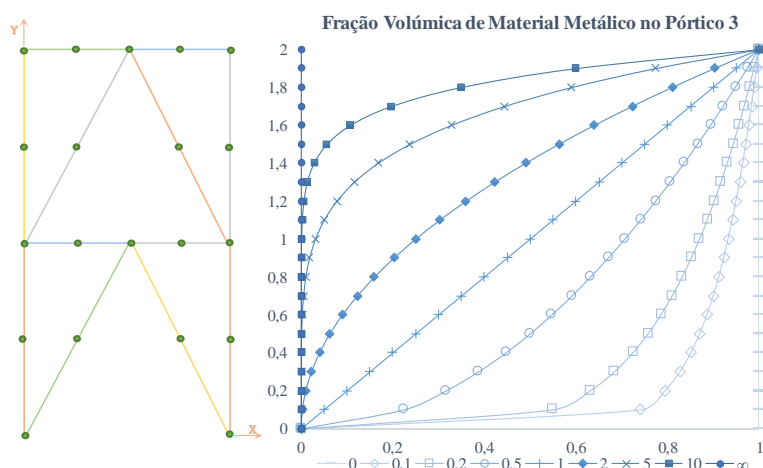


Figura 5.1.23 - Representação Esquemática da Discretização Mínima do Pórtico 3 considerando Elementos Unidimensionais Quadráticos, e Evolução da Fração Volúmica de Material Metálico em função da Altura da Estrutura

No presente capítulo, os resultados apresentados para os deslocamentos nodais e reações nos encastramentos correspondem aos obtidos com a primeira discretização, já que apresentam resultados satisfatórios face ao número de elementos utilizados. No caso das frequências naturais, são apresentados os resultados obtidos com a segunda discretização, quando é verificada convergência das mesmas.

O primeiro estudo paramétrico realizado consiste na estrutura FGM cuja lei de potência para a fração volúmica descrita em (5.1.6) constitui a variação do material metálico na estrutura em função da coordenada vertical da estrutura, cujos resultados para os deslocamentos nodais são apresentados na Tabela 5.1.29, e as primeiras 5 frequências naturais na Tabela 5.1.30

Tabela 5.1.29 - Deslocamentos Nodais do Nó Superior Esquerdo e Direito, respetivamente, do Pórtico 3 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal 20 mm x 20 mm

ey	Desl. x [mm]	Desl. y [µm]	Rotação [rad]	Desl. x [mm]	Desl. y [µm]	Rotação [rad]
0	15,0466	-23,6098	1,9255E-03	13,8146	-27,1872	-1,9145E-03
0,1	12,9296	-19,8155	1,9054E-03	11,6867	-22,6348	-1,8960E-03
0,2	11,7166	-17,6845	1,8874E-03	10,4639	-20,1005	-1,8789E-03
0,5	9,8186	-14,4304	1,8412E-03	8,5413	-16,2787	-1,8339E-03
1	8,4722	-12,1993	1,7798E-03	7,1642	-13,7140	-1,7733E-03
2	7,4435	-10,5582	1,6912E-03	6,0962	-11,8858	-1,6852E-03
5	6,6385	-9,3284	1,5443E-03	5,2425	-10,5848	-1,5388E-03
10	6,3403	-8,8804	1,4312E-03	4,9154	-10,1324	-1,4258E-03
∞	5,2663	-8,2634	6,7393E-04	4,8351	-9,5155	-6,7009E-04

A introdução de mais 4 elementos de contraventamento no pórtico 3 face ao pórtico 2 permitiu, de uma forma geral, aumentar significativamente as frequências naturais da estrutura. Para a primeira, segunda e quinta frequências naturais, em que a regra de misturas é relativa à distribuição de material metálico, verifica-se um aumento desde  $ey=0$  até  $ey=2$ , seguido de diminuição até  $ey=10$ , e em  $ey=\infty$  é obtido um valor superior; para a terceira e quarta frequências, a mesma tendência é verificada, mas neste caso para  $ey=5$ .

Por outro lado, se for considerado que a lei de potência caracteriza a distribuição do material cerâmico em função da coordenada vertical da estrutura, é verificado um comportamento idêntico ao considerado no estudo previamente descrito, mas invertido, em função da configuração material, e cujos resultados são apresentados dos deslocamentos nodais e das frequências naturais nas tabelas 5.1.31 e 5.1.32, respetivamente.

Tabela 5.1.30 - Primeiras Cinco Frequências do Pórtico 3 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal 20 mm x 20 mm

ey	1ª Frequência [rad/s]	2ª Frequência [rad/s]	3ª Frequência [rad/s]	4ª Frequência [rad/s]	5ª Frequência [rad/s]
0	386,1612	440,3070	452,8642	492,4523	526,7631
0,1	395,2306	448,5796	477,4574	505,1636	552,0669
0,2	400,7786	453,8439	488,1754	514,4542	557,7006
0,5	410,3207	463,1009	501,4668	528,1698	569,5811
1	417,1017	469,8799	508,6964	536,3634	580,1761
2	<b>420,3882</b>	<b>473,6186</b>	513,6048	542,6436	<b>587,3941</b>
5	417,4372	472,4906	<b>516,9263</b>	<b>544,3687</b>	585,7992
10	413,7309	471,7662	515,5957	542,2324	581,7793
∞	449,4085	512,4221	527,0360	573,1076	613,0380

Tabela 5.1.31 - Deslocamentos Nodais do Nó Superior Esquerdo e Direito, respetivamente, do Pórtico 3 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal 20 mm x 20 mm

ey	Desl. x [mm]	Desl. y [µm]	Rotação [rad]	Desl. x [mm]	Desl. y [µm]	Rotação [rad]
0	5,2663	-8,2634	6,7393E-04	4,8351	-9,5155	-6,7009E-04
0,1	5,6443	-8,9482	6,7655E-04	5,2145	-10,3408	-6,7242E-04
0,2	6,0313	-9,6492	6,7911E-04	5,6028	-11,1859	-6,7468E-04
0,5	7,1726	-11,7112	6,8638E-04	6,7478	-13,6709	-6,8108E-04
1	8,7524	-14,5328	6,9717E-04	8,3325	-17,0599	-6,9069E-04
2	10,6582	-17,8192	7,1473E-04	10,2450	-20,9575	-7,0692E-04
5	12,6274	-20,9107	7,4909E-04	12,2244	-24,4542	-7,4019E-04
10	13,3733	-21,9589	7,7995E-04	12,9786	-25,5364	-7,7085E-04
∞	15,0466	-23,6098	1,9255E-03	13,8146	-27,1872	-1,9145E-03

Tabela 5.1.32 - Primeiras Cinco Frequências do Pórtico 3 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal 20 mm x 20 mm

ey	1ª Frequência [rad/s]	2ª Frequência [rad/s]	3ª Frequência [rad/s]	4ª Frequência [rad/s]	5ª Frequência [rad/s]
0	449,4085	512,4221	527,0360	573,1076	613,0380
0,1	445,5299	509,4579	516,2965	569,2699	598,6696
0,2	441,9476	506,8650	507,9619	566,0617	587,6595
0,5	433,6835	493,6780	501,3209	558,7393	569,0933
1	426,2661	485,3450	496,5807	550,5438	558,9298
2	419,9221	476,7528	491,7606	540,4948	547,8399
5	<b>417,7563</b>	<b>464,6046</b>	<b>488,5508</b>	529,8193	<b>534,2754</b>
10	421,1538	465,0893	489,8125	<b>526,8457</b>	540,8609
∞	386,1612	440,3070	452,8642	492,4523	526,7631

Quanto à estrutura com a regra de misturas relativa à distribuição de material cerâmico, verifica-se uma diminuição das frequências desde  $ey=0$  até  $ey=5$  seguida de aumento até  $ey=10$  para todas as frequências exceto a quarta, que apresenta o valor mínimo para  $ey=10$ ; para  $ey=\infty$ , as frequências são as mais baixas para este estudo paramétrico.

A tendência verificada nos estudos previamente realizados para os deslocamentos nodais continua a verificar-se, em que os mesmos diminuem com o aumento da presença de material cerâmico. O estudo do pórtico 3 com as secções B e C permite verificar uma tendência semelhante, quer para as frequências quer para os deslocamentos nodais. Comparando os estudos realizados, a secção B confere um comportamento mais rígido, mais favorável no caso em que a regra de misturas traduz a distribuição de material metálico ao longo da coordenada vertical da estrutura.

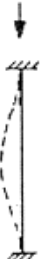


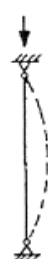
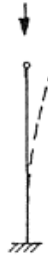

## 5.2 Coeficiente de Esbeltez dos Constituintes das Estruturas

Apesar de os objetivos do presente trabalho não incluírem o estudo da instabilidade das estruturas, considerou-se pertinente a verificação do coeficiente de esbeltez dos constituintes das estruturas estudadas nas quais existe uma grande probabilidade de ocorrência de encurvadura, principalmente nos pórticos.

Relembrando os conceitos associados à instabilidade de estruturas metálicas, o coeficiente de esbeltez pode ser calculado com base nas características geométricas da secção transversal da estrutura, sendo também influenciado pelas condições de fronteira nas extremidades da mesma, através da expressão (5.2.1), em que  $Le$  corresponde ao comprimento equivalente, que pode ser determinado relativamente ao comprimento  $L$  do componente em função das condições de fronteira, e cuja relação pode ser consultada na Tabela 5.2.1.

$$\lambda = \frac{Le}{\sqrt{\frac{Ix}{A}}} \quad (5.2.1)$$

Tabela 5.2.1 - Fator de Comprimento Equivalente em Vigas Sujeitas a Encurvadura, adaptado de [48]

Forma da Viga sujeita a Encurvadura						
Fator de Comprimento Equivalente	0,5	0,7	1,0	1,0	2,0	2,0

Considerado as 3 secções transversais esquematizadas na Figura 5.1.7, apresentam-se, na Tabela 5.2.2, os intervalos de valores de coeficientes de esbeltez, aproximados à unidade, calculados através da expressão (5.2.1) para componente de cada estrutura, respetivamente. Os valores apresentados para o coeficiente de esbeltez calculados foram minorados para o caso de  $\lambda_{\min}$ , e majorados para  $\lambda_{\max}$ , de modo indicativo do intervalo de valores existentes em cada situação, para comparar com valores de referência para casos de material isotrópico.

Tabela 5.2.2 – Coeficientes de Esbeltez Presentes em Cada Estrutura se as mesmas fossem construídas em material metálico (aço)

		L/h										
		50		40		30		20		10		
		$\lambda_{\text{mín}}$	$\lambda_{\text{máx}}$	$\lambda_{\text{mín}}$	$\lambda_{\text{máx}}$	$\lambda_{\text{mín}}$	$\lambda_{\text{máx}}$	$\lambda_{\text{mín}}$	$\lambda_{\text{máx}}$	$\lambda_{\text{mín}}$	$\lambda_{\text{máx}}$	
A	Treliça	1	173	245	138	196	103	147	69	97	34	49
		2	86	173	69	139	51	104	34	70	17	35
		3	173	245	138	196	103	147	69	97	34	49
	Pórtico	1	173	243	138	194	103	146	69	97	34	49
		2	121	174	96	138	72	104	48	70	24	35
		3	86	194	96	155	51	117	34	70	17	39
B	Treliça	1	86	125	69	98	51	74	34	49	17	25
		2	43	87	34	70	25	52	17	35	8	17
		3	86	123	69	98	51	74	34	49	17	25
	Pórtico	1	86	122	69	97	51	73	34	49	17	25
		2	60	87	48	70	36	52	24	35	12	18
		3	43	97	34	78	25	59	17	35	8	20
C	Treliça	1	346	490	277	393	207	294	138	196	69	98
		2	173	347	138	278	103	208	69	139	34	70
		3	346	490	277	393	207	294	138	196	69	98
	Pórtico	1	346	485	277	388	207	291	238	194	69	97
		2	242	347	193	278	145	208	96	139	48	70
		3	173	388	138	310	103	233	69	155	34	78

Analisando a Tabela 5.2.2, é visível a presença de coeficientes de esbeltez muito superiores aos admissíveis para estruturas de aço ou alumínio (por exemplo), cujos valores podem ser consultados, no caso de aços, no Decreto-Lei nº 211/86 de 31 de julho, no qual é referido que coeficientes de esbeltez superiores a 180 apenas seriam admitidos em elementos com função estrutural de contraventamento e cujo valor nunca poderia ultrapassar 250, o que levaria à necessidade de optar por componentes com características geométricas distintas das consideradas.

Por isso, será pertinente considerar, em termos futuros e na sequência deste trabalho, a realização de estudos vocacionados para a caracterização da instabilidade destas estruturas construídas com material com gradiente funcional

### 5.3 Avaliação da Influência do N° de Pontos de Gauss

Nos estudos previamente descritos no presente capítulo, foi utilizado o método da integração reduzida para o cálculo das matrizes de rigidez que caracterizam o comportamento ao corte dos elementos da estrutura, considerando-se, numa primeira fase, que a contribuição da potência que a variação da fração volúmica do material com a coordenada Y da estrutura era desprezável.

A influência que a potência que a matriz  $Q_s$  introduzi no comportamento ao corte transversal dos elementos pode ser estudada tendo em consideração o maior grau do polinómio resultante dos produtos entre a matriz  $Q_s$  e a matriz que relaciona a deformação de corte com os deslocamentos ( $B_s$ ), conforme se apresenta na Tabela 5.3.1, em função do expoente da Lei de Potência.

Tabela 5.3.1 – Número de Pontos de Gauss a Aplicar Utilizando Integração Reduzida em Função do Expoente da Lei de Potência

<b>ey</b>	<b>p</b>	<b>n</b>	<b>r</b>
<b>0</b>	4	3	2
<b>1</b>	5	3	2
<b>2</b>	6	4	3
<b>5</b>	9	5	4
<b>10</b>	14	8	7

Para o presente estudo, foram consideradas as discretizações mais completas de cada uma das estruturas, para os casos em que a lei de potência traduz a distribuição do material metálico em função da coordenada vertical da estrutura e secção transversal quadrada. De modo a evidenciar a influência da quantidade de pontos e pesos de Gauss no comportamento das estruturas, foi calculado um desvio relativamente aos resultados obtidos previamente para as estruturas nas quais foi desprezada a contribuição da potência da matriz  $Q_s$ , através da equação (3.1.1).

Para os valores presentes na Tabela 5.3.1, apresentam-se os pesos e os pontos de Gauss para a Quadratura de Gauss-Legendre na Tabela 5.3.2 [35]:

Tabela 5.3.2 - Pesos e Pontos de Gauss a Aplicar quando utilizada a Quadratura de Gauss-Legendre

<b>r</b>	<b>Pontos</b>	<b>Pesos</b>	<b>r</b>	<b>Pontos</b>	<b>Pesos</b>
<b>1</b>	0,0000000000	2,0000000000	<b>2</b>	±0,5773502692	1,0000000000
<b>3</b>	0,0000000000	0,8888888889	<b>4</b>	±0,3399810435	0,652145155
	±0,7745966692	0,555555556		±0,8611363116	0,347854845
	0,0000000000	0,568888889		±0,2386191861	0,467913935
<b>5</b>	±0,5384693101	0,478628671	<b>6</b>	±0,6612093865	0,360761573
	±0,9061798459	0,236926885		±0,9324695142	0,171324492
<b>7</b>	±0,9491079123	0,129484966	<b>7</b>	±0,4058451513	0,381830051
	±0,7415311855	0,279705391		0,0000000000	0,417959184

A apresentação dos desvios relativos obtidos através do presente estudo é feita pormenorizadamente no apêndice B. De forma a analisar tendências existentes nestes dados, apresentam-se nas figuras 5.3.1 e 5.3.2, respetivamente, a comparação entre as frequências naturais obtidas para os dois casos na treliça 1, e a rotação do nó livre da mesma estrutura, em função do expoente da lei de potência, ou seja, da quantidade de pontos utilizados na integração numérica, correspondentes aos apresentados na Tabela 5.3.1.

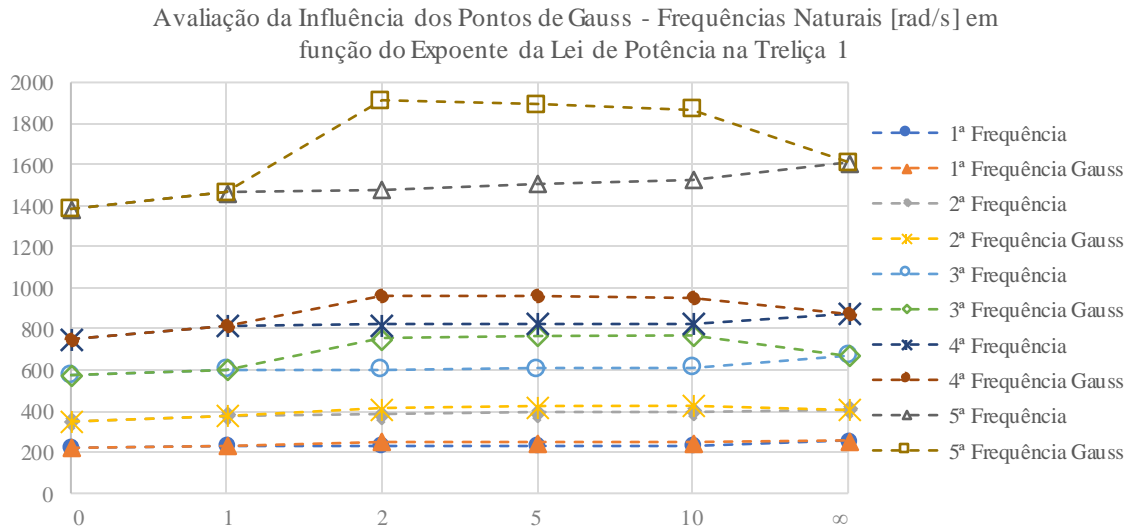


Figura 5.3.1 - Avaliação da Influência dos Pontos de Gauss nas Primeiras Cinco Frequências Naturais da Treliça 1 em função do Expoente da Lei de Potência quando a Fração Volúmica descreve a Distribuição de Material Metálico na estrutura

Por análise global dos resultados deste estudo, é possível verificar que a principal influência que a utilização de mais quantidade de pontos na integração numérica corresponde às frequências naturais, nomeadamente para as mais elevadas, para as quais ocorre uma maior divergência.

No caso da primeira e segunda frequências, para os expoentes 2, 5 e 10, foram obtidos valores cerca de 7% acima dos obtidos previamente. Para a terceira e quinta frequências, foram obtidos valores cerca de 22-29% acima das calculadas nos estudos paramétricos. No caso da quarta frequência, o desvio ronda os 16% acima dos resultados previamente obtidos.

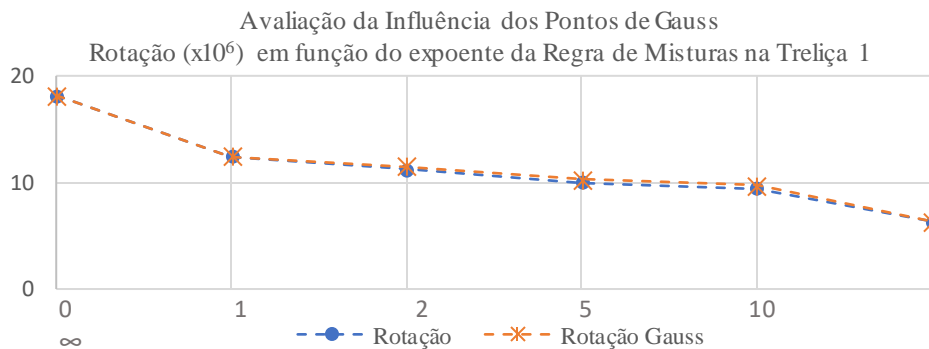


Figura 5.3.2 - Avaliação da Influência dos Pontos de Gauss na Rotação do Nó Livre da Treliça 1 em função do Expoente da Lei de Potência quando a Fração Volúmica descreve a Distribuição de Material Metálico na estrutura

No caso da rotação do nó livre da Treliça 1, é visível um ligeiro desvio dos valores calculados relativamente aos obtidos previamente com 2 pontos para a integração numérica. Para os deslocamentos nodais segundo x e y, os desvios são bastante reduzidos, cerca de 0,003% abaixo dos resultados previamente obtidos nos estudos paramétricos. Quanto às rotações, os desvios são ligeiramente superiores, com um máximo cerca de 3%.

Para a treliça 2, o comportamento das frequências naturais apresenta uma tendência semelhante ao verificado na treliça 1, embora com desvios relativos mais baixos. No caso da primeira frequência, foram calculados valores cerca de 0,24-0,27% acima dos obtidos anteriormente. Para a segunda, quarta e quinta frequências, são verificados resultados cerca de 1,1-1,6% acima dos calculados nos estudos paramétricos anteriores. Para a quarta frequência, este desvio ronda os 0,9% acima. Quando aos deslocamentos nodais, verificam-se desvios com ordem de grandeza  $10^{-4}$ % para o deslocamento segundo x e segundo y, e na rotação do nó, ocorrem desvios muito elevados, no entanto, é expectável pois a ordem de grandeza da rotação é de  $10^{-9}$ - $10^{-11}$ , pelo que qualquer variação dos valores resulta num desvio muito elevado.

Na treliça 3, o comportamento das frequências naturais apresenta uma tendência semelhante à já verificada, em que, para cada uma das frequências a registar, foram calculadas frequências naturais cerca de 9-10% acima das calculadas nos estudos paramétricos anteriores. Quanto aos deslocamentos nodais, o comportamento é semelhante ao já descrito, em que os desvios relativos apresentam a ordem de grandeza  $10^{-3}$ % para o deslocamento segundo x e segundo y, e para a rotação, verifica-se a mesma tendência que a treliça 2, com desvios relativos muito elevados.

No pórtico 1, as frequências naturais calculadas apresentam valores ligeiramente superiores aos previamente calculados, cerca de 1% acima no caso da primeira, 2% para a segunda frequências, 3% para a terceira, 4% para a quarta, e 5% para a quinta frequência. Para os deslocamentos nodais, obtiveram-se resultados cerca de 2-3% abaixo no caso dos deslocamentos segundo x, 0,1-0,2% nos deslocamentos segundo y, e 1-3% abaixo na rotação.

No pórtico 2, as frequências calculadas apresentam valores cerca de 5% acima dos resultados prévios no caso da primeira, segunda e terceira frequências naturais, 12-13% para a quarta frequência, e 11% para a quinta frequência. Para os deslocamentos nodais, obtiveram-se resultados cerca de 11% abaixo dos prévios para os deslocamentos segundo x, 0,1-0,2% para os deslocamentos em y, e 8-11% para a rotação.

No pórtico 3, as frequências calculadas apresentam valores 8-9% superiores aos prévios para a primeira e terceira frequências, e 10-12% acima para as restantes. Para os deslocamentos nodais, obtiveram-se deslocamentos segundo x cerca de 0,04-0,2% abaixo dos calculados nos estudos paramétricos prévios, 0,4-0,8% para deslocamentos segundo y, e cerca de 13-14% abaixo na rotação.

Tendo em consideração os resultados obtidos, e de modo a adotar uma abordagem conducente a resultados menos conservadores e que, portanto, não subestimem o comportamento real da estrutura, considerou-se a manutenção da metodologia de integração inicial.

## 5.4 Estudos Paramétricos das Meta heurísticas de Otimização

De modo a introduzir o modelo de otimização no modelo numérico para o estudo e otimização de estruturas FGM, considerou-se pertinente a avaliação do comportamento do modelo implementado em função da variação do tamanho da população, em que N toma valores de 10, 20, 30, 40 e 50, e do número de iterações, em que são realizadas 50, 100, 150, 200 e 1000 iterações. Para isso, foram consideradas 3 funções de Benchmark – Esfera, Goldstein-Price e Rastrigin – para ambos os algoritmos, cada uma com dimensão 2, e foi avaliado o comportamento do modelo com base nos valores médios, desvio padrão (DP), melhor ótimo (MO) e pior ótimo (PO) de uma série de 10 corridas para cada função.

### 5.4.1 Algoritmo de Arquimedes

As tabelas 5.4.1, 5.4.2, 5.4.3 e 5.4.4 apresentam os resultados obtidos para as funções da Esfera, Goldstein-Price e Rastrigin, respetivamente, pelo Algoritmo de Arquimedes.

Tabela 5.4.1 - Resultados do Estudo Paramétrico da Função Esfera com o Algoritmo de Arquimedes

N	tmax	50	100	150	200	1000
10	Média	1,5346E-03	1,5506E-04	7,4337E-05	3,7441E-05	8,2127E-07
	DP	2,0667E-03	2,3388E-04	1,6223E-04	8,7562E-05	7,5557E-07
	MO	1,2420E-06	1,6233E-05	1,8079E-06	3,3795E-07	1,0987E-07
	PO	7,4431E-03	8,6655E-04	5,8309E-04	3,1087E-04	2,3780E-06
20	Média	3,0360E-04	3,6040E-04	2,0378E-05	1,1157E-05	5,1192E-07
	DP	4,9817E-04	8,8971E-04	3,6498E-05	1,2544E-05	7,0550E-07
	MO	1,2326E-06	4,9610E-07	4,3585E-08	1,6193E-07	4,0342E-08
	PO	1,8316E-03	3,1343E-03	1,3327E-04	3,9393E-05	2,5063E-06
30	Média	2,3724E-04	8,9846E-05	9,2488E-06	3,9789E-06	1,0828E-07
	DP	4,4466E-04	1,6347E-04	1,1731E-05	2,6291E-06	1,2114E-07
	MO	2,6704E-06	2,2059E-06	5,7795E-07	2,2559E-07	2,1234E-09
	PO	1,6062E-03	5,9679E-04	4,2484E-05	9,5177E-06	3,5714E-07
40	Média	6,3357E-05	1,1823E-05	4,0235E-06	3,9769E-06	6,4686E-08
	DP	5,6267E-05	2,2636E-05	4,7269E-06	5,2953E-06	6,4334E-08
	MO	3,7024E-06	5,1275E-07	1,3106E-07	7,4670E-08	3,1505E-09
	PO	1,9698E-04	8,2458E-05	1,7791E-05	1,9979E-05	1,8602E-07
50	Média	5,5941E-04	1,5542E-05	6,5906E-06	2,0517E-06	8,4849E-08
	DP	1,4830E-03	2,7103E-05	7,8529E-06	1,6372E-06	9,7260E-08
	MO	3,2008E-06	5,4257E-08	1,3065E-07	3,1056E-08	2,6843E-09
	PO	5,2246E-03	9,8061E-05	2,9444E-05	4,9333E-06	3,3877E-07

Tabela 5.4.2 - Resultados do Estudo Paramétrico da Função Goldstein-Price com o Algoritmo de Arquimedes

<b>N</b>	<b>tmax</b>	<b>50</b>	<b>100</b>	<b>150</b>	<b>200</b>	<b>1000</b>
<b>10</b>	Média	3187,6493	14,7304	9399,0869	11,9434	3,4217
	DP	9524,3004	14,2601	28142,9472	13,6978	1,2626
	MO	3,0049	3,0013	3,0003	3,0011	3,00004
	PO	31760,5239	34,4631	93827,8964	35,0252	7,2094
<b>20</b>	Média	22,3716	12,1304	8,5537	16,5853	8,4002
	DP	32,1653	14,5785	11,0463	13,5813	10,8001
	MO	3,0002	3,0004	3,00002	3,0005	3,000001
	PO	84,0489	44,1068	31,2537	30,4067	30,0009
<b>30</b>	Média	23,5739	8,5736	8,4975	11,3821	8,8258
	DP	25,2679	11,1309	10,9939	12,8101	11,6878
	MO	3,0045	3,0005	3,00004	3,00008	3,000001
	PO	84,1034	31,0069	30,7488	32,0266	34,1832
<b>40</b>	Média	16,1729	16,5526	5,7344	10,8284	12,2924
	DP	16,5594	24,8939	8,1967	12,1743	12,1108
	MO	3,0010	3,0002	3,00002	3,00008	3,000001
	PO	46,0667	84,0066	30,3246	35,0000	30,0183
<b>50</b>	Média	13,8442	13,9503	13,9399	13,9683	3,00002
	DP	16,6907	13,4086	13,4001	13,4544	0,00005
	MO	3,0007	3,00004	3,000015	3,00001	3,000001
	PO	45,5291	30,5331	30,9594	32,4452	3,0002

Tabela 5.4.3 - Resultados do Estudo Paramétrico da Função Rastrigin com o Algoritmo de Arquimedes

<b>N</b>	<b>tmax</b>	<b>50</b>	<b>100</b>	<b>150</b>	<b>200</b>	<b>1000</b>
<b>10</b>	Média	1,6430	8,3027E-01	9,0160E-01	3,1666E-01	3,1649E-04
	DP	1,1806	1,1493	1,1347	4,4816E-01	4,3452E-04
	MO	0,1004	5,6129E-03	5,3796E-05	3,6373E-04	8,1091E-06
	PO	4,2556	3,9803	3,9998	1,0020	1,4685E-03
<b>20</b>	Média	0,9398	5,0614E-01	2,0118E-01	1,0076E-01	8,6688E-05
	DP	1,3316	4,9110E-01	3,9848E-01	2,9820E-01	1,1389E-04
	MO	0,0011	3,2696E-03	2,7775E-04	7,2941E-05	1,8961E-06
	PO	4,5416	1,0004	9,9878E-01	9,9533E-01	3,5533E-04
<b>30</b>	Média	0,3205	2,0227E-01	2,0022E-01	1,0097E-01	3,6442E-05
	DP	0,4441	3,9997E-01	3,9862E-01	2,9834E-01	5,5677E-05
	MO	0,0043	7,9748E-05	1,5931E-05	1,8650E-05	6,1207E-07
	PO	1,0008	1,0087	9,9757E-01	9,9598E-01	1,9917E-04
<b>40</b>	Média	0,4082	1,0414E-01	1,8105E-03	4,1346E-03	1,8621E-05
	DP	0,4917	2,9947E-01	2,6866E-03	9,6367E-03	2,0688E-05
	MO	0,0001	1,6562E-04	1,7036E-05	4,3815E-05	1,0182E-06
	PO	1,0383	1,0025	9,2223E-03	3,2790E-02	6,4078E-05
<b>50</b>	Média	0,3037	2,0765E-03	4,8560E-04	4,1315E-04	1,3462E-05
	DP	0,4542	3,8333E-03	5,3496E-04	3,5622E-04	1,2819E-05
	MO	4,4308E-06	2,5944E-07	1,6458E-06	1,7725E-05	1,6882E-06
	PO	0,9996	1,3408E-02	1,8607E-03	1,0815E-03	3,9466E-05

Tabela 5.4.4 - Resultados do Estudo Paramétrico da Função Rastrigin com o Algoritmo de Arquimedes com recurso a técnica de reinicialização de população a cada 10 iterações

<b>N</b>	<b>tmax</b>	<b>50</b>	<b>100</b>	<b>150</b>	<b>200</b>	<b>1000</b>
<b>10</b>	Média	6,7422E-01	9,0715E-01	1,1644E-01	2,1440E-01	2,3152E-04
	DP	4,7074E-01	6,9388E-01	2,9802E-01	4,0497E-01	4,8947E-04
	MO	9,2318E-04	1,5207E-03	3,1866E-04	1,3550E-04	1,8786E-06
	PO	1,2826	1,9944	1,0034	1,0501	1,6727E-03
<b>20</b>	Média	1,2075	6,3661E-01	5,8545E-03	1,0291E-01	9,5261E-05
	DP	6,6426E-01	6,9298E-01	7,2745E-03	2,9762E-01	1,1217E-04
	MO	9,8866E-03	7,4659E-05	9,3456E-05	3,7329E-05	3,5447E-08
	PO	2,1062	2,0373	2,0780E-02	9,9565E-01	3,3545E-04
<b>30</b>	Média	6,2312E-01	2,0710E-01	1,0533E-01	6,4719E-03	1,4660E-05
	DP	6,5171E-01	3,9447E-01	2,9698E-01	1,6677E-02	1,5243E-05
	MO	2,2758E-03	1,8379E-05	1,6468E-05	2,7437E-06	2,5086E-07
	PO	1,9909	9,9588E-01	9,9530E-01	5,6348E-02	4,7434E-05
<b>40</b>	Média	0,1313	0,2077	9,9938E-02	9,6109E-04	6,0623E-05
	DP	0,3115	0,4101	0,2984	1,5290E-03	5,8133E-05
	MO	1,4046E-04	8,6443E-04	9,0101E-06	7,7547E-07	5,1509E-07
	PO	1,0590	1,0599	9,9511E-01	4,6763E-03	1,6803E-04
<b>50</b>	Média	0,2235	1,4622E-03	1,3625E-01	1,8848E-03	1,4058E-05
	DP	0,3901	1,3638E-03	2,9755E-01	2,5377E-03	2,0957E-05
	MO	5,4205E-05	7,6468E-06	4,6503E-05	1,2145E-05	1,4427E-06
	PO	1,0016	4,6170E-03	1,0042	8,7539E-03	7,5694E-05

De uma forma geral, analisando as tabelas apresentadas, pode constatar-se que o modelo de otimização baseado no princípio de Arquimedes é um modelo cuja precisão apresenta algumas variações consoante os parâmetros utilizados, mesmo para apenas 2 variáveis de projeto. Analisando a Tabela 5.4.1, em termos médios, e tratando-se de uma função unimodal, os resultados são satisfatórios, e é notada uma melhoria com o aumento dos parâmetros N e tmax. Por outro lado, para funções multimodais, existe alguma dificuldade de convergência para o mínimo global (para as funções estudadas). Para o caso da função Goldstein-Price, presente na Tabela 5.4.2, foram encontrados, frequentemente, mínimos locais mais frequentemente com parâmetros mais baixos, no entanto, em todas as séries de corridas, foi encontrado, pelo menos uma vez, o mínimo global desta função, para qualquer dos pares de parâmetros N e tmax considerados. Em termos médios, é notada uma dificuldade na convergência para o mínimo global, pelo que o ideal, neste caso, seria utilizar uma população de 50 indivíduos, e 1000 iterações, para uma precisão mais elevada. Por último, para a função Rastrigin, presente na Tabela 5.4.3, também multimodal, é notada alguma dificuldade na convergência para o mínimo global da função, principalmente quando se consideram apenas 50 iterações.

Em termos médios, o mínimo global apresenta valores mais precisos para 1000 iterações, independentemente da população considerada, e se forem consideradas apenas 200 iterações, para populações com 40 ou 50 indivíduos. Para esta função, foi ainda considerada a utilização da técnica de reinicialização da população a cada 10 iterações, cujos resultados são apresentados na Tabela 5.4.4, devido à dificuldade de convergência deste algoritmo nas corridas realizadas previamente. Neste caso, em termos médios, houve uma ligeira melhoria na precisão do valor ótimo da função, no entanto, não significativa. Por isso, não se considera relevante a utilização dessa técnica nos estudos de otimização a realizar nos subcapítulos 5.5 e 5.6. Apesar das dificuldades encontradas com a utilização deste algoritmo, como a otimização de estruturas FGM constitui um problema de otimização com um número reduzido de variáveis de projeto, considera-se relevante a utilização deste algoritmo para o efeito.

### 5.4.2 Algoritmo da Raposa Vermelha

As tabelas 5.4.5, 5.4.6 e 5.4.7 apresentam os resultados obtidos para as funções da Esfera, Goldstein-Price e Rastrigin, respetivamente, pelo Algoritmo das Raposas Vermelhas.

Tabela 5.4.5 - Resultados do Estudo Paramétrico da Função Esfera com o Algoritmo das Raposas Vermelhas

<b>N</b>	<b>tmax</b>	<b>50</b>	<b>100</b>	<b>150</b>	<b>200</b>	<b>1000</b>
<b>10</b>	Média	5,4590E-10	3,2542E-14	7,0283E-17	3,0926E-17	8,3237E-25
	DP	1,5241E-09	6,6117E-14	1,3920E-16	6,5361E-17	1,2685E-24
	MO	9,1134E-18	2,5961E-25	2,1112E-26	4,3024E-24	1,6846E-30
	PO	5,1080E-09	2,0777E-13	3,9613E-16	2,0478E-16	3,8150E-24
<b>20</b>	Média	3,2253E-13	1,4731E-16	6,2721E-18	1,5993E-18	4,5509E-26
	DP	5,7391E-13	3,9488E-16	1,1851E-17	2,9224E-18	1,2774E-25
	MO	1,5701E-19	8,4871E-25	1,9987E-26	6,9038E-25	3,5296E-36
	PO	1,5298E-12	1,3304E-15	3,9784E-17	9,4846E-18	4,2832E-25
<b>30</b>	Média	1,4154E-13	8,4313E-16	1,4132E-20	1,7217E-17	5,0635E-25
	DP	3,5882E-13	2,3704E-15	3,2197E-20	3,4514E-17	1,1003E-24
	MO	6,3036E-21	3,6025E-26	1,3083E-25	3,0368E-26	3,0444E-31
	PO	1,2121E-12	7,9449E-15	1,0994E-19	1,0695E-16	3,5534E-24
<b>40</b>	Média	1,1263E-13	1,6582E-16	1,6045E-17	2,3731E-17	3,0241E-24
	DP	3,2698E-13	4,7542E-16	4,6058E-17	7,1185E-17	7,7408E-24
	MO	1,3717E-19	2,9369E-23	2,3685E-28	4,4566E-28	1,0602E-30
	PO	1,0932E-12	1,5918E-15	1,5417E-16	2,3729E-16	2,5954E-23
<b>50</b>	Média	1,8240E-13	7,4545E-14	1,4457E-18	5,6411E-18	4,6755E-25
	DP	4,8878E-13	2,2058E-13	3,5881E-18	1,1220E-17	1,3457E-24
	MO	1,6173E-19	2,2579E-23	7,7336E-30	2,9383E-24	1,9139E-34
	PO	1,6417E-12	7,3628E-13	1,2007E-17	2,9870E-17	4,5029E-24

Tabela 5.4.6 - Resultados do Estudo Paramétrico da Função Goldstein-Price com o Algoritmo das Raposas Vermelhas

<b>N</b>	<b>tmax</b>	<b>50</b>	<b>100</b>	<b>150</b>	<b>200</b>	<b>1000</b>
<b>10</b>	Média	19,4299	5,7000	3,0000	11,1000	3,0000
	DP	32,8638	8,1000	0,0000	24,3000	6,8169E-12
	MO	3*	3*	3*	3*	3*
	PO	86,2982	30,0000	3,0000	84,0000	3,0000
<b>20</b>	Média	27,3000	3,0000	3,0000	3,0000	3,0000
	DP	37,1189	0,0000	0,0000	0,0000	3,5665E-12
	MO	3*	3*	3*	3*	3*
	PO	84,0002	3,0000	3,0000	3,0000	3,0000
<b>30</b>	Média	3,0000	11,1000	3,0000	3,0000	3*
	DP	9,74131E-07	24,3000	1,01402E-07	3,01962E-09	2,8266E-12
	MO	3*	3*	3*	3*	3*
	PO	3,0000	84,0000	3,0000	3,0000	3,0000
<b>40</b>	Média	3,0000	3,0000	3,0000	3,0000	3,0000
	DP	4,5991E-07	3,0962E-08	1,1329E-08	3,9185E-09	1,009E-11
	MO	3*	3*	3*	3*	3*
	PO	3,0000	3,0000	3,0000	3,0000	3,0000
<b>50</b>	Média	3,0000	3,0000	3,0000	3,0000	3,0000
	DP	2,5119E-07	1,0573E-08	1,0879E-07	5,4817E-10	4,9448E-13
	MO	3*	3*	3*	3*	3*
	PO	3,0000	3,0000	3,0000	3,0000	3,0000

Tabela 5.4.7 - Resultados do Estudo Paramétrico da Função Rastrigin com o Algoritmo das Raposas Vermelhas para Populações com 10, 20, 30, 40 e 50 Indivíduos, realizando-se 50, 100, 150, 200 e 1000 iterações, em cada corrida, num total de 10 corridas

<b>N</b>	<b>tmax</b>	<b>50</b>	<b>100</b>	<b>150</b>	<b>200</b>	<b>1000</b>
<b>10</b>	Média	1,4889E-08	8,1351E-12	1,5752E-11	4,4964E-14	3,3958E-18
	DP	2,4002E-08	1,6126E-11	4,5814E-11	1,3173E-13	9,8577E-18
	MO	6,9227E-15	9,8826E-17	6,3831E-19	2,2888E-19	6,8048E-30
	PO	6,8876E-08	4,8493E-11	1,5317E-10	4,4010E-13	3,2957E-17
<b>20</b>	Média	1,4199E-02	9,5090E-12	3,3717E-13	2,3184E-16	5,3125E-24
	DP	4,2596E-02	2,3226E-11	1,0015E-12	5,6013E-16	1,5130E-23
	MO	2,4432E-15	1,0245E-19	3,5858E-24	1,7517E-20	3,0000E-29
	PO	1,4199E-01	7,8357E-11	3,3416E-12	1,8806E-15	5,0680E-23
<b>30</b>	Média	7,1360E-09	3,6047E-14	6,6013E-14	8,8798E-16	1,6059E-24
	DP	1,6881E-08	7,3914E-14	1,9662E-13	1,9995E-15	3,5300E-24
	MO	2,2824E-21	1,1413E-21	2,7996E-20	1,8786E-23	1,4108E-30
	PO	5,6015E-08	2,4053E-13	6,5586E-13	6,5059E-15	1,1857E-23
<b>40</b>	Média	9,9503E-02	1,2851E-12	2,4476E-16	3,8491E-17	3,7492E-25
	DP	2,9849E-01	3,8163E-12	7,1567E-16	1,0085E-16	7,7064E-25
	MO	1,0001E-16	3,8536E-18	8,8350E-26	3,9000E-28	2,1486E-30
	PO	9,9496E-01	1,2734E-11	2,3916E-15	3,3830E-16	2,6235E-24
<b>50</b>	Média	2,6129E-10	7,4608E-14	2,4943E-15	4,4832E-16	7,2765E-24
	DP	7,8101E-10	2,1036E-13	6,9106E-15	1,2806E-15	1,8412E-23
	MO	3,0220E-25	1,6152E-19	2,0960E-26	1,5347E-25	6,3968E-31
	PO	2,6043E-09	7,0505E-13	2,3211E-14	4,2870E-15	6,1839E-23

De notar que na Tabela 5.4.6, são apresentados valores 3\* por apresentarem 10 zeros antes do próximo algarismo não nulo após a virgula. Os valores médios obtidos para a função Goldstein-Price apresentam alguma variabilidade, devido à existência de mínimos locais, dos quais o modelo não teve capacidade de se afastar, nomeadamente para populações menores e menor número de iterações, no entanto, quando esses dois parâmetros são aumentados, o modelo apresenta valores bastante satisfatórios, com desvios-padrão muito reduzidos.

De uma forma geral, analisando as tabelas apresentadas, pode constatar-se que o modelo de otimização baseado nas raposas vermelhas é um modelo com precisão elevada, que será utilizado para a otimização das estruturas FGM a estudar nos subcapítulos 5.5, 5.6 e 5.7. Comparando com o algoritmo de Arquimedes, os resultados obtidos para os mesmos parâmetros, apresentam maior precisão, podendo-se considerar parâmetros mais baixos, o que permite obter resultados de uma forma mais rápida, ao diminuir o peso computacional decorrente da realização das corridas. Desta forma, considera-se relevante a utilização deste algoritmo na otimização de estruturas FGM.

## **5.5 Estudos de Otimização com 1 Variável de Projeto**

Os casos de estudo que foram alvo de estudos paramétricos no subcapítulo 5.1 aos quais foi aplicada a técnica de otimização correspondem à treliça 3 e ao pórtico 3, sendo as estruturas mais complexas das estudadas, que podem ter maior interesse. Para isso, consideraram-se ambas as estruturas com secção quadrada 20 mm x 20 mm, no entanto, a relação de aspeto foi alterada para que o estudo fosse realizado em estruturas nas quais, caso a estrutura fosse puramente metálica, não ocorresse encurvadura. Assim, e recordando a Tabela 5.2.2, foi escolhida uma relação de aspeto de 30, conforme os valores previamente calculados para relação de aspeto em cada estrutura.

Além das referidas estruturas, consideraram-se ainda 2 estruturas no espaço, correspondentes à utilizadas nos estudos de verificação para material isotrópico homogéneo do modelo no espaço, nos casos 10 e 11, com as mesmas características geométricas neles descritas, respetivamente.

Nos estudos de otimização, foi ainda considerado, para a construção das matrizes de rigidez de corte transversal dos elementos, a utilização de apenas dois pontos de Gauss-Legendre para a Integração Reduzida desses coeficientes, uma vez que, pelo estudo presente no capítulo 5.2, verifica-se que, com o aumento do número de pontos devido ao aumento da potência dos coeficientes de rigidez reduzidos resultante do expoente da lei de potência, ocorre uma rigidificação das estruturas. Assim, se forem considerados apenas 2 pontos para a integração reduzida, considera-se a situação mais desfavorável, ou seja, uma estrutura menos rígida.

### 5.5.1 Treliça 3

Nesta estrutura, o nó mais solicitado é o 19, e corresponde ao nó onde é aplicada a carga. A Tabela 5.5.1 apresenta o deslocamento resultante do nó 19, caracterizado pelo maior deslocamento resultante de entre os nós estabelecidos com o carregamento considerado, e a primeira frequência natural da estrutura, obtidos através do modelo de elementos finitos.

Tabela 5.5.1 - Deslocamento resultante do nó 19 da Treliça 3 e Primeira Frequência natural da estrutura

ey	Deslocamento Resultante [ $\mu\text{m}$ ]	1ª Frequência [rad/s]
<b>0</b>	321,7973	591,9599
<b>0,1</b>	204,5508	661,0307
<b>0,2</b>	195,8514	661,8260
<b>0,5</b>	181,5643	658,2207
<b>1</b>	170,3850	651,6240
<b>2</b>	160,8003	643,8601
<b>5</b>	152,6575	634,9667
<b>10</b>	149,6053	630,3244

Para cada meta-heurística, foi realizada uma série de 10 corridas, com população de 5 indivíduos e 10 iterações, e os resultados obtidos para análise estática e dinâmica da estrutura são apresentados na Tabela 5.5.2.

Tabela 5.5.2 - Resultados do Estudo de Otimização à Treliça 3 através de ambas as Meta heurísticas de Otimização Implementadas para 1 variável de projeto

Corrida	AOA				RFO			
	ey	f <sub>min</sub> [ $\mu\text{m}$ ]	ey	f <sub>max</sub> [rad/s]	ey	f <sub>min</sub> [ $\mu\text{m}$ ]	ey	f <sub>max</sub> [rad/s]
<b>1</b>	<b>10</b>	<b>149,6053</b>	0,2724	661,3400	<b>10</b>	<b>149,6053</b>	0,1609	661,8009
<b>2</b>	10	149,6053	0,1917	661,8426	10	149,6053	0,2126	661,7827
<b>3</b>	10	149,6053	0,1961	661,8350	10	149,6053	0,2430	661,5994
<b>4</b>	10	149,6053	1,2939	648,7509	10	149,6053	0,2385	661,6323
<b>5</b>	10	149,6053	0,1732	661,8386	10	149,6053	0,1764	661,8437
<b>6</b>	9,5498	149,7497	0,1	661,0308	10	149,6053	0,1960	661,8353
<b>7</b>	10	149,6053	0,2449	661,5843	10	149,6053	0,2310	661,6837
<b>8</b>	10	149,6053	<b>0,1775</b>	<b>661,8450</b>	10	149,6053	0,2600	661,4571
<b>9</b>	10	149,6053	0,2216	661,7390	10	149,6053	0,1641	661,8135
<b>10</b>	10	149,6053	0,1678	661,8257	10	149,6053	<b>0,1895</b>	<b>661,8450</b>
<b>Média</b>	149,6198		660,3632		149,6053		661,7294	
<b>DP</b>	0,0433		3,8794		3,0294E-06		0,1246	

As figuras 5.5.1 e 5.5.2 apresentam a evolução do módulo de elasticidade caracterizada pela melhor solução ótima encontrada para minimização de deslocamento resultante máximo e para maximização da frequência fundamental da treliça 3, respetivamente, incluindo uma representação esquemática da configuração da estrutura relativamente aos materiais constituintes do FGM.

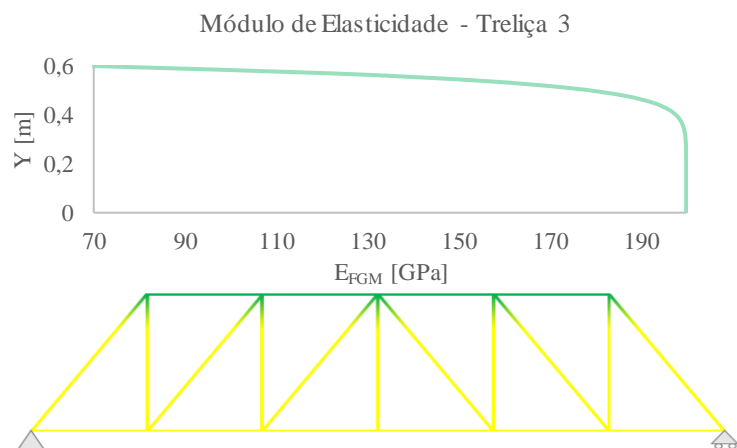


Figura 5.5.1 - Evolução do Módulo de Elasticidade da Treliça 3 pela Solução Ótima encontrada para Minimização de Deslocamento Resultante Máximo através do Modelo de 1 variável

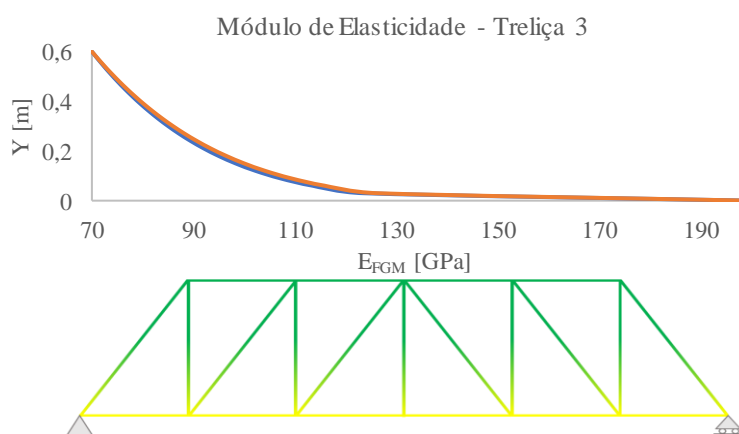


Figura 5.5.2 - Evolução do Módulo de Elasticidade da Treliça 3 pela Solução Ótima encontrada para Maximização da Frequência Natural através do Modelo de 1 variável

Relativamente aos resultados obtidos, é de notar que, numa situação em que se pretenda minimizar o deslocamento resultante máximo, a solução ótima em termos de expoente da lei de potência é o valor 10, correspondendo à treliça composta maioritariamente por zircónia na zona inferior até uma altura de aproximadamente 0,4 m. Por outro lado, se se pretender maximizar a frequência fundamental da estrutura, o melhor comportamento dinâmico em regime de vibração livre é conseguido com um expoente de aproximadamente 0,19.

### 5.5.2 Pórtico 3

Nesta estrutura, o nó mais solicitado é o 10, que corresponde ao nó central do elemento V. A Tabela 5.5.3 apresenta o deslocamento resultante do nó 10, por ser o nó sujeito a um maior deslocamento resultante de toda a estrutura com o carregamento considerado, e a primeira frequência natural da estrutura, obtidos através do modelo de elementos finitos.

Tabela 5.5.3 - Deslocamento resultante do nó 10 do Pórtico 3 e Primeira Frequência natural da estrutura

ey	Deslocamento Resultante [ $\mu\text{m}$ ]	1ª Frequência [rad/s]
<b>0</b>	43,5415	1240,7333
<b>0.1</b>	41,4279	1305,7998
<b>0.2</b>	40,0927	1346,3775
<b>0.5</b>	37,7015	1410,0339
<b>1</b>	35,5525	<b>1444,5965</b>
<b>2</b>	33,2506	1444,3502
<b>5</b>	30,2133	1393,7095
<b>10</b>	<b>28,1360</b>	1356,8710

Para cada meta-heurística, foi realizada uma série de 10 corridas, com população de 5 indivíduos e 10 iterações, e os resultados obtidos para análise estática e dinâmica da estrutura são apresentados na Tabela 5.5.4.

Tabela 5.5.4 - Resultados do Estudo de Otimização ao Pórtico 3 através de ambas as Meta heurísticas de Otimização Implementadas para 1 variável de projeto

Corrida	AOA				RFO			
	ey	f <sub>min</sub> [ $\mu\text{m}$ ]	ey	f <sub>max</sub> [rad/s]	ey	f <sub>min</sub> [ $\mu\text{m}$ ]	ey	f <sub>max</sub> [rad/s]
<b>1</b>	10	28,1360	1,4190	1449,6707	10	28,1360	0,9131	1441,6775
<b>2</b>	<b>10</b>	<b>28,1360</b>	<b>1,4064</b>	<b>1449,6712</b>	10	28,1360	1,4388	1449,6560
<b>3</b>	10	28,1360	1,5429	1449,3232	7,3115	29,0357	2,2493	1440,2599
<b>4</b>	10	28,1360	1,3154	1449,4526	<b>10</b>	<b>28,1360</b>	<b>1,4055</b>	<b>1449,6710</b>
<b>5</b>	10	28,1360	1,3982	1449,6678	10	28,1360	1,4554	1449,6308
<b>6</b>	10	28,1360	1,4023	1449,6699	10	28,1360	1,2742	1449,2112
<b>7</b>	10	28,1360	1,4392	1449,6555	10	28,1360	0,9639	1443,4907
<b>8</b>	10	28,1360	1,4203	1449,6703	10	28,1360	1,4903	1449,5424
<b>9</b>	10	28,1360	1,5091	1449,4757	10	28,1360	1,5658	1449,1981
<b>10</b>	10	28,1360	1,3615	1449,6139	10	28,1360	2,3401	1438,6473
<b>Média</b>		28,1360		1449,5871		28,2260		1446,0985
<b>DP</b>		0,0000		0,1183		0,2699		4,3013

As figuras 5.5.3 e 5.5.4 apresentam a evolução do módulo de elasticidade caracterizada pela melhor solução ótima encontrada para minimização de deslocamento resultante máximo e para maximização da frequência fundamental do pórtico 3, respectivamente, incluindo uma representação esquemática da configuração da estrutura relativamente aos materiais constituintes do FGM.

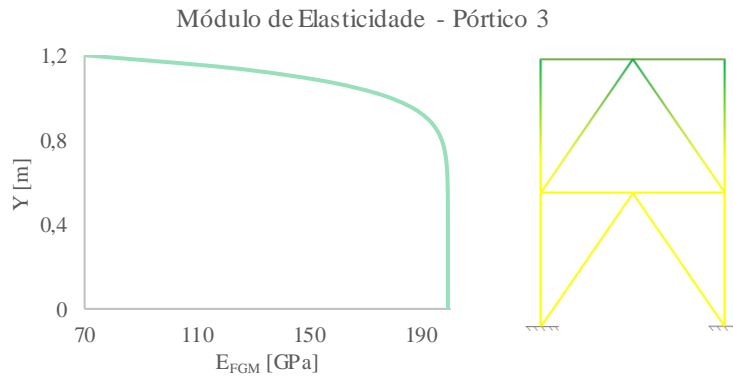


Figura 5.5.3 - Evolução do Módulo de Elasticidade do Pórtico 3 pela Melhor Solução Ótima encontrada para Minimização de Deslocamento Resultante Máximo através do Modelo de 1 variável

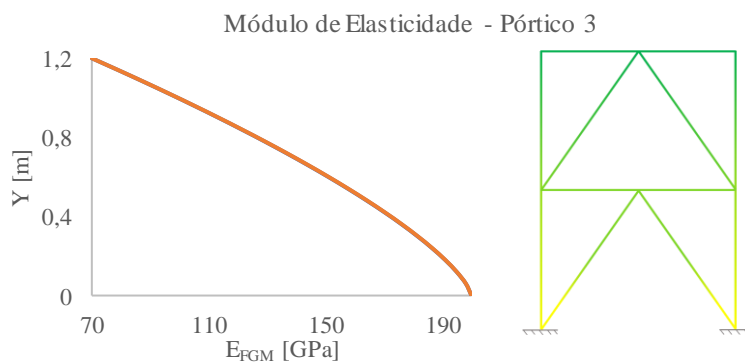


Figura 5.5.4 - Evolução do Módulo de Elasticidade do Pórtico 3 pela Melhor Solução Ótima encontrada para Maximização da Frequência Natural através do Modelo de 1 variável

Analogamente aos casos previamente estudados, a solução ótima que caracteriza um deslocamento resultante máximo no pórtico 3 é um expoente da lei de potência de 10. Pela perspectiva da maximização da frequência fundamental da estrutura, é de notar que a melhor configuração é a que corresponde a uma distribuição aproximadamente linear entre os dois materiais que constituem o FGM.

### 5.5.3 Treliça 3D

Para uma série de 10 corridas, população com 5 indivíduos e 10 iterações, obtiveram-se os resultados para análise estática e dinâmica, apresentados na Tabela 5.5.5.

As figuras 5.5.5 e 5.5.6 apresentam a evolução do módulo de elasticidade caracterizada pela melhor solução ótima encontrada para minimização de deslocamento resultante máximo e para maximização da frequência fundamental da treliça 3D, respetivamente, incluindo uma representação esquemática da configuração da estrutura relativamente aos materiais constituintes do FGM.

Tabela 5.5.5 - Resultados do Estudo de Otimização à Treliça 3D através de ambas as Meta heurísticas de Otimização Implementadas para 1 variável de projeto

Corrida	AOA				RFO			
	ey	f <sub>min</sub> [μm]	ey	f <sub>max</sub> [rad/s]	ey	f <sub>min</sub> [μm]	ey	f <sub>max</sub> [rad/s]
<b>1</b>	10	1,7266	10	255,9539	10	1,7266	8,8471	255,1698
<b>2</b>	10	1,7266	10	255,9539	10	1,7266	7,4426	254,0038
<b>3</b>	10	1,7266	10	255,9539	<b>10</b>	<b>1,7266</b>	<b>9,8663</b>	<b>255,8696</b>
<b>4</b>	10	1,7266	10	255,9539	10	1,7266	9,1000	255,3535
<b>5</b>	10	1,7266	10	255,9539	10	1,7266	8,7564	255,1022
<b>6</b>	10	1,7266	10	255,9539	10	1,7266	9,3028	255,4959
<b>7</b>	10	1,7266	10	255,9539	10	1,7266	9,1827	255,4121
<b>8</b>	10	1,7266	10	255,9539	10	1,7266	9,3112	255,5017
<b>9</b>	10	1,7266	10	255,9539	10	1,7266	7,9742	254,4769
<b>10</b>	<b>10</b>	<b>1,7266</b>	<b>10</b>	<b>255,9539</b>	10	1,7266	9,3355	255,5184
<b>Média</b>		1,7266		255,9539		1,7266		255,1904
<b>DP</b>		0		0,0000		0		0,5254

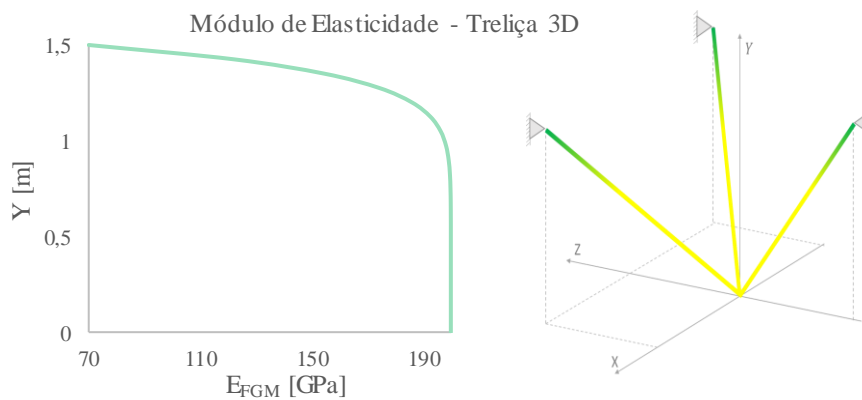


Figura 5.5.5 - Evolução do Módulo de Elasticidade da Treliça 3D pela Melhor Solução Ótima encontrada para Minimização de Deslocamento Resultante Máximo através do Modelo de 1 variável

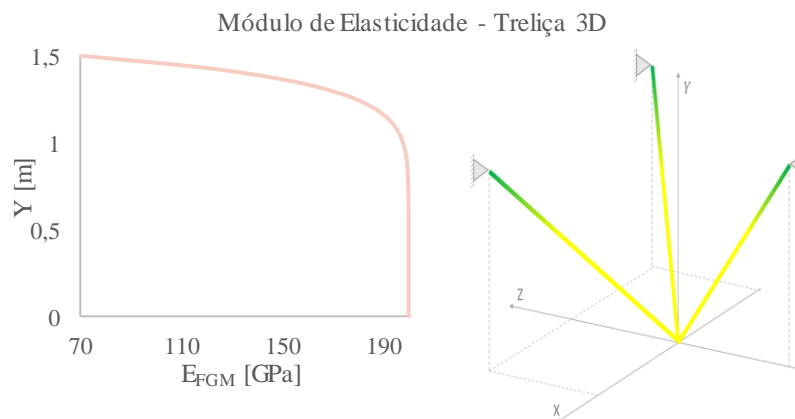


Figura 5.5.6 - Evolução do Módulo de Elasticidade da Treliça 3D pela Melhor Solução Ótima encontrada para Maximização da Frequência Fundamental através do Modelo de 1 variável

No caso desta treliça no espaço, é de notar que tanto para uma situação em que se pretende minimizar deslocamentos resultantes como para maximizar a frequência fundamental, a distribuição de propriedades mais vantajosa é a caracterizada por um expoente de valor 10, em que a zircónia constitui a estrutura na totalidade até uma altura cerca de 0,9 m.

### 5.5.4 Pórtico 3D

Para uma série de 10 corridas, população com 5 indivíduos e 10 iterações, obtiveram-se os resultados para análise estática e dinâmica, apresentados na Tabela 5.5.6, respetivamente:

Tabela 5.5.6 - Resultados do Estudo de Otimização ao Pórtico 3D através de ambas as Meta heurísticas de Otimização Implementadas para 1 variável de projeto

Corrida	AOA				RFO			
	ey	f <sub>min</sub> [mm]	ey	f <sub>max</sub> [rad/s]	ey	f <sub>min</sub> [mm]	ey	f <sub>max</sub> [rad/s]
1	10	1,5930	3,2175	121,0680	10	1,5930	3,1690	121,0679
2	10	1,5930	3,1893	121,0680	10	1,5930	3,2185	121,0680
3	10	1,5930	3,1855	121,0681	10	1,5930	3,2263	121,0678
4	6,1559	1,6218	3,2090	121,0681	10	1,5930	3,3891	121,0598
5	10	1,5930	3,1827	121,0681	10	1,5930	3,0905	121,0653
6	10	1,5930	3,2413	121,0676	10	1,5930	2,7019	120,9957
7	10	1,5930	3,2166	121,0680	10	1,5930	4,4759	120,8182
8	10	1,5930	3,2213	121,0679	<b>10</b>	<b>1,5930</b>	<b>3,2125</b>	<b>121,0681</b>
9	10	1,5930	3,1973	121,0680	10	1,5930	3,0179	121,0599
10	<b>10</b>	<b>1,5930</b>	<b>3,1939</b>	<b>121,0681</b>	10	1,5930	3,3001	121,0657
Média	1,5959		121,0680		1,5930		121,0336	
DP	0,0086		0,0001		0		0,0748	

As figuras 5.5.7 e 5.5.8 apresentam a evolução do módulo de elasticidade caracterizada pela melhor solução ótima encontrada para minimização de deslocamento resultante máximo e para maximização da frequência fundamental do pórtico 3D, respetivamente, incluindo uma representação esquemática da configuração da estrutura relativamente aos materiais constituintes do FGM.

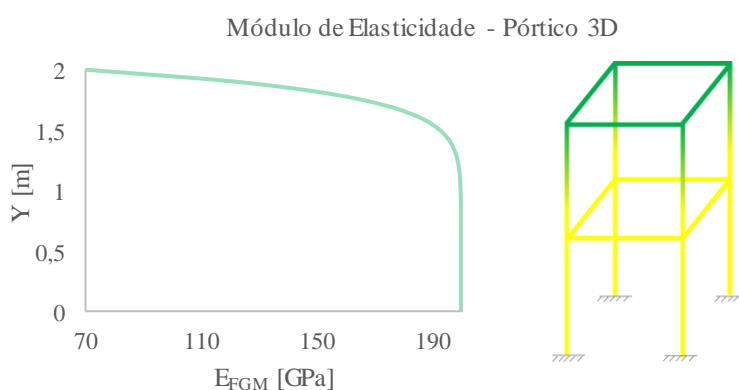


Figura 5.5.7 - Evolução do Módulo de Elasticidade do Pórtico 3D pela Melhor Solução Ótima encontrada para Minimização de Deslocamento Resultante Máximo através do Modelo de 1 variável

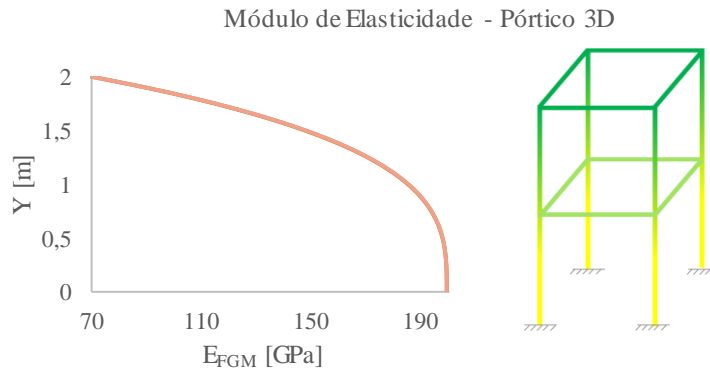


Figura 5.5.8 - Evolução do Módulo de Elasticidade do Pórtico 3D pela Melhor Solução Ótima encontrada para Maximização da Frequência Fundamental através do Modelo de 1 variável

Mais uma vez, se se tiver como objetivo a minimização de deslocamento resultante, o expoente a aplicar para se obter um melhor comportamento estático da estrutura é o valor 10, como nos casos previamente considerados. Por outro lado, se o objetivo for a maximização da frequência fundamental, o expoente da lei de potência que caracteriza um melhor comportamento dinâmico é de aproximadamente 3,2, cuja distribuição de propriedades é visível na Figura 5.5.8.

## 5.6 Estudos de Otimização com 4 Variáveis de Projeto

Analogamente ao subcapítulo 5.5, as estruturas estudadas quanto à otimização com 4 variáveis de projeto são a treliça 3, o pórtico 3, a treliça 3D e o pórtico 3D. Para cada estrutura, foram realizadas séries de 10 corridas, população com 5 indivíduos e 10 iterações, e obtiveram-se os resultados para análise estática e dinâmica segundo cada uma das meta-heurísticas consideradas, considerando a minimização do deslocamento resultante máximo da estrutura e a respectiva frequência fundamental.

### 5.6.1 Treliça 3

As tabelas 5.6.1 e 5.6.2 apresentam os resultados obtidos em séries de 10 corridas através do Algoritmo de Otimização de Arquimedes com vista à minimização de deslocamento resultante máximo e maximização da frequência fundamental da treliça 3, respetivamente. Por sua vez, as tabelas 5.6.3 e 5.6.4 apresentam os resultados obtidos em séries de 10 corridas através do Algoritmo de Otimização das Raposas Vermelhas com vista à minimização de deslocamento resultante máximo e maximização da frequência fundamental da treliça 3, respetivamente.

Tabela 5.6.1 - Resultados do Estudo de Otimização à Trelença 3 através do Algoritmo de Otimização de Arquimedes para 4 variáveis de projeto para Minimização de Deslocamento Resultante Máximo

Corrida	ey	RM	M1	M2	Valor Ótimo [µm]
1	10	1	2	2	60,6018
2	3,5925	1	2	2	63,0142
3	5,9906	1	2	2	61,4833
4	8,3039	1	2	2	60,8652
5	7,7017	1	2	2	60,9885
6	10	1	2	2	60,6018
7	5,9585	1	2	1	129,3570
8	<b>10</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	60,6018
9	10	1	2	2	60,6018
10	9,5382	1	2	2	60,6638
<b>Média</b>					67,8779
<b>DP</b>					20,5052

Tabela 5.6.2 - Resultados do Estudo de Otimização à Trelença 3 através do Algoritmo de Otimização de Arquimedes para 4 variáveis de projeto para Maximização da Frequência Fundamental

Corrida	ey	RM	M1	M2	Valor Ótimo [rad/s]
1	1,4607	1	2	1	661,6468
2	0,1	1	1	1	661,0310
3	1,3113	1	2	1	661,6527
4	0,1579	1	1	1	661,7867
5	1,3299	1	2	1	661,6526
6	1,3159	1	2	1	661,6527
7	1,3189	1	2	1	661,6527
8	1,3442	1	2	1	661,6525
9	<b>0,1807</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>661,8476</b>
10	0,1898	1	1	1	661,8449
<b>Média</b>					661,6420
<b>DP</b>					0,2187

Tabela 5.6.3 - Resultados do Estudo de Otimização à Trelença 3 através do Algoritmo de Otimização das Raposas Vermelhas para 4 variáveis de projeto para Minimização de Deslocamento Resultante Máximo

Corrida	ey	RM	M1	M2	Valor Ótimo [µm]
1	9,2058	1	2	2	60,7124
2	7,4511	1	2	2	61,0461
3	6,7573	1	2	2	61,2290
4	<b>10</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>60,6019</b>
5	10	1	2	2	60,6018
6	10	1	2	2	60,6018
7	10	1	2	2	60,6018
8	10	1	2	2	60,6018
9	10	1	2	2	60,6018
10	10	1	2	2	60,6018
<b>Média</b>					60,7200
<b>DP</b>					0,2152

Tabela 5.6.4 - Resultados do Estudo de Otimização à Trelça 3 através do Algoritmo de Otimização das Raposas Vermelhas para 4 variáveis de projeto para Maximização da Frequência Fundamental

Corrida	ey	RM	M1	M2	Valor Ótimo [rad/s]
1	0,1	1	1	1	661,0310
2	2,6027	1	2	1	661,4264
3	<b>0,1541</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>661,7661</b>
4	1,8867	1	2	1	661,5841
5	0,1	1	1	1	661,0309
6	0,1288	1	1	1	661,5361
7	2,4382	1	2	1	661,4644
8	0,2538	1	1	1	661,5120
9	4,2274	1	2	1	661,0788
10	6,2322	1	2	1	660,7578
<b>Média</b>					661,3188
<b>DP</b>					0,3043

As figuras 5.6.1 e 5.6.2 apresentam a evolução do módulo de elasticidade caracterizada pela melhor solução ótima encontrada para minimização de deslocamento resultante máximo e para maximização da frequência fundamental da trelça 3, respetivamente, incluindo uma representação esquemática da configuração da estrutura relativamente aos materiais constituintes do FGM.

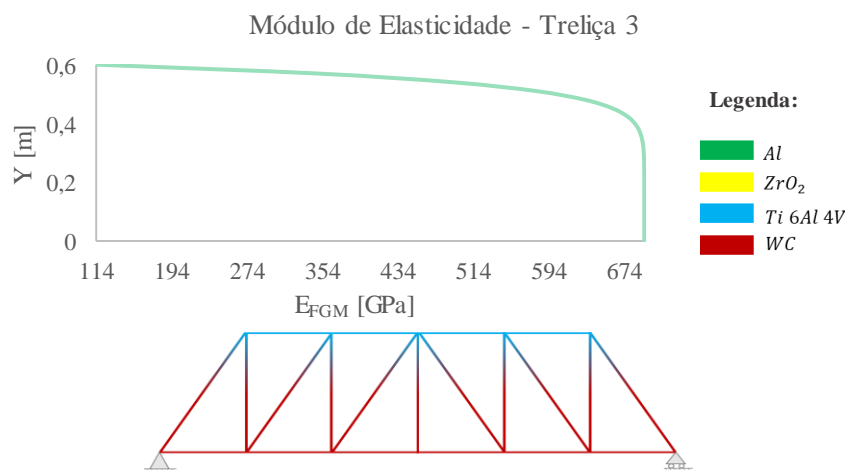


Figura 5.6.1 - Evolução do Módulo de Elasticidade do Trelça 3 pela Melhor Solução Ótima encontrada para Minimização de Deslocamento Resultante Máximo através do Modelo de 4 variáveis

Relativamente aos resultados obtidos, é de notar que, numa situação em que se pretenda minimizar o deslocamento resultante máximo, face ao modelo de uma variável, a solução ótima encontrada permite uma diminuição do deslocamento resultante máximo da estrutura para o mesmo carregamento para menos de metade do valor obtido com o modelo anterior, e corresponde à trelça constituída por carboneto de tungsténio na zona inferior e titânio na zona superior da estrutura, com a distribuição de propriedades representada na Figura 5.6.1.

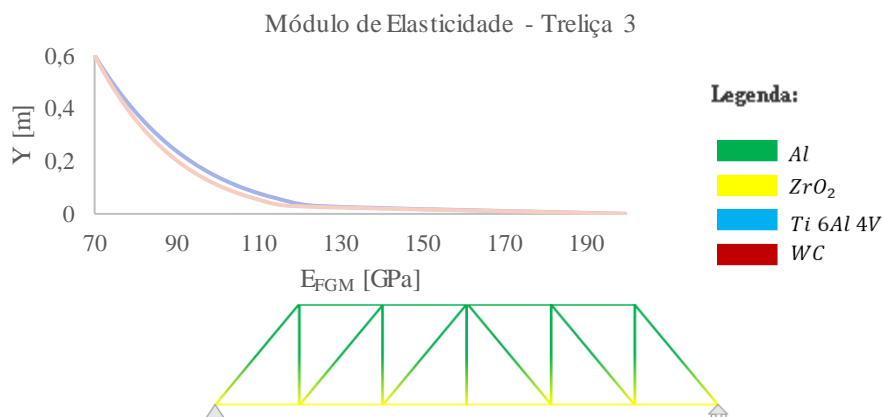


Figura 5.6.2 - Evolução do Módulo de Elasticidade da Treliça 3 pela Melhor Solução Ótima encontrada para Maximização da Frequência Fundamental através do Modelo de 4 variáveis

Por outro lado, para maximizar a frequência fundamental da estrutura, o melhor comportamento dinâmico em regime de vibração livre é conseguido com a mesma configuração obtida com o modelo de uma variável.

### 5.6.2 Pórtico 3

As tabelas 5.6.5 e 5.6.6 apresentam os resultados obtidos em séries de 10 corridas através do Algoritmo de Otimização de Arquimedes com vista à minimização de deslocamento resultante máximo e maximização da frequência fundamental do pórtico 3, respetivamente.

Tabela 5.6.5 - Resultados do Estudo de Otimização ao Pórtico 3 através do Algoritmo de Otimização de Arquimedes para 4 variáveis de projeto para Minimização de Deslocamento Resultante Máximo

Corrida	ey	RM	M1	M2	Valor Ótimo [ $\mu\text{m}$ ]
1	3,5861	2	2	2	9,2658
2	4,3382	2	2	2	9,6784
3	0,1	2	1	2	4,5277
4	<b>0,1</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>4,5157</b>
5	5,9567	2	2	2	10,2363
6	0,2742	2	2	2	4,7867
7	0,1	2	1	2	4,5277
8	0,1	2	2	2	4,5157
9	10	2	2	2	10,7905
10	2,4860	2	2	2	8,3725
<b>Média</b>					7,1217
<b>DP</b>					2,6144

Tabela 5.6.6 - Resultados do Estudo de Otimização ao Pórtico 3 através do Algoritmo de Otimização de Arquimedes para 4 variáveis de projeto para Maximização da Frequência Fundamental

Corrida	ey	RM	M1	M2	Valor Ótimo [rad/s]
<b>1</b>	<b>0,4807</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>1565,8842</b>
2	0,8060	1	2	2	1560,2406
3	0,9818	1	2	2	1559,3209
4	0,8196	1	2	2	1560,3440
5	0,4581	1	1	2	1565,8225
6	0,8198	1	2	2	1560,3452
7	1,5232	1	1	1	1449,4170
8	1,3845	1	1	1	1449,6551
9	0,8132	1	2	2	1560,2998
10	1,4133	1	1	1	1449,6719
<b>Média</b>					1528,1001
<b>DP</b>					51,4492

As tabelas 5.6.7 e 5.6.8 apresentam os resultados obtidos em séries de 10 corridas através do Algoritmo de Otimização das Raposas Vermelhas com vista à minimização de deslocamento resultante máximo e maximização da frequência fundamental do pórtico 3, respetivamente.

Tabela 5.6.7 - Resultados do Estudo de Otimização ao Pórtico 3 através do Algoritmo de Otimização de Raposas Vermelhas para 4 variáveis de projeto para Minimização de Deslocamento Resultante Máximo

Corrida	ey	RM	M1	M2	Valor Ótimo [µm]
1	1,0969	2	2	2	6,3853
2	2,2732	2	2	2	8,1455
<b>3</b>	<b>0,1</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>4,5157</b>
4	0,1	2	2	2	4,5157
5	0,1	2	2	2	4,5157
6	1,8228	2	2	2	7,5849
7	0,1	2	2	2	4,5157
8	3,1461	2	2	2	8,9572
9	0,1	2	2	2	4,5157
10	0,1	2	2	2	4,5157
<b>Média</b>					5,8167
<b>DP</b>					1,6998

Tabela 5.6.8 - Resultados do Estudo de Otimização ao Pórtico 3 através do Algoritmo de Otimização de Raposas Vermelhas para 4 variáveis de projeto para Maximização da Frequência Fundamental

Corrida	ey	RM	M1	M2	Valor Ótimo [rad/s]
1	2,4000	1	2	2	1504,5482
2	0,4378	1	1	2	1565,4877
3	1,2156	1	2	2	1553,1407
4	1,0410	1	2	2	1558,1536
5	<b>0,1</b>	<b>2</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>1574,5160</b>
6	2,3204	1	2	2	1507,6686
7	0,9987	1	2	2	1559,0219
8	0,5496	1	1	2	1564,4595
9	1,1062	1	1	1	1447,1009
10	0,8112	1	2	2	1560,2844
<b>Média</b>					1539,4382
<b>DP</b>					38,2675

As figuras 5.6.3 e 5.6.4 apresentam a evolução do módulo de elasticidade caracterizada pela melhor solução ótima encontrada para minimização de deslocamento resultante máximo e para maximização da frequência fundamental do pórtico 3, respectivamente, incluindo uma representação esquemática da configuração da estrutura relativamente aos materiais constituintes do FGM.

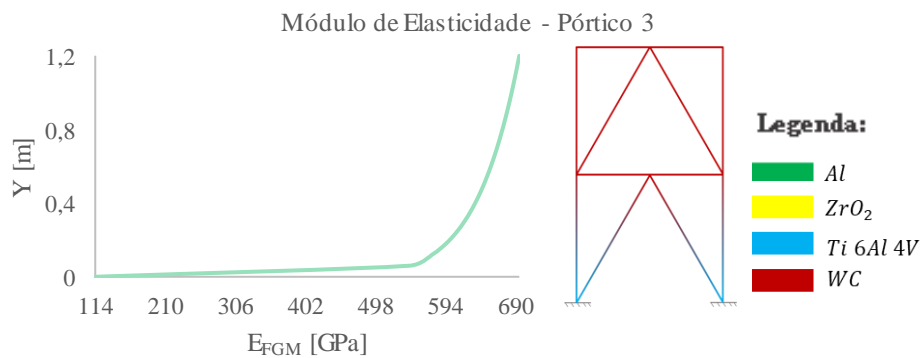


Figura 5.6.3 - Evolução do Módulo de Elasticidade do Pórtico 3 pela Melhor Solução Ótima encontrada para Minimização de Deslocamento Resultante Máximo através do Modelo de 4 variáveis

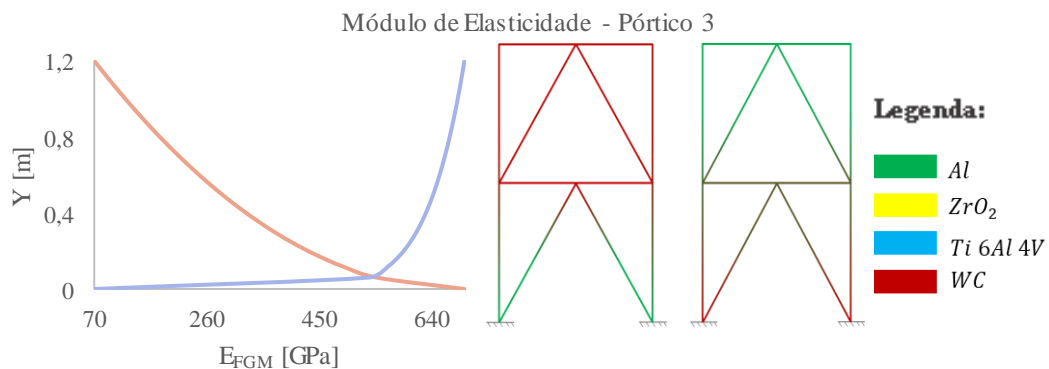


Figura 5.6.4 - Evolução do Módulo de Elasticidade do Pórtico 3 pelas Melhores Soluções Ótimas encontradas para Maximização da Frequência Fundamental através do Modelo de 4 variáveis

Para a presente estrutura, a solução ótima encontrada com o modelo de 4 variáveis que caracteriza o menor deslocamento resultante máximo corresponde ao pórtico constituído por titânio da zona inferior e carboneto de tungsténio na zona superior, diminuindo-se o deslocamento resultante máximo em cerca de 6 vezes. Pela perspectiva da maximização da frequência fundamental da estrutura, foram obtidas duas soluções ótimas distintas, cujos valores ótimos são próximos, correspondendo, no caso do Algoritmo de Arquimedes, a estrutura construída em alumínio junto aos encastramentos, e carboneto de tungsténio na parte superior, com um expoente cerca de 0,48; a solução ótima encontrada pelo algoritmo das Raposas Vermelhas corresponde ao pórtico constituído por carboneto de tungsténio na zona inferior e alumínio da zona superior da estrutura, com um expoente de 0,1, tendo-se obtido frequências fundamentais superiores às do modelo de uma variável.

### 5.6.3 Treliza 3D

As tabelas 5.6.9 e 5.6.10 apresentam os resultados obtidos em séries de 10 corridas através do Algoritmo de Otimização de Arquimedes com vista à minimização de deslocamento resultante máximo e maximização da frequência fundamental da treliza 3D, respetivamente. Por sua vez, as tabelas 5.6.11 e 5.6.12 apresentam os resultados obtidos em séries de 10 corridas através do Algoritmo de Otimização das Raposas Vermelhas com vista à minimização de deslocamento resultante máximo e maximização da frequência fundamental do pórtico 3, respetivamente.

Tabela 5.6.9 - Resultados do Estudo de Otimização à Treliza 3D através do Algoritmo de Otimização de Arquimedes para 4 variáveis de projeto para Minimização de Deslocamento Resultante Máximo

Corrida	ey	RM	M1	M2	Valor Ótimo [ $\mu\text{m}$ ]
1	10	1	2	2	0,5078
2	10	1	2	2	0,5078
3	10	1	2	2	0,5078
4	10	1	2	2	0,5078
5	10	1	2	2	0,5078
6	<b>0,1</b>	<b>2</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>0,5073</b>
7	10	1	2	2	0,5078
8	10	1	2	2	0,5078
9	10	1	2	2	0,5078
10	7,0417	1	2	2	0,5305
<b>Média</b>					0,5100
<b>DP</b>					0,0068

Tabela 5.6.10 - Resultados do Estudo de Otimização à Trelça 3D através do Algoritmo de Otimização de Arquimedes para 4 variáveis de projeto para Maximização da Frequência Fundamental

Corrida	ey	RM	M1	M2	Valor Ótimo [rad/s]
1	9,6291	1	2	2	284,6461
2	5,2631	1	2	2	277,6285
3	10	1	2	2	285,0245
4	9,5877	1	2	2	284,6026
5	10	1	2	2	285,0245
6	10	1	2	2	285,0245
7	10	1	2	2	285,0245
8	<b>0,1</b>	<b>2</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>291,9462</b>
9	7,5038	1	2	2	281,9629
10	6,0891	1	2	2	279,4775
<b>Média</b>					284,0362
<b>DP</b>					3,6511

Tabela 5.6.11 - Resultados do Estudo de Otimização à Trelça 3D através do Algoritmo de Otimização de Raposas Vermelhas para 4 variáveis de projeto para Minimização de Deslocamento Resultante Máximo

Corrida	ey	RM	M1	M2	Valor Ótimo [µm]
1	<b>10</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>0,5078</b>
2	8,9649	1	2	2	0,5139
3	10	1	2	2	0,5078
4	10	1	2	2	0,5078
5	10	1	2	2	0,5078
6	6,2308	1	1	2	0,5494
7	10	1	2	2	0,5078
8	10	1	2	2	0,5078
9	10	1	2	2	0,5078
10	10	1	2	2	0,5078
<b>Média</b>					0,5126
<b>DP</b>					0,0124

Tabela 5.6.12 - Resultados do Estudo de Otimização à Trelça 3D através do Algoritmo de Otimização de Raposas Vermelhas para 4 variáveis de projeto para Maximização da Frequência Fundamental

Corrida	ey	RM	M1	M2	Valor Ótimo [rad/s]
1	8,0635	1	2	2	282,7698
2	3,6395	1	2	2	272,6311
3	6,9487	1	2	2	281,0725
4	0,3494	2	2	2	280,7884
5	8,2045	1	2	2	282,9602
6	9,1870	1	1	2	283,2585
7	5,1050	1	2	2	277,2310
8	7,7088	1	2	1	257,0151
9	<b>0,1024</b>	<b>2</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>291,8510</b>
10	10	1	2	2	285,0245
<b>Média</b>					279,4602
<b>DP</b>					8,8424

As figuras 5.6.5 e 5.6.6 apresentam a evolução do módulo de elasticidade caracterizada pela melhor solução ótima encontrada para minimização de deslocamento resultante máximo e para maximização da frequência fundamental da treliça 3D, respectivamente, incluindo uma representação esquemática da configuração da estrutura relativamente aos materiais constituintes do FGM.

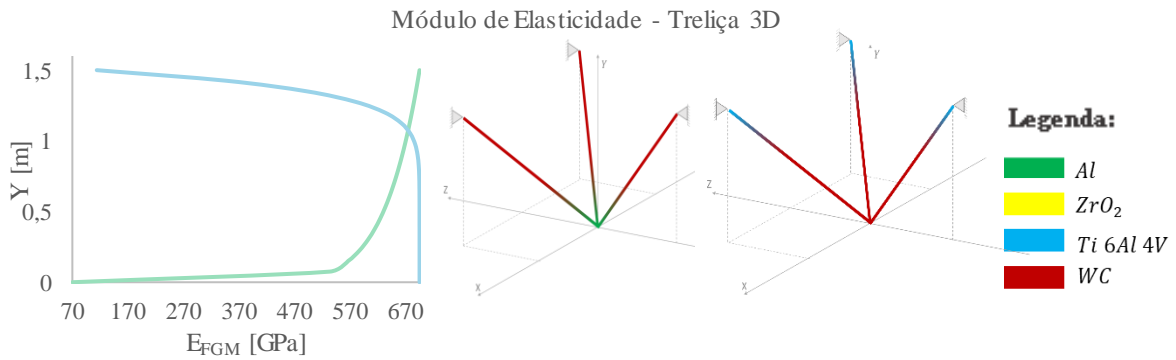


Figura 5.6.5 - Evolução do Módulo de Elasticidade da Treliça 3D pelas Melhores Soluções Ótimas encontradas para Minimização de Deslocamento Resultante Máximo através do Modelo de 4 variáveis

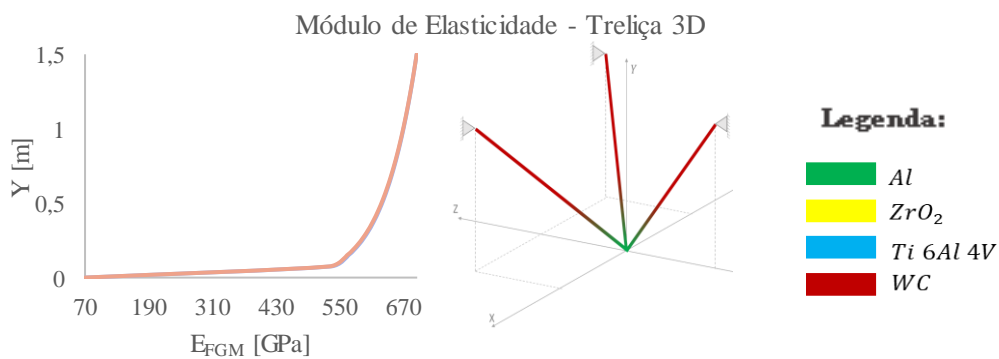


Figura 5.6.6 - Evolução do Módulo de Elasticidade da Treliça 3D pela Melhor Solução Ótima encontrada para Maximização da Frequência Fundamental através do Modelo de 4 variáveis

No caso desta treliça no espaço, foram obtidas duas soluções distintas para o problema de minimização de deslocamento resultante máximo da estrutura, através das quais se obtêm deslocamentos cerca de 3,4 vezes inferiores. A solução encontrada através do algoritmo de Arquimedes corresponde à treliça composta por alumínio na zona de aplicação da carga e carboneto de tungsténio junto às condições de fronteira, com um expoente da lei de potência de 0,1. A solução encontrada através do algoritmo das Raposas Vermelhas corresponde à combinação de carboneto de tungsténio na zona inferior e titânio na zona superior da estrutura, com um expoente de lei de potência de 10. Por outro lado, quando se tem como objetivo maximizar a frequência fundamental, as soluções ótimas encontradas por ambos os algoritmos são bastante próximas, correspondendo a uma combinação de alumínio na zona na qual é aplicada a carga e carboneto de tungsténio junto aos apoios da estrutura, com um expoente de 0,1 e 0,1024,

obtendo-se uma frequência fundamental ligeiramente superior à encontrada através do modelo de uma variável.

#### 5.6.4 Pórtico 3D

As tabelas 5.6.13 e 5.6.14 apresentam os resultados obtidos em séries de 10 corridas através do Algoritmo de Otimização de Arquimedes com vista à minimização de deslocamento resultante máximo e maximização da frequência fundamental da treliça 3D, respetivamente.

Tabela 5.6.13 - Resultados do Estudo de Otimização ao Pórtico 3D através do Algoritmo de Otimização de Arquimedes para 4 variáveis de projeto para Minimização de Deslocamento Resultante Máximo

Corrida	ey	RM	M1	M2	Valor Ótimo [ $\mu\text{m}$ ]
1	10	1	2	2	546,1123
2	10	1	2	2	546,1127
3	3,0940	1	2	2	600,2359
4	5,4995	1	2	2	560,8527
5	10	1	2	2	546,1122
6	10	1	2	2	546,1128
7	3,7564	1	2	2	583,0338
8	<b>0,1</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>390,3248</b>
9	10	1	2	2	546,1122
10	10	1	2	2	546,1118
<b>Média</b>					541,1121
<b>DP</b>					53,41308

Tabela 5.6.14 - Resultados do Estudo de Otimização ao Pórtico 3D através do Algoritmo de Otimização de Arquimedes para 4 variáveis de projeto para Maximização da Frequência Fundamental

Corrida	ey	RM	M1	M2	Valor Ótimo [rad/s]
1	1,4166	1	1	2	163,7403
2	<b>1,5007</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>163,7633</b>
3	1,5642	1	1	2	163,7448
4	2,2660	1	2	2	149,0600
5	4,9463	1	1	2	156,1860
6	2,0326	1	1	2	163,0303
7	1,4677	1	1	2	163,7613
8	1,3610	1	1	2	163,6897
9	1,5175	1	1	2	163,7613
10	1,3457	1	1	2	163,6701
<b>Média</b>					161,4407
<b>DP</b>					4,6927

As tabelas 5.6.15 e 5.6.16 apresentam os resultados obtidos em séries de 10 corridas através do Algoritmo de Otimização das Raposas Vermelhas com vista à minimização de deslocamento resultante máximo e maximização da frequência fundamental do pórtico 3, respetivamente.

Tabela 5.6.15 - Resultados do Estudo de Otimização ao Pórtico 3D através do Algoritmo de Otimização de Raposas Vermelhas para 4 variáveis de projeto para Minimização de Deslocamento Resultante Máximo

Corrida	ey	RM	M1	M2	Valor Ótimo [ $\mu\text{m}$ ]
1	10	1	2	2	546,1122
2	7,5461	1	2	2	551,0629
3	<b>0,1</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>390,3244</b>
4	10	1	2	2	546,1124
5	0,1	2	2	2	390,3247
6	0,1	2	2	2	390,3244
7	0,1	2	2	2	390,3244
8	0,1	2	2	2	390,3244
9	0,1	2	2	2	390,3244
10	5,5267	1	2	2	560,6505
<b>Média</b>					454,5884
<b>DP</b>					78,79651

Tabela 5.6.16 - Resultados do Estudo de Otimização ao Pórtico 3D através do Algoritmo de Otimização de Raposas Vermelhas para 4 variáveis de projeto para Maximização da Frequência Fundamental

Corrida	ey	RM	M1	M2	Valor Ótimo [rad/s]
1	1,2145	1	1	2	163,3825
2	2,4340	1	2	2	149,0320
3	1,9551	1	2	2	148,9432
4	2,9279	1	1	2	160,7510
5	2,9981	1	1	2	160,5673
6	<b>1,5486</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>163,7520</b>
7	5,5640	1	2	2	145,9512
8	2,2144	1	1	2	162,6061
9	2,1287	1	1	1	120,6251
10	2,8792	1	1	2	160,8786
<b>Média</b>					153,6489
<b>DP</b>					12,7315

As figuras 5.6.7 e 5.6.8 apresentam a evolução do módulo de elasticidade caracterizada pela melhor solução ótima encontrada para minimização de deslocamento resultante máximo e para maximização da frequência fundamental do pórtico 3D, respectivamente, incluindo uma representação esquemática da configuração da estrutura relativamente aos materiais constituintes do FGM.

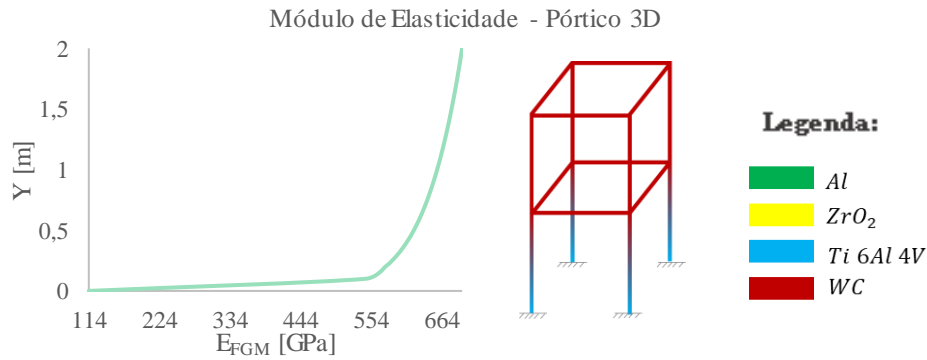


Figura 5.6.7 - Evolução do Módulo de Elasticidade do Pórtico 3D pela Melhor Solução Ótima encontrada para Minimização de Deslocamento Resultante Máximo através do Modelo de 4 variáveis

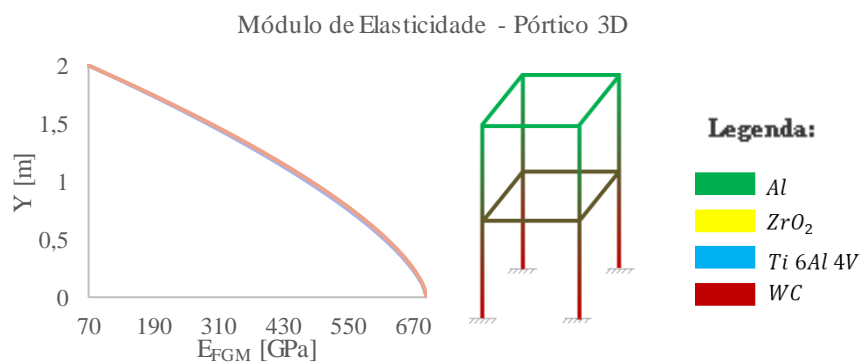


Figura 5.6.8 - Evolução do Módulo de Elasticidade do Pórtico 3D pela Melhor Solução Ótima encontrada para Maximização da Frequência Fundamental através do Modelo de 4 variáveis

No caso do pórtico tridimensional estudado, para se minimizar o deslocamento resultante máximo da estrutura, a melhor solução encontrada por ambos os algoritmos corresponde à combinação de titânio junto aos encastramentos e carboneto de tungstênio na zona superior da estrutura, analogamente ao pórtico 3, obtendo-se um deslocamento máximo cerca de 4 vezes inferior à situação com uma variável. Para maximizar a frequência fundamental, a solução ótima obtida com o modelo de 4 variáveis corresponde a uma combinação de carboneto de tungstênio junto aos encastramentos e alumínio na zona superior da estrutura, com um expoente de aproximadamente 1,5, obtendo-se uma frequência fundamental cerca de 1,35 vezes superior à encontrada pelo modelo de 1 variável.

## 5.7 Estudos de Otimização com Restrição de Massa

Após todos os estudos de otimização realizados em termos de minimizar deslocamento resultante máximo e maximizar a frequência fundamental da estrutura, sem restrições aplicadas, considerou-se pertinente a consideração de uma restrição, no presente caso, de massa, a título exemplificativo, para as estruturas tridimensionais estudadas. O cálculo da massa total da estrutura é realizado pelo somatório da massa de cada elemento, no respetivo domínio, em que *telem* corresponde ao número total de elementos que constitui a discretização considerada:

$$M_T = \sum_{j=1}^{telem} \left[ \left( \int_{-1}^1 \rho(\xi) \right) Jac bh \right] \quad (5.7.1)$$

Na Tabela 5.7.1 apresenta-se a massa total da treliça 3D e do pórtico 3D quando constituídas pelos materiais isotrópicos considerados.

Tabela 5.7.1 – Massa Total das Estruturas Tridimensionais Estudadas quando construídas em material isotrópico

Material	Massa Total [kg]	
	Treliça 3D	Pórtico 3D
<b>Al</b>	57,6422	108,0800
<b>ZrO2</b>	121,5991	228,0000
<b>Ti</b>	94,5060	177,2000
<b>WC</b>	334,9308	628,0000

Para o modelo de 1 variável arbitrou-se, para a treliça 3D, uma restrição de massa até 90 kg, e para o pórtico, um máximo de 170 kg. Para o modelo de 4 variáveis, a restrição de massa será de 300 kg para a treliça 3D e de 500 kg para o pórtico 3D.

Nas tabelas 5.7.2 e 5.7.3 apresentam-se os resultados dos estudos de otimização com constrangimentos, realizados à treliça 3D para minimização de deslocamento resultante máximo e para maximização da frequência fundamental, respetivamente, com restrição de massa, com o modelo de uma variável de projeto. Por sua vez, nas tabelas 5.7.4 e 5.7.5 apresentam-se os resultados dos estudos de otimização com constrangimentos, realizados ao Pórtico 3D, para as mesmas funções objetivo que as já descritas para a Treliça 3D, para o modelo de uma variável.

Tabela 5.7.2 – Resultados do Estudo de Otimização com Constrangimento (restrição de massa), realizado à Treliça 3D para Minimização de Deslocamento Resultante Máximo através do modelo de 1 variável de projeto

Corrida	AOA			RFO		
	ey	f <sub>min</sub> [µm]	Massa [kg]	ey	f <sub>min</sub> [µm]	Massa [kg]
<b>1</b>	1,0139	2,5844	89,8416	1,0012	2,5925	89,6401
<b>2</b>	0,9926	2,5980	89,5024	0,9191	2,6479	88,2734
<b>3</b>	1,0077	2,5884	89,7427	0,9969	2,5953	89,5712
<b>4</b>	0,9685	2,6139	89,1097	0,9409	2,6327	88,6465
<b>5</b>	0,9826	2,6046	89,3396	1,0108	2,5864	89,7918
<b>6</b>	1,0113	2,5861	89,8005	1,0039	2,5907	89,6834
<b>7</b>	1,0206	2,5802	89,9459	0,9395	2,6336	88,6234
<b>8</b>	1,0201	2,5805	89,9381	<b>1,0171</b>	<b>2,5824</b>	<b>89,8910</b>
<b>9</b>	<b>1,0233</b>	<b>2,5785</b>	<b>89,9891</b>	0,9418	2,6320	88,6622
<b>10</b>	0,9769	2,6083	89,2469	0,9490	2,6271	88,7833
<b>Média</b>		2,5923			2,6121	
<b>DP</b>		0,0122			0,0233	

Tabela 5.7.3 - Resultados do Estudo de Otimização com Constrangimento (restrição de massa), para Maximização da Frequência Fundamental realizado à Treliça 3D através do modelo de 1 variável de projeto

Corrida	AOA			RFO		
	ey	f <sub>máx</sub> [rad/s]	Massa [kg]	ey	f <sub>máx</sub> [rad/s]	Massa [kg]
1	1,0186	241,8486	89,9161	0,9933	241,7632	89,5138
2	1,0155	241,8380	89,8666	<b>1,0164</b>	<b>241,8410</b>	<b>89,8804</b>
3	0,9940	241,7654	89,5244	0,7795	241,0004	85,6584
4	0,9876	241,7436	89,4205	0,7596	240,9236	85,2519
5	1,0127	241,8286	89,8228	0,9544	241,6304	88,8749
6	0,9897	241,7507	89,4548	0,9415	241,5859	88,6571
7	<b>1,0196</b>	<b>241,8519</b>	<b>89,9315</b>	0,9180	241,5043	88,2540
8	0,9869	241,7414	89,4103	0,8963	241,4281	87,8721
9	1,0144	241,8345	89,8500	0,8503	241,2635	87,0330
10	0,9975	241,7773	89,5808	0,9041	241,4557	88,0109
<b>Média</b>		241,7980			241,4396	
<b>DP</b>		0,0438			0,2861	

Para uma restrição de massa de 90 kg para a treliça estudada, a solução ótima altera de um expoente de 10 para aproximadamente 1, tanto pelo algoritmo de Arquimedes como pelo das Raposas Vermelhas, traduzindo-se em deslocamentos cerca de 1,5 vezes superiores relativamente à estrutura não restringida, e frequências naturais ligeiramente inferiores ao modelo anterior.

Tabela 5.7.4 - Resultados do Estudo de Otimização com Constrangimento (restrição de massa), realizado ao Pórtico 3D para Minimização de Deslocamento Resultante Máximo através do modelo de 1 variável de projeto

Corrida	AOA			RFO		
	ey	f <sub>min</sub> [μm]	Massa [kg]	ey	f <sub>min</sub> [μm]	Massa [kg]
1	1,9493	1,8351	169,9262	1,9162	1,8404	169,5162
2	1,9150	1,8406	169,5013	1,9081	1,8417	169,4143
3	<b>1,9546</b>	<b>1,8343</b>	<b>169,9921</b>	1,8102	1,8583	168,1342
4	1,9207	1,8397	169,5721	<b>1,9473</b>	<b>1,8354</b>	<b>169,9019</b>
5	1,9480	1,8353	169,9108	1,8096	1,8584	168,1270
6	1,9416	1,8363	169,8315	1,7855	1,8628	167,7976
7	1,9327	1,8377	169,7215	1,7782	1,8641	167,6972
8	1,9507	1,8349	169,9434	1,8423	1,8527	168,5637
9	1,9486	1,8352	169,9175	1,9386	1,8368	169,7948
10	1,9518	1,8347	169,9571	1,8949	1,8439	169,2464
<b>Média</b>		1,8364			1,8495	
<b>DP</b>		0,0021			0,0105	

Tabela 5.7.5 - Resultados do Estudo de Otimização com Constrangimento (restrição de massa), para Maximização da Frequência Fundamental realizado ao Pórtico 3D através do modelo de 1 variável de projeto

Corrida	AOA			RFO		
	ey	f <sub>máx</sub> [rad/s]	Massa [kg]	ey	f <sub>máx</sub> [rad/s]	Massa [kg]
1	1,8969	120,3252	169,2719	1,8834	120,3040	169,0992
2	1,9378	120,3869	169,7852	1,8625	120,2702	168,8288
3	1,8377	120,2288	168,5033	<b>1,9176</b>	<b>120,3570</b>	<b>169,5333</b>
4	1,9470	120,4001	169,8981	1,7829	120,1306	167,7620
5	1,9488	120,4027	169,9200	1,8135	120,1862	168,1778
6	1,9327	120,3794	169,7213	1,2060	118,3548	157,8442
7	1,9410	120,3916	169,8248	1,7881	120,1400	167,8335
8	1,9473	120,4006	169,9022	1,7482	120,0637	167,2764
9	<b>1,9534</b>	<b>120,4093</b>	<b>169,9771</b>	1,9159	120,3544	169,5120
10	1,8969	120,3252	169,2719	1,7883	120,1405	167,8363
<b>Média</b>		120,3635			120,0301	
<b>DP</b>		0,0552			0,5667	

Para uma restrição de massa de 170 kg, verifica-se que o expoente ótimo, tanto em termos de comportamento estático como dinâmico, toma um valor entre 1,91 e 1,95, não impondo alterações significativas no pórtico analisado.

As tabelas 5.7.6, 5.7.7, 5.7.8 e 5.7.9 contêm os resultados dos estudos de otimização com constrangimentos, realizados à treliça 3D com o modelo de 4 variáveis de projeto com restrição de massa, para minimizar deslocamento resultante máximo e para maximizar a frequência fundamental da estrutura, através do algoritmo de Arquimedes e o algoritmo das Raposas Vermelhas, respetivamente.

Tabela 5.7.6 - Resultados do Estudo de Otimização com Constrangimento (restrição de massa), realizado à Treliça 3D para Minimização de Deslocamento Resultante Máximo através do modelo de 4 variáveis de projeto com o algoritmo das Raposas Vermelhas

Corrida	ey	RM	M1	M2	Massa da Estrutura [kg]	Valor Ótimo [μm]
1	4,7179	1	2	2	292,8831	0,5698
2	5,5411	1	2	2	298,1746	0,5519
3	10	1	2	1	119,1361	1,6847
4	6,7259	1	1	2	299,0403	0,5419
5	5,6896	1	2	2	298,9909	0,5493
6	5,4783	1	2	2	297,8184	0,5531
7	5,6644	1	2	2	298,8550	0,5497
8	<b>6,7892</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>299,3315</b>	<b>0,5410</b>
9	5,8315	1	2	2	299,7372	0,5469
10	5,7219	1	2	2	299,1635	0,5487
			<b>Média</b>			0,6637
			<b>DP</b>			0,3404

Tabela 5.7.7 - Resultados do Estudo de Otimização com Constrangimento (restrição de massa), realizado à Trelça 3D para Minimização de Deslocamento Resultante Máximo através do modelo de 4 variáveis de projeto com o algoritmo de Arquimedes

Corrida	ey	RM	M1	M2	Massa da Estrutura [kg]	Valor Ótimo [ $\mu\text{m}$ ]
1	3,1144	1	2	2	276,4953	0,6321
2	5,0351	1	2	2	295,0932	0,5622
3	<b>6,7461</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>299,1338</b>	<b>0,5416</b>
4	4,4574	1	2	2	290,8762	0,5768
5	1,7314	2	2	2	182,5273	1,3199
6	8,9519	1	2	1	118,8767	1,6934
7	1,5408	1	1	2	225,7964	0,8747
8	7,8007	1	2	1	118,5206	1,7054
9	1,1679	2	2	2	205,4060	1,0514
10	0,6027	2	1	2	230,6535	0,7937
<b>Média</b>						0,9751
<b>DP</b>						0,4303

Relativamente a uma situação em que se pretende a minimização de deslocamento resultante máximo, a aplicação de uma restrição de massa de 300 kg à trelça 3D, traduz-se na obtenção de soluções ótimas com uma combinação de variáveis significativamente distinta face ao modelo não restringido. Neste caso, a combinação de carboneto de tungsténio à coordenada inferior da estrutura com alumínio à coordenada superior, com expoente entre 6,74 e 6,78 permite o melhor comportamento estático, ocorrendo um ligeiro aumento do deslocamento resultante máximo.

Tabela 5.7.8 - Resultados do Estudo de Otimização com Constrangimento (restrição de massa), realizado à Trelça 3D para Maximização da Frequência Fundamental através do modelo de 4 variáveis de projeto com o algoritmo de Arquimedes

Corrida	ey	RM	M1	M2	Massa da Estrutura [kg]	Valor Ótimo [rad/s]
1	4,0922	1	2	2	287,7165	274,2579
2	1,8533	1	2	2	250,6676	263,3081
3	3,9076	1	2	2	285,9401	273,6204
4	5,5462	1	1	2	292,5723	276,8762
5	4,5330	1	2	2	291,4783	275,6517
6	7,9763	1	2	1	118,5808	257,1822
7	9,7099	1	2	1	119,0694	258,0952
8	<b>0,3630</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>270,9025</b>	<b>280,1811</b>
9	9,0675	1	2	1	118,9079	257,7874
10	0,5650	2	2	2	248,1284	271,4627
<b>Média</b>						268,8423
<b>DP</b>						8,3833

Tabela 5.7.9 - Resultados do Estudo de Otimização com Constrangimento (restrição de massa), realizado à Treliça 3D para Maximização da Frequência Fundamental através do modelo de 4 variáveis de projeto com o algoritmo das Raposas Vermelhas

Corrida	ey	RM	M1	M2	Massa da Estrutura [kg]	Valor Ótimo [rad/s]
1	4,0206	1	2	2	287,0429	274,0146
2	8,5118	1	2	1	118,7507	257,4935
3	5,6562	1	2	2	298,8106	278,5531
4	6,2542	1	1	2	296,7062	278,5184
5	4,2511	1	2	2	289,1454	274,7802
6	5,0889	1	2	2	295,4453	277,1898
7	5,5264	1	2	2	298,0918	278,2572
8	1,8148	1	1	2	236,4211	259,9936
9	3,8704	1	2	2	285,5665	273,4880
10	<b>0,2408</b>	<b>2</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>281,1156</b>	<b>285,9711</b>
<b>Média</b>						273,8259
<b>DP</b>						8,2581

A restrição de massa aplicada à treliça 3D trouxe duas soluções ótimas distintas entre si e face ao modelo não restringido, que, no entanto, não introduzem uma diminuição significativa das frequências naturais associadas face ao modelo não restringido. Por um lado, através do algoritmo de Arquimedes, obteve-se como solução ótima a combinação de titânio à coordenada inferior da estrutura com carboneto de tungstênio à coordenada superior, com um expoente de aproximadamente 0,36. Por outro lado, com um valor de frequência fundamental superior, a solução ótima obtida, neste caso pelo algoritmo das raposas vermelhas, é a combinação de alumínio na zona inferior e carboneto de tungstênio na zona superior, com um expoente de aproximadamente 0,24.

Analogamente aos resultados apresentados para a treliça 3D, as tabelas 5.7.10, 5.7.11, 5.7.12 e 5.7.13 contêm os resultados dos estudos de otimização com constrangimentos, realizados ao pórtico 3D com o modelo de 4 variáveis de projeto com restrição de massa, para as mesmas funções objetivo já descritas, através do algoritmo de Arquimedes e o algoritmo das Raposas Vermelhas, respetivamente.

Tabela 5.7.10 - Resultados do Estudo de Otimização com Constrangimento (restrição de massa), realizado ao Pórtico 3D para Minimização de Deslocamento Resultante Máximo através do modelo de 4 variáveis de projeto com o algoritmo de Arquimedes

Corrida	ey	RM	M1	M2	Massa da Estrutura [kg]	Valor Ótimo [mm]
1	1,5836	1	2	2	390,4535	0,6969
2	<b>1,7036</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>397,3263</b>	<b>0,6834</b>
3	10	2	2	2	310,5010	1,4105
4	2,3288	1	1	2	394,0518	0,7188
5	6,8434	2	2	2	319,6189	1,3506
6	6,8316	2	2	2	319,6702	1,3503
7	1,3371	1	2	2	374,2458	0,7311
8	4,2644	2	2	2	338,5796	1,2210
9	1,8716	2	2	2	399,1888	0,8801
10	8,2116	2	2	2	314,7492	1,3821
<b>Média</b>						1,0425
<b>DP</b>						0,3080

Tabela 5.7.11 - Resultados do Estudo de Otimização com Constrangimento (restrição de massa), realizado ao Pórtico 3D para Minimização de Deslocamento Resultante Máximo através do modelo de 4 variáveis de projeto com o algoritmo das Raposas Vermelhas

Corrida	ey	RM	M1	M2	Massa da Estrutura [kg]	Valor Ótimo [mm]
1	2,3151	2	2	2	380,5387	0,9680
2	2,0760	2	2	2	389,9042	0,9222
3	1,3733	1	2	2	376,8221	0,7255
4	2,1377	2	2	2	387,3452	0,9344
5	1,8707	2	2	2	399,2320	0,8799
6	1,3645	1	2	2	376,2063	0,7268
7	<b>1,6035</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>391,6397</b>	<b>0,6946</b>
8	1,8933	1	1	2	373,1806	0,7591
9	2,0613	1	1	2	381,9597	0,7416
10	2,4407	2	2	2	376,1691	0,9906
<b>Média</b>						0,8343
<b>DP</b>						0,1092

A aplicação de uma restrição de massa de 500 kg para o pórtico 3D resultou na obtenção de uma combinação de variáveis que caracterizam a solução ótima significativamente distinta face à obtida através do modelo não restringido.

Para esta estrutura, o par de materiais mantém-se, no entanto, neste caso, a solução ótima é caracterizada por carboneto de tungsténio à coordenada inferior da estrutura e titânio à coordenada superior com um expoente entre 1,6 e 1,7. Esta restrição resulta num deslocamento resultante máximo cerca de duas vezes superior ao obtido com o modelo não restringido.

Tabela 5.7.12 - Resultados do Estudo de Otimização com Constrangimento (restrição de massa) realizado ao Pórtico 3D para Maximização da Frequência Fundamental através do modelo de 4 variáveis de projeto com o algoritmo de Arquimedes

Corrida	ey	RM	M1	M2	Massa da Estrutura [kg]	Valor Ótimo [rad/s]
1	3,2963	1	1	1	181,0123	121,0659
2	3,5514	1	1	1	182,2890	121,0416
3	0,4690	1	1	2	227,1485	151,1539
4	4,4426	1	1	1	185,6246	120,8284
5	0,5450	1	1	2	240,6815	154,0699
6	1,6014	1	1	2	355,2547	163,7220
7	3,3228	1	1	1	181,1534	121,0643
8	3,3331	1	1	1	181,2073	121,0638
9	<b>1,4563</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>344,8189</b>	<b>163,7586</b>
10	2,4302	1	1	1	174,9776	120,8716
<b>Média</b>						135,8640
<b>DP</b>						18,5662

Tabela 5.7.13 - Resultados do Estudo de Otimização com Constrangimento (restrição de massa), realizado ao Pórtico 3D para Maximização da Frequência Fundamental através do modelo de 4 variáveis de projeto com o algoritmo das Raposas Vermelhas

Corrida	ey	RM	M1	M2	Massa da Estrutura [kg]	Valor Ótimo [rad/s]
1	3,3803	1	1	1	181,4522	121,0605
2	<b>1,6075</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>355,6699</b>	<b>163,7174</b>
3	3,7080	1	1	1	182,9900	121,0161
4	1,7987	1	1	2	367,7736	163,4834
5	0,8103	1	2	2	326,5186	142,4026
6	1,5443	1	2	2	388,0673	148,2120
7	0,9821	1	1	2	301,0610	162,1242
8	2,4264	1	1	1	174,9435	120,8693
9	1,7374	1	2	2	399,1614	148,6657
10	1,6984	1	2	2	397,0407	148,5920
<b>Média</b>						144,0143
<b>DP</b>						16,5817

Por fim, em termos de comportamento dinâmico em regime de vibração livre, é de notar que a solução ótima, neste caso, é bastante próxima à obtida sem restrição de massa, pelo que a combinação de materiais se mantém, no entanto, o expoente toma valores ligeiramente diferentes, entre 1,45 e 1,6, o que, em termos de frequência natural da estrutura, permite valores muito próximos do modelo anterior.

Página intencionalmente deixada em branco

## 6 Conclusões e Proposta de Trabalho Futuro

O presente capítulo tem como objetivo a apresentação das conclusões que resultam de todo o trabalho desenvolvido nesta dissertação.

Primeiramente, e de uma forma geral, os estudos de verificação apresentados no subcapítulo 4.2 do presente documento permitiram confirmar a veracidade dos resultados obtidos com o modelo implementado. Nos primeiros seis estudos realizados, realizou-se a verificação em vigas com diferentes condições de fronteira e de material (isotrópico e FGM), relativamente a comportamento estático e também dinâmico em regime de vibração livre, tendo-se obtido, globalmente, desvios muito reduzidos relativamente aos valores de referência. Nos casos 7 e 8, foram analisadas estruturas bidimensionais típicas em material isotrópico e homogêneo – uma treliça simples e um pórtico hiperestático, respetivamente – quanto ao comportamento estático e em termos de frequências naturais, para os quais foram realizados estudos de convergência para todos os resultados avaliados, e comparados os resultados com a aplicação Ftool (no caso da resposta estática das estruturas), tendo-se obtido desvios muito reduzidos. O caso 9 corresponde à verificação do modelo quando a análise é expandida a estruturas no espaço, através da análise de uma viga em balanço no espaço, sujeita a diferentes carregamentos, tendo-se comparado os resultados com o software Solidworks, e obtido desvios muito reduzidos. Nos casos 10 e 11 foram analisadas duas estruturas no espaço – uma treliça e um pórtico – e analogamente aos estudos já descritos, foram verificados deslocamentos e frequências naturais, com desvios muito reduzidos.

No subcapítulo 4.3 são apresentados os estudos de verificação realizados ao algoritmo de otimização de Arquimedes, para o qual foram testadas três funções de Benchmark: Goldstein-Price, Esfera e Rastrigin, notando-se, para as dimensões definidas na literatura para cada função, uma dificuldade do algoritmo convergir para as soluções ótimas de referência para os mesmos parâmetros. No caso da função Goldstein-Price, de dimensão 2, considerou-se uma técnica de renovação da população a cada 10 iterações, que permitiu que em todas as corridas realizadas, fosse obtido o mínimo global da função. Para as restantes funções testadas, para a dimensão definida na literatura (30 variáveis), as soluções obtidas não são muito satisfatórias, pelo que seria necessário aumentar os parâmetros do algoritmo para que se pudesse obter resultados com maior precisão. No entanto, como a otimização de estruturas FGM implica reduzido número de variáveis de projeto, as funções foram testadas para dimensão 2, e apresentaram resultados com ordens de grandeza satisfatórias. Para o algoritmo das Raposas Vermelhas, no subcapítulo 4.4, foram testadas três funções de Benchmark: Esfera, Rastrigin e Soma dos Quadrados, e os resultados obtidos foram bastante satisfatórios, cuja ordem de grandeza dos mesmos é muito próxima aos resultados presentes na literatura.

No subcapítulo 4.5 apresenta-se a verificação do modelo de otimização com 1 variável de projeto, para o qual foi estudado um pórtico simples, correspondente ao pórtico 1 dos casos de estudo descritos no capítulo 5, e cujas soluções ótimas coincidem com os melhores resultados encontrados quando do estudo paramétrico da estrutura.

No capítulo 5 são apresentados os estudos paramétricos e de otimização realizados a estruturas típicas. No subcapítulo 5.1 são apresentados os estudos paramétricos a seis estruturas bidimensionais típicas – 3 treliças e 3 pórticos. Em todas as estruturas constata-se que os deslocamentos nodais diretamente afetados pelo carregamento considerado diminuem com a crescente presença de material cerâmico, que apresenta maior módulo de elasticidade. Além disso, é notado que, para o mesmo valor de secção transversal, é mais vantajosa a utilização de uma secção retangular em que a altura seja superior à largura (secção B), principalmente em termos de frequência fundamental, já que em termos de deslocamentos, não se verificam alterações significativas.

Dos estudos realizados à treliça 1 foi possível notar que, quer em termos de deslocamentos (para o carregamento considerado), quer em regime de vibração livre, a estrutura apresenta melhor comportamento quando a lei de potência caracteriza a distribuição de material cerâmico em função da altura da estrutura. Além disso, neste caso, o deslocamento segundo  $x$  do nó analisado mantém o valor da estrutura totalmente cerâmica, enquanto quando a lei de potência caracteriza a distribuição de material metálico, é mantido o deslocamento segundo  $x$  característico da estrutura totalmente metálica, que é superior, pelo que o deslocamento resultante do nó será inferior quando a lei de potência descreve a distribuição do material cerâmico. Relativamente ao comportamento em regime dinâmico de vibração livre, obtêm-se frequências superiores quando a expressão da fração volúmica é relativa ao material cerâmico.

Relativamente às treliças 2 e 3, em termos de deslocamento resultante dos nós analisados, será preferível uma situação em que a lei de potência caracterize o material com menor módulo de elasticidade, já que o deslocamento segundo a direção  $x$  se mantém igual ao da estrutura totalmente constituída pelo material localizado na zona inferior da estrutura (neste caso, cerâmico), pelo que o deslocamento resultante será menor. Em termos de frequências naturais, a combinação de material cerâmico à coordenada inferior com material metálico à coordenada superior, resulta em frequências ligeiramente superiores relativamente a quando a lei de potência caracteriza a distribuição de material cerâmico.

No caso dos pórticos analisados, tanto para o pórtico 1 como para o pórtico 2, obtêm-se frequências superiores quando a expressão da fração volúmica caracteriza a distribuição de material metálico em função da coordenada vertical da estrutura.

No pórtico 2, é de notar que os deslocamentos nodais analisados diminuem para menos de metade pela adição do elemento de contraventamento, para o carregamento considerado. A localização deste elemento poderia ser alterada com o intuito de se obter um melhor comportamento da estrutura, e em função dessa localização, a fração volúmica de material seria alterada, no entanto, não se considerou essa situação. A adição do elemento de contraventamento permitiu o aumento quase para o dobro da frequência fundamental, face ao pórtico 1. No pórtico 3, como seria expectável, a adição de mais quatro elementos de contraventamento permitiu uma diminuição considerável dos deslocamentos nodais analisados para o carregamento considerado, e em termos de comportamento dinâmico em regime de vibração livre, são obtidas frequências significativamente mais elevadas face aos pórticos 1 e 2, apresentando valores ligeiramente superiores quando a expressão da lei de potência é relativa ao material cerâmico.

No subcapítulo 5.2, através do estudo realizado, é de notar a importância da avaliação de instabilidade das estruturas FGM. Neste caso, foi avaliada a variação do coeficiente de esbeltez de cada estrutura, mantendo a secção transversal e alterando-se o comprimento dos troços, e é visível que, se as estruturas analisadas fossem construídas em metal, todas as analisadas com exceção do pórtico 3, com as relações de aspeto que foram utilizadas ( $L/h \geq 50$ ) para secção quadrada, teriam uma grande probabilidade de ocorrência de encurvadura. Nos casos analisados, deveria ter sido considerado, com maior ênfase, a secção B, e/ou relações de aspeto até 30, globalmente.

O estudo apresentado no subcapítulo 5.3 teve como objetivo a verificação, posterior aos estudos paramétricos, da influência que o expoente da lei de potência teria relativamente à construção da matriz de rigidez ao corte transversal. Inicialmente, a contribuição do expoente da lei de potência foi desprezada, tendo-se utilizado sempre 2 pontos de Gauss para a integração numérica reduzida dos termos de rigidez ao corte transversal dos elementos. A consideração do expoente aumenta o grau dos polinómios a integrar, pelo que, para os expoentes 2, 5 e 10, foram considerados, respetivamente, 3, 4 e 7 pontos de Gauss, e foi notado que, em termos de comportamento dinâmico em regime de vibração livre, as frequências obtidas são superiores quando é tida em consideração a contribuição do expoente da lei de potência, sendo significativamente notada a partir da terceira frequência fundamental. Relativamente a deslocamentos nodais, são obtidos desvios bastante reduzidos, sendo que, à exceção da treliça 1, de um modo geral, os deslocamentos obtidos são inferiores quando são utilizados mais pontos de Gauss no método de integração numérica, o que implica um aumento da rigidez da estrutura. No caso da treliça 1, as rotações obtidas são cerca de 3% superiores às do modelo com apenas 2 pontos de ponderação. Nos pórticos 2 e 3 foram identificados desvios acima dos 10% entre as duas metodologias. Nos estudos de otimização, de modo a evitar subestimar as estruturas, considera-se pertinente a continuação

da utilização de apenas 2 pontos de ponderação para a integração dos termos de rigidez ao corte transversal.

No subcapítulo 5.4 são apresentados os estudos paramétricos realizados aos algoritmos de otimização implementados, de modo a identificar os parâmetros que possibilitam a obtenção dos mínimos globais das funções eficazmente. Para o algoritmo de Arquimedes foi verificado que a sua precisão, para as funções testadas, apresenta alguma variação, mesmo para as que apresentam apenas duas variáveis. De uma forma geral, com o aumento dos parâmetros  $N$  e  $tmax$ , como esperado, maior a precisão dos resultados da solução ótima e valor ótimo da função. Para a função da esfera com dimensão 2, sendo uma função unimodal, os valores ótimos da função obtidos são satisfatórios. No caso das funções multimodais, existe alguma dificuldade para convergir para a solução global. Para a função Goldstein-Price, em média, a melhor combinação de parâmetros corresponde a populações de 50 indivíduos e 1000 iterações, no entanto, em todas as séries de corridas, é obtido pelo menos uma vez a solução ótima da função. No caso da função Rastrigin, em termos médios, os resultados começam a apresentar uma ordem de grandeza coerente com a solução teórica para qualquer população desde que utilizadas 1000 iterações, e com 200 iterações, utilizando populações a partir de 40 indivíduos. Neste caso, se for aplicada a técnica de renovação da população a cada 10 iterações, como no subcapítulo 4.3, não é notada uma melhoria significativa nos resultados, pelo que não se considerou vantajosa a sua utilização para os estudos de otimização. Para o algoritmo das Raposas Vermelhas, para a função unimodal considerada (esfera), são obtidos resultados satisfatórios para qualquer combinação de parâmetros  $N$  e  $tmax$ , obtendo-se, como espectável, melhores resultados com o aumento desses parâmetros. No caso da função Goldstein-Price, verifica-se que, para populações pequenas (10 indivíduos), existe tendência a identificar como solução ótima, mínimos locais em vez dos globais, com exceção do caso em que se utilizem 1000 iterações; para as restantes populações, desde que utilizadas mais de 150 iterações, os resultados, em média, têm uma precisão elevada. Por último, para a função Rastrigin, os resultados apresentam precisão elevada. De notar que, nos estudos apresentados, é visível que o algoritmo das Raposas Vermelhas tem uma maior capacidade de obter os valores ótimos das funções, quer sejam unimodais quer multimodais, para a mesma combinação dos parâmetros  $N$  e  $tmax$ . Apesar de ter sido realizado este estudo aprofundado relativamente aos parâmetros  $N$  e  $tmax$  no comportamento dos algoritmos, como foi verificado no subcapítulo 4.5, os resultados obtidos para populações de 10 indivíduos e 50 iterações não divergiam consideravelmente dos obtidos para populações de 5 indivíduos e 10 iterações, pelo que, de forma a diminuir o tempo de corrida de cada estudo, optou-se pela utilização desses dois parâmetros, atendendo a que a otimização de estruturas FGM efetuados exige um número reduzido de variáveis de projeto, e supõe-se que as funções objetivo a avaliar não têm um comportamento como o encontrado em funções multimodais como a Rastrigin.

No subcapítulo 5.5 apresentam-se os estudos de otimização realizados a duas das estruturas estudadas em 5.1, considerando-se ainda duas estruturas tridimensionais, com vista à procura das soluções que permitam minimizar o deslocamento resultante máximo e maximizar a frequência fundamental, através do modelo de otimização com uma variável de projeto – o expoente da lei de potência. Para as estruturas bidimensionais anteriormente estudadas, foi possível verificar os resultados obtidos através do modelo de otimização implementado, já que as soluções ótimas obtidas coincidem com os melhores resultados provenientes dos estudos paramétricos. Para todos os casos estudados, quando se pretende a minimização do deslocamento resultante máximo, numa situação em que apenas é considerado que a estrutura é totalmente metálica à coordenada mais elevada e totalmente cerâmica à coordenada mais baixa, a progressão entre os dois materiais deve corresponder a um expoente da lei de potência de 10. Quando o objetivo passa por maximizar a frequência fundamental, não é possível generalizar, tendo-se verificado que, para a treliça 3, o expoente deve ser de aproximadamente 0,18; para o pórtico 3, a melhor solução corresponde a um expoente cerca de 1,4; na treliça 3D, deve ser de 10; para o pórtico 3D, a melhor solução encontrada corresponde a um expoente de aproximadamente 1,5. As soluções obtidas através dos dois algoritmos são bastante próximas entre si.

No subcapítulo 5.6 encontram-se descritos os estudos de otimização realizados às mesmas estruturas apresentadas em 5.5, considerando-se, neste caso, 4 variáveis de projeto: o expoente da lei de potência, a escrita da regra de misturas, duas opções para material metálico e duas opções para material cerâmico. Dos resultados obtidos em cada estrutura, é de notar que, por um lado, os deslocamentos resultantes sofreram uma redução significativa, e as frequências obtidas aumentaram visivelmente, através da combinação e distribuição dos diferentes materiais, em conjunto com os diferentes expoentes possíveis; no entanto, não é possível generalizar uma solução ótima para todas as estruturas, sendo sempre aplicadas caso a caso, em função das características das estruturas e do carregamento.

Para a treliça 3, a combinação de carboneto de tungsténio à coordenada inferior da estrutura com titânio à coordenada superior permite a redução, para menos de metade, do deslocamento resultante máximo obtido anteriormente, com um expoente de 10; em termos de frequência fundamental, a solução ótima encontrada corresponde à encontrada com o modelo de 1 variável. Para o pórtico 3, sujeito ao carregamento considerado, a combinação de titânio à coordenada inferior com carboneto de tungsténio à coordenada superior da estrutura permite a diminuição do deslocamento resultante máximo para cerca de 7 vezes inferior. Por outro lado, relativamente ao comportamento dinâmico em regime de vibração livre, cada algoritmo obteve uma solução ótima diferente, contrariamente aos casos anterior, sendo que a correspondente a uma frequência fundamental superior provém do algoritmo das Raposas Vermelhas, e coincide com a combinação de alumínio à coordenada inferior e carboneto de tungsténio à coordenada superior com um

expoente de 0,1; no entanto, o algoritmo de Arquimedes devolveu como solução ótima a combinação de carboneto de tungstênio na zona inferior e alumínio na zona superior com um expoente de 0,48.

No caso da treliça 3D, o algoritmo de Arquimedes permitiu encontrar uma solução ótima comum aos dois objetivos estudados separadamente, correspondendo à combinação de alumínio à coordenada inferior e carboneto de tungstênio à coordenada superior com um expoente de 0,1. Assim, obtém-se um deslocamento resultante máximo cerca de 3,4 vezes inferior ao modelo anterior, e em termos de frequência fundamental, existe um ligeiro aumento. O algoritmo das Raposas Vermelhas encontrou soluções ótimas distintas, contudo, com resultados bastante próximos às obtidas através do algoritmo de Arquimedes. Numa situação em que se tenha como objetivo a minimização de deslocamento resultante máximo, a solução ótima corresponde à combinação de carboneto de tungstênio na zona inferior com titânio na zona superior com expoente de 10. No caso de maximizar a frequência fundamental, a solução ótima coincide com a obtida com o algoritmo anteriormente referido, tendo chegado a um expoente de 0,1024. Apesar da divergência entre as soluções ótimas encontradas, os valores ótimos das funções avaliadas são muito próximos entre os dois algoritmos.

No pórtico 3D, para o carregamento considerado, a melhor solução é análoga à obtida para o pórtico 3, combinando-se titânio à coordenada inferior com carboneto de tungstênio à coordenada superior com um expoente de 0,1, o que resulta na redução para cerca de 5 vezes menos relativamente ao modelo de 1 variável. Em termos de melhor comportamento dinâmico em vibração livre, a combinação de carboneto de tungstênio na zona inferior com alumínio na zona superior com um expoente de aproximadamente 1,5 é a que o permite, obtendo-se valores de frequência fundamental ligeiramente superiores ao modelo de 1 variável.

Dos resultados obtidos e já referidos sucintamente, é de notar que os valores das variáveis de projeto correspondentes às soluções ótimas em termos de minimização de deslocamento resultante máximo raramente coincidem ou são próximos aos das soluções ótimas em termos de maximização de frequências, pelo que, para se encontrar uma solução ótima para determinado problema seria necessária a adição de restrições ao nível da massa da estrutura, custos, entre outros.

Assim, no subcapítulo 5.7, apresentam-se estudos de otimização com restrição de massa, nos quais foram arbitrados valores máximos de massa para cada estrutura, com o objetivo, a título exemplificativo, de comparar as soluções ótimas com as anteriormente obtidas, visto que esta restrição pode definir a aplicabilidade ou não de determinada combinação de materiais, que sem qualquer restrição, poderia ser a solução ótima para a estrutura. Para este efeito, o estudo foi

realizado apenas para as estruturas tridimensionais já analisadas, para ambos os modelos desenvolvidos.

Relativamente ao estudo das estruturas tridimensionais com recurso ao modelo com 1 variável de projeto, se for considerada, no caso da treliça 3D, um valor máximo de massa de 90 kg, tanto para o melhor comportamento estático como dinâmico, a solução ótima passa a corresponder a um expoente de aproximadamente 1, através de ambos os algoritmos implementados, o que resulta, em termos de deslocamentos, num aumento para cerca de 1,5 vezes do deslocamento resultante anteriormente obtido, e numa frequência fundamental ligeiramente inferior. No caso do pórtico 3D, se for considerado um valor máximo de 170 kg, é verificado que a restrição de massa não traz alterações significativas no comportamento da estrutura, ocorrendo apenas uma mudança em termos de expoente da lei de potência para cerca de 1,95.

Na análise das estruturas com o modelo de 4 variáveis de projeto, arbitrou-se um valor de massa máximo de 300 kg para a treliça 3D, e 500 kg para o pórtico 3D. No caso da treliça 3D, para o carregamento considerado, é a combinação de carboneto de tungsténio à coordenada inferior com alumínio à coordenada superior com um expoente de 6,74 a 6,78 que permite o melhor comportamento estático, implicando um ligeiro aumento em termos do deslocamento resultante máximo obtido. Para o melhor comportamento dinâmico em vibração livre, verifica-se que cada algoritmo encontrou soluções distintas, sendo a que permite uma frequência fundamental superior é a obtida através do algoritmo das Raposas Vermelhas, e corresponde à combinação de alumínio na zona inferior com carboneto de tungsténio na zona superior e um expoente de 0,24. A solução encontrada pelo algoritmo de Arquimedes corresponde à combinação de titânio na zona inferior com carboneto de tungsténio na zona superior com um expoente de 0,36, com uma diferença de menos 5 rad/s da anteriormente descrita. A introdução das restrições de massa arbitradas resulta na obtenção de frequências ligeiramente inferiores quando comparadas com o modelo não restringido.

Por fim, para o pórtico 3D, a solução ótima, alcançada por ambos os algoritmos, corresponde à combinação de carboneto tungsténio à coordenada inferior com titânio à coordenada superior, e o expoente toma valores entre 1,6 e 1,7, o que resulta em deslocamentos cerca do dobro relativamente ao modelo não restringido. Em termos de comportamento dinâmico em vibração livre, o par de materiais que permite frequências mais elevadas mantém-se igual ao modelo não restringido, com um expoente ligeiramente diferente, entre 1,45 e 1,6, mantendo um valor bastante próximo ao obtido com o modelo não restringido.

A alteração da solução ótima de determinado problema quando se transita de otimização não restringida para otimização restringida é expectável, na medida em que, sem restrição, o algoritmo obtém a melhor solução sem qualquer condicionante. Ao aplicar uma restrição de massa, cujos

valores foram arbitrados, o algoritmo tem de descartar as melhores soluções ótimas quando estas ultrapassam o parâmetro definido, obtendo-se a melhor solução tendo em conta determinada restrição.

Ao longo da análise dos resultados de otimização, verifica-se que os algoritmos de otimização distintos implementados permitiram, na maioria dos casos, chegar à mesma solução ótima, ou próxima, para as estruturas estudadas, apesar do comportamento verificado nos estudos paramétricos realizados aos algoritmos, no que à convergência para os extremos globais de funções diz respeito.

Além disso, e contrariamente ao esperado, na maioria das situações, o algoritmo de Arquimedes permitiu a obtenção de resultados ligeiramente mais vantajosos, o que pode dever-se ao facto de, como se utilizaram populações com reduzida dimensão, o algoritmo das Raposas Vermelhas não ter tido a possibilidade de colocar em prática o mecanismo de controlo da população, que funciona como uma técnica de renovação da população, ainda que para apenas 5% dos indivíduos, não sendo possível a sua aplicação em populações de 5 indivíduos.

Para trabalho futuro, teria interesse a adição de diferentes restrições ao problema, nomeadamente de custo, e a consideração de outros pares de materiais, salientando-se que os utilizados nos estudos descritos foram selecionados com base na diferença entre as suas características (módulo de Young e massa volúmica), além do estudo de diferentes condições de carregamento, mais complexos e aproximados a situações reais, e a consideração de outras secções transversais, visto que apenas se considerou secção quadrada e retangular.

## Referências Bibliográficas

- [1] A. Sola, D. Bellucci, and V. Cannillo, “Functionally graded materials for orthopedic applications – an update on design and manufacturing,” *Biotechnology Advances*, vol. 34, no. 5. Elsevier Inc., pp. 504–531, Sep. 01, 2016. doi: 10.1016/j.biotechadv.2015.12.013.
- [2] T. K. Nguyen, K. Sab, and G. Bonnet, “Shear correction factors for functionally graded plates,” *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, vol. 14, no. 8, pp. 567–575, Nov. 2007, doi: 10.1080/15376490701672575.
- [3] A. Pasha and R. B.m, “Functionally graded materials (FGM) fabrication and its potential challenges & applications,” in *Materials Today: Proceedings*, Elsevier Ltd, 2022, pp. 413–418. doi: 10.1016/j.matpr.2021.09.077.
- [4] G. Tripathi, “Application and Future of Composite Materials: A Review,” *International Journal of Composite and Constituent Materials*, pp. 1–4, 2017, [Online]. Available: [www.journalspub.com](http://www.journalspub.com)
- [5] Isaac Elishakoff and Demetris Pentaras, *Mechanics of Functionally Graded Material Structures*. 2016.
- [6] M. Venkatesulu, “A Review of Composite Materials: History, Types, Advantages and Applications Over Traditional Materials,” *International Journal of Research in Aeronautical and Mechanical Engineering*, vol. 9, no. 04, pp. 32–38, 2021.
- [7] A. Chakraborty, S. Gopalakrishnan, and J. N. Reddy, “A new beam finite element for the analysis of functionally graded materials,” *Int J Mech Sci*, vol. 45, no. 3, pp. 519–539, Mar. 2003, doi: 10.1016/S0020-7403(03)00058-4.
- [8] K. Koutoati, F. Mohri, E. M. Daya, and E. Carrera, “A finite element approach for the static and vibration analyses of functionally graded material viscoelastic sandwich beams with nonlinear material behavior,” *Compos Struct*, vol. 274, Oct. 2021, doi: 10.1016/j.compstruct.2021.114315.
- [9] W. M. Soliman, M. A. Elshafei, and M. A. Kamel, “Static analysis of isotropic, orthotropic and functionally graded material beams,” 2016. [Online]. Available: [www.jmest.org](http://www.jmest.org)
- [10] K. Maalawi, “Optimization of Functionally Graded Material Structures: Some Case Studies,” in *Optimum Composite Structures*, IntechOpen, 2019. doi: 10.5772/intechopen.82411.
- [11] M. Şimşek, “Static analysis of a functionally graded beam under a uniformly distributed load by Ritz method,” 2009. [Online]. Available: <https://www.researchgate.net/publication/242144131>
- [12] A. E. Alshorbagy, M. A. Eltaher, and F. F. Mahmoud, “Free vibration characteristics of a functionally graded beam by finite element method,” *Appl Math Model*, vol. 35, no. 1, pp. 412–425, Jan. 2011, doi: 10.1016/j.apm.2010.07.006.
- [13] J. S. D. Gaspar, M. A. R. Loja, and J. I. Barbosa, “Static and Free Vibration Analyses of Functionally Graded Plane Structures,” *Journal of Composites Science*, vol. 7, no. 9, p. 377, Sep. 2023, doi: 10.3390/jcs7090377.
- [14] J. S. D. Gaspar, M. A. R. Loja, and J. I. Barbosa, “Bio-inspired Optimization of Functionally Graded Truss and Frame Structures,” 2023.
- [15] F. C. Campbell, “Chapter 1 - Introduction to Composite Materials,” in *Structural Composite Materials*, 2010. [Online]. Available: [www.asminternational.org](http://www.asminternational.org)

- [16] J. N. Reddy, *An Introduction to the Finite Element Method*. 1993.
- [17] J. N. Reddy, “Analysis of functionally graded plates,” 2000.
- [18] M. A. R. Loja, J. I. Barbosa, and C. M. Mota Soares, “A study on the modeling of sandwich functionally graded particulate composites,” *Compos Struct*, vol. 94, no. 7, pp. 2209–2217, Jun. 2012, doi: 10.1016/j.compstruct.2012.02.015.
- [19] A. J. Markworth and J. H. Saunders, “A model of structure optimization for a functionally graded material,” 1995.
- [20] M. M. Gasik, “Micromechanical modelling of functionally graded materials.”
- [21] H. Chalal and F. Abed-Meraim, “Quadratic solid-shell finite elements for geometrically nonlinear analysis of functionally graded material plates,” *Materials*, vol. 11, no. 6, Jun. 2018, doi: 10.3390/ma11061046.
- [22] W. Wang, H. Yuan, X. Li, and P. Shi, “Stress concentration and damage factor due to central elliptical hole in functionally graded panels subjected to uniform tensile traction,” *Materials*, vol. 12, no. 3, Jan. 2019, doi: 10.3390/ma12030422.
- [23] M. A. R. Loja, K. Rzeszut, and J. I. Barbosa, “Nonlocal Free Vibrations of Metallic FGM Beams,” *Journal of Composites Science*, vol. 6, no. 5, May 2022, doi: 10.3390/jcs6050125.
- [24] J. N. Reddy, *Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and Analysis*. CRC Press, 2004.
- [25] M. A. R. Loja, J. I. Barbosa, and C. M. Mota Soares, “Static and Dynamic Behaviour of Laminated Composite Beams,” 2001. [Online]. Available: [www.worldscientific.com](http://www.worldscientific.com)
- [26] A. Garg, M. O. Belarbi, H. D. Chalak, and A. Chakrabarti, “A review of the analysis of sandwich FGM structures,” *Composite Structures*, vol. 258. Elsevier Ltd, Feb. 15, 2021. doi: 10.1016/j.compstruct.2020.113427.
- [27] Y. Luo, “An efficient 3D Timoshenko beam element with consistent shape functions An Efficient 3D Timoshenko Beam Element with Consistent Shape Functions,” 2008. [Online]. Available: <https://www.researchgate.net/publication/259345543>
- [28] A. Bazoune, Y. A. Khulief, and N. G. Stephen, “Shape functions of three-dimensional Timoshenko beam element,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 259, no. 2. Academic Press, pp. 473–480, 2003. doi: 10.1006/jsvi.2002.5122.
- [29] G. Sasa, “Development of a new 3D beam finite element with deformable section.” [Online]. Available: <http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI026/these.pdf>
- [30] M. Gherlone, P. Cerracchio, M. Mattone, M. Di Sciuva, and A. Tessler, “Shape sensing of 3D frame structures using an inverse Finite Element Method,” *Int J Solids Struct*, vol. 49, no. 22, pp. 3100–3112, Nov. 2012, doi: 10.1016/j.ijsolstr.2012.06.009.
- [31] M. Khebizi, H. Guenfoud, M. Guenfoud, and R. El Fatmi, “Three-dimensional modelling of functionally graded beams using Saint-Venant’s beam theory,” *Structural Engineering and Mechanics*, vol. 72, no. 2, pp. 257–273, Oct. 2019, doi: 10.12989/sem.2019.72.2.257.
- [32] S. Timoshenko, *Strength of Materials, Part I, Elementary Theory and Problems*. New York.
- [33] J.N. Reddy, *An Introduction to the Finite Element Method*, 3rd Edition. 2006.
- [34] J. N. Reddy, *Energy and Variational Methods in Applied Mechanics*. 1984.

- [35] J. N. Reddy, *Introduction to the Finite Element Method*, 4th edition. 2019. [Online]. Available: <http://mechanics.tamu.edu>.
- [36] J. Reddy, “On locking-free shear deformable beam finite elements,” *Comput Methods Appl Mech Eng*, vol. 149, pp. 113–132, 1997.
- [37] V. Birman and L. W. Byrd, “Modeling and analysis of functionally graded materials and structures,” *Applied Mechanics Reviews*, vol. 60, no. 1–6. pp. 195–216, 2007. doi: 10.1115/1.2777164.
- [38] F. A. Hashim, K. Hussain, E. H. Houssein, M. S. Mabrouk, and W. Al-Atabany, “Archimedes optimization algorithm: a new metaheuristic algorithm for solving optimization problems,” *Applied Intelligence*, vol. 51, no. 3, pp. 1531–1551, Mar. 2021, doi: 10.1007/s10489-020-01893-z.
- [39] D. Połap and M. Woźniak, “Red fox optimization algorithm,” *Expert Syst Appl*, vol. 166, Mar. 2021, doi: 10.1016/j.eswa.2020.114107.
- [40] M. S. Braik, “Chameleon Swarm Algorithm: A bio-inspired optimizer for solving engineering design problems,” *Expert Syst Appl*, vol. 174, Jul. 2021, doi: 10.1016/j.eswa.2021.114685.
- [41] L. F. Martha, *Ftool - Um Programa Gráfico-Interativo para Ensino de Comportamento de Estruturas*. 2015.
- [42] F. J. R. Mascarenhas, A. L. Christoforo, and R. C. Carvalho, “A utilização de um software livre para determinação dos esforços internos de cargas móveis em vigas de pontes de concreto,” *HOLOS*, vol. 3, pp. 1–18, May 2020, doi: 10.15628/holos.2020.9466.
- [43] P. M. Kurowski, “Engineering Analysis with Solidworks Simulation 2015”.
- [44] J. E. Akin, “Finite Element Analysis Concepts via SolidWorks,” 2009.
- [45] V. H. Nam, P. Van Vinh, N. Van Chinh, D. Van Thom, and T. T. Hong, “A new beam model for simulation of the mechanical behaviour of variable thickness functionally graded material beams based on modified first order shear deformation theory,” *Materials*, vol. 12, no. 3, Jan. 2019, doi: 10.3390/ma12030404.
- [46] R. Melo Barros and E. Parente Junior, “Isogeometric Analysis of Functionally Graded Beams using different Micromechanical Models,” in *XLI Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, 2020.
- [47] A. S. Desuky, S. Hussain, S. Kausar, M. A. Islam, and L. M. E. Bakrawy, “EAOA: An Enhanced Archimedes Optimization Algorithm for Feature Selection in Classification,” *IEEE Access*, vol. 9, pp. 120795–120814, 2021, doi: 10.1109/ACCESS.2021.3108533.
- [48] J. Halkyard, “Chapter 7 - Floating Offshore Platform Design,” in *Handbook of Offshore Engineering*, 2005.

# Apêndice A. Resultados dos Estudos Paramétricos das Estruturas com Secção Transversal Retangular

## Treliça 2

Após a análise do comportamento da estrutura quando a secção transversal é quadrada, foram consideradas as duas secções retangulares apresentadas na figura 5.1.7. Para ambos os casos, estudou-se o comportamento da estrutura para o caso em que a lei de potência descreve a distribuição do material metálico e para o caso em que a lei de potência traduz a distribuição do material cerâmico, e os resultados são apresentados nas tabelas A.1 e A.3 para os deslocamentos nodais, e tabelas A.2 e A.4 para as primeiras 5 frequências naturais da estrutura, respetivamente.

Tabela A. 1 - Deslocamentos Nodais do Nó de Aplicação da Carga da Treliça 2 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal 40 mm x 10 mm

ey	Deslocamento x [μm]	Deslocamento y [μm]	Rotação [rad]
<b>0</b>	62,4459	-239,0453	1,5319E-09
<b>0,1</b>	21,8576	-175,1995	5,7429E-11
<b>0,2</b>	21,8580	-161,4068	1,8600E-10
<b>0,5</b>	21,8581	-138,8155	6,7004E-11
<b>1</b>	21,8576	-121,6460	4,9697E-11
<b>2</b>	21,8573	-107,3370	-1,0581E-11
<b>5</b>	21,8570	-94,6642	-6,5648E-11
<b>10</b>	21,8567	-89,2183	-9,1866E-11
∞	21,8561	-83,6659	-4,8100E-10

Tabela A. 2 - Primeiras Cinco Frequências da Treliça 2 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal 40 mm x 10 mm

ey	1ª Frequência [rad/s]	2ª Frequência [rad/s]	3ª Frequência [rad/s]	4ª Frequência [rad/s]	5ª Frequência [rad/s]
<b>0</b>	31,1911	49,3054	102,9476	118,5688	217,2588
<b>0,1</b>	38,4789	44,2823	118,8120	119,3132	245,2832
<b>0,2</b>	38,1817	45,3394	119,4117	121,0547	248,4015
<b>0,5</b>	37,4428	47,7779	118,8145	125,9929	251,8125
<b>1</b>	36,8272	50,4873	118,1092	130,9134	252,7922
<b>2</b>	36,4911	53,4751	117,9885	135,3964	252,7601
<b>5</b>	36,4108	56,3025	118,9600	137,9725	252,6920
<b>10</b>	36,3371	57,1138	119,5560	137,8598	252,7551
∞	36,2741	57,3769	119,8043	137,9808	252,8416

Tabela A. 3 - Deslocamentos Nodais do Nó de Aplicação da Carga da Trelça 2 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal 40 mm x 10 mm

ey	Deslocamento x [μm]	Deslocamento y [μm]	Rotação [rad]
0	21,8561	-83,6659	-4,8100E-10
0,1	62,4180	-128,3329	-3,0323E-10
0,2	62,4217	-132,5669	1,3468E-09
0,5	62,4299	-145,0545	-2,0803E-10
1	62,4375	-162,2711	-3,2743E-10
2	62,4427	-183,9794	-2,6061E-10
5	62,4438	-209,7571	-4,1712E-10
10	62,4443	-222,6442	-4,3891E-10
∞	62,4459	-239,0453	1,5319E-09

Tabela A. 4 - Primeiras Cinco Frequências da Trelça 2 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal 40 mm x 10 mm

ey	1ª Frequência [rad/s]	2ª Frequência [rad/s]	3ª Frequência [rad/s]	4ª Frequência [rad/s]	5ª Frequência [rad/s]
0	36,2741	57,3769	119,8043	137,9808	252,8416
0,1	30,9780	61,9556	105,1822	139,5508	223,7734
0,2	31,1645	61,5068	105,8134	138,9116	222,5832
0,5	31,4986	60,1746	106,9963	136,8350	219,8634
1	31,6736	58,2954	107,7795	133,3445	218,1410
2	31,5643	55,4565	107,3817	127,5824	217,7692
5	31,1418	51,3638	104,7747	120,3775	217,6108
10	31,1091	49,7768	103,3958	118,7746	217,3865
∞	31,1911	49,3054	102,9476	118,5688	217,2588

As tabelas A.5 e A.6 apresentam, respetivamente, os valores dos deslocamentos nodais do nó livre e das primeiras 5 frequências naturais da estrutura para uma situação em que a fração volúmica traduz a distribuição do material metálico no caso de uma secção C, e as tabelas A.7 e A.8, os deslocamentos nodais e frequências naturais no caso em que a fração volúmica descreve a distribuição de material cerâmico.

Tabela A. 5 - Deslocamentos Nodais do Nó de Aplicação da Carga da Trelça 2 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal 10 mm x 40 mm

ey	Deslocamento x [μm]	Deslocamento y [μm]	Rotação [rad]
0	62,4966	-239,2622	1,9367E-08
0,1	21,8739	-175,3718	9,0682E-10
0,2	21,8739	-161,5687	2,6745E-09
0,5	21,8739	-138,9644	1,5888E-09
1	21,8739	-121,7869	9,2903E-10
2	21,8739	-107,4690	7,2468E-10
5	21,8739	-94,7778	1,2148E-10
10	21,8738	-89,3155	-1,5533E-09
∞	21,8738	-83,7418	-9,0314E-09

Tabela A. 6 - Primeiras Cinco Frequências da Trelça 2 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal 10 mm x 40 mm

ey	1ª Frequência [rad/s]	2ª Frequência [rad/s]	3ª Frequência [rad/s]	4ª Frequência [rad/s]	5ª Frequência [rad/s]
0	7,8320	12,3859	25,7988	29,7773	54,4156
0,1	9,6230	11,1305	29,8169	29,8805	61,4298
0,2	9,5588	11,3970	29,9066	30,3815	62,2130
0,5	9,3719	12,0094	29,7588	31,6119	63,0692
1	9,2168	12,6896	29,5851	32,8404	63,3159
2	9,1261	13,4348	29,5560	33,9741	63,3086
5	9,1010	14,1467	29,8059	34,6279	63,2924
10	9,0941	14,3508	29,9573	34,6087	63,3084
∞	9,0280	14,4081	30,0133	34,6281	63,3297

Tabela A. 7 - Deslocamentos Nodais do Nó de Aplicação da Carga da Trelça 2 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal 10 mm x 40 mm

ey	Deslocamento x [μm]	Deslocamento y [μm]	Rotação [rad]
0	21,8738	-83,7418	-9,0314E-09
0,1	21,8739	-175,3718	9,0682E-10
0,2	21,8739	-161,5687	2,6745E-09
0,5	21,8739	-138,9644	1,5888E-09
1	21,8739	-121,7869	9,2903E-10
2	21,8739	-107,4690	7,2468E-10
5	21,8739	-94,7778	1,2148E-10
10	21,8738	-89,3155	-1,5533E-09
∞	62,4966	-239,2622	1,9367E-08

Tabela A. 8 - Primeiras Cinco Frequências da Trelça 2 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal 10 mm x 40 mm

ey	1ª Frequência [rad/s]	2ª Frequência [rad/s]	3ª Frequência [rad/s]	4ª Frequência [rad/s]	5ª Frequência [rad/s]
0	9,0280	14,4081	30,0133	34,6281	63,3297
0,1	7,7492	15,5644	26,3880	35,0559	56,0610
0,2	7,7802	15,4524	26,5482	34,8935	55,7619
0,5	7,8639	15,1174	26,8443	34,3837	55,0786
1	7,9230	14,6365	27,0421	33,5112	54,6413
2	7,8874	13,9231	26,9277	32,0662	54,5463
5	7,7758	12,8952	26,2572	30,2355	54,5044
10	7,7884	12,4978	25,9076	29,8318	54,4477
∞	7,8320	12,3859	25,7988	29,7773	54,4156

### Treliça 3

Para o caso da estrutura com secção retangular B, estudou-se o comportamento da estrutura para um FGM cuja lei de potência descreve a distribuição do material metálico e para um FGM cuja lei de potência traduz a distribuição do material cerâmico, e os resultados são apresentados nas tabelas A.9 e A.11 para os deslocamentos nodais, e tabelas A.10 e A.12 para as primeiras 5 frequências naturais da estrutura, respetivamente.

Tabela A. 9 - Deslocamentos Nodais do Nó de Aplicação da Carga da Treliça 3 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal 40 mm x 10 mm

ey	Deslocamento x [μm]	Deslocamento y [μm]	Rotação [rad]
0	106,9386	-525,1115	2,8699E-11
0,1	37,4255	-338,1858	3,2787E-12
0,2	37,4275	-323,7172	9,4110E-13
0,5	37,4317	-300,0270	-2,4683E-12
1	37,4361	-281,3943	3,5995E-12
2	37,4405	-265,3562	1,2177E-11
5	37,4441	-251,7299	1,7435E-12
10	37,4451	-246,6690	6,6956E-12
∞	37,4286	-183,7892	2,1398E-13

Tabela A. 10 - Primeiras Cinco Frequências da Treliça 3 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal 40 mm x 10 mm

ey	1ª Frequência [rad/s]	2ª Frequência [rad/s]	3ª Frequência [rad/s]	4ª Frequência [rad/s]	5ª Frequência [rad/s]
0	345,5470	458,2233	460,7814	491,6352	506,1476
0,1	383,4603	503,9657	508,7121	534,1311	557,6040
0,2	384,1009	507,2106	511,2291	540,2020	562,1463
0,5	382,3155	506,5956	510,0763	543,6896	561,3532
1	378,4553	501,8252	505,5654	540,3471	553,9788
2	373,7380	497,1895	501,6221	534,8485	545,7259
5	369,0092	496,7060	502,3537	532,0784	542,1230
10	367,2309	500,0488	506,7621	533,5894	544,7834
∞	402,1413	533,2717	536,2488	572,1559	589,0451

Tabela A. 11 - Deslocamentos Nodais do Nó de Aplicação da Carga da Treliça 3 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal 40 mm x 10 mm

ey	Deslocamento x [μm]	Deslocamento y [μm]	Rotação [rad]
0	37,4286	-183,7892	2,1398E-13
0,1	106,8605	-349,9544	-2,5273E-12
0,2	106,8593	-354,2683	-6,2258E-12
0,5	106,8537	-366,9029	-1,5932E-12
1	106,8437	-384,9537	1,3522E-11
2	106,8312	-408,2003	9,1596E-12
5	106,8244	-433,3902	-2,3117E-12
10	106,8278	-445,4068	4,9738E-12
∞	106,9386	-525,1115	2,8699E-11

Tabela A. 12 - Primeiras Cinco Frequências da Treliça 3 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal 40 mm x 10 mm

<b>ey</b>	<b>1ª Frequência [rad/s]</b>	<b>2ª Frequência [rad/s]</b>	<b>3ª Frequência [rad/s]</b>	<b>4ª Frequência [rad/s]</b>	<b>5ª Frequência [rad/s]</b>
<b>0</b>	402,1413	533,2717	536,2488	572,1559	589,0451
<b>0,1</b>	305,5164	493,1786	495,7858	533,2428	553,2500
<b>0,2</b>	308,1236	494,1025	496,4556	532,1351	549,8986
<b>0,5</b>	313,6701	495,7387	497,9866	530,0657	544,9290
<b>1</b>	319,0796	497,5415	500,4037	530,9567	545,5987
<b>2</b>	324,7259	500,9608	504,6555	536,9173	552,7840
<b>5</b>	330,9042	504,2391	508,8946	545,2748	562,8440
<b>10</b>	333,8024	501,8117	506,6890	545,6463	562,9641
<b>∞</b>	345,5470	458,2233	460,7814	491,6352	506,1476

No caso de uma secção retangular C, são apresentados os valores dos deslocamentos nodais do nó central superior e das primeiras 5 frequências naturais da estrutura para uma situação em que a regra de misturas traduz a distribuição do material metálico nas tabelas A.13 e A.14, respetivamente, e posteriormente, uma situação em que a regra de misturas é relativa à distribuição do material cerâmico em função da coordenada vertical nas tabelas A.15 e A.16, respetivamente.

Tabela A. 13 - Deslocamentos Nodais do Nó de Aplicação de Carga da Treliça 3 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal 10 mm x 40 mm

<b>ey</b>	<b>Deslocamento x [µm]</b>	<b>Deslocamento y [µm]</b>	<b>Rotação [rad]</b>
<b>0</b>	107,1300	-526,4338	-3,6640E-11
<b>0,1</b>	37,4953	-339,1305	-5,4858E-11
<b>0,2</b>	37,4954	-324,5682	8,5928E-11
<b>0,5</b>	37,4957	-300,7215	4,8742E-11
<b>1</b>	37,4960	-281,9640	-3,0417E-11
<b>2</b>	37,4963	-265,8235	4,3511E-11
<b>5</b>	37,4965	-252,1191	2,1181E-10
<b>10</b>	37,4966	-247,0325	1,0243E-10
<b>∞</b>	37,4955	-184,2520	-7,0342E-11

Tabela A. 14 - Primeiras Cinco Frequências da Treliça 3 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal 10 mm x 40 mm

ey	1ª Frequência [rad/s]	2ª Frequência [rad/s]	3ª Frequência [rad/s]	4ª Frequência [rad/s]	5ª Frequência [rad/s]
0	115,5103	115,9254	123,9836	132,8785	133,7963
0,1	126,8724	128,0396	134,6412	144,6730	146,2659
0,2	127,7664	128,6651	136,1610	146,0895	147,7530
0,5	127,7965	128,3361	137,0332	146,3281	147,9348
1	126,8020	127,1522	136,2347	144,7327	146,1292
2	125,8770	126,1218	134,9808	142,7436	143,9129
5	126,1056	126,2741	134,5700	141,7720	142,7333
10	127,2390	127,3676	135,2005	142,3156	143,1486
∞	134,4304	134,9134	144,2914	154,6430	155,7112

Tabela A. 15 - Deslocamentos Nodais do Nó de Aplicação da Carga da Treliça 3 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal 10 mm x 40 mm

ey	Deslocamento x [μm]	Deslocamento y [μm]	Rotação [rad]
0	37,4955	-184,2520	-7,0342E-11
0,1	107,1251	-351,0178	2,5757E-11
0,2	107,1250	-355,3691	6,8493E-11
0,5	107,1247	-368,1246	1,8677E-10
1	107,1240	-386,3710	-1,7809E-10
2	107,1232	-409,8972	-3,1872E-10
5	107,1227	-435,3827	-4,4527E-11
10	107,1230	-447,4998	6,3805E-11
∞	107,1300	-526,4338	-3,6640E-11

Tabela A. 16 - Primeiras Cinco Frequências da Treliça 3 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal 10 mm x 40 mm

ey	1ª Frequência [rad/s]	2ª Frequência [rad/s]	3ª Frequência [rad/s]	4ª Frequência [rad/s]	5ª Frequência [rad/s]
0	134,4304	134,9134	144,2914	154,6430	155,7112
0,1	124,4947	124,7382	137,2417	144,8472	145,8320
0,2	124,6578	124,9270	136,3282	144,4870	145,3880
0,5	124,9519	125,3361	134,7481	144,1098	144,8696
1	125,3542	125,9270	134,4391	144,8778	145,6184
2	126,1802	126,9630	135,7223	147,1841	148,0480
5	126,9204	127,9701	137,7466	149,9658	151,1367
10	126,2483	127,3902	137,8289	149,5739	151,0039
∞	115,5103	115,9254	123,9836	132,8785	133,7963

## Pórtico 1

Para o caso da estrutura com secção retangular B, estudou-se o comportamento da estrutura para um FGM cuja lei de potência descreve a distribuição do material metálico e para um FGM cuja lei de potência traduz a distribuição do material cerâmico, e os resultados são apresentados nas tabelas A.17 e A.19 para os deslocamentos nodais, e tabelas A.18 e A.20 para as primeiras 5 frequências naturais da estrutura, respetivamente.

Tabela A. 17 - Deslocamentos Nodais do Nó Superior Esquerdo e Direito, respetivamente, do Pórtico 1 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal

ey	Desl. x [mm]	Desl. y [ $\mu$ m]	Rotação [rad]	Desl. x [mm]	Desl. y [ $\mu$ m]	Rotação [rad]
0	5,5117	-32,4206	6,6243E-03	5,5096	-39,0079	-4,5424E-03
0,1	4,6402	-28,3657	6,3469E-03	4,6381	-33,6588	-4,4219E-03
0,2	4,1826	-25,9258	6,1667E-03	4,1805	-30,5217	-4,3311E-03
0,5	3,5370	-21,8708	5,8335E-03	3,5348	-25,4444	-4,1320E-03
1	3,1534	-18,7322	5,5245E-03	3,1511	-21,6434	-3,9012E-03
2	2,9227	-16,0690	5,1791E-03	2,9203	-18,5274	-3,5801E-03
5	2,7577	-13,6625	4,6848E-03	2,7553	-15,8256	-3,0349E-03
10	2,6571	-12,6066	4,3408E-03	2,6546	-14,6826	-2,6300E-03
$\infty$	1,9293	-11,3471	2,3186E-03	1,9286	-13,6529	-1,5898E-03

Tabela A. 18 - Primeiras Cinco Frequências do Pórtico 1 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal 40 mm x 10 mm

ey	1ª Frequências [rad/s]	2ª Frequências [rad/s]	3ª Frequências [rad/s]	4ª Frequências [rad/s]	5ª Frequências [rad/s]
0	59,5917	260,9689	349,3872	699,3460	906,5408
0,1	65,1932	275,1886	367,3686	721,9981	943,4610
0,2	68,6072	282,2915	376,5716	733,8833	962,8993
0,5	73,8295	289,6618	387,3004	750,0143	987,6125
1	76,4830	289,7614	390,8001	760,4726	1000,6428
2	76,6050	286,0630	392,0215	771,3203	1011,4886
5	74,5983	282,5000	394,7655	789,0918	1026,9117
10	73,4060	281,5153	396,0485	802,6572	1034,9122
$\infty$	69,3476	303,7105	406,6098	813,8855	1055,0148

No caso de uma secção retangular C, são apresentados os valores dos deslocamentos nodais dos nós superiores esquerdo e direito, respetivamente, e das primeiras 5 frequências naturais da estrutura para uma situação em que a regra de misturas traduz a distribuição do material metálico nas tabelas A.21 e A.22, respetivamente, e posteriormente, uma situação em que a regra de misturas é relativa à distribuição do material cerâmico em função da coordenada vertical nas tabelas A.23 e A.24, respetivamente.

Tabela A. 19 - Deslocamentos Nodais do Nó Superior Esquerdo e Direito, respetivamente, do Pórtico 1 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal

ey	Deslocamento x [mm]	Deslocamento y [µm]	Rotação [rad]	Deslocamento x [mm]	Deslocamento y [µm]	Rotação [rad]
0	1,9293	-11,3471	2,3186E-03	1,9286	-13,6529	-1,5898E-03
0,1	2,0888	-12,0564	2,3625E-03	2,0882	-14,6049	-1,6069E-03
0,2	2,2414	-12,7853	2,4030E-03	2,2407	-15,5845	-1,6227E-03
0,5	2,6228	-14,9393	2,5015E-03	2,6222	-18,4730	-1,6640E-03
1	2,9981	-17,9399	2,6076E-03	2,9975	-22,4357	-1,7244E-03
2	3,3103	-21,7983	2,7302E-03	3,3097	-27,3516	-1,8320E-03
5	3,6913	-26,5425	2,9215E-03	3,6907	-33,0295	-2,0535E-03
10	4,0279	-29,0053	3,0583E-03	4,0273	-35,7862	-2,2230E-03
∞	5,5117	-32,4206	6,6243E-03	5,5096	-39,0079	-4,5424E-03

Tabela A. 20 - Primeiras Cinco Frequências do Pórtico 1 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal 40 mm x 10 mm

ey	1ª Frequência [rad/s]	2ª Frequência [rad/s]	3ª Frequência [rad/s]	4ª Frequência [rad/s]	5ª Frequência [rad/s]
0	69,3476	303,7105	406,6098	813,8855	1055,0148
0,1	66,5520	297,2027	398,5583	804,2958	1040,6508
0,2	64,2109	292,1138	392,2326	796,6029	1029,4406
0,5	59,5053	283,3726	380,9967	781,6642	1008,3472
1	56,2669	280,2310	375,6559	770,3785	992,9398
2	54,8035	283,4712	376,4066	759,9653	980,1454
5	54,1381	290,9323	377,7131	739,5970	964,4950
10	53,4837	294,2968	373,9572	724,7393	958,9667
∞	59,5917	260,9689	349,3872	699,3460	906,5408

Tabela A. 21 - Deslocamentos Nodais do Nó Superior Esquerdo e Direito, respetivamente, do Pórtico 1 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal

ey	Deslocamento x [mm]	Deslocamento y [µm]	Rotação [rad]	Deslocamento x [mm]	Deslocamento y [µm]	Rotação [rad]
0	87,8710	-32,4202	1,0577E-01	87,8690	-39,0085	-7,2807E-02
0,1	73,9765	-28,3653	1,0136E-01	73,9744	-33,6595	-7,0853E-02
0,2	66,6892	-25,9252	9,8489E-02	66,6871	-30,5225	-6,9383E-02
0,5	56,4015	-21,8701	9,3179E-02	56,3993	-25,4452	-6,6178E-02
1	50,2940	-18,7314	8,8253E-02	50,2917	-21,6443	-6,2473E-02
2	46,6236	-16,0680	8,2740E-02	46,6213	-18,5284	-5,7328E-02
5	43,9969	-13,6614	7,4839E-02	43,9946	-15,8267	-4,8602E-02
10	42,3824	-12,6055	6,9334E-02	42,3800	-14,6837	-4,2124E-02
∞	30,8119	-11,3449	3,7031E-02	30,8112	-13,6551	-2,5472E-02

Tabela A. 22 - Primeiras Cinco Frequências do Pórtico 1 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal 10 mm x 40 mm

ey	1ª Frequência [rad/s]	2ª Frequência [rad/s]	3ª Frequência [rad/s]	4ª Frequência [rad/s]	5ª Frequência [rad/s]
0	14,9203	65,3702	87,6099	175,9914	227,9294
0,1	16,3229	68,9346	92,1143	181,6969	237,2047
0,2	17,1762	70,7141	94,4176	184,6775	242,0854
0,5	18,4822	72,5609	97,0993	188,6937	248,2875
1	19,1443	<b>72,5867</b>	97,9703	191,2746	251,5607
2	<b>19,1728</b>	71,6628	98,2722	193,9596	254,2936
5	18,6691	70,7736	98,9561	198,3985	258,1674
10	18,3726	70,5263	99,2751	201,8023	260,1565
∞	17,3481	76,0763	<b>101,9575</b>	<b>204,8154</b>	<b>265,2595</b>

Tabela A. 23 - Deslocamentos Nodais do Nó Superior Esquerdo e Direito, respetivamente, do Pórtico 1 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal

ey	Deslocamento x [mm]	Deslocamento y [µm]	Rotação [rad]	Deslocamento x [mm]	Deslocamento y [µm]	Rotação [rad]
0	30,8119	-11,3449	3,7031E-02	30,8112	-13,6551	-2,5472E-02
0,1	33,3578	-12,0540	3,7730E-02	33,3572	-14,6073	-2,5751E-02
0,2	35,7918	-12,7828	3,8373E-02	35,7911	-15,5871	-2,6007E-02
0,5	41,9000	-14,9353	3,9940E-02	41,8993	-18,4771	-2,6678E-02
1	47,8736	-17,9352	4,1620E-02	47,8729	-22,4405	-2,7659E-02
2	52,8577	-21,7921	4,3566E-02	52,8571	-27,3579	-2,9395E-02
5	58,9339	-26,5357	4,6611E-02	58,9333	-33,0365	-3,2954E-02
10	64,3536	-28,9967	4,8802E-02	64,3530	-35,7949	-3,5669E-02
∞	87,8710	-32,4202	1,0577E-01	87,8690	-39,0085	-7,2807E-02

Tabela A. 24 - Primeiras Cinco Frequências do Pórtico 1 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal 10 mm x 40 mm

ey	1ª Frequência [rad/s]	2ª Frequência [rad/s]	3ª Frequência [rad/s]	4ª Frequência [rad/s]	5ª Frequência [rad/s]
0	17,3481	76,0763	101,9575	204,8154	265,2595
0,1	16,6493	74,4450	99,9408	202,4084	261,6521
0,2	16,0644	73,1705	98,3589	200,4860	258,8418
0,5	14,8840	70,9824	95,5547	196,7884	253,5703
1	14,0772	70,1985	94,2333	194,0488	249,7251
2	13,7111	71,0103	94,4378	191,5522	246,5173
5	13,5454	72,8784	94,7763	186,5721	242,6098
10	13,3773	73,7262	93,8347	182,9386	241,2457
∞	14,9203	65,3702	87,6099	175,9914	227,9294

## Pórtico 2

Para o caso da estrutura com secção retangular B, estudou-se o comportamento da estrutura para um FGM cuja lei de potência descreve a distribuição do material metálico e para um FGM cuja lei de potência traduz a distribuição do material cerâmico, e os resultados são apresentados nas tabelas A.25 e A.27 para os deslocamentos nodais, e tabelas A.26 e A.28 para as primeiras 5 frequências naturais da estrutura, respetivamente.

Tabela A. 25 - Deslocamentos Nodais do Nó Superior Esquerdo e Direito, respetivamente, do Pórtico 2 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal

ey	Desl. x [mm]	Desl. o y [µm]	Rotação [rad]	Desl. x [mm]	Desl. y [µm]	Rotação [rad]
<b>0</b>	2,3539	-32,3078	4,6147E-03	2,3505	-39,1208	-3,3780E-03
<b>0,1</b>	2,0294	-28,2599	4,5086E-03	2,0259	-33,7460	-3,3246E-03
<b>0,2</b>	1,8453	-25,8288	4,4197E-03	1,8417	-30,6045	-3,2734E-03
<b>0,5</b>	1,5584	-21,7855	4,2084E-03	1,5547	-25,5270	-3,1363E-03
<b>1</b>	1,3492	-18,6362	3,9553E-03	1,3454	-21,7148	-2,9497E-03
<b>2</b>	1,1827	-15,9290	3,6271E-03	1,1787	-18,5651	-2,6792E-03
<b>5</b>	1,0638	-13,4430	3,1569E-03	1,0598	-15,8032	-2,2384E-03
<b>10</b>	1,0361	-12,3864	2,8478E-03	1,0320	-14,6691	-1,9135E-03
$\infty$	0,8239	-11,3077	1,6152E-03	0,8227	-13,6923	-1,1823E-03

No caso de uma secção retangular C, são apresentados os valores dos deslocamentos nodais e das primeiras 5 frequências naturais da estrutura para uma situação em que a regra de misturas traduz a distribuição do material metálico nas tabelas A.29 e A.30, respetivamente, e posteriormente, uma situação em que a regra de misturas é relativa à distribuição do material cerâmico em função da coordenada vertical nas tabelas A.31 e A.32, respetivamente.

Tabela A. 26 - Primeiras Cinco Frequências do Pórtico 2 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal 40 mm x 10 mm

ey	1ª Frequência [rad/s]	2ª Frequência [rad/s]	3ª Frequência [rad/s]	4ª Frequência [rad/s]	5ª Frequência [rad/s]
<b>0</b>	87,7476	288,2778	634,0203	894,0744	994,5140
<b>0,1</b>	95,5717	300,8325	647,2703	917,0580	1030,1729
<b>0,2</b>	100,4314	307,8801	656,1386	930,8070	1048,9790
<b>0,5</b>	108,3878	317,4332	672,8084	952,9258	1075,9583
<b>1</b>	113,5449	322,3051	687,5406	968,8700	1093,8435
<b>2</b>	<b>115,9457</b>	325,9666	701,2903	983,2645	1109,4981
<b>5</b>	114,7775	330,6348	715,0337	1003,1516	1126,3992
<b>10</b>	112,5545	331,8457	723,0064	1019,0054	1133,4756
$\infty$	102,1219	335,4931	737,8609	1040,5067	1157,3965

Tabela A. 27 - Deslocamentos Nodais do Nó Superior Esquerdo e Direito, respetivamente, do Pórtico 2 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal

ey	Desl. x [mm]	Desl. o y [µm]	Rotação [rad]	Desl. x [mm]	Desl. y [µm]	Rotação [rad]
0	0,8239	-11,3077	1,6152E-03	0,8227	-13,6923	-1,1823E-03
0,1	0,8794	-12,0121	1,6294E-03	0,8783	-14,6431	-1,1887E-03
0,2	0,9323	-12,7329	1,6431E-03	0,9311	-15,6157	-1,1949E-03
0,5	1,0718	-14,8667	1,6811E-03	1,0706	-18,4841	-1,2130E-03
1	1,2473	-17,8796	1,7362E-03	1,2462	-22,4714	-1,2423E-03
2	1,4700	-21,7423	1,8242E-03	1,4689	-27,3928	-1,2983E-03
5	1,7285	-26,4933	1,9876E-03	1,7275	-33,0666	-1,4368E-03
10	1,8208	-28,8356	2,1331E-03	1,8198	-35,6998	-1,5926E-03
∞	2,3539	-32,3078	4,6147E-03	2,3505	-39,1208	-3,3780E-03

Tabela A. 28 - Primeiras Cinco Frequências do Pórtico 2 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal 40 mm x 10 mm

ey	1ª Frequência [rad/s]	2ª Frequência [rad/s]	3ª Frequência [rad/s]	4ª Frequência [rad/s]	5ª Frequência [rad/s]
0	102,1219	335,4931	737,8609	1040,5067	1157,3965
0,1	98,2246	330,0959	732,6331	1031,7630	1142,7103
0,2	94,8999	325,8031	727,9861	1024,2082	1130,7325
0,5	87,9575	317,9810	717,1979	1007,6544	1107,6802
1	82,4315	313,5732	705,7517	991,3092	1090,9644
2	78,3279	312,0367	691,6897	969,2520	1073,6053
5	75,7761	308,9719	673,1575	931,5718	1049,2523
10	76,0310	303,3357	665,4522	912,6185	1045,3163
∞	87,7476	288,2778	634,0203	894,0744	994,5140

Tabela A. 29 - Deslocamentos Nodais do Nó Superior Esquerdo e Direito, respetivamente, do Pórtico 2 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal

ey	Desl. x [mm]	Desl. o y [µm]	Rotação [rad]	Desl. x [mm]	Desl. y [µm]	Rotação [rad]
0	37,3512	-32,3060	7,3534E-02	37,3477	-39,1226	-5,4038E-02
0,1	32,2094	-28,2582	7,1859E-02	32,2058	-33,7477	-5,3160E-02
0,2	29,2913	-25,8273	7,0449E-02	29,2877	-30,6060	-5,2330E-02
0,5	24,7396	-21,7841	6,7089E-02	24,7359	-25,5284	-5,0119E-02
1	21,4161	-18,6350	6,3057E-02	21,4123	-21,7160	-4,7127E-02
2	18,7682	-15,9280	5,7824E-02	18,7642	-18,5661	-4,2796E-02
5	16,8778	-13,4420	5,0321E-02	16,8738	-15,8041	-3,5753E-02
10	16,4371	-12,3854	4,5386E-02	16,4330	-14,6701	-3,0563E-02
∞	13,0781	-11,3066	2,5738E-02	13,0769	-13,6934	-1,8912E-02

Tabela A. 30 - Primeiras Cinco Frequências do Pórtico 2 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal 10 mm x 40 mm

ey	1ª Frequência [rad/s]	2ª Frequência [rad/s]	3ª Frequência [rad/s]	4ª Frequência [rad/s]	5ª Frequência [rad/s]
0	22,0076	72,2873	159,2968	227,6064	250,2284
0,1	23,9705	75,4275	162,6516	233,1415	259,1894
0,2	25,1849	77,1877	164,8872	236,4424	263,9159
0,5	27,1796	79,5760	169,0716	241,7628	270,6990
1	28,4684	80,7919	172,7538	245,6421	275,2026
2	29,0744	81,7092	176,1867	249,2505	279,1523
5	28,7845	82,8762	179,6360	254,3775	283,4073
10	28,2272	83,1779	181,6548	258,4739	285,1725
∞	25,6177	84,1287	185,3855	264,8833	291,2106

Tabela A. 31 - Deslocamentos Nodais do Nó Superior Esquerdo e Direito, respetivamente, do Pórtico 2 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal

ey	Desl. x [mm]	Desl. o y [µm]	Rotação [rad]	Desl. x [mm]	Desl. y [µm]	Rotação [rad]
0	13,0781	-11,3066	2,5738E-02	13,0769	-13,6934	-1,8912E-02
0,1	13,9572	-12,0110	2,5962E-02	13,9560	-14,6442	-1,9019E-02
0,2	14,7943	-12,7316	2,6177E-02	14,7932	-15,6170	-1,9122E-02
0,5	17,0018	-14,8650	2,6773E-02	17,0006	-18,4858	-1,9422E-02
1	19,7757	-17,8777	2,7637E-02	19,7746	-22,4733	-1,9905E-02
2	23,3074	-21,7396	2,9024E-02	23,3063	-27,3954	-2,0813E-02
5	27,4160	-26,4902	3,1613E-02	27,4150	-33,0697	-2,3034E-02
10	28,8854	-28,8322	3,3933E-02	28,8844	-35,7031	-2,5526E-02
∞	37,3512	-32,3060	7,3534E-02	37,3477	-39,1226	-5,4038E-02

Tabela A. 32 - Primeiras Cinco Frequências do Pórtico 2 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal 10 mm x 40 mm

ey	1ª Frequência [rad/s]	2ª Frequência [rad/s]	3ª Frequência [rad/s]	4ª Frequência [rad/s]	5ª Frequência [rad/s]
0	25,6177	84,1287	185,3855	264,8833	291,2106
0,1	24,6430	82,7813	184,0630	262,8410	287,5210
0,2	23,8102	81,7093	182,8901	261,1054	284,5152
0,5	22,0743	79,7675	180,1799	257,4313	278,7417
1	20,6897	78,6808	177,3280	253,9070	274,5537
2	19,6639	78,3094	173,8472	248,7075	270,1856
5	19,0258	77,5444	169,2826	238,9291	264,0736
10	19,0861	76,1270	167,4224	233,9306	263,1066
∞	22,0076	72,2873	159,2968	227,6064	250,2284

### Pórtico 3

Para o caso da estrutura com secção retangular B, estudou-se o comportamento da estrutura para um FGM cuja lei de potência descreve a distribuição do material metálico e para um FGM cuja lei de potência traduz a distribuição do material cerâmico, e os resultados são apresentados nas tabelas A.33 e A.35 para os deslocamentos nodais, e tabelas A.34 e A.36 para as primeiras 5 frequências naturais da estrutura, respetivamente.

Tabela A. 33 - Deslocamentos Nodais do Nó Superior Esquerdo e Direito, respetivamente, do Pórtico 3 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal

ey	Desl. x [mm]	Desl. y [ $\mu$ m]	Rotação [rad]	Desl. x [mm]	Desl. y [ $\mu$ m]	Rotação [rad]
0	14,9979	-23,5203	5,0583E-04	13,7680	-27,1153	-4,9482E-04
0,1	12,8850	-19,7596	4,9872E-04	11,6428	-22,5945	-4,8928E-04
0,2	11,6750	-17,6425	4,9283E-04	10,4225	-20,0726	-4,8424E-04
0,5	9,7828	-14,4020	4,7866E-04	8,5054	-16,2621	-4,7131E-04
1	8,4414	-12,1741	4,6102E-04	7,1336	-13,6985	-4,5447E-04
2	7,4169	-10,5302	4,3664E-04	6,0712	-11,8655	-4,3064E-04
5	6,6163	-9,2937	3,9754E-04	5,2239	-10,5563	-3,9198E-04
10	6,3200	-8,8431	3,6804E-04	4,8997	-10,1006	-3,6263E-04
$\infty$	5,2493	-8,2321	1,7704E-04	4,8188	-9,4904	-1,7319E-04

Tabela A. 34 - Primeiras Cinco Frequências do Pórtico 3 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal 40 mm x 10 mm

ey	1ª Frequência [rad/s]	2ª Frequência [rad/s]	3ª Frequência [rad/s]	4ª Frequência [rad/s]	5ª Frequência [rad/s]
0	680,2145	873,4234	896,7445	943,1005	1045,6475
0,1	708,8388	889,8209	938,3996	978,9001	1090,6851
0,2	726,0594	900,2845	955,5243	1003,4340	1102,1282
0,5	753,7265	918,7042	981,9715	1034,1372	1126,1265
1	771,4175	932,1645	999,8735	1049,5661	1147,4342
2	<b>778,0887</b>	<b>939,4822</b>	<b>1011,3041</b>	1061,4982	<b>1161,8919</b>
5	767,6706	937,0228	1015,2366	<b>1066,1279</b>	1158,6481
10	756,8795	935,5065	1009,8829	1063,0525	1150,5820
$\infty$	791,6205	1016,4736	1043,6141	1097,5623	1216,9046

Tabela A. 35 - Deslocamentos Nodais do Nó Superior Esquerdo e Direito, respetivamente, do Pórtico 3 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal

ey	Desl. x [mm]	Desl. y [ $\mu$ m]	Rotação [rad]	Desl. x [mm]	Desl. y [ $\mu$ m]	Rotação [rad]
0	5,2493	-8,2321	1,7704E-04	4,8188	-9,4904	-1,7319E-04
0,1	5,6265	-8,9096	1,7803E-04	5,1978	-10,3087	-1,7389E-04
0,2	6,0128	-9,6027	1,7901E-04	5,5856	-11,1463	-1,7458E-04
0,5	7,1517	-11,6407	1,8183E-04	6,7287	-13,6085	-1,7652E-04
1	8,7273	-14,4321	1,8598E-04	8,3098	-16,9694	-1,7949E-04
2	10,6269	-17,7026	1,9253E-04	10,2158	-20,8539	-1,8470E-04
5	12,5864	-20,8210	2,0484E-04	12,1840	-24,3815	-1,9591E-04
10	13,3267	-21,8897	2,1495E-04	12,9317	-25,4869	-2,0581E-04
$\infty$	14,9979	-23,5203	5,0583E-04	13,7680	-27,1153	-4,9482E-04

Tabela A. 36 - Primeiras Cinco Frequências do Pórtico 3 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal 40 mm x 10 mm

ey	1ª Frequência [rad/s]	2ª Frequência [rad/s]	3ª Frequência [rad/s]	4ª Frequência [rad/s]	5ª Frequência [rad/s]
0	791,6205	1016,4736	1043,6141	1097,5623	1216,9046
0,1	777,3702	1010,5897	1022,2703	1086,9728	1188,4118
0,2	763,7151	1004,8394	1005,4231	1077,9978	1166,5440
0,5	729,0808	973,3181	994,3024	1056,3494	1129,5703
1	693,3106	954,3828	984,7303	1033,1451	1109,3049
2	665,6330	935,8186	975,1327	1009,1762	1087,3750
5	662,4657	906,9122	969,0420	992,8889	1051,7106
10	676,7140	902,4248	971,6635	1001,2337	1045,8242
$\infty$	680,2145	873,4234	896,7445	943,1005	1045,6475

No caso de uma secção retangular C, são apresentados os valores dos deslocamentos nodais dos nós superiores esquerdo e direito, respetivamente, e das primeiras 5 frequências naturais da estrutura para uma situação em que a regra de misturas traduz a distribuição do material metálico nas tabelas A.37 e A.38, respetivamente, e posteriormente, uma situação em que a regra de misturas é relativa à distribuição do material cerâmico em função da coordenada vertical nas tabelas A.39 e A.40, respetivamente.

Tabela A. 37 - Deslocamentos Nodais do Nó Superior Esquerdo e Direito, respetivamente, do Pórtico 3 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal

ey	Desl. x [mm]	Desl. y [µm]	Rotação [rad]	Desl. x [mm]	Desl. y [µm]	Rotação [rad]
0	15,0589	-23,6330	7,6026E-03	13,8264	-27,2059	-7,5917E-03
0,1	12,9409	-19,8299	7,5307E-03	11,6978	-22,6453	-7,5213E-03
0,2	11,7271	-17,6954	7,4646E-03	10,4744	-20,1078	-7,4560E-03
0,5	9,8276	-14,4377	7,2902E-03	8,5504	-16,2831	-7,2828E-03
1	8,4801	-12,2058	7,0542E-03	7,1720	-13,7181	-7,0477E-03
2	7,4502	-10,5655	6,7088E-03	6,1025	-11,8910	-6,7028E-03
5	6,6442	-9,3374	6,1309E-03	5,2473	-10,5922	-6,1254E-03
10	6,3455	-8,8901	5,6834E-03	4,9194	-10,1406	-5,6780E-03
∞	5,2706	-8,2715	2,6609E-03	4,8393	-9,5221	-2,6571E-03

Tabela A. 38 - Primeiras Cinco Frequências do Pórtico 3 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Metálico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal 10 mm x 40 mm

ey	1ª Frequência [rad/s]	2ª Frequência [rad/s]	3ª Frequência [rad/s]	4ª Frequência [rad/s]	5ª Frequência [rad/s]
0	197,4082	220,6084	226,9797	248,3835	263,8803
0,1	201,5361	224,7543	239,6069	254,5000	276,8716
0,2	204,0633	227,3904	245,1973	258,8749	279,6801
0,5	208,4969	232,0252	251,8859	265,5188	285,6098
1	211,7448	235,4212	255,3220	269,6253	290,9013
2	213,4359	237,3014	257,6992	272,7801	294,5098
5	212,2520	236,7491	259,5111	273,6483	293,7138
10	210,6025	236,3916	259,0170	272,5699	291,7055
∞	229,7416	256,7412	264,1562	289,0649	307,1002

Tabela A. 39 - Deslocamentos Nodais do Nó Superior Esquerdo e Direito, respetivamente, do Pórtico 3 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal

ey	Desl. x [mm]	Desl. y [µm]	Rotação [rad]	Desl. x [mm]	Desl. y [µm]	Rotação [rad]
0	5,2706	-8,2715	2,6609E-03	4,8393	-9,5221	-2,6571E-03
0,1	5,6488	-8,9582	2,6700E-03	5,2187	-10,3492	-2,6659E-03
0,2	6,0359	-9,6612	2,6789E-03	5,6072	-11,1962	-2,6745E-03
0,5	7,1780	-11,7296	2,7039E-03	6,7527	-13,6872	-2,6986E-03
1	8,7588	-14,5591	2,7411E-03	8,3382	-17,0836	-2,7346E-03
2	10,6661	-17,8496	2,8025E-03	10,2524	-20,9846	-2,7947E-03
5	12,6378	-20,9339	2,9246E-03	12,2346	-24,4731	-2,9157E-03
10	13,3852	-21,9767	3,0380E-03	12,9905	-25,5492	-3,0289E-03
∞	15,0589	-23,6330	7,6026E-03	13,8264	-27,2059	-7,5917E-03

Tabela A. 40 - Primeiras Cinco Frequências do Pórtico 3 para diferentes valores de Expoente da Lei de Potência, com a Fração Volúmica correspondente à Distribuição de Material Cerâmico em FGM Al/ZrO<sub>2</sub>, e secção transversal 10 mm x 40 mm

<b>ey</b>	<b>1ª Frequência [rad/s]</b>	<b>2ª Frequência [rad/s]</b>	<b>3ª Frequência [rad/s]</b>	<b>4ª Frequência [rad/s]</b>	<b>5ª Frequência [rad/s]</b>
<b>0</b>	229,7416	256,7412	264,1562	289,0649	307,1002
<b>0,1</b>	228,0387	255,2554	258,7607	287,1600	299,9004
<b>0,2</b>	226,4785	253,9580	254,6204	285,5673	294,3859
<b>0,5</b>	223,0092	247,6400	251,1870	282,0646	285,0917
<b>1</b>	220,2174	243,6109	248,8222	278,4732	280,0070
<b>2</b>	217,6264	239,4165	246,4084	274,0131	274,4464
<b>5</b>	215,4206	233,8462	244,7825	265,4123	270,4583
<b>10</b>	216,0170	234,5078	245,4085	263,9212	272,9016
<b>∞</b>	197,4082	220,6084	226,9797	248,3835	263,8803

## Apêndice B. Avaliação da Influência do N° de Pontos de Gauss no Comportamento da Estrutura

O presente apêndice contém os resultados do estudo da avaliação da influência do número de pontos a utilizar para o método de integração numérica no comportamento da estrutura, de forma mais detalhada, complementando o subcapítulo 5.3.

As tabelas B.1 e B.2 apresentam as primeiras cinco frequências naturais e os deslocamentos nodais o nó livre da treliça 1, respetivamente, e nas quais são comparados os valores obtidos através da integração com 2 pontos e com 2 (p+1) pontos, em que p é o grau do polinómio a avaliar.

Tabela B. 1 - Primeiras Cinco Frequências Naturais da Treliça 1 obtidas com Diferente Número de Pontos de Gauss para Integração Numérica, em função do Grau dos Polinómios que Caracterizam a Matriz de Rigidez ao Corte Transversal

ey	ngauss	1ª Frequência	2ª Frequência	3ª Frequência	4ª Frequência	5ª Frequência
2	2	233,6079	384,9476	602,7151	822,9459	1478,5614
	3	250,9245	411,6455	752,6273	961,1228	1913,4114
	Desvio (%)	7,4127E+00	6,9355E+00	2,4873E+01	1,6791E+01	2,9410E+01
5	2	232,6224	393,2762	606,8558	825,7050	1506,2052
	4	249,2518	421,0427	766,8865	960,6588	1892,5921
	Desvio (%)	7,1487E+00	7,0603E+00	2,6370E+01	1,6344E+01	2,5653E+01
10	2	232,2437	398,4635	614,6431	825,9015	1528,7442
	7	247,6334	425,8297	768,5749	952,3308	1868,4117
	Desvio (%)	6,6265E+00	6,8679E+00	2,5044E+01	1,5308E+01	2,2219E+01

Tabela B. 2 - Deslocamentos Nodais do Nó Livre da Treliça 1 obtidas com Diferente Número de Pontos de Gauss para Integração Numérica, em função do Grau dos Polinómios que Caracterizam a Matriz de Rigidez ao Corte Transversal

ey	ngauss	Deslocamento x [ $\mu\text{m}$ ]	Deslocamento y [ $\mu\text{m}$ ]	Rotação [rad]
2	2	3,5698	-10,1888	1,1198E-05
	3	3,5697	-10,1885	1,1536E-05
	Desvio (%)	-2,7507E-03	-2,8557E-03	3,0222E+00
5	2	3,5699	-9,2090	9,9988E-06
	4	3,5698	-9,2087	1,0291E-05
	Desvio (%)	-2,8995E-03	-3,0914E-03	2,9269E+00
10	2	3,5699	-8,7875	9,4604E-06
	7	3,5698	-8,7872	9,7153E-06
	Desvio (%)	-2,6057E-03	-2,8078E-03	2,6941E+00

As tabelas B.3 e B.4 apresentam as primeiras cinco frequências naturais e os deslocamentos nodais o nó superior, no qual está aplicada a carga, da treliça 2, respetivamente, e nas quais são comparados os valores obtidos através da integração com 2 pontos e com 2 (p+1) pontos, em que p é o grau do polinómio a avaliar.

Tabela B. 3 - Primeiras Cinco Frequências Naturais da Treliça 2 obtidas com Diferente Número de Pontos de Gauss para Integração Numérica, em função do Grau dos Polinómios que Caracterizam a Matriz de Rigidez ao Corte Transversal

ey	ngauss	1ª Frequência	2ª Frequência	3ª Frequência	4ª Frequência	5ª Frequência
2	2	18,2584	26,8426	59,0888	67,9000	126,5688
	3	18,3024	27,1688	59,6311	68,7758	128,4876
	Desvio (%)	2,4098E-01	1,2151E+00	9,1770E-01	1,2898E+00	1,5161E+00
5	2	18,2158	28,2626	59,5850	69,2059	126,5359
	4	18,2642	28,6135	60,1584	70,1365	128,5054
	Desvio (%)	2,6562E-01	1,2415E+00	9,6241E-01	1,3448E+00	1,5565E+00
10	2	18,1743	28,6698	59,8865	69,1567	126,5677
	7	18,2264	29,0006	60,4295	70,0360	128,4162
	Desvio (%)	2,8709E-01	1,1537E+00	9,0677E-01	1,2713E+00	1,4605E+00

Tabela B. 4 - Deslocamentos Nodais do Nó Superior da Treliça 2 obtidas com Diferente Número de Pontos de Gauss para Integração Numérica, em função do Grau dos Polinómios que Caracterizam a Matriz de Rigidez ao Corte Transversal

ey	ngauss	Deslocamento x [ $\mu\text{m}$ ]	Deslocamento y [ $\mu\text{m}$ ]	Rotação [rad]
2	2	21,8706	-107,4957	3,3498E-09
	3	21,8705	-107,4948	-5,8029E-10
	Desvio (%)	-3,7838E-04	-8,5524E-04	-1,1732E+02
5	2	21,8705	-95,0096	-1,0837E-09
	4	21,8705	-95,0089	3,2438E-09
	Desvio (%)	-3,7026E-04	-8,0323E-04	-3,9934E+02
10	2	21,8704	-89,7516	-5,1092E-09
	7	21,8703	-89,7510	7,0983E-09
	Desvio (%)	-4,3199E-04	-7,3085E-04	-2,3893E+02

As tabelas B.5 e B.6 apresentam as primeiras cinco frequências naturais e os deslocamentos nodais o nó central superior da treliça 3, respetivamente, e nas quais são comparados os valores obtidos através da integração com 2 pontos e com 2 (p+1) pontos, em que p é o grau do polinómio a avaliar.

Tabela B. 5 - Primeiras Cinco Frequências Naturais da Trelça 3 obtidas com Diferente Número de Pontos de Gauss para Integração Numérica, em função do Grau dos Polinómios que Caracterizam a Matriz de Rigidez ao Corte Transversal

ey	ngauss	1ª Frequência	2ª Frequência	3ª Frequência	4ª Frequência	5ª Frequência
2	2	251,1698	251,7997	269,4350	276,1570	284,7869
	3	274,1235	275,0646	294,6998	301,3424	314,7487
	Desvio (%)	9,1387E+00	9,2394E+00	9,3770E+00	9,1200E+00	1,0521E+01
5	2	251,5227	252,0211	268,4811	273,5379	282,4255
	4	275,7880	276,5350	294,2022	299,1045	312,7354
	Desvio (%)	9,6473E+00	9,7269E+00	9,5802E+00	9,3466E+00	1,0732E+01
10	2	253,6946	254,1314	269,5822	274,1852	283,2597
	7	276,9096	277,6204	293,8083	298,4031	311,8936
	Desvio (%)	9,1508E+00	9,2428E+00	8,9865E+00	8,8327E+00	1,0109E+01

Tabela B. 6 - Deslocamentos Nodais do Nó Superior Central da Trelça 3 obtidas com Diferente Número de Pontos de Gauss para Integração Numérica, em função do Grau dos Polinómios que Caracterizam a Matriz de Rigidez ao Corte Transversal

ey	ngauss	Deslocamento x [ $\mu\text{m}$ ]	Deslocamento y [ $\mu\text{m}$ ]	Rotação [rad]
2	2	0,0375	-0,2673	-2,7995E-10
	3	0,0375	-0,2673	-2,9835E-10
	Desvio (%)	-2,4536E-03	-3,0929E-03	6,5737E+00
5	2	0,0375	-0,2539	5,7200E-11
	4	0,0375	-0,2539	-1,3564E-09
	Desvio (%)	-2,1555E-03	-2,3571E-03	-2,4714E+03
10	2	0,0375	-0,2482	-2,6800E-10
	7	0,0375	-0,2482	7,2157E-11
	Desvio (%)	-1,9004E-03	-1,9277E-03	-1,2692E+02

As tabelas B.7 e B.8 apresentam as primeiras cinco frequências naturais e os deslocamentos nodais o nó superior esquerdo do pórtico 1, respetivamente, e nas quais são comparados os valores obtidos através da integração com 2 pontos e com 2 (p+1) pontos, em que p é o grau do polinómio a avaliar.

Tabela B. 7 - Primeiras Cinco Frequências Naturais do Pórtico 1 obtidas com Diferente Número de Pontos de Gauss para Integração Numérica, em função do Grau dos Polinómios que Caracterizam a Matriz de Rigidez ao Corte Transversal

ey	ngauss	1ª Frequência	2ª Frequência	3ª Frequência	4ª Frequência	5ª Frequência
2	2	38,3364	142,8618	195,6327	381,7047	495,3417
	3	38,7526	145,4803	201,3762	396,4872	522,5560
	Desvio (%)	1,0859E+00	1,8329E+00	2,9359E+00	3,8727E+00	5,4941E+00
5	2	37,3068	141,0587	196,8571	390,5864	502,5900
	4	37,8148	143,7109	203,1197	406,1991	530,7832
	Desvio (%)	1,3618E+00	1,8802E+00	3,1813E+00	3,9972E+00	5,6096E+00
10	2	36,6911	140,5975	197,4382	397,2223	506,6419
	7	37,2019	143,0442	203,4702	412,0243	532,7397
	Desvio (%)	1,3921E+00	1,7402E+00	3,0551E+00	3,7264E+00	5,1511E+00

Tabela B. 8 - Deslocamentos Nodais do Nó Superior Esquerdo do Pórtico 1 obtidas com Diferente Número de Pontos de Gauss para Integração Numérica, em função do Grau dos Polinómios que Caracterizam a Matriz de Rigidez ao Corte Transversal

ey	ngauss	Deslocamento x [ $\mu\text{m}$ ]	Deslocamento y [ $\mu\text{m}$ ]	Rotação [rad]
2	2	11,6708	-0,0161	2,0710E-02
	3	11,3510	-0,0161	2,0302E-02
	Desvio (%)	-2,7403E+00	-1,0673E-01	-1,9718E+00
5	2	11,0383	-0,0137	1,8792E-02
	4	10,6559	-0,0137	1,8258E-02
	Desvio (%)	-3,4645E+00	-1,4552E-01	-2,8430E+00
10	2	10,6516	-0,0127	1,7469E-02
	7	10,2809	-0,0126	1,6919E-02
	Desvio (%)	-3,4806E+00	-1,5386E-01	-3,1472E+00

As tabelas B.9 e B.10 apresentam as primeiras cinco frequências naturais e os deslocamentos nodais o nó superior esquerdo do pórtico 2, respetivamente, e nas quais são comparados os valores obtidos através da integração com 2 pontos e com 2 (p+1) pontos, em que p é o grau do polinómio a avaliar.

Tabela B. 9 - Primeiras Cinco Frequências Naturais do Pórtico 2 obtidas com Diferente Número de Pontos de Gauss para Integração Numérica, em função do Grau dos Polinómios que Caracterizam a Matriz de Rigidez ao Corte Transversal

ey	ngauss	1ª Frequência	2ª Frequência	3ª Frequência	4ª Frequência	5ª Frequência
2	2	58,1118	163,3293	352,0267	497,1278	557,5877
	3	61,2637	172,1237	373,8992	568,3339	628,6391
	Desvio (%)	5,4238E+00	5,3845E+00	6,2133E+00	1,4324E+01	1,2743E+01
5	2	57,5302	165,6642	358,9197	507,3224	566,0864
	4	60,8038	175,1410	380,7790	587,2435	638,0502
	Desvio (%)	5,6904E+00	5,7205E+00	6,0903E+00	1,5754E+01	1,2713E+01
10	2	56,4163	166,2676	362,9464	515,4645	569,6177
	7	59,5307	175,5676	383,7653	595,9535	637,2597
	Desvio (%)	5,5204E+00	5,5934E+00	5,7361E+00	1,5615E+01	1,1875E+01

Tabela B. 10 - Deslocamentos Nodais do Nó Superior Esquerdo do Pórtico 2 obtidas com Diferente Número de Pontos de Gauss para Integração Numérica, em função do Grau dos Polinómios que Caracterizam a Matriz de Rigidez ao Corte Transversal

ey	ngauss	Deslocamento x [ $\mu\text{m}$ ]	Deslocamento y [ $\mu\text{m}$ ]	Rotação [rad]
2	2	4,7598	-0,0160	1,4814E-02
	3	4,2576	-0,0160	1,3660E-02
	Desvio (%)	-1,0551E+01	-1,3722E-01	-7,7912E+00
5	2	4,2820	-0,0136	1,3096E-02
	4	3,7975	-0,0136	1,1768E-02
	Desvio (%)	-1,1313E+01	-1,6083E-01	-1,0141E+01
10	2	4,1564	-0,0125	1,1808E-02
	7	3,7023	-0,0125	1,0551E-02
	Desvio (%)	-1,0924E+01	-1,5388E-01	-1,0647E+01

As tabelas B.11 e B.12 apresentam as primeiras cinco frequências naturais e os deslocamentos nodais o nó superior esquerdo do pórtico 3, respetivamente, e nas quais são comparados os valores obtidos através da integração com 2 pontos e com 2 (p+1) pontos, em que p é o grau do polinómio a avaliar.

Tabela B. 11 - Primeiras Cinco Frequências Naturais do Pórtico 3 obtidas com Diferente Número de Pontos de Gauss para Integração Numérica, em função do Grau dos Polinómios que Caracterizam a Matriz de Rigidez ao Corte Transversal

ey	ngauss	1ª Frequência	2ª Frequência	3ª Frequência	4ª Frequência	5ª Frequência
2	2	420,3882	473,6186	513,6048	542,6436	587,3941
	3	457,9555	527,5876	557,9746	601,3177	661,8629
	Desvio (%)	8,9363E+00	1,1395E+01	8,6389E+00	1,0813E+01	1,2678E+01
5	2	417,4372	472,4906	516,9263	544,3687	585,7992
	4	456,2262	530,6506	560,7961	606,7100	666,6571
	Desvio (%)	9,2922E+00	1,2309E+01	8,4867E+00	1,1452E+01	1,3803E+01
10	2	413,7309	471,7662	515,5957	542,2324	581,7793
	7	449,4658	526,5942	554,6951	601,2392	659,0238
	Desvio (%)	8,6372E+00	1,1622E+01	7,5833E+00	1,0882E+01	1,3277E+01

Tabela B. 12 - Deslocamentos Nodais do Nó Superior Esquerdo do Pórtico 3 obtidas com Diferente Número de Pontos de Gauss para Integração Numérica, em função do Grau dos Polinómios que Caracterizam a Matriz de Rigidez ao Corte Transversal

ey	ngauss	Deslocamento x [ $\mu\text{m}$ ]	Deslocamento y [ $\mu\text{m}$ ]	Rotação [rad]
2	2	0,0075	-0,0106	1,72112E-03
	3	0,0074	-0,0105	1,48534E-03
	Desvio (%)	-1,8442E-01	-7,9511E-01	-1,36994E+01
5	2	0,0067	-0,0094	1,59447E-03
	4	0,0067	-0,0093	1,36024E-03
	Desvio (%)	-2,0881E-01	-6,1321E-01	-1,46899E+01
10	2	0,0064	-0,0089	1,48292E-03
	7	0,0064	-0,0089	1,27970E-03
	Desvio (%)	-4,1506E-02	-4,1165E-01	-1,37041E+01

# Apêndice C. Resumo da Apresentação Realizada na SYMCOMP 2023



SYMCOMP 2023  
Évora, 30-31 March 2023  
©ECCOMAS, Portugal

## BIO-INSPIRED OPTIMIZATION OF FUNCTIONALLY GRADED TRUSS AND FRAME STRUCTURES

J.S.D. Gaspar<sup>1\*</sup>, M.A.R. Loja<sup>1,2</sup>, J.I. Barbosa<sup>1,2</sup>

1: CIMOSM - Centro de Investigação em Modelação e Optimização de Sistemas Multifuncionais,  
ISEL - Instituto Superior de Engenharia de Lisboa, IPL - Instituto Politécnico de Lisboa  
R. Conselheiro Emídio Navarro, 1, 1959-007 Lisboa

2: IDMEC, IST-Instituto Superior Técnico, Universidade de Lisboa, 1049-001 Lisboa, Portugal

e-mail: a44997@alunos.isel.pt , amelia.loja@isel.pt , joaquim.barbosa@isel.pt

**Keywords:** Functionally graded materials, Truss and frame-type structures, Archimedes optimization algorithm, Red Fox algorithm optimization, Finite element analysis.

### Abstract

*Functionally graded materials (FGM) are characterized by presenting properties that, depend on the mixture of constituent materials as other composite materials do, but additionally also depend on the directions in which this mixture will be developed, which enhances the customization of the component or structure depending on the intended application.*

*Although it is possible to find a significant number of works published on FGM beams, plates, and shells, mostly in the direction of their thickness, it was not possible to find studies on FGM trusses or frame-type structures in 2D or 3D spaces.*



*This first work aims to address the static and free vibration analysis of these structures in which the material gradient is a function of the vertical coordinate of the beam-bar components within the structure.*

*The optimal design of these structures is carried out through two metaheuristic optimization techniques, namely the Archimedes and the Red Fox algorithms. A set of illustrative case studies is considered allowing us to conclude on the performance of the overall analysis-optimization codes implemented.*

# Apêndice D. Artigo de Natureza Científica Publicado no *Journal of Composites Science*

Article

## Static and Free Vibration Analyses of Functionally Graded Plane Structures

J.S.D. Gaspar <sup>1,\*</sup>, M.A.R. Loja <sup>1,2,\*</sup>  and J.I. Barbosa <sup>1,2,\*</sup> 

<sup>1</sup> CIMOSM—Centro de Investigação em Modelação e Optimização de Sistemas Multifuncionais, ISIL, IPL—Instituto Politécnico de Lisboa, Av. Conselheiro Emídio Navarro 1, 1959-007 Lisboa, Portugal

<sup>2</sup> IDMEC, Instituto Superior Técnico—Universidade de Lisboa, Av. Rovisco Pais, 1, 1049-001 Lisboa, Portugal

\* Correspondence: a44997@alunos.isil.pt (J.S.D.G.); amaria.loja@isil.pt (M.A.R.L.); joaquim.barbosa@tecnico.ulisboa.pt (J.I.B.)

**Abstract:** In recent years, the use of functionally graded materials has been the focus of several studies due to their intrinsic ability to be tailored according to the requirements of structures while minimising abrupt stress transitions commonly found in laminated composites. In most studies, the materials' mixture gradient is established through a structural component, i.e., thickness, which is known to visibly enhance structural behaviour. However, depending on the type of structure, it is important to exploit the possibility of building a structure using other gradient directions. The innovative characteristic of this work, which aims to study plane truss and frame-type structures made of functionally graded materials, lies in the specificity that the materials' mixture gradient occurs as a function of a geometric structure feature, i.e., for example, the structure height, rather than the more usual approach, as a component dependence, i.e., through a member thickness or even along its length. The performance of the present model is illustrated through a set of case studies, and where possible, the results achieved are compared with more traditional solutions.

**Keywords:** functionally graded materials; structure-dependent material gradient; plane trusses; plane frames; static and free vibration analyses



Citation: Gaspar, J.S.D.; Loja, M.A.R.; Barbosa, J.I. Static and Free Vibration Analyses of Functionally Graded Plane Structures. *J. Compos. Sci.* **2023**, *7*, 377. <https://doi.org/10.3390/jcs7090377>

Academic Editor: Francesco Tornabene

Received: 27 July 2023  
Revised: 26 August 2023  
Accepted: 30 August 2023  
Published: 8 September 2023



Copyright: © 2023 by the authors. Licensee MDPI, Basel, Switzerland. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).

### 1. Introduction

In engineering applications, conflicting property requirements necessitate combining materials, which can be in the molten state (or alloying), limited by thermodynamic equilibrium limits, and in the solid state, resulting in composite materials. Composite materials can be divided into laminates and functional gradients, with the latter being characterised by the minimisation of problems that occur in laminates, namely sharp interfaces between layers in which abrupt stress transitions occur and failures start [1,2].

Functionally graded materials are composite materials with properties that result from a combination of distinct materials in which the mixture proportions vary along one or more spatial coordinates. The improved properties of FGMs that have been achieved by using this tailoring flexibility in parallel with technological advances in manufacturing such as additive manufacturing, powder metallurgy, etc., (Kumar et al. [3]) justify their increasingly frequent use. FGMs have wide applicability in aircraft, spacecraft, and space structures, which space exploration depends on, as well as in car parts, electronic and medical equipment, thermal coatings for ceramic engines, the marine industry, gas turbines, and biomedicine, among other applications [4–8]. Although functionally graded materials still have high production costs, this type of material is a topic that has been significantly discussed by numerous authors in recent years, with many publications on the subject being published, making it a very current and important topic that should be explored further [1,9,10].

To investigate the advantages of using FGMs, several authors have developed models through which static and free vibration analyses have been carried out to investigate the