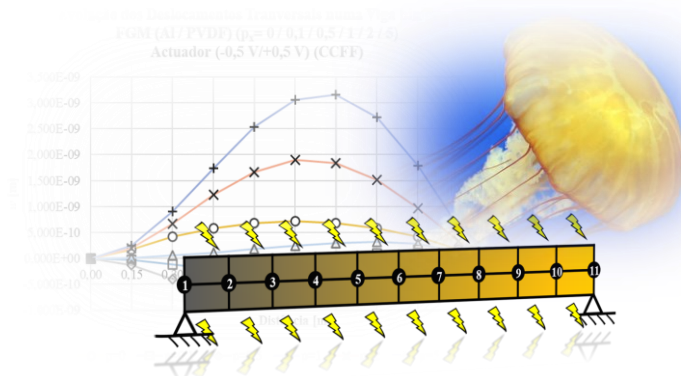


INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DE LISBOA

Departamento de Engenharia Mecânica



Modelação e otimização de estruturas construídas com materiais piezoelétricos e gradientes funcionais multidirecionais

PEDRO DOS SANTOS MARQUES
(Licenciado em Engenharia Mecânica)

Dissertação de natureza científica para obtenção do grau de Mestre
em Engenharia Mecânica

Orientador:

Prof.^a Doutora Maria Amélia Ramos Loja

Júri:

Presidente:

Prof.^a Doutora Cláudia Sofia Séneca da Luz Casaca

Vogais:

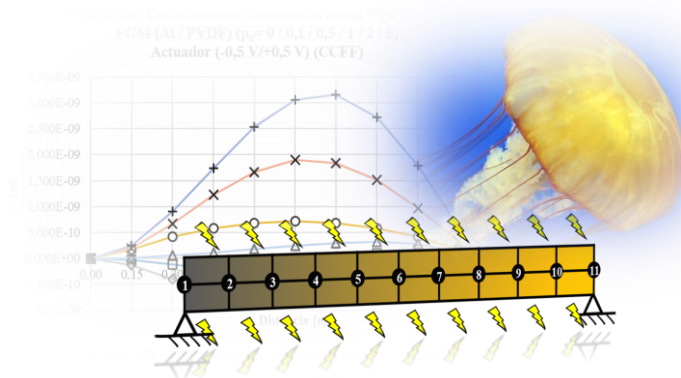
Prof. Doutor Tiago Alexandre Narciso da Silva

Prof.^a Doutora Maria Amélia Ramos Loja

Março de 2023

INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DE LISBOA

Departamento de Engenharia Mecânica



Modelação e otimização de estruturas construídas com materiais piezoelétricos e gradientes funcionais multidirecionais

PEDRO DOS SANTOS MARQUES
(Licenciado em Engenharia Mecânica)

Dissertação de natureza científica para obtenção do grau de Mestre
em Engenharia Mecânica

Orientador:

Prof.^a Doutora Maria Amélia Ramos Loja

Júri:

Presidente:

Prof.^a Doutora Cláudia Sofia Séneca da Luz Casaca

Vogais:

Prof. Doutor Tiago Alexandre Narciso da Silva

Prof.^a Doutora Maria Amélia Ramos Loja

Março de 2023

Página intencionalmente deixada em branco

“(...) it is hard to understand, but sometimes painful things (...) happen. It’s all part of the process of exploration and discovery. It’s all part of taking a chance and expanding man’s horizons. The future doesn’t belong to the fainthearted; it belongs to the brave. (...)”

Ronald Reagan

Página intencionalmente deixada em branco

Agradecimentos

Começo por endereçar os mais sinceros agradecimentos a todas as personalidades e entidades que, de uma forma ou de outra, contribuíram para o resultado que é o presente documento. Há, no entanto, a destacar um conjunto de individualidades que pela sua postura, contribuíram de forma decisiva – ainda que inconscientemente – para a conclusão desta jornada, na certeza de que a ordem pela qual se apresentam, em nada está relacionada com o grau de apoio proporcionado.

À minha família, em especial os meus pais, agradeço todo o apoio, sacrifícios pessoais e financeiros que permitiram formar e educar a pessoa que hoje sou.

À minha amiga Joana Gonçalves, agradeço todo o apoio, conselhos, boa disposição, conversas e teorias da conspiração, que a sua presença proporcionou.

Aos meus amigos e colegas de gabinete, agradeço os momentos que proporcionaram e também a paciência que demonstraram ao me ouvirem nestes últimos tempos.

À minha amiga Raquel Carvalho, agradeço a paciência para me aturar em momentos mais difíceis.

Ao meu amigo e colega Bogdan, agradeço a disponibilidade para trocar ideias, confirmar resultados e aprender coisas que nem imaginava serem possíveis. É de facto gratificante poder ter alguém com quem conversar, que compreende a essência do trabalho desenvolvido e o seu custo em termos pessoais e de recursos.

Por último, mas nunca, mas mesmo nunca menos importante, agradeço à personalidade que tive o privilégio de escolher para me orientar nesta etapa, a minha orientadora, a Professora Amélia Loja. Naturalmente, agradeço todo o apoio e conselhos, mas também compreensão, paciência e tranquilidade perante todas as dúvidas e problemas que surgiram, mesmo os mais descabidos. Mais que tudo agradeço o espaço e independência que me proporcionou e que me permitiu, sem pressões nem atalhos, concluir esta etapa. Por último, agradeço por me ter desafiado a abordar esta temática – que muitos julgam “simples”, “fácil” ou “engraçadinha” – que pela sua especificidade, representou um despertar de consciência para uma realidade que antes julgava impossível e na qual hoje vejo um imenso potencial transformador.

Página intencionalmente deixada em branco

Resumo

Os materiais e as estruturas impactam o nosso modo de vida, tendo, inclusive, marcado períodos da História, seja na forma como nos deslocamos, como construímos ou até mesmo como pensamos e concebemos novas ideias em engenharia, representando a derradeira limitação. A utilização de materiais compósitos, materiais com gradiente funcional (FGM) e materiais inteligentes representam algumas das opções de projeto mais recentes, cujas potencialidades permitem melhor adequar as estruturas ao seu propósito. A extensão destes conceitos às estruturas inteligentes, vem despertar um maior interesse num tópico de investigação que, atualmente, se destaca pela sua relevância, dado o seu imenso potencial. A adaptabilidade destas estruturas pode ser conseguida através da utilização de materiais inteligentes, que diferem dos seus congéneres naturais pela transdução de energia entre diferentes campos, como por exemplo, o elétrico e o elástico no caso de materiais piezoelétricos. A sua utilização num contexto material de gradiente funcional permite desenvolver soluções à medida para cada utilização. Estas podem passar por um processo de otimização, obtendo-se soluções ótimas de acordo com objetivos definidos e eventuais constrangimentos.

O presente trabalho é dedicado ao estudo de estruturas construídas com materiais piezoelétricos e gradientes funcionais multidirecionais. Pretende-se o estudo da resposta estática de estruturas do tipo placa ou viga, com gradientes em múltiplas direções. Nesta sequência procede-se à otimização destas estruturas utilizando o algoritmo bio-inspirado *Jellyfish Search* (JS). Para este efeito é desenvolvido uma aplicação simbólica para análise destas estruturas, que ficará acoplada a uma aplicação numérica para o projeto ótimo de estruturas.

Os resultados obtidos por meio de estudos de verificação, paramétricos e de otimização são objeto de análise crítica.

Palavras-chave: Estruturas e materiais inteligentes, materiais piezoelétricos, materiais piezoelétricos com gradiente funcional contínuo e discreto, otimização baseada em algoritmo bio-inspirado, Jellyfish Search, análise de elementos finitos

Página intencionalmente deixada em branco

Abstract

Materials and structures greatly impact our way of life, having even marked periods in History. Whether in the way we move, build, or even conceive new engineering concepts, these represent the ultimate limitation. The utilization of composite materials, functionally graded materials and smart materials represent some of the most recent design options, whose potentialities allow to better adapt the structures to their purpose. The extension of these concepts to intelligent structures has contributed to gather even more interest as a research topic, that so far stands out, given its enormous potential. The adaptability of these structures can be achieved through the use of intelligent materials, which differ from their natural counterparts in the transduction of energy between different fields, such as the electric and elastic fields in the case of piezoelectric materials. Their utilization in a functionally graded material context, allows the development of tailor-made solutions for each application. These can go through an optimization process, obtaining optimal solutions according to defined objectives and eventual constrains.

The present work is dedicated to the study piezoelectric structures with multidirectional functional gradient. It is intended to study the static response of plate or beam type structures, with gradients in multiple directions. In this sequence, these structures are optimized using the bio-inspired Jellyfish Search (JS) algorithm. For this purpose, a symbolic application is developed for the analysis of these structures, which will be coupled to a numerical application for the optimal design of structures.

The results obtained through verification, parametric and optimization studies are subject to critical analysis.

Keywords: Smart structures and materials, piezoelectric materials, continuum and discrete functionally graded piezoelectric materials, bio-inspired optimization, Jellyfish Search, finite element analysis

Página intencionalmente deixada em branco

Lista de Figuras

Figura 2.1.1 - Representação de diferentes gradientes materiais, (a) 1D, (b) 2D e (c) 3D	8
Figura 2.1.2 - Evolução da distribuição das frações volúmicas em função da espessura para diferentes valores do expoente p_z	9
Figura 2.2.1 – Exemplos de aplicação da biomimética no projeto de estruturas em engenharia (adaptado de [66])	13
Figura 2.2.2 - Representação simplificada do sistema sensitivo-neuro-motor de um ser-vivo e comparação com o sistema sensor-controlador-atuador de uma estrutura inteligente (adaptado de [7]).....	14
Figura 2.2.3 - Representação esquemáticas do efeito piezoelétrico direto (a) e inverso (b) (adaptado de [85])	15
Figura 2.3.1 - Geometrias não deformadas e deformadas de uma placa de acordo com os pressupostos da FSDT (adaptado de [97])	18
Figura 2.3.2 - Representação esquemática de um elemento de referência Q4	24
Figura 2.4.1 – Fluxograma do JS (adaptado de [112]).....	34
Figura 3.1.1 - Representação esquemática da aplicação numérica desenvolvida	36
Figura 3.1.2 - Representação esquemática do processo de arrumação para um vetor de matrizes de rigidez do elemento genérico associado ao expoente p	38
Figura 3.1.3 - Seleção do vetor de matrizes de rigidez genéricas na posição definida pelo valor do indivíduo	40
Figura 3.1.4 - Seleção dos vetores de matrizes de rigidez genéricas nas posições definida pelo variáveis do indivíduo	42
Figura 4.1.1 – Representação gráfica da função Goldstein-Price	57
Figura 4.1.2 - Representação gráfica da função Rastringin	58
Figura 4.1.3 - Representação esquemática da localização de cada material sobre a malha (azul: $p=5$, vermelho: $p=2$).....	62
Figura 4.2.1 - Representação gráfica do deslocamento transversal da extremidade livre de uma viga bimorph (CFFF) para diferentes potenciais elétricos aplicados	71
Figura 4.2.2 - Representação esquemática da configuração de atuador para uma viga bimorph (CFFF).....	72
Figura 4.2.3 – Representação gráfica da evolução do deslocamento transversal nodal em função do comprimento da viga (CFFF) para diferentes discretizações	73

Figura 4.2.4 – Representação gráfica da evolução do potencial elétrico em função do comprimento da viga (CFFF) para diferentes discretizações	73
Figura 4.2.5 - Representação esquemática da configuração de sensor para uma viga bimorph (CFFF).....	74
Figura 4.2.6 - Representação esquemática da configuração de atuador para uma viga bimorph (CCFF)	75
Figura 4.2.7 – Representação gráfica da evolução do deslocamento transversal nodal em função do comprimento da viga (CCFF) para diferentes discretizações.....	75
Figura 4.2.8 - Representação esquemática da configuração de sensor para uma viga bimorph (CCFF)	76
Figura 4.2.9 – Representação gráfica da evolução do potencial elétrico em função do comprimento da viga (CCFF) para diferentes discretizações	76
Figura 4.2.10 - Representação gráfica do perfil de deslocamentos transversais ao longo do comprimento de uma viga (CFFF) para configuração de sensor e uma discretização de 10×1 elementos.....	79
Figura 4.2.11 - Representação gráfica da distribuição de potenciais elétricos ao longo do comprimento de uma viga (CFFF) para uma discretização de 10×1 elementos	80
Figura 4.2.12 - Representação esquemática da configuração de atuador para uma viga bimorph FGM (CFFF).....	80
Figura 4.2.13 - Representação gráfica do perfil de deslocamentos transversais para valores de $p < 1$ ao longo do comprimento de uma viga (CFFF) em configuração de atuador e discretização de 10×1 elementos.....	81
Figura 4.2.14 - Representação gráfica do perfil de deslocamentos transversais para valores de $p \geq 1$ ao longo do comprimento de uma viga (CFFF) em configuração de atuador e discretização de 10×1 elementos.....	81
Figura 4.2.15 – Representação esquemática da configuração de sensor para uma viga bimorph FGM (CFFF).....	82
Figura 4.2.16 - Representação gráfica do perfil de deslocamentos transversais para valores de $p < 1$ ao longo do comprimento de uma viga (CFFF) em configuração de atuador e discretização de 10×1 elementos.....	82
Figura 4.2.17 - Representação gráfica do perfil de deslocamentos transversais para valores de $p \geq 1$ ao longo do comprimento de uma viga (CFFF) em configuração de atuador e discretização de 10×1 elementos.....	83
Figura 4.2.18 - Representação gráfica da distribuição de potenciais elétricos para valores de $p < 1$ ao longo do comprimento de uma viga (CFFF) em configuração de atuador e discretização de 10×1 elementos	84

Figura 4.2.19 - Representação gráfica da distribuição de potenciais elétricos para valores de $p \geq 1$ ao longo do comprimento de uma viga (CFFF) em configuração de atuador e discretização de 10×1 elementos	84
Figura 4.2.20 - Representação gráfica do perfil de deslocamentos transversais para $p < 1$ ao longo do comprimento de uma viga (CFFF) em configuração de atuador e discretização de 10×1 elementos.....	89
Figura 4.2.21 - Representação gráfica do perfil de deslocamentos transversais para $p \geq 1$ ao longo do comprimento de uma viga (CFFF) em configuração de atuador e discretização de 10×1 elementos.....	89
Figura 4.2.22 - Representação esquemática da configuração de atuador para uma viga bimorph FGM (CCFF).....	91
Figura 4.2.23 - Representação gráfica do perfil de deslocamentos transversais para $p < 1$ ao longo do comprimento de uma viga (CCFF) em configuração de atuador e discretização de 10×1 elementos.....	92
Figura 4.2.24 - Representação gráfica do perfil de deslocamentos transversais para $p \geq 1$ ao longo do comprimento de uma viga (CCFF) em configuração de atuador e discretização de 10×1 elementos.....	93
Figura 4.2.25 - Representação esquemática da configuração de atuador para uma viga bimorph FGM (SSFF).....	93
Figura 4.2.26 - Representação gráfica do perfil de deslocamentos transversais para $p < 1$ ao longo do comprimento de uma viga (SSFF) em configuração de atuador e discretização de 10×1 elementos.....	94
Figura 4.2.27 - Representação gráfica do perfil de deslocamentos transversais para $p \geq 1$ ao longo do comprimento de uma viga (SSFF) em configuração de atuador e discretização de 10×1 elementos.....	95
Figura 4.2.28 - Representação esquemática da configuração de atuador para uma viga bimorph FGM (CSFF)	95
Figura 4.2.29 - Representação gráfica do perfil de deslocamentos transversais para $p < 1$ ao longo do comprimento de uma viga (CSFF) em configuração de atuador e discretização de 10×1 elementos.....	96
Figura 4.2.30 - Representação gráfica do perfil de deslocamentos transversais para $p \geq 1$ ao longo do comprimento de uma viga (SSFF) em configuração de atuador e discretização de 10×1 elementos.....	97
Figura 4.2.31 - Representação esquemática da configuração de sensor para uma viga bimorph FGM (CFFF).....	98

Figura 4.2.32 - Representação gráfica do perfil de deslocamentos transversais para $p < 1$ ao longo do comprimento de uma viga (CSFF) em configuração de sensor e discretização de 10×1 elementos.....	99
Figura 4.2.33 - Representação gráfica do perfil de deslocamentos transversais para $p \geq 1$ ao longo do comprimento de uma viga (CSFF) em configuração de sensor e discretização de 10×1 elementos.....	99
Figura 4.2.34 - Representação gráfica da distribuição de potenciais elétricos para $p < 1$ ao longo do comprimento de uma viga (CFFF) em configuração de sensor e discretização de 10×1 elementos.....	100
Figura 4.2.35 - Representação gráfica da distribuição de potenciais elétricos para $p \geq 1$ ao longo do comprimento de uma viga (CFFF) em configuração de sensor e discretização de 10×1 elementos.....	101
Figura 4.2.36 - Representação esquemática da configuração de sensor para uma viga bimorph FGM (CCFF).....	102
Figura 4.2.37 - Representação gráfica do perfil de deslocamentos transversais para $p < 1$ ao longo do comprimento de uma viga (CCFF) em configuração de sensor e discretização de 10×1 elementos.....	102
Figura 4.2.38 - Representação gráfica do perfil de deslocamentos transversais para $p \geq 1$ ao longo do comprimento de uma viga (CCFF) em configuração de sensor e discretização de 10×1 elementos.....	103
Figura 4.2.39 - Representação gráfica da distribuição de potenciais elétricos para $p < 1$ ao longo do comprimento de uma viga (CCFF) em configuração de sensor e discretização de 10×1 elementos.....	104
Figura 4.2.40 - Representação gráfica da distribuição de potenciais elétricos para $p \geq 1$ ao longo do comprimento de uma viga (CCFF) em configuração de sensor e discretização de 10×1 elementos.....	104
Figura 4.2.41 - Representação esquemática da configuração de sensor para uma viga bimorph FGM (SSFF).....	105
Figura 4.2.42 - Representação gráfica do perfil de deslocamentos transversais para $p < 1$ ao longo do comprimento de uma viga (SSFF) em configuração de sensor e discretização de 10×1 elementos.....	106
Figura 4.2.43 - Representação gráfica do perfil de deslocamentos transversais para $p \geq 1$ ao longo do comprimento de uma viga (SSFF) em configuração de sensor e discretização de 10×1 elementos.....	106
Figura 4.2.44 - Representação gráfica da distribuição de potenciais elétricos para $p < 1$ ao longo do comprimento de uma viga (SSFF) em configuração de sensor e discretização de 10×1 elementos.....	107

Figura 4.2.45 - Representação gráfica da distribuição de potenciais elétricos para $p \geq 1$ ao longo do comprimento de uma viga (SSFF) em configuração de sensor e discretização de 10×1 elementos.....	108
Figura 4.2.46 - Representação esquemática da configuração de sensor para uma viga bimorph FGM (CSFF)	108
Figura 4.2.47 - Representação gráfica do perfil de deslocamentos transversais para $p < 1$ ao longo do comprimento de uma viga (CSFF) em configuração de sensor e discretização de 10×1 elementos.....	109
Figura 4.2.48 - Representação gráfica do perfil de deslocamentos transversais para $p \geq 1$ ao longo do comprimento de uma viga (CSFF) em configuração de sensor e discretização de 10×1 elementos.....	110
Figura 4.2.49 - Representação gráfica da distribuição de potenciais elétricos para $p < 1$ ao longo do comprimento de uma viga (CSFF) em configuração de sensor e discretização de 10×1 elementos.....	111
Figura 4.2.50 - Representação gráfica da distribuição de potenciais elétricos para $p \geq 1$ ao longo do comprimento de uma viga (CSFF) em configuração de sensor e discretização de 10×1 elementos.....	111
Figura 4.2.51 - Representação esquemática da discretização de uma placa em 10×10 elementos	118
Figura 4.2.52 - Representação esquemática das translações do deslocamento máximo observadas para a configuração de atuador	133
Figura 4.2.53 – Distribuição dos valores médios dos melhores ótimos por série	137
Figura 4.3.1 - Representação esquemática da discretização da placa em 10 elementos e localização dos pontos de controlo da função objetivo	138
Figura 4.3.2 - Mapeamento das disposições dos gradientes materiais e potenciais elétricos considerados para diferentes condições de fronteira	140
Figura 4.3.3 - Representação esquemática da estrutura discretizada, do gradiente funcional 1D e da localização dos pontos de controlo	142
Figura 4.3.4 - Mapeamento das distribuições dos gradientes materiais e potenciais elétricos considerados numa placa FGPM 1D em z	143
Figura 4.3.5 - Representação esquemática da estrutura discretizada, do gradiente funcional 3D e da localização dos pontos de controlo	144
Figura 4.3.6 - Mapeamento das distribuições dos gradientes materiais e potenciais elétricos considerados numa placa FGPM 3D em z	144
Figura B1 – Representação gráfica da evolução do deslocamento transversal nodal em função do comprimento da viga (CFFF) para diferentes potenciais aplicados utilizando uma malha de 5×1 elementos.....	10B

Figura B2 - Representação gráfica da evolução do deslocamento transversal nodal em função do comprimento da viga (CFFF) para diferentes potenciais aplicados utilizando uma malha de 10×1 elementos	11B
Figura B3 - Representação gráfica da evolução do deslocamento transversal nodal em função do comprimento da viga (CFFF) para diferentes potenciais aplicados utilizando uma malha de 15×1 elementos	12B
Figura B4 - Representação esquemática de uma viga de Al com 10×1 elementos (CFFF)...	20B
Figura B5 - Representação esquemática da configuração de sensor de uma viga bimorph em PVDF com 10×1 elementos (CFFF)	20B
Figura B6 - Representação esquemática da configuração de sensor de uma viga bimorph em PVDF com 10×1 elementos (CFFF)	21B
Figura B7 - Representação gráfica do perfil de deslocamentos transversais ao longo do comprimento de uma viga (CFFF) para configuração de atuador e uma discretização de 10×1 elementos.....	22B
Figura B8 - Representação gráfica do perfil de deslocamentos transversais para vários valores de p ao longo do comprimento de uma viga (CFFF) em configuração de atuador e discretização de 10×1 elementos	31B
Figura B9 - Representação gráfica do perfil de deslocamentos transversais para vários valores de p ao longo do comprimento de uma viga (CCFF) em configuração de atuador e discretização de 10×1 elementos	33B
Figura B10 - Representação gráfica do perfil de deslocamentos transversais para vários valores de p ao longo do comprimento de uma viga (SSFF) em configuração de atuador e discretização de 10×1 elementos.....	35B
Figura B11 - Representação gráfica do perfil de deslocamentos transversais para vários valores de p ao longo do comprimento de uma viga (CSFF) em configuração de atuador e discretização de 10×1 elementos.....	37B
Figura B12 - Representação gráfica da evolução dos deslocamentos transversais ao longo do comprimento de uma viga bimorph em configuração de atuador com $p_x=0$ em função das condições de fronteira	39B
Figura B13 - Representação gráfica da evolução dos deslocamentos transversais ao longo do comprimento de uma viga bimorph em configuração de atuador com $p_x=0,1$ em função das condições de fronteira	39B
Figura B14 - Representação gráfica da evolução dos deslocamentos transversais ao longo do comprimento de uma viga bimorph em configuração de atuador com $p_x=0,5$ em função das condições de fronteira	40B

Figura B15 - Representação gráfica da evolução dos deslocamentos transversais ao longo do comprimento de uma viga bimorph em configuração de atuador com $p_x=1$ em função das condições de fronteira	40B
Figura B16 - Representação gráfica da evolução dos deslocamentos transversais ao longo do comprimento de uma viga bimorph em configuração de atuador com $p_x=2$ em função das condições de fronteira	41B
Figura B17 - Representação gráfica da evolução dos deslocamentos transversais ao longo do comprimento de uma viga bimorph em configuração de atuador com $p_x=5$ em função das condições de fronteira	41B
Figura B18 - Representação gráfica do perfil de deslocamentos transversais para vários valores de p ao longo do comprimento de uma viga (CFFF) em configuração de sensor e discretização de 10×1 elementos	42B
Figura B19 - Representação gráfica da distribuição de potenciais elétricos em função de p_x ao longo do comprimento de uma viga (CFFF) bimorph FGM LaRC-Si/PVDF em configuração de sensor para uma discretização de 10×1 elementos	44B
Figura B20 - Representação gráfica do perfil de deslocamentos transversais para vários valores de p ao longo do comprimento de uma viga (CCFF) em configuração de sensor e discretização de 10×1 elementos	46B
Figura B21 - Representação gráfica da distribuição de potenciais elétricos em função de p_x ao longo do comprimento de uma viga (CCFF) bimorph FGM LaRC-Si/PVDF em configuração de sensor para uma discretização de 10×1 elementos	48B
Figura B22 - Representação gráfica do perfil de deslocamentos transversais para vários valores de p ao longo do comprimento de uma viga (SSFF) em configuração de sensor e discretização de 10×1 elementos	50B
Figura B23 - Representação gráfica da distribuição de potenciais elétricos em função de p_x ao longo do comprimento de uma viga (SSFF) bimorph FGM LaRC-Si/PVDF em configuração de sensor para uma discretização de 10×1 elementos	52B
Figura B24 - Representação gráfica do perfil de deslocamentos transversais para vários valores de p ao longo do comprimento de uma viga (SSFF) em configuração de sensor e discretização de 10×1 elementos	54B
Figura B25 - Representação gráfica da distribuição de potenciais elétricos em função de p_x ao longo do comprimento de uma viga (CSFF) bimorph FGM LaRC-Si/PVDF em configuração de sensor para uma discretização de 10×1 elementos	56B
Figura B26 - Representação gráfica da evolução dos deslocamentos transversais ao longo do comprimento de uma viga bimorph em configuração de atuador com $p_x=0$ em função das condições de fronteira	58B

Figura B27 - Representação gráfica da evolução dos deslocamentos transversais ao longo do comprimento de uma viga bimorph em configuração de atuador com $p_x=0,1$ em função das condições de fronteira	58B
Figura B28 - Representação gráfica da evolução dos deslocamentos transversais ao longo do comprimento de uma viga bimorph em configuração de atuador com $p_x=0,5$ em função das condições de fronteira	59B
Figura B29 - Representação gráfica da evolução dos deslocamentos transversais ao longo do comprimento de uma viga bimorph em configuração de atuador com $p_x=1$ em função das condições de fronteira	59B
Figura B30 - Representação gráfica da evolução dos deslocamentos transversais ao longo do comprimento de uma viga bimorph em configuração de atuador com $p_x=0$ em função das condições de fronteira	60B
Figura B31 - Representação gráfica da evolução dos deslocamentos transversais ao longo do comprimento de uma viga bimorph em configuração de atuador com $p_x=0$ em função das condições de fronteira	60B
Figura B32 - Representação esquemática de uma placa SSSS em alumínio	66B
Figura B33 - Representação esquemática de uma placa SSSS em PVDF em configuração de sensor.....	67B
Figura B34 - Representação esquemática de uma placa SSSS em PVDF em configuração de atuador.....	68B
Figura B35 - Representação esquemática da localização do deslocamento transversal máximo de uma placa SSSS em alumínio.....	69B
Figura B36 - Representação esquemática da localização do deslocamento transversal máximo e do potencial elétrico máximo de uma placa SSSS em PVDF para configuração de atuador e sensor	70B
Figura B37 - Representação esquemática de uma placa SSSS em FGM AL/PVDF com gradiente segundo x em configuração de sensor.....	71B
Figura B38 - Representação esquemática de uma placa SSSS em FGM AL/PVDF com gradiente segundo x em configuração de atuador	72B
Figura B39 - Representação esquemática da localização do deslocamento transversal máximo e do potencial elétrico máximo em função de p_x para uma placa FGM SSSS em configuração de sensor (deslocamentos – vermelho, $p_x=0$ e 5, verde, $p_x=0,1, 0,5, 1$ e 2; potenciais – vermelho, $p_x=0$, verde, $p_x=0,1$ e 5, azul, $p_x=0,5, 1$ e 2).....	73B
Figura B40 - Representação esquemática da localização do deslocamento transversal máximo em função de p_x para uma placa FGM SSSS em configuração de sensor (deslocamentos – vermelho, $p_x=0$, verde, $p_x=0,1, 0,5$ e 1, azul, $p_x=2$ e 5).....	74B

Figura B41 - Representação esquemática de uma placa SSSS em FGM AL/PVDF com gradiente segundo y em configuração de sensor.....	75B
Figura B42 - Representação esquemática de uma placa SSSS em FGM AL/PVDF com gradiente segundo x em configuração de atuador.....	76B
Figura B43 - Representação esquemática da localização do deslocamento transversal máximo e do potencial elétrico máximo em função de py para uma placa FGM SSSS em configuração de sensor (deslocamentos – vermelho, py=0 e 5, verde, py=0.1, 0.5, 1 e 2; potenciais – vermelho, py=0, verde, py=0.1 e 5, azul, py=0.5, 1 e 2).....	77B
Figura B44 - Representação esquemática da localização do deslocamento transversal máximo em função de py para uma placa FGM SSSS em configuração de sensor (deslocamentos – vermelho, px=0, verde, px=0.1, 0.5 e 1, azul, px=2 e 5).....	78B
Figura B45 - Representação esquemática de uma placa SSSS em FGM AL/PVDF com gradiente segundo z em configuração de sensor.....	79B
Figura B46 - Representação esquemática de uma placa SSSS em FGM AL/PVDF com gradiente segundo z em configuração de atuador.....	80B
Figura B47 - Representação esquemática de uma placa SSSS em FGM AL/PVDF com gradiente segundo x e y em configuração de sensor.....	81B
Figura B48 - Representação esquemática de uma placa SSSS em FGM AL/PVDF com gradiente segundo x e y em configuração de atuador.....	82B
Figura B49 - Representação esquemática da localização do deslocamento transversal máximo e do potencial elétrico máximo em função de px e py para uma placa FGM SSSS em configuração de sensor (deslocamentos – vermelho, p=0, 1, e 5, verde, px=py=0.1 e 0.5; potenciais – vermelho, px=py=0, verde, px=py=0.1, 0.5 e 1, azul, px=py=2 e 5).....	83B
Figura B50 - Representação esquemática da localização do deslocamento transversal máximo em função de px e py para uma placa FGM SSSS em configuração de sensor (deslocamentos – vermelho, px=py=0, verde, px=py=0.1, azul, px=py=0.5 e 1, roxo, p=2 e 5).....	84B
Figura B51 - Representação esquemática de uma placa SSSS em FGM AL/PVDF com gradiente segundo x, y e z em configuração de sensor.....	85B
Figura B52 - Representação esquemática de uma placa SSSS em FGM AL/PVDF com gradiente segundo x, y e z em configuração de sensor.....	86B
Figura B53 - Representação esquemática da localização do deslocamento transversal máximo e do potencial elétrico máximo em função de px, py e pz para uma placa FGM SSSS em configuração de sensor (deslocamentos – vermelho, px=py=pz=0, 0.1, 0.5, 1, 2 e 5; potenciais – vermelho, px=py=pz=0, verde, px=py=pz=0.1, 0.5, 1, 2 e 5).....	87B
Figura B54 - Representação esquemática da localização do deslocamento transversal máximo em função de px e py para uma placa FGM SSSS em configuração de sensor (deslocamentos –	

vermelho, $px=py=pz=0$, verde, $px=py=pz=0.1$ e 0.5 , azul, $px=py=pz=1$ e 2 , roxo, $px=py=pz=5$)
.....88B

Lista de Tabelas

Tabela 2.3.1 - Pesos e pontos de Gauss-Legendre [101].....	26
Tabela 4.1.1 - Estudo comparativo do deslocamento máximo transversal a meio vão numa viga de material isotrópico	46
Tabela 4.1.2 - Estudo comparativo do deslocamento máximo transversal adimensionalizado numa placa de material isotrópico para $L/h=20$	47
Tabela 4.1.3 - Estudo comparativo do deslocamento máximo transversal adimensionalizado para uma placa de material ortotrópico com $L/h=20$	48
Tabela 4.1.4 - Estudo comparativo do deslocamento máximo transversal adimensionalizado para uma placa de material ortotrópico	49
Tabela 4.1.5 - Estudo comparativo do deslocamento transversal máximo adimensionalizado para uma FGP utilizando Voigt e Mori-Tanaka como técnicas de homogeneização	50
Tabela 4.1.6 - Evolução do deslocamento transversal nodal para uma viga (CFFF) em configuração de actuador e respetivos desvios em relação à literatura [100]	52
Tabela 4.1.7 - Evolução do deslocamento transversal nodal para uma viga (CFFF) em configuração de actuador e respetivos desvios em relação à literatura [122]	52
Tabela 4.1.8 - Evolução do deslocamento transversal nodal para uma viga (CFFF) em configuração de actuador e respetivos desvios em relação à literatura [102]	53
Tabela 4.1.9 - Evolução do deslocamento transversal nodal para uma viga (CFFF) em configuração de actuador e respetivos desvios em relação à literatura [123]	53
Tabela 4.1.10 - Estudo comparativo do deslocamento máximo transversal adimensionalizado e do potencial elétrico local adimensionalizado para uma placa (SSFF) em atuador com $a/h=50$	54
Tabela 4.1.11 - Evolução comparativa do potencial local para uma viga (CFFF) em configuração de sensor e respetivos desvios em relação à literatura [124]	55
Tabela 4.1.12 - Evolução comparativa do potencial local para uma viga (CFFF) em configuração de sensor e respetivos desvios em relação à literatura [125]	55
Tabela 4.1.13 - Estudo comparativo do deslocamento máximo transversal adimensionalizado e do potencial elétrico local adimensionalizado para uma placa (SSFF) em sensor com $a/h=50$..	56
Tabela 4.1.14 – Valores ótimos máximo e mínimo e respetiva localização (Goldstein-Price)...	58
Tabela 4.1.15 - Estudo comparativo da média e desvio padrão dos valores ótimos obtido após 30 corridas (Goldstein-Price)	58
Tabela 4.1.16 - Valores ótimos máximo e mínimo e respetiva localização (Rastringin).....	59

Tabela 4.1.17 - Estudo comparativo da média e desvio padrão dos valores ótimos obtido após 30 corridas (Rastringin).....	59
Tabela 4.1.18 - Deslocamento máximo transversal em [m] para diferentes valores de p_z	60
Tabela 4.1.19 - Melhor ótimo, valor médio e desvio padrão da série de 10 corridas.....	60
Tabela 4.1.20 - Melhor ótimo, valor médio e desvio padrão da série de 10 corridas para controlo de forma	61
Tabela 4.1.21 - Deslocamento máximo transversal em [m] para diferentes potenciais aplicados	61
Tabela 4.1.22 - Melhor ótimo, valor médio e desvio padrão da série de 10 corridas para a minimização do deslocamento máximo transversal utilizando potencial elétrico como variável61	
Tabela 4.1.23 - Melhor ótimo, valor médio e desvio padrão de uma série de 10 corridas, 20 indivíduos e 20 iterações considerando uma placa com 2 gradientes materiais em simultâneo .	62
Tabela 4.2.1 - Estudo comparativo do deslocamento máximo transversal a meio vão numa viga de material isotrópico para diferentes valores de L/h	64
Tabela 4.2.2 - Estudo comparativo do deslocamento máximo transversal adimensionalizado numa placa de material isotrópico para diferentes valores de L/h	65
Tabela 4.2.3 - Propriedades materiais relevantes das diferentes fases	66
Tabela 4.2.4 - Estudo comparativo da evolução de w para uma FGP em função de diferentes valores de p para uma abordagem AN e utilizando a regra das misturas de Voigt.....	68
Tabela 4.2.5 - Estudo comparativo da evolução de w para uma FGP em função de diferentes valores de p para uma abordagem NA e utilizando a regra das misturas de Voigt.....	68
Tabela 4.2.6 - Estudo comparativo da evolução de w para uma FGP em função de diferentes valores de p para uma abordagem NN e utilizando a regra das misturas de Voigt.....	69
Tabela 4.2.7 - Estudo comparativo da evolução de w para uma FGP em função de diferentes valores de p para uma abordagem NN e utilizando a técnica de homogeneização Mori-Tanaka70	
Tabela 4.2.8 - Propriedades materiais do PVDF	71
Tabela 4.2.9 - Propriedades materiais relevantes das diferentes fases do FGM	77
Tabela 4.2.10 - Quadro resumo dos valores máximos do deslocamento transversal e potencial elétrico.....	79
Tabela 4.2.11 - Quadro resumo do estudo comparativo entre a abordagem contínua e discreta para os valores do deslocamento máximo transversal na extremidade livre da viga	86
Tabela 4.2.12 - Quadro resumo do estudo comparativo entre a abordagem contínua e discreta para os valores do potencial elétrico nas extremidades da viga	87
Tabela 4.2.13 – Coeficientes de rigidez elástica em [GPa] para as diferentes fases [126]	88
Tabela 4.2.14 – Coeficientes piezoelétricos e permitividade para as diferentes fases [126]	88
Tabela 4.2.15 - Evolução dos coeficientes de rigidez elástica reduzidos em [GPa] ao longo de uma viga para um FGM discreto com $p_x=5$	90

Tabela 4.2.16 - Número de pontos a utilizar na integração reduzida de acordo com o maior grau dos termos de corte para cada expoente material	113
Tabela 4.2.17 - Propriedades materiais elásticas do PZT-4 em [GPa]	114
Tabela 4.2.18 - Propriedades materiais elétricas e piezoelétricas do PZT-4	114
Tabela 4.2.19 - Deslocamento máximo transversal adimensionalizado e potencial elétrico para diferentes valores de L/h para uma placa SSFF em atuador	115
Tabela 4.2.20 - Deslocamento máximo transversal adimensionalizado e potencial elétrico para diferentes valores de L/h para uma placa SSFF em sensor	116
Tabela 4.2.21 - Propriedades elásticas e elétricas relevantes das diferentes fases do FGM	117
Tabela 4.2.22 - Deslocamentos transversais máximos, potenciais elétricos máximos e suas respectivas localizações	119
Tabela 4.2.23 - Deslocamentos transversais e potenciais elétricos máximos e suas respectivas localizações para diferentes valores de p numa placa FGM SSSS com gradiente material 1D segundo x em configuração de sensor considerando gradiente contínuo e discreto e respectivo desvio	120
Tabela 4.2.24 - Deslocamentos transversais máximos e suas respectivas localizações para diferentes valores de p numa placa FGM SSSS com gradiente material 1D segundo x em configuração de atuador considerando gradiente contínuo e discreto e respectivo desvio	121
Tabela 4.2.25 - Deslocamentos transversais máximos e potenciais elétricos máximos e suas respectivas localizações para $p_x=10$ numa placa FGM SSSS com gradiente material 1D segundo x em configuração de sensor considerando gradiente contínuo e discreto e respectivo desvio ..	122
Tabela 4.2.26 - Deslocamentos transversais e potenciais elétricos máximos e suas respectivas localizações para diferentes valores de p numa placa FGM SSSS com gradiente material 1D segundo y em configuração de sensor considerando gradiente contínuo e discreto e respectivo desvio	123
Tabela 4.2.27 - Deslocamentos transversais máximos e suas respectivas localizações para diferentes valores de p numa placa FGM SSSS com gradiente material 1D segundo y em configuração de atuador considerando gradiente contínuo e discreto e respectivo desvio	124
Tabela 4.2.28 - Deslocamentos transversais e potenciais elétricos máximos e suas respectivas localizações para diferentes valores de p numa placa FGM SSSS com gradiente material 1D segundo z em configuração de sensor considerando gradiente contínuo e discreto e respectivo desvio	125
Tabela 4.2.29 - Deslocamentos transversais máximos e suas respectivas localizações para diferentes valores de p numa placa FGM SSSS com gradiente material 1D segundo z em configuração de atuador considerando gradiente contínuo e discreto e respectivo desvio	126
Tabela 4.2.30 - Deslocamentos transversais e potenciais elétricos máximos e suas respectivas localizações para diferentes valores de p numa placa FGM SSSS com gradiente material 2D	

segundo x e y em configuração de sensor considerando gradiente contínuo e discreto e respectivo desvio	128
Tabela 4.2.31 - Deslocamentos transversais máximos e suas respectivas localizações para diferentes valores de p numa placa FGM SSSS com gradiente material 2D segundo x e y em configuração de atuador considerando gradiente contínuo e discreto e respectivo desvio	129
Tabela 4.2.32 - Deslocamentos transversais e potenciais elétricos máximos e suas respectivas localizações para diferentes valores de p numa placa FGM SSSS com gradiente material 3D segundo x, y e z em configuração de sensor considerando gradiente contínuo e discreto e respectivo desvio.....	130
Tabela 4.2.33 - Deslocamentos transversais máximos e suas respectivas localizações para diferentes valores de p numa placa FGM SSSS com gradiente material 3D segundo x, y e z em configuração de atuador considerando gradiente contínuo e discreto e respectivo desvio	131
Tabela 4.2.34 - Melhores e piores ótimos, valores médios e respectivos desvios-padrão por série em função do número de iterações e do número de Jellyfish para a função Goldstein-Price ...	135
Tabela 4.2.35 - Melhores e piores ótimos, valores médios e respectivos desvios-padrão por série em função do número de iterações e do número de Jellyfish para a função Rastringin.....	136
Tabela 4.3.1 - Quadro do resumo dos estudos de otimização de uma viga com dois gradientes materiais e dois potenciais elétricos aplicados distintos para diferentes condições de fronteira	139
Tabela 4.3.2 - Otimização de uma placa com dois gradientes materiais 1D segundo z e dois potenciais elétricos aplicados distintos	142
Tabela 4.3.3 - Otimização de uma placa com dois gradientes materiais 3D segundo x, y e z e dois potenciais elétricos aplicados distintos.....	143
Tabela A1 - Estudo comparativo da evolução do deslocamento máximo transversal adimensionalizado numa placa de material ortotrópico	2A
Tabela A2 - Estudo comparativo da evolução do deslocamento máximo transversal adimensionalizado numa placa de material ortotrópico com L/h=20	2A
Tabela A3 - Valores ótimos por corrida e respetiva localização (Goldstein-Price).....	3A
Tabela A4 - Valores ótimos por corrida e respetiva localização (Rastringin).....	4A
Tabela B1 - Estudo comparativo da evolução do deslocamento máximo transversal a meio vão numa viga de material isotrópico com L/h=1 e L/h=2 para diferentes discretizações	2B
Tabela B2 - Estudo comparativo da evolução do deslocamento máximo transversal a meio vão numa viga de material isotrópico com L/h=4 e L/h=10 para diferentes discretizações	2B
Tabela B3 - Estudo comparativo da evolução do deslocamento máximo transversal a meio vão numa viga de material isotrópico com L/h=20 e L/h=50 para diferentes discretizações	3B
Tabela B4 - Estudo comparativo da evolução do deslocamento máximo transversal a meio vão numa viga de material isotrópico com L/h=100 para diferentes discretizações.....	3B

Tabela B5 - Estudo comparativo da evolução do deslocamento máximo transversal adimensionalizado numa placa de material isotrópico com $L/h=10$ e $L/h=20$ para diferentes discretizações	4B
Tabela B6 - Estudo comparativo da evolução do deslocamento máximo transversal adimensionalizado numa placa de material isotrópico com $L/h=50$ e $L/h=100$ para diferentes discretizações	4B
Tabela B7 - Estudo comparativo da evolução de w para uma FGP em função de diferentes valores de p para uma abordagem AA e utilizando a regra das misturas de Voigt	5B
Tabela B8 - Tempos de computação em segundos do estudo comparativo da evolução de w para uma abordagem AA e utilizando a regra das misturas de Voigt	5B
Tabela B9 - Estudo comparativo da evolução de w para uma FGP em função de diferentes valores de p para uma abordagem AN e utilizando a regra das misturas de Voigt	6B
Tabela B10 - Tempos de computação em segundos do estudo comparativo da evolução de w para uma abordagem AN e utilizando a regra das misturas de Voigt	6B
Tabela B11 - Estudo comparativo da evolução de w para uma FGP em função de diferentes valores de p para uma abordagem NA e utilizando a regra das misturas de Voigt	7B
Tabela B12 - Tempos de computação em segundos do estudo comparativo da evolução de w para uma abordagem NA e utilizando a regra das misturas de Voigt	7B
Tabela B13 - Estudo comparativo da evolução de w para uma FGP em função de diferentes valores de p para uma abordagem NN e utilizando a regra das misturas de Voigt	8B
Tabela B14 - Tempos de computação em segundos do estudo comparativo da evolução de w para uma abordagem NN e utilizando a regra das misturas de Voigt	8B
Tabela B15 - Estudo comparativo da evolução de w para uma FGP em função de diferentes valores de p para uma abordagem NN e utilizando Mori-Tanaka.....	9B
Tabela B16 - Tempos de computação em segundos do estudo comparativo da evolução de w para uma abordagem NN e utilizando Mori-Tanaka.....	9B
Tabela B17 - Deslocamento máximo da extremidade livre de uma viga bimorph (CFFF) para diferentes potenciais elétricos aplicados	10B
Tabela B18 - Evolução do deslocamento transversal nodal em função do comprimento da viga (CFFF) para potenciais aplicados utilizando uma malha de 5×1 elementos	11B
Tabela B19 - Evolução do deslocamento transversal nodal em função do comprimento da viga (CFFF) para potenciais aplicados utilizando uma malha de 10×1 elementos	12B
Tabela B20 - Evolução do deslocamento transversal nodal em função do comprimento da viga (CFFF) para potenciais aplicados utilizando uma malha de 15×1 elementos	13B
Tabela B21 - Evolução do deslocamento transversal nodal para uma viga (CFFF) em configuração de atuador para uma discretização de 5×1 elementos.....	14B

Tabela B22 - Evolução do deslocamento transversal nodal para uma viga (CFFF) em configuração de atuador para uma discretização de 10×1 elementos	14B
Tabela B23 - Evolução do deslocamento transversal nodal para uma viga (CFFF) em configuração de atuador para uma discretização de 15×1 elementos	15B
Tabela B24 - Distribuição dos potenciais elétricos resultantes do deslocamento de 10 mm da extremidade livre da viga (CFFF) para uma discretização de 5×1 elementos.....	15B
Tabela B25 - Distribuição dos potenciais elétricos resultantes do deslocamento de 10 mm da extremidade livre da viga (CFFF) para uma discretização de 10×1 elementos	16B
Tabela B26 - Distribuição dos potenciais elétricos resultantes do deslocamento de 10 mm da extremidade livre da viga (CFFF) para uma discretização de 15×1 elementos	16B
Tabela B27 - Evolução do deslocamento transversal nodal para uma viga (CCFF) em configuração de atuador para uma discretização de 5×1 elementos.....	17B
Tabela B28 - Evolução do deslocamento transversal nodal para uma viga (CCFF) em configuração de atuador para uma discretização de 10×1 elementos.....	17B
Tabela B29 - Evolução do deslocamento transversal nodal para uma viga (CCFF) em configuração de atuador para uma discretização de 15×1 elementos.....	18B
Tabela B30 - Distribuição dos potenciais elétricos resultantes do deslocamento de 10 mm da extremidade livre da viga (CCFF) para uma discretização de 6×1 elementos	18B
Tabela B31 - Distribuição dos potenciais elétricos resultantes do deslocamento de 10 mm da extremidade livre da viga (CCFF) para uma discretização de 10×1 elementos	19B
Tabela B32 - Distribuição dos potenciais elétricos resultantes do deslocamento de 10 mm da extremidade livre da viga (CCFF) para uma discretização de 16×1 elementos	19B
Tabela B33 - Evolução do deslocamento transversal nodal para uma viga (CFFF) em Al para uma discretização de 10×1 elementos.....	21B
Tabela B34 - Evolução do deslocamento transversal nodal para uma viga (CFFF) bimorph PVDF em configuração de atuador para uma discretização de 10×1 elementos.....	22B
Tabela B35 - Evolução do deslocamento transversal nodal para uma viga (CFFF) bimorph PVDF em configuração de sensor para uma discretização de 10×1 elementos	23B
Tabela B36 - Evolução do potencial elétrico para uma viga (CCFF) bimorph PVDF em configuração de sensor para uma discretização de 10×1 elementos	23B
Tabela B37 - Tempos de computação em segundos para modelos numéricos em diferentes direções	24B
Tabela B38 - Evolução do deslocamento transversal nodal em função de p_x para uma viga (CFFF) bimorph FGM Al/PVDF em configuração de atuador para uma discretização de 10×1 elementos e respetivo estudo comparativo para uma viga discretizada em 1×10 elementos na direção y.	24B

Tabela B39 - Evolução do deslocamento transversal nodal em função de p_x para uma viga (CFFF) bimorph FGM Al/PVDF em configuração de sensor para uma discretização de 10×1 elementos e respetivo estudo comparativo para uma viga discretizada em 1×10 elementos na direção y ...	25B
Tabela B40 - Evolução dos potenciais elétricos em função de p_x para uma viga (CFFF) bimorph FGM Al/PVDF em configuração de sensor para uma discretização de 10×1 elementos e respetivo estudo comparativo para uma viga discretizada em 1×10 elementos na direção y	26B
Tabela B41 - Tempos de computação em segundos para diferentes valores de p utilizando modelos em diferentes direções	26B
Tabela B42 - Evolução do deslocamento transversal nodal em função de p_x para uma viga (CFFF) bimorph FGM discreta Al/PVDF em configuração de atuador para uma discretização de 10×1 elementos e respetivo estudo comparativo para uma viga discretizada em 1×10 elementos na direção y	27B
Tabela B43 - Evolução do deslocamento transversal nodal em função de p_x para uma viga (CFFF) bimorph FGM discreta Al/PVDF em configuração de atuador para uma discretização de 10×1 elementos e respetivo estudo comparativo para uma viga discretizada em 1×10 elementos na direção y	28B
Tabela B44 - Evolução dos potenciais elétricos em função de p_x para uma viga (CFFF) bimorph FGM discreta Al/PVDF em configuração de sensor para uma discretização de 10×1 elementos e respetivo estudo comparativo para uma viga discretizada em 1×10 elementos na direção y ...	29B
Tabela B45 - Tempos de computação em segundos para diferentes valores de p utilizando modelos em diferentes direções	29B
Tabela B46 - Evolução do deslocamento transversal nodal em função de p_x para uma viga (CFFF) bimorph em FGM contínuo LaRC-Si/PVDF em configuração de atuador para uma discretização de 10×1 elementos.....	30B
Tabela B47 - Evolução do deslocamento transversal nodal em função de p_x para uma viga (CFFF) bimorph em FGM discreto LaRC-Si/PVDF em configuração de atuador para uma discretização de 10×1 elementos.....	32B
Tabela B48 - Evolução do deslocamento transversal nodal em função de p_x para uma viga (CCFF) bimorph em FGM contínuo LaRC-Si/PVDF em configuração de atuador para uma discretização de 10×1 elementos.....	33B
Tabela B49 - Evolução do deslocamento transversal nodal em função de p_x para uma viga (CCFF) bimorph em FGM discreto LaRC-Si/PVDF em configuração de atuador para uma discretização de 10×1 elementos.....	34B
Tabela B50 - Evolução do deslocamento transversal nodal em função de p_x para uma viga (SSFF) bimorph em FGM contínuo LaRC-Si/PVDF em configuração de atuador para uma discretização de 10×1 elementos.....	35B

Tabela B51 - Evolução do deslocamento transversal nodal em função de px para uma viga (SSFF) bimorph em FGM discreto LaRC-Si/PVDF em configuração de atuador para uma discretização de 10×1 elementos.....	36B
Tabela B52 - Evolução do deslocamento transversal nodal em função de px para uma viga (CSFF) bimorph em FGM contínuo LaRC-Si/PVDF em configuração de atuador para uma discretização de 10×1 elementos.....	37B
Tabela B53 - Evolução do deslocamento transversal nodal em função de px para uma viga (CSFF) bimorph em FGM discreto LaRC-Si/PVDF em configuração de atuador para uma discretização de 10×1 elementos.....	38B
Tabela B54 - Evolução do deslocamento transversal nodal em função de px para uma viga (CFFF) bimorph em FGM contínuo LaRC-Si/PVDF em configuração de sensor para uma discretização de 10×1 elementos.....	42B
Tabela B55 - Evolução do deslocamento transversal nodal em função de px para uma viga (CFFF) bimorph em FGM discreto LaRC-Si/PVDF em configuração de sensor para uma discretização de 10×1 elementos	43B
Tabela B56 - Evolução dos potenciais elétricos em função de px para uma viga (CFFF) bimorph em FGM contínuo LaRC-Si/PVDF em configuração de sensor para uma discretização de 10×1 elementos.....	44B
Tabela B57 - Evolução dos potenciais elétricos em função de px para uma viga (CFFF) bimorph em FGM discreto LaRC-Si/PVDF em configuração de sensor para uma discretização de 10×1 elementos.....	45B
Tabela B58 - Evolução do deslocamento transversal nodal em função de px para uma viga (CCFF) bimorph em FGM contínuo LaRC-Si/PVDF em configuração de sensor para uma discretização de 10×1 elementos.....	46B
Tabela B59 - Evolução do deslocamento transversal nodal em função de px para uma viga (CCFF) bimorph em FGM discreto LaRC-Si/PVDF em configuração de sensor para uma discretização de 10×1 elementos	47B
Tabela B60 - Evolução dos potenciais elétricos em função de px para uma viga (CCFF) bimorph em FGM contínuo LaRC-Si/PVDF em configuração de sensor para uma discretização de 10×1 elementos.....	48B
Tabela B61 - Evolução dos potenciais elétricos em função de px para uma viga (CCFF) bimorph em FGM discreto LaRC-Si/PVDF em configuração de sensor para uma discretização de 10×1 elementos.....	49B
Tabela B62 - Evolução do deslocamento transversal nodal em função de px para uma viga (SSFF) bimorph em FGM contínuo LaRC-Si/PVDF em configuração de sensor para uma discretização de 10×1 elementos.....	50B

Tabela B63 - Evolução do deslocamento transversal nodal em função de px para uma viga (SSFF) bimorph em FGM discreto LaRC-Si/PVDF em configuração de sensor para uma discretização de 10×1 elementos	51B
Tabela B64 - Evolução dos potenciais elétricos em função de px para uma viga (SSFF) bimorph em FGM contínuo LaRC-Si/PVDF em configuração de sensor para uma discretização de 10×1 elementos.....	52B
Tabela B65 - Evolução dos potenciais elétricos em função de px para uma viga (SSFF) bimorph em FGM discreto LaRC-Si/PVDF em configuração de sensor para uma discretização de 10×1 elementos.....	53B
Tabela B66 - Evolução do deslocamento transversal nodal em função de px para uma viga (CSFF) bimorph em FGM contínuo LaRC-Si/PVDF em configuração de sensor para uma discretização de 10×1 elementos.....	54B
Tabela B67 - Evolução do deslocamento transversal nodal em função de px para uma viga (CSFF) bimorph em FGM discreto LaRC-Si/PVDF em configuração de sensor para uma discretização de 10×1 elementos	55B
Tabela B68 - Evolução dos potenciais elétricos em função de px para uma viga (CSFF) bimorph em FGM contínuo LaRC-Si em configuração de sensor para uma discretização de 10×1 elementos	56B
Tabela B69 - Evolução dos potenciais elétricos em função de px para uma viga (CSFF) bimorph em FGM discreto LaRC-Si/PVDF em configuração de sensor para uma discretização de 10×1 elementos.....	57B
Tabela B70 - Evolução do deslocamento transversal nodal em função de px para uma viga (CSFF) bimorph em FGM contínuo LaRC-Si/PVDF em configuração de atuador para uma discretização de 10×1 elementos tendo em consideração a contribuição do material para os termos de corte	61B
Tabela B71 - Evolução do deslocamento transversal nodal em função de px para uma viga (CSFF) bimorph em FGM contínuo LaRC-Si/PVDF em configuração de sensor para uma discretização de 10×1 elementos tendo em consideração a contribuição do material para os termos de corte	62B
Tabela B72 - Evolução dos potenciais elétricos em função de px para uma viga (CSFF) bimorph em FGM contínuo LaRC-Si/PVDF em configuração de sensor para uma discretização de 10×1 elementos tendo em consideração a contribuição do material para os termos de corte	63B
Tabela B73 - Deslocamento máximo transversal adimensionalizado de uma placa SSFF em configuração de atuador para diferentes L/h e discretizações	64B
Tabela B74 – Potencial elétrico máximo adimensionalizado em circuito fechado de uma placa SSFF em configuração de atuador para diferentes L/h e discretizações	64B

Tabela B75 - Deslocamento máximo transversal de uma placa SSFF em configuração de sensor para diferentes L/h e discretizações	65B
Tabela B76 – Potencial elétrico máximo em circuito fechado de uma placa SSFF em configuração de sensor para diferentes L/h e discretizações.....	65B
Tabela B77 - Tempos de computação em [s] referentes às abordagens contínua (valores de cima) e discreta (valores de baixo) aos modelos utilizados no âmbito do Estudo Paramétrico 9	89B
Tabela B78 - Série de 10 corridas com 30 indivíduos e 30 iterações (Goldstein-Price).....	90B
Tabela B79 - Série de 10 corridas com 50 indivíduos e 30 iterações (Goldstein-Price).....	90B
Tabela B80 - Série de 10 corridas com 100 indivíduos e 30 iterações (Goldstein-Price).....	91B
Tabela B81 - Série de 10 corridas com 200 indivíduos e 30 iterações (Goldstein-Price).....	91B
Tabela B82 - Série de 10 corridas com 30 indivíduos e 50 iterações (Goldstein-Price).....	92B
Tabela B83 - Série de 10 corridas com 50 indivíduos e 50 iterações (Goldstein-Price).....	92B
Tabela B84 - Série de 10 corridas com 100 indivíduos e 50 iterações (Goldstein-Price).....	93B
Tabela B85 - Série de 10 corridas com 200 indivíduos e 50 iterações (Goldstein-Price).....	93B
Tabela B86 - Série de 10 corridas com 30 indivíduos e 100 iterações (Goldstein-Price).....	94B
Tabela B87 - Série de 10 corridas com 50 indivíduos e 100 iterações (Goldstein-Price).....	94B
Tabela B88 - Série de 10 corridas com 100 indivíduos e 100 iterações (Goldstein-Price).....	95B
Tabela B89 - Série de 10 corridas com 200 indivíduos e 100 iterações (Goldstein-Price).....	95B
Tabela B90 - Série de 10 corridas com 30 indivíduos e 200 iterações (Goldstein-Price).....	96B
Tabela B91 - Série de 10 corridas com 50 indivíduos e 200 iterações (Goldstein-Price).....	96B
Tabela B92 - Série de 10 corridas com 100 indivíduos e 200 iterações (Goldstein-Price).....	97B
Tabela B93 - Série de 10 corridas com 200 indivíduos e 200 iterações (Goldstein-Price).....	97B
Tabela B94 - Série de 10 corridas com 30 indivíduos e 30 iterações (Rastringin)	98B
Tabela B95 - Série de 10 corridas com 50 indivíduos e 30 iterações (Rastringin)	98B
Tabela B96 - Série de 10 corridas com 100 indivíduos e 30 iterações (Rastringin)	99B
Tabela B97 - Série de 10 corridas com 200 indivíduos e 30 iterações (Rastringin)	99B
Tabela B98 - Série de 10 corridas com 30 indivíduos e 50 iterações (Rastringin)	100B
Tabela B99 - Série de 10 corridas com 50 indivíduos e 50 iterações (Rastringin)	100B
Tabela B100 - Série de 10 corridas com 100 indivíduos e 50 iterações (Rastringin)	101B
Tabela B101 - Série de 10 corridas com 200 indivíduos e 50 iterações (Rastringin)	101B
Tabela B102 - Série de 10 corridas com 30 indivíduos e 100 iterações (Rastringin)	102B
Tabela B103 - Série de 10 corridas com 50 indivíduos e 100 iterações (Rastringin)	102B
Tabela B104 - Série de 10 corridas com 100 indivíduos e 100 iterações (Rastringin)	103B
Tabela B105 - Série de 10 corridas com 200 indivíduos e 100 iterações (Rastringin)	103B
Tabela B106 - Série de 10 corridas com 30 indivíduos e 200 iterações (Rastringin)	104B
Tabela B107 - Série de 10 corridas com 50 indivíduos e 200 iterações (Rastringin)	104B
Tabela B108 - Série de 10 corridas com 100 indivíduos e 200 iterações (Rastringin)	105B

Tabela B109 - Série de 10 corridas com 200 indivíduos e 200 iterações (Rastringin)	105B
Tabela B110 – Melhor e pior ótimo, valor médio e desvio padrão de uma série de 10 corridas para diferentes valores de β e γ	106B
Tabela B111 – Melhor e pior ótimo, valor médio e desvio padrão de uma série de 10 corridas para diferentes valores de β e γ (continuação)	107B
Tabela C1 - Resultados obtidos para uma série de 10 corridas, 50 indivíduos e 50 iterações no estudo de otimização de uma viga (CFFF) com dois gradientes e dois potenciais elétricos distintos aplicados.....	2C
Tabela C2 - Resultados obtidos para uma série de 10 corridas, 50 indivíduos e 50 iterações no estudo de otimização de uma viga (CCFF) com dois gradientes e dois potenciais elétricos distintos aplicados.....	2C
Tabela C3 - Resultados obtidos para uma série de 10 corridas, 50 indivíduos e 50 iterações no estudo de otimização de uma viga (SSFF) com dois gradientes e dois potenciais elétricos distintos aplicados.....	3C
Tabela C4 - Resultados obtidos para uma série de 10 corridas, 50 indivíduos e 50 iterações no estudo de otimização de uma viga (CSFF) com dois gradientes e dois potenciais elétricos distintos aplicados.....	3C

Página intencionalmente deixada em branco

Nomenclatura

Siglas e Acrónimos

1D	Unidimensional
2D	Bidimensional
3D	Tridimensional
A	Atuador
AA	Analítico/Analítico
ABC	<i>Artificial Bee Colony</i>
ACO	<i>Ant Colony Optimization</i>
AN	Analítico/Numérico
CF	Condições de Fronteira
FEM	Método dos Elementos Finitos (<i>Finite Element Method</i>)
FGM	Material com Gradiente Funcional (<i>Functionally Graded Material</i>)
FGP	Placa em Material com Gradiente Funcional (<i>Functionally Graded Plate</i>)
FGPM	Material Piezoelétrico com Gradiente Funcional (<i>Functionally Graded Piezoelectric Material</i>)
FSDT	Teoria de Deformação de Corte de 1ª Ordem (<i>First Order Shear Deformation Theory</i>)
GA	Algoritmo Genético (<i>Genetic Algorithm</i>)
GDL	Grau de Liberdade
HSDT	Teoria de Deformação de Corte de Ordem Superior (<i>High Order Shear Deformation Theory</i>)
JS	<i>Jellyfish Search</i>
LSAT	Teoria de Segunda Aproximação de Love (<i>Love Second Approximation Theory</i>)
MO	Melhor Ótimo
NA	Numérico/Analítico
NN	Numérico/Numérico
PO	Pior Ótimo
PSO	<i>Particle Swarm Optimization</i>

Q4	Elemento Finito Q uadrangular de 4 Nós de <i>Lagrange</i>
S	S ensor
SI	Sistema I nternacional

Subscritos

1	Direção 1 do sistema de coordenadas cartesiano
2	Direção 2 do sistema de coordenadas cartesiano
3	Direção 3 do sistema de coordenadas cartesiano
<i>A</i>	Fase material genérica
<i>B</i>	Fase material genérica
<i>e</i>	Elemento
<i>i</i>	<i>i</i> -ésimo <i>jellyfish</i>
<i>u</i> ou <i>uu</i>	Componente associada à contribuição puramente mecânica
ϕ ou $\phi\phi$	Componente associada à contribuição puramente elétrica
<i>u</i> ϕ ou ϕ <i>u</i>	Componente associada ao acoplamento entre componente mecânica/elétrica
<i>mb</i>	Componente de membrana-flexão
<i>s</i>	Componente de corte

Sobrescritos

*	Valor ótimo
<i>AA</i>	Integração analítica na espessura e na área do elemento
<i>AN</i>	Integração analítica na espessura e numérica na área do elemento
<i>NA</i>	Integração numérica na espessura e analítica na área do elemento
<i>NN</i>	Integração numérica na espessura e na área do elemento

Fórmulas/Símbolos Químicos

Acrónimo	Designação do Elemento/Composto Químico	Fórmula/Símbolo
-	Alumínio	Al
BT	Titanato de Bário	BaTiO ₃
BST	Titanato de Sódio e Bismuto	BiNaO ₆ Ti ₂

KNN	Niobato de Sódio e Potássio	KNaNbO_3
LaRC-Si	<i>Langley Research Center – Soluble Imide</i>	-
PVDF	Fluoreto de Polivinilideno	$(\text{C}_2\text{H}_2\text{F}_2)_n$
PZT	Titanato Zirconato de Chumbo	$\text{Pb}[\text{Zr}_x\text{Ti}_{1-x}]\text{O}_3$ ($0 \leq x \leq 1$)
-	Zircónia	ZrO_2

Unidades SI

Unidade	Grandeza Quantitativa	Unidade SI
ampere	Intensidade de corrente elétrica	[A]
coulomb	Capacidade de eletricidade, carga elétrica	[C]
farad	Capacidade elétrica	[F]
joule	Energia, trabalho, quantidade de calor	[J]
metro	Comprimento	[m]
newton	Força	[N]
pascal	Pressão, tensão	[Pa]
segundo	Tempo	[s]
volt	Tensão elétrica, potencial elétrico	[V]

Simbologia Dimensional

Símbolo	Grandeza Dimensional	Unidade SI
I	Intensidade de corrente elétrica	[A]
L	Comprimento	[m]
M	Massa	[kg]
T	Tempo	[s]

Simbologia Grega

Símbolo	Descrição	Dimensão	Unidade SI
β	Coefficiente de distribuição	adimensional	-
γ	Coefficiente de movimento	adimensional	-
γ_{ij}	Componente ij de distorção, $ij = \{xy, yz, xz\}$	adimensional	-

\mathcal{D}	Componente i do deslocamento elétrico, $i = \{1, 2, 3\}$	L^2TI	$[C.m^2]$
ε_{ij}	Componente ij de extensão, $ij = \{xx, yy, zz\}$	adimensional	-
ε_{ij}	Componente ij de permissividade, $ij = \{33\}$	$L^{-3}M^{-1}T^4I^2$	$[F.M^{-1}]$
ε_{ij}^*	Componente ij de permissividade reduzido, $ij = \{33\}$	adimensional	-
\mathcal{E}_i	Componente i do campo elétrico, $i = \{1, 2, 3\}$	$LMT^{-3}I^{-1}$	$[V.m^{-1}]$
$\{\varepsilon\}$	Vetor do campo de deformações	adimensional	-
η	Coordenada natural do referencial do elemento	adimensional	-
θ_x^0	Rotação normal transversal em torno da direção Oy	adimensional	$[rad]$
θ_y^0	Rotação normal transversal em torno da direção Ox	adimensional	$[rad]$
μ	Localização média dos elementos da população	adimensional	-
$\nu_{(A)}$	Coefficiente de Poisson associado à fase A	adimensional	-
$\nu_{(B)}$	Coefficiente de Poisson associado à fase B	adimensional	-
ν_{FGM}	Coefficiente de Poisson efetivo do FGM	adimensional	-
ν_{ij}	Componente ij do coeficiente de Poisson, $ij = \{12, 21\}$	adimensional	-
ξ	Coordenada natural do referencial do elemento	adimensional	-
Π	Energia potencial	L^2MT^{-2}	$[J]$
σ_{ij}	Componente ij da tensão normal, $ij = \{xy, yz, xz\}$	$L^{-1}MT^{-2}$	$[Pa]$
$\{\sigma\}$	Vetor do campo de tensões	$L^{-1}MT^{-2}$	$[Pa]$
τ_{ij}	Componente ij da tensão de corte, $ij = \{xy, yz, xz\}$	$L^{-1}MT^{-2}$	$[Pa]$
ϕ	Potencial elétrico	$L^2MT^{-3}I^{-1}$	$[V]$
ϕ_z	Potencial elétrico na direção z aplicado ao <i>patch</i>	$L^2MT^{-3}I^{-1}$	$[V]$
Ω	Potencial de forças	adimensional	-

Simbologia Romana

Símbolo	Descrição	Dimensão	Unidade SI
A	Fase material genérica	-	-
B	Fase material genérica	-	-
$[B], [B_u]$	Matriz de acoplamento extensão-deslocamento	adimensional	-
$[B]_{mb}$	Componente de membrana flexão da matriz de acoplamento extensão-deslocamento	adimensional	-

$[B]_s$	Componente de corte da matriz de acoplamento extensão-deslocamento	adimensional	-
$[B_\phi]$	Matriz de potencial elétrico	adimensional	-
$c(t)$	Função de controlo de tempo	adimensional	-
d_{ij}	Componente ij da matriz dos coeficientes piezoelétricos (<i>strain-charge</i>)	$L^{-1}M^{-1}T^3I$	$[C.N^{-1}]$
$[d_{ij}]$	Matriz dos coeficientes piezoelétricos (<i>strain-charge</i>)	$L^{-1}M^{-1}T^3I$	$[C.N^{-1}]$
e_{ij}	Componente ij da matriz dos coeficientes piezoelétricos (<i>stress-charge</i>)	$L^{-2}TI$	$[C.m^{-2}]$
e_{ij}^*	Componente ij da matriz dos coeficientes piezoelétricos (<i>stress-charge</i>) reduzidos	$L^{-2}TI$	$[C.m^{-2}]$
$[e_{ij}]$	Matriz dos coeficientes piezoelétricos (<i>stress-charge</i>)	$L^{-2}TI$	$[C.m^{-2}]$
$[e_{ij}^*]$	Matriz dos coeficientes piezoelétricos (<i>stress-charge</i>) reduzidos	$L^{-2}TI$	$[C.m^{-2}]$
$E_{(A)}$	Módulo de elasticidade associado à fase A	$L^{-1}MT^{-2}$	[Pa]
$E_{(B)}$	Módulo de elasticidade associado à fase B	$L^{-1}MT^{-2}$	[Pa]
E_{FGM}	Módulo de elasticidade efetivo do FGM	$L^{-1}MT^{-2}$	[Pa]
E_i	Componente i do módulo de elasticidade, $i = \{1, 2\}$	$L^{-1}MT^{-2}$	[Pa]
$f_{(A)}$	Auxiliar de cálculo associado aos módulos de compressão e de corte da fase A	adimensional	-
$f(x)$	Função genérica de x	adimensional	-
$\{F\}$	Vetor de forças	$L^{-2}M^{-1}T^4I^2$	[F]
$\{F_u\}$	Vetor de forças mecânicas externas	$L^{-2}M^{-1}T^4I^2$	[F]
$\{F_a\}$	Vetor de forças mecânicas equivalentes decorrentes do potencial elétrico aplicado aos atuadores piezoelétricos	$L^{-2}M^{-1}T^4I^2$	[F]
$G_{(A)}$	Módulo de corte associado à fase A	$L^{-1}MT^{-2}$	[Pa]
$G_{(B)}$	Módulo de corte associado à fase B	$L^{-1}MT^{-2}$	[Pa]
G_{FGM}	Módulo de corte efetivo do FGM	$L^{-1}MT^{-2}$	[Pa]
G_i	Componente i do módulo de corte	$L^{-1}MT^{-2}$	[Pa]
h	Espessura (comprimento na direção Oz)	L	[m]
h_{p_i}	Espessura do i -ésimo <i>patch</i>	L	[m]
$[J]$	Matriz Jacobiana	adimensional	-

k_s	Fator de correção de corte	adimensional	-
$K_{(A)}$	Módulo de compressão associado à fase A	$L^{-1}MT^{-2}$	[Pa]
$K_{(B)}$	Módulo de compressão associado à fase B	$L^{-1}MT^{-2}$	[Pa]
K_{FGM}	Módulo de compressão efetivo do FGM	$L^{-1}MT^{-2}$	[Pa]
K_i	Modulo de compressão	$L^{-1}MT^{-2}$	[Pa]
$[K_{\phi\phi}]$	Matriz de rigidez da componente elétrica	$L^{-2}M^{-1}T^4I^2$	[F]
$[K_{\phi u}], [K_{u\phi}]$	Matriz de rigidez da componente piezoelétrica	$L^{-1}TI$	[C.m ⁻¹]
$[K_p]$	Matriz de rigidez eletricamente induzida	MT^{-2}	[N.m ⁻¹]
$[K_{uu}]$	Matriz de rigidez da componente mecânica	MT^{-2}	[N.m ⁻¹]
L	Comprimento da estrutura na direção Ox	L	[m]
L_b	Limite inferior da variável de projeto	adimensional	-
Max_{It}	Número máximo de iterações	adimensional	-
n_{pop}	Número de indivíduos da população	adimensional	-
N_i	Função de forma associada ao nó i	adimensional	-
$[N_i]$	Matriz de funções de forma	adimensional	-
p_x	Expoente da lei de potência na direção Ox	adimensional	-
p_y	Expoente da lei de potência na direção Oy	adimensional	-
p_z	Expoente da lei de potência na direção Oz	adimensional	-
P_Ω	Ponto genérico na superfície média	-	-
$P_{(A)}$	Propriedade genérica associada à fase A	adimensional	-
$P_{(B)}$	Propriedade genérica associada à fase B	adimensional	-
P_{FGM}	Propriedade genérica efetiva do FGM	adimensional	-
Q_{ij}	Componente ij da matriz dos coeficientes de rigidez elástica	$ML^{-1}T^{-2}$	[Pa]
Q_{ij}^*	Componente ij da matriz dos coeficientes de rigidez elástica reduzidos	$ML^{-1}T^{-2}$	[Pa]
$[Q_{ij}]$	Matriz dos coeficientes de rigidez elástica	$ML^{-1}T^{-2}$	[Pa]
$[Q_{ij}^*]$	Matriz dos coeficientes de rigidez elástica reduzidos	$ML^{-1}T^{-2}$	[Pa]
u	Deslocamento n	L	[m]
u^0	Deslocamento de um ponto genérico da superfície média na direção Ox	L	[m]
U	Energia elástica de deformação	L^2MT^{-2}	[J]
U_0	Função densidade de energia elástica de deformação	adimensional	-

U_b	Limite superior da variável de projeto	adimensional	-
U_{mb}	Componente de membrana-flexão da energia elástica de deformação	L^2MT^{-2}	[J]
U_s	Componente de corte da energia elástica de deformação	L^2MT^{-2}	[J]
v^0	Deslocamento de um ponto genérico da superfície média na direção Oy	L	[m]
V	Volume de um corpo sólido	L^3	[m ³]
V_f	Fração volúmica	adimensional	[m.m ⁻¹]
$V_{f(A)}$	Fração volúmica da fase A	adimensional	[m.m ⁻¹]
$V_{f(B)}$	Fração volúmica da fase B	adimensional	[m.m ⁻¹]
w	Deslocamento máximo transversal na direção do eixo Oz	L	[m]
w^0	Deslocamento de um ponto genérico da superfície média na direção Oz	L	[m]
\bar{w}	Deslocamento máximo transversal adimensionalizado	adimensional	-
W	Largura (comprimento na direção Oy)	L	[m]
x	Coordenada espacial do referencial cartesiano (eixo Ox)	L	[m]
X_i	Localização do i -ésimo <i>jellyfish</i>	adimensional	-
X^*	Localização do melhor <i>jellyfish</i>	adimensional	-
y	Coordenada espacial do referencial cartesiano (eixo Oy)	L	[m]
z	Coordenada espacial do referencial cartesiano (eixo Oz)	L	[m]

Página intencionalmente deixada em branco

Índice

Agradecimentos	v
Resumo	vii
Abstract	ix
Lista de Figuras	xi
Lista de Tabelas	xxi
Nomenclatura	xxxiii
1. Introdução	1
1.1. Enquadramento	1
1.2. Motivação	3
1.3. Objetivos	3
1.4. Estrutura da dissertação	4
1.5. Notas para o leitor	4
2. Tópicos Estruturantes	5
2.1. Materiais Compósitos	5
2.1.1. Materiais Compósitos com Gradiente Funcional	7
2.2. Estruturas e Materiais Inteligentes	12
2.2.1. Materiais Piezoelétricos	15
2.3. Campo de Deslocamentos e Relação Constitutiva	17
2.3.1. Campos de deslocamentos e de deformações	18
2.3.2. Relações Constitutivas e Modelos Materiais	19
2.3.3. Equações de Equilíbrio e Modelo de Elementos Finitos	23
2.4. Otimização	28
2.4.1. Metaheurísticas	30
2.4.2. <i>Jellyfish Search</i>	31
3. Metodologia	35
3.1. Aplicações Desenvolvidas	35
4. Estudos Numéricos	45
4.1. Estudos de Verificação	45
4.1.1. Casos de estudo sem efeito piezoelétrico	46
4.1.1.1. Material Isotrópico	46
4.1.1.2. Material Ortotrópico	47

4.1.1.3. Material com Gradiente Funcional (FGM)	49
4.1.2. Casos de estudo com efeito piezoelétrico	51
4.1.2.1. Efeito inverso – Funcionamento como atuador	51
4.1.2.2. Efeito direto – Funcionamento como Sensor	54
4.1.3. Componente de Otimização	56
4.1.3.1. Funções de <i>Benchmark</i>	57
4.1.3.2. Otimização de Estruturas	59
4.2. Estudos Paramétricos	63
4.2.1. Casos de estudo sem efeito piezoelétrico	63
4.2.1.1. Influência da Razão de Aspeto L/h	63
4.2.1.2. Influência do Parâmetro pz da Lei de Potência do FGM	66
4.2.2. Casos de estudo com efeito piezoelétrico	70
4.2.2.1. Influência do Potencial Elétrico (Viga)	70
4.2.2.2. Influência das Condições de Fronteira (Viga IH)	72
4.2.2.3. Influência do Parâmetro px da Lei de Potência do FGM	77
4.2.2.4. Influência das Condições de Fronteira (FGPM)	87
4.2.2.5. Influência da Razão de Aspeto L/h (Placa)	113
4.2.2.6. Influência da Distribuição 3D de Fases em FGM (Placa)	117
4.2.3. Otimização	133
4.2.3.1. Influência do número de indivíduos e iterações	133
4.2.3.2. Influência dos coeficientes β e γ	136
4.3. Estudos de Otimização	138
5. Conclusões e Trabalhos Futuros	145
Referências	149
Anexos	161
Anexo A	1A
Anexo B	1B
Anexo C	1C

1. Introdução

O presente capítulo, que marca o ponto de partida da presente dissertação, apresenta o enquadramento, expõe a motivação e estabelece objetivos, bem como a estrutura que se pensou melhor retratar o trabalho desenvolvido.

1.1. Enquadramento

Os materiais acompanham a humanidade desde os seus primeiros passos. A utilização e transformação de materiais ao longo dos tempos, permitiu o desenvolvimento e crescimento de civilizações, na medida em que o grau de consciência e avanço civilizacional é acompanhado pela crescente sofisticação dos materiais utilizados [1]. Desta forma, é possível agregar certos períodos da história em função dos materiais dominantes, como a Idade da Pedra, Idade do Bronze e a Idade do Ferro, na medida em que o desenvolvimento intelectual e a descoberta de novas tecnologias foram permitindo ao Homem a descoberta de novos materiais, que impactaram largamente o seu modo de vida [2]–[4].

A relação de afinidade existente entre o desenvolvimento tecnológico e o progresso da ciência nos materiais é inegável, estando, em última análise, a derradeira limitação ao desenvolvimento de novas soluções em engenharia, associada à disponibilidade de materiais adequados, capazes de atender aos requisitos de funcionamento dos equipamentos ou estruturas. Neste aspeto, os materiais compósitos representam um grande passo na constante procura por mais e melhores materiais [5]. Estes consistem na combinação de dois ou mais materiais imiscíveis, permitindo obter um material com propriedades distintas dos seus constituintes isolados. Tradicionalmente constituídos por uma fase contínua que assume a designação de matriz, estes materiais podem ser classificados em função da sua fase de reforço, que poderá ser constituída por fibras ou partículas de diferentes dimensões [6]. Apesar da sua ocorrência de um modo espontâneo na natureza, como a madeira, composta por fibras de celulose numa matriz de lignina, ou até mesmo os ossos, que resultam da combinação de fibras de colagénio embutidas numa matriz de apatite; são os materiais sintetizados que, pela possibilidade de conceção deliberada que oferecem, e consequente personalização das suas propriedades para uma determinada tarefa, representam uma resposta

quase ótima ao objetivo de desenvolver o melhor material, para uma dada função, a um custo razoável [5], [7].

O desenho e concepção de materiais para uma dada aplicação, representa um grande salto na forma como são abordados os problemas em engenharia. As propriedades do material são criteriosamente trabalhadas e adaptadas ao projeto em questão, e não o contrário, garantindo particular fluidez a todo o processo. A grande vantagem desta abordagem, pode ser traduzida na obtenção de estruturas de baixo peso e simultaneamente, de elevada rigidez [5]. Exemplo disso, é a crescente aplicação deste tipo de materiais a estruturas de equipamentos aeronáuticos, representando em alguns casos, mais de 50% das mesmas [8], [9].

Tradicionalmente, as abordagens em engenharia conduzem ao sobredimensionamento de estruturas e equipamentos. Desde a colocação de reforços ou a utilização de materiais com características de resistência e rigidez mais adequadas, o intuito será sempre garantir alguma margem de segurança, ao antecipar possíveis eventos críticos que possam ocorrer. Apesar de eficaz, esta abordagem não deixa de apresentar algumas desvantagens: o custo é naturalmente superior pela necessidade de maior quantidade ou melhores propriedades do material, e o processo de otimização – a existir – é condicionado pela margem de segurança. Neste domínio, o conceito de estruturas adaptativas ou inteligentes assume particular interesse. Estas estruturas caracterizam-se pela sua adaptabilidade às condições do meio envolvente, permitindo modificar a sua resposta à semelhança do que fazem os seres vivos. A mimetização deste conceito no projeto em engenharia permite priorizar a função, concebendo-se o material avançado e otimizando a estrutura para as condições de serviço expectáveis, ficando a resposta a eventos críticos a cargo da componente adaptativa da estrutura. Alcançar uma estrutura com um grau de autonomia semelhante à de um equivalente natural representa, atualmente, um dos maiores desafios em engenharia, pela resposta multidisciplinar que implica [7].

A utilização de materiais inteligentes de modo a garantir as capacidades sensoriais e de atuação de uma estrutura, figura entre uma das muitas respostas possíveis para o problema. Estes materiais podem ser utilizados como sensores e ou atuadores devido à transdução de energia entre diferentes campos, como por exemplo o campo elástico e elétrico no caso dos materiais piezoelétricos. O acoplamento eletromecânico exibido por estes materiais permite a conversão de uma deformação em sinal elétrico (efeito piezoelétrico direto), e a transformação de um sinal elétrico numa deformação (efeito piezoelétrico inverso), o que possibilita a sua utilização como sensores e atuadores nos mais variados contextos. De entre os materiais piezoelétricos mais conhecidos e utilizados destacam-se o Titanato Zirconato de Chumbo (PZT) e o Fluoreto de Polivinilideno (PVDF), que por se tratarem de matérias cerâmicas e poliméricas, respetivamente,

apresentam propriedades mecânicas limitadas, podendo também o seu custo limitar a sua aplicação [2].

A sua utilização num contexto de material compósito, mais concretamente de material com gradiente funcional, permite ultrapassar os constrangimentos identificados, ao permitir simultaneamente a combinação com um material com propriedades mecânicas superiores e concentrar o material piezoelétrico onde será realmente necessário. O desenvolvimento destes materiais pode assim ser personalizado para uma dada aplicação, envolvendo o seu projeto um conjunto de variáveis, como o gradiente, as propriedades mecânicas e as propriedades piezoelétricas, tornando-os excelentes candidatos para a aplicação de processos de otimização. A otimização de estruturas constituídas por materiais de gradiente funcional é um caminho que vem sendo percorrido, e é impulsionada pela crescente procura por este tipo de soluções [10]. Ao nível das estruturas piezoelétricas de gradiente funcional existe também uma atenção cada vez maior no tópico da otimização, sendo por isso fundamental um maior conhecimento sobre esta temática [11], [12].

1.2. Motivação

Afirmar que a motivação para a presente dissertação decorre de uma única situação ou interesse é – na ótica do autor – uma visão redutora, que não permite transmitir todo um contexto. Resulta sim, de um conjunto de eventos, enquadrados numa lógica temporal que antecede e simultaneamente coincide com o período de realização, sem os quais não faria sentido trabalhar esta temática. A começar pelo interesse pessoal no domínio da mecânica computacional, na qual o objeto de estudo representa um despertar da curiosidade e da vontade de enriquecer o ser. A conjuntura académica que fornece o momento e a oportunidade de aprofundar noções e adir conhecimentos concretos, numa temática relevante em termos académicos e profissionais, de magnitude crescente e de imenso potencial transformador, no modo como são pensadas e concebidas as estruturas em engenharia. A opção pelos tópicos estudados resulta da identificação de áreas que mereciam um maior desenvolvimento de acordo com o estado da arte efetuado.

1.3. Objetivos

Com o propósito de atender à problemática exposta pelo enquadramento e simultaneamente concretizar as motivações, o principal objetivo do trabalho, que se traduz no presente documento, consiste no estudo da resposta estática e consequente otimização baseada num algoritmo bio-inspirado, de estruturas que tiram partido da combinação dos conceitos de FGM em contextos multidirecionais contínuos e discretos, e materiais inteligentes no domínio da piezoelectricidade. Tal tarefa compreende o desenvolvimento de uma aplicação simbólica e numérica que permita a

realização de estudos e obtenção de resultados, tendo em vista a caracterização e otimização do comportamento das estruturas. Para tal propõem-se a realização de um conjunto abrangente de estudos, que incluem uma componente de verificação, paramétrica e de otimização.

1.4. Estrutura da dissertação

A estrutura que se pensa, melhor permitir abordar os conteúdos temáticos abrangidos, bem como atender aos objetivos definidos, compreende a divisão do presente documento em 5 capítulos.

No presente capítulo, e também o primeiro da dissertação, é apresentado um enquadramento geral da temática a abordar, a motivação do autor e também os objetivos, enquanto linhas orientadoras, mas também enquanto metas a atingir. O segundo capítulo, um dos mais extensos do documento, procura, de um modo geral, estruturar conceitos importantes e em simultâneo apresentar as temáticas abordadas. O terceiro capítulo é dedicado à exposição da metodologia aplicada, expondo num encadeamento que se entente simultaneamente lógico e pedagógico, as sucessivas etapas percorridas com vista à obtenção de resultados. O quarto capítulo é naturalmente dedicado à apresentação e análise de resultados obtidos, com origem nos diferentes estudos realizados. O quinto, e último, capítulo apresenta as conclusões gerais bem como algumas propostas em termos de trabalhos futuros.

1.5. Notas para o leitor

O presente documento é constituído por um total de 321 páginas, entre documento principal e anexos. Nele constam um total de 128 figuras e 181 tabelas repartidas pelos diferentes capítulos e anexos. É citado um total de 126 referências de acordo com o modelo IEEE [13].

Na versão digital do presente documento todas as equações, figuras, secções, subcapítulos, tabelas e tópicos referidos no texto apresentam hiperligações, aconselhando-se a navegação no documento com o seu auxílio.

2. Tópicos Estruturantes

O presente capítulo procura, de um modo geral, apresentar e estruturar conceitos importantes para o desenvolvimento da presente dissertação e, em simultâneo, apresentar uma visão alargada e contemporânea das temáticas abordadas, permitindo criar linhas orientadoras do trabalho a desenvolver. São abordados, com a profundidade necessária, conceitos relevantes ao tema e aos objetivos do trabalho desenvolvido, como o de material compósito, material com gradiente funcional, estruturas e materiais inteligentes, relações constitutivas, método dos elementos finitos e otimização.

2.1. Materiais Compósitos

Segundo a literatura [5], [6], [14]–[17], um material compósito é o produto da combinação, a uma escala macroscópica, de dois ou mais materiais imiscíveis, cujas propriedades são desejáveis, ainda que inalcançáveis por nenhum dos seus constituintes isolados. As diferenças ao nível da composição química e forma dos seus constituintes evitam a sua reação química, permitindo aos diferentes materiais reter as suas propriedades e cooperarem entre si. Desta forma, obtém-se um conjunto de propriedades resultantes que, embora distintas, preservam em parte as melhores características de cada um dos materiais.

A propósito da sua composição, de um modo geral, estão presentes uma matriz e um reforço, podendo também estar presente uma fase adicional que ocorre entre os anteriores, resultante de diversos fatores e que se designa interface [16]. No caso da primeira, esta assume-se como um meio contínuo que garante a forma do material compósito e, em simultâneo, protege os elementos de reforço e transfere as solicitações aplicadas ao material para o reforço, razão pela qual também se designa por fase contínua [14], [18]. Tipicamente, esta fase apresenta propriedades mecânicas inferiores relativamente à fase de reforço, que se encontra dispersa na matriz, assumindo, por isso, a designação de fase descontínua [16]. A natureza heterogénea deste tipo de materiais torna-os particularmente interessantes do ponto de vista das suas propriedades. A imiscibilidade das diferentes fases conjugadas, que permite aos materiais reter parcial ou totalmente as suas identidades, influencia de forma significativa as propriedades dos materiais compósitos, mas não de modo exclusivo. Parâmetros de ordem estrutural, como a conectividade, frações volúmicas,

dimensão e forma e, ainda, distribuição e orientação espacial das diferentes fases, em particular da fase de reforço, desempenham um papel fundamental nas características dos materiais compósitos [15], [16], [19].

No que refere à sua tipologia, os materiais compósitos podem ser agrupados em diferentes categorias. A divisão em três tipos diferentes, utilizada por Reddy [20], é a mais comum, mas também a que melhor serve os propósitos do presente trabalho. São eles os materiais compósitos com reforço de fibra, os materiais compósitos com reforço de partículas e os materiais compósitos laminados. Os primeiros resultam da dispersão de fibras de um material numa matriz de outro, ao passo que os segundos são o resultado da dispersão de partículas macroscópicas numa matriz de outro material distinto. Os compósitos laminados assumem a particularidade de serem constituídos por diferentes camadas de diferentes materiais, incluindo materiais compósitos das tipologias anteriores.

Quando comparados com os seus congéneres tradicionais, os materiais compósitos apresentam características de resistência e de rigidez mais adequadas, dada a possibilidade que oferecem de serem projetados para um determinado fim, tirando partido da sua natureza heterogénea e anisotrópica [21]. Exemplo disso é a maior rigidez específica que tipicamente apresentam [22], [23]. Entre outros aspetos, destaca-se também a maior resistência à fadiga, maior ductilidade estrutural e baixa densidade [16].

Os materiais compósitos apresentam também um conjunto de desvantagens. De um modo geral, o seu custo é superior face a outras soluções [24], apresentam significativa sensibilidade à humidade [25], e a previsão do seu comportamento e da sua falha tem uma dificuldade acrescida [18]. Apesar de benéfica, a heterogeneidade e anisotropia do material pode também representar aspetos menos positivos [21]. No caso concreto dos laminados feitos a partir de materiais compósitos com reforço de fibra, a disparidade das propriedades existentes em conjunto com outros fatores, potenciam a concentração de tensões. Em consequência, observam-se frequentemente fenómenos de delaminação (separação progressiva das fases contínua e descontínua), quebra da matriz e separação de camadas [17], [20], [21], [26]. A minimização da probabilidade de ocorrência destes modos de falha, em especial da questão da delaminação, é um caminho que vem sendo percorrido e do qual têm surgido propostas interessantes, como por exemplo os materiais com gradiente funcional. Estes permitem a redução efetiva das concentrações de tensões, por meio da redução de descontinuidades materiais, ao garantir a existência de um gradiente material contínuo [27].

2.1.1. Materiais Compósitos com Gradiente Funcional

A utilização de materiais com gradiente funcional (FGM) representa uma abordagem interessante à problemática da delaminação identificada no tópico anterior. Inicialmente desenvolvido para melhorar a adesão de revestimentos cerâmicos para aplicação em escudos térmicos de veículos aeroespaciais, consiste na variação contínua de propriedades e rapidamente se tornou perceptível a extensibilidade do conceito a qualquer material. Uma classe de materiais compósitos, os FGM são constituídos por duas ou mais fases, cujas frações volúmicas variam de um modo gradual no volume, i.e., numa ou mais direções. Deste modo, obtém-se um material cujas propriedades materiais variam contínua e gradualmente, resultando na minimização das concentrações de tensões de origem térmica e consequente mitigação de problemas nas interfaces [28]–[32].

Atualmente, a aplicabilidade dos FGM estende-se muito além das aplicações aeroespaciais que deram origem ao conceito. Exemplo disso é a sua crescente aplicação em áreas tão diversas como a medicina, com os biomateriais e dispositivos médicos [33]–[37]; energias, na sua produção e transporte [38]–[40]; dispositivos eletrônicos, em baterias, semicondutores, sensores, atuadores e circuitos integrados, entre outros [41]–[43]; indústria automóvel, em diversos componentes e conjuntos críticos [44]–[48]; defesa, em armamento e blindagem [48], [49]; ferramentas e maquinaria, através de revestimentos em ferramentas de corte e diversos órgãos de máquinas [50]–[53]; ou ainda a construção, em isolamentos térmicos e acústicos [27]. A vasta aplicabilidade do conceito de FGM é, em parte, devida às inúmeras possibilidades combinatórias, que permitem adequar as propriedades efetivas do material às funções a desempenhar [20], [28], [54].

À semelhança dos materiais compósitos tradicionais, também no FGM é feita a combinação de diferentes fases, com o propósito de alcançar um conjunto de propriedades desejáveis, mas que de outro modo não seriam alcançáveis. A grande particularidade dos FGM é a transição contínua e gradual entre fases, que permite combinar funções diametralmente opostas do ponto de vista dos materiais homogêneos. No caso de um FGM bifásico cerâmico-metal, esta realidade é bem patente. Um cerâmico é, por norma, um material duro, resistente ao desgaste, ao calor e à oxidação, pouco denso, mas também frágil. Já um metal, é habitualmente um material com comportamento dúctil, tenaz à fratura, condutor elétrico e maquinável, ainda que denso. Por sua vez, o FGM resultante poderá ser um material duro, mas não frágil, resistente, mas pouco denso, e capaz de conduzir corrente elétrica, suportar temperaturas elevadas e ser resistente à corrosão [27].

A propósito das propriedades materiais efetivas dos FGM, estas resultam não só da conjugação das diferentes fases, mas também da sua distribuição espacial. Esta evolui de modo contínuo e gradual segundo as diferentes direções do espaço, sendo responsável pela variação da composição e/ou microestrutura, de acordo com uma determinada lei [27], [55]. Contudo, a noção de fase assume contornos ligeiramente diferentes, face aos materiais compósitos tradicionais. Para o FGM, o conceito de fase pode assumir um propósito mais amplo, podendo estar não só associada ao material em si, mas também ao estado físico e geometria com que se apresenta [28]. Cerâmicos, metais e polímeros encontram-se entre as fases mais comuns dos FGM [27]. Nos casos mais simples, os FGM são constituídos por duas fases, com o gradiente a evoluir numa única direção, i.e., unidirecionalmente (1D). No entanto, são também possíveis FGM com gradientes multidirecionais, nos quais o gradiente evolui bidirecionalmente (2D) ou tridimensionalmente (3D) [56]. A respeito dos diferentes gradientes mencionados, a Figura 2.1.1 apresenta esquematicamente exemplos das distribuições de fases, em que, dependendo do gradiente considerado, a distribuição de fases se verifica unidirecionalmente de uma superfície para a outra (Figura 2.1.1.a); a distribuição de fases se verifica bidirecionalmente de uma aresta para outra (Figura 2.1.1.b); a distribuição de fases se verifica tridimensionalmente de um ponto para outro (Figura 2.1.1.c).

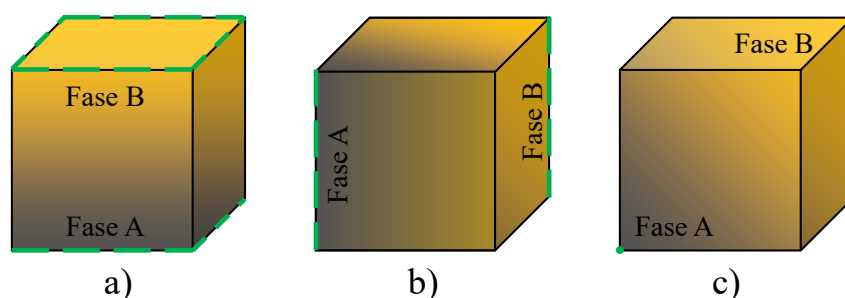


Figura 2.1.1 - Representação de diferentes gradientes materiais, (a) 1D, (b) 2D e (c) 3D

A crescente utilização e extensão do conceito FGM a novas áreas de aplicação, tem vindo a revelar o grande potencial destes materiais [38]. Consequentemente, verifica-se uma tendência de estudo crescente dos mesmos por parte da comunidade científica [57], [58]. Considerados materiais avançados, os FGM fazem depender as suas propriedades de gradientes de composição, microestrutura e/ou propriedades específicas, como as porosidades [38]. Os gradientes, por sua vez, resultam da variação das frações volúmicas das diferentes fases segundo as direções estipuladas [59]. A fração volúmica pode ser descrita como o volume de uma dada fase relativamente a um volume total, neste caso de um FGM, obtida com recurso a um conjunto de idealizações ou de aproximações matemáticas [60]. Considerando uma variação contínua e gradual das diferentes fases, a evolução da distribuição das frações volúmicas pode ser modelada por meio de expressões matemáticas, sendo as mais comuns na literatura a lei de potência e a lei

exponencial [38]. Em termos absolutos, a lei de potência é o modelo mais amplamente utilizado e frequentemente citado [31]. Traduz-se, por exemplo, na expressão da equação (2.1.1), na qual a evolução da fração volúmica da fase A, $V_{f(A)}(x, y, z)$, é função das coordenadas espaciais x , y e z . Os expoentes p_x , p_y e p_z estabelecem o modo como é feita a distribuição de fases na sua respetiva direção, estando L , W e h associados às dimensões da estrutura – viga ou placa – segundo as direções x , y e z , respectivamente.

$$V_{f(A)}(x, y, z) = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h}\right)^{p_z} \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^{p_x} \cdot \left(\frac{y}{W}\right)^{p_y}, 0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq W, -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (2.1.1)$$

As origens dos FGM enquanto escudos térmicos para aplicações aeroespaciais, leva a que expressão mais comum da lei de potência, seja somente função da coordenada z , habitualmente associada à espessura do compósito, como demonstra a equação (2.1.2). Nestes casos de gradientes na direção da espessura, o expoente p_z ou simplesmente p , estabelece o modo como é feita a distribuição das diferentes fases ao longo da espessura das placas, das vigas ou, eventualmente, também das cascas. Considerando diferentes valores de p , é possível obter diferentes distribuições de fases, como se verifica na Figura 2.1.2, o que resulta em materiais com propriedades distintas e como tal distintos entre si.

$$V_{f(A)}(z) = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h}\right)^{p_z}, -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (2.1.2)$$

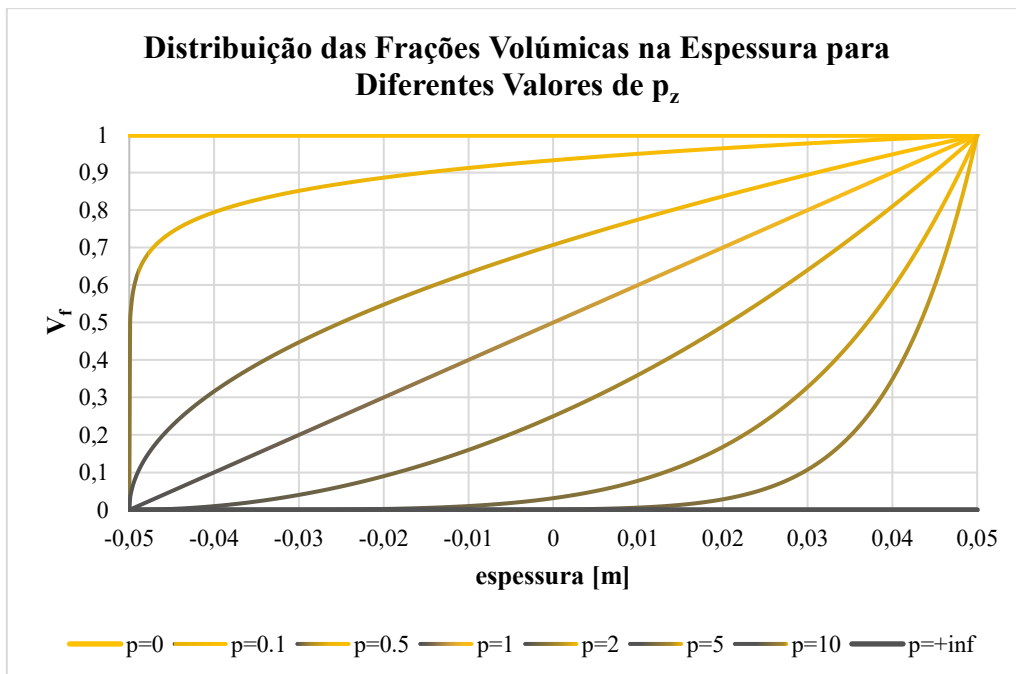


Figura 2.1.2 - Evolução da distribuição das frações volúmicas em função da espessura para diferentes valores do expoente p_z

A sua heterogeneidade é, por isso, uma característica bem presente que pode conferir aos FGM uma vantagem face aos materiais homogêneos [38]. Adicionalmente, a possibilidade de personalizar/projetar estes materiais para objetivos pré-definidos destaca-se como um aspeto positivo, ainda que represente um desafio adicional à previsão das propriedades materiais efetivas, devido à grande variedade de *outputs* que possibilita. Independentemente da conjugação das condições de serviço aplicadas e dos gradientes materiais e/ou estruturais existentes, o conhecimento destas é da maior importância, dado que a resposta mecânica deriva das propriedades materiais efetivas. De modo semelhante aos seus congêneres compósitos mais tradicionais, considerando que as dimensões à escala microscópica são largamente superiores às dimensões moleculares, e, simultaneamente, inferiores à dimensão característica da amostra macroscópica, é possível considerar o FGM como sendo contínuo a uma escala microscópica, possibilitando a obtenção das suas propriedades materiais efetivas a uma escala macroscópica [61]. Tecidas as premissas iniciais, as propriedades materiais efetivas podem ser estimadas com recurso a diferentes técnicas de homogeneização. Das inúmeras abordagens utilizadas por diferentes autores, destaque para a regra das misturas de Voigt e a técnica de homogeneização de Mori-Tanaka [54], [59], [61].

A regra das misturas de Voigt assume-se como a técnica de homogeneização mais simples. Trata-se de um modelo baseado em pressupostos da mecânica dos materiais, no qual se assume uma extensão/deformação uniforme [62]. Matematicamente, traduz-se na expressão da equação (2.1.3), na qual a propriedade material efetiva do FGM, $P_{FGM}(x, y, z)$, é função das coordenadas x , y e z . $P_{(A)}$ e $P_{(B)}$ representam, respectivamente, a correspondente propriedade material das fases A e B , enquanto $V_{f(A)}(x, y, z)$ e $V_{f(B)}(x, y, z)$ representam, as frações volúmicas das fases A e B , no ponto definido pelas coordenadas x , y e z .

$$P_{FGM}(x, y, z) = P_{(A)} \cdot V_{f(A)}(x, y, z) + P_{(B)} \cdot V_{f(B)}(x, y, z) \quad (2.1.3)$$

No caso expresso na equação (2.1.3), de um FGM bifásico e na ausência de porosidades, existe uma complementaridade entre fases e que é expressa através da equação (2.1.4).

$$V_{f(A)}(x, y, z) + V_{f(B)}(x, y, z) = 1 \quad (2.1.4)$$

Paralelamente, o modelo de Mori-Tanaka representa uma abordagem simplificada, baseada na teoria da elasticidade, no qual se considera a dispersão aleatória de partículas (fase B) numa matriz contínua (fase A) [62]. A sua formulação é dada através das equações (2.1.5) e (2.1.6), onde $K_{FGM}(x, y, z)$, $K_{(A)}$ e $K_{(B)}$ representam, respectivamente, o módulo de compressão efetivo do FGM em função das coordenadas x , y e z , o módulo de compressão do material associado à fase A e o módulo de compressão do material associado à fase B . $G_{FGM}(x, y, z)$, $G_{(A)}$ e $G_{(B)}$ representam, respectivamente, o módulo de corte efetivo do FGM num ponto (x, y, z) , o módulo

de corte do material associado à fase A e o módulo de corte do material associado à fase B . O parâmetro $f_{(A)}$ representa uma variável auxiliar de cálculo dependente dos módulos de compressão e de corte correspondentes à fase A , determinável por meio da equação (2.1.7).

$$\frac{K_{FGM}(x, y, z) - K_{(A)}}{K_{(B)} - K_{(A)}} = \frac{V_{f_{(B)}}(x, y, z)}{1 + \left(1 - V_{f_{(B)}}(x, y, z)\right) \cdot \left(\frac{K_{(B)} - K_{(A)}}{K_{(A)} + \frac{4}{3}G_{(A)}}\right)} \quad (2.1.5)$$

$$\frac{G_{FGM}(x, y, z) - G_{(A)}}{G_{(B)} - G_{(A)}} = \frac{V_{f_{(B)}}(x, y, z)}{1 + \left(1 - V_{f_{(B)}}(x, y, z)\right) \cdot \left(\frac{G_{(B)} - G_{(A)}}{G_{(A)} + f_{(A)}}\right)} \quad (2.1.6)$$

$$f_{(A)} = \frac{G_{(A)}(9K_{(A)} + 8G_{(A)})}{6(K_{(A)} + 2G_{(A)})} \quad (2.1.7)$$

Por sua vez, os módulos de compressão e de corte associados às fases, são obtidos através das equações (2.1.8) a (2.1.11), nas quais $E_{(A)}$ e $E_{(B)}$ representam, respectivamente, os módulos de elasticidade dos materiais associados às fases A e B , enquanto $\nu_{(A)}$ e $\nu_{(B)}$ representam os coeficientes de Poisson dos mesmos materiais designados por fases A e B .

$$K_{(A)} = \frac{E_{(A)}}{3(1 - 2\nu_{(A)})} \quad (2.1.8)$$

$$K_{(B)} = \frac{E_{(B)}}{3(1 - 2\nu_{(B)})} \quad (2.1.9)$$

$$G_{(A)} = \frac{E_{(A)}}{2(1 + \nu_{(A)})} \quad (2.1.10)$$

$$G_{(B)} = \frac{E_{(B)}}{2(1 + \nu_{(B)})} \quad (2.1.11)$$

Resolvendo as equações (2.1.5) e (2.1.6), obtém-se os módulos de compressão e de corte efetivos do FGM (equações (2.1.12) e (2.1.13)). Importa referir que por uma questão de otimização de espaço, as propriedades que dependem da sua localização espacial não apresentam as coordenadas (x, y, z) .

$$K_{FGM} = \frac{4G_{(A)}K_{(A)} + 3K_{(A)}K_{(B)} - 4G_{(A)}K_{(A)}V_{f_{(B)}} + 4G_{(A)}K_{(B)}V_{f_{(B)}}}{4G_{(A)} + 3K_{(B)} + 3K_{(A)}V_{f_{(B)}} - 3K_{(B)}V_{f_{(B)}}} \quad (2.1.12)$$

$$G_{FGM} = \frac{G_{(A)}f_{(A)} + G_{(A)}G_{(B)} - G_{(A)}V_{f_{(B)}}f_{(A)} + G_{(B)}V_{f_{(B)}}f_{(A)}}{G_{(B)} + f_{(A)} + G_{(A)}V_{f_{(B)}} - G_{(B)}V_{f_{(B)}}} \quad (2.1.13)$$

Posteriormente, o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson efetivos, são obtidos através da aplicação das equações (2.1.14) e (2.1.15).

$$E_{FGM} = \frac{9K_{FGM} G_{FGM}}{3K_{FGM} + G_{FGM}} \quad (2.1.14)$$

$$\nu_{FGM} = \frac{3K_{FGM} - 2G_{FGM}}{2(3K_{FGM} + G_{FGM})} \quad (2.1.15)$$

2.2. Estruturas e Materiais Inteligentes

O conceito tradicional de estrutura é aplicável a todos os conjuntos que servem um propósito de engenharia e cujas propriedades são função da geometria e propriedades dos materiais que as compõem [63]. Apesar de representarem um avanço significativo, a resposta dos materiais compósitos a um estímulo permanece independente das condições do meio circundante [7]. Deste modo, mantém-se a necessidade de pensar as estruturas para assegurar as suas funções regulares, mas também eventuais eventos críticos o que, naturalmente, implica custos superiores [63].

A natureza exerce, ativamente, influência na forma como são pensadas e concebidas as estruturas em engenharia: através das condições que impõe, por intermédio do meio, como a temperatura e a humidade, através de fenómenos críticos como sismos ou cheias, e ainda, por meio de um conjunto de equivalentes naturais [7], [64]. Partindo destes últimos, engenheiros e projetistas procuram retirar partido de soluções naturais para a resolução de problemas em engenharia, adotando um princípio designado por biomimética. Esta área interdisciplinar recorre a elementos naturais, como comportamentos, materiais ou até mesmo modelos de organização, criteriosamente aprimorados por meio de seleção natural ao longo de milhões de anos, imitando-os total ou parcialmente [65]. Um pouco por todo o lado, é possível encontrar estruturas inspiradas em elementos naturais, ilustrando a Figura 2.2.1 dois exemplos de estruturas nas quais foi utilizada a biomimética. A primeira trata-se de uma aeronave de transporte de carga de dimensões especiais, inspirada na forma de uma baleia branca (*beluga*), devendo também o seu nome a este cetáceo [66]. A segunda representa um comboio de alta velocidade *Shinkansen* 500, que deve o formato da sua frente ao bico e cabeça de um guarda-rios, uma ave de pequena dimensão [65]. Para os casos ilustrados, a utilização de biomimética permitiu solucionar problemas de engenharia, recorrendo a formas encontradas na natureza, o que segundo Hayes *et al.* [67] corresponde ao primeiro de três níveis desta prática. De acordo com esta classificação, a mimetização de processos naturais, como a autorregulação de sistemas ou o processamento de informação em sistemas nervosos, com vista à obtenção de soluções sensoriais em tempo real, constitui o segundo nível, correspondendo o terceiro à mimetização de sistemas naturais no seu todo, estando esta vertente mais vocacionada para escalas organizacionais.

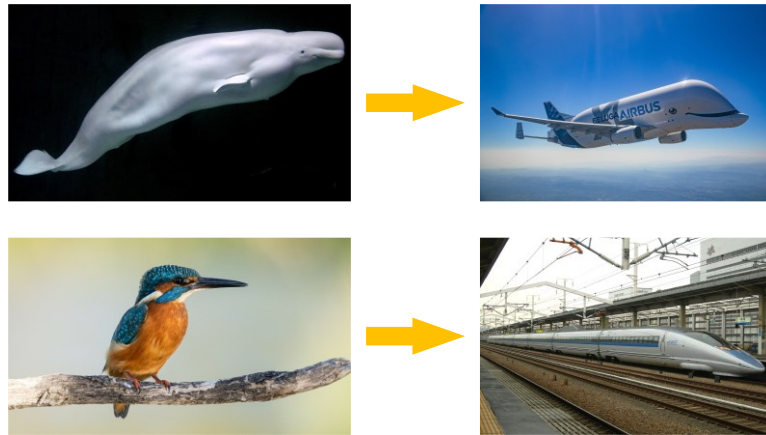


Figura 2.2.1 – Exemplos de aplicação da biomimética no projeto de estruturas em engenharia (adaptado de [66])

Atualmente, a biomimética é já uma realidade bem presente, para a qual muito contribuem as equipas multidisciplinares que procuram dar resposta aos desafios, de complexidade crescente, em engenharia. O conceito de estrutura inteligente é bastante exemplificativo desta tendência, na qual diferentes ramos da engenharia unem esforços para projetar e conceber estruturas que mimetizam o funcionamento de organismos vivos [68]. Apesar de algumas diferenças conceptuais entre autores, uma estrutura inteligente pode ser definida como a estrutura dotada da capacidade de resposta em tempo real a alterações das condições externas, i.e., forças, temperatura, etc., ou internas, como danos ou falha [2]. De modo a adequarem a sua resposta às condições do meio e à sua própria condição, as estruturas naturais recorrem a complexos sistemas sensitivo-neuro-motores. Estes sistemas, de um ponto de vista puramente tecnológico, podem ser reduzidos a três componentes essenciais, sendo eles os recetores sensitivos que recolhem a informação, o cérebro que processa a informação e decide qual a ação a executar e os músculos que por sua vez a executam. Esta trilogia garante à estrutura viva na qual se insere, a necessária adaptação às alterações do meio tendo em vista o estrito cumprimento do objetivo da mesma, recorrendo para o efeito a um mecanismo de interação constante entre os vários elementos. No caso das estruturas inteligentes, é precisamente este mecanismo que se pretende mimetizar, ainda que a uma escala menor. A este respeito, o ponto de vista tecnológico utilizado para simplificar um sistema biológico é particularmente útil para a perceção dos intervenientes e estabelecer paralelismos com as estruturas inteligentes, servindo a Figura 2.2.2 para ilustrar estes mesmos paralelismos. A perceção de estímulos externos ou da sua própria condição poderá ser feita com recurso à incorporação de sensores, sendo a informação obtida, processada num sistema de controlo, que por sua vez produz uma resposta alinhada com os objetivos da estrutura e que poderá ser executada com recurso a atuadores [7]. A aplicação do conjunto sensor-controlador-atuador garante à estrutura a necessária adaptabilidade, fazendo depender o seu grau de autonomia do controlador utilizado, bem como dos sensores e atuadores aplicados [2].

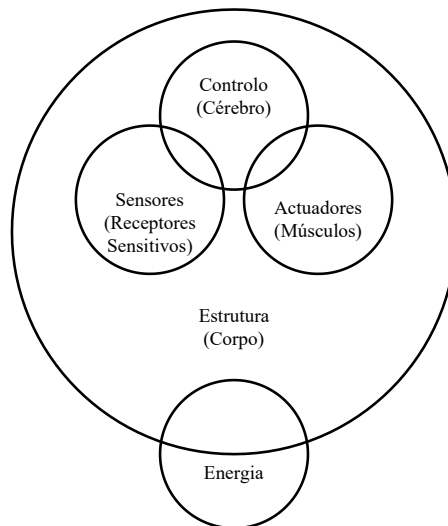


Figura 2.2.2 - Representação simplificada do sistema sensório-neuro-motor de um ser vivo e comparação com o sistema sensor-controlador-atuador de uma estrutura inteligente (adaptado de [7])

As características adaptativas resultantes da incorporação de sensores, atuadores e sistemas de controlo em estruturas, conferem a este tipo de sistemas avançados a flexibilidade necessária para a sua aplicação em campos tão diversos como a medicina ou a engenharia aeroespacial [2]. Com a sua utilização pretende-se, geralmente, o controlo ativo de vibrações [69]–[71] e o controlo ativo de forma e distribuição de tensões [72]. Uma estrutura inteligente é um sistema integrado, projetado para cumprir uma determinada função e que integra sensores e atuadores que lhe permitem a perceção de alterações da sua condição e/ou do meio envolvente, operando assim, com um nível de desempenho superior quando comparadas com as estruturas convencionais [73]. Enquanto tópico de interesse, as estruturas inteligentes destacam-se pelas potencialidades que oferecem, estando os mais recentes desenvolvimentos associados ao controlo de sistemas, e à utilização de materiais de elevado desempenho em funções de sensorização e atuação [74].

Um material inteligente pode ser definido como um material que exhibe a transdução de energia entre diferentes campos, como por exemplo o elástico e elétrico no caso de materiais piezoelétricos. Isto traduz-se na inerente capacidade de adequarem as suas características materiais ou o seu estado perante a ação de um campo externo que poderá ser elétrico, magnético e/ou térmico [2], [75]. Dependendo das capacidades de transdução de energia entre os diferentes campos, exibidas pelos materiais e as suas composições químicas, entre outros fatores, existe, atualmente, uma grande diversidade de materiais inteligentes, dos quais se destacam os materiais com memória de forma, materiais magnetoreológicos, materiais magnetoestrutivos e materiais piezoelétricos [76]–[78]. Destes, os materiais piezoelétricos assumem-se como os mais relevantes ao exibirem um acoplamento entre os campos elástico e elétrico, sendo que, pela sua importância para a presente dissertação, são abordados na secção abaixo.

2.2.1. Materiais Piezoelétricos

Materiais piezoelétricos são aqueles que exibem o fenômeno da piezoelectricidade [79]. Descoberto em 1880 por Jaques Curie e Pierre Curie [80], é descrito na literatura, como o fenômeno eletromecânico que une num acoplamento linear os campos elástico e elétrico [81]. Etimologicamente, a palavra piezoelectricidade tem origem do grego *piezein* (pressionar), e significa literalmente eletricidade por pressão [2], [82], [83]. Trata-se de um fenômeno no qual alguns materiais desenvolvem polarização, aquando da aplicação de esforços mecânicos, resultante da deformação da estrutura cristalina, como resultado da deformação elástica, configurando o efeito piezoelétrico direto (Figura 2.2.3.a) [2], [81], [84]. Inversamente, a aplicação de um campo elétrico a estes materiais produz uma deformação mecânica resultante da deformação cristalina induzida pelo campo elétrico, pelo que se designa de efeito piezoelétrico inverso (Figura 2.2.3.b). Este fenômeno foi previsto matematicamente por Lippman e posteriormente confirmado pelos irmãos Curie [2], [82].



Figura 2.2.3 - Representação esquemáticas do efeito piezoelétrico direto (a) e inverso (b) (adaptado de [85])

Independentemente de se tratar do efeito piezoelétrico direto ou indireto, este é sempre devido à distorção da estrutura cristalina assimétrica do material, que em todo o caso, não deverá ser centro simétrica, uma vez que a centro simetria de um cristal implica a sua simetria em relação a um único ponto, o que inviabiliza a formação de dipolos elétricos [2], [86]. Por este motivo, a larga maioria dos materiais piezoelétricos é de natureza cristalina, podendo ocorrer espontaneamente na natureza ou ser sintetizados. Ao nível de exemplos naturais, o quartzo e o tartarato de sódio e potássio exibem o efeito piezoelétrico, destacando-se o primeiro pelo papel que desempenhou na descoberta deste fenômeno. Por sua vez, os materiais piezoelétricos sintéticos tiveram a sua origem a partir da segunda metade do séc. XX e são, maioritariamente, materiais cerâmicos ou poliméricos [87], [88]. Os materiais cerâmicos destacam-se pela maior semelhança aos equivalentes naturais. Exibem uma estrutura cristalina propícia à ocorrência do efeito piezoelétrico, encontrando aplicações nos mais variados campos da engenharia, como sensores (efeito direto) e atuadores (efeito inverso). Em termos gerais, o titanato zirconato de

chumbo (PZT) é dos materiais mais utilizados, apresentando coeficientes piezoelétricos elevados (até 500-700 pC N⁻¹). Contudo a presença de chumbo na sua composição, inviabiliza a sua utilização em determinados contextos mais sensíveis, optando-se nestes casos pela utilização de materiais piezoelétricos cerâmicos sem chumbo, como o titanato de bário (BT), titanato de sódio e bismuto (BST) e niobato de sódio e potássio (KNN), entre outros [86]. Por sua vez, os materiais piezoelétricos poliméricos representam uma alternativa, mas também um complemento aos materiais cerâmicos piezoelétricos. Segundo Smith e Kar-Narayan [87], o efeito piezoelétrico em polímeros resulta da condição obrigatória de não centro simetria, conjugada com a disposição das moléculas constituintes da cadeia polimérica. Comparativamente aos materiais cerâmicos que exibem o efeito piezoelétrico, os coeficientes piezoelétricos destes polímeros são significativamente inferiores. Por se tratar de polímeros, exibem algumas características típicas desta classe de materiais, das quais se destaca a maior ductilidade, face à maior fragilidade dos materiais cerâmicos [88]. A sua utilização, enquanto sensores e atuadores, cobre uma vasta gama de aplicações. Dos diversos polímeros piezoelétricos atualmente existentes destaca-se o fluoreto de polivinilideno (PVDF), cuja simplicidade de produção e relativo baixo custo justificam o interesse por parte da comunidade científica [79].

A incorporação de sensores e atuadores numa estrutura pode assegurar a sua adaptabilidade às condições do meio, indo ao encontro do conceito de estrutura inteligente. A este respeito, a utilização de materiais piezoelétricos enquanto sensores e/ou atuadores numa estrutura, representa uma abordagem válida tendo em vista uma estrutura adaptável ao seu meio e à sua condição. Contudo, questões como a sua fragilidade, no caso dos cerâmicos, ou propriedades mecânicas inferiores, no caso dos polímeros podem limitar a sua adoção. Neste sentido, a extensão do conceito de FGM a estes materiais inteligentes surge como uma forma de minimizar estes constrangimentos sem incorrer na problemática da delaminação, no caso concreto dos laminados [89]–[91].

Os materiais piezoelétricos com gradiente funcional (FGPM) são materiais compósitos inteligentes e resultam da extensão do conceito de FGM aos materiais piezoelétricos, permitindo novas abordagens à utilização destes últimos. Dependendo do contexto material e de gradiente em que se inserem, os FGPM podem desde logo vir a ser incorporados em elementos de carácter mais estrutural do sistema possibilitando à partida uma melhor integração ao nível da estrutura. A sua distribuição em gradiente permite também ganhos económicos, na medida em que possibilita a concentração de maior fração volumica da fase ativa onde por motivos de projeto esta seja necessária, permitindo reduzir custos com a quantidade global de material piezoelétrico necessário. Por estes motivos, os FGPM têm vindo a atrair alguma atenção por parte da comunidade científica [92]. Da pesquisa realizada e da literatura consultada, é notório que o

controle de vibrações e o estudo do comportamento dinâmico destes materiais é um tópico que concentra grande foco. A este respeito destaca-se o trabalho de Li *et al.* [93] que conclui que o gradiente funcional afeta o comportamento dinâmico da estrutura. Por sua vez, o trabalho de Kumar e Harsha [90] retira conclusões semelhantes ao associar a influência da distribuição de porosidades no gradiente material ao comportamento dinâmico da estrutura. Ao nível do estudo da resposta estática de estruturas e num contexto de gradiente 1D na direção da espessura, o trabalho de Behjat *et al.* [91] implementa um modelo de elementos finitos baseado na teoria de deformação de corte de 1ª ordem, para o qual considera diferentes condições de fronteira, vindo a concluir a influência destas últimas na resposta eletromecânica da estrutura. Mais recentemente, Ladvanjari *et al.* [94] avalia a influência das condições de fronteira no desempenho enquanto sensor de uma placa. Também Zhang *et al.* [95] avalia o comportamento estático de placas, mas num contexto de gradiente 2D no plano da mesma, vindo a verificar a influência dos parâmetros de projeto associados ao gradiente na resposta da placa. Assim, denota-se a relevância que tem vindo a ser dada ao estudo de FGPM e sua aplicação em estruturas, principalmente, na sua resposta dinâmica. Fica também patente um crescente interesse – ainda que de menor dimensão – no estudo da resposta estática destes materiais em contextos de gradiente 1D e 2D, sendo por isso interessante fazer incidir a ação da presente dissertação sobre este domínio e no contexto particular de gradientes multidirecionais.

2.3. Campo de Deslocamentos e Relação Constitutiva

Em engenharia a generalidade das estruturas pode ser aproximada por vigas ou placas, embora seja também comum a utilização de cascas. Na presente dissertação serão analisadas estruturas do tipo placa ou do tipo viga e como tal, em termos da modelação dessas estruturas, será considerada a abordagem mais geral. Qualquer estrutura possui uma existência 3D, contudo em determinadas circunstâncias podem ser consideradas simplificações nos modelos que serão usados para as analisar. Assim, as placas são habitualmente modeladas como estruturas 2D, na medida em que a sua espessura seja, inferior em pelo menos uma ordem de grandeza às restantes dimensões. Esta simplificação conceptual permite a transformação de modelos 3D em 2D, sendo que tal redução vem permitir a transição de um problema definido no espaço para um problema definido no plano. Uma situação similar pode ser considerada quando analisamos vigas [2], [96].

A possibilidade que poderá ou não existir de utilizar modelos simplificados em função da situação concreta que se pretende estudar, implica que se utilizem abordagens teóricas específicas que possam ser consideradas credíveis e cujos modelos sejam representativos desses casos concretos. No presente trabalho, considerando que se pretendem analisar placas e vigas que

poderão ser moderadamente espessas, considerou-se a utilização da teoria de deformação de corte de primeira ordem.

2.3.1. Campos de deslocamentos e de deformações

A teoria de deformação de corte de primeira ordem (FSDT – *First order shear deformation theory*) é definida como o exemplo de uma teoria de segunda aproximação de Love (LSAT – *Love second approximation theory*). Este conjunto de teorias baseia-se nos pressupostos para placas finas de Cauchy-Poisson-Kirchhoff-Love, deixando cair a terceira hipótese de Kirchhoff, cujo enunciado pressupõe que, num estado deformado, as normais transversais permaneçam normais à superfície média [96].

Assim, a FSDT considera a existência de deformações de corte transversais, devido ao facto de considerar que as normais transversais não permanecem perpendiculares à superfície média, conforme a Figura 2.3.1. Isto permite que esta teoria seja também extensível a materiais laminados, mantendo, no entanto, a sua génese de camada única equivalente (ESL – *Equivalent Single Layer*) e as limitações que lhe estão associadas, nomeadamente, ao nível de placas espessas. O campo de deslocamentos da FSDT é definido pelas expressões em (2.3.1), nas quais u^0 , v^0 e w^0 representam os deslocamentos da superfície média da placa nas direções x , y e z de um ponto genérico da superfície média $P_\Omega(x, y)$. Por sua vez, θ_x^0 e θ_y^0 , representam as rotações da normal transversal em torno das direções y e x , não respeitando assim a regra da mão direita. Esta notação resulta da necessidade de simplificar as expressões algébricas envolvidas, sendo amplamente utilizada na literatura [96], [97].

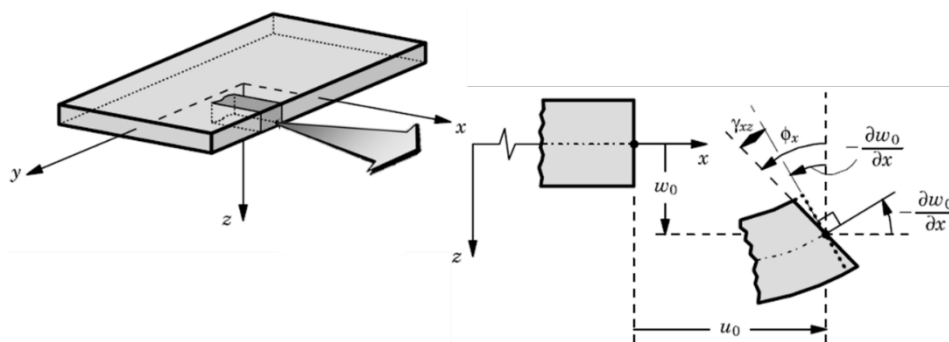


Figura 2.3.1 - Geometrias não deformadas e deformadas de uma placa de acordo com os pressupostos da FSDT (adaptado de [97])

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u^0(x, y) + z \cdot \theta_x^0(x, y) \\
 v(x, y, z) &= v^0(x, y) + z \cdot \theta_y^0(x, y) \\
 w(x, y, z) &= w^0(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{2.3.1}$$

Aplicando as relações cinemáticas da teoria da Elasticidade para pequenas deformações, tem-se o seguinte campo de deformações dado pelas expressões em (2.3.2).

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u^0}{\partial x} + z \cdot \frac{\partial \theta_x^0}{\partial x} \\
\varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v^0}{\partial y} + z \cdot \frac{\partial \theta_y^0}{\partial y} \\
\varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u^0}{\partial y} + \frac{\partial v^0}{\partial x} + z \cdot \frac{\partial \theta_x^0}{\partial y} + z \cdot \frac{\partial \theta_y^0}{\partial x} \\
\gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w^0}{\partial y} + \theta_y^0 \\
\gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w^0}{\partial x} + \theta_x^0
\end{aligned} \tag{2.3.2}$$

2.3.2. Relações Constitutivas e Modelos Materiais

A formalização matemática que estabelece a relação entre o estado de tensão e o estado de deformação num ponto designa-se relação constitutiva. No caso de um material elástico o modelo linear constitutivo tem por base a Lei de Hooke generalizada e estabelece que as tensões são funções lineares das deformações [20]. Considerando o caso geral de um FGM com gradiente 3D, a relação entre o campo de tensões e o campo de deformações de acordo é dada pela expressão (2.3.3), na qual, $\{\sigma\}$, $[Q(x, y, z)]$ e $\{\varepsilon\}$ representam, respetivamente, o vetor do campo de tensões, a matriz dos coeficientes de rigidez elástica do material e como tal função das coordenadas x , y e z , e o vetor do campo de deformações.

$$\{\sigma\} = [Q(x, y, z)] \cdot \{\varepsilon\} \tag{2.3.3}$$

No caso específico da FSDT, que pela condição de inextensibilidade na espessura ($\varepsilon_{zz} = 0$) considera um estado de tensão plana ($\sigma_{zz} = 0$), a generalidade dos termos associados à direção z é suprimida, reduzindo a dimensão dos vetores de 6 para 5. Deste modo, $\{\sigma\}$ e $\{\varepsilon\}$ podem ser escritos de acordo com as expressões (2.3.4) e (2.3.5), nas quais se apresentam subdivididos nas componentes de membrana-flexão, $\{\sigma\}_{mb}$ e $\{\varepsilon\}_{mb}$, e corte, $\{\sigma\}_s$ e $\{\varepsilon\}_s$.

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \{\sigma\}_{mb} \\ \{\sigma\}_s \end{Bmatrix}, \quad \{\sigma\}_{mb} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \{\sigma\}_s = \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} \tag{2.3.4}$$

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \{\varepsilon\}_{mb} \\ \{\varepsilon\}_s \end{Bmatrix}, \quad \{\varepsilon\}_{mb} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \{\varepsilon\}_s = \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \tag{2.3.5}$$

De modo semelhante aos anteriores, também é possível rescrever a matriz dos coeficientes de rigidez elásticos tendo em conta as condições da FSDT. Neste caso, de acordo com Reddy [20], para acomodar o estado de tensão plana ($\sigma_{zz} = 0$) existe a necessidade de modificar os coeficientes de rigidez elástica, passando a designar-se coeficientes de rigidez elástica reduzidos. Importa referir que no caso específico de um FGM, os coeficientes de rigidez elástica reduzidos poderão ser iguais aos coeficientes de rigidez elástica transformados ($Q^*[x, y, z] = \bar{Q}[x, y, z]$). Assim, resulta o presente nas expressões (2.3.6), (2.3.7), para $[Q^*(x, y, z)]_{mb}$ e $[Q^*(x, y, z)]_s$. Apesar de na literatura não existir, tipicamente, qualquer tipo de notação diferenciadora dos coeficientes de rigidez elástica reduzidos, entende-se ser benéfico a sua distinção, motivo pelo qual apresentam o sobrescrito (*).

$$[Q^*(x, y, z)]_{mb} = \begin{bmatrix} Q_{11}^*(x, y, z) & Q_{12}^*(x, y, z) & 0 \\ Q_{12}^*(x, y, z) & Q_{22}^*(x, y, z) & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66}^*(x, y, z) \end{bmatrix} \quad (2.3.6)$$

$$[Q^*(x, y, z)]_s = \begin{bmatrix} Q_{44}^*(x, y, z) & 0 \\ 0 & Q_{55}^*(x, y, z) \end{bmatrix} \quad (2.3.7)$$

Por sua vez, os coeficientes de rigidez elástica reduzidos $Q_{ij}^*(x, y, z)$ são função dos coeficientes de rigidez elástica $Q_{ij}(x, y, z)$, sendo determinados com recurso às expressões em (2.3.8).

$$\begin{aligned} Q_{11}^*(x, y, z) &= Q_{11}(x, y, z) - \frac{Q_{13}(x, y, z)^2}{Q_{33}(x, y, z)} \\ Q_{12}^*(x, y, z) &= Q_{12}(x, y, z) - \frac{Q_{13}(x, y, z) \cdot Q_{23}(x, y, z)}{Q_{33}(x, y, z)} \\ Q_{22}^*(x, y, z) &= Q_{22}(x, y, z) - \frac{Q_{23}(x, y, z)^2}{Q_{33}(x, y, z)} \\ Q_{44}^*(x, y, z) &= Q_{44}(x, y, z) \\ Q_{55}^*(x, y, z) &= Q_{55}(x, y, z) \\ Q_{66}^*(x, y, z) &= Q_{66}(x, y, z) \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

Por se tratar de um FGM, e como tal, um material isotrópico num qualquer ponto (x, y, z) , os coeficientes de rigidez elástica são obtidos por meio das expressões em (2.3.9), nas quais $E_{FGM}(x, y, z)$, $\nu_{FGM}(x, y, z)$ e $G_{FGM}(x, y, z)$ designam, respetivamente, o módulo de elasticidade, o coeficiente de Poisson e o módulo de corte do FGM, num dado ponto (x, y, z) . Estes podem ser obtidos por meio da equação (2.1.3) no caso da utilização da regra de misturas de Voigt ou equações (2.1.13), (2.1.14) e (2.1.15) no caso da utilização da técnica de homogeneização de Mori-Tanaka.

$$\begin{aligned}
Q_{11}(x, y, z) = Q_{22}(x, y, z) &= \frac{E_{FGM}(x, y, z)}{1 - \nu_{FGM}^2(x, y, z)} \\
Q_{12}(x, y, z) &= \frac{\nu_{FGM}^2(x, y, z) \cdot E_{FGM}(x, y, z)}{(1 - \nu_{FGM}^2(x, y, z))} \\
Q_{44}(x, y, z) = Q_{55}(x, y, z) = Q_{66}(x, y, z) &= G_{FGM}(x, y, z)
\end{aligned} \tag{2.3.9}$$

Um dado importante relacionado com a aplicação da FSDT, prende-se com a discrepância existente entre o estado de tensão real e o estado de tensão plana considerado. Na FSDT as deformações de corte transversais γ_{xz} e γ_{yz} assumem-se constantes ao longo da espessura, o que implica que as tensões de corte transversais τ_{xz} e τ_{yz} também o sejam. Contudo, em placas constituídas por materiais compósitos, é sabido que variam, no mínimo quadraticamente na espessura, conforme sugerido por Reddy [20]. A multiplicação de um fator de correção pela componente de corte transversal da matriz de coeficientes de rigidez elástica reduzidos permite a minimização desta discrepância. Designa-se fator de correção de corte, k_s , e assume, tipicamente, o valor de 5/6.

Como oportunamente referido na secção 2.2.1, o efeito piezoelétrico resulta da existência de um acoplamento entre os campos elástico e elétrico. Sabendo que a relação constitutiva deve refletir a resposta do material em relação às cargas aplicadas, é necessário complementar a expressão (2.3.3), por forma a incluir também o campo elétrico. Deste modo, de acordo com Carrera *et al.* [96] e Fernandes e Pouget [98], [99] a relação constitutiva para a piezoelectricidade linear é dada pelas expressões em (2.3.10), nas quais $\{\mathcal{D}\}$ e $\{\mathcal{E}\}$ representam, respetivamente, o vetor de deslocamentos elétricos e o vetor de campo elétrico, enquanto que $[e(x, y, z)]$ e $[\boldsymbol{\epsilon}(x, y, z)]$ representam a matriz de coeficientes piezoelétricos (*stress-charge*) e a matriz de coeficientes de permitividade. A respeito da notação utilizada, alerta-se que a matriz de coeficientes de permitividade $[\boldsymbol{\epsilon}(x, y, z)]$, a **negrito**, não deverá ser confundida com o vetor do campo de deformações $\{\boldsymbol{\epsilon}\}$, em minúsculas, nem com o vetor de campo elétrico $\{\mathcal{E}\}$, em maiúscula. De referir que T representa o operador de transposta de uma matriz.

$$\begin{aligned}
\{\sigma\} &= [Q(x, y, z)] \cdot \{\boldsymbol{\epsilon}\} - ([e(x, y, z)])^T \cdot \{\mathcal{E}\} \quad (\text{Efeito Inverso}) \\
\{\mathcal{D}\} &= [e(x, y, z)] \cdot \{\boldsymbol{\epsilon}\} - [\boldsymbol{\epsilon}(x, y, z)] \cdot \{\mathcal{E}\} \quad (\text{Efeito Direto})
\end{aligned} \tag{2.3.10}$$

Os vetores $\{\mathcal{D}\}$ e $\{\mathcal{E}\}$ podem ser descritos através das suas componentes nas direções x , y e z de acordo com as expressões (2.3.11) e (2.3.12). No caso de $\{\mathcal{E}\}$, é obtido segundo a metodologia adotada por Loja [100].

$$\{\mathcal{D}\} = \begin{Bmatrix} \mathcal{D}_x \\ \mathcal{D}_y \\ \mathcal{D}_z \end{Bmatrix} \tag{2.3.11}$$

$$\{\mathcal{E}\} = -\nabla \cdot \phi(x, y, z) = \begin{Bmatrix} \mathcal{E}_x \\ \mathcal{E}_y \\ \mathcal{E}_z \end{Bmatrix} \quad (2.3.12)$$

Mantendo a metodologia de Loja [100] e considerando apenas a existência de polarização na espessura (direção z), os restantes componentes \mathcal{E}_x e \mathcal{E}_y serão nulos, podendo \mathcal{E}_z ser determinado em função da espessura h por intermédio da expressão (2.1.13).

$$\mathcal{E}_z = -\frac{\phi}{h} \quad (2.3.13)$$

Relativamente a $[e(x, y, z)]$ por se tratar de grandezas inerentes ao próprio material, é possível proceder de modo idêntico ao utilizado para $[Q(x, y, z)]$. Em virtude da utilização da FSDT os termos associados à direção z serão nulos existindo a necessidade de modificar os restantes para acomodar a condição de tensão plana, passando os mesmos a designar-se por coeficientes piezoelétricos (*stress-charge*) reduzidos. Por sua vez estes podem ser divididos tendo em conta o efeito de membrana-flexão, $[e^*(x, y, z)]_{mb}$, e de corte $[e^*(x, y, z)]_s$, contudo o presente trabalho apenas considera o efeito dos primeiros, que se apresentam em (2.3.14).

$$[e^*(x, y, z)]_{mb} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ e_{31}^*(x, y, z) & e_{32}^*(x, y, z) & e_{36}^*(x, y, z) \end{bmatrix} \quad (2.3.14)$$

Os coeficientes piezoelétricos (*stress-charge*) reduzidos são determinados com recurso às expressões em (2.3.15). A este nível é importante esclarecer que os coeficientes piezoelétricos podem ser apresentados sob a forma de *stress-charge*, $e_{ij}(x, y, z)$, e *strain-charge*, $d_{ij}(x, y, z)$, sendo ambas frequentes na literatura [96]. Em todo o caso, $[e(x, y, z)]$ e $[d(x, y, z)]$ relacionam-se entre si, por intermédio de $[Q(x, y, z)]$, como expresso em (2.3.16).

$$\begin{aligned} e_{31}^*(x, y, z) &= e_{31}(x, y, z) - e_{33}(x, y, z) \cdot \frac{e_{13}(x, y, z)}{e_{33}(x, y, z)} \\ e_{32}^*(x, y, z) &= e_{32}(x, y, z) - e_{33}(x, y, z) \cdot \frac{e_{23}(x, y, z)}{e_{33}(x, y, z)} \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

$$e_{36}^*(x, y, z) = e_{36}(x, y, z)$$

$$[e^*] = ([Q(x, y, z)][d(x, y, z)]^T)^T \quad (2.3.16)$$

Por último, a matriz de coeficientes de permitividade reduzidos $[\mathcal{E}^*(x, y, z)]$ é dada pela expressão (2.3.17), tendo já em consideração a condição de tensão plana e a polarização apenas na direção da espessura. O termo $[\mathcal{E}_{33}^*(x, y, z)]$ é obtido por intermédio da expressão (2.3.18).

$$[\mathcal{E}^*(x, y, z)] = [\mathcal{E}_{33}^*(x, y, z)] \quad (2.3.17)$$

$$\mathcal{E}_{33}^*(x, y, z) = \mathcal{E}_{33}(x, y, z) + \frac{e_{33}(x, y, z)^2}{Q_{33}(x, y, z)} \quad (2.3.18)$$

2.3.3. Equações de Equilíbrio e Modelo de Elementos Finitos

De acordo com o princípio da energia potencial mínima, no qual, para corpos elásticos, na ausência de variações de temperatura, existe uma função densidade de energia elástica de deformação, U_0 , definida pela expressão (2.3.19).

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (2.3.19)$$

Consequentemente, a energia elástica de deformação U , de um corpo elástico de volume V , será dada através das expressões (2.3.20) e (2.3.21) para as suas componentes de membrana-flexão, U_{mb} , e corte transversal, U_s .

$$U_{mb} = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \tau_{xy} \varepsilon_{xy} dV \quad (2.3.20)$$

$$U_s = \frac{1}{2} \int_V \tau_{yz} \varepsilon_{xy} + \tau_{xz} dV \quad (2.3.21)$$

Manipulando as expressões (2.3.20) e (2.3.21) obtém-se as componentes da energia elástica de deformação em função das matrizes dos coeficientes de rigidez elástica reduzidos nas expressões (2.3.22) e (2.3.23).

$$U_{mb} = \frac{1}{2} \int_V \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q_{11}^*(x, y, z) & Q_{12}^*(x, y, z) & 0 \\ Q_{12}^*(x, y, z) & Q_{22}^*(x, y, z) & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66}^*(x, y, z) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} dV \quad (2.3.22)$$

$$U_s = \frac{1}{2} \int_V k_s \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q_{44}^*(x, y, z) & 0 \\ 0 & Q_{55}^*(x, y, z) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} dV \quad (2.3.23)$$

Considerando a substituição de $\{\varepsilon\}_{mb}$ e $\{\varepsilon\}_s$ nas expressões (2.3.22) e (2.3.23) pelas igualdades de (2.3.2) obtém-se a energia de deformação em função dos deslocamentos generalizados e dos coeficientes de rigidez elástica reduzidos para as componentes de membrana-flexão e corte, nas expressões (2.3.24) e (2.3.25), respetivamente.

$$U_{mb} = \frac{1}{2} \int_V \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & z \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & z \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & z \frac{\partial}{\partial y} & z \frac{\partial}{\partial x} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} u^0 \\ v^0 \\ w^0 \\ \theta_x^0 \\ \theta_y^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11}^*(x, y, z) & Q_{12}^*(x, y, z) & 0 \\ Q_{12}^*(x, y, z) & Q_{22}^*(x, y, z) & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66}^*(x, y, z) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & z \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & z \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & z \frac{\partial}{\partial y} & z \frac{\partial}{\partial x} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} u^0 \\ v^0 \\ w^0 \\ \theta_x^0 \\ \theta_y^0 \end{bmatrix} dV \quad (2.3.24)$$

$$U_s = \frac{1}{2} \int_V k_s \begin{Bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 1 & 0 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} u^0 \\ v^0 \\ w^0 \\ \theta_x^0 \\ \theta_y^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{44}^*(x, y, z) & 0 \\ 0 & Q_{55}^*(x, y, z) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 1 & 0 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} u^0 \\ v^0 \\ w^0 \\ \theta_x^0 \\ \theta_y^0 \end{bmatrix} dV \quad (2.3.25)$$

Chegado aqui, impõe-se a introdução de um conceito necessário à simplificação e resolução das expressões (2.3.24) e (2.3.25), tendo em vista a obtenção da equação de equilíbrio do sistema. Através das relações constitutivas de um modelo é possível prever o seu comportamento, contudo existem, em engenharia, situações que pela complexidade das geometrias envolvidas ou dos

materiais considerados, não possibilitam a obtenção de soluções exatas. Nestes casos é comum a utilização de métodos numéricos baseados numa formulação integral equivalente às equações diferenciais do problema. O método dos elementos finitos (FEM – *Finite Element Method*) é exemplo de um dos métodos utilizados, sendo um dos mais conhecidos. Caracteristicamente, destaca-se pela possibilidade de representar um domínio complexo do ponto de vista geométrico através de um conjunto de subdomínios de geometria simples, constituindo um domínio discretizado. Cada um desses subdomínios, que assumem a designação de elementos, encontram-se ligados entre si por pontos localizados nas suas fronteiras, que se chamam nós. Como o próprio nome indica, no FEM a formulação é feita ao nível do elemento, assumindo-se que para cada um, a solução seja dada por intermédio de uma combinação linear de funções de aproximação e coeficientes relacionados com as grandezas nodais a determinar [101].

Numa placa, o tipo de elemento mais adequado para a constituição dos subdomínios é do tipo quadrilátero. Destes, os elementos retangulares lineares Q4, pertencentes à família de elementos de Lagrange, apresentam 4 nós localizados em cada um dos seus vértices, conforme a representação da Figura 2.3.2. Note-se que o elemento de referência possui um sistema de coordenadas normalizadas (η, ξ) e que se designam de coordenadas naturais.

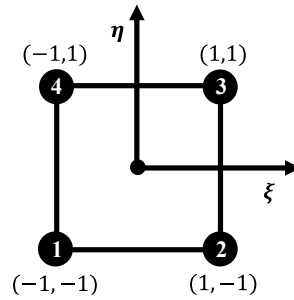


Figura 2.3.2 - Representação esquemática de um elemento de referência Q4

As funções interpoladoras do elemento Q4 serão dadas pelas expressões em (2.3.26).

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) & N_3 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \\ N_2 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) & N_4 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \end{aligned} \quad (2.3.26)$$

Escrevendo os deslocamentos generalizados como combinações lineares das funções interpoladoras N_i em (2.3.26) e dos deslocamentos generalizados nodais, resultam as expressões em (2.3.27).

$$\begin{aligned} u^0(x, y) &= \sum_{i=1}^4 u_i^0 N_i(\eta, \xi) & v^0(x, y) &= \sum_{i=1}^4 v_i^0 N_i(\eta, \xi) & w^0(x, y) &= \sum_{i=1}^4 w_i^0 N_i(\eta, \xi) \\ \theta_x^0(x, y) &= \sum_{i=1}^4 \theta_{x_i}^0 N_i(\eta, \xi) & \theta_y^0(x, y) &= \sum_{i=1}^4 \theta_{y_i}^0 N_i(\eta, \xi) \end{aligned} \quad (2.3.27)$$

Por sua vez, é possível escrever as deformações em função dessas mesmas funções interpoladoras e dos deslocamentos generalizados nodais. Considerando o elemento Q4 numa situação de equilíbrio estático, o princípio da energia potencial mínima será dado pela igualdade em (2.3.28), na qual Π representa a energia potencial total e Ω o potencial de forças transversais distribuídas aplicadas na superfície plana definido pela expressão (2.3.29).

$$\delta\Pi = \delta(U_{mb} + U_s + \Omega) = 0 \quad (2.3.28)$$

$$\Omega = - \int_A q_z w^0 dA \quad (2.3.29)$$

Minimizando a energia potencial e tendo em consideração a aproximação de cada grau de liberdade para cada elemento Q4, obtém-se a expressão (2.3.30), na qual $[B]_{mb}$ e $[B]_s$ são definidas pelas expressões (2.3.31) e (2.3.32), $[N]$ designa a matriz de funções de forma e $\{q_d\}$ o vector de forças generalizadas distribuídas do elemento.

$$\int_{V_e} [B]_{mb}^T [Q^*(x, y, z)]_{mb} [B]_{mb} dV + \int_{V_e} [B]_s^T [Q^*(x, y, z)]_s [B]_s - \int_{A_e} [N]^T \{q_d\} dA = 0 \quad (2.3.30)$$

$$[B]_{mb} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & z \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & z \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & z \frac{\partial N_i}{\partial y} & z \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.3.31)$$

$$[B]_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.3.32)$$

Note-se que os integrais de volume definidos em (2.3.30) representam as matrizes de rigidez dos elementos nas suas componentes de membrana-flexão e de corte, sendo a matriz de rigidez do elemento o resultado da sua soma. Nesta fase, é importante destacar que as grandezas apresentadas são integradas nas duas direcções do plano do elemento, utilizando-se para o efeito a quadratura de Gauss-Legendre. Deste modo aplicam-se as expressões em (2.3.33), cuja forma matricial se apresenta na expressão (2.3.34).

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (2.3.33)$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (2.3.34)$$

A matriz jacobiana será definida por (2.3.35).

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (2.3.35)$$

A inversa da matriz jacobiana permite assim escrever a expressão (2.3.36).

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (2.3.36)$$

No caso do elemento Q4 por se tratar de um elemento isoparamétrico, aplica-se a o disposto na expressão (2.3.37).

$$dA = dx dy = |J| d\xi d\eta \quad (2.3.37)$$

Apesar de a generalidade das integrações poder ser resolvida com recurso a métodos exatos, existem situações em que é preferível a utilização de métodos aproximados. Como consequência da condição de inextensibilidade na direção da espessura a que se chegou a partir da aplicação da FSDT, um fenómeno denominado *shear locking* poderá ter lugar. Este caracteriza-se pela elevada rigidez dos elementos em estruturas cuja razão de aspeto L/h se aproxime do limiar do conceito de placa fina. Segundo Reddy [20], [101], a adoção de um esquema de integração mista permite minimizar a ocorrência deste fenómeno. Assim, os termos associados à componente de corte são integrados pela quadratura de Gauss-Legendre que se traduz na expressão (2.3.38) para uma função genérica, na qual w_i e w_j representam os pesos de integração e (ξ_i, η_i) os pontos de integração que constam da Tabela 2.3.1.

$$I = \int_A f(\xi, \eta) d\xi d\eta \cong \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m w_j w_i f(\xi_i, \eta_i) \quad (2.3.38)$$

Tabela 2.3.1 - Pesos e pontos de Gauss-Legendre [101]

m	r_i	w_i
1	0,00000	2,00000
2	$\pm 0,57735$	1,00000
3	0,00000	0,88889
	$\pm 0,77460$	0,55556

De referir que o número de pontos e pesos a utilizar para a integração de um polinómio será dado pela expressão (2.3.39), em que P representa o maior grau do polinómio e n o número de pontos e de pesos a utilizar.

$$P = 2n - 1 \quad (2.3.39)$$

Recuperando a expressão (2.3.30), após a integração dos vários termos seguida da montagem de acordo com a discretização adotada e a aplicação das condições de fronteira do problema,

obtem-se a equação de equilíbrio para o FEM, considerando apenas o campo elástico, na expressão (2.3.40). A respeito das condições de fronteira (CF), é importante referir que são aplicadas diretamente nos nós dos elementos e traduzem-se na supressão de graus de liberdade, i.e., os deslocamentos e rotações são constringidos. Por exemplo, no caso de um encastramento (C – *clamped*), todos os deslocamentos e rotações serão nulos, enquanto, num apoio simples (S) apenas serão constringidos os deslocamentos e uma das rotações conforme a orientação do apoio. A um nó que não sejam aplicados constringimentos diz-se livre (F - *free*).

$$[K]\{u\} = \{F\} \quad (2.3.40)$$

Para o acoplamento existente entre os campos elástico e elétrico, de acordo com Loja et al. [100] e Wang [102], a equação de equilíbrio para todo o domínio piezoelétrico discretizado será obtida partindo da relação constitutiva em (2.3.12), que após as necessárias manipulações e substituições resulta na expressão (2.3.41), na qual $[K_{uu}]$ designa a matriz de rigidez associada ao campo elástico, $[K_{u\phi}]$ a matriz de rigidez associada ao acoplamento eletromecânico e $[K_{\phi\phi}]$ a matriz de rigidez associada ao campo elétrico.

$$\begin{bmatrix} [K_{uu}] & [K_{u\phi}] \\ [K_{\phi u}] & [K_{\phi\phi}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{\phi\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_u\} \\ \{F_\phi\} \end{Bmatrix} \quad (2.3.41)$$

Por sua vez os vetores $\{u\}$ e $\{\phi\}$ contêm a resposta electromecânica generalizada da estrutura, sendo estas as variáveis a determinar com a resolução do sistema. $\{F_u\}$ e $\{F_\phi\}$ designam os vectores de forças aplicados à estrutura. Ao nível do elemento, a expressão (2.3.41) traduz-se na expressão em (2.3.42).

$$\begin{aligned} [K_{uu}]_e \{u\}_e + [K_{u\phi}]_e \{\phi\}_e &= \{F_u\}_e \\ [K_{\phi u}]_e \{u\}_e + [K_{\phi\phi}]_e \{\phi\}_e &= \{F_\phi\}_e \end{aligned} \quad (2.3.42)$$

O cálculo das matrizes de rigidez do elemento é dado pelas expressões em (2.3.43). A respeito das matrizes $[B_u]_e$ e $[B_\phi]_e$ importa esclarecer que a primeira está associada ao campo elástico sendo determinada com recurso às equações (2.3.31) e (2.3.32) e a segunda por intermédio da expressão (2.3.44), conforme metodologia de Loja *et al.* [100], na qual as posições coincidentes com a diagonal principal serão ocupadas com o inverso da espessura do *patch* piezoelétrico.

$$\begin{aligned} [K_{uu}]_e &= \int_{V_e} [B_u]_e^T [Q^*(x, y, z)]_e [B_u]_e dV \\ [K_{u\phi}]_e &= \int_{V_e} [B_u]_e^T [e^*(x, y, z)]_e^T [B_\phi]_e dV \\ [K_{\phi u}]_e &= \int_{V_e} [B_\phi]_e^T [e^*(x, y, z)]_e^T [B_u]_e dV \\ [K_{\phi\phi}]_e &= \int_{V_e} [B_\phi]_e^T [e^*(x, y, z)]_e^T [B_\phi]_e dV \end{aligned} \quad (2.3.43)$$

$$[B_\phi]_e = \begin{bmatrix} 1/h_{p_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1/h_{p_i} \end{bmatrix} \quad (2.3.44)$$

A respeito das matrizes de rigidez do elemento e segundo metodologia utilizada por Wang [102] é necessário adotar uma condensação algébrica. Esta situação é devida à grande diferença de valores, entre $[K_{uu}]_e$ e $[K_{\phi\phi}]_e$, tipicamente na ordem de 10^8 e 10^{-11} , respetivamente. Da aplicação da condensação algébrica resulta a expressão (2.3.45), na qual $[K_p]_e$ representa a matriz de rigidez elástica induzida devido ao acoplamento eletromecânico, e $\{F_a\}_e$ que designa o vetor de forças equivalentes induzidas pela aplicação de um potencial elétrico na configuração de atuador.

$$\begin{aligned} ([K_{uu}]_e + [K_p]_e) \{u\}_e + [K_{u\phi}]_e \{\phi\}_e &= \{F_u\}_e + \{F_a\}_e \\ [K_{\phi u}]_e \{u\}_e + [K_{\phi\phi}]_e \{\phi\}_e &= \{F_\phi\}_e \end{aligned} \quad (2.3.45)$$

Dependendo da configuração de atuador (A) ou sensor (S), $[K_p]_e$ e $\{F_a\}_e$ serão dados através da expressão (2.3.46), na qual φ_z representa o potencial elétrico diretamente aplicado ao *patch* piezoelétrico na direção z . De notar que, para a configuração de sensor, dependendo da condição do circuito elétrico, i.e., aberto ou fechado, terá implicações ao nível da rigidez da estrutura. Assim, para o caso de circuito fechado, no qual os potenciais elétricos aplicados nas superfícies externas serão, por imposição, nulos, apenas será considerado o contributo mecânico.

$$\begin{aligned} [K_p]_e &= [K_{\phi u}]_e^T ([K_{\phi\phi}]_e)^{-1} [K_{\phi u}]_e \\ \{F_a\}_e &= -[K_{\phi u}]_e^T ([K_{\phi\phi}]_e)^{-1} [K_{\phi u}]_e \varphi_z \end{aligned} \quad (2.3.46)$$

2.4. Otimização

A generalidade dos problemas que se colocam em engenharia passam pela procura de uma solução melhor. Seja nas propriedades materiais, na redução de custo, ou na simples reflexão em torno de uma melhoria num processo, o objetivo de melhoria está presente nos mais variados aspetos e decisões do quotidiano [103], [104]. Genericamente, melhoria significa encontrar a melhor solução de entre um conjunto de soluções possíveis, as quais satisfazem todas as condições do problema em causa [105]. Conceptualmente, ao objetivo de obter a solução ótima corresponde um processo de otimização que pode ser definido como a procura de um valor – máximo ou mínimo – que associado a um dado contexto de um problema, se traduz na solução ótima. Existem situações em que é possível estabelecer um problema de otimização por meio de uma função matemática, $f(x)$, que assume a designação de função objectivo. Dependendo do contexto em que se insere, o problema de otimização pode possuir mais do que uma função objetivo, passando então a designar-se de otimização multiobjetivo. Em todo o caso, o cálculo dos extremos da

função (máximo ou mínimo), pode ser feito por intermédio da determinação dos zeros da função derivada $f'(x)$ e do estudo do sinal da segunda derivada $f''(x)$, se a mesma for diferenciável [106].

Num problema de otimização o seu contexto é essencial para a sua definição. Para além da função objetivo, existem outros fatores importantes a considerar. Desde logo, se se pretende maximizar ou minimizar a(s) função(ões) objetivo, quais as variáveis de projeto, i.e., os parâmetros que dão origem ao valor da função objetivo, e ainda os constrangimentos a aplicar, sejam eles de natureza técnica, operacional ou económica, sendo que nos casos em que se apliquem, o ótimo resultante se diz constrangido [107]. Formalmente, os problemas de otimização são definidos por um vetor de variáveis de projeto x de que o problema depende e que satisfazem constrangimentos laterais, pela função objetivo $f(x)$, a qual representa, matematicamente, o objetivo do problema e por último pelas condições, requisitos ou restrições $g(x)$ e $h(x)$, que poderão apresentar-se sob a forma de igualdades ($h(x) = 0$) ou desigualdades ($g(x) \geq 0$). Considerando um problema de otimização com i objetivos, n variáveis de projecto, l constrangimentos de desigualdade e m constrangimentos de igualdade, a formulação matemática resultante é a expressa na equação (2.4.1) e que abaixo se apresenta [103], [106], [107].

$$\begin{aligned} & \min (\max) f_i(x), x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \\ \text{sujeito a: } & g_j(x) \leq 0, (j = 1, 2, \dots, l) \\ & h_k(x) = 0, (k = 1, 2, \dots, m) \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

A resolução de problemas de otimização pela via analítica é possível sempre que a complexidade do problema o permita. Existem situações – cada vez mais frequentes – cujo número de objetivos, elevado grau de não-linearidade das funções, número de variáveis de projeto e constrangimentos aplicados dificultam e muito a aplicação de métodos analíticos. Nestes casos, exige-se a utilização de ferramentas de otimização mais robustas, como por exemplo, algoritmos de base numérica. Dependendo da sua natureza e dos recursos utilizados para a determinação da solução ótima, os métodos numéricos podem ser classificados de diferentes formas. A mais comum, compreende a divisão entre métodos determinísticos e métodos estocásticos.

Os métodos determinísticos representam a abordagem clássica em otimização. Os seus algoritmos dependem fortemente de expressões algébricas para o cálculo do gradiente da função, motivo pelo qual são também apelidados de métodos baseados em gradiente. Pelo facto de se basearem numa rigorosa formulação matemática, os resultados obtidos são inequívocos e replicáveis, i.e., partindo de um mesmo ponto inicial conduzem sempre à mesma sequência de soluções. De um modo geral, apresentam boas características de convergência, que no caso de problemas de menor complexidade faz com que apresentem um desempenho notável. Contudo, esta mesma característica pode fazer com que a solução determinada corresponda a um ótimo

local ao invés de ótimo global, dada a formulação baseada em gradiente. De entre os vários métodos que configuram esta mesma classificação, podem referir-se o método de Newton, o *Simplex* e o método dos multiplicadores de Lagrange. O método de Newton é o mais amplamente utilizado e está associado à resolução de problemas de otimização sem restrições, sendo que também o *Simplex* é utilizado para otimização não restringida. Este método de otimização desenvolvido por Spendley *et al.* [108] resulta numa adaptação do método *Simplex* original desenvolvido por Dantzig *et al.* [109], não devendo ser confundido com o mesmo. Por último, o método dos multiplicadores de Lagrange é utilizado para problemas de otimização restringidos [110]. Atualmente, como consequência da complexidade crescente dos problemas de otimização, frequentemente multiobjetivo e com funções multimodais, i.e., com mais do que uma função objetivo, com vários ótimos locais e com elevado grau de não-linearidade, a viabilidade da aplicação dos métodos determinísticos pode ficar comprometida. A morosidade dos cálculos a efetuar neste tipo de situações, associada à sua natureza baseada em gradientes, que condiciona o seu desempenho em função da solução inicial fazendo convergir a solução para um ótimo global, levou a que fossem equacionados outro tipo de métodos como os estocásticos [110], [111]. De notar que, no entanto, as técnicas baseadas no cálculo de gradientes continuam a ser utilizadas, devendo, no entanto, ser tomadas medidas para minimizar convergências precoces para extremos locais.

Os métodos estocásticos caracterizam-se pela pseudo-aleatoriedade no processo de procura da solução ótima, para um problema de otimização [110]. Deste modo, para um igual ponto de partida a solução encontrada poderá ser diferente, motivo pelo qual são considerados adequados para encontrar soluções quase-ótimas, em problemas cuja complexidade não possibilite a aplicação de métodos que permitam determinar a solução ótima ou mesmo até, quando os mesmos não existam. Os métodos estocásticos são constituídos pelas heurísticas e mais recentemente pelas metaheurísticas, que de modo sustentado, têm vindo a crescer em utilização e número de algoritmos disponíveis [111].

2.4.1. Metaheurísticas

Pertencentes à classe dos métodos de otimização estocásticos, as metaheurísticas caracterizam-se pela sua independência face ao problema de otimização, permitindo a sua aplicação a uma vasta gama de problemas em ciência e engenharia, nos quais uma solução aproximada será suficiente [111]. Caracterizam-se também, de um modo geral, pela simplicidade de conceitos e facilidade de implementação, sendo ainda independentes do gradiente da função objetivo, conseguindo ultrapassar mínimos locais. As metaheurísticas apresentam duas fases principais, a exploração e intensificação, estando a primeira associada a uma maior diversificação

de soluções através da exploração do espaço de otimização e a segunda associada a um maior foco na procura de melhores soluções em regiões promissoras do espaço de otimização. À parte do fenómeno natural que tipicamente serve de inspiração à construção de uma metaheurística, o equilíbrio entre as duas fases figura entre as principais diferenças entre algoritmos. A título de exemplo, metaheurísticas baseadas numa solução única tenderão a ser mais orientadas para a intensificação, ao passo que, algoritmos baseados em populações tenderão a ser mais orientados para a exploração [112]. Independentemente do princípio orientador da metaheurística, a sua natureza estocástica poderá constituir uma limitação em determinados contextos, onde a repetibilidade seja um fator determinante. Outro aspeto a ter em consideração está associado à parametrização do próprio algoritmo de otimização. Em todo o caso, as vantagens da utilização de metaheurísticas para a resolução de problemas de otimização, ultrapassam, de um modo geral, as limitações que lhe poderão estar associadas, sendo a sua crescente utilização exemplo disso.

Um trabalho de Hussain *et al.* [113] identificou no período de 1983 a 2016 um total de 130 novos algoritmos e cerca de 350 alterações propostas, nos quais os mais variados elementos e fenómenos naturais são utilizados como metáforas. O *Particle Swarm Optimization* (PSO) que se baseia nas propriedades de partículas em movimento [114], o *Artificial Bee Colony* (ABC) inspirado no comportamento de abelhas à procura de alimento [115], [116], ou o *Ant Colony Optimization* (ACO) que mimetiza os comportamentos de formigas no processo de procura de alimento, são exemplos de metaheurísticas bastante conhecidas e amplamente utilizadas. Ao nível do trabalho que se pretende desenvolver, a seleção de um algoritmo de otimização representa um passo importante, pelo que é necessário ter alguns aspetos em consideração. Conforme evidenciado por Hussain *et al.* [113] existem algoritmos que pela sua popularidade e resultados demonstrados são frequentemente citados e utilizados, pelo que, no presente trabalho, serão de evitar. Paralelamente, e uma vez que se pretende explorar conceitos muito pouco abordados, será também interessante a extensão ao algoritmo de otimização, i.e., a utilização de uma metaheurística recente e como tal, pouco utilizada.

2.4.2. *Jellyfish Search*

O *Jellyfish Search* (JS) é um algoritmo de otimização baseado no comportamento de alforrecas ou medusas (*jellyfish*) no oceano. Enquadrado nos algoritmos bio-inspirados baseados em enxames/grupos de seres vivos, o JS procura mimetizar o comportamento destes pequenos seres invertebrados na procura de alimento nos mares e oceanos. Genericamente, o termo alforreca ou medusa, não designa uma única espécie, mas um vasto conjunto. Estes seres, apesar das naturais diferenças entre espécies, partilham a mesma silhueta em formato tipo chapéu-de-chuva, sendo esta característica a principal responsável por garantir alguma mobilidade no meio.

Ainda assim, continuam a depender maioritariamente das correntes e marés para se fazer deslocar, principalmente, a largas distâncias. Sempre que as condições sejam favoráveis, i.e., conjugação de correntes e marés, disponibilidade de alimento, oxigénio, conforto térmico, etc. é possível assistir à formação de grandes grupos ou conjuntos, sendo que, do ponto de vista do JS, é este processo que conduz à formação de um grupo que se pretende mimetizar [112].

Por se tratar de um modelo, o algoritmo pressupõe um conjunto de idealizações, sendo elas, o *jellyfish* apenas segue a corrente oceânica ou se movimenta dentro do grupo de acordo com uma função de controlo, a movimentação no oceano tem como propósito a procura de alimento e a quantidade de alimento é determinada pela localização e a sua correspondente função objetivo. Como em qualquer metaheurística baseada em populações, cada *jellyfish* corresponde a um indivíduo, sendo o seu número n_{pop} . A população é inicializada com recurso a um mapa logístico (*logistic map*) de acordo com a expressão (2.4.2), na qual X_i representa o valor da localização do i -ésimo *jellyfish*, X_0 é um valor gerado aleatoriamente e utilizado para a gerar a população inicial de *jellyfish*, e η assume-se igual a 4, conforme a metodologia utilizada por Chou e Truong [112].

$$X_{i+1} = \eta X_i (1 - X_i), \quad 0 \leq X_0 \leq 1 \quad (2.4.2)$$

Constituída a população inicial, é feito o cálculo da quantidade de comida $f(X_i)$ para cada localização X_i , determinando qual o *jellyfish* com melhor localização X^* da população inicial. O cálculo é realizado em seguida tendo em consideração o tipo de movimentação exibido por cada *jellyfish* e que é estabelecido com recurso a uma função de controlo de tempo. Esta função $c(t)$, cuja expressão se apresenta em (2.4.3), depende do número máximo de iterações, Max_{It} , estabelecido e de uma variável, t , que assume valores inteiros no intervalo $[1, Max_{It}]$, e que em termos de implementação se traduz num ciclo ao número de iterações.

$$c(t) = \left| \left(1 - \frac{t}{Max_{It}} \right) \cdot (2 \cdot rand(0, 1) - 1) \right| \quad (2.4.3)$$

Estabelecida a função de controlo de tempo que permite a definição do tipo de movimento exibido por cada *jellyfish*, é possível estabelecer as expressões que caracterizam os diferentes tipos de movimento. Para $c(t) \geq 0,5$, o *jellyfish* segue a corrente oceânica, sendo o movimento descrito pela expressão (2.4.4), na qual $\vec{T}(t)$ representa a tendência e é determinada através da expressão (2.4.5). Por sua vez, β e μ , designam o coeficiente de distribuição espacial e a localização média de cada indivíduo da população anterior. Por recomendação de Chou e Truong [112], β assume o valor de 3.

$$X_i(t + 1) = X_i(t) + rand(0, 1) \cdot \vec{T}(t) \quad (2.4.4)$$

$$\vec{T}(t) = X^* - \beta \cdot rand(0, 1) \cdot \mu \quad (2.4.5)$$

Segundo as regras de idealização do modelo, um *jellyfish* apenas exibe movimento na corrente oceânica ou no interior de um grupo, pelo que não seguindo a primeira, tem que obrigatoriamente exibir a segunda. Assim, para $c(t) < 0,5$ o *jellyfish* movimenta-se no interior do grupo. Atendendo às características biológicas destes seres, a generalidade do movimento que exibem é passivo, contudo podem também, em determinadas situações, exibir pequenos movimentos ativos. Deste modo, no interior de um grupo, um *jellyfish* pode apresentar um de dois tipos de movimentos distintos. O controlo do tipo de movimento é feito por intermédio de uma variável de controlo R gerada aleatoriamente no intervalo $[0, 1]$. Sempre que se verifique a condição $R > (1 - c(t))$ o *jellyfish* exibe movimento ativo, e o cálculo da nova posição será dado pela expressão (2.4.6), na qual γ designa o coeficiente de movimento e U_b e L_b representam os limites superior e inferior para a localização dos *jellyfish*. Seguindo a recomendação de Chou e Truong [112], γ assume o valor de 0,1.

$$X_i(t + 1) = X_i(t) + \gamma \cdot rand(0, 1) \cdot (U_b - L_b) \quad (2.4.6)$$

No caso de exibirem movimento passivo, o cálculo da nova posição será dado pela expressão (2.4.7), na qual $\vec{D}(t)$ representa a direção do movimento passivo, sendo determinada por intermédio da expressão (2.4.8). Para o cálculo de $\vec{D}(t)$ intervêm o *jellyfish* com melhor localização até ao momento X^* e outro *jellyfish* numa localização que não a anterior, X_j .

$$X_i(t + 1) = X_i(t) + rand(0, 1) \cdot \vec{D}(t) \quad (2.4.7)$$

$$\vec{D}(t) = \begin{cases} X_j(t) - X^*(t), & f(X^*) \geq f(X_j) \\ X^*(t) - X_j(t), & f(X^*) < f(X_j) \end{cases} \quad (2.4.8)$$

Estabelecida a população tendo em conta os diferentes tipos de movimento que podem exibir, é importante verificar se todos os indivíduos cumprem com as restrições do problema de otimização. Deste modo, sempre que um *jellyfish* ultrapasse as fronteiras do espaço de otimização aplicam-se as expressões em (2.4.9), por forma a garantir o seu retorno.

$$\begin{aligned} X'_i &= (X_i - U_b) + L_b, & X_i > U_b \\ X'_i &= (X_i - L_b) + U_b, & X_i < L_b \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

No final desta etapa, segue-se novo cálculo da quantidade de comida existente em cada posição e atualização de X^* em função dos resultados obtidos, dando-se seguimento ao ciclo ao número de indivíduos e número de iterações. A Figura 2.4.1 apresenta o fluxograma do núcleo do JS, no qual é possível visualizar a construção do algoritmo e constatar a sua simplicidade. Por se tratar de uma metaheurística recente os estudos existentes poderão ser considerados limitados em termos de aplicação em problemas concretos de engenharia, contudo num revisão efetuada por Chou e Molla [117] permite constatar os bons resultados obtidos a partir da aplicação deste algoritmo, confirmando assim os bons resultados alcançados em testes por Chou e Truong [112].

É de destacar que não foram encontradas evidências da utilização deste algoritmo para otimização de variáveis discretas.

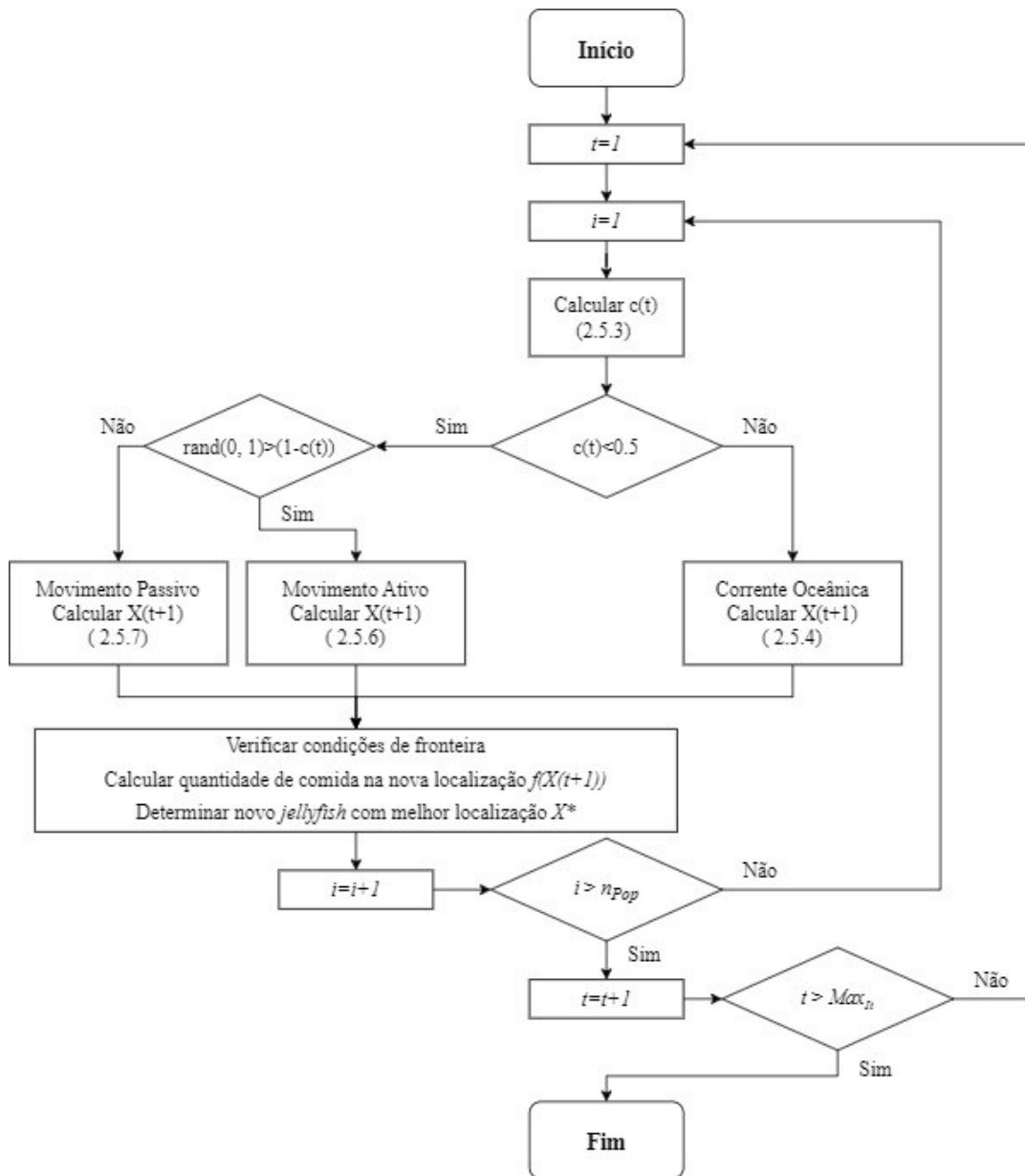


Figura 2.4.1 – Fluxograma do JS (adaptado de [112])

3. Metodologia

O presente capítulo é dedicado à apresentação da metodologia utilizada, tendo em vista o desenvolvimento da aplicação numérica de elementos finitos e otimização. Como tal, são oportunamente apresentadas as etapas necessárias à implementação da aplicação e prestados os esclarecimentos devidos no que a algumas opções diz respeito. Sempre que possível, recorre-se a representações esquemáticas e pseudocódigos por constituírem uma opção gráfica de visualização.

3.1. Aplicações Desenvolvidas

As aplicações simbólica e numérica cuja metodologia se apresenta, utilizam a linguagem de programação do *software* Maple[®]. No que concerne a linguagens de programação alternativas, as mesmas não foram consideradas, dado a existência de experiência prévia com o *software* Maple e pelo facto de a janela temporal disponível não ser propriamente extensa.

De modo a possibilitar a modelação e otimização de estruturas, a aplicação simbólica e numérica é composta por um algoritmo FEM e um algoritmo de otimização bio-inspirado, cujos conceitos estruturantes foram introduzidos no âmbito do capítulo anterior. O desenvolvimento da aplicação numérica compreendeu grande parte do tempo dedicado à presente dissertação, pelo que, a sua estrutura reflete inteiramente as opções tomadas tendo em vista o estrito cumprimento dos objetivos definidos. Como tal, do domínio da modelação e análise de estruturas, a aplicação está preparada para acomodar diferentes tipos de estruturas, constituídas ou não por diferentes camadas, e que podem apresentar diferentes condições de fronteira. Ao nível das propriedades materiais, está preparada para acomodar materiais isotrópicos, ortotrópicos e FGM, sendo que no caso destes últimos permite considerar abordagens contínuas e discretas para gradientes funcionais multidirecionais. Possibilita também a modelação de estruturas considerando ou não o efeito piezoelétrico, e no caso afirmativo a sua conjugação com diferentes conceitos como seja o de FGM. No que diz respeito à componente de otimização, está preparada para realizar a otimização, por abordagem discreta, de estruturas, podendo vir num futuro próximo – e se tal se demonstrar viável – a permitir também a otimização contínua. Em termos esquemáticos, Figura 3.1.1 apresenta uma visão global da estrutura da aplicação.

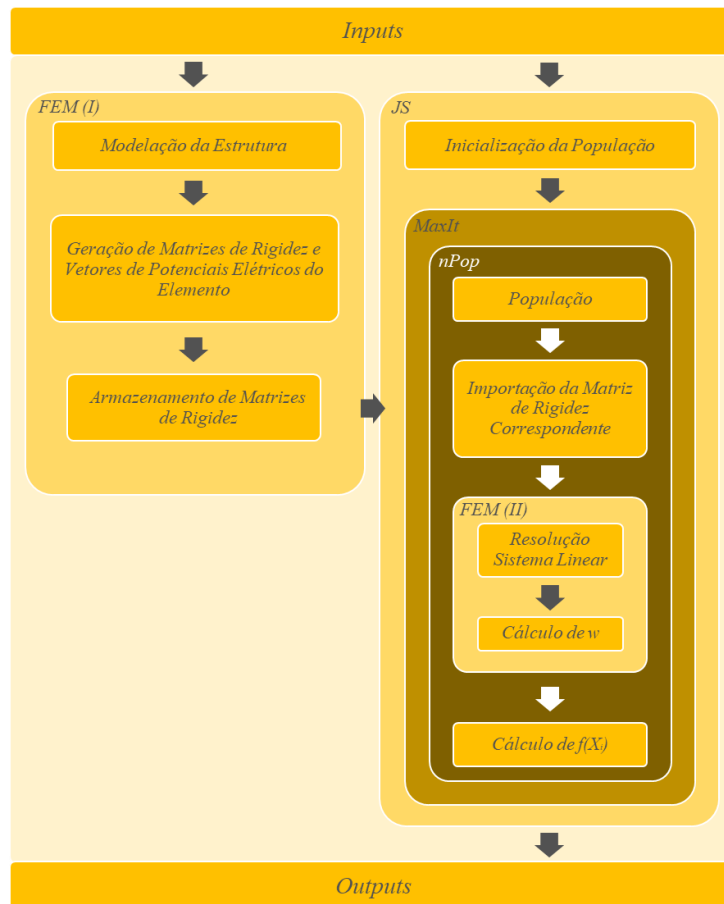


Figura 3.1.1 - Representação esquemática da aplicação numérica desenvolvida

Em termos práticos, a estrutura apresentada resulta da necessidade de conjugar o algoritmo FEM com o algoritmo JS. Contudo por se ter optado pela utilização de uma abordagem discreta em termos de otimização, o nível de integração e interação entre os dois algoritmos é reduzido, face ao que aconteceria no caso de uma abordagem contínua de otimização. Esta opção, resulta de um conjunto de observações e será oportunamente abordada. Importa reter, que os algoritmos conservam assim, grande parte da sua identidade, motivo pelo qual a sua implementação será explicada numa lógica primeiro FEM e depois JS.

Ao nível da implementação do FEM, a aplicação começa por requer a introdução de um conjunto de parâmetros relacionados com as propriedades geométricas e materiais da estrutura, suas condições de fronteira (CF) e discretização a adotar. No caso de materiais piezoelétricos é requerido a definição como sensor ou atuador, e no caso desta última da introdução dos valores de potenciais elétricos aplicados. Ao considerar uma estrutura do tipo viga ou placa num material piezoelétrico com gradiente funcional, a aplicação permite a seleção do método de integração a utilizar de forma inteiramente automática, oferecendo a possibilidade de escolha no processo de integração em espessura e na área do elemento, com exceção dos termos de corte que seguem a abordagem padrão. Aqui é possível selecionar entre integração analítica na espessura e área do elemento, integração analítica em espessura e numérica na área do elemento, integração numérica

em espessura e analítica na área do elemento ou integração numérica na espessura e área do elemento. Estas possibilidades decorrem da necessidade verificada durante o processo de obtenção de resultados, de reduzir o esforço computacional durante as operações de integração em especial quando na presença de gradientes materiais. No âmbito do quarto capítulo, mais concretamente em 4.1.1.3 e 4.2.1.2, são apresentados com maior detalhe os motivos, bem como quantificados os efeitos em termos de tempo. Simultaneamente ao método de integração – recorde-se no caso específico de um FGM com gradiente multidirecional – aplicação requer a definição da abordagem ao gradiente material a considerar, i.e., contínua ou discreta. Para ambos os casos, é feito o cálculo da fração volúmica de acordo a expressão (2.1.1), no entanto para o caso de uma abordagem contínua é necessário descrever o gradiente em função das coordenadas naturais do elemento de referência de modo a possibilitar posteriormente a integração na área do elemento sem problemas. Em seguida, e para o caso de não terem sido introduzidos já pelo utilizador aquando da modelação da estrutura, a aplicação determina os coeficientes de rigidez elástica reduzidos em função das direções das coordenadas (ξ, η, z) para uma abordagem contínua e o valor médio para cada elemento no caso de abordagem discreta. Por sua vez, e seguindo o descrito em 2.3.3, faz-se de forma faseada o cálculo das matrizes de rigidez do elemento. Uma vez chegado aqui, opta-se agora por explicar detalhadamente os motivos que levaram à adoção de uma abordagem discreta de otimização.

Tendo por base a apresentação do JS, enquanto algoritmo de otimização, realizada em 2.4.2, é perceptível que a cada indivíduo corresponde uma tentativa. No caso da otimização de estruturas, a cada indivíduo estará associado um conjunto de propriedades e/ou parâmetros do FEM e que implica correr por inteiro todo o algoritmo, o número de vezes resultantes do produto entre o número de indivíduos, o número de iterações e o número de corridas. Naturalmente, para cada indivíduo será necessário proceder a todas as operações de integração existentes no FEM e que a par da resolução do sistema linear, são das operações que necessitam de mais tempo e consomem maior quantidade de recursos computacionais, nomeadamente memória. Do ponto de vista do próprio estudo de otimização, para possibilitar a obtenção de resultados em tempo aceitável a opção será reduzir o número de vezes que será necessário correr o algoritmo, o que se traduz na redução do número de indivíduos e do número de iterações. No entanto esta opção pode comprometer seriamente a qualidade da solução ótima global obtida, dada a redução da amostra e da sua maturidade. Após a consulta de alguma literatura e reflexão aprofundada sobre a questão, ponderou-se a utilização de uma otimização baseada em variáveis discretas, que permitisse contornar – ou pelo menos minimizar – a morosidade do processo de integração. Isto exigiu desde logo a definição em concreto das variáveis que se pretendiam fazer variar durante o processo de otimização. Atendendo à temática da presente dissertação e ao caminho que vinha sendo percorrido, considerar a variação discreta dos expoentes da lei de potência do material pareceu

bastante interessante. Relativamente ao modo como foi implementado recupera-se agora o ponto em que ficou o cálculo das matrizes de rigidez do elemento.

No FEM as operações de integração são utilizadas para o cálculo de matrizes e vetores, sendo que, uma vez calculados não há lugar a mais operações de integração. Pela formulação matemática adotada em 2.3.3 percebe-se que as matrizes de rigidez, entre outros parâmetros, serão função das propriedades materiais por intermédio de $[Q(x, y, z)]$, $[e(x, y, z)]$ e $[\epsilon(x, y, z)]$. Assim, surgiu a ideia de gerar, previamente, as matrizes de rigidez em função dos expoentes p a considerar, fazendo depois corresponder cada matriz a uma determinada posição numa estrutura e que seria invocada quando necessário de pelo JS. Deste modo, quando calculadas, as matrizes de rigidez do elemento são guardadas num ficheiro *Maple Internal Format* (.m) e arquivadas num diretório em função do valor do expoente p que lhes está associado e posteriormente da direção do gradiente, do tipo de estrutura, das condições de fronteira, etc. Considerando que p assume valores de 0, 0.1, 0.5, 1, 2 e 5 a estrutura de armazenamento terá um total 6 posições, fazendo corresponder a cada uma, um único vetor de matrizes de rigidez de todos os elementos. Considerando um vetor de matrizes de rigidez dos elementos genérico associado a um determinado expoente p , a representação esquemática do processo será dada pela Figura 3.1.2. Note-se que a cada posição corresponde um algarismo que identifica a posição correspondente, sendo este, de extrema relevância no processo mais adiante.

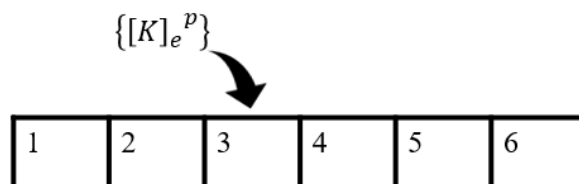


Figura 3.1.2 - Representação esquemática do processo de arrumação para um vetor de matrizes de rigidez do elemento genérico associado ao expoente p

Uma vez obtidos e arrumados, numa estrutura, todos os vetores de matrizes de rigidez dos vários elementos é necessário explicar o funcionamento do JS adaptado à otimização discreta adotada. Em termos gerais, o princípio de funcionamento do JS mantém-se, passando apenas a admitir variáveis discretas. Deste modo, no processo pseudoaleatório de geração de indivíduos é necessário introduzir algumas alterações, desde logo, no que à dimensão do espaço de otimização diz respeito. Considerando que cada indivíduo gerado corresponde a uma e uma só posição na estrutura de dados, que alberga os vetores de matrizes dos elementos, apenas é admissível gerar indivíduos no intervalo definido pelo número de posições da estrutura, pelo que, no caso utilizado para efeito ilustrativo, corresponde ao intervalo $[1, 6]$. Definidos os constrangimentos laterais do espaço de otimização é necessário assegurar que cada indivíduo apenas pode assumir um valor inteiro. Assim, são modificadas as expressões (2.4.2), (2.4.4), (2.4.6) e (2.4.7). Relativamente às

três primeiras, o coeficiente aleatório $rand(0, 1)$, é substituído pela geração de um número inteiro no intervalo $[1, 6]$, sendo posteriormente arredondado o resultado final, obtendo-se assim, as expressões (3.1.1) a (3.1.3). Note-se que $round()$ designa uma operação de arredondamento, que na aplicação desenvolvida é efetuada através do método de arredondamento estocástico (SR – *Stochastic Rounding*), motivo pelo qual não se utiliza a notação comum para os arredondamentos por defeito $\lfloor g \rfloor$, e por excesso $\lceil g \rceil$, de uma variável genérica g .

$$X_{i+1} = round(\eta X_i(1 - X_i)) \quad (3.1.1)$$

$$X_i(t + 1) = round\left(X_i(t) + rand(0, 1) \cdot \bar{T}(t)\right) \quad (3.1.2)$$

$$X_i(t + 1) = round\left(X_i(t) + \gamma \cdot rand(0, 1) \cdot (U_b - L_b)\right) \quad (3.1.3)$$

A utilização do SR é devida à necessidade de assegurar algum equilíbrio na geração de valores no intervalo estipulado, principalmente no que às proximidades do mesmo diz respeito. No caso da utilização de uma operação de arredondamento quer por excesso, quer por defeito, não ficaria assegurada igual frequência para as posições 1 e 6 podendo comprometer os resultados a obter pelo algoritmo. No caso do SR, o arredondamento por excesso ou por defeito é realizado tendo em consideração uma probabilidade dependente da proximidade, como descrito por *Croci et al.* [118] e que se traduz na expressão para uma variável genérica g , na qual $r(g)$ é obtido através da expressão (3.1.5).

$$round(g) = \begin{cases} \lceil g \rceil, & \text{com } P(\lceil g \rceil) = r(g) \\ \lfloor g \rfloor, & \text{com } P(\lfloor g \rfloor) = 1 - r(g) \end{cases} \quad (3.1.4)$$

$$r(g) = \frac{g - \lfloor g \rfloor}{\lceil g \rceil - \lfloor g \rfloor} \quad (3.1.5)$$

Em termos práticos e considerando que g assume um valor de 1.6, a probabilidade de arredondamento por excesso será de 0,6, enquanto para o arredondamento por defeito será 0,4. Se se considerar um conjunto de 100 repetições da operação de arredondamento pelo SR o valor médio obtido tenderá a ser idêntico ou muito próximo ao valor inicial de g , de 1.6. Relativamente à expressão (2.4.7), existe apenas a necessidade de substituir o coeficiente aleatório $rand(0, 1)$, pela geração de um número inteiro aleatório no intervalo $[1, 6]$. Assim ficam concluídas as alterações ao núcleo do JS que interferem diretamente na geração de indivíduos.

Estando gerado um conjunto de indivíduos, cujo valor corresponde a uma posição na estrutura que guarda os vetores de matrizes de rigidez é feita a importação dos mesmos, conforme a representação esquemática da Figura 3.1.3. A este nível, é importante esclarecer uma questão que provavelmente já se terá levantado. Até ao momento, estabeleceu-se que a cada indivíduo corresponde uma posição que está associada a um determinado vetor de matrizes de rigidez dos elementos. No entanto se para cada indivíduo - que é como quem diz estrutura - apenas poderá

corresponder um único vetor de matrizes do elemento, não seria, porventura, mais pratico fazer a geração da matriz de rigidez global e importar posteriormente apenas uma única estrutura, evitando a montagem das diversas matrizes e vetores, $n_c \times n_{pop} \times Max_{It}$ vezes?

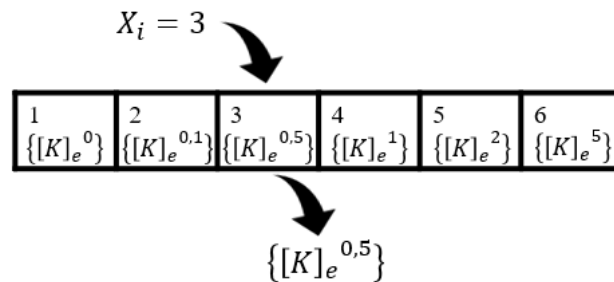


Figura 3.1.3 - Seleção do vetor de matrizes de rigidez genéricas na posição definida pelo valor do indivíduo

Na ótica da otimização de uma estrutura, seja ela placa ou viga, utilizando apenas como variável o expoente p da lei de potência, e como tal, o material, a resposta à questão anterior será afirmativa, contudo, esta abordagem limita o potencial de utilização da aplicação numérica a casos mais simples de utilização. Assim, será de manter a estrutura adotada e que se revelará particularmente útil mais adiante.

Estando importado o vetor das matrizes de rigidez correspondente ao indivíduo inicia-se o processo de montagem (ou *assemblagem*) das diferentes matrizes de rigidez de acordo com a discretização adotada e condições de fronteira definidas. Na sequência, é feita a resolução do sistema linear e determinados os deslocamentos transversais nos nós da estrutura. Na posse dos mesmos é possível alternar entre duas situações distintas de otimização. Na primeira, a função objetivo $f(X_i)$ é igual ao valor do deslocamento máximo transversal da estrutura conforme a expressão (3.1.6). Na segunda a função objetivo corresponde à expressão (3.1.7), na qual w_i representa os deslocamentos transversais nodais num determinado número de pontos n_{pc} previamente definido e w_{ref} representa o valor de deslocamento pretendido nesses mesmos pontos e que tipicamente tenderá a ser nulo. Esta segunda hipótese representa uma situação de controlo de forma, uma vez que permite avaliar os deslocamentos num determinado conjunto de pontos. Para ambas as situações pretende-se a minimização de deslocamentos.

$$f(X_i) = w_{max} \quad (3.1.6)$$

$$f(X_i) = \sum_{i=1}^{n_{pc}} (w_i - w_{ref})^2 \quad (3.1.7)$$

Deste modo a aplicação procede ao cálculo da melhor solução aproximada para o problema, retornando em *output* o valor ótimo global, a posição correspondente da estrutura de armazenamento dos vetores de matrizes, o valor médio e o respetivo desvio padrão para uma série

de n_c corridas. Opcionalmente poderá também retornar o melhor ótimo obtido para cada corrida e a sua correspondente localização.

Por se tratar de uma aplicação de modelação e otimização de estruturas piezoelétricas, será interessante, avaliar também o potencial elétrico aplicado à estrutura – a que corresponde uma configuração de atuador – enquanto variável de projeto, em adição ao próprio gradiente material. Para tal, será necessário aumentar a dimensão do problema de otimização, passando cada *jellyfish* X_i a guardar duas localizações correspondentes às posições na estrutura de armazenamento. Ao nível do funcionamento e implementação da aplicação traduz-se na geração e armazenamento dos vetores correspondentes aos potenciais elétricos aplicados por *patch* por elemento $\{[\varphi_z]_e\}$. Por defeito, a primeira dimensão de X_i estará associada ao material, enquanto a segunda estará associada ao potencial elétrico. Chegado aqui, esclarece-se agora a necessidade de trabalhar com as matrizes ao nível do elemento. Como exposto em 2.3.3 por intermédio das expressões (2.3.45) e (2.3.46), o cálculo de $\{F_a\}_e$ está dependente do potencial elétrico que é aplicado a cada elemento, pelo que existindo a necessidade de importar as matrizes e vetores necessários ao seu cálculo ao nível do elemento considerou-se mais oportuno trabalhar a este nível.

Como consequência desta opção tomada, a aplicação encontra-se indiretamente preparada para fazer variar tanto o material como o potencial elétrico ao nível do elemento. Perante esta possibilidade, implementou-se as necessárias adaptações, para numa mesma estrutura, considerar em simultâneo a existência de dois gradientes materiais distintos e dois potenciais elétricos aplicados de forma independente.

Partindo da estrutura utilizada, e acima descrita, a aplicação gera para cada indivíduo um conjunto de 4 localizações, correspondendo as duas primeiras ao gradiente material e as restantes aos potenciais elétricos, mantendo-se o procedimento de aplicação ao nível do elemento. Contudo, para cada elemento, de um dado indivíduo, existe agora a possibilidade de escolha entre dois gradientes materiais e dois potenciais elétricos, cuja representação esquemática se apresenta na Figura 3.1.4, apenas para as dimensões associadas à seleção do material.

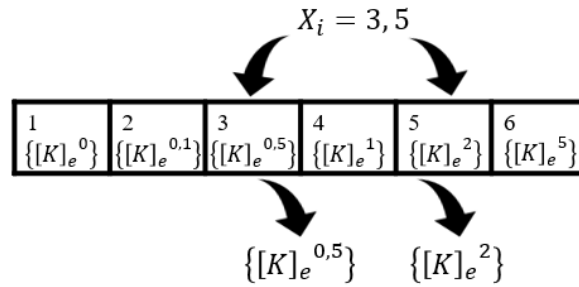


Figura 3.1.4 - Seleção dos vetores de matrizes de rigidez genéricas nas posições definida pelo variáveis do indivíduo

A partir daqui tem-se duas possibilidades de gradientes materiais para cada indivíduo, fazendo a seleção de um ou de outro para cada elemento. Este processo permite por parte do utilizador a definição das quantidades de cada um dos materiais em termos de percentagem volumica da estrutura, por intermédio de um parâmetro *nelemmist*, i.e., 40% do material correspondente à dimensão 1 de X_i e 60% do restante, por exemplo. Este processo pseudoaleatório é implementado com recurso ao seguinte pseudocódigo.

```

j = 0:
  while j < nelemmist do
    gerar vetor de coordenadas aleatórias para o material da posição 1:
    for cada elemento até nelemmist do
      posições de um vetor definidas pelas coordenadas iguais a  $X_{i,1}$ 
    end for:
    for cada elemento até numero de lementos da estrutura do
      if posição igual a  $X_{i,1}$  then
        j = j + 1:
      else
        posição é ocupada por  $X_{i,2}$ 
      end if:
    end do:
  end do:

```

Por forma a garantir a presença de dois gradientes materiais distintos aquando da execução da rotina anterior, é previamente aplicado um mecanismo que garante que variáveis associadas à mesma grandeza não possam assumir valores iguais e que se traduz no seguinte pseudocódigo.

```

j = 0:
  while j = 0 do
    for cada individuo do
      gerar individuo
    end for:
  end while:

```

if $X_{i,1} = X_{i,2}$ ***or*** $X_{i,3} = X_{i,4}$ ***then***

j = 0:

else

j = 1:

end if:

end do:

end do:

Feita a seleção de um gradiente material e de um potencial elétrico por elemento, segue-se a constituição da matriz de rigidez global da estrutura e respetivo vetor de forças. Aplicando as condições de fronteira obtém-se os deslocamentos nodais procedendo o algoritmo de modo semelhante ao já apresentado. Por forma a permitir uma visualização mais célere do material e gradiente aplicado o algoritmo efetua o seu mapeamento retornando-o de forma automática para o ótimo global da série de corridas.

Página intencionalmente deixada em branco

4. Estudos Numéricos

O presente capítulo representa o culminar de grande parte do trabalho desenvolvido, resultando da aplicação dos conceitos estruturantes abordados no âmbito do segundo capítulo e da metodologia apresentada no terceiro capítulo. É apresentado um conjunto abrangente de estudos numéricos realizados, numa amostra que se espera considerável e englobante dos modelos aplicados.

Por questões de organização do trabalho realizado, os estudos apresentados são categorizados em estudos de verificação, estudos paramétricos e estudos de otimização, refletindo as sucessivas etapas de obtenção de resultados. Para a realização dos diversos estudos utilizou-se um computador com processador i9-12900K e 32GB de memória RAM, sendo esta informação particularmente relevante no caso dos estudos paramétricos e de otimização.

4.1. Estudos de Verificação

A adoção, numa primeira fase, de contextos padrão ou problemas tipo, permite uma avaliação comparativa de resultados, o que é muito importante para efeitos de verificação e/ou validação. Os resultados obtidos são diretamente comparados com resultados provenientes da utilização de metodologias semelhantes e/ou alternativas equivalentes, implementadas por outros autores. Os desvios calculados, permitem quantificar, os desvios verificados entre modelos, sendo os desvios apresentados obtidos por meio da seguinte expressão.

$$\delta(\%) = \frac{|\text{resultado numérico} - \text{valor de referência}|}{\text{valor de referência}} \times 100 \quad (4.1.1)$$

O modo de apresentação dos sucessivos estudos realizados no âmbito do processo de verificação, reflete a progressão do trabalho realizado, numa abordagem que se pretende simultaneamente lógica e pedagógica. Dependendo do domínio a verificar, estabelece-se a divisão em componente elástica, componente piezoelétrica e componente de otimização.

De notar que, salvo indicação expressa em contrário, o valor para o fator de correção de corte, k_s , inerente à utilização da teoria de deformação de corte de 1ª ordem, é de 5/6. Por uma questão de coerência, a apresentação e análise de resultados provenientes de estudos de convergência de

malha ou variação de parâmetros, tenderá a ser maioritariamente feita no subcapítulo afeto aos estudos paramétricos (4.2).

4.1.1. Casos de estudo sem efeito piezoelétrico

Na presente secção apresentam-se os resultados provenientes dos estudos de verificação, realizados no âmbito dos testes considerando somente a componente elástica da aplicação numérica desenvolvida. Para o efeito, são considerados diversos casos padrão, nos quais se pretende avaliar comparativamente o comportamento estático de estruturas do tipo viga ou placa, quando sujeitas a esforço externo, para diferentes contextos materiais.

4.1.1.1. Material Isotrópico

Os estudos realizados no âmbito desta fase, destinam-se a verificar a implementação do FEM por meio da aplicação numérica desenvolvida, considerando para o efeito dois casos distintos.

- **Estudo de Verificação 1**

O primeiro caso é ilustrativo de um exemplo comum na literatura. Considera-se uma viga, simplesmente apoiada (SSFF), de material isotrópico ($E = 200$ GPa, $G = 80$ GPa e $\nu = 0,3$), à qual é aplicada uma carga de distribuição uniforme, q , de 1 N/m. Em termos geométricos, a largura, b , e a espessura, h , são igualmente de 10 mm, sendo o comprimento, L , de 200 mm, correspondendo a uma razão de aspeto, L/h , de 20.

Para efeitos de estudo comparativo, apresenta-se na Tabela 4.1.1, o valor obtido para deslocamento máximo transversal a meio vão, w , em unidades SI. Em simultâneo, apresenta-se o valor dado pela teoria de Elasticidade para uma situação de tensão plana [119], bem como valores obtidos por Loja [120] e Iabna [121]. Considera-se uma discretização de 20×1 elementos, na direção longitudinal da viga (segundo x).

Tabela 4.1.1 - Estudo comparativo do deslocamento máximo transversal a meio vão numa viga de material isotrópico

w [mm]			
Elasticidade Tensão Plana	presente (δ (%))	[120] (δ (%))	[121] (δ (%))
1.25713E-7	1,25216E-7 (0,40)	1,25451E-7 (0,21)	1.25672E-7 (0,03)

Do presente estudo é possível constatar uma forte proximidade entre valores, motivo pelo qual se considera o modelo numérico verificado. Numa ótica de aprofundamento do estudo comparativo efetuado, consta do tópico 4.2.1.1, o respetivo estudo de convergência de malha, bem como da influência de diferentes razões de aspeto L/h .

- **Estudo de Verificação 2**

Na perspetiva de alargar o âmbito dos estudos de verificação, considera-se agora uma placa. Este caso, em concreto, representa um exemplo clássico da literatura, e é aplicado com o propósito de verificar a implementação de uma discretização com progressão bidimensional, i.e., $n \times n$ elementos. Consiste numa placa quadrangular, simplesmente apoiada (SSSS), de aresta, L , à qual é aplicada uma carga uniformemente distribuída, q_0 . No que refere às características materiais, é aplicado um material isotrópico com $\nu = 0,25$.

Para efeitos do presente estudo, é apresentado na Tabela 4.1.2 o deslocamento máximo transversal da placa, em formato adimensionalizado de acordo com a equação (4.1.2), na qual \bar{w} representa o deslocamento máximo transversal adimensionalizado, w_0 representa o deslocamento transversal máximo não adimensionalizado e D_{22} representa a posição (2,2) da matriz de rigidez à flexão, sendo obtido recorrendo à equação (4.1.3).

$$\bar{w} = w_0 \left(\frac{D_{22}}{L^4 q_0} \right) \times 10^2 \quad (4.1.2)$$

$$D_{22} = \frac{E h^3}{12 (1 - \nu^2)} \quad (4.1.3)$$

Tabela 4.1.2 - Estudo comparativo do deslocamento máximo transversal adimensionalizado numa placa de material isotrópico para $L/h=20$

\bar{w}		δ (%)
presente	[97]	
0,4108	0,4111	0,07

Da análise comparativa dos valores apresentados observa-se igualmente uma forte correspondência entre valores. Deste modo considera-se verificado o modelo numérico. De referir que, para o efeito, utilizou-se uma discretização de 20×20 elementos, segundo x e y , respectivamente. À semelhança do caso anterior, a versão integral do presente estudo, bem como a correspondente análise, pode ser consultada no tópico 4.2.1.1.

4.1.1.2. Material Ortotrópico

Apresentam-se de seguida dois estudos de verificação envolvendo materiais ortotrópicos.

- **Estudo de Verificação 3**

Com o intuito de avaliar comparativamente o deslocamento máximo transversal de uma placa quadrada de material ortotrópico, apresenta-se um primeiro caso. Considera-se uma placa, simplesmente apoiada (SSSS), de aresta, L , sujeita a uma distribuição de forças transversais ao plano da placa, q_0 , com $L/h = 20$. Em termos materiais, são consideradas as seguintes propriedades: $E_1 = 25E_2$, $G_{12} = G_{13} = 0,5E_2$, $G_{23} = 0,2E_2$ e $\nu_{12} = 0,25$.

O resultado obtido para o deslocamento máximo transversal adimensionalizado, \bar{w} , consta da Tabela 4.1.3. Para efeitos comparativos, são também apresentados valores obtidos utilizando uma formulação baseada na FSDT. O primeiro é obtido através da aplicação do FEM, enquanto o segundo é obtido por via analítica. De referir que as metodologias FEM em comparação, utilizam uma malha de 20×20 elementos. Os valores adimensionalizados apresentados, são determinados de acordo com a equação (4.1.4).

$$\bar{w} = w_0 \left(\frac{E_2 h^3}{L^4 q_0} \right) \times 10^2 \quad (4.1.4)$$

Tabela 4.1.3 - Estudo comparativo do deslocamento máximo transversal adimensionalizado para uma placa de material ortotrópico com $L/h=20$

presente	\bar{w}	
	[23]	
	<i>FEM FSDT</i> (δ (%))	Analítico <i>FSDT</i> (δ (%))
0,726	0,763 (5,10)	0,726 (0,00)

Da análise comparativa constata-se a coincidência de valores com o resultado analítico FSDT. Contudo, relativamente à comparação com o resultado proveniente do modelo FEM FSDT, o desvio apresenta um valor significativo para o tipo de estudo em causa. Esta questão é devida, em parte, às diferenças existentes entre os modelos numéricos, nomeadamente ao nível do elemento utilizado. Como oportunamente referido no âmbito do segundo capítulo, o presente modelo utiliza um elemento Q4, com 5 GDL por nó, enquanto o modelo de referência utiliza um elemento 4LFSDT6, com 6 GDL por nó. Esta diferença no número de graus de liberdade por nó está associada, no caso do presente elemento, a uma menor capacidade de representar mais proximamente a deformada da placa para um igual número de elementos, o que se traduz numa maior rigidez do elemento e consequentemente da estrutura modelada, o que se observa nitidamente no estudo comparativo realizado, com o valor de \bar{w} obtido a ser inferior ao valor de referência. Este fenómeno de rigidificação face ao modelo de referência é transversal a diferentes discretizações utilizadas, como é possível observar no correspondente estudo de convergência de malha, que consta da Tabela A1.

Ainda assim, por uma questão de maior confiança e segurança no modelo numérico implementado, a realização de um estudo comparativo adicional, assume particular relevância.

- **Estudo de Verificação 4**

De modo semelhante ao caso anterior, considera-se uma placa, simplesmente apoiada, de material ortotrópico, à qual é aplicada uma carga uniformemente distribuída, q_0 . Em termos de características materiais e geométricas, são idênticas ao estudo anterior. Uma vez mais, pretende-se o estudo comparativo do valor do deslocamento máximo transversal adimensionalizado, \bar{w} , o qual é determinado com recurso à equação (4.1.2). Fazendo a adaptação da equação (4.1.3) para um material ortotrópico, resulta para o cálculo de D_{22} a expressão da equação (4.1.5).

$$D_{22} = \frac{E_2 h^3}{12 (1 - \nu_{12} \nu_{21})} \quad (4.1.5)$$

A Tabela 4.1.4 apresenta o resultado obtido, para uma discretização de 20×20 elementos, sendo o mesmo sujeito a comparação com valores de Reddy [97].

Tabela 4.1.4 - Estudo comparativo do deslocamento máximo transversal adimensionalizado para uma placa de material ortotrópico

\bar{w}		δ (%)
presente	[97]	
0,0606	0,0607	0,17

A comparação dos valores permite evidenciar a correspondência entre modelos. O desvio calculado, apesar de não nulo, é considerado bastante satisfatório, razão pelo qual se considera o modelo verificado. Os resultados que constam da Tabela A2, e que resultam do correspondente estudo de convergência de malha, permitem demonstrar a rápida convergência do modelo, vindo reforçar a percepção de que, de modo geral, o núcleo FEM da aplicação numérica desenvolvida, se encontra devidamente verificado.

4.1.1.3. Material com Gradiente Funcional (FGM)

A propósito da apresentação, no capítulo 2, das matérias estruturantes à presente dissertação, foi abordado o conceito de FGM. Contrariamente às situações já avaliadas e verificadas, a natureza não homogênea destes materiais, requer um trabalho de cálculo adicional por parte da aplicação numérica, tendo em vista a estimativa da evolução da distribuição das diferentes fases, bem como o cálculo das propriedades materiais efetivas. Deste modo, existe todo um interesse em proceder à verificação da rotina implementada na aplicação numérica, especificamente para este tipo de materiais e de especial importância face ao trabalho a desenvolver no âmbito da presente dissertação.

- **Estudo de Verificação 5**

O caso que se apresenta, é relativamente comum na literatura. Tem como objetivo avaliar a evolução do deslocamento máximo transversal, de uma FGP quadrangular, simplesmente apoiada, de aresta unitária e razão de aspeto $L/h = 20$. A placa encontra-se sujeita à aplicação de uma pressão uniforme, p_z , na superfície superior se acordo com a equação (4.1.6). Em termos materiais, a FGP, é constituída por duas fases distintas: uma metálica em alumínio (Al) e outra cerâmica em zircónica (ZrO_2). As propriedades materiais das fases são, respetivamente: $E_{(A)} = 70$ GPa, $\nu_{(A)} = 0,3$ e $E_{(B)} = 151$ GPa, $\nu_{(B)} = 0,3$.

No âmbito do presente estudo comparativo, a distribuição das diferentes fases ocorre de acordo com a lei de potência definida pela expressão (2.1.2). O cálculo das propriedades materiais efetivas é feito com recurso à regra das misturas de Voigt e do método de Mori-Tanaka. Deste modo, na Tabela 4.1.5 são apresentados os valores obtidos para o deslocamento máximo transversal adimensionalizado, para diferentes valores do expoente p , nomeadamente 0, 0,5, 1, 2 e $+\infty$. O factor adimensionalizante é determinado de acordo com a equação (4.1.12). A totalidade dos valores dispostos na tabela (presente e valores de referência) são determinados utilizando uma malha de 18×18 elementos. De referir que os valores apresentados com o sobrescrito $(^{NN})$, são calculados utilizando um método de integração numérica, quer na espessura da placa, quer na área do elemento. Esta opção em particular é alvo de análise no âmbito do respetivo estudo paramétrico (4.2.1.2), prendendo-se essencialmente com questões de ordem computacional.

$$p_z = h^4 E_{(\alpha)} \quad (4.1.6)$$

$$\bar{w} = \frac{w_0}{h} \quad (4.1.7)$$

Tabela 4.1.5 - Estudo comparativo do deslocamento transversal máximo adimensionalizado para uma FGP utilizando Voigt e Mori-Tanaka como técnicas de homogeneização

p	\bar{w} Voigt		δ (%)	\bar{w} Mori-Tanaka		δ (%)
	Presente	[59]		presente	[59]	
0	0,0208	0,0208	0,00	0,0208	0,0208	0,00
0,5	0,0263 ^(NN)	0,0266	1,14	0,0275 ^(NN)	0,0279	1,45
1	0,0292 ^(NN)	0,0297	1,71	0,0303 ^(NN)	0,0309	1,98
2	0,0317 ^(NN)	0,0325	2,52	0,0328 ^(NN)	0,0334	1,83
$+\infty$ (Al)	0,0449	0,0449	0,00	0,0449	0,0449	0,00

Uma breve análise comparativa permite evidenciar duas realidades distintas. Para valores de p iguais a 0 e $+\infty$, os desvios são nulos, numa situação espectável dado que para estas situações específicas a placa não apresenta um gradiente material, sendo apenas constituída por uma das fases. Trata-se, portanto, de uma situação idêntica às já analisadas no processo de verificação para materiais isotrópicos e homogéneos. Estes resultados são revestidos de especial importância dado

permitir identificar a ausência de problemas na rotina que efetua o cálculo das propriedades materiais efetivas para um FGM. No lado oposto, para valores de p iguais a 0.5, 1 e 2, os valores obtidos apresentam pequenos desvios face aos valores de referência. As diferenças observadas podem, em parte, ser justificadas com questões de ordem computacional, nomeadamente os métodos de integração utilizados ao nível da espessura, bem como do plano do elemento, bem como o número casas decimais utilizadas nas operações intermédias, em especial no cálculo da evolução da distribuição das diferentes fases de acordo com a lei de potência e também no cálculo das propriedades materiais efetivas. Assim, considera-se o modelo verificado, com a ressalva de que são expectáveis diferenças mais significativas para determinados valores do expoente p .

4.1.2. Casos de estudo com efeito piezoelétrico

Na presente secção apresentam-se os resultados e conclusões provenientes dos estudos de verificação associados a situações em que é considerada a influência da componente piezoelétrica dos materiais usados. De modo semelhante aos estudos já realizados, é considerado um conjunto alargado de problemas tipo, nos quais se pretende avaliar comparativamente a resposta estática e/ou elétrica de uma viga ou placa, quando sujeita a esforços externos ou potenciais elétricos. Contrariamente à secção anterior, os estudos são agrupados por configuração funcional, i.e., enquanto atuador ou sensor, e não por tipo de material.

4.1.2.1. Efeito inverso – Funcionamento como atuador

Os estudos realizados no âmbito da presente secção, e cujos resultados se apresentam, dizem respeito à configuração de atuador. Estes são caracterizados pela aplicação de um potencial elétrico à estrutura, viga ou placa, o qual induz uma deformação que é avaliada através do deslocamento máximo transversal.

- **Estudos de Verificação 6 e 7**

O primeiro caso que se apresenta é o de uma viga tipo *bimorph*, sujeita à aplicação de um potencial unitário. Trata-se de um teste de verificação quase obrigatório, razão pela qual se apresentam dois estudos em simultâneo. Para efeitos de estudo comparativo considera-se uma viga com duas camadas, encastrada numa das suas extremidades (CFFF), com um comprimento, l , de 0,1 m, uma largura, b , de 0,005 m e uma espessura total, h , de 0,001 m. Em termos materiais, ambas as camadas são de PVDF ($E = 2,0$ GPa, $G = 1,0$ GPa, $e_{31} = 0,046$ C/m², $e_{32} = 0,046$ C/m², $\epsilon_{33} = 1,062 \times 10^{-10}$ F/m). As camadas apresentam polarizações opostas, e à exceção de um potencial elétrico unitário (+0,5 V/-0,5 V), a viga não se encontra sujeita à ação de nenhum carregamento mecânico.

Tabela 4.1.6 - Evolução do deslocamento transversal nodal para uma viga (CFFF) em configuração de actuador e respetivos desvios em relação à literatura [100]

x [mm]	w [μm]		δ (%)
	presente	[100]	
20	0,0138	0,0139	0,72
40	0,0552	0,0553	0,18
60	0,1242	0,1240	0,16
80	0,2208	0,2210	0,09
100	0,3450	0,3450	0,00

Tabela 4.1.7 - Evolução do deslocamento transversal nodal para uma viga (CFFF) em configuração de actuador e respetivos desvios em relação à literatura [122]

x [mm]	w [μm]		δ (%)
	presente	[122]	
20	0,0138	0,0138	0,00
40	0,0552	0,0552	0,00
60	0,1242	0,1240	0,16
80	0,2208	0,2210	0,09
100	0,3450	0,3450	0,00

Os estudos apresentados têm como propósito avaliar comparativamente a evolução do deslocamento transversal nos nós localizados ao longo do comprimento da viga. Os resultados obtidos constam da Tabela 4.1.6 e Tabela 4.1.7 e são obtidos para uma discretização de 5×1 elementos.

De um modo geral, observam-se baixos valores de desvios, o que permite evidenciar a correspondência entre modelos. Em termos absolutos, as diferenças mais significativas são observáveis no estudo comparativo com os valores de Loja *et. al.* [100], mas que ainda assim apresentam uma tendência favorável de convergência para valores de x mais próximos da extremidade livre. Esta discrepância entre valores poderá ter origem nas diferentes teorias de deformação de corte utilizadas pelos modelos, em que o presente aplica a FSDT e o de Loja *et. al.* [100] utiliza a HSDT.

- **Estudos de Verificação 8 e 9**

Como anteriormente referido, o exemplo do *bimorph* é amplamente utilizado como estudo de verificação. Os estudos que em seguida se apresentam, utilizam idêntico contexto ao dos estudos de verificação 6 e 7, fazendo apenas diferir as propriedades do PVDF ($E=2,0$ GPa, $\nu = 0,29$, $G = 0,775$ GPa, $d_{31} = 2,2 \times 10^{-11}$ C/N, $\epsilon_{33} = 1,062 \times 10^{-10}$ F/m).

Tabela 4.1.8 - Evolução do deslocamento transversal nodal para uma viga (CFFF) em configuração de actuador e respetivos desvios em relação à literatura [102]

x [mm]	w [μm]		δ (%)
	presente	[102]	
20	0,0132	0,0134	1,52
40	0,0528	0,0540	2,27
60	0,1188	0,1220	2,69
80	0,2112	0,2180	3,22
100	0,3300	0,3420	3,64

Tabela 4.1.9 - Evolução do deslocamento transversal nodal para uma viga (CFFF) em configuração de actuador e respetivos desvios em relação à literatura [123]

x [mm]	w [μm]		δ (%)
	presente	[123]	
20	0,0132	0,0132	0,00
40	0,0528	0,0528	0,00
60	0,1188	0,1188	0,00
80	0,2112	0,2112	0,00
100	0,3300	0,3300	0,00

De modo similar, os estudos mantêm o propósito de avaliar comparativamente a evolução do deslocamento máximo transversal dos nós da viga ao longo do seu comprimento, apresentando-se os resultados obtidos na Tabela 4.1.8 e Tabela 4.1.9.

Da análise dos estudos comparativos realizados, constata-se a existência de duas realidades distintas. Por um lado a comparação com valores de Wang [102], na qual resultam desvios que oscilam entre 1,52 e 3,64 pontos percentuais e, por outro, a comparação com valores de Shen [123], na qual a correspondência entre modelos é inquestionável, não merecendo por isso qualquer comentário. Relativamente à primeira situação, esta é encarada com alguma apreensão, sendo naturalmente alvo de estudo mais aprofundado no correspondente estudo paramétrico, por forma a identificar eventuais inconsistências. No entanto, há a fazer um reparo, pois apesar das propriedades materiais utilizadas pelo autor [102], este efetua uma comparação direta com valores obtidos a partir da solução teórica utilizada por Tzou e Tzeng [122] – solução que é utilizada para efeitos comparativos no estudo de verificação 7 – na qual as propriedades do material divergem. Deste modo considera-se a possibilidade de existir algum equívoco nas propriedades materiais utilizadas, razão pela qual se considera os resultados obtidos confiáveis, na medida em que coincidem com os valores obtidos por Shen [123] e existe dúvida razoável quando aos valores obtidos por Wang [102].

- **Estudo de Verificação 10**

O presente estudo de verificação - e último da configuração de atuador – considera uma placa *bimorph*, simplesmente apoiada (SSFF), de 25 mm por 12,5 mm, com $L/h = 50$, à qual é aplicado um potencial elétrico de 50 V a cada uma das duas camadas de PZT-4 ($Q_{11} = Q_{22} = 139$ GPa, $Q_{12} = 77,8$ GPa, $Q_{13} = Q_{23} = 74$ GPa, $Q_{33} = 115$ GPa, $Q_{44} = Q_{55} = 25,6$ GPa, $Q_{66} = 30,6$ GPa, $e_{31} = e_{32} = -5,2$ C/m², $e_{33} = 15,1$ C/m² e $\epsilon_{33} = 11,51 \times 10^{-9}$ F/m).

Com o objetivo expresso de avaliar comparativamente o deslocamento máximo transversal e o potencial elétrico local adimensionalizados, os resultados obtidos e apresentados na Tabela 4.1.10, são obtidos utilizando as equações (4.1.8) e (4.1.9), respetivamente. De esclarecer que E_0 representa um factor de amplificação que assume o valor de 10^{10} m/V.

$$\bar{w} = \frac{E_0}{V_0} (w_0) \quad (4.1.8)$$

$$\bar{\phi} = \frac{E_0}{V_0} \left(\frac{\phi}{E_0} \right) \quad (4.1.9)$$

Tabela 4.1.10 - Estudo comparativo do deslocamento máximo transversal adimensionalizado e do potencial elétrico local adimensionalizado para uma placa (SSFF) em atuador com $a/h=50$

\bar{w}		δ (%)	$\bar{\phi}$		δ (%)
presente	[102]		presente	[102]	
2639,7	2477,8	6,53	0,572	0,546	4,76

Do estudo comparativo realizado é de constatar a existência de valores de desvios significativos (aproximadamente 7% e 5%). Esta situação é expectável face às diferenças entre os modelos envolvidos, em que o presente aplica o FEM baseado na FSDT e Wang [102] utiliza um software comercial de elementos finitos. Naturalmente, esta questão será alvo de estudo aprofundado no âmbito do correspondente estudo paramétrico (4.2.2.5).

4.1.2.2. Efeito direto – Funcionamento como Sensor

Na presente secção, os estudos que se apresentam, estão associados ao processo de verificação da componente de sensorização. Estes estudos caracterizam-se pela aplicação de um esforço mecânico externo numa dada magnitude, por forma a produzir determinado deslocamento, pretendendo-se avaliar o potencial elétrico gerado por tal deformação.

- **Estudo de Verificação 11 e 12**

Os estudos que se apresentam, têm por base o exemplo clássico da viga *bimorph*. Considera-se para o efeito uma viga de proporções e material idêntico à utilizada nos estudos de verificação

8 e 9. A viga apresenta um encastramento numa das suas extremidades (CFFF), sendo aplicada na extremidade oposta, uma força tal, capaz de produzir um deslocamento vertical de 10 mm.

Tabela 4.1.11 - Evolução comparativa do potencial local para uma viga (CFFF) em configuração de sensor e respetivos desvios em relação à literatura [124]

x [mm]	ϕ [V]		δ (%)
	presente	[124]	
]0,20]	286,63	286,10	4,25
]20,40]	222,93	222,50	10,02
]40,60]	159,24	158,90	6,18
]60,80]	95,54	95,40	1,72
]80,100]	31,85	31,80	6,12

Utilizando uma discretização de 5×1 elementos, os resultados obtidos para a distribuição de potenciais elétricos ao longo do comprimento da viga, em unidade SI, apresentam-se na Tabela 4.1.11 e Tabela 4.1.12. É importante referir que foi considerada uma correspondência entre um *patch* piezoelétrico e o subdomínio correspondente a um elemento, podendo existir mais do que um *patch* piezoelétrico num único elemento. Os valores apresentados dizem respeito ao elemento e resultam da soma dos valores obtidos para cada *patch* piezoelétrico.

Tabela 4.1.12 - Evolução comparativa do potencial local para uma viga (CFFF) em configuração de sensor e respetivos desvios em relação à literatura [125]

x [mm]	ϕ [V]		δ (%)
	presente	[125]	
]0,20]	286,63	290,00	1,18
]20,40]	222,93	226,00	1,38
]40,60]	159,24	161,00	1,11
]60,80]	95,54	97,00	1,53
]80,100]	31,85	32,00	0,47

Da análise dos resultados presentes nas diferentes tabelas, associadas aos estudos de verificação 11 e 12, respetivamente, constata-se a existência de duas realidades distintas. No que refere ao primeiro, os desvios verificados são consideráveis, observando-se um máximo de 10,02%. Para o segundo, o valor máximo de desvio é de 1,53%, um valor bastante mais favorável. É importante referir que os valores utilizados como referência e obtidos por Hwang [124] e Lima [125] são provenientes de representações gráficas, não podendo ser descartado o carácter aproximado dos valores extraídos.

- **Estudo de Verificação 13**

O presente estudo é complementar ao Estudo de Verificação 10. Mantem-se por isso, o seu enquadramento, quer em termos de propriedades materiais como geométricas, com exceção da configuração funcional que, é agora de sensor. De modo a obter uma deformação mecânica e consequentemente um potencial elétrico, é aplicado à placa uma força por unidade de área, S_0 , no valor de 1000 N/m².

Os resultados obtidos para o deslocamento máximo transversal e potencial elétrico máximo encontram-se dispostos na Do estudo comparativo resulta a forte convicção de correspondência entre modelos. Os desvios calculados, ainda que não nulos, podem ser considerados bastante favoráveis, em especial para o potencial elétrico local. Para efeitos de estudo paramétrico, nomeadamente o efeito da razão L/h no potencial elétrico local, este caso é alvo de maior atenção mais adiante (4.2.2.5).

Tabela 4.1.13. Em termos de FEM é utilizada uma discretização de 20×10 elementos, segundo x e y , respectivamente. Para efeitos de adimensionalização recorre-se às expressões das equações (4.1.10) e (4.1.11).

$$\bar{w} = \frac{Q_{11}}{h S_0} (w_0) \quad (4.1.10)$$

$$\bar{\phi} = \frac{Q_{11}}{h S_0} \left(\frac{\phi}{E_0} \right) \quad (4.1.11)$$

Do estudo comparativo resulta a forte convicção de correspondência entre modelos. Os desvios calculados, ainda que não nulos, podem ser considerados bastante favoráveis, em especial para o potencial elétrico local. Para efeitos de estudo paramétrico, nomeadamente o efeito da razão L/h no potencial elétrico local, este caso é alvo de maior atenção mais adiante (4.2.2.5).

Tabela 4.1.13 - Estudo comparativo do deslocamento máximo transversal adimensionalizado e do potencial elétrico local adimensionalizado para uma placa (SSFF) em sensor com $a/h=50$

\bar{w}		δ (%)	$\bar{\phi}$		δ (%)
presente	[102]		presente	[102]	
1,4641E+6	1,4844E+6	1,39	15,62	15,66	0,26

4.1.3. Componente de Otimização

Este tópico é inteiramente dedicado aos estudos de verificação da componente de otimização. Seguindo a lógica que vem sendo adotada também o algoritmo de otimização é alvo de um processo de verificação recorrendo a estudos comparativos. Pretende-se que este processo permita

percorrer as sucessivas etapas do processo de integração do algoritmo de otimização na aplicação numérica de elementos finitos. Numa primeira fase são abordados um conjunto de casos sintéticos cujo propósito é verificar o algoritmo de otimização.

4.1.3.1. Funções de *Benchmark*

A primeira etapa de verificação do algoritmo de otimização consiste na utilização de funções de *benchmark* para efeitos de estudo comparativo. Estas funções caracterizam-se por representarem casos sintéticos e são frequentemente utilizadas para estudos comparativos do desempenho de algoritmos de otimização. Para efeitos do presente estudo de verificação consideram-se duas funções distintas, das quais se pretende a sua minimização. São elas a função *Goldstein-Price* e função *Rastrigin*.

- **Estudo de Verificação 14**

O primeiro estudo utiliza a função *Goldstein-Price*. Esta caracteriza-se por ser multimodal e com duas variáveis de projeto [112], [116]. Matematicamente, traduz-se na expressão da equação (4.1.12) e na representação gráfica da Figura 4.1.1. De acordo com a literatura [112], as variáveis x_1 e x_2 são contínuas e assumem valores no intervalo $[-2,2]$. A função tem um mínimo global localizado em $(x_1, x_2) = (0, -1)$ e assume o valor $f = 3$.

$$f(x_1, x_2) = [1 + (x_1 + x_2 + 1)^2 \cdot (19 - 14x_1 + 3x_1^2 - 14x_2 + 6x_1x_2 + 3x_2^2)] \cdot [30 + (2x_1 - 3x_2)^2 \cdot (18 - 32x_1 + 12x_1^2 + 48x_2 - 36x_1x_2 + 27x_2^2)] \quad (4.1.12)$$

Seguindo as indicações de Chou e Truong [112], o algoritmo foi configurado para um total de 30 corridas, utilizando uma população de 10000 indivíduos (n) e 50 iterações (Max_{It}). Os ótimos obtidos para cada corrida bem como a sua correspondente localização apresentam-se na Tabela A3. Por sua vez, a Tabela 4.1.14, apresenta os valores máximo e mínimo dos ótimos obtidos, bem como a média e o desvio padrão.

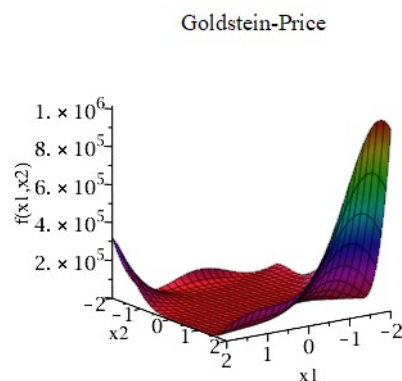


Figura 4.1.1 – Representação gráfica da função *Goldstein-Price*

Tabela 4.1.14 – Valores ótimos máximo e mínimo e respectiva localização (Goldstein-Price)

Corrida	X_1^*	X_2^*	$f(X_1^*, X_2^*)$
4 (melhor ótimo)	-0,001419	-1,000585	3,000476
14 (pior ótimo)	-0,003599	-0,994298	3,021457
		Média	3,006218
		Desvio Padrão	0,005780

A respeito do estudo comparativo com a literatura [112], o mesmo consta da Tabela 4.1.15, na qual é possível verificar que, a média e o desvio padrão da serie de corridas são suficientemente próximos dos valores de referência, permitindo verificar o algoritmo para esta função de *benchmark*.

Tabela 4.1.15 - Estudo comparativo da média e desvio padrão dos valores ótimos obtido após 30 corridas (Goldstein-Price)

	presente	[112]
Média	3,0062	3,00
Desvio Padrão	0,0058	0,00

- **Estudo de Verificação 15**

O segundo estudo utiliza a função de *Rastrigin*. Esta caracteriza-se por ser multimodal e considera também duas variáveis de projeto [112], [116]. A equação (4.1.13) traduz a expressão matemática da função, a qual dispõe de duas variáveis contínuas x_1 e x_2 no intervalo $[-5.12, 5.12]$, conforme a representação gráfica da Figura 4.1.2. O mínimo global da função assume o valor $f = 0$ e localiza-se em $(x_1, x_2) = (0,0)$.

$$f(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^2 (x_i^2 - 10 \cos(2\pi x_i) + 10) \quad (4.1.13)$$

Rastrigin

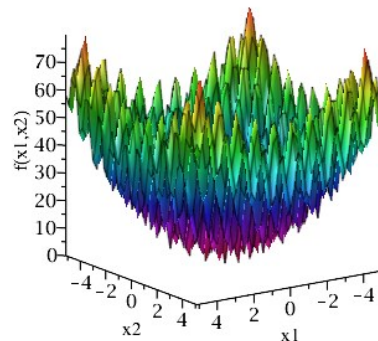


Figura 4.1.2 - Representação gráfica da função Rastrigin

Mantendo as configurações utilizadas para o estudo anterior (30 corridas, 10000 indivíduos e 50 iterações), os resultados obtidos para os ótimos de cada corrida e correspondente localização contam da Tabela A4. A Tabela 4.1.16 apresenta os valores máximo e mínimo obtidos para o ótimo global após 30 corridas, bem como as correspondentes média e desvio padrão.

Tabela 4.1.16 - Valores ótimos máximo e mínimo e respetiva localização (Rastringin)

Corrida	X_1^*	X_2^*	$f(X_1^*, X_2^*)$
23 (valor mínimo)	0,000262	-0,000740	0,000122
26 (valor máximo)	-0,001002	-0,006921	0,009699
		Média	0,004965
		Desvio Padrão	0,002999

Quanto ao estudo comparativo realizado, a Tabela 4.1.17 dispõe lado a lado os resultados obtidos e os valores de referência. A partir da mesma e apesar dos valores obtidos pelos autores com os quais se está a comparar só terem dois dígitos decimais, considera-se que os resultados obtidos são bastante satisfatórios.

Tabela 4.1.17 - Estudo comparativo da média e desvio padrão dos valores ótimos obtido após 30 corridas (Rastringin)

	presente	[112]
Média	0,004965	0,00
Desvio Padrão	0,002999	0,00

4.1.3.2. Otimização de Estruturas

No seguimento dos estudos de verificação realizados recorrendo a funções de *benchmark*, o presente tópico pretende, através de um pequeno conjunto de estudos, verificar a integração do módulo de otimização com o módulo de elementos finitos.

- **Estudo de Verificação 16**

O primeiro estudo produzido neste âmbito tem por objetivo a minimização do deslocamento máximo transversal de uma placa, simplesmente apoiada e com 1,5 m de aresta. Considera-se a existência de um gradiente material alumínio/zircónia na direção z, segundo a lei de potência estabelecida em (2.1.2). A placa é discretizada em 10×10 elementos. Tratando-se de uma otimização discreta, p_z assume como valores 0, 0.1, 0.5, 1, 2 e 5. Para efeitos de estudo comparativo, o processo de obtenção de resultados é dividido em duas etapas. Numa primeira fase, e dada a reduzida amostra de diferentes gradientes materiais considerados, é calculado o deslocamento máximo transversal da estrutura para cada valor de p_z , permitindo desde logo saber qual o valor mínimo de w que é possível obter. Numa segunda fase é feito o cálculo da solução

ótima com recurso ao algoritmo de otimização, considerando uma série de 10 corridas com 5 iterações cada e 3 indivíduos.

Os resultados obtidos para o deslocamento máximo transversal para os diferentes valores de p_z considerados, constam da Tabela 4.1.18. A partir dos mesmos é possível concluir que o valor de p_z para o qual se verifica o menor deslocamento corresponde a 0, e como tal a uma situação em que a placa é constituída integralmente por zircónia, que apresenta um modulo de elasticidade superior ao do alumínio.

Tabela 4.1.18 - Deslocamento máximo transversal em [m] para diferentes valores de p_z

p_z					
0	0,1	0,5	1	2	5
3,561E-06	3,783E-06	4,461E-06	4,940E-06	5,372E-06	5,898E-06

Considerando os resultados obtidos para o estudo de otimização da estrutura, estes apresentam-se na Tabela 4.1.19. Da análise dos mesmos, verifica-se que o valor ótimo encontrado após uma série de 10 corridas, corresponde à primeira posição do vetor de matrizes de rigidez do algoritmo e que diz respeito a $p_z = 0$. Deste modo, é possível concluir que o pacote de aplicações de análise e otimização de estruturas produziu os resultados espectáveis e por este motivo se considera a sua implementação bem-sucedida. É ainda de fazer notar, que apenas é apresentado o melhor ótimo, pelo facto de nas sucessivas corridas o valor ser idêntico, como provam o valor médio e o respetivo desvio padrão da série.

Tabela 4.1.19 - Melhor ótimo, valor médio e desvio padrão da série de 10 corridas

p_z^*	w^*
0	3,561E-06
Média	3,561E-06
Desvio Padrão	0

- **Estudo de Verificação 17**

O presente estudo é em tudo similar ao anterior diferindo apenas no objetivo da otimização. Pretende-se com o mesmo não apenas a minimização do deslocamento máximo transversal, mas sim o controlo de forma da estrutura, por meio da minimização dos deslocamentos em determinados pontos da estrutura, previamente selecionados. Procurando estabelecer paralelismos com o caso anterior, pretende-se a aplicação do controlo de forma no ponto central da estrutura (nó 61), que coincide com ponto de maior deslocamento do estudo anterior. Deste modo pretende-se verificar a implementação do processo de otimização com controlo de forma, considerando a

minimização da função em (3.1.7). De notar que, para efeito comparativo, o valor ótimo a obter será o quadrado do deslocamento máximo transversal.

Considerando um conjunto de 10 corridas com 5 iterações e 3 indivíduos, os resultados obtidos constam da Tabela 4.1.20.

Tabela 4.1.20 - Melhor ótimo, valor médio e desvio padrão da série de 10 corridas para controlo de forma

p_z^*	$f(X_i)^*$	$\sqrt{f(X_i)^*}$
0	1,268E-11	3,561E-06
Média	1,268E-11	-
Desvio Padrão	2,845E-14	-

A avaliação dos resultados obtidos, permite constatar a correspondência com o estudo anterior, obtendo-se um melhor ótimo (MO) idêntico. A respeito do valor médio e desvio padrão da série de corridas estes diferem do estudo anterior, e indicam que no conjunto de corridas executadas, existem situações cujo MO não corresponde ao ótimo global do problema de otimização, não representando um problema.

- **Estudo de Verificação 18**

O presente estudo tem o propósito de avaliar a implementação do efeito piezoelétrico no processo de otimização de estruturas. Para o efeito considera-se uma placa, SSSS, com 1,5 m de aresta sendo a mesma constituída por PVDF. São considerados diferentes potenciais elétricos (1V, 2V, 3V, 4V e 5V), apresentando-se os respetivos deslocamentos máximos transversais na Tabela 4.1.21.

Tabela 4.1.21 - Deslocamento máximo transversal em [m] para diferentes potenciais aplicados

ϕ [V]	1	2	3	4	5
w [m]	2,054E-9	4,108E-9	6,162E-9	8,216E-9	1,027E-8

Com o objetivo de minimizar o deslocamento máximo transversal e considerando um conjunto de 10 corridas com 5 iterações e 3 indivíduos cada obteve-se os resultados da Tabela 4.1.22. A respeito dos mesmos, verifica-se que o melhor ótimo corresponde a um potencial de 1V obtendo-se idêntico valor ao da Tabela 4.1.21.

Tabela 4.1.22 - Melhor ótimo, valor médio e desvio padrão da série de 10 corridas para a minimização do deslocamento máximo transversal utilizando potencial elétrico como variável

ϕ^*	w^*
1 V	2,054E-9
Média	2,054E-9
Desvio Padrão	0

- **Estudo de Verificação 19**

O último estudo de verificação que se apresenta no âmbito da otimização de estruturas, considera a utilização de dois gradientes materiais em simultâneo. Para o efeito, considera-se, uma vez mais, uma placa SSSS, de aresta com 1,5 m, à qual é aplicado um potencial elétrico unitário. Pretende-se a minimização do deslocamento máximo transversal, sendo que, por se tratar de um estudo de otimização com uma maior complexidade, considera-se um total de 10 corridas, 20 indivíduos e 20 iterações. O resultado obtido para o melhor ótimo, consta da Tabela 4.1.23.

Tabela 4.1.23 - Melhor ótimo, valor médio e desvio padrão de uma série de 10 corridas, 20 indivíduos e 20 iterações considerando uma placa com 2 gradientes materiais em simultâneo

p_z^*	w^*
5, 2	3,000E-13
Média	4,000E-13
Desvio Padrão	4,324E-14

A respeito dos resultados obtidos, a melhor configuração ótima corresponde à utilização de gradientes materiais com expoente p igual a 5 e a 2. A distribuição na discretização da placa, é representada na Figura 4.1.3. Para esta distribuição resulta o valor mínimo de deslocamento. Para efeitos de verificação, considerando uma placa com $p = 5$ e outra com $p = 2$, os deslocamentos máximos são de 2,836E-15 m e 1,107E-12 m. Uma vez que o valor ótimo obtido se situa entre os dois valores de deslocamentos, considera-se o modelo verificado.

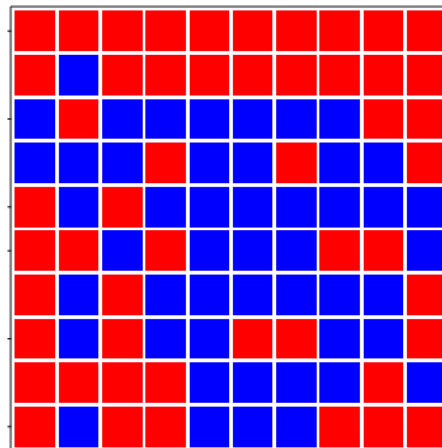


Figura 4.1.3 - Representação esquemática da localização de cada material sobre a malha (azul: $p=5$, vermelho: $p=2$)

4.2. Estudos Paramétricos

Uma vez concluído o processo de verificação da aplicação numérica, passou-se à fase da realização de estudos paramétricos. Este tipo de estudos caracteriza-se por uma maior profundidade e abrangência, permitindo testar intensivamente a aplicação numérica desenvolvida. É dada primazia à modelação e análise da resposta estática do elemento estrutural, seja ele viga ou placa, para diferentes condições e configurações, ao invés de um estudo puramente comparativo. Em simultâneo, é avaliado o desempenho computacional, através da recolha do tempo de computação, t_{CPU} . Esta abordagem, visa permitir uma análise mais aprofundada, auxiliar à tomada de decisões no que à utilização de determinadas abordagens diz respeito, e ainda ajudar a quantificar aos olhos do leitor, o esforço computacional envolvido, bem como algum do tempo despendido.

Em termos de estrutura de apresentação, os diferentes estudos realizados e apresentados são catalogados de acordo com a consideração ou não do efeito piezoelétrico. Uma vez mais, alerta-se para o valor do fator de correção de corte, k_s , que se mantém em 5/6.

4.2.1. Casos de estudo sem efeito piezoelétrico

Na presente secção são realizados todos os estudos paramétricos exclusivamente relacionados com a componente elástica do comportamento das estruturas. São abordados casos utilizados para propósitos de verificação no âmbito dos estudos de verificação, bem como eventuais casos distintos que se considerem relevantes. Em termos de estrutura, os estudos são categorizados de acordo com a sua vertente paramétrica.

4.2.1.1. Influência da Razão de Aspeto L/h

No presente ponto apresentam-se os primeiros estudos paramétricos realizados. Recuperam casos tipo abordados em 4.1.1.1, com os quais se pretende avaliar a influência da razão de aspeto na resposta estática de estruturas tipo viga ou placa.

- **Estudo Paramétrico 1**

O primeiro estudo que se apresenta, surge na sequência do Estudo de Verificação 1. Para o efeito considera-se, uma vez mais, uma viga de 200 mm de comprimento e 10 mm de largura, simplesmente apoiada (SSFF), de material isotrópico ($E = 200$ GPa, $G = 80$ GPa e $\nu = 0,3$), à qual é aplicada uma carga de distribuição uniforme, q , de 1 N/m. Para a razão de aspeto da viga, considera-se um conjunto de valores tais que, $L/h = \{1, 2, 4, 10, 20, 50, 100\}$.

Em termos de resultados obtidos, para o deslocamento máximo transversal a meio vão, os mesmos constam da Tabela B1, Tabela B2, Tabela B3 e Tabela B4. A Tabela 4.2.1 apresenta os resultados obtidos para as diferentes razões de aspecto utilizando uma discretização de 20×1 elementos.

Tabela 4.2.1 - Estudo comparativo do deslocamento máximo transversal a meio vão numa viga de material isotrópico para diferentes valores de L/h

L/h	\bar{w}		δ (%)	t_{CPU} [s]
	presente	[120]		
1	2,63577E-12	1,90972E-12	27,55	10,546
2	1,98638E-11	1,70139E-11	14,35	10,578
4	2,28808E-10	2,18056E-10	4,70	10,859
10	7,96497E-9	7,92535E-9	0,50	10,687
20	1,25216E-7	1,25451E-7	0,19	10,640
50	4,86695E-6	4,88424E-6	0,38	10,781
100	7,78156E-5	7,81363E-5	0,41	10,906

De um modo geral, os resultados seguem uma tendência espectável, revelando um desempenho satisfatório do modelo. Do ponto de vista da resposta estática da viga, em função das diferentes razões de aspecto, verifica-se uma maior dificuldade do modelo em aproximar os valores de referência para $L/h < 10$, algo coerente dada a metodologia FSDT utilizada no presente modelo. Para $L/h \geq 10$, verifica-se uma clara aproximação entre modelos, conforme sugerido por Reddy [20]. Em termos absolutos, a evolução do deslocamento máximo transversal em função da razão de aspecto surge em linha com o esperado, ao obter maiores valores de deslocamento para maiores razões de aspecto (menor relação entre espessura e comprimento) e menores valores de deslocamento para menores valores de razão de aspecto (maior relação entre espessura e comprimento). Os resultados obtidos permitem ainda tecer algumas conclusões relativamente ao desempenho computacional do modelo, nomeadamente a ausência de influência da razão de aspecto no tempo de computação, t_{CPU} , com o mesmo a permanecer aproximadamente constante, variando apenas em função da discretização utilizada. Esta variação positiva, ainda que residual, para um aumento do número global de elementos, permite constatar a baixa complexidade do caso em estudo.

- **Estudo Paramétrico 2**

O presente estudo surge num contexto similar ao anterior e no seguimento do Estudo de Verificação 2 (4.1.1.1). Considera-se uma placa, simplesmente apoiada (SSSS), sujeita à aplicação de uma carga uniformemente distribuída. Face ao estudo anterior, o fator diferenciador prende-se com a abordagem utilizada, sendo simbólica, i.e., os deslocamentos são calculados em

função do módulo de elasticidade do material e da espessura da placa. A aplicação desta abordagem procura tirar partido do formato adimensionalizado com que os resultados são apresentados, permitindo experienciar uma abordagem diferente ao caso em estudo. Para efeitos de estudo da resposta estática da placa, considera-se que $L/h = \{10, 20, 50, 100\}$. Os resultados obtidos apresentam-se na Tabela B5 e Tabela B6. Por uma questão de simplicidade de interpretação, a Tabela 4.2.2 apresenta os valores do deslocamento máximo transversal adimensionalizado para uma discretização de 20×20 elementos. De recordar que o formato adimensional com que se apresentam os resultados é obtido recorrendo às equações (4.1.2) e (4.1.3).

Tabela 4.2.2 - Estudo comparativo do deslocamento máximo transversal adimensionalizado numa placa de material isotrópico para diferentes valores de L/h

L/h	\bar{w}		δ (%)	t_{CPU} [s]
	presente	[97]		
10	0,4256	0,4259	0,07	3539,587
20	0,4108	0,4111	0,07	3559,500
50	0,4067	0,4070	0,07	3535,296
100	0,4061	0,4060	0,02	3586,656

A análise dos resultados obtidos permite evidenciar a convergência entre modelos, como também dos resultados para o aumento do número de elementos. Em termos da influência da razão de aspeto da placa na sua resposta estática, constata-se uma redução do valor máximo do deslocamento transversal adimensionalizado, com o aumento de L/h , espectável e justificável face ao fator adimensionalizante utilizado. No que refere ao impacto, em termos computacionais, da variação da razão de aspeto, verifica-se uma vez mais, a ausência de influência deste parâmetro nos tempos de computação, permanecendo os mesmos aproximadamente constantes. É, no entanto, de notar que, no presente estudo os tempos de computação são particularmente elevados, face à complexidade do estudo em causa. A causa única, é atribuída à abordagem simbólica utilizada, sendo que em estudos futuros, será de evitar este tipo de abordagem, dada a relação entre o esforço computacional envolvido e os benefícios que da mesma advêm. De notar que o presente estudo, poderia facilmente utilizar uma abordagem numérica, bastando para o efeito a atribuição de valores na aplicação numérica, para as propriedades materiais e geométricas da placa, bem como da carga que lhe é aplicada. De modo a concluir a análise dos resultados obtidos com o presente estudo, verifica-se que nesta fase, o único fator relevante para o aumento de t_{CPU} é, uma vez mais, o aumento do número de elementos utilizado.

4.2.1.2. Influência do Parâmetro p_z da Lei de Potência do FGM

No presente ponto são abordados os estudos paramétricos de estruturas com gradiente funcional, cujo propósito é o de avaliar a influência dos parâmetros de projeto, nomeadamente p_z , da lei de potência do material, na resposta estática de estruturas do tipo placa.

- **Estudo Paramétrico 3**

O estudo que abaixo se apresenta, é complementar do Estudo de Verificação 5 (4.1.1.3). Recupera-se assim, a placa quadrangular, de aresta unitária, simplesmente apoiada (SSSS) e sujeita à aplicação de uma pressão uniforme na superfície superior. Em termos materiais, é aplicado um FGM bifásico, alumínio/zircónia (Al/ZrO₂), cujas propriedades se encontram na Tabela 4.2.3. A distribuição ocorre de acordo com a lei de potência, sendo as propriedades materiais efetivas estimadas de acordo com a regra das misturas de Voigt e posteriormente com Mori-Tanaka.

Tabela 4.2.3 - Propriedades materiais relevantes das diferentes fases

	E [GPa]	ν
Alumínio (Al)	70	0,3
Zircónia (ZrO ₂)	151	0,3

Os resultados obtidos utilizando a regra de misturas de Voigt constam da Tabela B7 e Tabela B8. De um modo geral, os resultados seguem uma tendência expectável, com o aumento do deslocamento transversal máximo adimensionalizado, \bar{w} , a acompanhar o aumento dos valores de p . A maior presença de alumínio, em termos de percentagem volúmica, para valores mais elevados de p , justifica as maiores deformações verificadas dado o menor módulo de elasticidade do alumínio face à zircónia. Em termos globais observa-se também uma convergência dos resultados obtidos com o aumento do número de elementos utilizado, sem que isso represente um encargo acrescido significativo em termos computacionais. No entanto, são exceção, os resultados obtidos para $p = 0,5$. À primeira vista, constata-se de forma imediata, a ausência de valores de \bar{w} , para discretizações iguais ou superiores a 8×8 elementos, sendo que, complementarmente, se verifica um aumento significativo dos tempos de computação para este mesmo expoente. Trata-se de uma questão puramente computacional, cuja solução pode ser: o aumento dos recursos computacionais, ou a otimização da aplicação numérica tendo em vista uma menor utilização dos recursos disponíveis. Idealmente, o aumento dos recursos computacionais, seria a opção mais desejada, mas que implica custos avultados – pouco possíveis de suportar – e sem a oferta de garantia da resolução definitiva da questão. O mais provável, seria permitir o cálculo para mais duas ou três discretizações, sem, contudo, abordar a questão em definitivo. A alternativa passa

por otimizar a aplicação numérica. Durante o processo de cálculo por parte da aplicação desenvolvida, a maior dificuldade que se observa, ocorre no cálculo da matriz de rigidez do elemento, $[K_{uu}]$, mais concretamente durante a integração em espessura e posteriormente na área do elemento, dos termos associados à componente membrana-flexão. Assim, a solução natural para o problema em questão, passou, pela utilização de um método de integração numérico, como seja Newton-Cotes, ao invés de utilizar integração analítica. Em termos numéricos, isto implica a substituição do comando de integração analítica utilizado, por uma alternativa numérica equivalente. Neste aspeto, o *software* utilizado para a implementação da aplicação numérica, revela-se um ativo importante, na medida em que permite, sem grande esforço, acomodar métodos de integração alternativos, bastando para isso a substituição do comando $int(f(x))$, por $ApproximateInt(f(x))$. Ainda que do ponto de vista do aprofundar do estudo numérico, seja interessante testar os diferentes métodos de integração aproximada disponibilizados pelo *software*, em termos do trabalho que se pretende desenvolver é uma questão que assume contornos secundários, razão pela qual se adota apenas o método padrão associado ao comando utilizado, a Soma Média de Riemann. Não sendo de descartar num trabalho futuro, a utilização dos diferentes métodos de integração numérica – enquanto parte de um estudo paramétrico de maior amplitude – não permitiria, por questões de alocação de recursos e constrangimentos temporais, outro tipo de abordagens ou estudos, possivelmente até mais importantes. Dadas as dificuldades verificadas na integração, optou-se por aplicar separada e seletivamente o método de integração numérica, permitindo uma análise diferenciada, i.e., a possibilidade de utilizar o método de aproximação apenas para uma das operações. Deste modo, optou-se pela aplicação da seguinte metodologia: analítica-analítica (AA), analítica-numérica (AN), numérica-analítica (NA) e numérica-numérica (NN). No caso da primeira, diz respeito aos resultados já obtidos, na qual a integração é exata, i.e., sendo efetuada analiticamente, para a espessura e área do elemento. O segundo caso, utiliza uma abordagem mista, na qual a integração em espessura é realizada com recurso a método analítico, ao passo que a integração na área do elemento é numérica. No terceiro caso a integração em espessura é numérica enquanto na área do elemento é analítica. Por último, o método de integração utilizado é numérico para ambos os casos.

Estabelecida a nova metodologia a aplicar em termos de cálculo, os resultados obtidos utilizando as abordagens AN, NA e NN constam da Tabela B9 e Tabela B10, Tabela B11 e Tabela B12, e Tabela B13 e Tabela B14, respetivamente. Adicionalmente a Tabela 4.2.4, a Tabela 4.2.5 e a Tabela 4.2.6 apresentam os valores máximos de deslocamento, registados no nó coincidente com o centro da placa e correspondentes a uma malha de 18×18 elementos.

Tabela 4.2.4 - Estudo comparativo da evolução de \bar{w} para uma FGP em função de diferentes valores de p para uma abordagem AN e utilizando a regra das misturas de Voigt

p	\bar{w}		δ (%)
	Presente	[59]	
0	0,0208	0,0208	0,00
0,5	-	0,0266	-
1	0,0289	0,0297	2,69
2	0,0313	0,0325	3,69
$+\infty$ (AI)	0,0449	0,0449	0,00

No que refere à abordagem AN, as diferenças observáveis são mínimas, quer em termos dos valores obtidos para o deslocamento transversal máximo adimensionalizado, quer em termos dos tempos de computação associados. Uma vez mais observa-se a ausência de valores para um valor de $p = 0,5$, dado o aumento quase exponencial de t_{CPU} . Esta situação - que é de todo expectável - é devida ao facto de o método de integração numérico estar a ser utilizado apenas na integração na área do elemento, apesar das propriedades efetivas do material estarem apenas dependentes da coordenada z . Para o presente caso, em concreto, não representa a abordagem ideal uma vez que a maior complexidade da operação de integração permanece na espessura do elemento, que mantém uma integração analítica. Ainda assim, esta abordagem, pode representar uma mais-valia para outros casos em que a lei de potência esteja dependente de outras direções que não a da espessura, nomeadamente x ou y .

Tabela 4.2.5 - Estudo comparativo da evolução de \bar{w} para uma FGP em função de diferentes valores de p para uma abordagem NA e utilizando a regra das misturas de Voigt

p	\bar{w}		δ (%)
	Presente	[59]	
0	0,0210	0,0208	0,96
0,5	0,0263	0,0266	1,13
1	0,0292	0,0297	1,68
2	0,0317	0,0325	2,46
$+\infty$ (AI)	0,0453	0,0449	0,89

Relativamente à abordagem NA são facilmente verificáveis diferenças expressivas, face às abordagens anteriores, a começar pela apresentação de valores para todas as discretizações e para todos os valores de p , o que por si só revela o sucesso desta abordagem, sendo também corroborado pelos tempos de computação significativamente mais baixos. Destaca-se assim, a resolução do problema numérico e a redução significativa do esforço computacional envolvido. Outro aspeto de relevo prende-se com o aumento generalizado dos deslocamentos para todos os expoentes e discretizações adotadas, ainda que residual. Este fenómeno de flexibilização da estrutura/modelo não é muito preocupante, mas ainda assim, o seu efeito deverá ser tido em

consideração em estudos futuros, que revelem a necessidade de utilização desta abordagem de integração. Quanto aos resultados propriamente ditos, mantém-se a tendência espectral e já observada para as abordagens anteriores.

Tabela 4.2.6 - Estudo comparativo da evolução de \bar{w} para uma FGP em função de diferentes valores de p para uma abordagem NN e utilizando a regra das misturas de Voigt

p	\bar{w}		δ (%)
	Presente	[59]	
0	0,0210	0,0208	0,96
0,5	0,0263	0,0266	1,13
1	0,0292	0,0297	1,68
2	0,0317	0,0325	2,46
$+\infty$ (Al)	0,0454	0,0449	1,11

Por último, no que refere à abordagem NN, observa-se uma vez mais a obtenção de valores para todas as discretizações e expoentes considerados. De modo generalizado, verifica-se uma vez mais a redução dos tempos de computação, medida direta do esforço computacional envolvido. Em termos de resultados constata-se que, como esperado, a resposta estática da placa segue semelhante tendência às abordagens anteriores. Uma vez mais, é possível observar o fenómeno de aumento generalizado dos deslocamentos, sendo idêntico ao já verificado na abordagem anterior.

Através da implementação das diferentes abordagens é possível retirar um conjunto de conclusões, de especial importância para os estudos futuros. Em termos da escolha da abordagem, fará sentido ter em consideração as direções dos gradientes materiais envolvidos, permitindo tirar maior partido da abordagem. Outro aspeto interessante e ainda não mencionado, está associado aos valores de p que originam materiais isotrópicos e homogéneos, como é o caso de $p = 0$ e $p = +\infty$. Nestes casos, face ao fenómeno numérico que induz um aumento generalizado dos deslocamentos transversais nodais, e uma vez que, da aplicação de métodos de integração numérica não resulta um benefício extremo, em termos de redução dos tempos de computação, a abordagem que fará mais sentido utilizar é a AA. Deste modo é possível garantir uma maior correspondência entre modelos para casos mais simples em estudos futuros. Por forma a diferenciar de forma inequívoca, a utilização das diferentes abordagens, quando utilizadas em simultâneo, adota-se a seguinte notação em termos de sobrescritos: $^{(AN)}$, $^{(NA)}$ e $^{(NN)}$. Para a abordagem AA, opta-se pela manutenção da ausência de notação, procurando diminuir a carga simbólica nos resultados obtidos e a obter.

Antes de dar por concluído o estudo, os resultados obtidos utilizando a técnica de homogeneização de Mori-Tanaka constam da Tabela B15 e Tabela B16. Note-se que apenas é

utilizada a abordagem NN. Por sua vez a Tabela 4.2.7 apresenta um resumo do estudo comparativo realizado. Em termos de análise, identifica-se um comportamento semelhante, com os valores de \bar{w} a diferirem ligeiramente para valores de p iguais a 0 e $+\infty$. Relativamente aos tempos de computação, e dada a maior complexidade das expressões envolvidas no cálculo das propriedades materiais efetivas do FGM, regista-se um ligeiro aumento face aos modelos que utilizam a regra das misturas de Voigt.

Tabela 4.2.7 - Estudo comparativo da evolução de \bar{w} para uma FGP em função de diferentes valores de p para uma abordagem NN e utilizando a técnica de homogeneização Mori-Tanaka

p	\bar{w}		δ (%)
	Presente	[59]	
0	0,0210	0,0208	0,96
0,5	0,0275	0,0279	1,43
1	0,0303	0,0309	1,94
2	0,0328	0,0334	1,80
$+\infty$ (Al)	0,0453	0,0449	0,89

4.2.2. Casos de estudo com efeito piezoelétrico

Na presente secção são realizados todos os estudos paramétricos associados à análise dos efeitos inerentes à utilização de materiais com características piezoelétricas. Numa primeira fase e à semelhança do que já foi efetuado antes, recupera-se um conjunto de casos semelhantes a já utilizados no âmbito dos estudos de verificação. Posteriormente apresenta-se um conjunto de casos distintos que se consideram apropriados em função dos objetivos definidos, incidindo essencialmente em FGM ativos, mais concretamente FGPM. Em termos de organização, os estudos são apresentados numa ordem de complexidade crescente, agrupados em termos de incidência paramétrica do estudo, tendo ainda em consideração o tipo de estrutura alvo de estudo. Primeiramente, os estudos apresentados correspondem a estruturas do tipo viga, ao passo que os últimos utilizam estruturas do tipo placa.

4.2.2.1. Influência do Potencial Elétrico (Viga)

O presente ponto tem o propósito de avaliar a influência do potencial elétrico no deslocamento máximo transversal de estruturas tipo viga.

- **Estudo Paramétrico 4**

O presente estudo paramétrico pretende avaliar o comportamento estático de uma viga *bimorph*, quando sujeita à aplicação de potenciais elétricos de magnitude crescente. Deste modo,

considera-se uma viga, CFFF, de $100 \times 5 \times 1$ mm, à qual são aplicados os seguintes potenciais elétricos: 1 V (+0,5 V/−0,5 V), 2 V (+1 V/−1 V), 5 V (+2,5 V/−2,5 V), 10 V (+5 V/−5 V), 20 V (+10 V/−10 V), 50 V (+25 V/−25 V) e 100 V (+50 V/−50 V). Para efeitos do presente estudo, a viga é constituída por duas camadas de PVDF de igual espessura, cujas propriedades materiais consideradas são provenientes de Loja [100], e que constam da Tabela 4.2.8.

Tabela 4.2.8 - Propriedades materiais do PVDF

	E [GPa]	G [GPa]	e_{31} [C/m ²]	e_{32} [C/m ²]	ϵ_{33} [μF/m]
PVDF	2,0	1,0	0,046	0,046	0,1062

Utilizando discretizações de 5×1 , 10×1 e 15×1 , os valores obtidos do deslocamento máximo transversal para os diferentes potenciais elétricos aplicados são apresentados graficamente na Figura 4.2.1, constando os mesmos da Tabela B17. Adicionalmente, apresentam-se na Figura B1, Figura B2 e Figura B3, as representações gráficas dos deslocamentos nodais da viga ao longo do seu comportamento para diferentes discretizações, cujos valores constam da Tabela B18, Tabela B19 e Tabela B20. Os resultados obtidos evidenciam uma relação de linearidade entre o potencial elétrico aplicado e o deslocamento transversal, em linha com a literatura [81], [124], e expectável dado o modelo linear utilizado expresso pela condição constitutiva em (2.3.10).

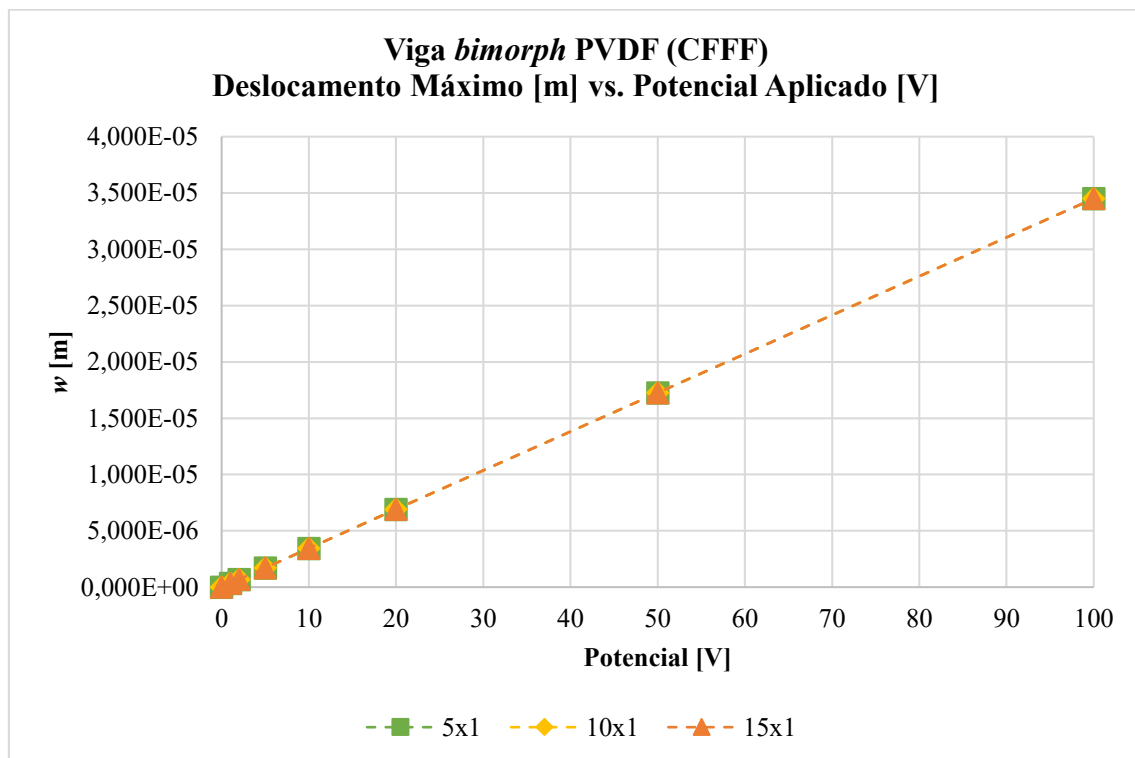


Figura 4.2.1 - Representação gráfica do deslocamento transversal da extremidade livre de uma viga bimorph (CFFF) para diferentes potenciais elétricos aplicados

4.2.2.2. Influência das Condições de Fronteira (Viga IH)

O presente ponto pretende avaliar a influência de diferentes discretizações na resposta estática de estruturas tipo viga ou placa.

- **Estudo Paramétrico 5**

Considera-se para o efeito, uma viga *bimorph*, encastrada-livre (CFFF), de características materiais e geométricas idênticas ao estudo anterior. Num primeiro caso, considera-se a aplicação de uma diferença de potencial unitária (+0,5 V/-0,5 V), numa configuração de atuador representada na Figura 4.2.2, e posteriormente, a aplicação de um esforço indutor de uma deformação na extremidade livre no valor de 10 mm, cuja representação esquemática se encontra na Figura 4.2.5.

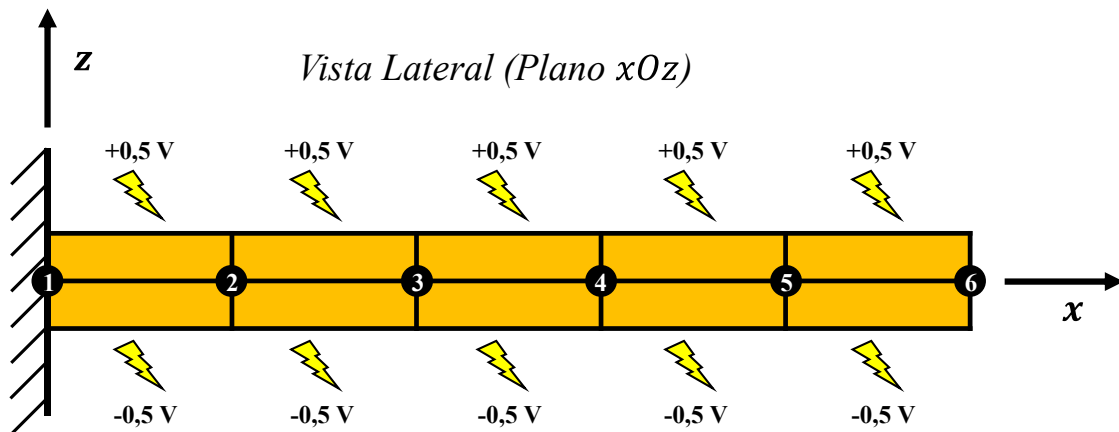


Figura 4.2.2 - Representação esquemática da configuração de atuador para uma viga *bimorph* (CFFF)

Por forma a avaliar a influência da discretização utilizada nos resultados obtidos, consideram-se malhas de 5×1 , 10×1 e 15×1 elementos. Os resultados obtidos para o deslocamento máximo transversal, numa configuração de atuador, constam da Tabela B21, Tabela B22 e Tabela B23. Por sua vez, a Figura 4.2.3 ilustra a resposta estática da viga para diferentes discretizações. Da análise dos resultados obtidos constata-se que para o caso em questão, a influência da discretização é nula, numa situação à partida expectável, dado que a viga apresenta $L/h = 100$, o que implica a convergência de resultados para discretizações mais grosseiras. Do ponto de vista computacional, para as diferentes discretizações utilizadas correspondem os seguintes t_{CPU} : 7,296 s, 11,046 s e 13,468 s, respetivamente.

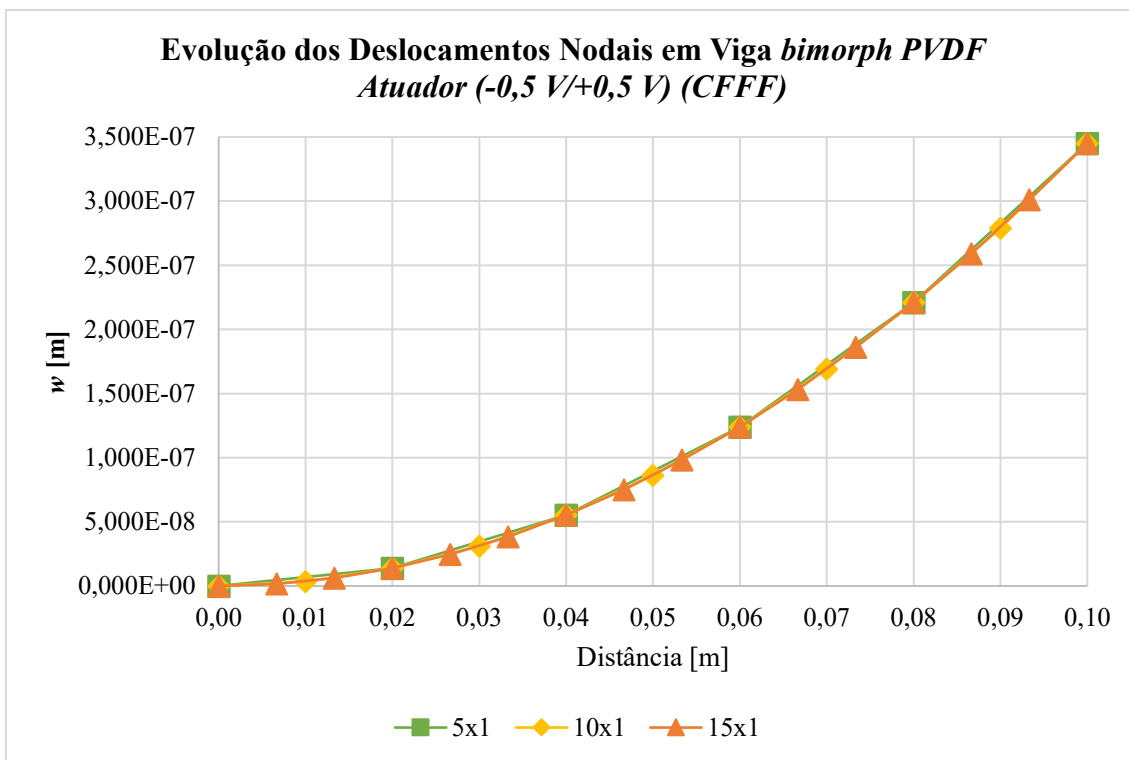


Figura 4.2.3 – Representação gráfica da evolução do deslocamento transversal nodal em função do comprimento da viga (CFFF) para diferentes discretizações

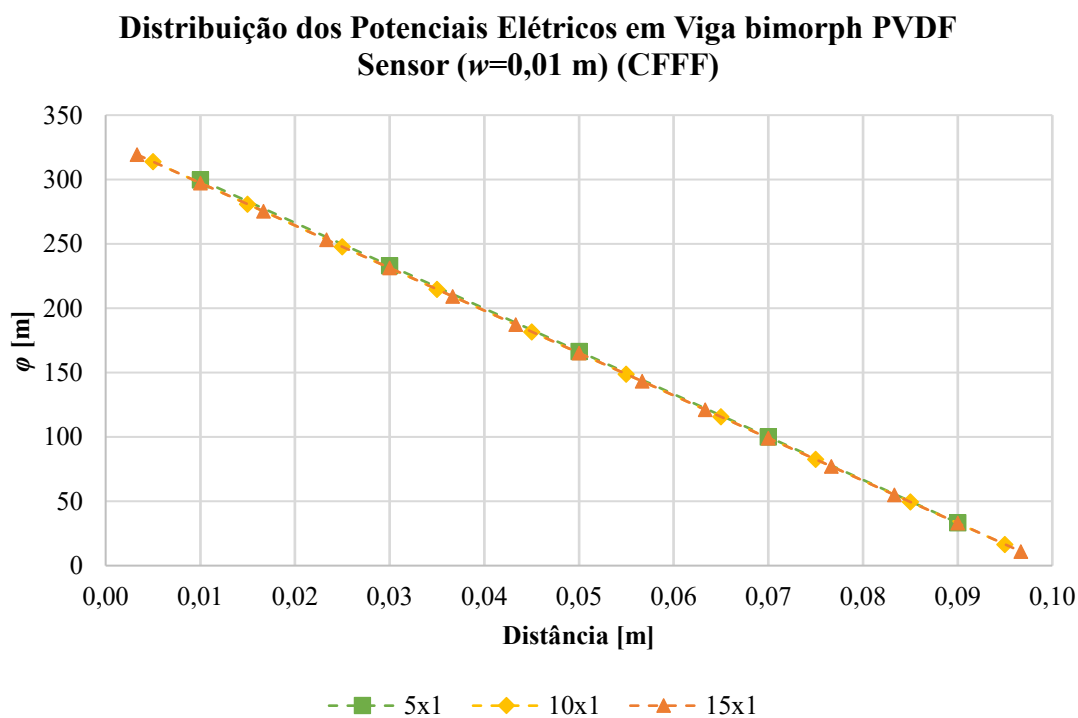


Figura 4.2.4 – Representação gráfica da evolução do potencial elétrico em função do comprimento da viga (CFFF) para diferentes discretizações

No que refere à viga em configuração de sensor, os resultados obtidos para o potencial elétrico induzido pelo deslocamento da extremidade livre da viga podem ser consultados na Tabela B24,

Tabela B25 e Tabela B26. Por sua vez, a Figura 4.2.4 ilustra graficamente a distribuição dos potenciais elétricos no comprimento da viga (direção x). De referir que os potenciais elétricos apresentados dizem respeito a uma configuração em circuito aberto, sendo o resultado da diferença entre os potenciais gerados na camada inferior e da camada superior, i.e., o potencial entre a superfície superior e inferior do *bimorph*. Outro aspeto importante de recordar/salientar é que os potenciais obtidos correspondem a cada um dos elementos, e não aos seus nós, uma vez que a cada elemento corresponde um GDL elétrico adicional. Do ponto de vista dos resultados obtidos é de destacar o comportamento linear e decrescente do potencial elétrico ao longo do comprimento, exibindo uma tendência expectável, dadas as CF aplicadas. Uma vez mais, verifica-se que a influência da discretização é reduzida, sendo, no entanto, observável uma ligeira diferença entre os resultados obtidos para 5×1 elementos e, 10×1 e 15×1 elementos. Do ponto de vista computacional, a influência da discretização utilizada, é também reduzida, registando-se os seguintes tempos de computação de 7,937 s, 10,843 s e 13,593 s, para 5, 10 e 15 elementos, respetivamente.

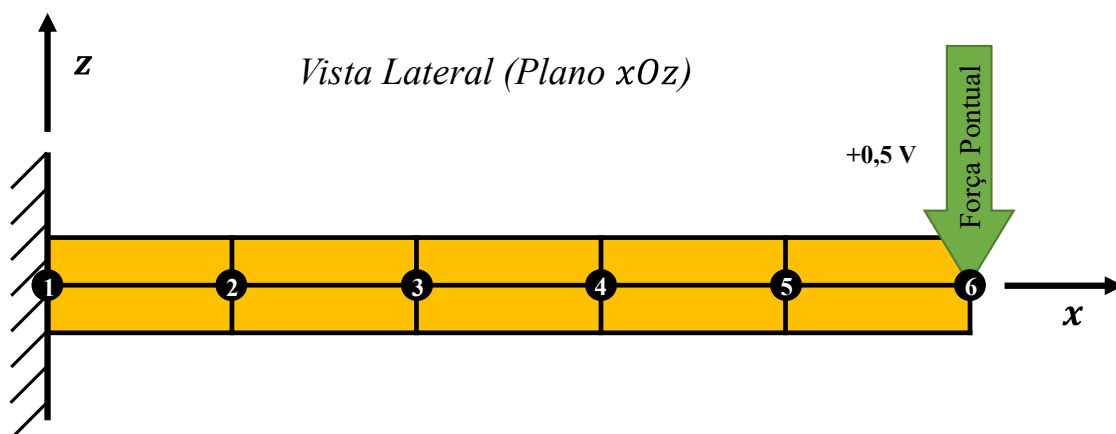


Figura 4.2.5 - Representação esquemática da configuração de sensor para uma viga *bimorph* (CFFF)

Adicionalmente, considera-se ainda, uma viga *bimorph* encastrada-encastrada (CCFF), de dimensões e propriedades materiais idênticas, à qual é primeiramente aplicada uma diferença de potencial unitário (Figura 4.2.6) e posteriormente aplicada uma carga concentrada a meio vão (Figura 4.2.8). Em termos de estudos numéricos, a abordagem utilizada é semelhante, sendo, no entanto, de notar que é necessário adotar discretizações diferentes dada a necessidade de existir obrigatoriamente um nó a meio vão por forma a permitir a aplicação da carga concentrada indutora do deslocamento de 10 mm para $x = L/2$, bem como a obtenção de resultados neste mesmo nó. Deste modo, utiliza-se as discretizações de 6×1 , 10×1 e 16×1 .

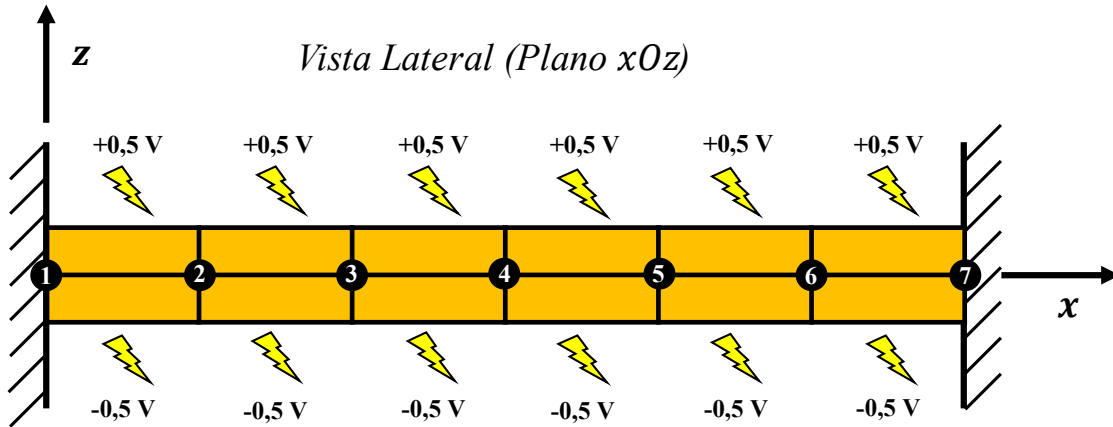


Figura 4.2.6 - Representação esquemática da configuração de atuador para uma viga bimorph (CCFF)

Os resultados obtidos para a configuração de atuador apresentam-se na Tabela B27, Tabela B28 e Tabela B29. Por sua vez, a Figura 4.2.7 ilustra graficamente o comportamento estático do *bimorph*, no qual se observam diferenças consideráveis face à viga CFFF. Como seria de esperar, o constringimento de ambas as extremidades da viga, resulta em deslocamentos transversais substancialmente inferiores, registando-se os valores máximos nos nós correspondentes ao meio vão. Computacionalmente, verifica-se um ligeiro aumento de t_{CPU} (7,953 s, 16,781 s e 21,359 s, respetivamente), principalmente devido ao maior número de elementos envolvidos para determinadas discretizações, bem como a necessidade de utilizar uma rotina adicional para aplicar a nova realidade em termos de CF na extremidade antes livre.

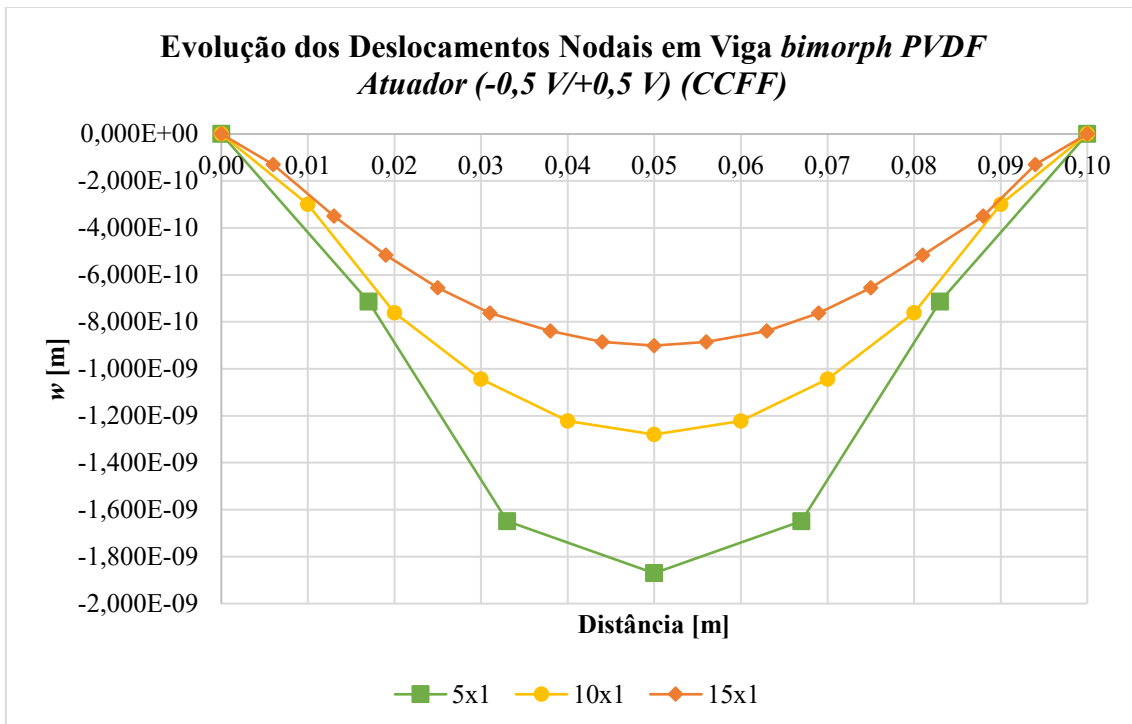


Figura 4.2.7 – Representação gráfica da evolução do deslocamento transversal nodal em função do comprimento da viga (CCFF) para diferentes discretizações

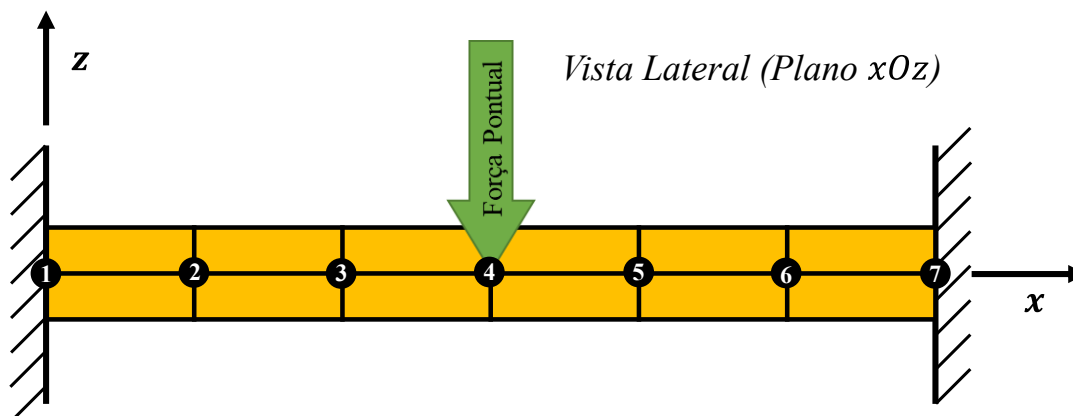


Figura 4.2.8 - Representação esquemática da configuração de sensor para uma viga bimorph (CCFF)

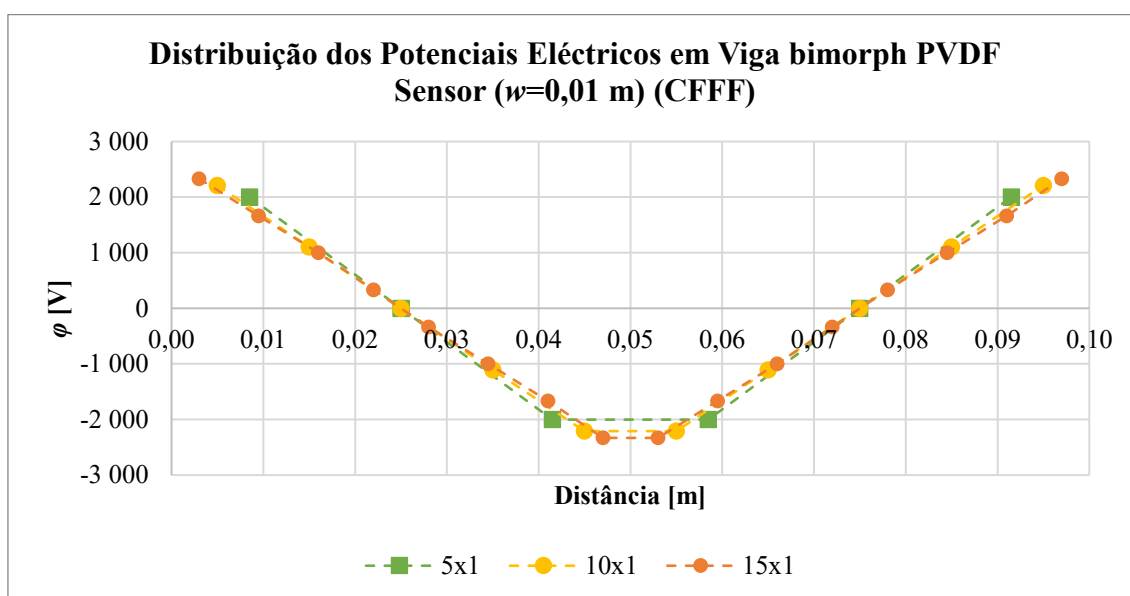


Figura 4.2.9 – Representação gráfica da evolução do potencial elétrico em função do comprimento da viga (CCFF) para diferentes discretizações

Os resultados obtidos para a configuração de sensor constam da Tabela B30, Tabela B31 e Tabela B32. A Figura 4.2.9 expõe graficamente, a evolução do potencial elétrico ao longo do comportamento da viga. No imediato é facilmente constatável, que o maior grau de constrangimento, que resulta da aplicação de novas condições de fronteira, implica maiores valores de potencial elétrico ao longo do comprimento da viga e que o comportamento linear antes verificado da extremidade encastrada para a extremidade livre ocorre agora em duas etapas (extremidade encastrada – meio vão – extremidade encastrada), mantendo ainda assim uma evolução linear. No que refere à superior magnitude dos potenciais elétricos do modelo CCFF face ao modelo CFFF, a diferença reside na maior rigidez da estrutura em virtude do constrangimento de um maior número de GDL, motivo pelo qual, a magnitude da força necessária para induzir um deslocamento de 10 mm é, naturalmente, superior. Relativamente ao comportamento observado para a evolução dos potenciais elétricos observa-se um

comportamento linear e simétrico em relação ao ponto de maior deslocamento transversal, i.e., a meio vão da viga.

Tendo por base os resultados obtidos, bem como as tendências verificadas ao nível da sua convergência, a utilização futura de discretizações de 10×1 , para estudos que abordem estruturas do tipo viga, representa um bom compromisso entre os resultados obtidos e o custo computacional.

4.2.2.3. Influência do Parâmetro p_x da Lei de Potência do FGM

O presente tópico é dedicado à avaliação da influência da variação do parâmetro de projeto de estruturas do tipo viga em FGM.

- **Estudo Paramétrico 6**

O modo como é feita a distribuição das diferentes fases é um dos principais responsáveis pelas propriedades efetivas do FGM, sendo que neste estudo se pretende avaliar o efeito que, diferentes distribuições de fases ao longo do comprimento da viga, tem no comportamento estático da mesma. Parametricamente, esta variação de fases é feita através da utilização de diferentes valores do expoente p_x da lei de potência do FGM, considerando-se os valores de 0, 0.1, 0.5, 1, 2 e 5. O modelo utilizado, recorre uma vez mais, a uma viga (CFFF) tipo *bimorph* com 1,5 m de comprimento, secção quadrangular e $L/h = 20$. Em termos materiais, a mesma é constituída por um FGM bifásico Alumínio/PVDF, cujas propriedades das fases constituintes se dispõem na Tabela 4.2.9. A seleção destes materiais não é um acaso, pretendendo-se avaliar especificamente o efeito resultante da conjugação de uma fase passiva com uma fase ativa. Por este motivo, a idealização que é feita para a distribuição das fases, parte do princípio de que, para um valor nulo do parâmetro de projeto alvo de variação, corresponde uma viga de material isotrópico e homogéneo ativo. Da interação com o meio, resultam duas configurações funcionais distintas, uma de atuador e outra de sensor. A propósito da primeira é aplicada uma diferença de potencial unitária (+0,5 V/-0,5 V), cabendo à segunda a aplicação de uma carga concentrada na extremidade livre, no valor de 2000 N.

Tabela 4.2.9 - Propriedades materiais relevantes das diferentes fases do FGM

	E [GPa]	ν	e_{31} [C/m ²]	e_{32} [C/m ²]	ϵ_{33} [μF/m]
Al	70	0,3	-	-	-
PVDF	2,0	0	0,046	0,046	0,1062

Face à maior complexidade do estudo, a ausência ou fraca amostra de estudos similares na literatura e impossibilidade de utilizar métodos analíticos, obrigam a uma cautela adicional na

idealização do modelo e na sua implementação. Tratando-se do material utilizado, um FGM bifásico, a análise do modelo considerando os seus constituintes separados, numa primeira fase, permitiria logo à partida tecer um conjunto de considerações que se julgam relevantes para a análise global. Desta situação, poderão resultar dois modelos com materiais isotrópicos e homogêneos distintos, um em alumínio e outro em PVDF, discretizados em 10×1 elementos, segundo a direcção x . Numa segunda fase, seriam considerados modelos com FGM Alumínio/PVDF, em que para $p_x = 0$, seria possível comparar relativamente à fase anterior, na qual são considerados materiais isotrópicos e homogêneos. Numa terceira fase, e por forma a estabelecer uma base comparativa sólida, a adoção de um modelo FGM discreto é apropriada, permitindo um maior valor acrescentado ao presente estudo ao utilizar abordagens contínua e discretas na previsão das propriedades efetivas do material. De modo a verificar os resultados obtidos, consideram-se adicionalmente modelos equivalentes, mas cuja orientação espacial permita a disposição da viga segundo a direcção y . Para esta fase de verificação, também a lei de potência que rege a mistura das diferentes fases é adaptada para coincidir com a nova realidade, à semelhança da discretização utilizada que passa a ser de 1×10 elementos. Esta abordagem faseada – que apesar de representar um esforço acrescido – permite um grau de confiança adicional nos modelos implementados e, conseqüentemente, nos resultados a obter, fazendo-se dispensar em futuros estudos de maior complexidade, como seja o caso de placas.

Para a primeira fase, cujas representações esquemáticas se encontram na Figura B4, Figura B5 e Figura B6, os resultados obtidos para o perfil de deslocamentos ao longo do comprimento constam da Tabela B33, Tabela B34 e Tabela B35, seguindo as tendências esperadas para cada uma das situações. O maior módulo de elasticidade do alumínio face ao PVDF implica que para a mesma força aplicada, os deslocamentos verificados sejam inferiores à situação comparável em PVDF, a que corresponde a configuração de sensor. Esta observação, é particularmente importante para a interpretação dos resultados posteriores. A respeito do modelo em PVDF para uma configuração de atuador, é de fazer notar que, apesar das propriedades materiais semelhantes, CF e potenciais elétricos aplicados idênticos, a maior dimensão da viga resulta numa redução generalizada dos deslocamentos transversais face a estudos anteriores, o que indicia uma maior rigidez da viga, muito por força do maior volume de material. A Figura B7 apresenta graficamente o perfil dos deslocamentos transversais nodais ao longo do comprimento da viga para esta configuração. A propósito da configuração de sensor, é possível constatar que apesar da maior dimensão da viga, a também muito superior magnitude da força aplicada – face a estudos anteriores – origina valores de deslocamentos muito superiores o que, naturalmente, implica potenciais elétricos de ordem superior, em virtude da relação de linearidade considerada para o efeito piezoelétrico, como ilustram a Figura 4.2.10 e a Figura 4.2.11. Em termos absolutos registam-se valores da ordem 10^5 para os potenciais elétricos gerados, o que é bastante superior

aos limites de operação tradicionais para o PVDF, ocorrendo para estes casos processos de degradação da cadeia polimérica. Ainda assim e por forma a garantir uma base comparativa, mantém-se os modelos tal como se encontram, mas com a ressalva de que para estudos futuros será de ter em consideração os limites teóricos de operação para o material.

Adicionalmente, a Tabela 4.2.10 compila de modo sucinto, os resultados obtidos para os diferentes modelos, respeitantes à presente fase do estudo. Os resultados apresentados são ainda comparados com a solução analítica aplicável de acordo com a expressão $PL^3/3EI$. Em termos computacionais, o tempo de computação decorrido para cada um dos modelos foi de 6,140 s e 5,640 s para a viga em alumínio, de 10,250 s e 9,843 s para a viga PVDF em regime de atuador e de 10,187 s e 11,171 s para a mesma viga em regime de sensor.

Tabela 4.2.10 - Quadro resumo dos valores máximos do deslocamento transversal e potencial elétrico

Material	w [m]			
	x	y	Solução Analítica	δ (%)
Al	1,208E-02	1,208E-02	1,219E-02	0,89
PVDF (A)	1,380E-08	1,380E-08	-	-
PVDF (S)	4,262E-01	4,262E-01	4,267E-01	0,10
ϕ [V]				
	x	y	δ (%)	
PVDF (S)	3,292E+05	3,292E+05	0,00	

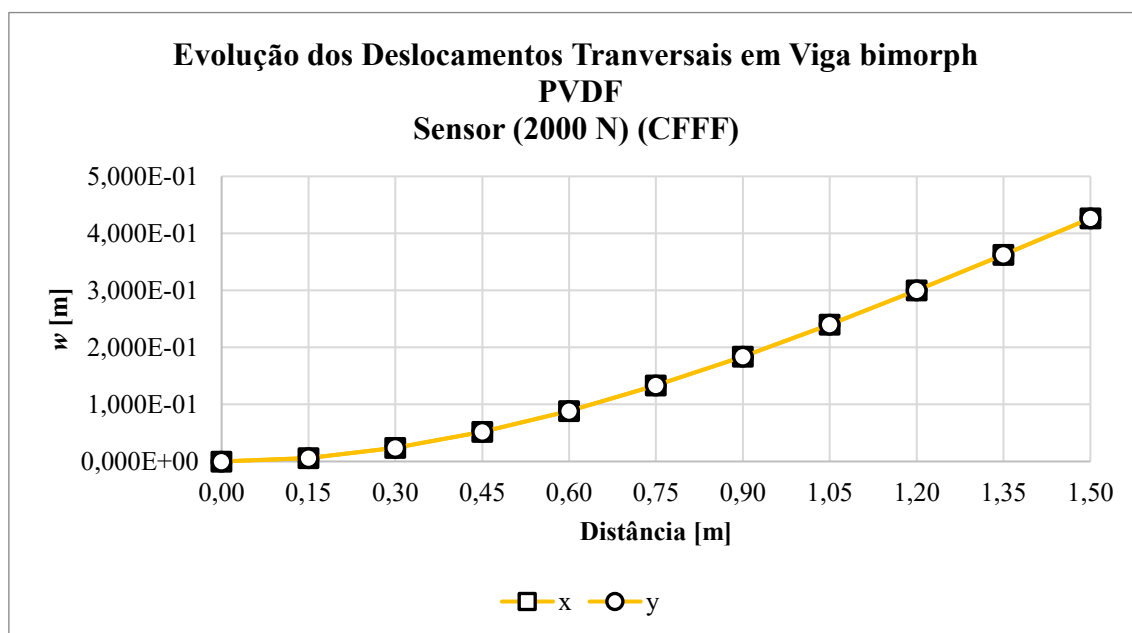


Figura 4.2.10 - Representação gráfica do perfil de deslocamentos transversais ao longo do comprimento de uma viga (CFFF) para configuração de sensor e uma discretização de 10×1 elementos

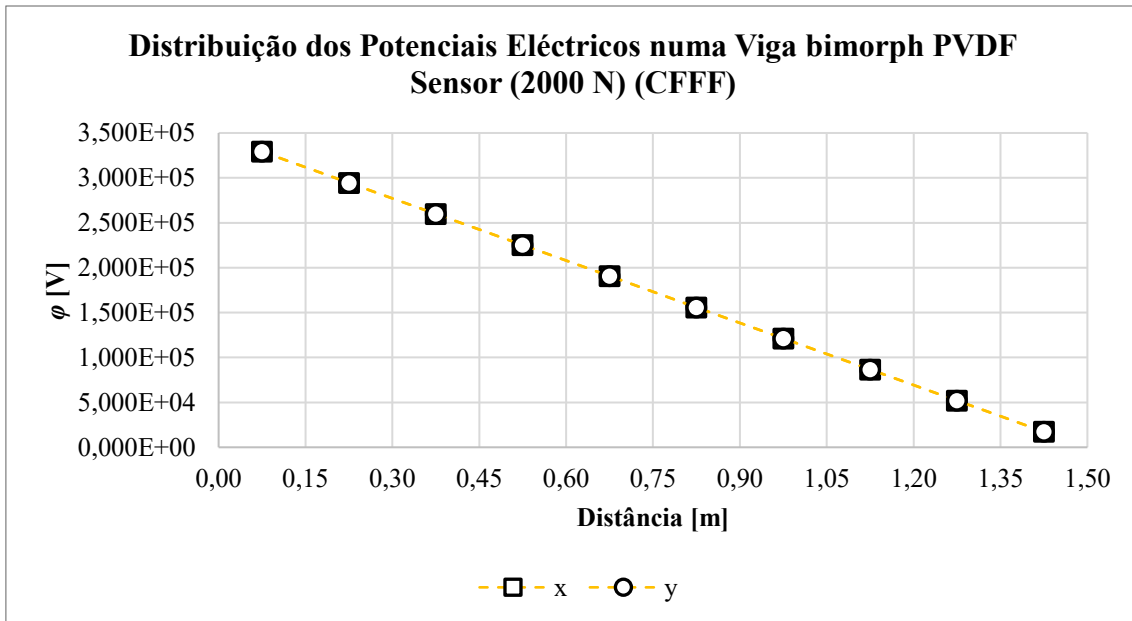


Figura 4.2.11 - Representação gráfica da distribuição de potenciais elétricos ao longo do comprimento de uma viga (CFFF) para uma discretização de 10×1 elementos

Considerando agora os modelos respeitantes à segunda fase, cujo propósito é o de avaliar a influência da distribuição das fases ativa e passiva considerando uma evolução contínua das mesmas, os resultados obtidos são apresentados em dois momentos distintos por forma a simplificar a sua análise e simultaneamente facilitar a sua interpretação.

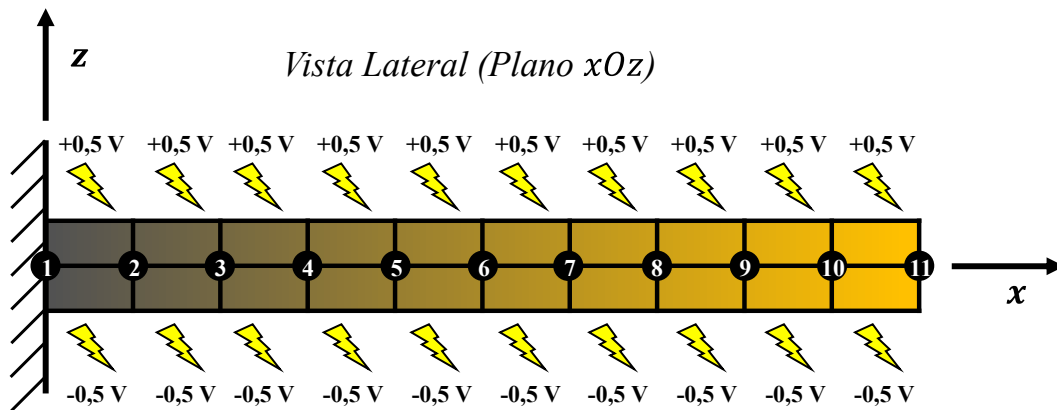


Figura 4.2.12 - Representação esquemática da configuração de atuador para uma viga bimorph FGM (CFFF)

Os resultados obtidos para a configuração funcional de sensor, cuja representação esquemática se encontra na Figura 4.2.12, apresentam-se na Tabela B38. A respeito destes é possível observar que para um aumento do valor de p_x os deslocamentos nodais tendem a diminuir. Esta tendência, que pode ser verificada nas representações gráficas que se encontram na Figura 4.2.13 e Figura 4.2.14, é justificada pelo facto, de a um aumento de p_x estar associado um aumento da percentagem volúmica de alumínio, que, como oportunamente verificado, apresenta um maior módulo de elasticidade, o que conduz a uma maior rigidez da estrutura. Outro aspeto relevante, é

que a maior presença de Al em detrimento de PVDF, conduz a uma concentração de PVDF cada vez menor na extremidade livre, o que por si só, atenua o efeito piezoelétrico uma vez que há substituição de material ativo por material passivo.

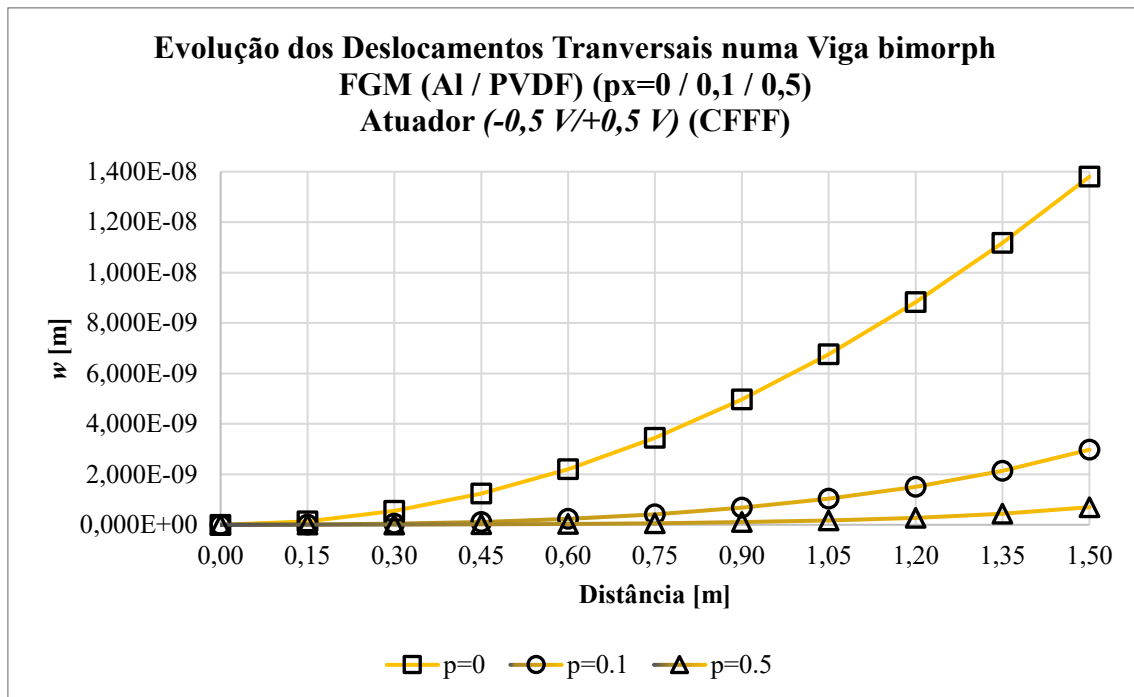


Figura 4.2.13 - Representação gráfica do perfil de deslocamentos transversais para valores de $p < 1$ ao longo do comprimento de uma viga (CFFF) em configuração de atuador e discretização de 10×1 elementos

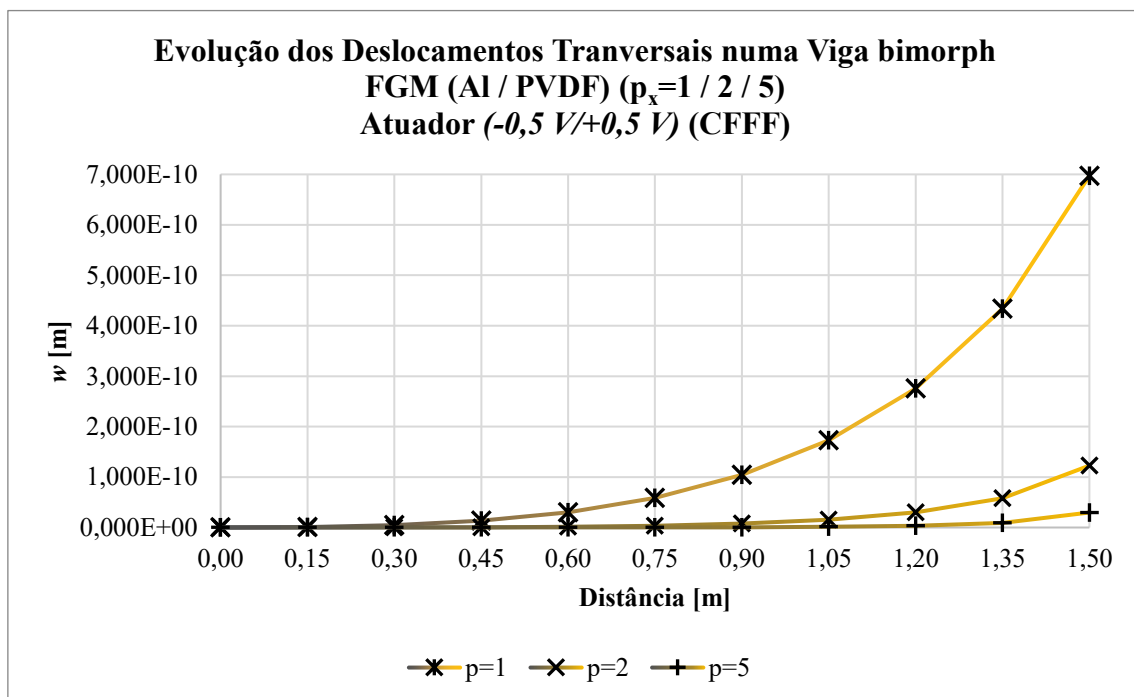


Figura 4.2.14 - Representação gráfica do perfil de deslocamentos transversais para valores de $p \geq 1$ ao longo do comprimento de uma viga (CFFF) em configuração de atuador e discretização de 10×1 elementos

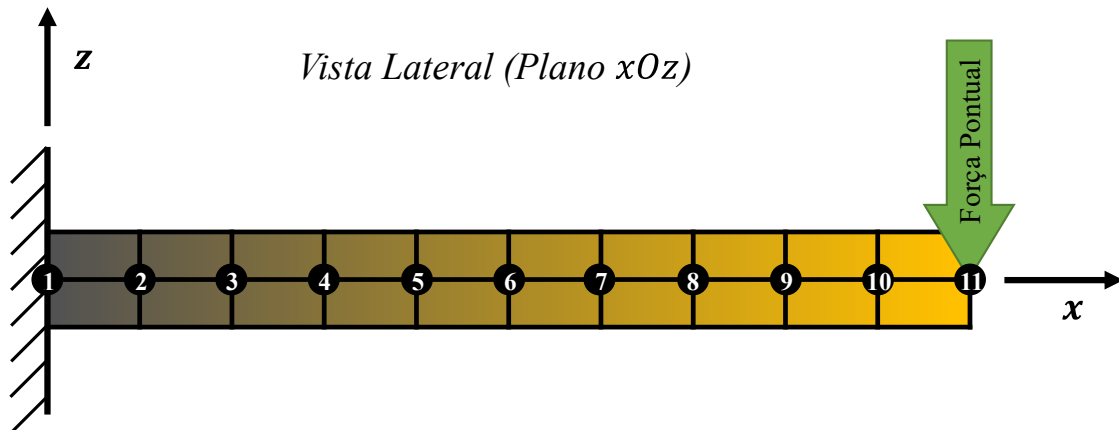


Figura 4.2.15 – Representação esquemática da configuração de sensor para uma viga bimorph FGM (CFFF)

Relativamente à configuração de sensor, a Figura 4.2.15 expõe a representação esquemática do modelo numérico utilizado. Os resultados obtidos para os deslocamentos transversais ao longo do comprimento do *bimorph*, constam da Tabela B39. A partir destes, é possível, uma vez mais, constatar a relação existente entre o aumento da fração volúmica de Al ao longo do comprimento da viga e os menores deslocamentos transversais verificados. A Figura 4.2.16 e a Figura 4.2.17 permitem ilustrar esta tendência.

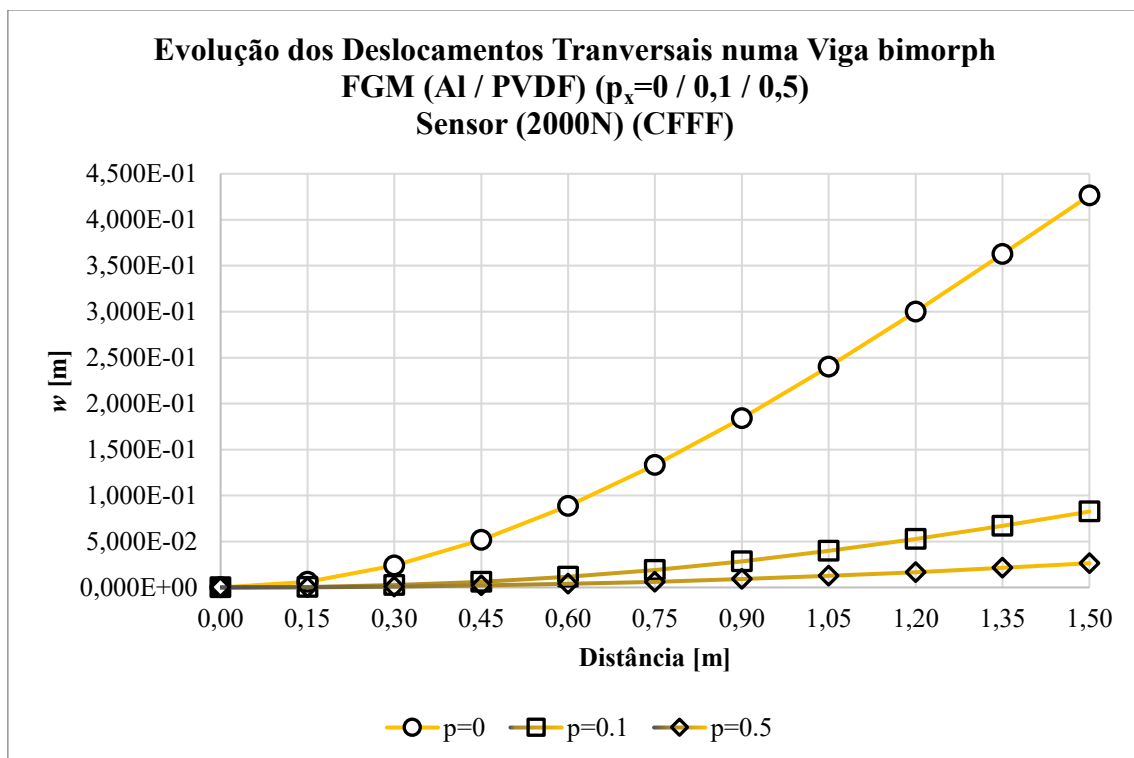


Figura 4.2.16 - Representação gráfica do perfil de deslocamentos transversais para valores de $p < 1$ ao longo do comprimento de uma viga (CFFF) em configuração de atuador e discretização de 10×1 elementos

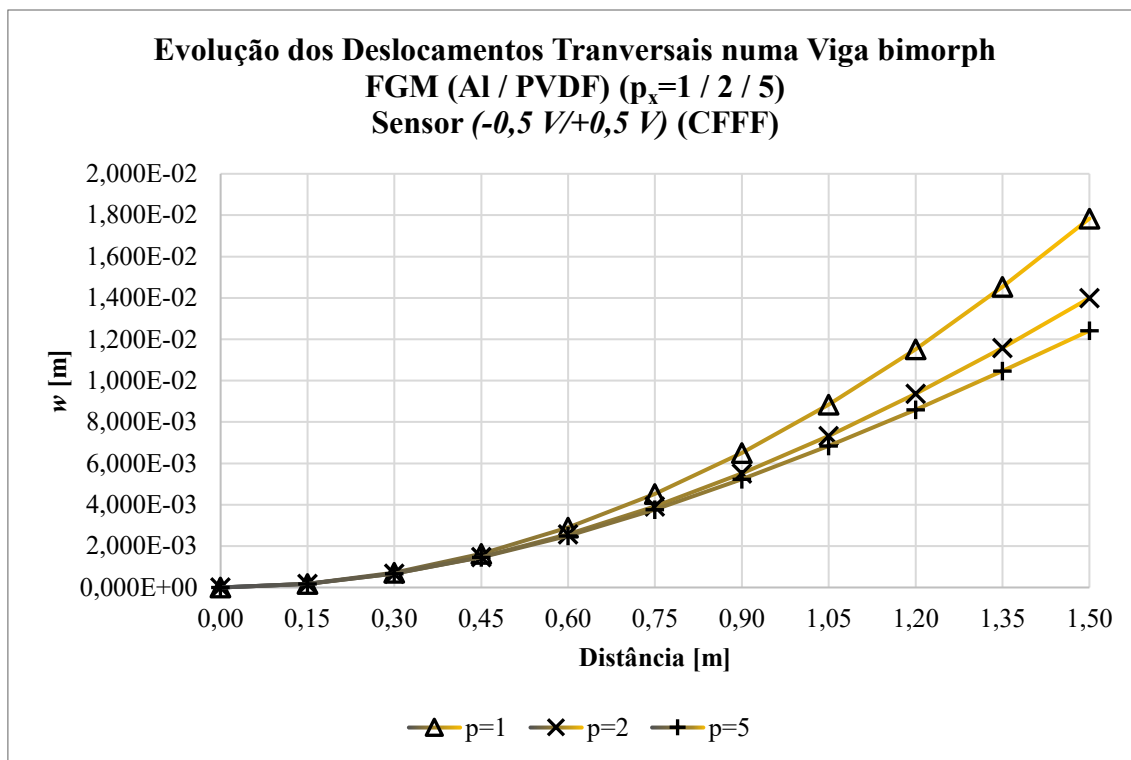


Figura 4.2.17 - Representação gráfica do perfil de deslocamentos transversais para valores de $p_x \geq 1$ ao longo do comprimento de uma viga (CFFF) em configuração de atuador e discretização de 10×1 elementos

Aos deslocamentos resultantes da aplicação de uma força na extremidade livre da viga, acrescem, para a configuração de sensor, os potenciais elétricos induzidos por efeito piezoelétrico. Estes são apresentados na Tabela B40. Por sua vez, os resultados obtidos são também apresentados graficamente por meio da Figura 4.2.18 e da Figura 4.2.19. Relativamente a $p_x = 0$, a tendência é a esperada, sendo os valores obtidos, idênticos ao modelo de viga isotrópica e homogênea em PVDF. Quanto aos demais valores do parâmetro, observa-se uma redução generalizada dos valores obtidos, em linha com a maior fração volúmica de alumínio. Em termos concretos, para $p_x = 0,1$ e $p_x = 0,5$, verifica-se que junto à extremidade encastrada, onde seria expectável a ocorrência dos valores máximos de potencial – para estas condições de fronteira – observa-se que a presença de alumínio reduz significativamente o potencial elétrico. À medida que se aproxima da extremidade livre da viga onde a fração volúmica de PVDF é superior, os potenciais elétricos tendem a aumentar ligeiramente, registando sempre um decréscimo para o último elemento em consequência da ausência de restrição de GDL. Para $p_x = 1$, no qual existe um equilíbrio quantitativo entre ambas as fases, o comportamento observado mantém uma tendência semelhante, com os valores máximos de potencial a registarem-se relativamente próximo da extremidade livre da viga onde existe maior quantidade de PVDF. Já para $p_x = 2$ e $p_x = 5$, onde a fração volúmica de alumínio é superior à de PVDF, seria de esperar a ocorrência de potenciais nulos ou aproximadamente nulos nas proximidades da extremidade encastrada.

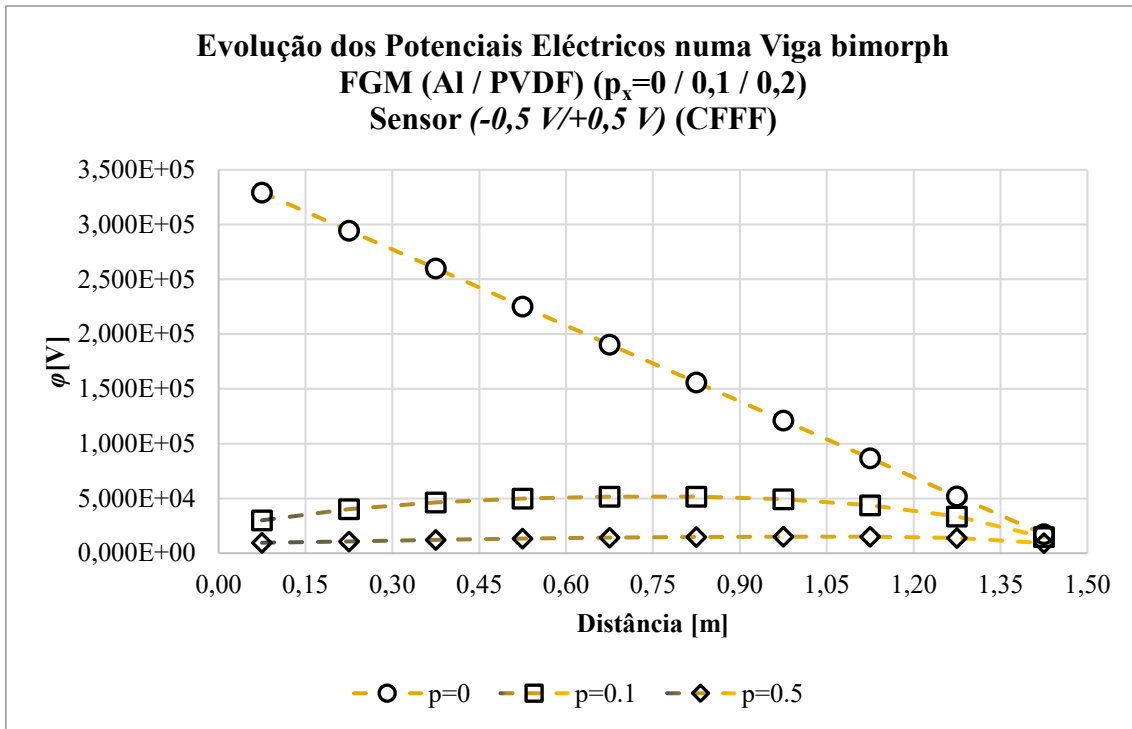


Figura 4.2.18 - Representação gráfica da distribuição de potenciais eléctricos para valores de $p < 1$ ao longo do comprimento de uma viga (CFFF) em configuração de atuador e discretização de 10×1 elementos

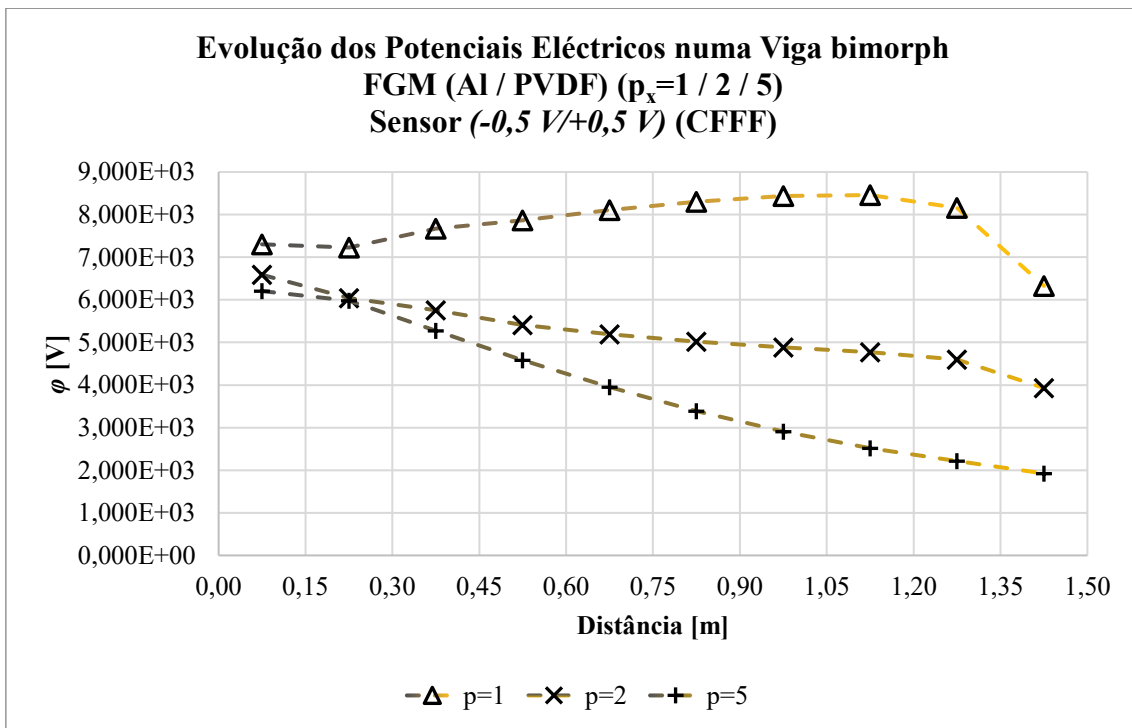


Figura 4.2.19 - Representação gráfica da distribuição de potenciais eléctricos para valores de $p \geq 1$ ao longo do comprimento de uma viga (CFFF) em configuração de atuador e discretização de 10×1 elementos

Do ponto de vista do esforço computacional, os tempos de computação decorridos dispõem-se na Tabela B41. Uma vez mais, observa-se para valores de p inferiores à unidade tempos de

computação superiores, enquanto para valores de p nulos ou iguais à unidade, os tempos são inferiores, indicando um menor esforço computacional. Para estes valores de p os tempos de computação são inferiores por originar um material isotrópico e homogéneo ($p = 0$), ou pela maior simplicidade da expressão da lei de potência. Relativamente aos valores de $p > 1$ observa-se uma tendência de aumento de t_{CPU} , o que possivelmente estará associado à maior complexidade da expressão da lei de potência. Esta tendência, que não era clara para o estudo paramétrico anterior a envolver FGM, é agora perceptível pelo facto da existência de um maior número de valores de p superior à unidade e que não originam um material isotrópico e homogéneo. Comparativamente à fase anterior, cujos tempos de computação para os diferentes modelos utilizados se encontram na Tabela B37, os modelos FGM, apresentam uma vez mais tempos de computação superiores, mantendo a tendência já verificada e justificada pela maior complexidade dos modelos FGM, em particular no que à variação contínua da distribuição das fases e, conseqüentemente, das propriedades efetivas do material. A respeito desta questão, a adoção de uma abordagem discreta na variação da distribuição das diferentes fases poderá servir um duplo propósito, ao permitir simultaneamente a verificação dos resultados já obtidos – como anteriormente mencionado – e também a redução generalizada dos tempos de computação, ao garantir que a cada elemento corresponde apenas e só um conjunto de propriedades condizentes com um material isotrópico e homogéneo, ao invés de um intervalo de variação.

Para a aplicação de uma abordagem discreta no que à evolução do FGM diz respeito, é necessário a implementação de novos modelos, residindo a diferença no modo como é feito o cálculo da distribuição de fases. Neste caso, ao invés de fazer a substituição num intervalo e posterior cálculo das propriedades para o intervalo a que corresponde o elemento, o cálculo é feito exclusivamente para as coordenadas médias do elemento garantindo deste modo que a cada elemento corresponde as propriedades de um único material isotrópico e homogéneo. Implementando esta nova abordagem, a totalidade dos resultados obtidos constam da Tabela B42 e Tabela B43, para valores do deslocamento transversal ao longo do comprimento da viga, nas configurações funcionais de atuador e sensor, respetivamente, e da Tabela B44 apara valores de potencial elétrico ao longo do comprimento da viga. Os resultados apresentados são alvo de estudo comparativo em relação à abordagem contínua que é tida como referência. Assim os desvios apresentados são calculados relativamente à abordagem contínua. Em termos de análise dos mesmos verifica-se que, de um modo global, os desvios observados são aceitáveis, verificando-se, contudo, um conjunto de situações para as quais os desvios são elevados ou mesmo muito elevados. No que refere à configuração de atuador, para os deslocamentos transversais, verifica-se que os desvios tendem a diminuir com a proximidade da extremidade livre e aumentar para modelos cujos valores de p se afastem mais de 1, ainda que para $p = 2$ e $p = 5$ este comportamento seja mais acentuado. Tratando-se de uma abordagem discreta, o

aumento do número de elementos, à semelhança do efeito que tipicamente apresenta nos estudos FEM, permitira uma transição mais gradual das propriedades dos elementos e deste modo garantir uma maior correspondência entre modelos. Para os desvios referentes aos deslocamentos para a configuração de sensor, estes são, em geral, inferiores aos verificados para a configuração de atuador, mantendo-se, contudo, as tendências identificadas anteriormente, à exceção do aumento generalizado para valores de $p > 1$, cuja tendência não parece estar devidamente definida. A respeito dos potenciais elétricos da configuração de sensor, os desvios que se observam são maioritariamente baixos, sendo possível identificar duas tendências. A primeira é o aumento dos desvios com o aumento do valor de p , enquanto a segunda está associada às extremidades da viga, onde é feita a aplicação das CF, em que para qualquer valor de p , os valores obtidos são superiores aos demais. Uma vez mais, a adoção de uma discretização com maior número de elementos permitirá atenuar os desvios verificados, contudo a sua origem nas extremidades poderá estar associada às propriedades materiais em si, uma vez que o seu cálculo tendo por base valores médios, mantém sempre uma presença residual da fase minoritária para cada extremidade. Esta realidade é particularmente evidente para $p = 5$ com a qual, a maior presença de alumínio, junto à extremidade encastrada produziria, previsivelmente valores de potencial elétrico inferiores, em virtude da ausência de propriedades piezoelétricas deste material. Na extremidade oposta, em que seria de esperar valores de potencial elétrico mais elevados, como consequência da maior presença de PVDF, os valores obtidos são inferiores.

Tabela 4.2.11 - Quadro resumo do estudo comparativo entre a abordagem contínua e discreta para os valores do deslocamento máximo transversal na extremidade livre da viga

Material	p	w [m]		
		<i>Contínuo</i>	<i>Discreto</i>	δ (%)
Al / PVDF (A)	0	1,380E-08	1,380E-08	0,00
	0,1	2,975E-09	2,990E-09	0,51
	0,5	6,972E-10	6,979E-10	0,10
	1	3,115E-10	3,102E-10	0,41
	2	1,227E-10	1,210E-10	1,32
	5	2,970E-11	2,831E-11	4,68
FGM Al / PVDF (S)	0	4,262E-01	4,262E-01	0,00
	0,1	8,251E-02	8,320E-02	0,84
	0,5	2,635E-02	2,640E-02	0,21
	1	1,784E-02	1,780E-02	0,21
	2	1,399E-02	1,394E-02	0,36
	5	1,242E-02	1,238E-02	0,32

Para maior conforto do leitor, a Tabela 4.2.11 apresenta os valores máximos de deslocamento transversal registados na extremidade livre da viga, obtidos utilizando as abordagens contínua e discreta, bem como os respetivos desvios da segunda face à primeira. Adicionalmente, a Tabela 4.2.12 apresenta os resultados obtidos para o potenciais elétricos nas extremidades da viga para ambas as abordagens e respetivos desvios.

Tabela 4.2.12 - Quadro resumo do estudo comparativo entre a abordagem contínua e discreta para os valores do potencial elétrico nas extremidades da viga

Material	p	ϕ [V]					
		Extremidade Encastrada			Extremidade Livre		
		Contínuo	Discreto	δ (%)	Contínuo	Discreto	δ (%)
FGM	0	3,292E+05	3,292E+05	0,00	1,733E+04	1,733E+04	0,02
	0,1	2,997E+04	3,190E+04	6,42	1,475E+04	1,472E+04	0,19
	0,5	9,507E+03	1,005E+04	5,74	9,233E+03	9,203E+03	0,33
Al / PVDF (S)	1	7,304E+03	7,872E+03	7,78	6,328E+03	6,278E+03	0,79
	2	6,587E+03	7,409E+03	12,48	3,930E+03	3,853E+03	1,95
	5	6,204E+03	7,388E+03	19,09	1,924E+03	1,815E+03	5,67

Da aplicação da abordagem discreta resulta uma redução generalizada dos tempos computação, como demonstram os valores da Tabela B45. Esta tendência associada às boas prestações em termos de aproximação da abordagem contínua, demonstram as potencialidades da utilização de abordagens discretas para modelação de gradientes funcionais.

4.2.2.4. Influência das Condições de Fronteira (FGPM)

Os constrangimentos aplicados às estruturas tradicionais influenciam a sua resposta estática, afetando a sua interação com o meio. Avaliar a influencia das condições de fronteira aplicadas a estruturas inteligentes do tipo viga, cujo material utilizado é um FGPM, contribui para um maior grau de compreensão das mesmas.

- **Estudo Paramétrico 7**

O presente estudo tem como propósito avaliar a influência das condições de fronteira na resposta estática de uma viga *bimorph* em FGPM, para as configurações de atuador e sensor. Para o efeito, considera-se novamente uma viga de 100×5×1 mm, constituída por um FGM bifásico LaRC-Si/PVDF, cujas propriedades se apresentam na Tabela 4.2.13 e Tabela 4.2.14. A distribuição das frações volúmicas é feita de acordo com a lei de potência, manifestando-se o gradiente segundo a direção x . O parâmetro de projeto p_x assume os valores de 0, 0.1, 0.5, 1, 2 e 5, variando simultaneamente as condições de fronteira entre encastrado-livre (CFFF),

encastrado-encastrado (CCFF), simplesmente apoiado (SSFF) e encastrado-simplesmente apoiado (CSFF). A interação com o ambiente, é feita por meio da aplicação de um potencial elétrico unitário, para a configuração de atuador e a aplicação uma força concentrada indutora de um deslocamento transversal de 10 mm.

Tabela 4.2.13 – Coeficientes de rigidez elástica em [GPa] para as diferentes fases [126]

	Q_{11}	Q_{12}	Q_{22}	Q_{13}	Q_{23}	Q_{33}	Q_{44}	Q_{55}	Q_{66}
LaRC-Si	8,1	5,4	8,1	5,4	5,4	8,1	1,4	1,4	1,4
PVDF	3,8	1,9	3,2	1,0	0,9	1,2	0,7	0,9	0,9

Tabela 4.2.14 – Coeficientes piezoelétricos e permitividade para as diferentes fases [126]

	e_{31} [C/m ²]	e_{32} [C/m ²]	e_{33} [C/m ²]	ϵ_{33} [μF/m]
LaRC-Si	-	-	-	2,4780E-11
PVDF	0,024	0,001	-0.027	6,7260E-11

Da implementação numérica do presente estudo, resulta um total de 96 modelos distintos entre si. Estes, são repartidos de acordo com a configuração funcional de atuador ou sensor e de acordo com as condições de fronteira utilizadas. A previsível extensão do presente estudo, leva à necessidade da apresentação faseada dos modelos e dos seus resultados. Numa primeira fase, são considerados os modelos associados à configuração de atuador, estabelecendo desde logo, as diferenças decorrentes das diferentes condições de fronteira aplicadas. Na segunda fase consideram-se os modelos e seus resultados, obtidos para a configuração de sensor. Adicionalmente, a riqueza paramétrica do presente estudo permite estabelecer outro tipo de análises, nomeadamente a análise dos resultados em função das condições de fronteira, mantendo o material, ao invés da avaliação da influência do material para cada condição de fronteira.

A respeito da configuração de atuador, considera-se primeiro uma viga CFFF. Os resultados obtidos para os diferentes valores de p_x , considerando uma abordagem contínua, constam da Tabela B46, sendo que, para a abordagem discreta poderão ser consultados na Tabela B47. Adicionalmente, a representação gráfica da evolução dos deslocamentos transversais nodais ao longo do comprimento da viga constam da Figura 4.2.20, para $p_x < 1$, e da Figura 4.2.21, para $p_x \geq 1$, enquanto que a Figura B8, apresenta um panorama geral para todos os valores de p_x considerados. Por sua vez, os resultados obtidos estão em linha com estudos anteriores, para CF semelhantes. Os deslocamentos verificados, diminuem com o aumento do valor de p_x , na medida em que significa uma maior incorporação de LaRC-Si, que apresenta uma maior rigidez face ao PVDF. A propósito das abordagens utilizadas, no que à variação das propriedades materiais efetivas do FGM refere, os resultados obtidos, permitem evidenciar um conjunto de aspetos interessantes do ponto de vista da análise do comportamento da estrutura.

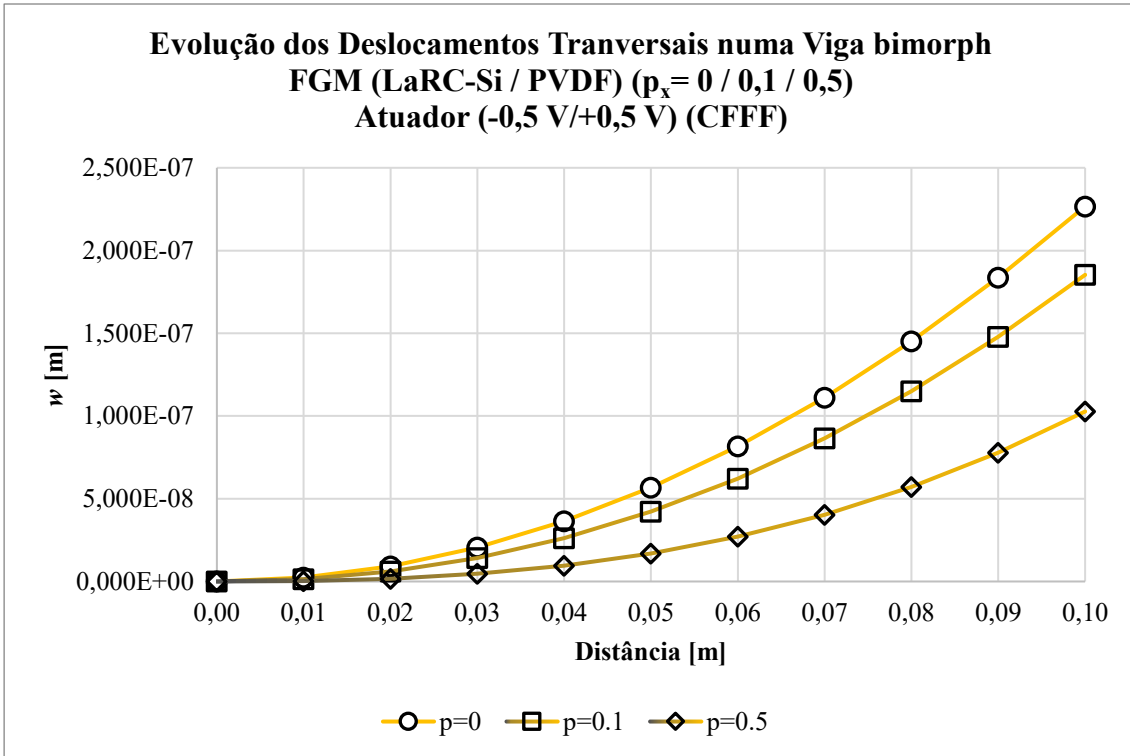


Figura 4.2.20 - Representação gráfica do perfil de deslocamentos transversais para $p < 1$ ao longo do comprimento de uma viga (CFFF) em configuração de atuador e discretização de 10×1 elementos

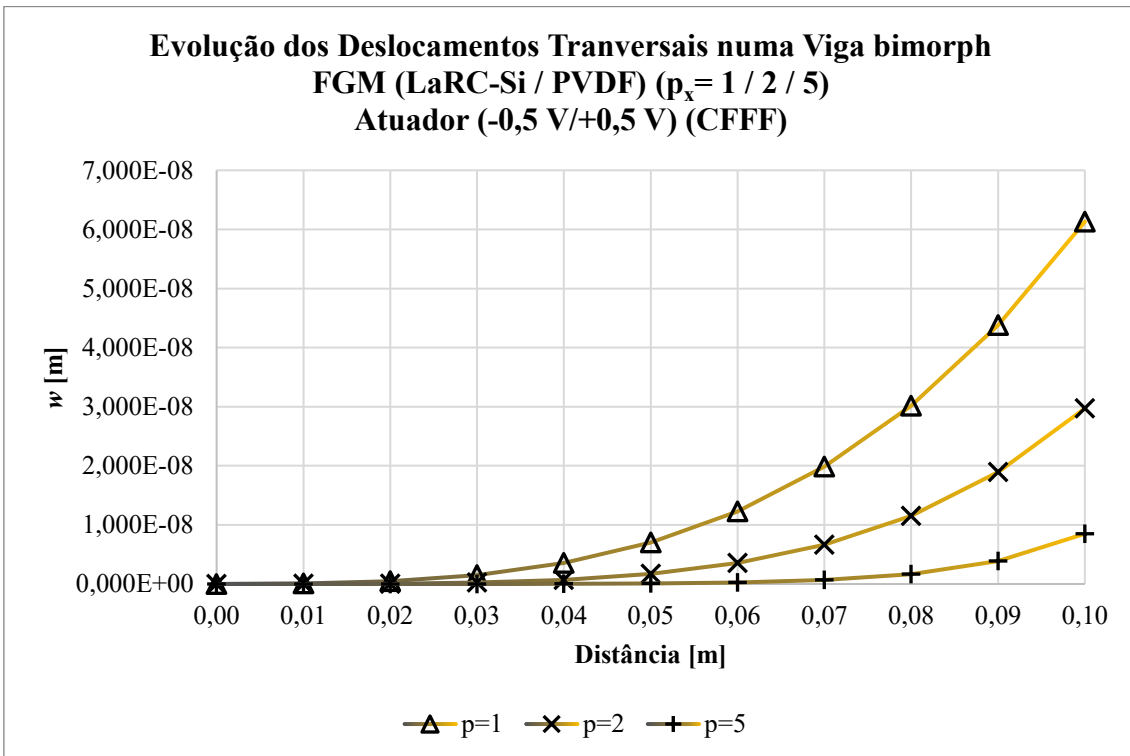


Figura 4.2.21 - Representação gráfica do perfil de deslocamentos transversais para $p \geq 1$ ao longo do comprimento de uma viga (CFFF) em configuração de atuador e discretização de 10×1 elementos

Para os diferentes valores de p_x considerados, com exceção do valor nulo, os maiores desvios registam-se para os nós imediatamente após o encastramento, sendo esta tendência amplificada com o aumento do valor de p_x que corresponde a uma maior presença de LaRC-Si. O principal motivo para este fenómeno é a distribuição das propriedades materiais ao longo do comprimento da viga, uma vez que é a única diferença entre as abordagens utilizadas.

Tabela 4.2.15 - Evolução dos coeficientes de rigidez elástica reduzidos em [GPa] ao longo de uma viga para um FGM discreto com $p_x=5$

	Elemento										PVDF	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
LaRC-Si	4,500	4,500	4,499	4,492	4,472	4,423	4,322	4,136	3,820	3,314	2,967	\bar{Q}_{11}
	1,800	1,800	1,799	1,797	1,788	1,767	1,725	1,646	1,512	1,297	1,150	\bar{Q}_{12}
	4,500	4,500	4,499	4,492	4,472	4,423	4,322	4,136	3,820	3,314	2,525	\bar{Q}_{22}
	1,400	1,400	1,399	1,396	1,387	1,365	1,319	1,234	1,089	0,858	0,700	\bar{Q}_{44}
	1,400	1,400	1,400	1,397	1,391	1,375	1,342	1,281	1,178	1,013	0,900	\bar{Q}_{55}
	1,400	1,400	1,400	1,397	1,391	1,375	1,342	1,281	1,178	1,013	0,900	\bar{Q}_{66}

A este respeito, a Tabela 4.2.15, apresenta os valores dos coeficientes de rigidez elástica reduzidos, utilizados para o cálculo das matrizes de rigidez e extraídos diretamente da aplicação numérica. Por uma questão de interpretação visual facilitada e coerência/correspondência com outras representações, apresenta simultaneamente por meio de uma graduação de cores, uma representação esquemática da distribuição contínua das diferentes fases, para $p_x = 5$. Uma observação rápida dos valores, permite constatar que para a abordagem discreta, os três primeiros elementos são constituídos por LaRC-Si, com uma rigidez superior, ao passo que o elemento mais próximo da extremidade livre da viga (elemento 10) não é constituído inteiramente por PVDF. A maior presença da fase passiva, que apresenta maior rigidez, em relação à fase ativa, conduz a uma estrutura com uma rigidez global ligeiramente superior, o que explica os menores valores de deslocamento verificados para a abordagem discreta quando comparada com a abordagem contínua. Simultaneamente, a maior presença em fração volúmica da fase passiva, conduz também a uma menor sensibilidade ao potencial elétrico aplicado, contribuindo para a redução dos deslocamentos ao longo do comprimento da viga. Em termos globais, e como constatado, esta tendência é agravada para maiores valores de p_x dada a maior presença de LaRC-Si em detrimento do PVDF. Contudo, para $p_x = 1$, os desvios obtidos não seguem esta tendência, demonstrada pelos demais. Esta situação é explicável pelo comportamento linear da distribuição das fases, que resulta deste valor de p_x aplicado à lei de potência, que por si só facilita a aproximação por parte da abordagem discreta, uma vez que o gradiente é constante.

Mantendo a configuração de atuador, o próximo passo é o estudo do comportamento da viga numa configuração CCFE. Assim, considera-se para o efeito o modelo discretizado, cuja representação esquemática se encontra na Figura 4.2.22.

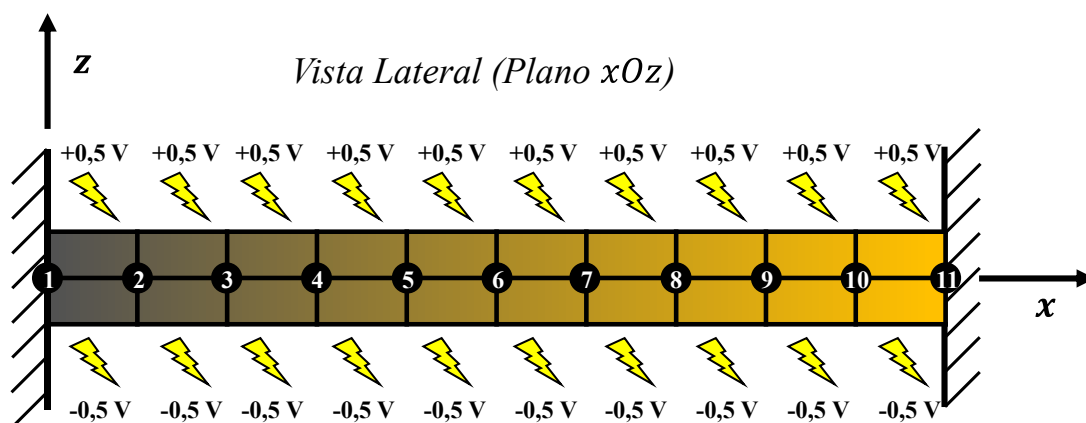


Figura 4.2.22 - Representação esquemática da configuração de atuador para uma viga bimorph FGM (CCFE)

Para as CF aplicadas ao modelo, os resultados obtidos para os deslocamentos transversais nodais, figuram na Tabela B48 e Tabela B49, para as abordagens contínua e discreta,

respetivamente. Graficamente, os resultados obtidos são também apresentados na Figura 4.2.23, Figura 4.2.24 e Figura B9, que correspondem a valores de p_x , inferiores, iguais ou superiores à unidade, e todo o espectro de valores considerados, respetivamente, mantendo-se uma vez mais, a representação esquemática da distribuição das fases por meio de gradiente de cores para os diferentes materiais.

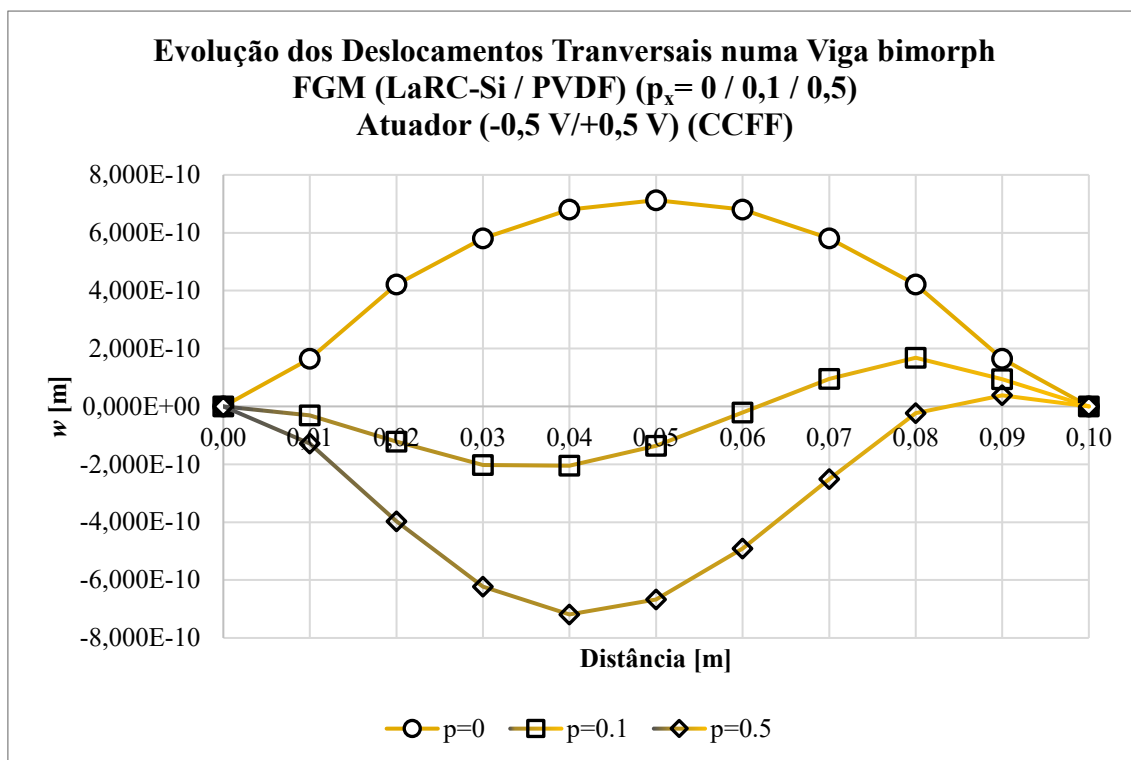


Figura 4.2.23 - Representação gráfica do perfil de deslocamentos transversais para $p < 1$ ao longo do comprimento de uma viga (CCFF) em configuração de atuador e discretização de 10×1 elementos

Do ponto de vista da análise dos resultados obtidos, o comportamento global que se verifica é o esperado, à exceção de $p_x = 0,1$ e $p_x = 0,5$. Para estes casos, observa-se que, a presença ligeira de LaRC-Si, produz uma deformação no sentido negativo, coincidente com a região da viga com maior percentagem volumica da fase passiva e uma deformação no sentido positivo coincidente com a maior presença de PVDF. Este fenómeno resulta da conjugação da distribuição das diferentes fases com as CF de fronteira aplicadas. Em relação ao estudo comparativo entre o modelo de variação contínua das propriedades materiais do FGM e o modelo de variação discreta, os maiores desvios verificados ocorrem para estes mesmos valores de expoente. Esta situação é, uma vez mais, justificável com a natureza discreta da segunda abordagem utilizada. Atendendo a que, para estes valores de p_x , a resposta estática da viga apresenta um comportamento em “s”, na qual dependendo da fase dominante, os deslocamentos transversais ocorrem no sentido negativo ou positivo, existindo uma transição entre os mesmos, o modelo discreto apresenta maior dificuldade em aproximar esta mesma transição. Mantendo-se a problemática anteriormente

identificada relativa à distribuição das fases na abordagem discreta, uma solução possível seria a utilização de uma discretização com maior número de elementos.

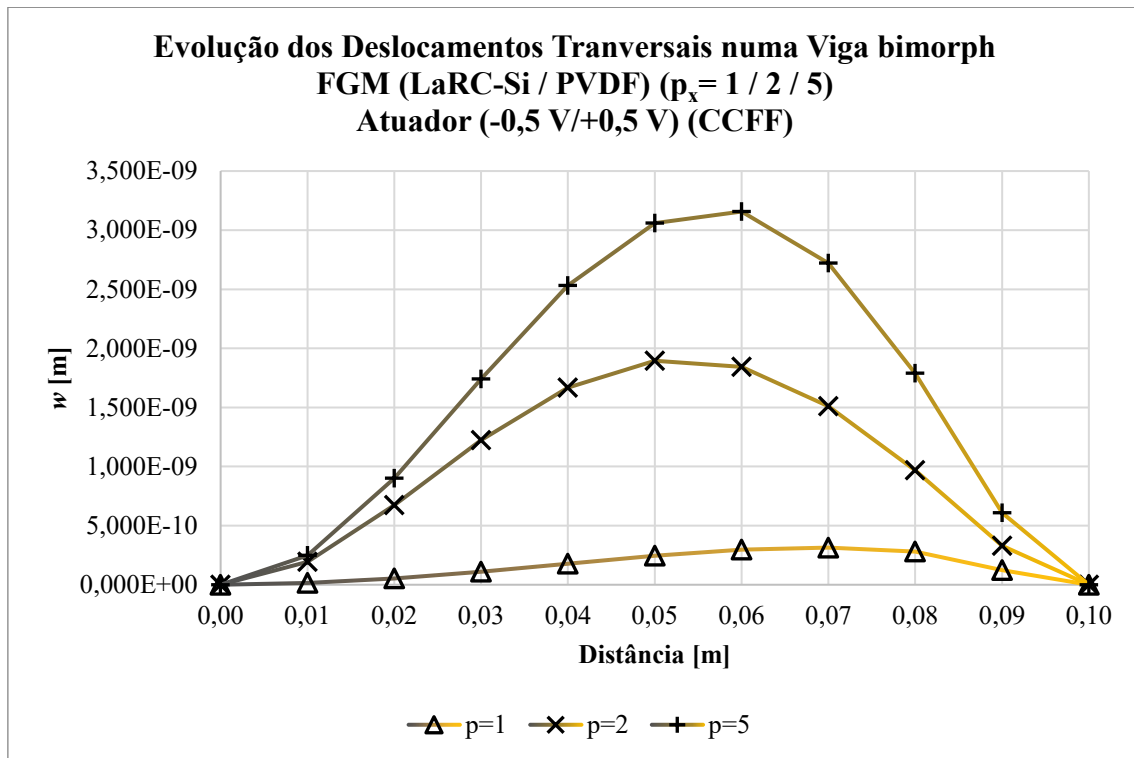


Figura 4.2.24 - Representação gráfica do perfil de deslocamentos transversais para $p \geq 1$ ao longo do comprimento de uma viga (CCFF) em configuração de atuador e discretização de 10×1 elementos

O próximo modelo considera uma viga SSFF em configuração de atuador, de acordo com a representação esquemática da Figura 4.2.25.

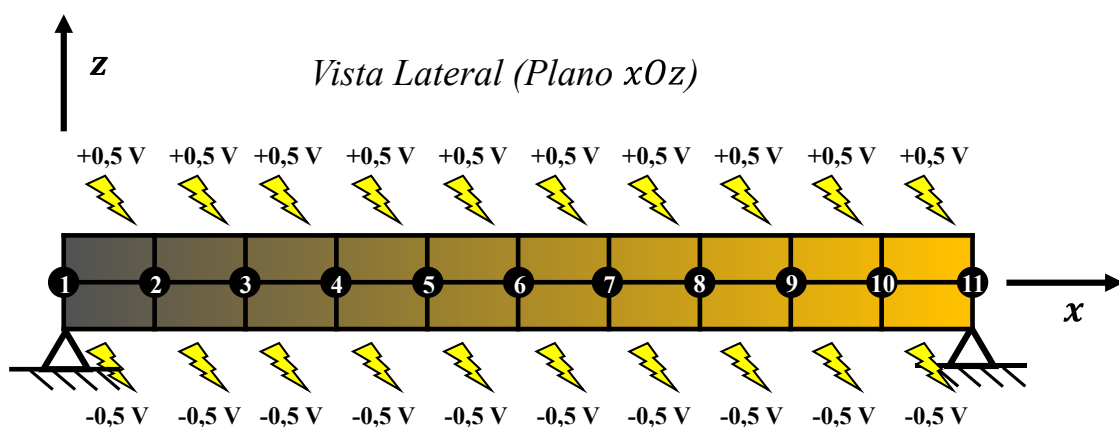


Figura 4.2.25 - Representação esquemática da configuração de atuador para uma viga bimorph FGM (SSFF)

Os resultados obtidos para os valores de deslocamento transversal ao longo do comprimento da viga encontram-se na Tabela B50 e Tabela B51, considerando as abordagens contínua e discreta para a evolução da distribuição das diferentes fases. Os mesmos são também apresentados graficamente por meio da Figura 4.2.26, Figura 4.2.27 e Figura B10, para valores de $p_x < 1$, ≥ 1 ou para todos os valores considerados. Visualmente, mantém-se a representação esquemática da distribuição de fases por meio do gradiente de cores dos diferentes materiais representados graficamente.

Da análise dos resultados, imediatamente se verifica que os potenciais aplicados, apesar de não sofrerem alterações face aos modelos anteriores, produzem um deslocamento transversal no sentido negativo, contrário ao verificado nos modelos anteriores. Esta situação é justificada pela diferença de CF aplicadas, mais concretamente ao nível das rotações θ_x que deixam de estar bloqueadas. Do ponto de vista dos diferentes materiais considerados, por meio da variação de p_x , verifica-se uma redução do deslocamento máximo transversal com o aumento de LaRC-Si, bem como uma translação da sua localização para localizações em que a percentagem volúmica de PVDF é superior. Do ponto de vista da representação esquemática da Figura 4.2.25, a translação ocorre do nó 6 ($p_x = 0$ e $p_x = 0,1$), para o nó 7 ($p_x = 0,5$, $p_x = 1$ e $p_x = 2$) e posteriormente para o nó 8 ($p_x = 5$).

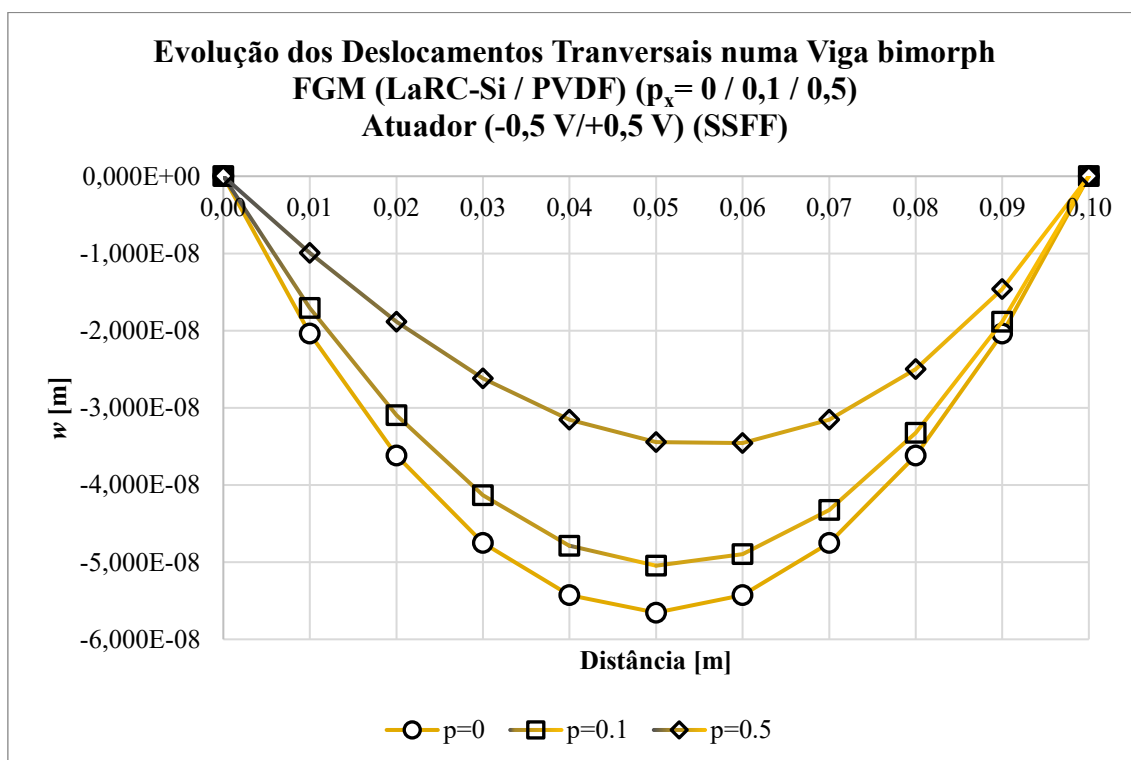


Figura 4.2.26 - Representação gráfica do perfil de deslocamentos transversais para $p < 1$ ao longo do comprimento de uma viga (SSFF) em configuração de atuador e discretização de 10×1 elementos

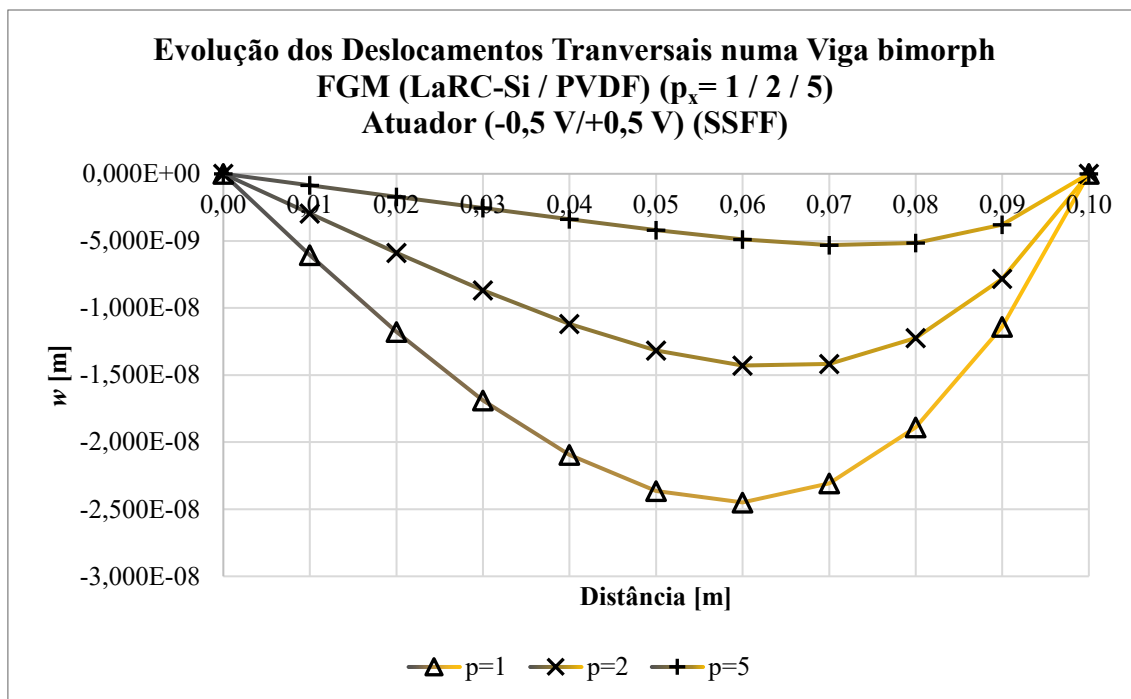


Figura 4.2.27 - Representação gráfica do perfil de deslocamentos transversais para $p \geq 1$ ao longo do comprimento de uma viga (SSFF) em configuração de atuador e discretização de 10×1 elementos

Considerando uma viga CSFF, em configuração de atuador, como ilustrado através da Figura 4.2.28, os resultados obtidos considerando os diferentes pressupostos para a variação da distribuição das fases ativa e passiva, constam na Tabela B52 e Tabela B53. Adicionalmente, a Figura 4.2.29 e Figura 4.2.30 apresentam graficamente, a evolução dos deslocamentos transversais nodais ao longo do comprimento da viga para diferentes valores de p_x .

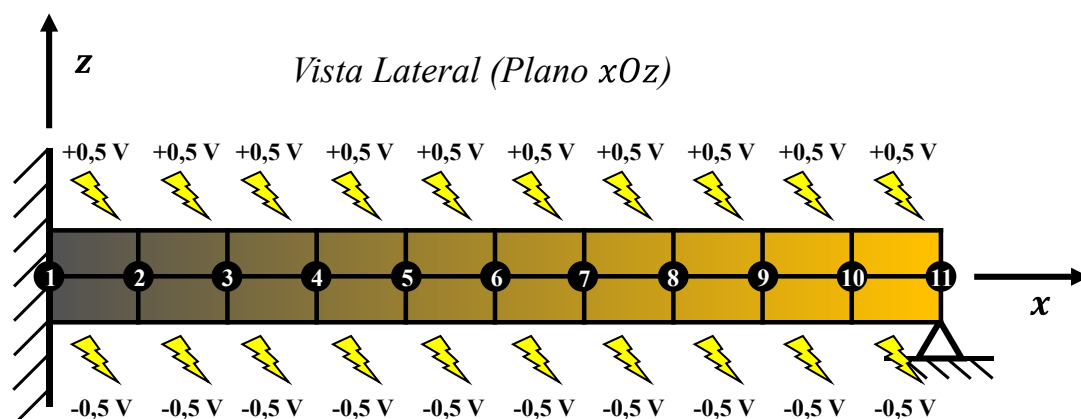


Figura 4.2.28 - Representação esquemática da configuração de atuador para uma viga bimorph FGM (CSFF)

Em termos de análise dos resultados obtidos, observa-se um comportamento expectável para as CF aplicadas. A introdução de um encastramento na extremidade com maior percentagem volumica da fase passiva, restringe de modo mais significativo os deslocamentos transversais,

não sendo, no entanto, necessário para induzir uma inversão no seu sentido, como no caso da viga CCFF. Este modelo é significativamente mais próximo da viga SSFF, na questão do sentido dos deslocamentos, demonstrando ser uma questão que está associada às rotações θ_x . Do ponto de vista da evolução dos deslocamentos ao longo do comprimento da viga, para os diferentes materiais considerados, observa-se uma tendência de translação – ainda que ligeira – no sentido da maior presença de PVDF. Um aspeto que se identifica também, prende-se com a magnitude dos deslocamentos verificados. Do ponto de vista teórico e prático, seria espectável que para o aumento da fração volúmica de PVDF, os deslocamentos seriam superiores em função da menor rigidez desta fase, contudo para o caso particular de $p_x = 0$ os deslocamentos observados, são até inferiores. Esta questão está associada à integração na área do elemento, para a constituição das matrizes de rigidez da componente de membrana-flexão dos elementos. Neste caso, é utilizado um método de integração analítico, seguindo a lógica estabelecida em 4.2.1.2. Está-se assim, perante um fenómeno numericamente induzido que resulta da aplicação da integração numérica para os outros valores de p_x , por questões computacionais. Assim, os resultados obtidos para $p_x > 0$ são superiores à realidade, dado o fenómeno de redução numérica da rigidez.

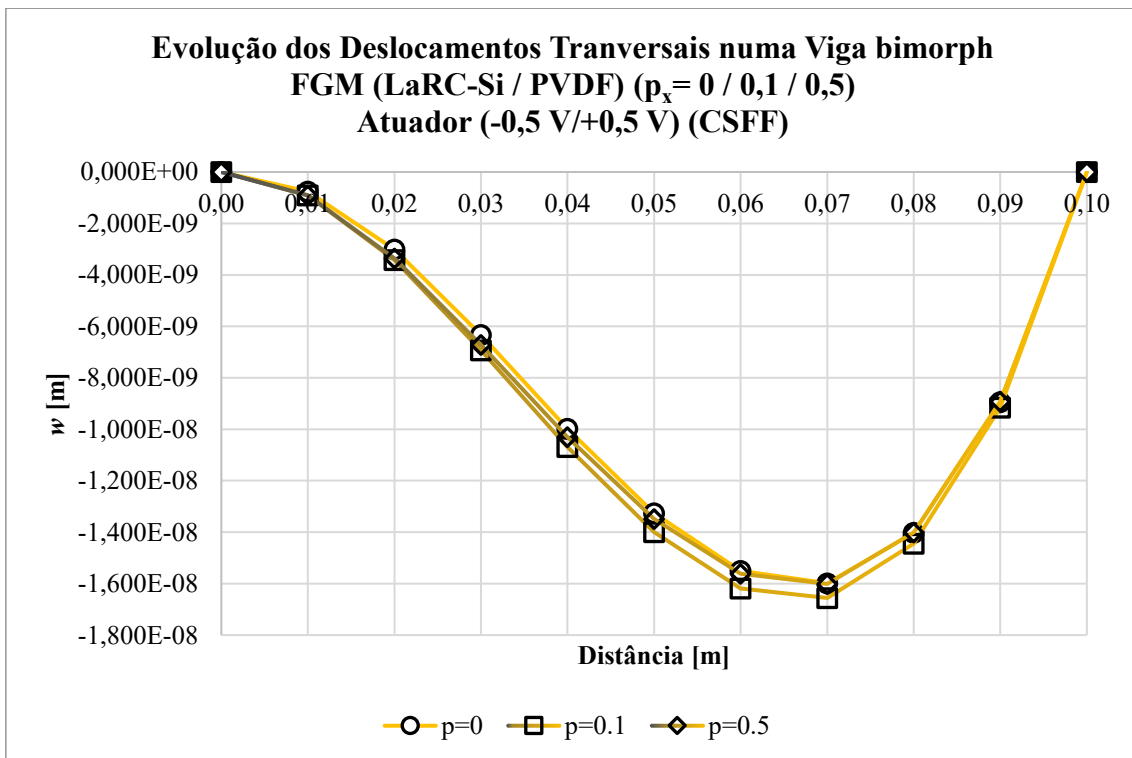


Figura 4.2.29 - Representação gráfica do perfil de deslocamentos transversais para $p < 1$ ao longo do comprimento de uma viga (CSFF) em configuração de atuador e discretização de 10×1 elementos

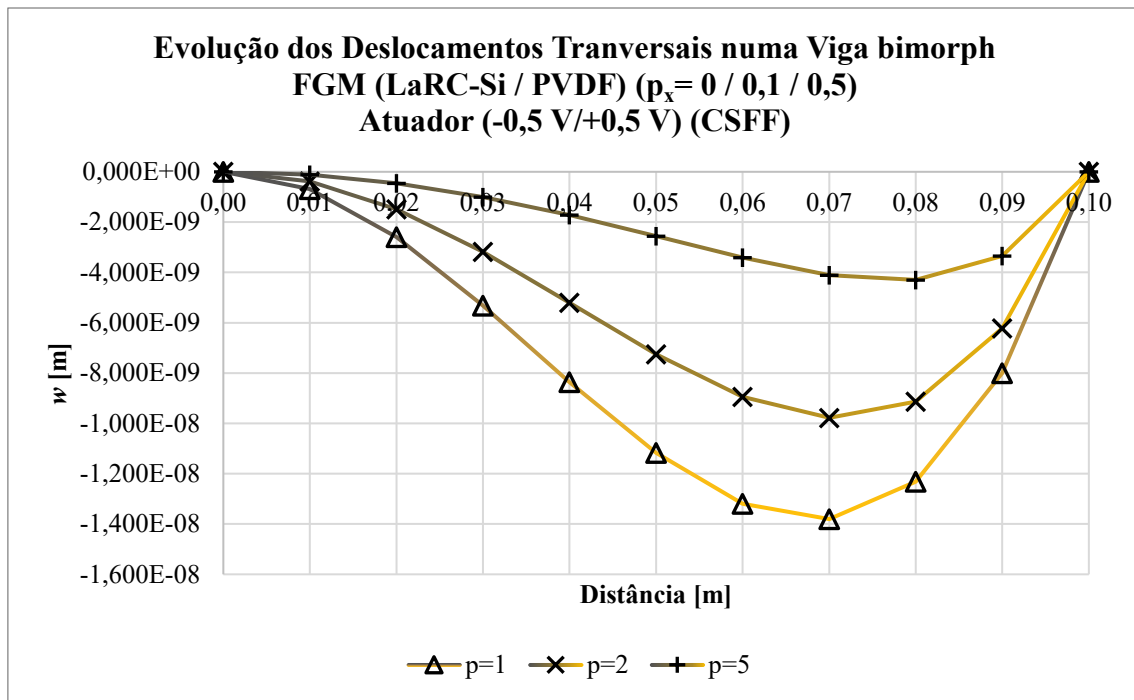


Figura 4.2.30 - Representação gráfica do perfil de deslocamentos transversais para $p \geq 1$ ao longo do comprimento de uma viga (SSFF) em configuração de atuador e discretização de 10×1 elementos

A propósito desta questão, é importante referir que os resultados obtidos até ao momento, desprezaram a contribuição da expressão da lei de potência (função de x ou de y) para o maior grau presente na matriz do polinómio interpolador da quadratura de *Gauss-Legendre* na integração simplificada aplicada aos termos de corte. Como tal, foi considerado um único ponto, de acordo com o definido para polinómios de grau 1. De referir que esta situação, apenas afeta os modelos na qual a distribuição de fases ocorra na direção x ou y , na medida, em que apenas a integração na área do elemento é simplificada. Por forma a estudar o efeito desta simplificação adotada, foi quantificada a sua influência no comportamento da estrutura, apresentando-se os resultados obtidos no final do presente estudo.

Em termos do estudo comparativo entre os modelos contínuos e discretos, os desvios obtidos são, de um modo geral, aceitáveis ou até mesmo desprezáveis. Este comentário, aplica-se tanto para os modelos de viga SSFF, como para o modelo CSFF, agora em estudo, mantendo-se também a tendência anteriormente identificada do aumento dos desvios para o aumento de p_x .

Antes de passar à apresentação e análise dos modelos em configuração de sensor, e conforme referido, a riqueza paramétrica do presente estudo, permite observar os resultados numa outra perspetiva. Assim, a Figura B12, Figura B13, Figura B14, Figura B15, Figura B16 e Figura B17, ilustram graficamente o comportamento para cada material, em função das CF utilizadas. Por uma questão de maior perceção visual, as representações gráficas, não apresentam os modelos CFFF. Ainda assim, do ponto de vista da análise realizada, estes modelos são considerados. De acordo

com o grau de constringimento aplicado à estrutura, verifica-se para todos os casos, que a CF que menos limita o deslocamento transversal da estrutura é a CFFF, seguida da SSFF, CSFF e por último a CCFE. A respeito de cada material utilizado, no caso de $p_x = 0$, e tratando-se de um material homogêneo, ocorre simetria em relação ao meio vão da viga, sempre que a CF aplicada o permita, i.e., seja também simétrica. Já para os restantes casos observa-se uma translação do ponto de deslocamento máximo no sentido da CF que imponha menores constringimentos em termos de GDL, e que dependendo da CF aplicada pode ser mais ou menos pronunciada.

Dando início à análise da configuração de sensor, considera-se primeiramente uma viga CFFF, à qual é aplicada na sua extremidade livre uma força de 0,05 N, conforme a representação esquemática da Figura 4.2.31. De referir que, uma vez que a força aplicada é igual para os diferentes valores de p_x considerados, os resultados incluem também os deslocamentos transversais, em adição aos potenciais elétricos, dado que serão diferentes de caso para caso. É importante esclarecer que para o presente estudo paramétrico, no que à configuração de sensor diz respeito, existe a possibilidade de considerar duas abordagens diferentes: força constante e deformação constante. No caso da primeira, a força aplicada é igual, para todos os materiais considerados, independentemente dos deslocamentos, tornando necessário registar os últimos. Para a segunda abordagem, a deformação da placa é sempre constante, fazendo para isso variar a força aplicada. A escolha da primeira deve-se a motivos principalmente computacionais, ao permitir poupar a implementação de uma rotina de cálculo iterativa na aplicação numérica desenvolvida, até alcançar o deslocamento desejado.

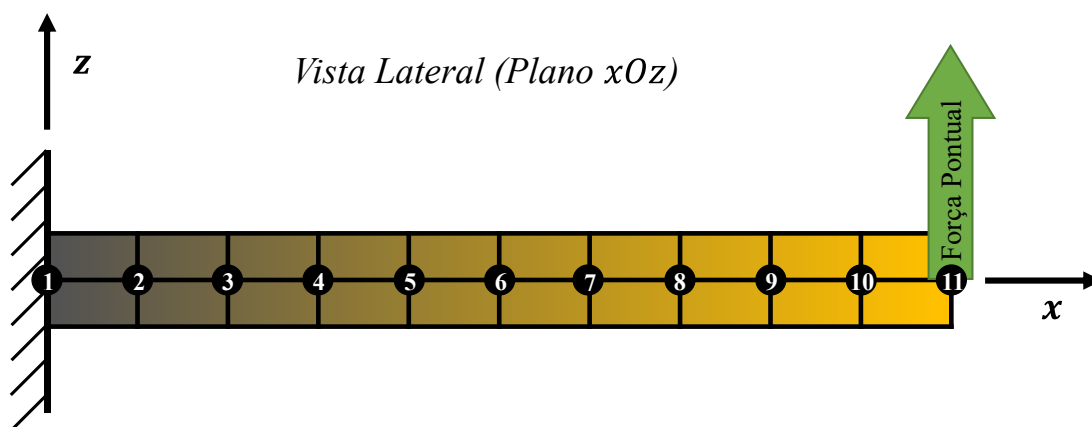


Figura 4.2.31 - Representação esquemática da configuração de sensor para uma viga bimorph FGM (CFFF)

Os resultados obtidos para o deslocamento transversal ao longo do comprimento da viga, contam da Tabela B54 e Tabela B55, conforme o modelo contínuo ou discreto para a variação das propriedades efetivas do FGM. São apresentados graficamente por meio da Figura 4.2.32, Figura 4.2.33 e Figura B19, as quais mantêm a representação esquemática relativa à distribuição de fases do FGM.

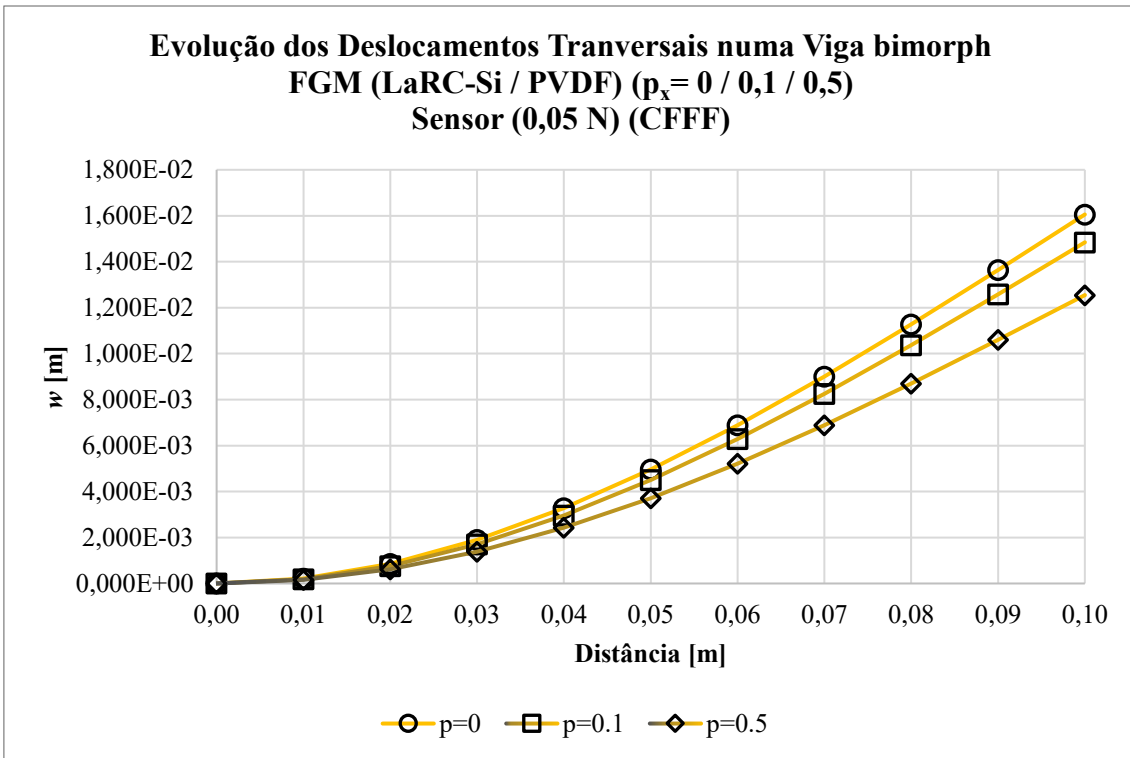


Figura 4.2.32 - Representação gráfica do perfil de deslocamentos transversais para $p < 1$ ao longo do comprimento de uma viga (CSFF) em configuração de sensor e discretização de 10×1 elementos

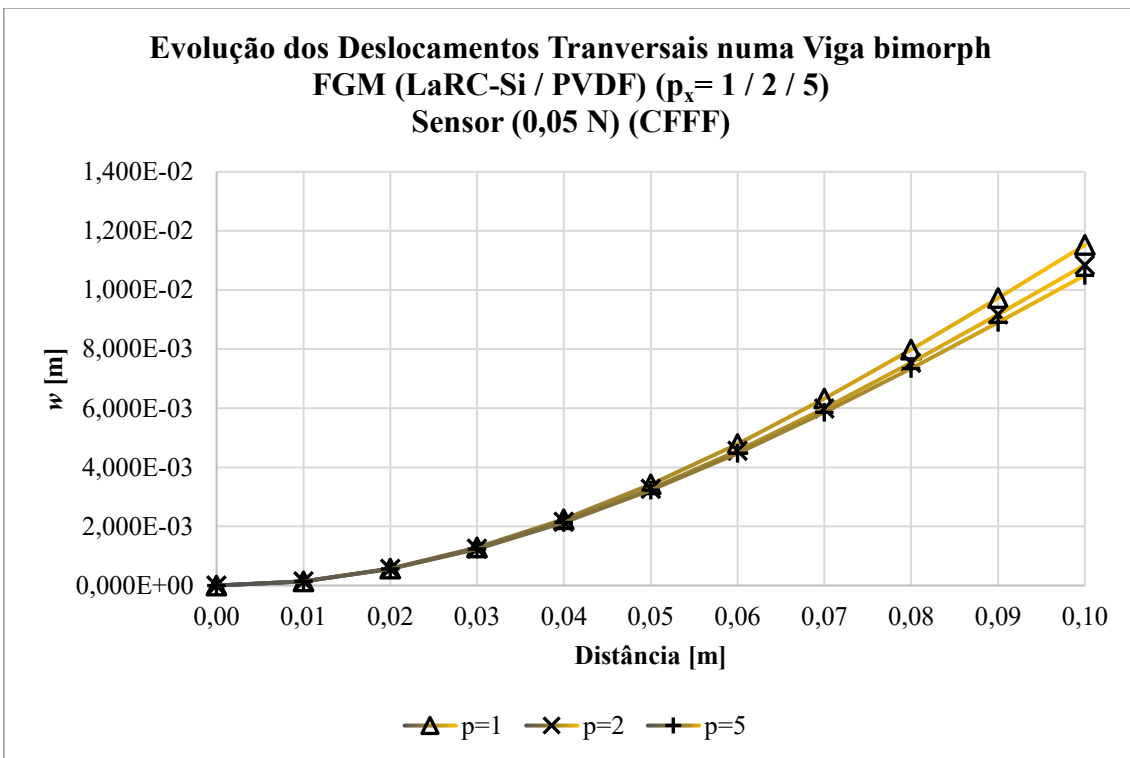


Figura 4.2.33 - Representação gráfica do perfil de deslocamentos transversais para $p \geq 1$ ao longo do comprimento de uma viga (CSFF) em configuração de sensor e discretização de 10×1 elementos

A propósito da evolução dos deslocamentos transversais ao longo do comprimento da viga, os resultados obtidos apresentam a tendência esperada de redução dos mesmos, com o aumento da incorporação de LaRC-Si, i.e., com o aumento de p_x . Relativamente aos resultados obtidos para a distribuição de potenciais eléctricos na estrutura, os mesmos constam da Tabela B56 e Tabela B57, conforme a abordagem contínua ou discreta utilizada. São apresentados graficamente através da Figura 4.2.34, para valores de $p_x < 1$ e da Figura 4.2.35 para $p_x \geq 1$. Adicionalmente, a Figura B19 apresenta graficamente um panorama geral para todos os materiais considerados. À semelhança de outras representações gráficas já apresentadas para a distribuição de potenciais eléctricos, também as presentes adotam um traçado discreto de acordo com a formulação utilizada. Mantém-se também a representação esquemática da distribuição de fases, por meio da utilização de uma gradação de cores.

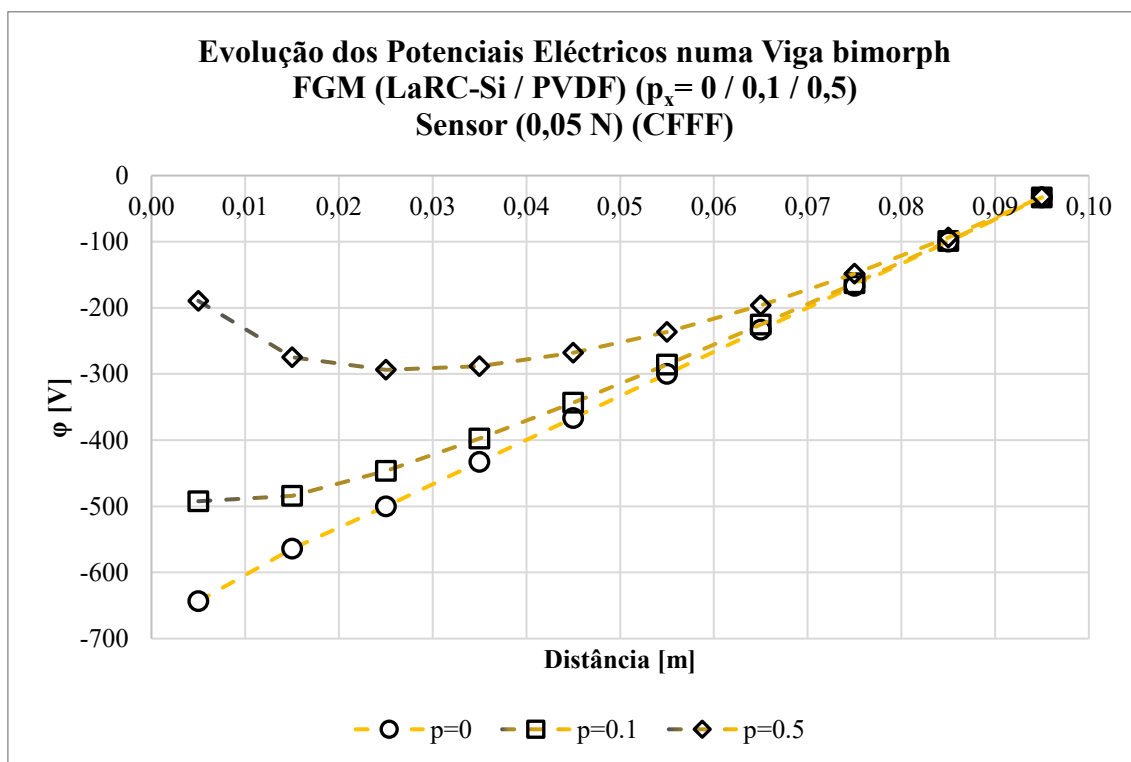


Figura 4.2.34 - Representação gráfica da distribuição de potenciais eléctricos para $p < 1$ ao longo do comprimento de uma viga (CFFF) em configuração de sensor e discretização de 10×1 elementos

A análise dos resultados permite evidenciar um comportamento expectável e já verificado em estudos anteriores. Do ponto de vista da distribuição dos potenciais eléctricos ao longo da viga, observa-se uma redução no sentido da extremidade encastrada para a extremidade livre, em linha com as CF aplicadas. Para o aumento de p_x observa-se que o valor máximo de potencial eléctrico tende a ocorrer cada vez mais próximo da extremidade livre. Esta situação deve-se à redução dos potenciais eléctricos na extremidade encastrada da viga, como consequência do aumento de LaRC-Si, que não tem propriedades piezoeléctricas e que como tal não pode exibir potenciais eléctricos

quando sujeito à aplicação de forças externas e vice-versa. Quanto à magnitude dos potenciais elétricos obtidos, é de referir que, face a estudos anteriores, estes são agora mais adequados aos limites operacionais do PVDF, demonstrando-se uma vez mais as potencialidades dos FGPM, no controlo quase exato das propriedades piezoelétricas efetivas, permitindo adequar a resposta destes materiais a um vasto leque de situações distintas. No que toca aos desvios entre os modelos contínuos e discreto, os mesmos são reduzidos, numa realidade que se aplica tanto para os deslocamentos como para os potenciais.

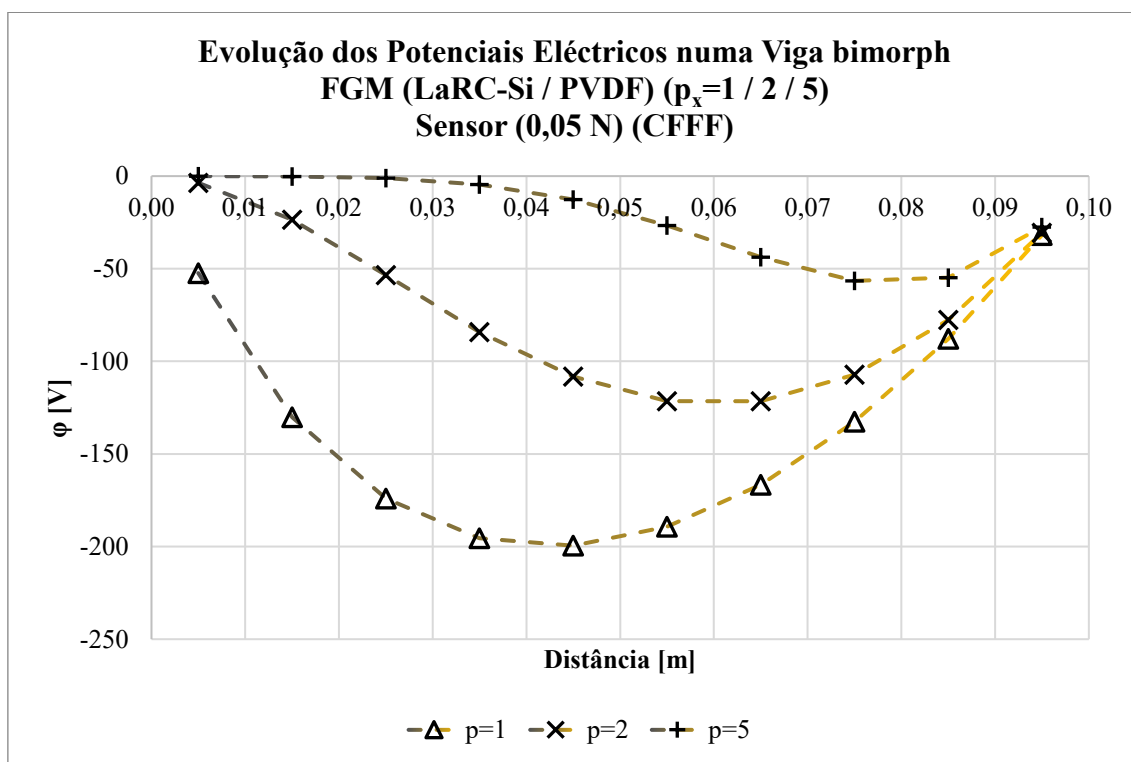


Figura 4.2.35 - Representação gráfica da distribuição de potenciais elétricos para $p \geq 1$ ao longo do comprimento de uma viga (CFFF) em configuração de sensor e discretização de 10×1 elementos

O modelo seguinte, considera uma viga CCFF, também em configuração de sensor e cuja representação esquemática se encontra na Figura 4.2.36. A força responsável por desencadear o efeito piezoelétrico, que neste caso é aplicada a meio vão, tem uma magnitude de 0,05 N.

A respeito dos resultados obtidos para os deslocamentos transversais ao longo da viga, os mesmos constam da Tabela B58 e Tabela B59, consoante o modelo, contínuo ou discreto, utilizado para o cálculo das propriedades materiais efetivas do FGM. Os mesmos são apresentados graficamente na Figura 4.2.39, Figura 4.2.40 e Figura B20, mantendo-se a representação esquemática da evolução da distribuição de fases.

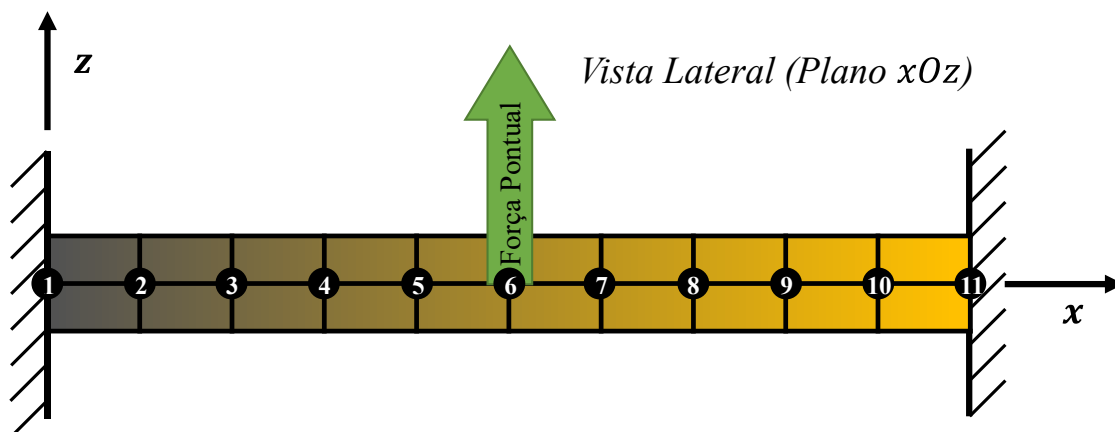


Figura 4.2.36 - Representação esquemática da configuração de sensor para uma viga bimorph FGM (CCFF)

Em função do carregamento aplicado e das CF impostas, a resposta estática da viga, do ponto de vista dos deslocamentos transversais ao longo do seu comprimento, é em linha com o esperado. Os deslocamentos máximos ocorrem a meio vão da viga, verificando-se um comportamento simétrico para $p_x = 0$. Com o aumento de p_x a simetria existente, em termos de deslocamento em relação ao meio da viga ($x = 0,05$ m), deixa de se verificar, passando os deslocamentos à direita deste a apresentar valores superiores aos seus homólogos à esquerda do meio vão da viga ($w_7 > w_5$, $w_8 > w_4$, etc.).

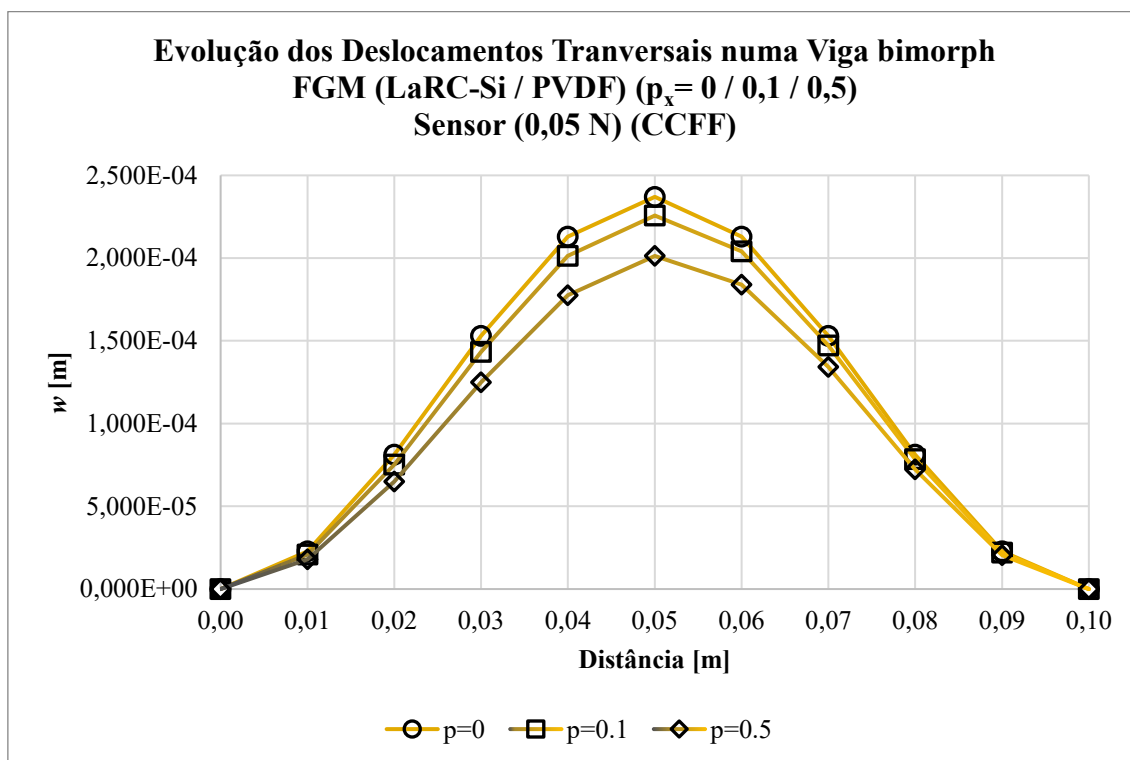


Figura 4.2.37 - Representação gráfica do perfil de deslocamentos transversais para $p < 1$ ao longo do comprimento de uma viga (CCFF) em configuração de sensor e discretização de 10×1 elementos

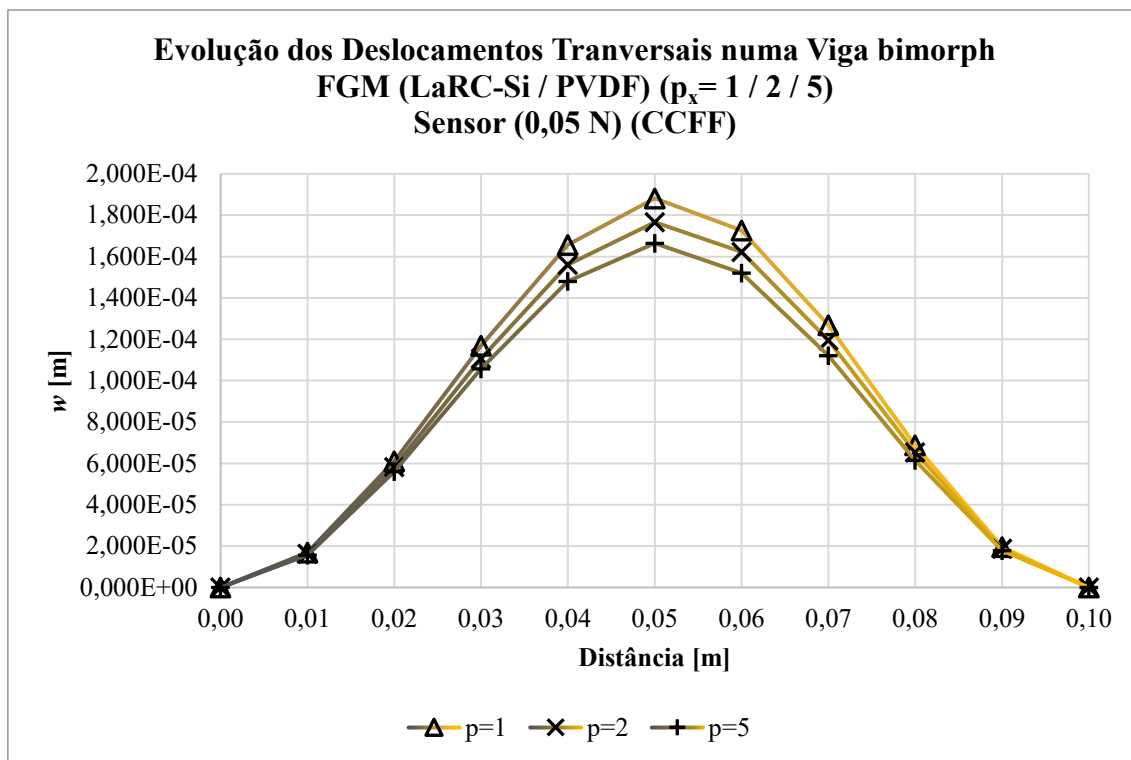


Figura 4.2.38 - Representação gráfica do perfil de deslocamentos transversais para p_1 ao longo do comprimento de uma viga (CCFF) em configuração de sensor e discretização de 10×1 elementos

Da aplicação da força a meio vão da viga, resulta um conjunto de potenciais elétricos induzidos pelo efeito piezoelétrico. Os resultados obtidos para estes, ao longo da espessura total do *bimorph* constam da Tabela B60 e Tabela B61. Por forma a facilitar a interpretação, as figuras 4.2.39 e 4.2.40, apresentam graficamente a distribuição dos potenciais, para valores de $p_x < 1$ e $p_x \geq 1$, respectivamente, sendo que a Figura B21 combina na mesma representação gráfica, os gráficos das figuras anteriores.

Da análise dos resultados obtidos verifica-se uma vez mais que as CF impostas alteram de modo substancial os potenciais elétricos, passando a existir, em simultâneo, elementos cujo potencial elétrico é positivo e outros em que é negativo. Esta situação surge associada ao maior grau de restrição imposto pelas CF, com as quais são bloqueadas todas as rotações das extremidades livres. Em consequência, os potenciais elétricos são significativamente inferiores, evoluindo de valores máximos (negativos) nas extremidades da viga, para valores máximos (positivos) no meio da viga. Para o aumento de p_x , observa-se uma redução gradual dos potenciais elétricos nas proximidades da extremidade encastrada para $x = 0$ m, fruto da maior presença de LaRC-Si, que não exhibe efeito piezoelétrico, razão pela qual não gera potenciais elétricos. Na proximidade da extremidade oposta, em que se observa uma maior presença de PVDF, apesar de uma ligeira redução, os potenciais elétricos mantêm uma tendência semelhante continuando a verificar-se máximos (negativos).

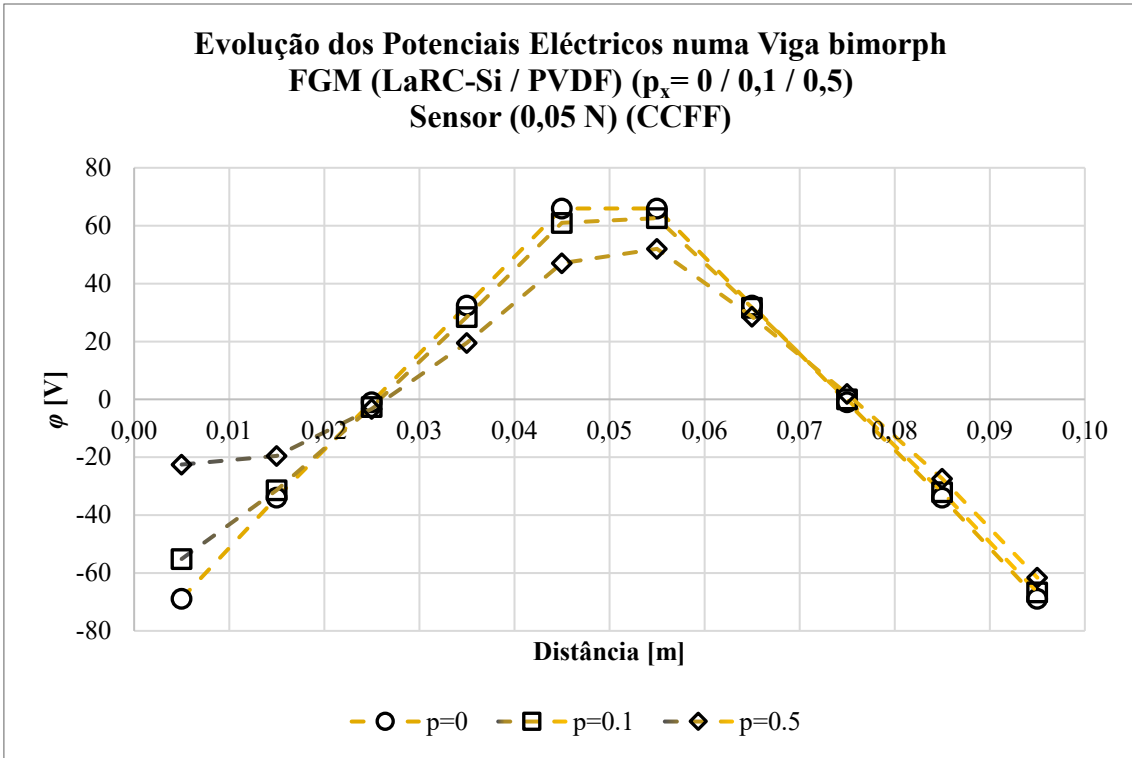


Figura 4.2.39 - Representação gráfica da distribuição de potenciais elétricos para $p < 1$ ao longo do comprimento de uma viga (CCFF) em configuração de sensor e discretização de 10×1 elementos

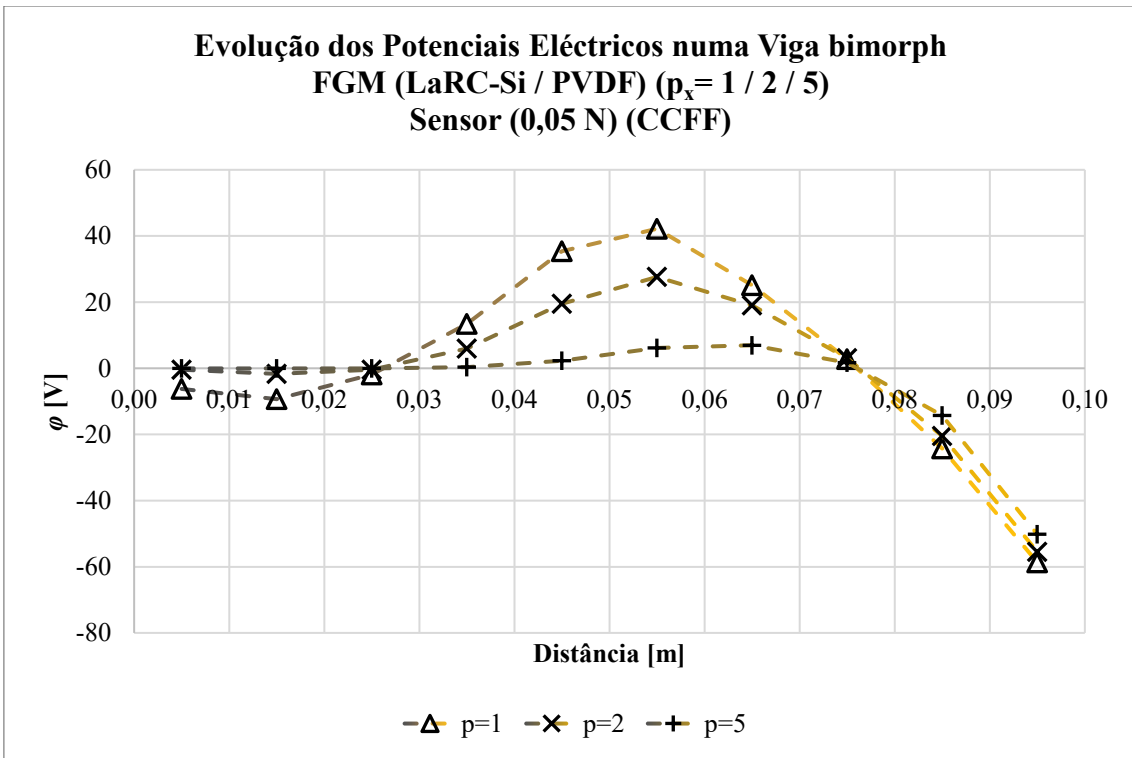


Figura 4.2.40 - Representação gráfica da distribuição de potenciais elétricos para $p \geq 1$ ao longo do comprimento de uma viga (CCFF) em configuração de sensor e discretização de 10×1 elementos

Quanto ao estudo comparativo realizado entre os modelos contínuo e discreto, os desvios obtidos para os deslocamentos transversais são reduzidos, exibindo um aumento progressivo com o aumento de p_x . Para os potenciais elétricos o cenário é diferente, verificando valores de desvios substanciais, que ocorrem principalmente junto da extremidade encastrada em $x = 0$ m, uma tendência que se agrava com o aumento dos valores de p_x considerados e que é consequência direta da distribuição das fases, que em função do modelo utilizado, ocorre de modo diferente, como já identificado.

O próximo modelo recupera a viga SSFF em configuração de sensor. De modo semelhante aos modelos já apresentados, é aplicada uma força de 0,05 N, a meio vão, de acordo com a representação esquemática da Figura 4.2.41.

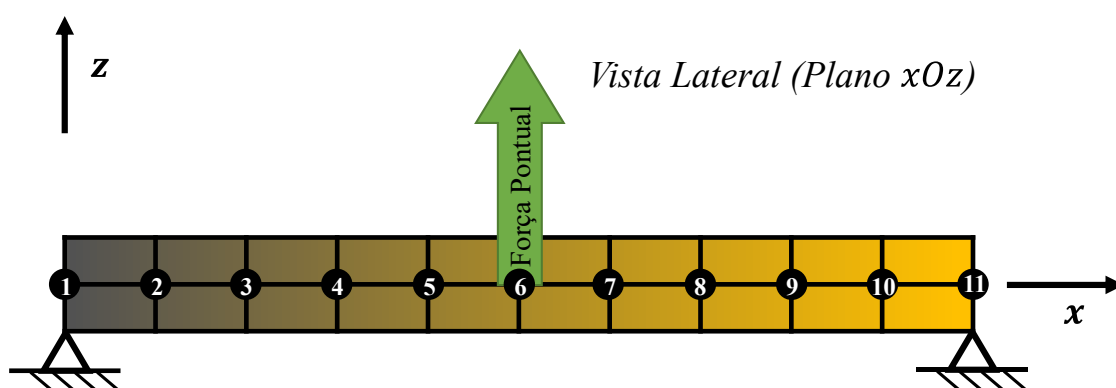


Figura 4.2.41 - Representação esquemática da configuração de sensor para uma viga bimórfica FGM (SSFF)

Da aplicação da força resultam deslocamentos transversais cujos resultados se apresentam na Tabela B62 e Tabela B63, para os modelos contínuo e discreto, respectivamente. A figura 4.2.42 e a figura 4.2.43 apresentam graficamente os resultados dispostos nas referidas tabelas para valores de $p_x < 1$ e $p_x \geq 1$, respectivamente, sendo que adicionalmente se apresenta a representação gráfica completa na Figura B22.

Os deslocamentos transversais resultantes da aplicação da força, são em termos globais os esperados para as CF aplicadas. O seu valor máximo ocorre para todos os valores de p_x considerados, verificando-se um desequilíbrio com o seu aumento, à semelhança do identificado para o modelo CCFF.

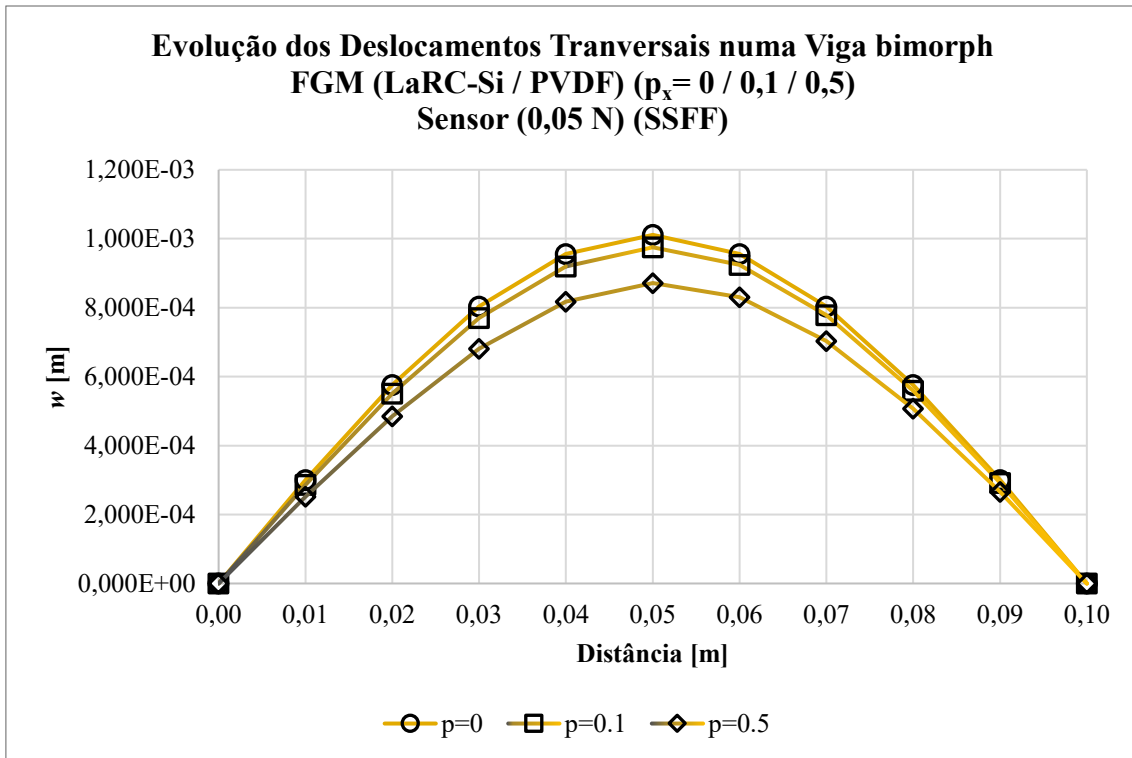


Figura 4.2.42 - Representação gráfica do perfil de deslocamentos transversais para $p < 1$ ao longo do comprimento de uma viga (SSFF) em configuração de sensor e discretização de 10×1 elementos

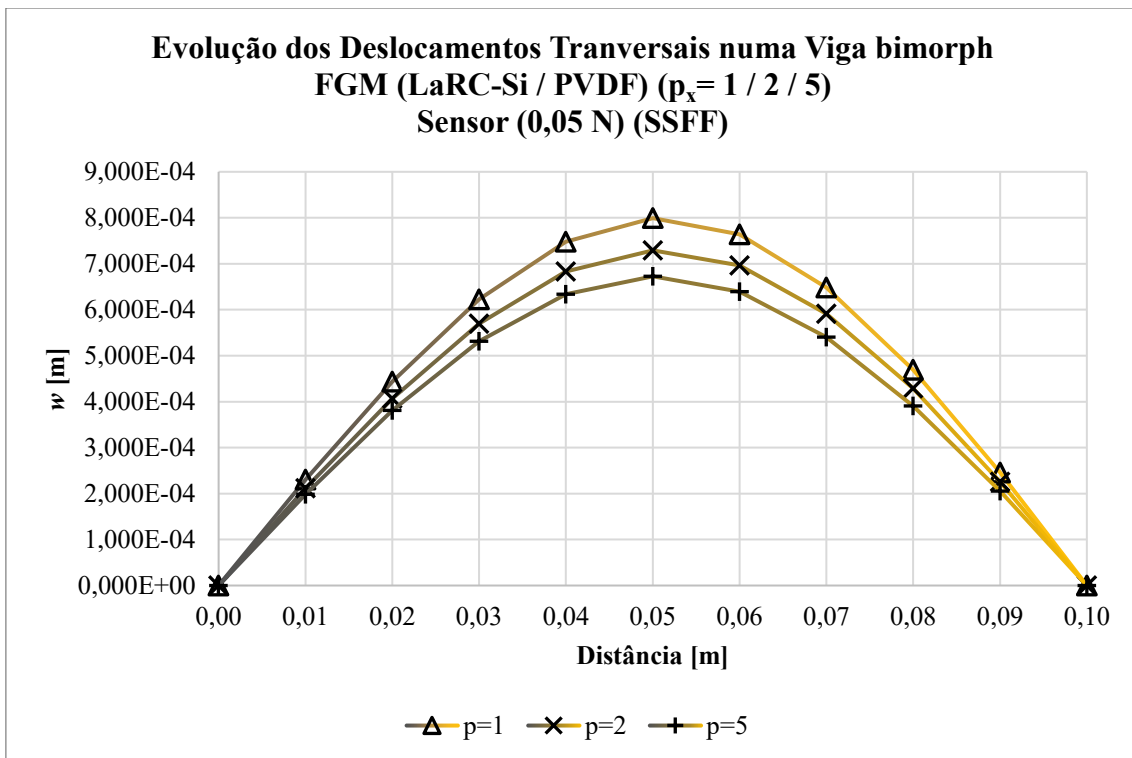


Figura 4.2.43 - Representação gráfica do perfil de deslocamentos transversais para $p \geq 1$ ao longo do comprimento de uma viga (CCFF) em configuração de sensor e discretização de 10×1 elementos

Os potenciais elétricos induzidos por efeito piezoelétrico, cujos resultados se apresentam na Tabela B64 e Tabela B65, observa-se um comportamento semelhante ao da viga CCFF, sendo de notar a ausência de valores de potencial elétrico negativos. Da observação das representações gráficas da figura 4.2.44, figura 4.2.45 e Figura B23, regista-se a ocorrência de uma translação para o quadrante positivo do gráfico. Esta situação é consequência do maior número de GDL da estrutura, em concreto das rotações θ_x nas extremidades apoiadas. Como anteriormente referido, a principal contribuição para o efeito piezoelétrico provém dos termos associados às rotações, pelo que o desbloqueio destes graus de liberdade produz um efeito piezoelétrico de magnitude superior o que se traduz nos maiores valores absolutos obtidos e na translação dos pontos na representação gráfica.

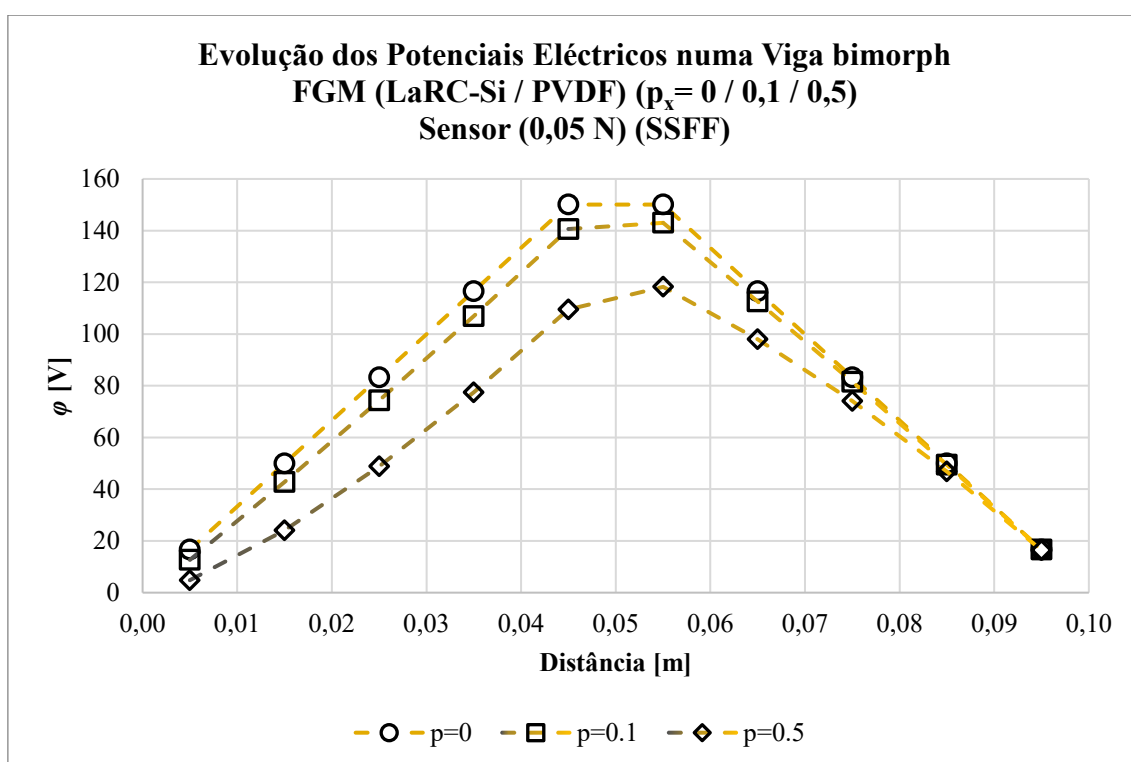


Figura 4.2.44 - Representação gráfica da distribuição de potenciais elétricos para $p < 1$ ao longo do comprimento de uma viga (SSFF) em configuração de sensor e discretização de 10×1 elementos

A respeito dos diferentes materiais considerados e dos efeitos das diferentes misturas de fases nos potenciais elétricos, a situação é, em termos globais, semelhante à viga CCFF. O aumento de p_x causa uma redução dos potenciais elétricos obtidos, em consequência da maior percentagem volumica de LaRC-Si. Para extremidade $x = 0$ m e sua proximidade este fenómeno é particularmente simples de constatar, enquanto para a extremidade oposta ($x = L$) é residual face à maior presença de PVDF.

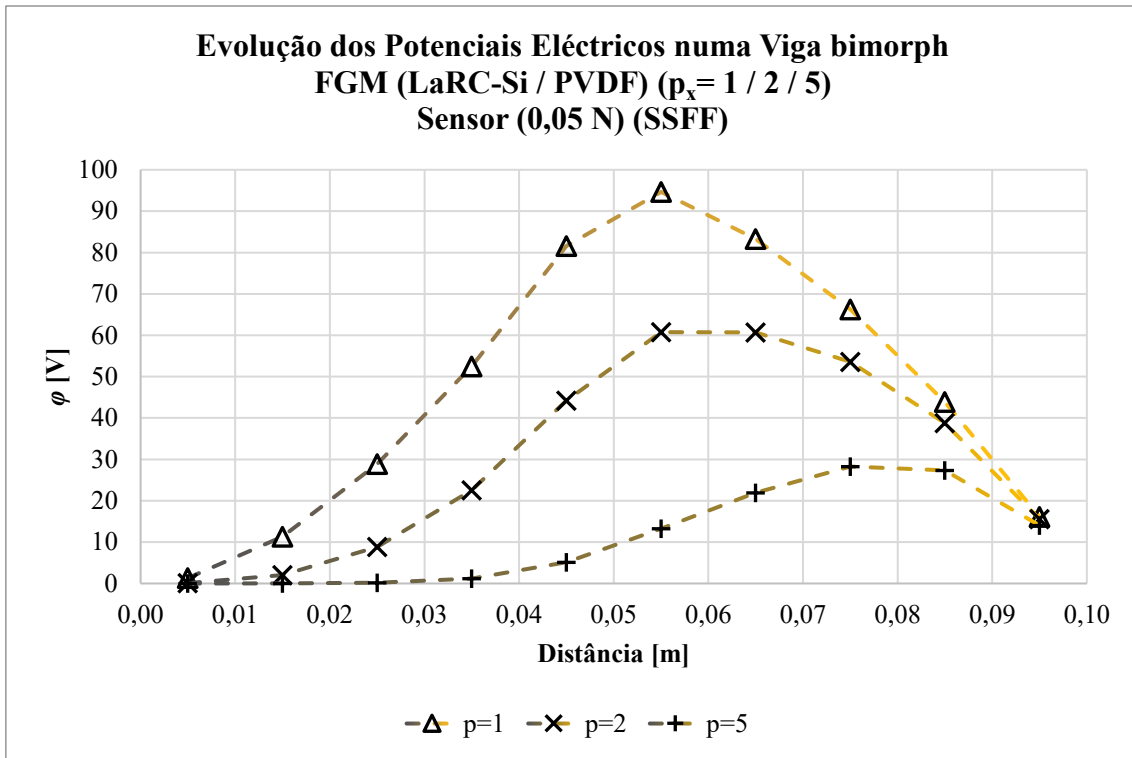


Figura 4.2.45 - Representação gráfica da distribuição de potenciais eléctricos para $p \geq 1$ ao longo do comprimento de uma viga (SSFF) em configuração de sensor e discretização de 10×1 elementos

Do estudo comparativo entre os modelos contínuo e discreto mantém-se a tendência de aumento dos desvios para o aumento de p_x , observando-se ainda um aumento considerável para $x = 0$ m em resultado da dificuldade do modelo discreto em aproximar a distribuição de fases, considerando o modelo discretizado, i.e., o número de elementos utilizado. Relativamente aos deslocamentos os desvios observados são desprezáveis.

O último modelo que se apresenta no âmbito do presente estudo, é o de uma viga CSFF, em configuração de sensor, de acordo com a representação esquemática da Figura 4.2.46.

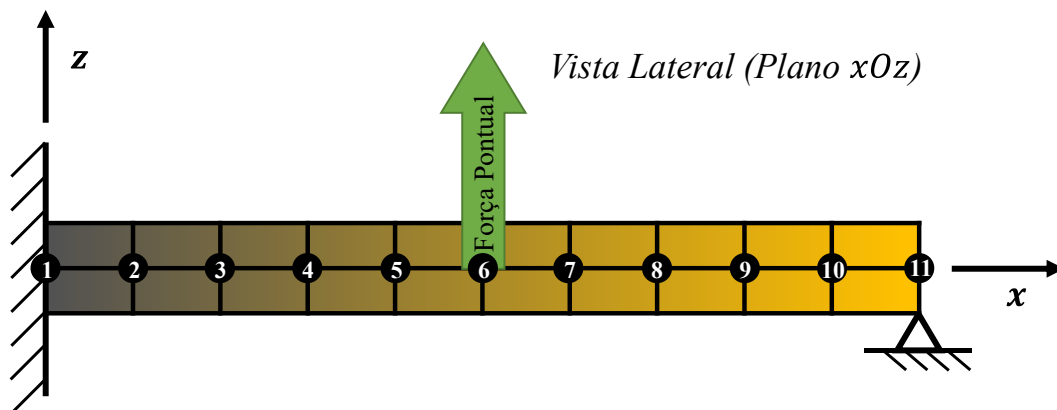


Figura 4.2.46 - Representação esquemática da configuração de sensor para uma viga bimorph FGM (CSFF)

Da aplicação de uma força vertical de 0,05 N, resultam os deslocamentos que se apresentam na Tabela B66 e Tabela B67, para os modelos contínuo e discreto, respetivamente. Através da sua análise verifica-se o esperado para as CF aplicadas, que resulta numa resposta híbrida por parte da estrutura entre o modelo CCFF e SSFF. O maior grau de restrição da estrutura resulta em deslocamentos inferiores ao modelo SSFF, mas ainda assim superiores ao modelo CCFF. Apesar da aplicação da força a meio vão, a desigualdade de CF aplicadas, ou não simetria, faz com que o deslocamento máximo vertical se situe em $x = 0,6$ m, como é possível observar nas representações gráficas da Figura 4.2.47, Figura 4.2.48 e Figura B24. Como vem sendo habitual, as representações gráficas adotam uma representação esquemática por meio da aplicação de um gradiente de cores para cada perfil de deslocamentos apresentado correspondente a cada material considerado.

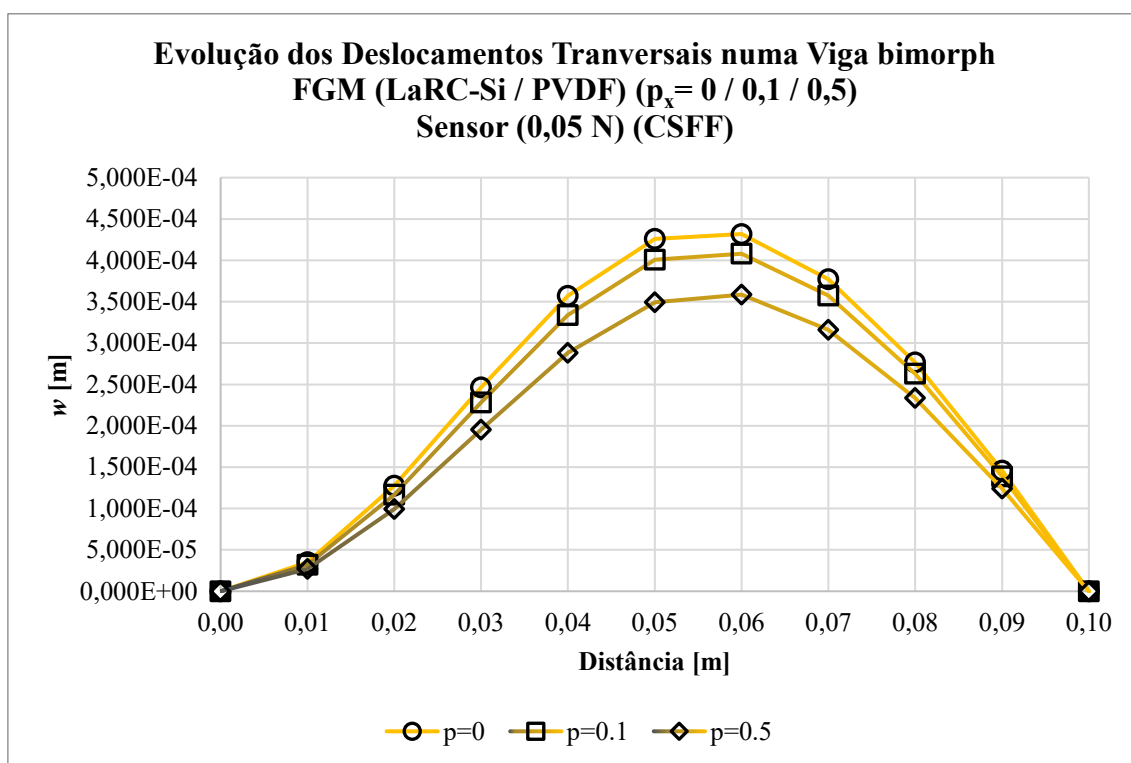


Figura 4.2.47 - Representação gráfica do perfil de deslocamentos transversais para $p < 1$ ao longo do comprimento de uma viga (CSFF) em configuração de sensor e discretização de 10×1 elementos

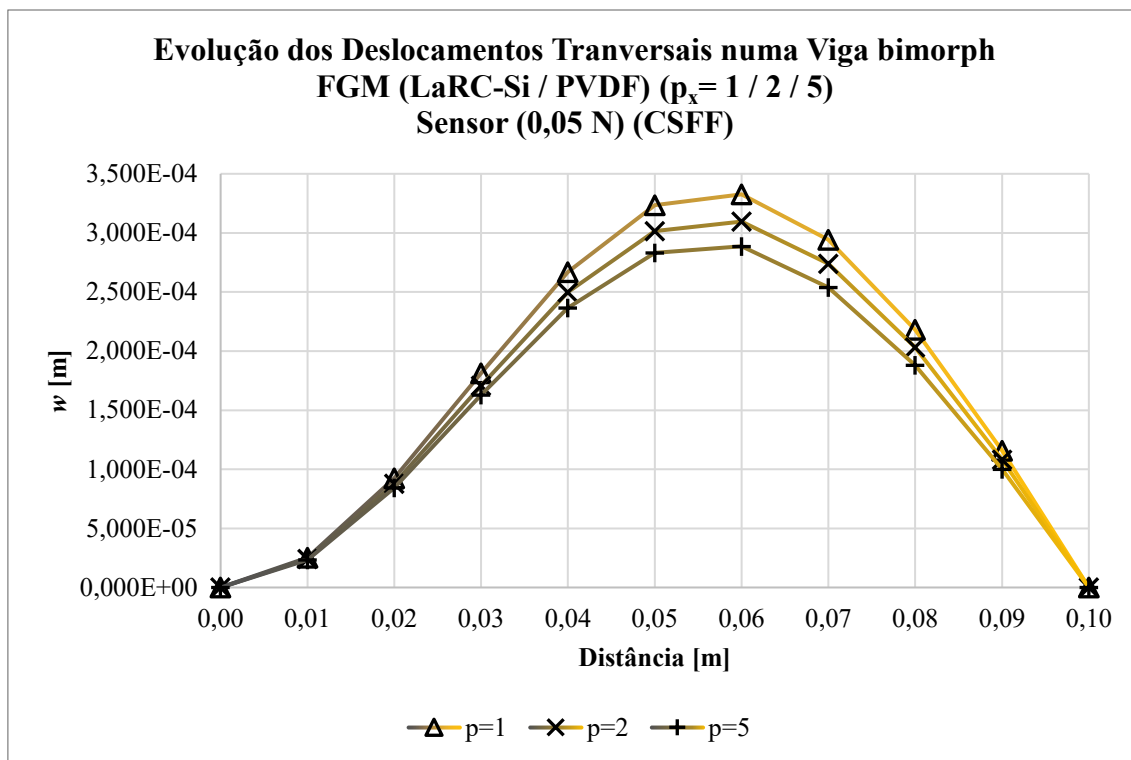


Figura 4.2.48 - Representação gráfica do perfil de deslocamentos transversais para $p \geq 1$ ao longo do comprimento de uma viga (CSFF) em configuração de sensor e discretização de 10×1 elementos

De modo semelhante aos deslocamentos, também os potenciais elétricos registam um comportamento híbrido dos modelos anteriores, fruto das CF aplicadas. Os resultados obtidos constam da Tabela B68 e Tabela B69, para a os modelos contínuo e discreto para a distribuição de fases do material. Como é possível verificar nas representações gráficas da Figura 4.2.49, Figura 4.2.50 e Figura B25, para a extremidade em $x = 0$ os potenciais eléctricos são negativos e reduzem o seu valor com o aumento de p_x , indo de encontro ao verificado com o modelo CCFF. Na extremidade oposta ($x = L$), os potenciais eléctricos seguem o comportamento verificado para a viga SSFF, registando, ainda assim, valores inferiores resultantes da menor deformação da estrutura em resultado do encastramento da extremidade oposta.

Os desvios decorrentes do estudo comparativo entre os modelos contínuo e discreto, respeitantes aos deslocamentos transversais são reduzidos ou mesmo negligenciáveis. Já para os potenciais eléctricos os maiores valores observados correm na extremidade com $x = 0$, fruto das diferenças ao nível da distribuição das fases passiva e activa. Também para a extremidade oposta os desvios são mais elevados, não atingindo, contudo, a magnitude da sua oposta, numa situação que é novamente devida à distribuição de fases que no modelo discreto considera menor percentagem volúmica de PVDF, e consequentemente enfraquece o efeito piezoelétrico o que se traduz em menores potenciais eléctricos.

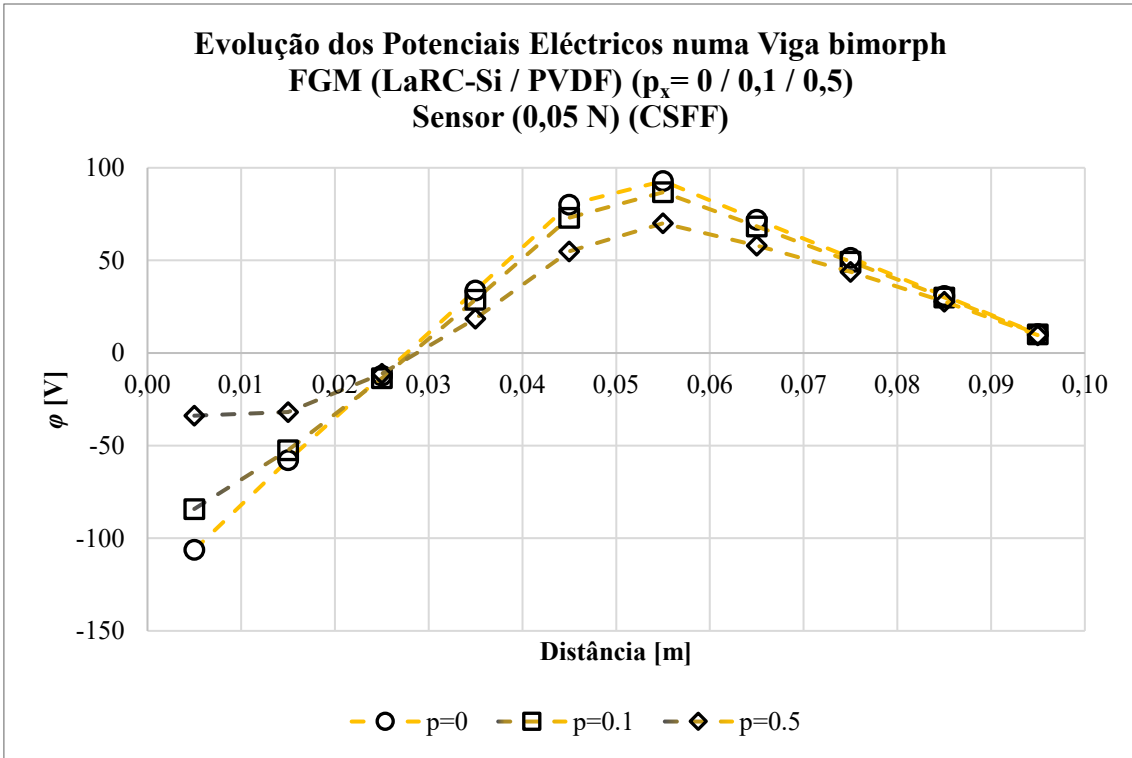


Figura 4.2.49 - Representação gráfica da distribuição de potenciais elétricos para $p < 1$ ao longo do comprimento de uma viga (CSFF) em configuração de sensor e discretização de 10×1 elementos

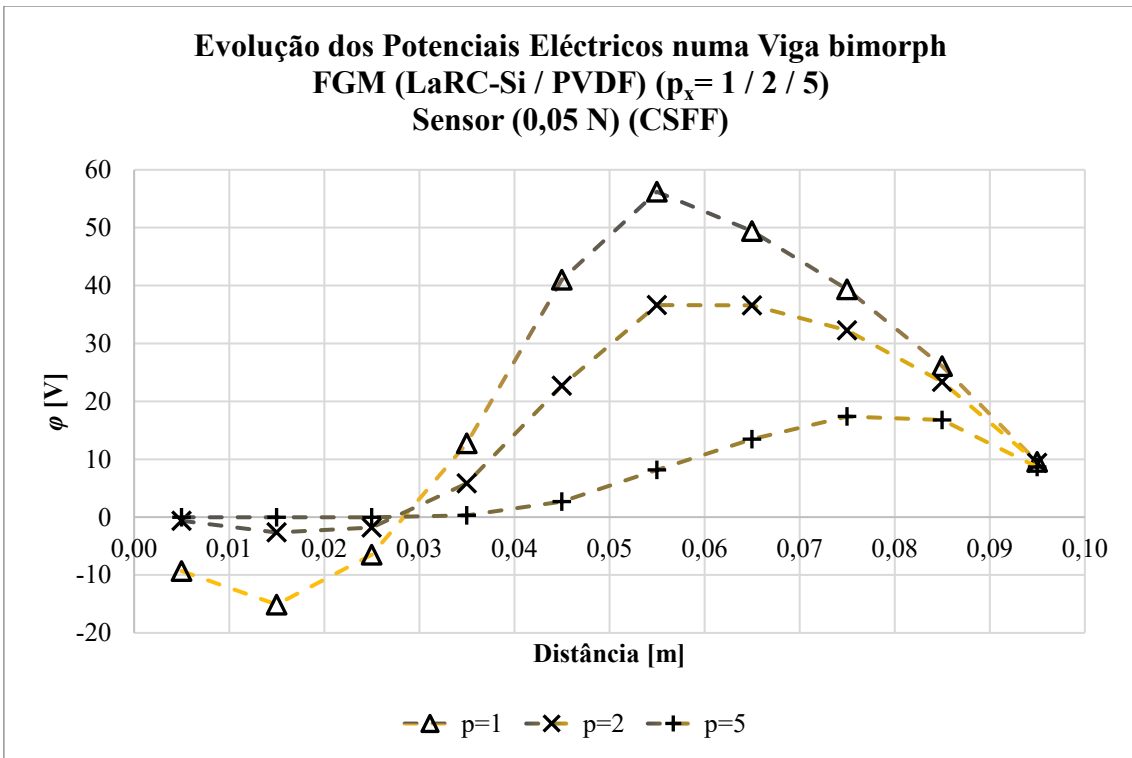


Figura 4.2.50 - Representação gráfica da distribuição de potenciais elétricos para $p \geq 1$ ao longo do comprimento de uma viga (CSFF) em configuração de sensor e discretização de 10×1 elementos

À semelhança do realizado para os modelos em configuração de atuador, também na configuração de sensor faz todo o sentido avaliar os resultados em função dos diferentes materiais. Neste sentido, a Figura B26, Figura B27, Figura B28, Figura B29, Figura B30 e Figura B31, ilustram graficamente a distribuição de potenciais elétricos ao longo do comprimento da viga, para os diferentes valores de p_x em função das CF aplicadas.

Para o caso de $p_x = 0$, apenas as CF têm influência nos potenciais elétricos obtidos, uma vez que se está na presença de um material homogêneo. Neste caso, face aos demais, é onde se denotam as maiores diferenças para as diferentes CF, ao longo de todo o comprimento da viga. Para $p_x = 0,1$, as CF continuam a ser o principal fator nos potenciais elétricos, uma vez que não são facilmente observáveis grandes diferenças para o caso anterior. Ainda assim, para as situações cuja CF são idênticas para ambas as extremidades (CCFF e SSFF), começa a denotar-se ausência de simetria da representação gráfica em relação ao meio vão da viga. Para os restantes valores de p_x observa-se de forma mais acentuada a ausência de simetria, sendo que se regista toda uma convergência de valores de potenciais elétricos para zero, como resultado do aumento da incorporação de LaRC-Si, numa situação na qual as CF aplicadas pouco interferem.

Desta perspetiva de avaliação dos resultados obtidos, bem como de toda a análise já realizada, é possível retirar um conjunto alargado de conclusões que podem contribuir em muito para a compreensão e futuras utilizações destes materiais. Desde logo, e como seria expectável, as CF influenciam ativamente a resposta estática eletromecânica das estruturas. Quando conjugadas com a possibilidade de variar simultaneamente a distribuição de fases de FGM, as possibilidades combinatórias são ainda maiores, gerando um leque bastante alargado de diferentes respostas, que poderão ser aplicadas a um vasto conjunto de situações, numa ótica de “feito à medida”. Foi possível verificar que para determinadas CF e dependendo da configuração atuador/sensor adotada é possível amplificar ou reduzir a amplitude do efeito piezoelétrico, sem para isso ser necessário alterar as propriedades das diferentes fases materiais. Também partindo da alteração das propriedades do material é possível produzir alterações sem introduzir novas CF, mas o aspeto mais relevante do presente estudo, acaba por ser a combinação destas duas variáveis de projeto.

Antes de dar por concluído o presente estudo paramétrico, existe ainda um aspeto a abordar e que foi oportunamente mencionado, tratando-se da contribuição do material para o maior grau do polinómio interpolador associado aos termos de corte. Como referido, quantificar o efeito da simplificação adotada é importante em termos de compreensão do real comportamento da estrutura.

Tabela 4.2.16 - Número de pontos a utilizar na integração reduzida de acordo com o maior grau dos termos de corte para cada expoente material

p_x	p	n
0	2	1
0,1	2	1
0,5	2	1
1	2	1
2	4	2
5	7	3

A Tabela 4.2.16 apresenta o número de pontos utilizados para que se possa ter em consideração a contribuição do material. Deste modo, os resultados obtidos constam da Tabela B70, Tabela B71 e Tabela B72, para os deslocamentos transversais em configuração de atuador e sensor, respetivamente, e ainda, os potenciais elétricos da configuração de sensor. Em simultâneo, são também apresentados os respetivos desvios face aos resultados anteriormente obtidos. Da sua análise, resulta que, para os valores de p_x iguais a 0, 0.1, 0.5 e 1, os resultados obtidos são idênticos, devendo-se tal facto, à não alteração do número de pontos de integração, conforme a Tabela 4.2.16. Para os restantes valores, os desvios observados são significativos, na casa dos 96 pontos percentuais. Nestes casos, os valores de deslocamentos transversais obtidos, tanto para a configuração de atuador como de sensor, são inferiores aos obtidos anteriormente, o que se deve, primeiro a uma maior rigidez “numérica” da estrutura. No caso dos potenciais elétricos, os valores de menor magnitude que se verificam são consequência direta da maior rigidificação da estrutura decorrente do maior número de pontos de integração utilizado e consequente enfraquecimento do efeito piezoelétrico.

Esta análise, permite quantificar a influência que a contribuição do material para os termos de corte transversal pode exercer no cálculo da resposta estática eletromecânica de estruturas, cujas propriedades materiais apresentem gradientes segundo uma ou mais direções no plano.

4.2.2.5. Influência da Razão de Aspeto L/h (Placa)

O presente ponto é dedicado ao estudo da influência da razão de especto no comportamento estático eletromecânico de estruturas tipo placa em configuração de atuador e sensor.

- **Estudo Paramétrico 8**

No âmbito do presente estudo paramétrico, recupera-se um caso alvo de estudo comparativo no âmbito do processo de verificação, em 4.1.2.1 e 4.1.2.2. Tem assim, a particularidade de se tratar de um estudo comparativo e simultaneamente paramétrico, no qual é motivo de estudo uma

placa *bimorph*, simplesmente apoiada (SSFF), de 25 mm por 12,5 mm, constituída por duas camadas de PZT-4, cujas propriedades são provenientes de Wang [102] e se encontram detalhadas nas tabelas Tabela 4.2.17 e

Tabela 4.2.18.

Tabela 4.2.17 - Propriedades materiais elásticas do PZT-4 em [GPa]

	Q_{11}	Q_{12}	Q_{22}	Q_{13}	Q_{23}	Q_{33}	Q_{44}	Q_{55}	Q_{66}
PZT-4	139	77,8	139	74	74	115	25,6	25,6	30,6

Tabela 4.2.18 - Propriedades materiais elétricas e piezoelétricas do PZT-4

	e_{31} [C/m ²]	e_{32} [C/m ²]	e_{33} [C/m ²]	ϵ_{33} [µF/m]
PZT-4	-5,2	-5,2	15,1	11,51

Para efeito de estudo paramétrico considera-se que $L/h = \{5, 10, 50\}$. O comportamento eletromecânico da estrutura é avaliado por meio dos resultados obtidos para o deslocamento máximo transversal e potencial elétrico, quando sujeita à aplicação de uma força por unidade de área de 1000 N/m² e, posteriormente, de uma diferença de potencial de 100 V. Para efeitos de estudo comparativo, o deslocamento máximo transversal e o potencial elétrico são apresentados num formato adimensionalizado, de acordo com as equações (4.1.8) e (4.1.9), respetivamente. De notar que o fator de amplificação, E_0 , assume o valor de 10¹⁰ m/V.

A respeito da configuração de atuador, os resultados obtidos considerando diferentes discretizações constam da Tabela B73 e Tabela B74, para o deslocamento máximo transversal adimensionalizado e potencial elétrico máximo adimensionalizado em circuito fechado, bem como os tempos de computação em [s]. Através destes, é possível verificar a existência de convergência para um determinado valor, sendo que a maior discretização utilizada serve também para propósitos de estudo comparativo. O valor máximo de deslocamento verifica-se no centro geométrico da placa, como seria esperar face à simetria de CF e os potenciais elétricos aplicados. Em termos da influência da razão de aspeto, verifica-se o aumento do deslocamento máximo, com o aumento de L/h , algo espectável dada a menor espessura. Relativamente à configuração de sensor, os resultados obtidos constam da Tabela B75 e Tabela B76, mantendo-se as observações realizadas no âmbito da configuração de atuador. Do ponto de vista dos tempos de computação, é possível constatar que, salvo situações excepcionais, a discretização utilizada é o parâmetro que apresenta maior influência, sendo o efeito da razão L/h nulo ou residual. Uma vez mais, observa-se o aumento do deslocamento máximo para placas com maior valor de L/h , sendo acompanhado pelo potencial elétrico que também aumenta, dada a menor rigidez da placa e conseqüentemente maior deformação.

Os resultados obtidos no âmbito do presente estudo são importantes, na medida em que dizem respeito a um estudo mais aprofundado de estruturas do tipo placa. Deste modo a sua utilização para efeitos comparativos representa uma segurança adicional. Aquando da realização dos estudos de verificação (4.1.2.1 e 4.1.2.2), existiu oportunidade de recorrer a este mesmo estudo. Contudo, foram identificadas algumas discrepâncias que importa avaliar. Deste modo, a Tabela 4.2.19 e Tabela 4.2.20 apresentam os desvios obtidos para este mesmo estudo comparativo.

Tabela 4.2.19 - Deslocamento máximo transversal adimensionalizado e potencial elétrico para diferentes valores de L/h para uma placa SSFF em atuador

L/h	Abordagem	\bar{w}	δ (%)	$\bar{\phi}$	δ (%)
5	<i>presente</i>	25,777	-	0,614	-
	3D FEM [102]	23,454	9,90	0,550	22,80
	2D FEM [102]	23,840	8,13	0,500	11,64
	2D FEM [99]	26,197	1,60	-	-
10	<i>presente</i>	104,300	-	0,583	-
	3D FEM [102]	97,000	7,53	0,547	6,58
	2D FEM [102]	96,300	8,31	0,500	16,60
	2D FEM [99]	115,500	9,70	-	-
50	<i>presente</i>	2639,700	-	0,572	-
	3D FEM [102]	2477,800	6,53	0,546	4,76
	2D FEM [102]	2436,600	8,34	0,500	14,40
	2D FEM [99]	2943,900	10,33	-	-

À primeira vista, são facilmente identificáveis um conjunto alargado de valores de desvios superiores a 1% cuja justificação é – como se disse – importante perceber. Comece-se por desconstruir de forma sucinta o presente modelo, o qual implementa um algoritmo baseado na FSDT com fator de correção de corte de 5/6, modelo camada única equivalente e elementos do tipo Q4. O modelo é discretizado em 20×10 elementos, num total de 200 elementos. Relativamente ao modelo 3D FEM utilizado por Wang [102], este utiliza um *software* comercial de elementos finitos (ANSYS), com uma discretização de até 9600 elementos tipo SOLID5. Neste sentido os desvios observados para a configuração de atuador e sensor, relativos a este modelo, poderão ser justificados pelas diferenças intrínsecas a cada um dos modelos. Vale a pena fazer notar, que os desvios observados para a configuração de atuador são significativamente superiores aos da configuração de sensor. Contudo de um modo geral, verifica-se a redução dos mesmos com o aumento de L/h , tanto para deslocamentos como para potenciais elétricos.

Tabela 4.2.20 - Deslocamento máximo transversal adimensionalizado e potencial elétrico para diferentes valores de L/h para uma placa SSFF em sensor

L/h	Abordagem	\bar{w}	δ (%)	$\bar{\phi}$	δ (%)
5	<i>presente</i>	172,19	-	0,150	-
	3D FEM [102]	176,22	2,29	0,154	2,60
	2D FEM [102]	166,02	3,72	0	-
	2D FEM [99]	159,21	8,15	0,197	23,86
10	<i>presente</i>	2467,0	-	0,611	-
	3D FEM [102]	2475,5	0,34	0,607	0,66
	2D FEM [102]	2405,5	2,56	0	-
	2D FEM [99]	2349,4	5,01	0,766	20,23
50	<i>presente</i>	1,4641E+06	-	15,62	-
	3D FEM [102]	1,4844E+06	1,37	15,66	0,26
	2D FEM [102]	1,4498E+06	0,99	0	-
	2D FEM [99]	1,1487E+06	27,46	18,98	17,70

Paralelamente ao modelo 3D FEM, Wang [102] também propõe e utiliza um modelo 2D FEM. Este é significativamente mais próximo por ser um modelo FEM em 2D, com camada única equivalente e utilização da FSĐT. Contudo este modelo apresenta algumas particularidades, desde logo a sua abordagem tipo "layerwise-like" que procura retirar partido de um maior número de subcamadas e avaliar a variação do potencial elétrico na espessura da placa, que tipicamente se considera linear. Do ponto de vista da discretização, é utilizado um total de 200 elementos isoparamétricos com 8 nós cada. A respeito do fator de correção de corte não é mencionado o valor utilizado. Do estudo comparativo observam-se, uma vez mais, desvios superiores para a configuração de atuador, quando comparada com a configuração de sensor. Relativamente à primeira, os desvios obtidos para os deslocamentos máximos transversais adimensionalizados, são da ordem dos 7 pontos percentuais, aumentando com a redução da espessura da placa. Por sua vez os potenciais elétricos resultantes da deformação eletricamente induzida tendem a verificar a redução dos desvios com o aumento de L/h . Relativamente à configuração de sensor, os desvios obtidos para os deslocamentos transversais são significativamente mais baixos, oscilando entre 3,72% e 0,99% para placas com L/h de 5 e 50, respetivamente.

O presente estudo comparativo recorre ainda a valores obtidos por Fernandes e Pouget [99] através de um modelo 2D FEM. Este é implementado através de um *software* comercial de elementos finitos, considerando tensão plana e recorrendo a 800 elementos de 8 nós biquadráticos.

Do ponto de vista do estudo comparativo, os desvios obtidos são dos maiores observados, permitindo marcar ainda mais, a diferença entre os modelos.

Do presente estudo paramétrico é possível reforçar que a espessura de um elemento estrutural, seja ele viga ou placa, tem influência na sua resposta eletromecânica. Verifica-se que para o aumento de L/h , a que corresponde uma redução da espessura da placa, os deslocamentos bem como os potenciais elétricos decorrentes, aumentam. O oposto também se observa, com menores deslocamentos e menores potenciais para placas mais espessas.

4.2.2.6. Influência da Distribuição 3D de Fases em FGM (Placa)

O presente ponto é dedicado à apresentação de estudos e avaliados os seus resultados, tendo em vista a variação simultânea da distribuição de fases materiais em diferentes direções. São alvo de estudo um conjunto de situações de gradientes funcionais 1D, 2D e 3D em placas FGPM.

- **Estudo Paramétrico 9**

O presente estudo tem por objetivo avaliar o comportamento de placas FGPM, quando sujeitas à aplicação de potenciais elétricos e esforços externos. Considera-se para o efeito, uma placa discretizada de acordo com a representação da Figura 4.2.51. Esta placa, simplesmente apoiada, com 1,5 m de aresta e $L/h = 20$, é sujeita à aplicação de um potencial elétrico unitário (+0,5 V/−0,5 V) e de uma pressão no valor de 1 kPa no sentido positivo, conforme as configurações funcionais de atuador e sensor, respetivamente. Do ponto de vista das propriedades materiais, a placa é constituída por um FGM bifásico alumínio/PVDF, cujas propriedades materiais relevantes – elásticas e elétricas – das diferentes fases são novamente apresentadas na Tabela 4.2.21.

Tabela 4.2.21 - Propriedades elásticas e elétricas relevantes das diferentes fases do FGM

	E [GPa]	ν	e_{31} [C/m ²]	e_{32} [C/m ²]	ϵ_{33} [μF/m]
Al	70	0,3	-	-	-
PVDF	2,0	0	0,046	0,046	0,1062

Através da utilização de diferentes gradientes funcionais, primeiro numa única direção e posteriormente em várias em simultâneo pretende-se o estudo da resposta estática da placa. Procurando adotar uma abordagem simples e simultaneamente lógica, que permita ao leitor acompanhar o processo evolutivo do presente estudo, são considerados um conjunto de modelos, com pequenas variações entre si, e que se passam em seguida a apresentar.

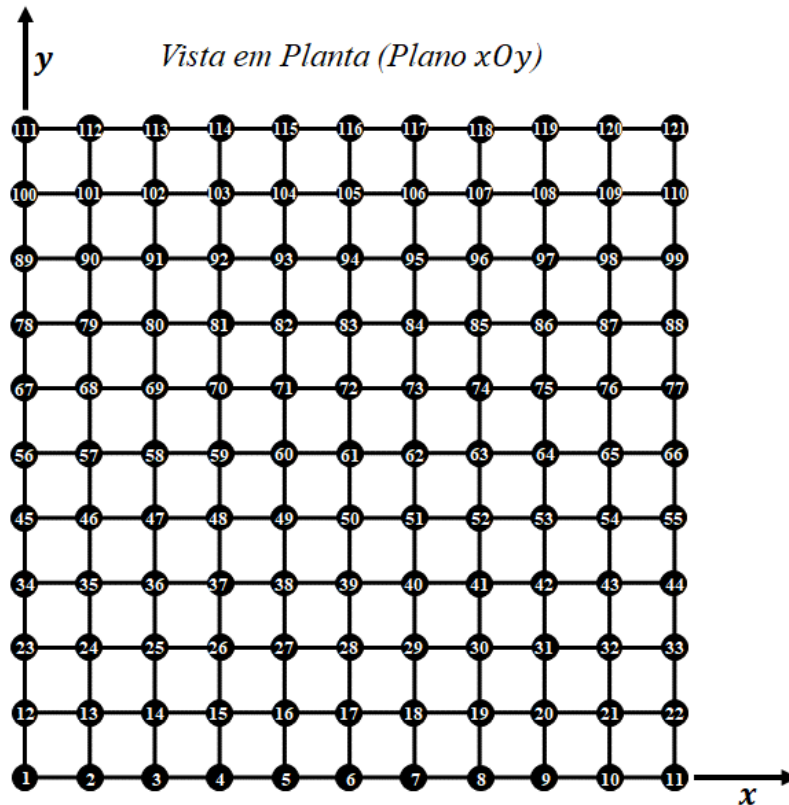


Figura 4.2.51 - Representação esquemática da discretização de uma placa em 10×10 elementos

Considerando o modelo sequencial estabelecido em 4.2.2.3, no âmbito do Estudo Paramétrico 6, como um bom exemplo para ilustrar/apresentar o presente estudo opta-se por considerar primeiro, modelos não FGM, i.e., com materiais isotrópicos e homogêneos. Uma vez que a pesquisa realizada até ao momento, não permitiu encontrar estudos similares, esta abordagem faseada e de certo modo pedagógica, permite estabelecer desde logo um conjunto de pressupostos que se revelam bastante úteis na análise de resultados provenientes de modelos mais complexos.

Assim, considera-se primeiro um modelo de uma placa de alumínio, segundo a representação esquemática da Figura B32. Com este modelo pretende-se avaliar o deslocamento máximo bem como a sua localização. Complementarmente, consideram-se um segundo e terceiro modelo de uma placa em PVDF em configuração de sensor e atuador, respetivamente, de acordo com as representações esquemáticas da Figura B33 e Figura B34. Os resultados obtidos para os três modelos são apresentados na Tabela 4.2.22, constando também nesta, valores obtidos por meio de solução analítica e respetivo estudo comparativo. A respeito deste verifica-se a existência de desvios que oscilam entre 1,40% e 1,84%, estando os mesmos associados à fraca convergência do modelo em consequência da malha utilizada. É importante referir que para estes modelos poderia ter sido utilizada uma discretização distinta, com um maior número de elementos, mas que em função da natureza do presente estudo poderia complicar significativamente a carga computacional do mesmo e, conseqüentemente, um aumento significativo dos tempos de

computação. Outro aspecto bastante importante dos resultados relativos a estes três modelos é a localização – nó ou elemento – na qual se verificam os valores máximos. Mais do que o seu valor absoluto, a sua localização revelar-se-á fulcral para uma melhor compreensão de modelos com maior complexidade. Em termos concretos, a totalidade dos deslocamentos máximos obtidos verifica-se no nó 61, um comportamento expectável, face à natureza homogénea e isotrópica dos materiais e simetria existente ao nível das CF e esforços aplicados, sejam eles mecânicos ou elétricos. Para o valor de potencial elétrico máximo, este ocorre nos elementos 45, 46, 55 e 56, que partilham o nó 61, o ponto em que se verifica o deslocamento máximo. Este comportamento é em linha com o verificado também em estudos anteriores para vigas.

Tabela 4.2.22 - Deslocamentos transversais máximos, potenciais elétricos máximos e suas respetivas localizações

Material	$w [m]$	
	<i>Solução Numérica (Localização Nó)</i>	<i>Solução Analítica (δ (%))</i>
Al	7,680E-06 (61)	7,79E-06 (1,40)
PVDF (A)	-2,054E-09 (61)	-
PVDF (S)	2,940E-04 (61)	2,996E-04 (1,84)
Material	$\phi [V]$	
	<i>Solução Numérica (Localização Elemento)</i>	<i>Solução Analítica (δ (%))</i>
PVDF (S)	1401,330 (45, 46, 55, 56)	-

Procurando estabelecer uma correspondência visual das localizações, para melhor compreensão por parte do leitor, a Figura B35 e Figura B36, ilustram esquematicamente a localização do deslocamento máximo (por meio de um círculo), bem como dos potenciais elétricos máximos (por meio de um raio elétrico).

Uma vez estabelecido um conjunto de modelos, a utilizar para efeitos de referência e que doravante se designam por modelos de referência, é agora possível avançar com o estudo de placas FGPM. Para o efeito, consideram-se agora, três modelos distintos, cujo gradiente funcional se verifica segundo x , y e z , segundo a lei de potência. Os expoentes utilizados são uma vez mais, 0, 0.1, 0.5, 1, 2 e 5. O primeiro modelo considera um gradiente 1D, segundo a direção x , constando as representações esquemáticas para a configuração de sensor e atuador na Figura B37 e Figura B38.

Tabela 4.2.23 - Deslocamentos transversais e potenciais elétricos máximos e suas respectivas localizações para diferentes valores de p numa placa FGM SSSS com gradiente material 1D segundo x em configuração de sensor considerando gradiente contínuo e discreto e respetivo desvio

Material	p	w [m]		δ (%)
		Contínuo (Localização Nó)	Discreto (Localização Nó)	
FGM 1D Al / PVDF (S)	0	2,940E-04 (61)	2,940E-04 (61)	0,00
	0,1	8,932E-05 ^(NN) (62)	8,961E-05 (62)	0,33
	0,5	3,149E-05 ^(NN) (62)	3,140E-05 (62)	0,29
	1	2,011E-05 ^(NN) (62)	2,002E-05 (62)	0,48
	2	1,348E-05 ^(NN) (62)	1,340E-05 (62)	0,58
	5	9,266E-06 ^(NN) (61)	9,205E-06 (61)	0,66
Material	p	ϕ [V]		δ (%)
		Contínuo (Localização Elemento)	Discreto (Localização Elemento)	
FGM 1D Al / PVDF (S)	0	1401,330 (45, 46, 55, 56)	1401,330 (45, 46, 55, 56)	0,00
	0,1	511,408 ^(NN) (48, 58)	511,321 (48, 58)	0,02
	0,5	201,100 ^(NN) (49, 59)	200,043 (49, 59)	0,53
	1	126,981 ^(NN) (49, 59)	126,143 (49, 59)	0,66
	2	78,495 ^(NN) (49, 59)	77,900 (49, 59)	0,76
	5	43,257 ^(NN) (48, 58)	43,095 (48, 58)	0,37

Os resultados obtidos são apresentados na Tabela 4.2.23 e Tabela 4.2.24, conforme a configuração sensor/atuador utilizada. A respeito dos mesmos é possível verificar que na configuração de sensor, para $p_x = 0$, tanto o deslocamento transversal como o potencial elétrico máximo, apresentam igual valor ao modelo de referência PVDF (S), bem como localização. Isto deve-se ao facto de a este valor de p_x corresponder uma ausência de gradiente material, i.e., uma placa de material isotrópico e homogéneo, neste caso PVDF. Para os demais valores de p_x verifica-se uma redução gradual dos deslocamentos máximos verificados e conseqüente redução dos potenciais elétricos obtidos por efeito piezoelétrico, que tende a enfraquecer em função da maior presença de alumínio, que não exhibe propriedades piezoelétricas e apresenta rigidez superior ao do PVDF. Observa-se também uma translação do ponto de maior deslocamento

transversal na direção do gradiente no sentido da maior presença de PVDF, como ilustra a representação da Figura B39, na qual os deslocamentos máximos para cada valor de p_x são assinalados por meio de uma circunferência de diferentes cores (vermelho e verde). Como consequência, também nos potenciais elétricos se verifica um fenômeno de translação, particularmente evidente e cuja representação também se encontra na Figura B39, por meio de símbolos de raios elétricos com diferentes contornos (vermelho, verde e azul). É de notar que devido ao gradiente material, os potenciais elétricos máximos tendem a ocorrer, não em elementos que partilhem o nó em que se verifica o maior deslocamento transversal, mas sim nas suas proximidades, sempre na direção da maior presença de PVDF, i.e., ocorrem somente à direita do nó em que se regista o maior deslocamento e não de forma simétrica como no modelo PVDF (S). Contudo, para o caso de $p_x = 5$, não se verifica a tendência de translação do maior deslocamento em consequência do gradiente material aplicado, afetando consequentemente a localização do maior potencial elétrico que apesar de não regressar aos elementos 45, 46, 55 e 56, regride para os elementos 48 e 58. Tendo por base os estudos anteriores e consequentemente aquele que se seria o comportamento lógico por parte da estrutura, esta situação merece uma reflexão mais aprofundada acerca das suas causas. A análise dos resultados respeitantes à configuração de atuador representa uma boa oportunidade para aferir potenciais origens da problemática identificada.

Tabela 4.2.24 - Deslocamentos transversais máximos e suas respectivas localizações para diferentes valores de p numa placa FGM SSSS com gradiente material 1D segundo x em configuração de atuador considerando gradiente contínuo e discreto e respetivo desvio

Material	p	w [m]		δ (%)
		<i>Contínuo</i> (Localização Nó)	<i>Discreto</i> (Localização Nó)	
FGM 1D Al / PVDF (A)	0	-2,054E-09 (61)	-2,054E-09 (61)	0,00
	0,1	-6,265E-10 ^(NN) (63)	-6,275E-10 (63)	0,15
	0,5	-2,109E-10 ^(NN) (63)	-2,096E-10 (63)	0,61
	1	-1,152E-10 ^(NN) (63)	-1,142E-10 (63)	0,93
	2	-5,816E-11 ^(NN) (64)	-5,734E-11 (64)	1,42
	5	-1,885E-11 ^(NN) (64)	-1,820E-11 (64)	3,43

Os resultados da Tabela 4.2.24, permitem verificar que os deslocamentos máximos diminuem com o aumento de p_x , em consequência da maior presença de alumínio e do enfraquecimento do efeito piezoelétrico que lhe está associado, tendendo a sua localização a manifestar-se na direção

do gradiente no sentido da aresta da placa que apresenta maior percentagem volúmica de PVDF, como ilustra a representação esquemática da Figura B40.

Relativamente aos valores de desvios resultantes da comparação dos resultados obtidos por modelo de gradiente funcional contínuo e gradiente funcional discreto, de um modo geral, os mesmos são reduzidos, aumentando com o aumento de p_x , em resultado da maior dificuldade do modelo discreto de aproximar corretamente a distribuição de propriedades, como identificado em 4.2.2.4. Contudo os desvios obtidos para $p_x = 5$, para o potencial eléctrico em configuração de sensor, não demonstram esta tendência, o que poderá, ou não, estar relacionado com o facto do ponto de maior deslocamento transversal não ocorrer no nó em que seria espectável.

Procurando dar resposta a esta questão e considerando o conjunto dos resultados obtidos, constata-se que apenas ocorre para a configuração de sensor, possibilitando desde logo, uma redução significativa de causas. Assim, poderá estar associado ao tipo de esforço aplicado à estrutura, em conjugação com as CF e a distribuição de fases. Importa primeiro perceber se é afetado para valores de p_x superiores, como seja 10. A Tabela 4.2.25 apresenta os resultados considerando um gradiente material com $p_x = 10$. Uma vez mais, verifica-se a manutenção do deslocamento máximo no nó 61, e a translação dos potenciais máximos para os elementos 46 e 56 que partilham o nó 61 e que se encontram à direita do mesmo.

Tabela 4.2.25 - Deslocamentos transversais máximos e potenciais eléctricos máximos e suas respectivas localizações para $p_x=10$ numa placa FGM SSSS com gradiente material 1D segundo x em configuração de sensor considerando gradiente contínuo e discreto e respetivo desvio

Material	p	w [m]		
		Contínuo (Localização Nó)	Discreto (Localização Nó)	δ (%)
FGM 1D Al / PVDF (S)	10	8,302E-06 (61)	8,239E-06 (61)	0,76
Material	p	ϕ [V]		
		Contínuo (Localização Elemento)	Discreto (Localização Elemento)	δ (%)
FGM 1D Al / PVDF (S)	10	38,439 (45, 46, 55, 56)	38,302 (46, 56)	0,36

Tendo por base este pequeno estudo adicional realizado, é possível verificar que a situação permanece idêntica. Assim, é possível concluir que a causa provável resulta da combinação da distribuição de fases, que para os valores de p_x garante um material cujas propriedades efetivas são cada vez mais próximas do alumínio, da pressão aplicada que é uniforme em toda a superfície,

e das CF que são simétricas entre si. De entre as razões apontadas a natureza uniforme da pressão aplicada é a que maior implicação terá ao nível do comportamento que se observa.

Tabela 4.2.26 - Deslocamentos transversais e potenciais elétricos máximos e suas respectivas localizações para diferentes valores de p numa placa FGM SSSS com gradiente material 1D segundo y e em configuração de sensor considerando gradiente contínuo e discreto e respetivo desvio

Material	p	w [m]		δ (%)
		Contínuo (Localização Nó)	Discreto (Localização Nó)	
FGM 1D Al / PVDF (S)	0	2,940E-04 (61)	2,940E-04 (61)	0,00
	0,1	8,932E-05 ^(NN) (72)	8,961E-05 (72)	0,33
	0,5	3,149E-05 ^(NN) (72)	3,140E-05 (72)	0,29
	1	2,011E-05 ^(NN) (72)	2,002E-05 (72)	0,48
	2	1,348E-05 ^(NN) (72)	1,340E-05 (72)	0,58
	5	9,266E-06 ^(NN) (61)	9,205E-06 (61)	0,66
Material	p	ϕ [V]		δ (%)
		Contínuo (Localização Elemento)	Discreto (Localização Elemento)	
FGM 1D Al / PVDF (S)	0	1401,330 (45, 46, 55, 56)	1401,330 (45, 46, 55, 56)	0,00
	0,1	511,408 ^(NN) (75, 76)	511,321 (75, 76)	0,02
	0,5	201,100 ^(NN) (85, 86)	200,043 (85, 86)	0,53
	1	126,981 ^(NN) (85, 86)	126,143 (85, 86)	0,66
	2	78,495 ^(NN) (85, 86)	77,900 (85, 86)	0,76
	5	43,257 ^(NN) (75, 76)	43,095 (75, 76)	0,37

O modelo seguinte considera a existência de um gradiente funcional 1D segundo a direção y , de acordo com as representações esquemáticas da Figura B41 e Figura B42, para as configurações de sensor e atuador. Tendo por base o Estudo Paramétrico 6, em 4.2.2.3, é expectável que mantendo as CF e os estímulos aplicados – pressão uniforme em sensor e potencial elétrico em atuador – se verifique um comportamento semelhante/idêntico ao modelo anterior, mas adaptado à direção y . A Tabela 4.2.26 apresenta os resultados obtidos para o deslocamento transversal e potencial elétrico máximo resultantes da aplicação da pressão uniforme. Do ponto de vista do seu

comportamento genérico, verifica-se uma redução dos valores de deslocamento máximo, bem como dos potenciais elétricos para o aumento da fração volúmica de alumínio, em linha com o verificado para o modelo anterior. Em termos das tendências de deslocamento identificadas, mantêm-se, alterando apenas a direção em que se verificam de modo a acompanhar o gradiente material na sua nova direção, podendo este comportamento ser observado com maior detalhe na representação esquemática da Figura B43, na qual os deslocamentos máximos são assinalados por meio de uma circunferência com centro no respetivo nó, e os potenciais elétricos se identificam por meio de um símbolo de raio elétrico, tudo isto sobre a representação esquemática do gradiente material existente. Os valores obtidos são iguais, relativamente ao modelo anterior, tanto para a abordagem contínua como para a abordagem discreta, mantendo-se assim os valores de desvios anteriormente observados, e que se devem essencialmente à dificuldade do modelo discreto em acompanhar eficazmente o gradiente material.

Tabela 4.2.27 - Deslocamentos transversais máximos e suas respetivas localizações para diferentes valores de p numa placa FGM SSSS com gradiente material 1D segundo y em configuração de atuador considerando gradiente contínuo e discreto e respetivo desvio

Material	p	w [m]		
		<i>Contínuo</i> (Localização Nó)	<i>Discreto</i> (Localização Nó)	δ (%)
FGM 1D Al / PVDF (A)	0	-2,054E-09 (61)	-2,054E-09 (61)	0,00
	0,1	-6,265E-10 ^(NN) (63)	-6,275E-10 (63)	0,15
	0,5	-2,109E-10 ^(NN) (63)	-2,096E-10 (63)	0,61
	1	-1,152E-10 ^(NN) (63)	-1,142E-10 (63)	0,93
	2	-5,816E-11 ^(NN) (64)	-5,734E-11 (64)	1,42
	5	-1,885E-11 ^(NN) (64)	-1,820E-11 (64)	3,43

No que refere aos valores de deslocamentos resultantes da aplicação de um potencial elétrico unitário à estrutura, os mesmos constam da Tabela 4.2.27. De modo idêntico ao verificado para a configuração de sensor, os resultados apresentam valores iguais, diferindo apenas na sua localização, que segue a nova direção – segundo y – do gradiente material. A representação esquemática das novas localizações dos deslocamentos máximos verificados, pode ser consultada na Figura B44, que mantém a simbologia utilizada.

Uma vez considerados os gradientes 1D segundo x e y , adopta-se agora um modelo no qual se considera um gradiente segundo z . Tal como anteriormente, consideram-se duas configurações distintas: uma de sensor e outra de atuador, cujas representações esquemáticas se encontram na

Figura B45 e Figura B46. A respeito da primeira, os resultados obtidos para os deslocamentos máximos em função do valor de p_z , bem como os consequentes potenciais elétricos e respectivas localizações, constam da Tabela 4.2.28.

Tabela 4.2.28 - Deslocamentos transversais e potenciais elétricos máximos e suas respectivas localizações para diferentes valores de p numa placa FGM SSSS com gradiente material 1D segundo z em configuração de sensor considerando gradiente contínuo e discreto e respectivo desvio

Material	p	w [m]		
		Contínuo (Localização Nó)	Discreto (Localização Nó)	δ (%)
FGM 1D Al / PVDF (S)	0	2,940E-04 (61)	2,940E-04 (61)	0,00
	0,1	7,000E-05 ^(NN) (61)	7,141E-05 (61)	2,01
	0,5	2,506E-05 ^(NN) (61)	2,518E-05 (61)	0,48
	1	1,773E-05 ^(NN) (61)	1,764E-05 (61)	0,48
	2	1,391E-05 ^(NN) (61)	1,378E-05 (61)	0,94
	5	9,266E-06 ^(NN) (61)	1,094E-05 (61)	1,30
Material	p	ϕ [V]		
		Contínuo (Localização Elemento)	Discreto (Localização Elemento)	δ (%)
FGM 1D Al / PVDF (S)	0	1401,330 (45, 46, 55, 56)	1401,330 (45, 46, 55, 56)	0,00
	0,1	348,892 ^(NN) (45, 46, 55, 56)	361,623 (45, 46, 55, 56)	3,35
	0,5	119,915 ^(NN) (45, 46, 55, 56)	129,573 (45, 46, 55, 56)	8,05
	1	79,951 ^(NN) (45, 46, 55, 56)	89,389 (45, 46, 55, 56)	11,80
	2	59,035 ^(NN) (45, 46, 55, 56)	68,156 (45, 46, 55, 56)	15,45
	5	46,544 ^(NN) (45, 46, 55, 56)	52,722 (45, 46, 55, 56)	13,27

Da sua análise resultam as habituais conclusões de que para o aumento de p_z e consequente maior presença de alumínio, os deslocamentos tendem a diminuir, e por arrasto os potenciais induzidos por efeito piezoelétrico, que também registam uma redução devido ao menor grau de deformação da estrutura e redução da presença de PVDF. Do ponto de vista da localização, os deslocamentos máximos verificam-se sempre no centro da placa, que na discretização adotada corresponde ao nó número 61. Este fenómeno é consequência da simetria de CF, mas também da

simetria no plano das propriedades materiais, i.e., para um dado valor de z as propriedades materiais efectivas da placa são iguais para qualquer localização (x, y) . Como tal, também os potenciais elétricos máximos se concentram junto do centro da placa, nomeadamente nos quatro elementos que partilham o nó 61, sendo estes os elementos, 45, 46 55 e 56. Comparativamente aos estudos anteriores, cujos gradientes 1D se efetuam segundo x e y , respectivamente, verifica-se que os resultados obtidos são inferiores até $p_z = 1$, inclusive, tratando-se de uma consequência direta da distribuição de fases. Esta questão, permite evidenciar as vantagens do FGM, em termos de adaptabilidade e personalização, ao permitir, para distribuições de fase em termos de percentagem de fração volúmica idênticas, obter diferentes tipos de rigidez.

Tabela 4.2.29 - Deslocamentos transversais máximos e suas respetivas localizações para diferentes valores de p numa placa FGM SSSS com gradiente material 1D segundo z em configuração de atuador considerando gradiente contínuo e discreto e respetivo desvio

Material	p	w [m]		δ (%)
		<i>Contínuo</i> (Localização Nó)	<i>Discreto</i> (Localização Nó)	
FGM 1D Al / PVDF (A)	0	-2,054E-09 (61)	-2,054E-09 (61)	0,00
	0,1	-3,792E-10 ^(NN) (61)	-3,412E-10 (61)	10,00
	0,5	-9,385E-11 ^(NN) (61)	-4,497E-11 (61)	52,08
	1	-5,367E-11 ^(NN) (61)	-1,072E-11 (61)	80,03
	2	-3,346E-11 ^(NN) (61)	-1,107E-12 (61)	96,69
	5	-1,804E-11 ^(NN) (61)	-2,836E-15 (61)	99,98

Para a configuração de atuador, os resultados obtidos constam da Tabela 4.2.29. A respeito dos mesmos, é possível constatar – uma vez mais – a redução do deslocamento máximo transversal para o aumento de p_z . Relativamente aos modelos anteriores, observa-se que os valores obtidos para o presente modelo são inferiores em magnitude o que está diretamente relacionado com o gradiente utilizado, mas também o método de “medição” dos potenciais elétricos, que – recorde-se – é feito através da diferença entre os valores registados na superfície superior do *patch* superior e os valores registados na superfície inferior do *patch* inferior. Do ponto de vista do estudo comparativo entre os modelos de gradiente contínuo e discreto os desvios calculados são superiores ao verificado para os modelos anteriores, devendo-se às dificuldades que o modelo discreto tem em aproximar o gradiente contínuo. É importante referir que o modelo discreto considera a existência de 5 subcamadas, por cada camada representada na Figura B45 e Figura B46. Do ponto de vista da sua evolução, e no que à configuração de sensor diz respeito,

os maiores valores de desvio verificam-se para valores de p_z que originam gradientes mais acentuados e que impliquem maior variação de propriedades num mesmo espaço, como sejam 0.1 e 5. Para os potenciais elétricos, os desvios calculados exibem uma tendência crescente com o aumento de p_z , com exceção de 5, que regista um ligeiro decréscimo. Para a configuração de atuador, os desvios calculados são bastante elevados, registando um aumento que acompanha a subida de p_z . Valores tão elevados, indicam vários motivos que podem contribuir para esta situação. Desde logo, as diferenças existentes ao nível da distribuição de fases, exercem a sua influência, mas é também importante referir que a contribuição do material para o maior grau dos termos de corte é negligenciada no modelo contínuo.

Analisado um conjunto de modelos, a partir do qual é possível retirar um conjunto alargado de conclusões relativamente ao efeito da aplicação de gradientes funcionais 1D segundo diferentes direções, em placas FGM Al/PVDF pode-se proceder à utilização de modelos FGM multidirecionais. Para o efeito considera-se uma placa FGM com gradiente 2D segundo x e y , cujas habituais representações esquemáticas para as configurações de sensor e actuador, se encontram na Figura B47 e Figura B48. Em termos de gradiente material e por uma questão de simplificação, considera-se que o mesmo é igual nas duas direções, i.e., os valores de p_x e p_y da lei de potência são iguais.

Os resultados obtidos para a configuração de sensor são apresentados na Tabela 4.2.30. Em termos globais, e no que se refere ao deslocamento máximo transversal, observa-se a sua redução com o aumento de p_x e p_y , sendo que comparativamente aos modelos com gradiente 1D, o seu valor é inferior. A localização do ponto de deslocamento máximo sofre, de modo semelhante ao verificado em modelos e estudos anteriores, uma translação, que devido ao gradiente 2D aplicado, se revela um misto entre os modelos 1D segundo x e segundo y , seguindo neste caso uma trajetória diagonal, como é possível verificar na Figura B49. Nesta mesma figura, é também possível observar a trajetória seguida pelos potenciais elétricos máximos em função dos vários valores de p_x e p_y , e que é essencialmente a mesma dos deslocamentos máximos. O motivo pelo qual assim o é, decorre do gradiente material 2D considerado e das propriedades materiais efetivas, principalmente no que à piezoelectricidade diz respeito. Assim, os potenciais elétricos deslocam-se da localização inicial em torno do nó 61 (elementos 45, 46, 55 e 56) para $p = 0$, para próximo do nó 73 (elemento 67) em que se verifica o deslocamento máximo transversal para valores de p_x e p_y de 0.1 e 0.5. Para $p = 1$, observa-se que o elemento no qual se verifica o maior potencial elétrico (elemento 67) não incorpora o nó de maior deslocamento (nó 61), numa situação devida à conjugação do gradiente 2D, das CF aplicadas e da pressão p_z . Já para os restantes valores de expoentes considerados o elemento no qual se verifica o maior potencial elétrico (elemento 56) é constituído pelo nó que regista o maior deslocamento (nó 61). É, no entanto, de

fazer notar que, apesar do retorno à proximidade do nó 61, apenas um único elemento, exibe o valor máximo de potencial, tratando-se de uma consequência direta do gradiente 2D aplicado. Esta questão, também se observa para os demais valores de p_x e p_y , com exceção de 0, o que apenas reforça a tese de que é devido ao gradiente material, mais concretamente a evolução das propriedades materiais.

Tabela 4.2.30 - Deslocamentos transversais e potenciais elétricos máximos e suas respectivas localizações para diferentes valores de p numa placa FGM SSSS com gradiente material 2D segundo x e y em configuração de sensor considerando gradiente contínuo e discreto e respetivo desvio

Material	p	w [m]		
		Contínuo (Localização Nó)	Discreto (Localização Nó)	δ (%)
FGM 2D Al / PVDF (S)	0	2,940E-04 (61)	2,940E-04 (61)	0,00
	0,1	4,939E-05 ^(NN) (73)	4,965E-05 (72)	0,52
	0,5	1,616E-05 ^(NN) (73)	1,613E-05 (72)	0,18
	1	1,105E-05 ^(NN) (61)	1,102E-05 (72)	0,29
	2	8,769E-06 ^(NN) (61)	8,740E-06 (72)	0,33
	5	7,894E-06 ^(NN) (61)	7,866E-06 (61)	0,35
Material	p	ϕ [V]		
		Contínuo (Localização Elemento)	Discreto (Localização Elemento)	δ (%)
FGM 2D Al / PVDF (S)	0	1401,330 (45, 46, 55, 56)	1401,330 (45, 46, 55, 56)	0,00
	0,1	283,519 ^(NN) (67)	284,048 (67)	0,19
	0,5	90,011 ^(NN) (67)	89,854 (67)	0,17
	1	58,027 ^(NN) (67)	57,921 (67)	0,18
	2	42,095 ^(NN) (56)	42,007 (56)	0,21
	5	37,246 ^(NN) (56)	37,256 (56)	0,03

Quanto à configuração de atuador, os resultados obtidos constam da Tabela 4.2.31, sendo que, também se observa a expectável tendência decrescente do deslocamento máximo, com o

aumento de alumínio da estrutura e consequente maior rigidez da mesma e enfraquecimento do efeito piezoelétrico. Os valores obtidos considerando um gradiente 2D são inferiores aos modelos anteriores com gradiente 1D, estando esta questão relacionada com a distribuição de propriedades no plano da estrutura. De modo semelhante a estes modelos de referência, a resposta da estrutura em termos de localização do seu deslocamento máximo transversal também exibe uma trajetória coincidente com a direção do gradiente, que por se tratar de um gradiente 2D, resulta da combinação dos modelos segundo x e segundo y , como se de uma soma de vetores se tratasse. Este comportamento é particularmente evidente na representação esquemática da Figura B50.

Tabela 4.2.31 - Deslocamentos transversais máximos e suas respectivas localizações para diferentes valores de p numa placa FGM SSSS com gradiente material 2D segundo x e y em configuração de atuador considerando gradiente contínuo e discreto e respetivo desvio

Material	p	w [m]		δ (%)
		Contínuo (Localização Nó)	Discreto (Localização Nó)	
FGM 2D Al / PVDF (A)	0	-2,054E-09 (61)	-2,054E-09 (61)	0,00
	0,1	-3,219E-10 ^(NN) (73)	-3,235E-10 (73)	0,51
	0,5	-7,330E-11 ^(NN) (85)	-7,287E-11 (85)	0,58
	1	-3,192E-11 ^(NN) (85)	-3,169E-11 (85)	0,72
	2	-1,195E-11 ^(NN) (97)	-1,181E-11 (97)	1,20
	5	-2,246E-12 ^(NN) (97)	-2,199E-12 (97)	2,09

Do ponto de vista do estudo comparativo entre as abordagens contínua e discreta para o gradiente material, os desvios obtidos são reduzidos, sendo, regra geral, inferiores aos modelos com gradiente 1D. É, no entanto, de notar que para a configuração de sensor e p_x e p_y iguais a 0.1, os desvios observados não respeitam o anteriormente verificado, estando esta situação relacionada com a maior dificuldade do modelo discreto em aproximar a curva estabelecida pelo modelo contínuo.

Tabela 4.2.32 - Deslocamentos transversais e potenciais elétricos máximos e suas respectivas localizações para diferentes valores de p numa placa FGM SSSS com gradiente material 3D segundo x , y e z em configuração de sensor considerando gradiente contínuo e discreto e respetivo desvio

Material	p	w [m]		
		Contínuo (Localização Nó)	Discreto (Localização Nó)	δ (%)
FGM 3D Al / PVDF (S)	0	2,940E-04 (61)	2,940E-04 (61)	0,00
	0,1	3,147E-05 ^(NN) (61)	3,195E-05 (61)	1,55
	0,5	1,150E-05 ^(NN) (61)	1,152E-05 (61)	0,14
	1	9,040E-06 ^(NN) (61)	9,017E-06 (61)	0,26
	2	8,067E-06 ^(NN) (61)	8,042E-06 (61)	0,31
	5	7,749E-06 ^(NN) (61)	7,727E-06 (61)	0,29
Material	p	ϕ [V]		
		Contínuo (Localização Elemento)	Discreto (Localização Elemento)	δ (%)
FGM 3D Al / PVDF (S)	0	1401,330 (45, 46, 55, 56)	1401,330 (45, 46, 55, 56)	0,00
	0,1	161,673 ^(NN) (56)	166,635 (56)	3,07
	0,5	53,948 ^(NN) (56)	58,076 (56)	7,65
	1	39,399 ^(NN) (56)	44,174 (56)	12,12
	2	33,058 ^(NN) (56)	38,455 (56)	16,32
	5	31,975 ^(NN) (56)	36,660 (56)	14,65

O último modelo a considerar para o presente estudo, considera a aplicação de um gradiente 3D, segundo x , y e z , conforme as representações esquemáticas para as configurações de sensor e actuador da Figura B51 e Figura B52. Tirando partido das tendências verificadas nos modelos anteriores, é expectável a existência de semelhanças. Os resultados da Tabela 4.2.32, respeitantes à configuração de sensor, demonstram precisamente isso, ao apresentar um comportamento semelhante ao do modelo 1D segundo z , em termos de localização do deslocamento máximo, e valores mais próximos dos obtidos para o modelo 2D segundo x e y . A propósito da localização, o tipo de gradiente considerado em conjugação com as CF aplicadas, bem como a natureza uniforme da pressão aplicada, originam um mapa de deslocamentos que apesar de não ser simétrico devido ao gradiente material 3D, regista o seu valor máximo do centro da placa (nó 61).

Existindo a concentração dos deslocamentos máximos neste mesmo ponto, também o potencial máximo se verifica na sua proximidade, no elemento 56, do qual o nó 61 também faz parte. Face à situação cujos valores de p_x , p_y e p_z originam um material isotrópico e homogéneo activo, na qual o potencial máximo ocorre simultaneamente nos elementos 45, 46, 55 e 56 e que partilham o nó 61, para os restantes valores de p e devido ao gradiente apenas o elemento 56, exibe o valor de potencial máximo, como ilustrado na Figura B53. Em termos de valores, e como referido, os mesmos são próximos aos do modelo 2D, mas ainda assim inferiores, demonstrando uma vez mais, que dependendo do gradiente funcional é possível obter materiais cuja resposta pode ser semelhante, ou totalmente diferente, servindo os casos em que a mesma é semelhante, para, por exemplo, otimizar a quantidade de uma dada fase, com maior custo.

Para a configuração de atuador, os resultados obtidos são apresentados na Tabela 4.2.33, sendo de notar – uma vez mais – as similaridades existentes com os modelos anteriores. Os valores obtidos são inferiores aos modelos 1D e 2D, mas relativamente próximos deste último. Em termos da localização, exibem a tendência verificada para o modelo 2D, existindo apenas ligeiras alterações para dos diferentes valores de p considerados, como é possível observar na Figura B54.

Tabela 4.2.33 - Deslocamentos transversais máximos e suas respectivas localizações para diferentes valores de p numa placa FGM SSSS com gradiente material 3D segundo x , y e z em configuração de atuador considerando gradiente contínuo e discreto e respetivo desvio

Material	p	w [m]		
		Contínuo (Localização Nó)	Discreto (Localização Nó)	δ (%)
FGM 3D Al / PVDF (A)	0	-2,054E-09 (61)	-2,054E-09 (61)	0,00
	0,1	-1,690E-10 ^(NN) (73)	-1,504E-10 (73)	11,01
	0,5	-2,781E-11 ^(NN) (73)	-1,318E-11 (85)	52,59
	1	-1,011E-11 ^(NN) (85)	-2,016E-12 (85)	80,06
	2	-2,962E-12 ^(NN) (85)	-9,860E-14 (97)	96,67
	5	-4,088E-13 ^(NN) (97)	-6,502E-17 (97)	99,98

A respeito do estudo comparativo realizado observam-se duas realidades distintas. A primeira está associada à configuração de sensor, aos resultados dos deslocamentos máximos transversais, em que se verificam baixos valores de desvios, em linha com os obtidos para o modelo 2D. A segunda está associada aos potenciais elétricos decorrentes da deformação na configuração de

sensor, bem como os deslocamentos máximos transversais para a configuração de atuador. Para estes casos, o motivo prende-se essencialmente com a discretização considerada na direção z .

Os resultados obtidos por meio da utilização de 120 modelos distintos, respeitantes às diferentes configurações de sensor ou atuador, abordagens contínuas e discretas, e ainda os diferentes valores de p considerados, são deveras importantes para os objetivos de otimização que a presente dissertação pretende alcançar. Tendo por base o verificado em estudos anteriores e o que se prevê que seja o estudo de otimização, num âmbito mais global, é importante ter em consideração todo o espectro de resultados obtidos, mas também o seu custo, por forma a permitir a seleção de um modelo capaz de gerar resultados plausíveis, e simultaneamente exequível na janela de tempo disponível. Deste modo, e como vem sendo hábito, a Tabela B77 apresenta os tempos de computação em [s], medida direta do esforço computacional. A propósito dos modelos com gradiente 1D no plano do elemento, verifica-se a existência de tempos de computação superiores para a abordagem discreta, que se deve essencialmente à integração tipo AA utilizada no modelo discreto, face à NN utilizada para o modelo contínuo. Relativamente ao modelo de gradiente 1D na direção da espessura, a abordagem contínua também se revela mais exigente do ponto de vista computacional, devido à necessidade de utilizar uma discretização com maior número de camadas. A respeito dos modelos de gradiente multidirecional os tempos de computação referentes à abordagem discreta são inferiores aos da abordagem contínua, numa situação expectável, dada a maior complexidade das expressões envolvidas para o cálculo das matrizes de rigidez do modelo contínuo face ao discreto.

Concluído o presente estudo, é possível retirar um conjunto alargado de conclusões. Desde logo, dependendo do gradiente aplicado e da sua direção ou direções, é possível obter as mais variadas respostas eletromecânicas. Relativamente às situações alvo de estudo, o principal a reter é que a utilização de gradientes multidirecionais resulta numa situação composta que pode ser reduzida ou aproximada às componentes 1D de forma isolada, como ilustra a Figura 4.2.52. Deste modo, é possível *a priori* ter uma ideia do comportamento espectável da estrutura, sem a necessidade de resolução de pesados modelos computacionais. Outra questão especialmente relevante, é que nos casos mais complexos, a utilização de uma abordagem discreta permite a obtenção de resultados bastante próximos dos obtidos com recurso a abordagem contínua, com um custo computacional mais reduzido e consequentemente numa fração de tempo inferior.

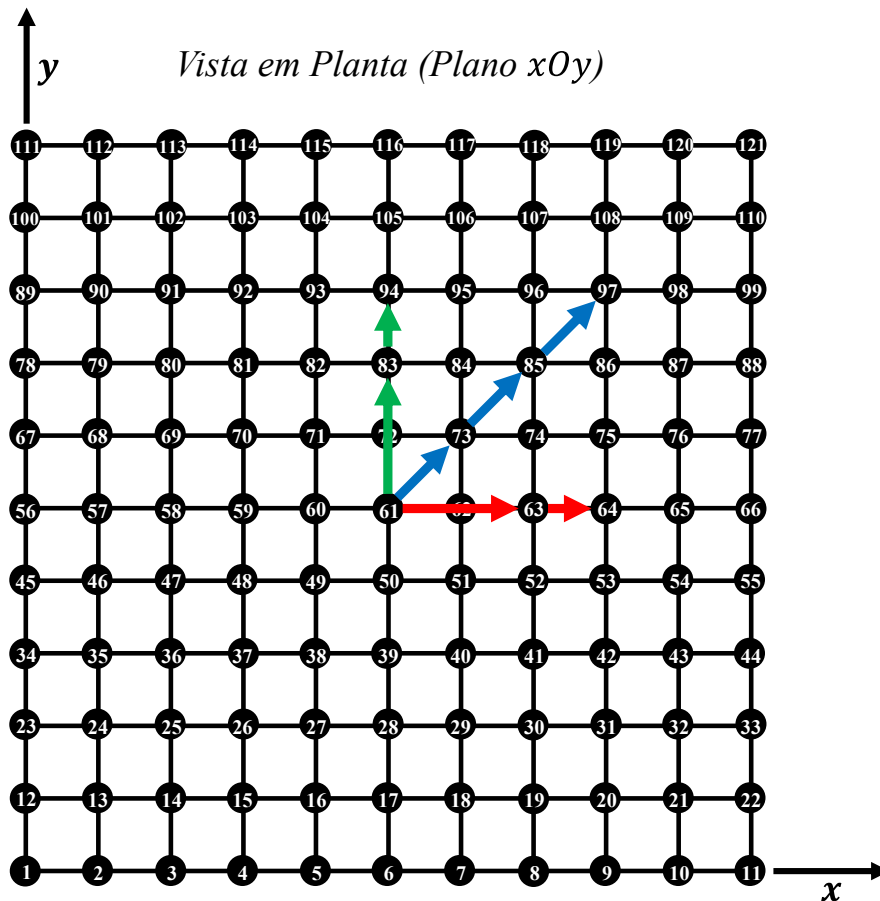


Figura 4.2.52 - Representação esquemática das translações do deslocamento máximo observadas para a configuração de atuador

4.2.3. Otimização

Apesar de representar uma etapa fundamental no desenvolvimento da aplicação numérica, o processo de verificação do algoritmo de otimização, pela sua natureza, apenas permite avaliar o seu padrão de desempenho. Como tal, a realização de um conjunto de estudos paramétricos é sempre necessário para perceber a influência dos parâmetros de uma dada técnica de otimização no(s) problema(s) que se pretende(m) abordar. Neste caso, é importante avaliar a influência do número de indivíduos na população, do número de iterações, mas também de outros coeficientes mais específicos como são os coeficientes β e γ .

4.2.3.1. Influência do número de indivíduos e iterações

Este primeiro tópico é dedicado à avaliação da influência do número de indivíduos da população, n_{pop} e do número de iterações, Max_{It} , enquanto parâmetros principais do JS. A sua importância ao nível da qualidade da solução ótima global a determinar, pela influência direta que exercem na dimensão da população e pelo “tempo” que é permitido que essa população evolua,

leva a que se opte pela sua avaliação em simultâneo, ainda que seja possível a sua análise em separado, numa escala nunca tão abrangente.

- **Estudo Paramétrico 10**

Pretendendo avaliar simultaneamente a influência do número de iterações, Max_{It} , e do número de indivíduos, n_{Pop} , na solução ótima global, o presente estudo recupera a função de *benchmark Goldstein-Price* utilizada no âmbito do Estudo de Verificação 15 (4.1.3.1). Mantendo igual número de variáveis de projeto, bem como o seu domínio contínuo, a abordagem a considerar no presente estudo difere nos parâmetros de configuração do JS: o número de indivíduos e o número de iterações. Para estes parâmetros consideram-se os valores de 30, 50, 100 e 200, uma vez que se pretende que o presente estudo permita estabelecer um par apropriado para utilização no âmbito dos estudos de otimização de estruturas, a apresentar futuramente, dado que os valores utilizados no âmbito da fase de verificação, não são compatíveis com a obtenção de uma solução em tempo útil, dados os recursos computacionais limitados.

Considerando um conjunto de 10 corridas por série, em que em cada série, os parâmetros assumem sucessivamente diferentes valores, de entre os acima referidos, série a série, os resultados obtidos constam da Tabela B78 à Tabela B93. Dos resultados obtidos, verifica-se que tanto para o aumento do número de iterações, como para o aumento do número de indivíduos, o melhor ótimo (MO) obtido é mais próximo da solução ótima, tal como o pior ótimo (PO). Isto traduz-se numa redução do valor médio da série e também no seu desvio padrão, que diminuem com o aumento de n_{Pop} e Max_{It} , salvo situações excepcionais e expectáveis dada a origem pseudoaleatória dos indivíduos. O MO verificado no conjunto das diferentes séries corresponde a uma parametrização de 200 iterações e 200 indivíduos, sendo que também para este conjunto de valores se obtém o valor médio mais próximo do mínimo global da função e o menor desvio-padrão, medida direta da dispersão. Paralelamente, esta é a configuração que maior esforço computacional implica, com um t_{CPU} médio por corrida de 4,514 s. A respeito dos tempos de computação apresentados nas tabelas anteriormente referidas é importante referir que o tempo de computação da primeira corrida de cada série é superior às demais, pelo facto de a inicialização da aplicação ser considerada no cálculo de tempo da primeira corrida, sendo que, com o aumento do número de indivíduos e de iterações, esta diferença é cada vez menor. Procurando resumir a elevada quantidade de dados obtidos, a Tabela 4.2.34 apresenta os melhores e os piores ótimos, bem como o valor médio e o desvio padrão de cada série de corridas. Da sua análise é possível não só constatar as tendências já identificadas, mas também perceber que do ponto de vista da função em estudo, o aumento de Max_{It} tem maior influência na proximidade da solução ótima global à ao mínimo da função, do que o aumento de n_{Pop} . Por este motivo, será preferível utilizar

um número superior de iterações face ao número de indivíduos, ainda que no final se traduza num número total de *Jellyfish* semelhante. Assim, considerar 200 iterações e 50 indivíduos é diferente de 50 iterações e 200 indivíduos. Globalmente, e tendo apenas em consideração os estudos realizados e apresentados ao leitor até ao momento, será seguro afirmar que 200 iterações é o número que permite obter melhores resultados independentemente da população considerada. Do ponto de vista do número concreto de indivíduos, 200 é o valor que melhor resultado permitiu obter, mas que ainda assim, em termos de influência não é tão expressivo quanto o número de iterações. Por este motivo, a realização de um estudo adicional, no qual se considera uma função de *benchmark* diferente, é particularmente interessante.

Tabela 4.2.34 - Melhores e piores ótimos, valores médios e respetivos desvios-padrão por série em função do número de iterações e do número de Jellyfish para a função Goldstein-Price

Nº de Indivíduos		Nº de Iterações			
		30	50	100	200
30	MO	3,771728	3,014821	3,022795	3,006425
	PO	19,712203	14,511807	6,353915	3,433740
	\bar{X}	7,683204	5,111966	4,008375	3,184886
	σ	5,411061	3,493160	1,033481	0,145391
50	MO	3,028064	3,545414	3,083551	3,009641
	PO	19,764702	9,321170	4,716208	3,183543
	\bar{X}	6,389115	4,746892	3,544013	3,077518
	σ	4,940166	1,660365	0,554664	0,060918
100	MO	3,046271	3,061876	3,090391	3,005962
	PO	7,292478	5,142212	3,519869	3,273690
	\bar{X}	3,900332	3,704492	3,228079	3,094800
	σ	1,247123	0,694305	0,132210	0,099238
200	MO	3,033919	3,025398	3,012968	3,001919
	PO	5,891191	3,831848	3,306107	3,056054
	\bar{X}	4,068494	3,271775	3,123746	3,020215
	σ	1,032010	0,303924	0,079784	0,019962

- **Estudo Paramétrico 11**

No seguimento da linha estabelecida no estudo anterior, o presente estudo recorre à função *Rastrigin*. Da sua utilização para efeitos de estudo de verificação em 4.1.3.1, mantém-se o número de variáveis de projeto e o seu intervalo de valores. Considerando valores de Max_{It} e n_{pop} idênticos ao utilizados no estudo paramétrico anterior, os resultados obtidos para as sucessivas séries de 10 corridas cada, apresentam-se na Tabela B94 à Tabela B109. De um modo generalizado, verifica-se comportamento idêntico ao estudo anterior, no qual o número de

iterações apresenta uma maior influencia na convergência do algoritmo em torno do ótimo global. Uma vez mais, a Tabela 4.2.35 apresenta um resumo dos resultados obtidos para cada série de corridas. A partir desta – e curiosamente – é possível verificar que o MO do conjunto de todas as séries ocorre para 100 iterações e 200 indivíduos, e não o contrário, ou mesmo 200 iterações e indivíduos, atribuindo-se este fenômeno à pseudo-aleatoriedade da geração de populações.

Tabela 4.2.35 - Melhores e piores ótimos, valores médios e respectivos desvios-padrão por série em função do número de iterações e do número de Jellyfish para a função Rastrigin

Nº de Indivíduos		Nº de Iterações			
		30	50	100	200
30	MO	0,789637	1,173782	0,698723	0,093788
	PO	9,325971	6,615207	2,625834	1,497019
	\bar{X}	4,233595	3,050115	1,775301	0,895663
	σ	2,634375	1,635872	0,638717	0,463505
50	MO	1,249520	1,195384	0,045227	0,228787
	PO	5,432205	3,959596	2,162704	1,394506
	\bar{X}	2,788606	2,339121	0,683600	0,714968
	σ	1,477270	0,892300	0,657373	0,407327
100	MO	0,704613	0,215866	0,030271	0,047426
	PO	4,135828	2,820693	1,404913	1,041253
	\bar{X}	2,296925	1,323523	0,901146	0,598739
	σ	1,028440	0,783916	0,456641	0,409020
200	MO	0,322037	0,154940	0,015675	0,036072
	PO	2,381087	2,331885	1,166273	0,812629
	\bar{X}	1,548996	0,972456	0,449647	0,252563
	σ	0,684051	0,703167	0,382569	0,253661

Do presente estudo é possível retirar que a utilização de 200 iterações e 200 *Jellyfish* corresponde à melhor parametrização estudada, motivo pelo qual, se utilizará a mesma nos estudos futuros, se viável do ponto de vista computacional.

4.2.3.2. Influência dos coeficientes β e γ

O JS caracteriza-se pela sua simplicidade, em particular no que ao número de parâmetros diz respeito. Na sua configuração o número de iterações e o número de indivíduos, representam os parâmetros principais e que foram alvo de estudo no tópico anterior. Secundariamente, o algoritmo necessita também de dois parâmetros adicionais β e γ , oportunamente definidos aquando da apresentação do JS. Até ao momento, os estudos realizados, recorreram aos valores

estabelecidos por Chou e Truong [112] de 3 e 0,1 para β e γ , respectivamente. O presente tópico pretende avaliar a influência nos resultados para a solução ótima global.

- **Estudo Paramétrico 12**

O presente estudo recorre à função Goldstein-Price para avaliar o impacto de β e γ . Mantendo duas variáveis contínuas de projeto e os seus intervalos de valores, considera-se que β assume valores no intervalo $[0,5, 10]$ e $\gamma \in [0,1, 1]$. Por forma a simplificar o estudo a realizar, os parâmetros são considerados discretos assumindo valores de 0,5 em 0,5 no caso de β , e 0,1 e, 0,1 no caso de γ . Cada série corresponde a um conjunto de 10 corridas, nas quais é estabelecido um par fixo de parâmetros. No total, as diferentes combinações de valores que os parâmetros podem assumir, originaram 200 séries, cujos resultados para o MO, PO, valor médio e desvio-padrão se apresentam na Tabela B110 e Tabela B111. Da sua análise, retira-se que o melhor ótimo de entre os sucessivos ótimos do conjunto de todas as séries assume o valor de 3,000054 e corresponde a um valor de β e γ de 1,5 e 0,7, respectivamente. No entanto, atendendo à pseudo-aleatoriedade da geração de indivíduos da população e procurando salvaguardar a existência de alguma coincidência, a utilização do valor médio dos ótimos de cada série assume-se como a melhor métrica. Neste sentido, a representação gráfica da Figura 4.2.53, auxilia nesta interpretação, ao demonstrar a existência de uma tendência.

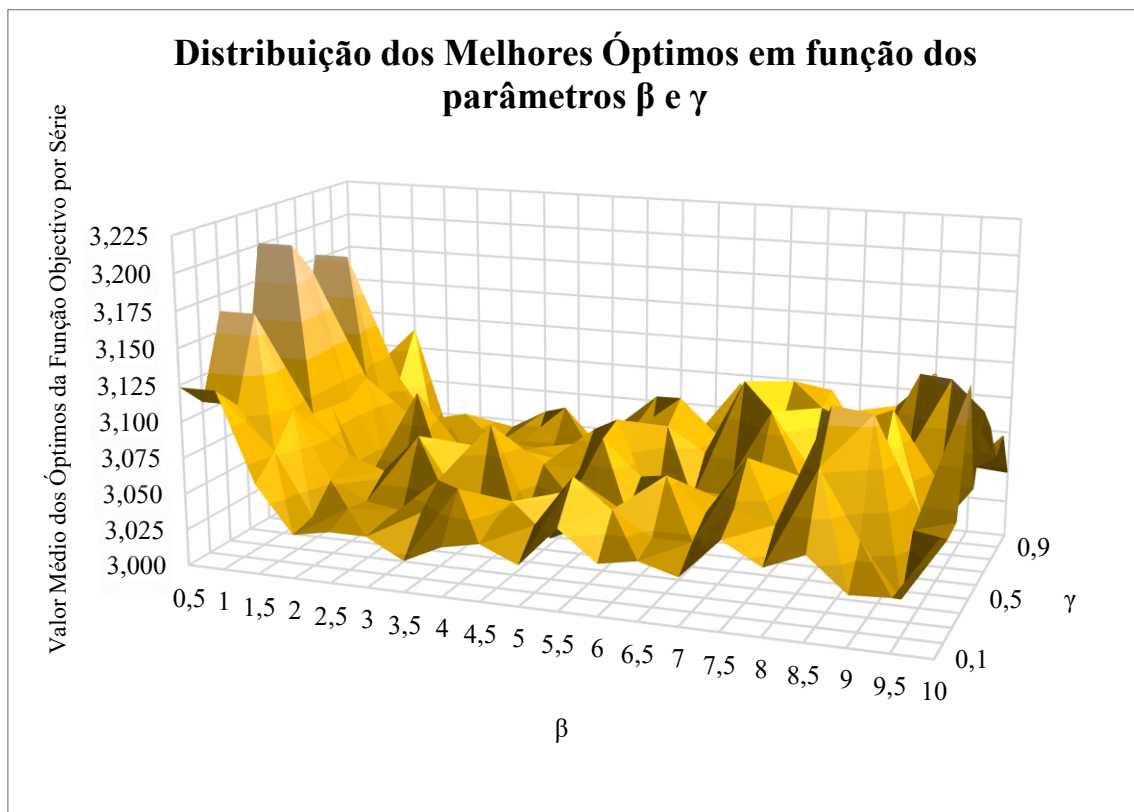


Figura 4.2.53 – Distribuição dos valores médios dos melhores ótimos por série

Verifica-se que para valores de β inferiores a 2, o valor médio dos ótimos diminui com o aumento deste parâmetro, ao passo que, para valores superiores a 3,5 se verifica um comportamento generalizado de aumento com o aumento de β . Relativamente ao coeficiente de movimento, γ , não se verifica a existência de uma tendência clara. Considerando o valor médio, o par β, γ , que dá origem ao menor valor de 3,021442 é 3,5 e 0,1, respetivamente, valores estes bastante próximos dos obtidos por Chou e Truong [112], de 3,0 e 0,1.

4.3. Estudos de Otimização

Concluídos os estudos paramétricos apresentam-se em seguida os estudos efetuados no âmbito da otimização de estruturas. São considerados três estudos, sendo o primeiro referente a uma estrutura do tipo viga e o segundo do tipo placa.

- **Estudo de Otimização 1**

O presente estudo considera uma situação de controlo de forma de uma viga FGPM com gradiente funcional 1D na direção x . A viga deverá ser constituída em simultâneo por dois FGM com diferentes gradientes a uma razão de 1:1. Paralelamente serão aplicados dois potenciais elétricos distintos na mesma proporção. O objetivo deste estudo será avaliar o efeito das condições de fronteira no controlo de forma da estrutura. A viga de 1,5 m, assume as seguintes condições de fronteira: CFFF, CCFF, SSFF, CSFF. Considerando a discretização da viga em 10 elementos e utilizando dois pontos de controlo localizados nos nós 6 e 22, conforme a representação da Figura 4.3.1, a aplicação numérica é configurada para um total de 10 corridas, 50 indivíduos e 50 iterações. Os resultados obtidos para as diferentes CF constam da Tabela C1, Tabela C2 Tabela C3 e Tabela C4. Adicionalmente, a Tabela 4.3.1, apresenta um resumo dos resultados obtidos, sendo de notar que apresenta já os valores de p e φ que permitiram a obtenção dos ótimos globais, ao invés das posições de armazenamento como nas tabelas anteriores.

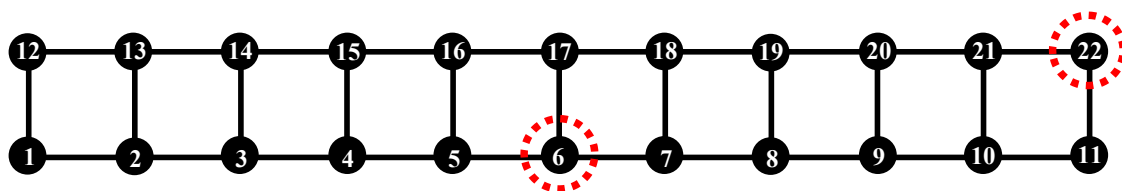


Figura 4.3.1 - Representação esquemática da discretização da placa em 10 elementos e localização dos pontos de controlo da função objetivo

Tabela 4.3.1 - Quadro do resumo dos estudos de otimização de uma viga com dois gradientes materiais e dois potenciais elétricos aplicados distintos para diferentes condições de fronteira

CF	p_x^*	φ^* [V]	$f(X_i)^*$
CFFF	5, 2	2, 1	7,880E-21
		Média	1,365E-20
		Desvio Padrão	4,246E-21
CCFF	2, 1	3, 5	2,602E-29
		Média	2,024E-27
		Desvio Padrão	3,584E-27
SSFF	5, 2	2, 1	9,481E-22
		Média	1,864E-21
		Desvio Padrão	7,314E-22
CSFF	5, 0.1	2, 6	5,453E-27
		Média	1,259E-22
		Desvio Padrão	1,773E-22

Da análise dos resultados obtidos é possível verificar de imediato a influência das CF no valor ótimo da função objetivo. No caso da viga CFFF, por ser a que apresenta menores constrangimentos em termos de graus de liberdade, é a que exibe o maior valor de $f(X_i)^*$. Do lado oposto a viga CCFF é que apresenta menor valor. As vigas SSFF e CSFF situam-se entre as anteriores, em linha com o observado nos estudos paramétricos. No que refere aos gradientes materiais que deverão ser considerados para alcançar os resultados obtidos, constata-se que, para todas as CF à exceção de CCFF, é considerado um gradiente material com $p_x = 5$. Nestas para os casos CFFF e SSFF, é complementado com um gradiente material com $p_x = 2$, correspondendo aos gradientes considerados que originam maior rigidez às estruturas em função da maior presença de alumínio face ao PVDF. Para o caso de CSFF, o material de gradiente funcional $p_x = 5$ é complementado com outro de $p_x = 0,1$. Aqui, importa referir que existem gradientes capazes de conferir maior rigidez à estrutura como visto para as vigas CFFF e SSFF. Por último a viga CCFF resulta da combinação de dois materiais, com gradientes definidos por $p_x = 2$ e $p_x = 1$. Novamente seria de esperar valores de p_x superiores. Em função das diferentes CF, a localização em que é aplicado um determinado gradiente material, bem como os potenciais elétricos, influencia também a sua resposta estática. Neste sentido, a Figura 4.3.2 apresenta as localizações dos gradientes na estrutura e dos potenciais elétricos.

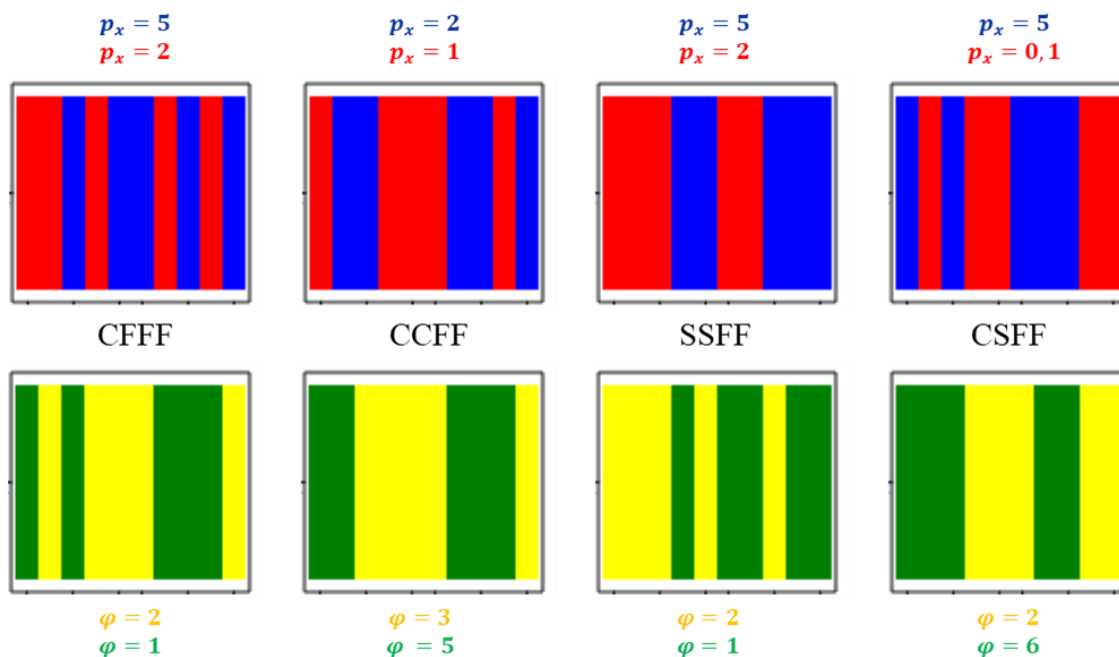


Figura 4.3.2 - Mapeamento das disposições dos gradientes materiais e potenciais elétricos considerados para diferentes condições de fronteira

Da análise da mesma, verifica-se que as combinações obtidas variam com as CF aplicadas. Para o caso da viga CFFF, o material de menor rigidez ($p_x = 2$) concentra-se em maior quantidade nas proximidades da CF, verificando-se para o resto da viga uma distribuição alternada. Já os potenciais aplicados concentram o menor valor, mais próximo da extremidade livre da viga. É também de referir que de um modo geral, para o valor de potencial elétrico mais elevado considerado, corresponderá um material com $p_x = 5$ e como tal menos sensível ao efeito piezoelétrico, contribuindo esta situação para minimizar os deslocamentos transversais da estrutura. Para o caso da viga CCFF o material de menor rigidez, tende a concentrar-se principalmente a meio vão, ficando o material de maior rigidez nas proximidades das CF. Já os potenciais elétricos mais elevados tendem a localizar-se em locais onde o material apresente menor sensibilidade piezoelétrica. A respeito da viga SSFF verifica-se um padrão de distribuição pouco expectável dada a simetria existente ao nível das CF. O material de maior rigidez tende a localizar-se mais próximo de uma extremidade, quando seria de esperar a meio vão da viga, numa distribuição de aspeto simétrico ou muito próximo disso. Os potenciais elétricos podem contribuir para explicar esta situação uma vez que o valor mínimo aplicado tende a concentrar-se em regiões da viga onde o material apresenta menor sensibilidade ao efeito piezoelétrico, provando um desequilíbrio da sua distribuição. Para a viga CSFF verifica-se um padrão expectável. Atendendo à inexistência de simetria nas CF, a concentração do material de maior rigidez tende a ocorrer nas proximidades do apoio simples. Relativamente aos potenciais elétricos aplicados o menor valor concentra-se principalmente a meio vão e junto ao apoio simples, contribuindo esta situação para a redução dos deslocamentos transversais.

Chegado aqui é importante retirar um conjunto abrangente de conclusões. Como verificado, as CF de fronteira têm influência nas distribuições de materiais e de potenciais elétricos. Nos casos em que existe simetria ao nível das CF, é expectável que as distribuições exibam um padrão simétrico ou muito próximo disso. Nos casos em que não se verifique a simetria de condições de fronteira será expectável que o material de maior rigidez se concentre nas proximidades da CF que menos GDL restringir, aplicando-se o inverso para a distribuição de potenciais elétricos. Dada a influência verificada, fará todo o sentido vir a considerar as CF também como variáveis de projeto. Importa referir que os pontos de controlo terão grande influência nos resultados obtidos e que no presente estudo se consideram iguais para permitir uma melhor comparação de resultados. No entanto em casos de estudo isolados, fará todo o sentido considerar as localizações dos pontos de controlo em função das CF aplicadas. Ainda a respeito do presente estudo, é de mencionar que nos casos em que não se verificou de forma clara e inequívoca as tendências esperadas, tal poderá também ser devido ao número insuficiente de indivíduos da população e de iterações, sendo de considerar o seu aumento em estudos futuros. É ainda importante referir que as soluções obtidas para as disposições dos diferentes gradientes materiais não têm em consideração aspetos de ordem prática, querendo isto dizer que poderão não ser exequíveis com os métodos de fabrico atualmente disponíveis. Neste sentido será interessante considerar esta questão num contexto de aplicação de estrangulamentos, por forma a evitar transições acentuadas em termos de propriedades materiais e não só.

- **Estudo de Otimização 2**

Num contexto de controlo de forma de uma estrutura do tipo placa, o presente estudo considera uma placa FGPM, simplesmente apoiada, de características geométricas idênticas à utilizada no Estudo Paramétrico 9 (em 4.2.2.6) e com gradiente funcional 1D Al/PVDF segundo a direção z . São variáveis de projeto o expoente da lei de potência, p_z , e o potencial elétrico aplicado, φ , assumindo os valores pré-definidos de 0, 0.1, 0.5, 1, 2 e 5, e 1V, 2V, 3V, 4V, 5V e 6V, respetivamente. A estrutura deverá ser constituída por dois gradientes funcionais distintos, definidos por diferentes valores de p_z , a uma razão de 2:3. Também os potenciais elétricos aplicados à estrutura deverão seguir tal indicação.

Considerando a discretização da estrutura em 100 elementos e a localização dos pontos de controlo nos nós 49, 51, 71 e 73, conforme a representação esquemática da Figura 4.3.3, a aplicação numérica é configurada para uma série de 10 corridas, com 30 *jellyfish* e 50 iterações, constando os resultados obtidos na Tabela 4.3.2. Note-se que a localização dos pontos de controlo é propositada tendo em conta a simetria das CF e do gradiente funcional no plano da estrutura, bem como os resultados obtidos em 4.2.2.6. É também de notar que o maior número de elementos em que é discretizada a estrutura, implica uma redução dos parâmetros de configuração do JS.

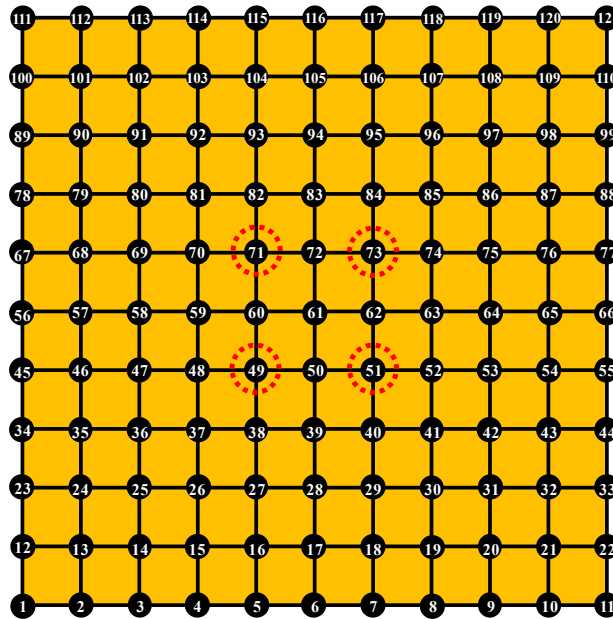


Figura 4.3.3 - Representação esquemática da estrutura discretizada, do gradiente funcional 1D e da localização dos pontos de controle

Tabela 4.3.2 - Otimização de uma placa com dois gradientes materiais 1D segundo z e dois potenciais elétricos aplicados distintos

p_z^*	φ^* [V]	$f(X_i)^*$
5, 2	3, 1	2,645E-24
	Média	3,944E-24
	Desvio Padrão	1,341E-24

Da análise dos resultados obtidos é possível constatar que para os gradientes funcionais a aplicar à estrutura a solução ótima corresponde à utilização de gradientes definidos por $p_z = 5$ e $p_z = 2$, com maior presença do primeiro. Este resultado está em linha com o esperado, dado tratar-se dos valores de p_z que implicam uma maior presença de alumínio em fração volúmica e como tal, originam uma estrutura mais rígida e menos sensível ao efeito piezoelétrico, contribuindo para a menor flexão da placa. Ao nível dos potenciais elétricos aplicados a solução ótima é obtida para 3V e 1V, correspondendo o primeiro ao potencial com maior aplicação na estrutura. O resultado obtido não é o espetável dado existir valores pré-definidos de potencial elétrico, que pela sua menor magnitude, produziriam menores deformações na estrutura.

Outro fator importante nos resultados obtidos prende-se com a distribuição espacial dos gradientes e dos potenciais elétricos aplicados na estrutura. A Figura 4.3.4 apresenta esquematicamente a distribuição dos gradientes e dos potenciais elétricos aplicados sobre o domínio discretizado da placa.

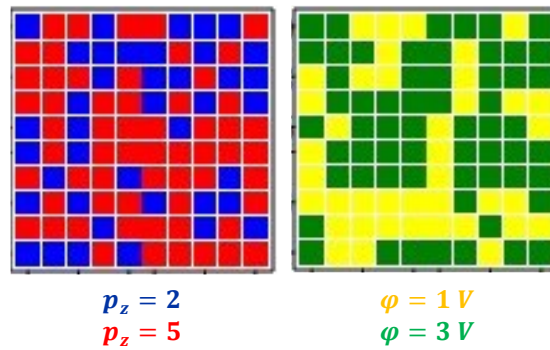


Figura 4.3.4 - Mapeamento das distribuições dos gradientes materiais e potenciais elétricos considerados numa placa FGPM 1D em z

A partir da sua análise verifica-se que o gradiente definido por $p_z = 5$ tende a concentrar-se maioritariamente no centro da placa, dado contribuir para o aumento da rigidez da estrutura. Relativamente a este aspeto, considera-se que apesar de satisfatórios os resultados obtidos não apresentam uma convergência total, pelo que será de equacionar um incremento dos parâmetros associados ao JS. Quanto aos potenciais elétricos aplicados não se observa um comportamento tendencial, mas, no entanto, verifica-se que o potencial elétrico de maior intensidade, 3V, é maioritariamente aplicado em elementos cujo gradiente é definido por $p_z = 5$. Também aqui, um maior número de indivíduos e iterações permitiria obter melhores resultados.

- **Estudo de Otimização 3**

O terceiro, e último, estudo da presente dissertação é em tudo idêntico ao estudo anterior, diferindo apenas no gradiente funcional, que é agora multidirecional em 3D, i.e., segundo x , y e z . Considerando idêntica discretização e pontos de controlo, a representação esquemática encontra-se na Figura 4.3.5. Após um conjunto de 10 corridas, com 30 *jellyfish* e 50 iterações cada, os resultados obtidos constam da Tabela 4.3.3.

Tabela 4.3.3 - Otimização de uma placa com dois gradientes materiais 3D segundo x , y e z e dois potenciais elétricos aplicados distintos

p_z^*	φ^* [V]	$f(X_i)^*$
5, 2	1, 2	1,766E-27
	Média	2,165E-27
	Desvio Padrão	2,940E-28

Através da sua análise, é possível verificar que os valores de p e φ , que correspondem à solução ótima, são os esperados, dado contribuir para o aumento da rigidez da estrutura e reduzir a sua sensibilidade aos potenciais aplicados, bem como serem os valores de potencial elétrico de menor intensidade que contribuem para a menor flexão da estrutura.

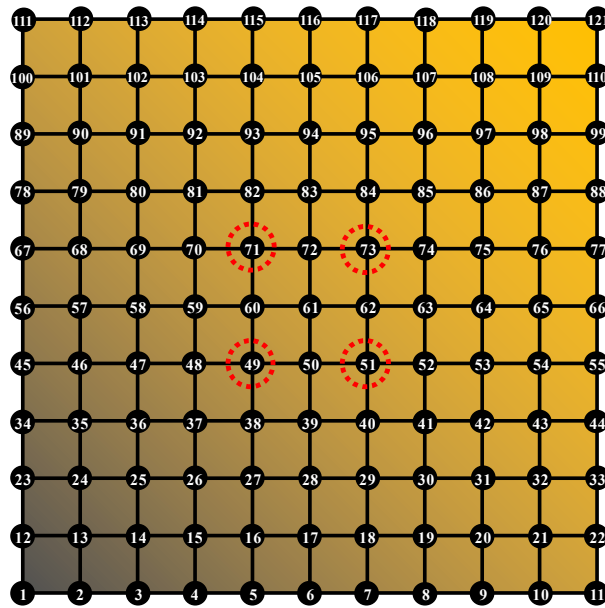


Figura 4.3.5 - Representação esquemática da estrutura discretizada, do gradiente funcional 3D e da localização dos pontos de controle

A respeito da distribuição dos gradientes e potenciais elétricos, a Figura 4.3.6 apresenta os resultados obtidos. Para ambas as variáveis de projeto, não se observa uma tendência clara em termos de comportamento. Ainda assim, para os gradientes, observa-se uma maior concentração de $p = 2$ nas proximidades de $x = 0$ e $y = 0$. Independentemente do valor de p , com exceção daquele que conduz a um material isotrópico e homogêneo, a fração volúmica de alumínio será sempre superior à de PVDF, nesta localização. Como tal, acomodar na sua proximidade gradientes definidos por $p = 2$, permite que elementos mais próximos de $x = L$ e $y = W$, sejam constituídos por gradientes definidos com $p = 5$ e como tal com maior probabilidade de presença de alumínio face ao PVDF, contribuindo para aumentar a rigidez da estrutura. Para os potenciais elétricos aplicados será expectável um comportamento semelhante, com os potenciais de maior intensidade a concentrarem-se maioritariamente onde é expectável uma maior concentração de $p = 5$, por forma a reduzir a sensibilidade da estrutura aos mesmos.

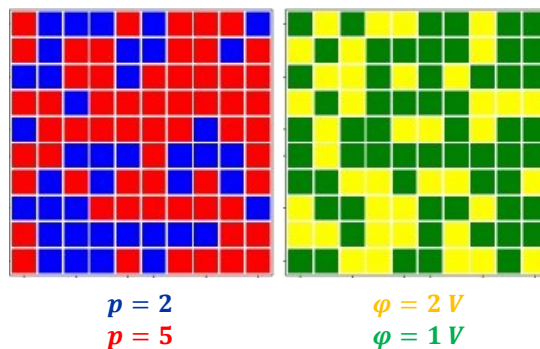


Figura 4.3.6 - Mapeamento das distribuições dos gradientes materiais e potenciais elétricos considerados numa placa FGPM 3D em z

5. Conclusões e Trabalhos Futuros

O trabalho desenvolvido no âmbito da presente dissertação compreendeu o desenvolvimento de uma aplicação numérica, tendo em vista a modelação e análise de estruturas do tipo placa ou viga e a sua otimização por meio de algoritmo bio-inspirado. Neste âmbito, foi conduzido um conjunto de estudos de verificação, de análise paramétrica e de otimização.

Os resultados obtidos nos estudos de verificação realizados, permitiram a necessária confiança nos modelos implementados para o prosseguimento para estudos mais aprofundados. Os desvios obtidos foram, em geral, reduzidos, permitindo verificar os modelos implementados. Considerando apenas o campo elástico, foi possível verificar e quantificar as diferenças decorrentes da utilização de diferentes tipos de elementos e observar que no caso de FGM para valores de p_z que não resultem em materiais isotrópicos e homogêneos será expectável a existência de maiores desvios. Considerando o efeito piezoelétrico, e para os casos da viga *bimorph* em configuração funcional de atuador, constatou-se que a existirem desvios, estes tenderão a diminuir com a maior proximidade à extremidade livre da viga. Para a configuração de sensor, e concretamente os casos cujos valores de referência são provenientes de representações gráficas, está associado um fator de subjetividade. Na componente de otimização os estudos permitiram a verificação do algoritmo. Para as funções de *benchmark* os resultados obtidos foram bastante satisfatórios. Foram ainda abordados um conjunto de casos simples de otimizações de estruturas, com os quais foi possível verificar a implementação desta vertente. Os casos englobaram a minimização do deslocamento máximo de uma placa SSSS, utilizando o gradiente funcional como variável de projeto. Considerou-se também a otimização da estrutura utilizando duas variáveis de projeto, ao permitir dois gradientes em simultâneo, e ainda o controlo de forma da estrutura para um único ponto de controlo e uma variável de projeto. Adicionalmente, considerou-se a otimização da estrutura com o potencial elétrico aplicado, φ , como variável de projeto.

Nos estudos paramétricos existiu a possibilidade de avaliar um conjunto alargado de casos de estudo e, simultaneamente, avaliar o desempenho da aplicação numérica desenvolvida. Sem considerar o efeito piezoelétrico foi possível observar, que para placas espessas a formulação baseada na FSDT utilizada, tem dificuldade em produzir resultados próximos aos valores das referências consultadas. Verificou-se que, para o aumento de L/h da estrutura também os deslocamentos

registaram um aumento, em resultado da menor espessura e consequentemente menor rigidez. No caso de FGM foi possível constatar que se ao aumento de p estiver associado o aumento da fração volumica com menor módulo de elasticidade, conduzirá à redução da rigidez global da estrutura e, consequentemente, ao aumento dos deslocamentos. Ainda relativamente aos FGM e pelo facto de as suas propriedades materiais efetivas serem função das direções x , y e z , o método de integração utilizado no cálculo das matrizes de rigidez elástica dos elementos, na componente de membrana-flexão, tem influência nos resultados obtidos, através do estudo realizado. Será interessante, num trabalho futuro, quantificar a influência nos resultados da utilização de diferentes métodos de integração aproximada. A respeito da utilização da técnica de homogeneização de Mori-Tanaka verificou-se que, os valores obtidos são semelhantes aos provenientes da utilização da regra de misturas de Voigt, mas ligeiramente superiores. Considerando o efeito piezoelétrico, e conforme previsto pelo modelo linear utilizado, o deslocamento máximo transversal aumenta linearmente com o aumento do potencial elétrico aplicado. No caso de CF mais restritivas em termos de GDL, ficou patente que os potenciais elétricos obtidos são inferiores, em virtude dos menores deslocamentos. No caso comparativo de uma viga CFFF e CCFF, para a configuração funcional de sensor, e em resultado de uma mesma deformação, os potenciais elétricos obtidos para a viga CCFF serão superiores dada a maior força necessária. Nos casos mais simples concluiu-se, que a discretização utilizada apresenta pouco ou nenhum efeito sobre os resultados, mas contribui para o aumento do esforço computacional, medido em tempo de computação. Ao nível dos materiais piezoelétricos com gradiente funcional 1D, ficou perceptível que o gradiente material poderá ser manipulado no sentido de limitar os potenciais elétricos gerados. Verificou-se também, que para um aumento de p_x associado a uma maior presença de alumínio, um material passivo, em detrimento do PVDF, um material ativo, os deslocamentos obtidos serão inferiores dado o aumento da rigidez da estrutura. Também a resposta elétrica é afetada, em consequência do enfraquecimento do efeito piezoelétrico, traduzindo-se numa menor sensibilidade da estrutura. Considerando modelos com gradientes contínuos e discretos verificou-se, que para o aumento de p_x o desvio entre valores tende a aumentar em consequência da maior dificuldade do modelo discreto em aproximar corretamente o gradiente funcional. No âmbito da avaliação da influência das CF em vigas FGPM 1D segundo x , ficou bem presente as possibilidades que advêm ao nível do controlo da resposta estática da estrutura fazendo variar as CF e os gradientes materiais. No caso concreto dos modelos CCFF e CSFF ficou perceptível a influência que a restrição de um único GDL pode ter ao nível do comportamento estático da estrutura. Dependendo do gradiente considerado, com o aumento de p_x foi visível um fenómeno de translação do ponto de maior deslocamento transversal na direção do gradiente e sentido da maior presença da fase ativa e menos rígida. No caso específico da viga CSFF em configuração de atuador constatou-se a ocorrência de um fenómeno numérico decorrente do processo de integração na área do elemento, com o qual se concluiu que os valores de deslocamento apresentados para valores de $p_x > 0$ serão provavelmente, superiores à realidade, reforçando a necessidade de analisar e

quantificar a influência dos métodos de integração utilizados. Por uma questão de simplificação, os resultados obtidos nos diversos estudos realizados, desprezaram a contribuição da expressão da lei de potência para o maior grau presente na matriz do polinómio interpolador da quadratura de Gauss-Legendre. Por forma a quantificar o seu efeito, através de um pequeno estudo, foi possível verificar a diferença significativa para valores de p_x iguais a 2 e 5, que atingiu os 96% no caso do último. Da consideração da contribuição do material para o maior grau do polinómio interpolador, registou-se a obtenção de valores de deslocamentos de magnitude inferior, consequência da maior rigidez numérica da estrutura. Relembrar que este fenómeno apenas afetou os resultados obtidos por meio da abordagem contínua, em que existe a necessidade de integração dos coeficientes de rigidez elástica em função das direções x , y e z . Ao nível dos estudos de estruturas do tipo placa considerou-se a aplicação de gradientes materiais multidirecionais 2D e 3D, e ainda casos mais simples de gradientes 1D. A partir destes últimos e com base nas observações para os casos de vigas, foi possível estabelecer um conjunto de previsões ao nível do comportamento estático da estrutura antes mesmo de os realizar. Assim, para um caso de gradiente 2D definido no plano da placa, o comportamento geral da estrutura poderá ser descrito a partir da análise das diferentes direções isoladas, como se de uma soma de vetores se tratasse. Esta abordagem, apesar de não permitir a obtenção de resultados concretos é particularmente útil para ajudar a conceber *a priori* o que será expectável em termos da resposta da estrutura. Ao nível da comparação entre a abordagem de gradiente contínuo e gradiente discreto ficou perceptível que para gradientes em z , existe uma maior dificuldade do modelo discreto em aproximar os resultados do modelo contínuo. A respeito dos estudos paramétricos ao algoritmo de otimização bio-inspirado JS, foi possível concluir, que um maior número de indivíduos e uma maior maturidade das populações associada a um maior número de iterações será sempre desejada. Ao nível da influência dos parâmetros secundários do algoritmo foi possível chegar a resultados bastante próximos aos obtidos pela referência. Aqui será interessante num futuro próximo avaliar o desempenho de alternativas, à geração da população inicial com recurso a um mapa logístico para os valores de β e γ determinados.

A respeito dos estudos de otimização realizados foi possível testemunhar as potencialidades da aplicação numérica desenvolvida ao nível da otimização de estruturas piezoelétricas. Aqui foi possível avaliar a influência das condições de fronteira no resultado do processo de otimização. Em função das limitações em termos do número de indivíduos e da sua maturidade, foi possível estabelecer algumas relações. Para CF simétricas será expectável a obtenção de uma distribuição simétrica, em relação ao meio-vão da viga, enquanto, para o contrário será expectável a concentração do menor potencial eléctrico e do material de maior rigidez nas proximidades da CF que implicar menor grau de constrangimento em termos de GDL à estrutura. Aqui, em termos de trabalho futuro, será de equacionar as CF enquanto variável de projeto. Quanto aos restantes estudos, foi possível concluir que dependendo da direção ou direções dos gradientes considerados, a solução ótima será

diferente. Para uma placa com gradiente funcional 1D na direção de z , com simetria de CF, concluiu-se que o gradiente definido pelo maior valor de p_z pré-definido, tenderá a ocupar a região central da placa, concentrando-se o gradiente definido pelo menor p_z que conduz à solução ótima, nas proximidades das arestas da placa. Para uma estrutura com gradiente 3D segundo x , y e z , verificando-se simetria ao nível das condições de fronteira é expectável uma distribuição dos gradientes definidos pelos diferentes valores de p segundo a evolução do gradiente no plano da estrutura. Assim o menor valor de p que conduz à solução ótima tenderá a localizar-se maioritariamente junto ao ponto $x = 0$ e $y = 0$, enquanto o maior valor de p localizar-se-á na proximidade de $x = L$ e $y = W$. Para estes estudos foram visíveis as limitações ao nível de recursos computacionais que obrigaram a reduzir o número de *jellyfish* e de iterações, comprometendo ligeiramente a convergência dos resultados obtidos. Neste domínio, será de revisitar, num futuro próximo, estes mesmos estudos e adotar metodologias que permitam aumentar os valores dos parâmetros de configuração do JS e como tal obter resultados com maior grau de convergência.

Por forma a complementar os estudos realizados, a análise de dinâmica e de instabilidade de estruturas piezoelétricas com gradientes funcionais multidirecionais pode representar uma possibilidade a curto-médio prazo. Também a inclusão de porosidades representa uma possibilidade de trabalho futuro, pela previsível influência que terão na resposta deste tipo de estruturas. A comparação dos resultados obtidos com o JS, com um algoritmo bio-inspirado diferente, vem permitir avaliar o desempenho da aplicação numérica desenvolvida, destacando-se como o trabalho a desenvolver o mais brevemente possível.

Assim, tecidas as conclusões gerais da presente dissertação, bem como algumas propostas de trabalhos futuros é possível concluir que foram alcançados os objetivos propostos e definidos.

Referências

- [1] R. E. Hummel, *Understanding Materials Science*, 2nd ed. New York, NY, USA: Springer New York, 2004. doi: 10.1007/b137957.
- [2] I. Chopra and J. Sirohi, *Smart Structures Theory*, 1st ed. New York, NY, USA: Cambridge University Press, 2013. doi: 10.1017/S000192400000988X.
- [3] A. Suleman, E. Prasad, R. Blackow, and D. Waechter, “Smart structures - an overview,” in *Smart Structures: Applications and Related Technologies*, 1st ed., A. Suleman, Ed. Vienna: Springer Vienna, 2001, pp. 3–16. doi: 10.1007/978-3-7091-2686-8.
- [4] V. Lopes, V. Steffen, and M. A. Savi, “Introduction,” in *Dynamics of Smart Systems and Structures: Concepts and Applications*, 1st ed., V. Lopes, M. A. Savi, and V. Steffen, Eds. Springer, 2016, pp. 1–3. doi: 10.1007/978-3-319-29982-2.
- [5] K. K. Chawla, *Composite Materials*, 4th ed. Cham: Springer International Publishing, 2019. doi: 10.1007/978-3-030-28983-6.
- [6] C. A. Mota Soares, C. M. Mota Soares, and M. J. M. Freitas, *Mechanics of Composite Materials and Structures*. Dordrecht: Springer Netherlands, 1999. doi: 10.1007/978-94-011-4489-6.
- [7] V. K. Wadhawan, *Smart Structures: Blurring the Distinction Between the Living and the Nonliving*, 1st ed., vol. 9780199229. Oxford University Press, 2007.
- [8] R. Healey, J. Wang, W. K. Chiu, N. M. Chowdhury, A. Baker, and C. Wallbrink, “A review on aircraft spectra simplification techniques for composite structures,” *Compos. Part C Open Access*, vol. 5, no. January, p. 100131, 2021, doi: 10.1016/j.jcomec.2021.100131.
- [9] H. Mou, J. Xie, and Z. Feng, “Research status and future development of crashworthiness of civil aircraft fuselage structures: An overview,” *Prog. Aerosp. Sci.*, vol. 119, no. December 2019, p. 100644, 2020, doi: 10.1016/j.paerosci.2020.100644.
- [10] K. Maalawi, “Optimization of Functionally Graded Material Structures: Some Case Studies,” in *Optimum Composite Structures*, IntechOpen, 2019. doi: 10.5772/intechopen.82411.

- [11] Y. Cao, H. Huang, and Y. Ding, “Isogeometric optimization of piezoelectric functionally graded material for energy harvester,” *Compos. Struct.*, vol. 273, no. June, p. 114261, 2021, doi: 10.1016/j.compstruct.2021.114261.
- [12] R. C. Carbonari, E. C. N. Silva, and G. H. Paulino, “Design of functionally graded piezoelectric actuators using topology optimization,” *Smart Struct. Mater. 2006 Model. Signal Process. Control*, vol. 6166, no. 11, p. 616607, 2006, doi: 10.1117/12.658562.
- [13] IEEE, “IEEE Reference Guide,” 2018. <http://ieeauthorcenter.ieee.org/wp-content/uploads/IEEE-Reference-Guide.pdf> (accessed Mar. 08, 2023).
- [14] R. Vepa, *Dynamics of Smart Structures*. Wiley, 2010.
- [15] V. Y. Topolov and C. R. Bowen, *Electromechanical Properties in Composite Based on Ferroelectrics*. London: Springer London, 2009. doi: 10.1007/978-1-84882-000-5.
- [16] D. Brigante, *New Composite Materials*, 1st ed. Cham: Springer International Publishing, 2014. doi: 10.1007/978-3-319-01637-5.
- [17] S. S. Alieldin, A. E. Alshorbagy, and M. Shaat, “A first-order shear deformation finite element model for elastostatic analysis of laminated composite plates and the equivalent functionally graded plates,” *Ain Shams Eng. J.*, vol. 2, no. 1, pp. 53–62, 2011, doi: 10.1016/j.asej.2011.05.003.
- [18] M. Barschke, D. Uribe, O. E. Ruiz, J. Jensen, and C. López, “Modelado de Materiales Compuestos por Elementos Finitos usando Restricciones Cinemáticas Finite Element Modeling of Composite Materials using Kinematic Constraints,” *Ing. y Cienc. | ing.cienc.*, vol. 5, no. 10, pp. 133–154, 2009.
- [19] V. K. S. Choo, *Fundamentals of Composite Materials*, 1st ed. Dover, DE, USA: Knowen Academic Press, 1990.
- [20] J. N. Reddy, *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*, 2nd Editio. CRC Press, 2004.
- [21] W. G. Knauss and L. Gonzalez, “Global Failure Modes in Composite Structures,” California Institute of Technology, Pasadena, CA, USA, 2001.
- [22] H. Irschik, M. Krommer, K. Watanabe, and T. Furukawa, *Mechanics and Model-Based Control of Smart Materials and Structures*. SpringerWienNewYork, 2010. doi: 10.1007/978-3-211-99484-9.

- [23] G. Holm Altenbach; Carrera, Erasmo; Kulikov, *Analysis and Modelling of Advanced Structures and Smart Systems*, vol. 81. 2018. [Online]. Available: <http://link.springer.com/10.1007/978-981-10-6895-9>
- [24] S. D. Sharma, L. Sowntharya, and K. K. Kar, “Polymer-based composite structures: processing and applications,” in *Composite Materials: Processing, Applications, Characterizations*, 1st ed., K. K. Kar, Ed. Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 2017, pp. 1–36. doi: 10.1007/978-3-662-49514-8.
- [25] L. Zhou, M. Li, J. Tang, F. Li, and K. K. Żur, “Evaluation of performance of magneto-electro-elastic sensor subjected to thermal-moisture coupled load via CS-FEM,” *Thin-Walled Struct.*, vol. 169, no. August, p. 108370, 2021, doi: 10.1016/j.tws.2021.108370.
- [26] A. Garg, M. O. Belarbi, H. D. Chalak, and A. Chakrabarti, “A review of the analysis of sandwich FGM structures,” *Compos. Struct.*, vol. 258, no. December 2020, p. 113427, 2021, doi: 10.1016/j.compstruct.2020.113427.
- [27] S. S. Ahankari and K. K. Kar, “Functionally graded composites: processing and applications,” in *Composite Materials: Processing, Applications, Characterizations*, K. K. Kar, Ed. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2017, pp. 119–168. doi: 10.1007/978-3-662-49514-8.
- [28] L. Chen, R. G. Ford, M. Koizumi, Y. Miyamoto, and M. Niino, “Introduction,” in *Functionally Graded Materials: Design, Processing and Applications*, 1st., Y. Miyamoto, W. A. Kaysser, B. H. Rabin, A. Kawasaki, and R. G. Ford, Eds. Boston, MA, USA: Springer US, 1999, pp. 1–6. doi: 10.1007/978-1-4615-5301-4.
- [29] H. S. Shen, *Functionally Graded Materials: Nonlinear Analysis of Plates and Shells*, 1st ed. Boca Raton, FL, USA: CRC Press, 2009.
- [30] K. Ichikawa, *Functionally Graded Materials in the 21st Century: A Workshop on Trends and Forecasts*, 1st ed. Boston, MA, USA: Springer US, 2001. doi: 10.1007/978-1-4615-4373-2.
- [31] V. Boggarapu *et al.*, “State of the art in functionally graded materials,” *Compos. Struct.*, vol. 262, no. December 2020, p. 113596, Apr. 2021, doi: 10.1016/j.compstruct.2021.113596.
- [32] H. Bahreinizad, M. Salimi Bani, A. Khosravi, and A. Karimi, “A numerical study on the application of the functionally graded bioabsorbable materials in the stent design,” *Artery Res.*, vol. 24, pp. 1–8, 2018, doi: 10.1016/j.artres.2018.09.001.

- [33] A. Ouldierou, H. Mehboob, A. Merdji, L. Aminallah, A. Mehboob, and O. M. Mukdadi, "Biomechanical analysis of printable functionally graded material (FGM) dental implants for different bone densities," *Comput. Biol. Med.*, vol. 150, no. June, p. 106111, 2022, doi: 10.1016/j.compbiomed.2022.106111.
- [34] Ö. Canpolat, A. Çanakçı, and F. Erdemir, "SS316L/Al₂O₃ functionally graded material for potential biomedical applications," *Mater. Chem. Phys.*, vol. 293, no. August 2022, 2023, doi: 10.1016/j.matchemphys.2022.126958.
- [35] A. Sola, D. Bellucci, and V. Cannillo, "Functionally graded materials for orthopedic applications – an update on design and manufacturing," *Biotechnol. Adv.*, vol. 34, no. 5, pp. 504–531, 2016, doi: 10.1016/j.biotechadv.2015.12.013.
- [36] M. Bahraminasab, S. Ghaffari, and H. Eslami-Shahed, "Al₂O₃-Ti functionally graded material prepared by spark plasma sintering for orthopaedic applications," *J. Mech. Behav. Biomed. Mater.*, vol. 72, no. February, pp. 82–89, 2017, doi: 10.1016/j.jmbbm.2017.04.024.
- [37] H. Bahreinizad, M. Salimi Bani, A. Khosravi, and A. Karimi, "A numerical study on the application of the functionally graded bioabsorbable materials in the stent design," *Artery Res.*, vol. 24, pp. 1–8, 2018, doi: 10.1016/j.artres.2018.09.001.
- [38] D. K. Jha, T. Kant, and R. K. Singh, "A critical review of recent research on functionally graded plates," *Compos. Struct.*, vol. 96, pp. 833–849, 2013, doi: 10.1016/j.compstruct.2012.09.001.
- [39] T. A. Rodrigues *et al.*, "Wire and arc additive manufacturing of 316L stainless steel/Inconel 625 functionally graded material: development and characterization," *J. Mater. Res. Technol.*, vol. 21, pp. 237–251, 2022, doi: 10.1016/j.jmrt.2022.08.169.
- [40] S. Chandrasekaran, S. Hari, and M. Amirthalingam, "Functionally graded materials for marine risers by additive manufacturing for high-temperature applications: Experimental investigations," *Structures*, vol. 35, no. May 2020, pp. 931–938, 2022, doi: 10.1016/j.istruc.2021.12.004.
- [41] B. Saleh *et al.*, "30 Years of functionally graded materials: An overview of manufacturing methods, Applications and Future Challenges," *Compos. Part B Eng.*, vol. 201, no. January, p. 108376, 2020, doi: 10.1016/j.compositesb.2020.108376.
- [42] R. K. Bharilya and R. Purohit, "Application of Functionally Graded Nano Material (FGNM) Laminates for Solenoid based Actuators," *Mater. Today Proc.*, vol. 5, no. 9, pp. 20736–

- 20740, 2018, doi: 10.1016/j.matpr.2018.06.458.
- [43] E. Müller, Č. Drašar, J. Schilz, and W. A. Kaysser, “Functionally graded materials for sensor and energy applications,” *Mater. Sci. Eng. A*, vol. 362, no. 1–2, pp. 17–39, 2003, doi: 10.1016/S0921-5093(03)00581-1.
- [44] P. N. S. Srinivas, P. R. Babu, and B. Balakrishna, “Effect of silicon carbide, magnesium oxide as reinforcing elements and zinc stearate as binding agent in the characterization of Al functionally graded materials for automotive applications,” *Mater. Today Proc.*, vol. 27, pp. 460–466, 2020, doi: 10.1016/j.matpr.2019.11.275.
- [45] R. Nair and K. I. Ramachandran, “Design and optimization of automotive energy absorber structure with functionally graded material,” *Mater. Today Proc.*, vol. 5, no. 11, pp. 25640–25648, 2018, doi: 10.1016/j.matpr.2018.11.005.
- [46] A. G. Arsha, E. Jayakumar, T. P. D. Rajan, V. Antony, and B. C. Pai, “Design and fabrication of functionally graded in-situ aluminium composites for automotive pistons,” *Mater. Des.*, vol. 88, pp. 1201–1209, 2015, doi: 10.1016/j.matdes.2015.09.099.
- [47] S. C. Ram, K. Chattopadhyay, and I. Chakrabarty, “High temperature tensile properties of centrifugally cast in-situ Al-Mg₂Si functionally graded composites for automotive cylinder block liners,” *J. Alloys Compd.*, vol. 724, pp. 84–97, 2017, doi: 10.1016/j.jallcom.2017.06.306.
- [48] B. Saleh *et al.*, “30 Years of functionally graded materials: An overview of manufacturing methods, Applications and Future Challenges,” *Compos. Part B Eng.*, vol. 201, no. January, p. 108376, 2020, doi: 10.1016/j.compositesb.2020.108376.
- [49] S. N. N. Kumar, R. M. Devarajaiah, and T. Ram Prabhu, “Review on aluminium based functionally graded composites,” *Mater. Today Proc.*, vol. 39, pp. 1743–1749, 2020, doi: 10.1016/j.matpr.2020.06.307.
- [50] M. Bertolete, P. A. Barbosa, W. de Rossi, C. Fredericci, and I. F. Machado, “Mechanical characterisation and machining evaluation of ceramic cutting tools functionally graded with six layers,” *Ceram. Int.*, vol. 46, no. 10, pp. 15137–15145, 2020, doi: 10.1016/j.ceramint.2020.03.048.
- [51] J. Garcia and R. Pitonak, “The role of cemented carbide functionally graded outer-layers on the wear performance of coated cutting tools,” *Int. J. Refract. Met. Hard Mater.*, vol. 36, pp. 52–59, 2013, doi: 10.1016/j.ijrmhm.2011.12.007.

- [52] M. Shen, Q. Wang, R. Wang, and X. Guan, "Vibration analysis of rotating functionally graded graphene platelet reinforced composite shaft-disc system under various boundary conditions," *Eng. Anal. Bound. Elem.*, vol. 144, no. April, pp. 380–398, 2022, doi: 10.1016/j.enganabound.2022.08.030.
- [53] M. Jahangiri and E. Bagheri, "Effect of radially functionally graded materials on the primary resonances of large amplitude flexural vibration of in-extensional rotating shafts," *Eng. Struct.*, vol. 226, no. September 2020, p. 111362, 2021, doi: 10.1016/j.engstruct.2020.111362.
- [54] A. J. M. Ferreira, R. C. Batra, C. M. C. Roque, L. F. Qian, and P. A. L. S. Martins, "Static analysis of functionally graded plates using third-order shear deformation theory and a meshless method," *Compos. Struct.*, vol. 69, no. 4, pp. 449–457, Aug. 2005, doi: 10.1016/j.compstruct.2004.08.003.
- [55] A. F. Mota and M. A. R. Loja, "Mechanical Behavior of Porous Functionally Graded Nanocomposite Materials," *C - J. Carbon Res.*, vol. 5, no. 2, p. 34, Jun. 2019, doi: 10.3390/c5020034.
- [56] P. M. Ramteke, N. Sharma, J. Choudhary, P. Hissaria, and S. K. Panda, "Multidirectional grading influence on static/dynamic deflection and stress responses of porous FG panel structure: a micromechanical approach," *Eng. Comput.*, vol. 38, no. s4, pp. 3077–3097, 2021, doi: 10.1007/s00366-021-01449-w.
- [57] T. K. Nguyen, K. Sab, and G. Bonnet, "First-order shear deformation plate models for functionally graded materials," *Compos. Struct.*, vol. 83, no. 1, pp. 25–36, 2008, doi: 10.1016/j.compstruct.2007.03.004.
- [58] S. H. Chi and Y. L. Chung, "Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load-Part I: Analysis," *Int. J. Solids Struct.*, vol. 43, no. 13, pp. 3657–3674, 2006, doi: 10.1016/j.ijsolstr.2005.04.011.
- [59] D. M. S. Costa and M. A. R. Loja, "Assessing the static behavior of hybrid CNT-metal-ceramic composite plates," *AIMS Mater. Sci.*, vol. 3, no. 3, pp. 808–831, 2016, doi: 10.3934/matensci.2016.3.808.
- [60] R. G. Ford, Y. Miyamoto, and B. H. Rabin, "Graded microstructures," in *Functionally Graded Materials: Design, Processing and Applications*, 1st., Y. Miyamoto, W. A. Kaysser, B. H. Rabin, A. Kawasaki, and R. G. Ford, Eds. Boston, MA, USA: Springer US, 1999, pp. 29–62. doi: 10.1007/978-1-4615-5301-4.

- [61] R. G. Ford, Y. Miyamoto, B. H. Rabin, R. L. Williamson, K. S. Ramesh, and T. Hirano, "Modeling and design," in *Functionally Graded Materials: Design, Processing and Applications*, 1st., Y. Miyamoto, W. A. Kaysser, B. H. Rabin, A. Kawasaki, and R. G. Ford, Eds. Boston, MA, USA: Springer US, 1999, pp. 63–88. doi: 10.1007/978-1-4615-5301-4.
- [62] A. Hassan Ahmed Hassan and N. Kurgan, "A Review on Buckling Analysis of Functionally Graded Plates Under Thermo-Mechanical Loads," *Int. J. Eng. Appl. Sci.*, no. May, pp. 345–368, 2019, doi: 10.24107/ijeas.555719.
- [63] R. G. Lage, C. M. M. Soares, C. A. M. Soares, and J. N. Reddy, "Layerwise partial mixed finite element analysis of magneto-electro-elastic plates," *Comput. Struct.*, vol. 82, no. 17–19, pp. 1293–1301, 2004, doi: 10.1016/j.compstruc.2004.03.026.
- [64] N. K. Katiyar, G. Goel, S. Hawi, and S. Goel, "Nature-inspired materials: Emerging trends and prospects," *NPG Asia Mater.*, vol. 13, no. 1, 2021, doi: 10.1038/s41427-021-00322-y.
- [65] T. Rowley, "Science imitates life," *Lab Anim. (NY)*, vol. 42, no. 8, pp. 271–272, 2013, doi: 10.1038/labam.351.
- [66] H. Chowhury and B. Loganathan, "Biomimetics of boxfish: Designing an aerodynamically efficient passenger car," in *Biomimicry for Aerospace: Technologies and Applications*, 1st. ed., V. Shyman, M. Eggermont, and A. F. Hepp, Eds. Amsterdam, The Netherlands: Elsevier Inc., 2022, pp. 211–236. doi: <https://doi.org/10.1016/C2019-0-01300-3>.
- [67] S. Hayes, C. Desha, and D. Baumeister, "Learning from nature – Biomimicry innovation to support infrastructure sustainability and resilience," *Technol. Forecast. Soc. Change*, vol. 161, no. September, p. 120287, 2020, doi: 10.1016/j.techfore.2020.120287.
- [68] N. R. Fisco and H. Adeli, "Smart structures: Part I - Active and semi-active control," *Sci. Iran.*, vol. 18, no. 3 A, pp. 275–284, 2011, doi: 10.1016/j.scient.2011.05.034.
- [69] S. S. Heganna and J. J. Joglekar, "Active Vibration Control of Smart Structure Using PZT Patches," *Procedia Comput. Sci.*, vol. 89, pp. 710–715, 2016, doi: 10.1016/j.procs.2016.06.040.
- [70] D. Feliu-Talegon, A. San-Millan, and V. Feliu-Batlle, "Fractional-order integral resonant control of collocated smart structures," *Control Eng. Pract.*, vol. 56, pp. 210–223, 2016, doi: 10.1016/j.conengprac.2016.07.016.
- [71] A. Sharma, "Effect of porosity on active vibration control of smart structure using porous

- functionally graded piezoelectric material,” *Compos. Struct.*, vol. 280, no. August 2021, p. 114815, 2022, doi: 10.1016/j.compstruct.2021.114815.
- [72] C. Zaccardi, A. Mazette, and L. Chamoin, “Numerical Studies of Smart Structure With Piezoelectric Actuators to Enhance Surface Integrity,” *Procedia CIRP*, vol. 108, no. C, pp. 147–151, 2022, doi: 10.1016/j.procir.2022.03.027.
- [73] W. K. Chiu, Y. L. Koh, S. C. Galea, and N. Rajic, “Smart structure application in bonded repairs,” *Compos. Struct.*, vol. 50, no. 4, pp. 433–444, 2000, doi: 10.1016/S0263-8223(00)00110-0.
- [74] J. M. Sinapius, *Adaptronics – Smart Structures and Materials*. Springer-Verlag, 2021. doi: 10.1007/978-3-662-61399-3.
- [75] W. Cao, “Multifunctional materials: the basis for adaptronics,” in *Adaptronics and Smart Structures: Basics, Materials, Design and Applications*, H. Janocha, Ed. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2007, pp. 29–53. doi: 10.1007/978-3-540-71967-0.
- [76] S. Bahl, H. Nagar, I. Singh, and S. Sehgal, “Smart materials types, properties and applications: A review,” *Mater. Today Proc.*, vol. 28, pp. 1302–1306, 2020, doi: 10.1016/j.matpr.2020.04.505.
- [77] U. Shukla and K. Garg, “Journey of smart material from composite to shape memory alloy (SMA), characterization and their applications-A review,” *Smart Mater. Med.*, vol. 4, no. September 2022, pp. 227–242, 2023, doi: 10.1016/j.smaim.2022.10.002.
- [78] A. Suleman, “Adaptive composite systems: modeling and applications,” in *Encyclopedia of Smart Materials*, 1 st., M. Schwartz, Ed. New York, NY, USA: Wiley, 2002, pp. 16–27. doi: 10.1002/0471216275.
- [79] L. Lu, W. Ding, J. Liu, and B. Yang, “Flexible PVDF based piezoelectric nanogenerators,” *Nano Energy*, vol. 78, no. July, p. 105251, 2020, doi: 10.1016/j.nanoen.2020.105251.
- [80] J. Curie and P. Curie, “Développement par compression de l’électricité polaire des cristaux hémihédres à faces inclinées,” *Bull. la Société minéralogique Fr.*, vol. 3, no. 4, pp. 90–93, 1880, doi: doi : <https://doi.org/10.3406/bulmi.1880.1564>.
- [81] H. S. Tzou, *Piezoelectric Shells*, vol. 19. Dordrecht: Springer Netherlands, 1993. doi: 10.1007/978-94-011-1783-8.
- [82] T. G. Zielinski, “Introduction Equations of piezoelectricity Forms of constitutive law

Thermoelastic analogy Fundamentals of Piezoelectricity Introductory Course on Multiphysics Modelling.” Institute of Fundamental Technological Research of the Polish Academy of Sciences, Warsaw, Poland, 2016.

- [83] M. Shahinpoor and H.-J. Schneider, *Intelligent Materials*. RSC Publishing, 2008.
- [84] E. T. Enikov, *Smart Structures and Materials*, vol. 43. Cham: Springer International Publishing, 2017. doi: 10.1007/978-3-319-44507-6.
- [85] E. Balmes and A. Deraemaeker, *Modeling structures with piezoelectric materials*. SDTools, 2001. [Online]. Available: <https://www.sdtools.com/help/piezo.pdf>
- [86] P. K. Panda, B. Sahoo, and T. S. Thejas, “High strain lead-free piezo ceramics for sensor and actuator applications: A review,” *Sensors Int.*, vol. 4, no. December 2022, p. 100226, 2023, doi: 10.1016/j.sintl.2022.100226.
- [87] M. Smith and S. Kar-Narayan, “Piezoelectric polymers: theory, challenges and opportunities,” *Int. Mater. Rev.*, vol. 67, no. 1, pp. 65–88, 2022, doi: 10.1080/09506608.2021.1915935.
- [88] N. Sezer and M. Koç, “A comprehensive review on the state-of-the-art of piezoelectric energy harvesting,” *Nano Energy*, vol. 80, no. August 2020, p. 105567, 2021, doi: 10.1016/j.nanoen.2020.105567.
- [89] P. Li, Z. Yang, and W. Tian, “Nonlinear aeroelastic analysis and active flutter control of functionally graded piezoelectric material plate,” *Thin-Walled Struct.*, vol. 183, no. December 2022, p. 110323, 2023, doi: 10.1016/j.tws.2022.110323.
- [90] P. Kumar and S. P. Harsha, “Dynamic analysis of porosity dependent functionally graded sigmoid piezoelectric (FGSP) plate,” *Structures*, vol. 46, no. October, pp. 1737–1752, 2022, doi: 10.1016/j.istruc.2022.11.021.
- [91] B. Behjat, M. Salehi, A. Armin, M. Sadighi, and M. Abbasi, “Static and dynamic analysis of functionally graded piezoelectric plates under mechanical and electrical loading,” *Sci. Iran.*, vol. 18, no. 4 B, pp. 986–994, 2011, doi: 10.1016/j.scient.2011.07.009.
- [92] Z. Yin, J. Zhang, F. Yang, W. Ye, J. Liu, and G. Lin, “An efficient scaled boundary finite element approach in bending and buckling analysis of functionally graded piezoelectric plates,” *Eng. Anal. Bound. Elem.*, vol. 132, no. May, pp. 168–181, 2021, doi: 10.1016/j.enganabound.2021.07.015.

- [93] J. Li, Y. Xue, F. Li, and Y. Narita, “Active vibration control of functionally graded piezoelectric material plate,” *Compos. Struct.*, vol. 207, no. July 2018, pp. 509–518, 2019, doi: 10.1016/j.compstruct.2018.09.053.
- [94] D. Ladvanjari, A. Mahajan, A. Dhanjode, and R. K. Patil, “Static and modal analysis of functionally graded piezoelectric plate for sensor responses,” *Mater. Today Proc.*, vol. 72, pp. 1678–1684, 2023, doi: 10.1016/j.matpr.2022.09.468.
- [95] P. Zhang, C. Qi, X. Sun, H. Fang, and Y. Huang, “Bending behaviors of the in-plane bidirectional functionally graded piezoelectric material plates,” *Mech. Adv. Mater. Struct.*, vol. 29, no. 13, pp. 1925–1945, 2022, doi: 10.1080/15376494.2020.1846100.
- [96] E. Carrera, S. Brischetto, and P. Nali, *Plates and Shells for Smart Structures: Classical and Advanced Theories for Modeling and Analysis*. Wiley, 2011.
- [97] J. N. Reddy, *Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells*, 2nd ed. Boca Raton, FL, USA: CRC Press, 2006. doi: 10.1201/9780849384165.
- [98] A. Fernandes and J. Pouget, “Accurate modelling of piezoelectric plates: Single-layered plate,” *Arch. Appl. Mech.*, vol. 71, no. 8, pp. 509–524, 2001, doi: 10.1007/s004190100168.
- [99] A. Fernandes and J. Pouget, “Analytical and numerical approaches to piezoelectric bimorph,” *Int. J. Solids Struct.*, vol. 40, no. 17, pp. 4331–4352, 2003, doi: 10.1016/S0020-7683(03)00222-1.
- [100] M. A. R. Loja, J. Infante Barbosa, C. M. Mota Soares, and C. A. Mota Soares, “Analysis of piezolaminated plates by the spline finite strip method,” *Comput. Struct.*, vol. 79, no. 26–28, pp. 2321–2333, 2001, doi: 10.1016/S0045-7949(01)00065-7.
- [101] J. N. Reddy, *An Introduction to the Finite Element Method*, 3rd ed. McGraw-Hill, 2006.
- [102] S. Y. Wang, “A finite element model for the static and dynamic analysis of a piezoelectric bimorph,” *Int. J. Solids Struct.*, vol. 41, no. 15, pp. 4075–4096, 2004, doi: 10.1016/j.ijsolstr.2004.02.058.
- [103] X. S. Yang and S. Koziel, “Computational optimization: An overview,” in *Computational Optimization, Methods and Algorithms*, 1st ed., vol. 356, S. Koziel and X. S. Yang, Eds. Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 2011, pp. 1–11. doi: 10.1007/978-3-642-20859-1.
- [104] M. French, *Fundamentals of Optimization: Methods, minimum principles, and applications for making things better*, 1st. editi., vol. 53, no. 3. West Lafayette, IN, USA: Springer

- International Publishing, 2018. doi: 10.1007/978-3-319-76192-3.
- [105] R. K. Arora, *Optimization: Algorithms and applications*, 1st ed. Boca Raton, FL, USA: CRC Press, 2005.
- [106] M. D. Intriligator, *Mathematical Optimization and Economic Theory*, 1st ed., vol. 4, no. 1. Philadelphia, PA, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002. doi: 10.1137/1.9780898719215.
- [107] G. N. Vanderplaats, *Numerical Optimization Techniques For Engineering Design*, 3rd ed. Colorado Springs, CO, USA: Vanderplaats Research & Development, Inc., 1999.
- [108] W. Spendley, G. R. Hext, and F. R. Himsworth, “Sequential Application of Simplex Designs in Optimisation and Evolutionary Operation,” *Technometrics*, vol. 4, no. 4, pp. 441–461, 1962, doi: 10.1080/00401706.1962.10490033.
- [109] G. B. Dantzig, A. Orden, and P. Wolfe, “The generalized simplex method for minimizing a linear form under linear inequality restraints,” *Pacific J. Math.*, vol. 5, no. 2, pp. 183–195, 1955, doi: 10.2140/pjm.1955.5.183.
- [110] M. Cavazzuti, *Optimization Methods: From Theory to Design*, 1st ed. Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 2013. doi: 10.1007/978-3-642-31187-1.
- [111] S. Jalili, *Cultural Algorithms*, 1st ed. Singapore: Springer Singapore, 2022. doi: 10.1007/978-981-19-4633-2.
- [112] J. S. Chou and D. N. Truong, “A novel metaheuristic optimizer inspired by behavior of jellyfish in ocean,” *Appl. Math. Comput.*, vol. 389, p. 125535, 2021, doi: 10.1016/j.amc.2020.125535.
- [113] K. Hussain, M. N. Mohd Salleh, S. Cheng, and Y. Shi, “Metaheuristic research: a comprehensive survey,” *Artif. Intell. Rev.*, vol. 52, no. 4, pp. 2191–2233, 2019, doi: 10.1007/s10462-017-9605-z.
- [114] J. Kennedy and R. Eberhart, “Particle Swarm Optimization,” in *Proceedings of ICNN’95 - International Conference on Neural Networks*, 1995, vol. 4, pp. 1942–1948. doi: 10.1109/ICNN.1995.488968.
- [115] D. Karaboga, “An Idea Based on Honey Bee Swarm for Numerical Optimization,” Kayseri, Turquia, Rep. TR06, 2005.

- [116] D. Karaboga and B. Akay, “A comparative study of Artificial Bee Colony algorithm,” *Appl. Math. Comput.*, vol. 214, no. 1, pp. 108–132, 2009, doi: 10.1016/j.amc.2009.03.090.
- [117] J. S. Chou and A. Molla, “Recent advances in use of bio-inspired jellyfish search algorithm for solving optimization problems,” *Sci. Rep.*, vol. 12, no. 1, pp. 1–23, 2022, doi: 10.1038/s41598-022-23121-z.
- [118] M. Croci, M. Fasi, N. J. Higham, T. Mary, and M. Mikaitis, “Stochastic rounding: Implementation, error analysis and applications,” *R. Soc. Open Sci.*, vol. 9, no. 3, 2022, doi: 10.1098/rsos.211631.
- [119] D. R. J. Owen and E. Hinton, “Elasto-plastic Timoshenko beam analysis,” in *Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice*, 1st ed., Swansea, UK: Pineridge Press Limited, 1980, pp. 121–153.
- [120] M. A. R. Loja, “Modelos de elementos finitos para análise estática e dinâmica de vigas construídas em materiais compósitos,” M.S. thesis, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, 1995.
- [121] I. M. B. Dupret Miranda, “Análise Estática e Dinâmica de Vigas Laminadas Compósitas com recurso a modelos baseados na Teoria de Deformação de Corte de Alta Ordem,” M.S thesis, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, 2008.
- [122] H. S. Tzou and C. I. Tseng, “Distributed vibration control and identification of coupled elastic/piezoelectric systems: Finite element formulation and applications,” *Mech. Syst. Signal Process.*, vol. 5, no. 3, pp. 215–231, 1991, doi: 10.1016/0888-3270(91)90044-6.
- [123] N. H. Shen, “Analysis of beams containing piezoelectric sensors and actuators,” *Smart Mater. Struct.*, vol. 3, no. 4, pp. 439–447, 1994, doi: 10.1088/0964-1726/3/4/006.
- [124] W. S. Hwang and H. C. Park, “Finite element modeling of piezoelectric sensors and actuators,” *AIAA J.*, vol. 31, no. 5, pp. 930–937, 1993, doi: 10.2514/3.11707.
- [125] J. J. de L. Jr., “Modelagem de Sensores e Actuadores Piezoelétrico com Aplicações em Controle Ativo de Estruturas,” Ph.D. dissertation, Universidade Estadual de Campinas, 1999.
- [126] G. M. Odegard, “Constitutive modeling of piezoelectric polymer composites,” *Acta Mater.*, vol. 52, no. 18, pp. 5315–5330, 2004, doi: 10.1016/j.actamat.2004.07.037.

Anexos

Página intencionalmente deixada em branco

Anexo A

Estudos de Verificação

O presente anexo é dedicado à apresentação integral de resultados decorrente dos estudos de verificação realizados. São apresentados um conjunto de resultados considerados relevantes para a interpretação dos resultados obtidos, bem como mostrar algum do trabalho desenvolvido no âmbito desta fase de estudos.

Em termos de estrutura, a cada estudo realizado, é reservado um tópico para exposição dos resultados obtidos. A análise dos mesmos é feita exclusivamente no documento principal.

1. A Estudo de Verificação 3

Os resultados apresentados no presente ponto, correspondem ao Estudo de Verificação 3 (4.1.1.2).

Tabela A1 - Estudo comparativo da evolução do deslocamento máximo transversal adimensionalizado numa placa de material ortotrópico

Malha	\bar{w}		
	presente	[FALTA REFERÊNCIA]	
		FEM FSDT (δ (%))	Analítico FSDT (δ (%))
4 × 4	0,732	0,776 (6,01)	0,726 (0,82)
6 × 6	0,725	0,765 (5,52)	0,726 (0,14)
8 × 8	0,725	0,763 (5,24)	0,726 (0,14)
10 × 10	0,725	0,763 (5,24)	0,726 (0,14)
14 × 14	0,725	0,763 (5,24)	0,726 (0,14)
18 × 18	0,726	0,763 (5,10)	0,726 (0,00)
20 × 20	0,726	0,763 (5,10)	0,726 (0,00)

2. A Estudo de Verificação 4

No presente ponto, os resultados apresentados, complementam o Estudo de Verificação 4 (4.1.1.2).

Tabela A2 - Estudo comparativo da evolução do deslocamento máximo transversal adimensionalizado numa placa de material ortotrópico com $L/h=20$

Malha	\bar{w}	δ (%) [97]
2 × 2	0,0525	15,62
4 × 4	0,0612	0,82
6 × 6	0,0606	0,17
8 × 8	0,0606	0,17
10 × 10	0,0606	0,17
12 × 12	0,0606	0,17
14 × 14	0,0606	0,17
16 × 16	0,0606	0,17
18 × 18	0,0606	0,17
20 × 20	0,0606	0,17

3. A Estudo de Verificação 15

Os resultados apresentados no presente ponto, correspondem ao Estudo de Verificação 15 (4.1.3.1).

Tabela A3 - Valores ótimos por corrida e respetiva localização (Goldstein-Price)

Corrida	X_1^*	X_2^*	$f(X_1^*, X_2^*)$
1	0,001683	-0,998004	3,001707
2	-0,000783	-1,001984	3,001523
3	0,000785	-1,001902	3,002049
4	-0,001419	-1,000585	3,000476
5	0,002105	-0,996940	3,003760
6	-0,004272	-1,000781	3,004146
7	0,006374	-0,997742	3,009300
8	0,001619	-0,995357	3,008317
9	-0,004254	-0,999572	3,005019
10	0,006499	-1,000130	3,010876
11	-0,006559	-1,005867	3,017522
12	0,004240	-0,998666	3,004070
13	0,002601	-0,998337	3,001961
14	-0,003599	-0,994298	3,021457
15	-0,001575	-1,002477	3,002440
16	-0,002175	-0,998033	3,003766
17	0,005205	-0,995815	3,009639
18	0,001680	-0,998614	3,001036
19	0,001007	-1,001715	3,001906
20	-0,003075	-1,006721	3,017570
21	-0,001455	-1,003064	3,003637
22	-0,003871	-1,002515	3,004422
23	0,001121	-0,996441	3,004912
24	0,006979	-0,995630	3,013848
25	-0,005159	-1,004383	3,010176
26	0,000433	-1,002101	3,002158
27	-0,007987	-1,002362	3,014474
28	-0,000792	-1,001080	3,000477
29	0,000599	-1,002032	3,002144
30	-0,000583	-0,998176	3,001747
	Média		3,006218
	Desvio Padrão		0,005780

4. A Estudo de Verificação 16

Os resultados apresentados no presente ponto, correspondem ao Estudo de Verificação 16 (4.1.3.1).

Tabela A4 - Valores ótimos por corrida e respetiva localização (Rastringin)

Corrida	X_1^*	X_2^*	$f(X_1^*, X_2^*)$
1	-0,000376	0,005780	0,006655
2	-0,001343	-0,001790	0,000994
3	-0,003076	0,002329	0,002953
4	0,003398	-0,002518	0,003549
5	-0,003299	-0,003639	0,004786
6	0,003625	-0,002973	0,004360
7	-0,001988	0,003808	0,003660
8	-0,005970	0,003552	0,009573
9	-0,003706	0,005443	0,008602
10	0,001716	0,006141	0,008064
11	0,000245	0,003331	0,002213
12	0,002456	-0,001781	0,001826
13	-0,001342	-0,005015	0,005346
14	0,001737	0,000746	0,000709
15	-0,004953	0,002920	0,006558
16	-0,005678	0,004073	0,009686
17	-0,004213	-0,003872	0,006496
18	-0,001984	-0,004989	0,005719
19	-0,004471	-0,002078	0,004822
20	-0,006662	0,001024	0,009012
21	0,001379	-0,000107	0,000380
22	0,001057	0,000170	0,000227
23	0,000262	-0,000740	0,000122
24	-0,001494	-0,005008	0,005418
25	-0,000624	-0,006229	0,007774
26	-0,001002	-0,006921	0,009699
27	-0,000906	-0,003973	0,003294
28	-0,006107	0,000888	0,007554
29	-0,001984	0,005544	0,006878
30	-0,001517	0,002814	0,002027
Média			0,004965
Desvio Padrão			0,002999

Anexo B

Estudos Paramétricos

O presente anexo é dedicado à apresentação integral de resultados decorrente dos estudos paramétricos realizados. Esta abordagem, decorre da necessidade de otimizar e em última análise economizar, espaço no documento principal, por forma a não ultrapassar os limites impostos por regulamento, nem maçar o leitor com estudos de menor importância.

Em termos de estrutura, a cada estudo realizado, é reservado um tópico para exposição dos resultados obtidos. A análise dos mesmos é feita exclusivamente no documento principal.

1. B Estudo Paramétrico 1

Os resultados que abaixo se apresentam, correspondem ao Estudo Paramétrico 1 (4.2.1.1).

Tabela B1 - Estudo comparativo da evolução do deslocamento máximo transversal a meio vão numa viga de material isotrópico com $L/h=1$ e $L/h=2$ para diferentes discretizações

Malha	L/h					
	1			2		
	w [m]	δ (%) [120]	t_{CPU} [s]	w [m]	δ (%) [120]	t_{CPU} [s]
2 × 1	2,32377E-12	17,82	3,921	1,47751E-11	15,15	4,093
4 × 1	2,55917E-12	25,38	4,500	1,86152E-11	8,60	4,406
6 × 1	2,60345E-12	26,65	4,750	1,93372E-11	12,01	4,812
8 × 1	2,61898E-12	27,08	5,375	1,95902E-11	13,15	5,515
10 × 1	2,62618E-12	27,28	6,125	1,97075E-11	13,67	5,781
12 × 1	2,63009E-12	27,39	6,625	1,97711E-11	13,95	6,625
14 × 1	2,63244E-12	27,45	7,265	1,98096E-11	14,11	7,437
16 × 1	2,63398E-12	27,50	8,250	1,98345E-11	14,22	8,046
18 × 1	2,63502E-12	27,53	9,359	1,98516E-11	14,29	9,343
20 × 1	2,63578E-12	27,55	10,546	1,98638E-11	14,35	10,578

Tabela B2 - Estudo comparativo da evolução do deslocamento máximo transversal a meio vão numa viga de material isotrópico com $L/h=4$ e $L/h=10$ para diferentes discretizações

Malha	L/h					
	4			10		
	w [m]	δ (%) [120]	t_{CPU} [s]	w [m]	δ (%) [120]	t_{CPU} [s]
2 × 1	1,46916E-10	48,42	3,812	4,76070E-09	66,47	3,796
4 × 1	2,08730E-10	4,47	4,437	7,17963E-09	10,39	4,625
6 × 1	2,20341E-10	1,04	5,062	7,63381E-09	3,82	4,578
8 × 1	2,24410E-10	2,83	5,375	7,79295E-09	1,70	5,562
10 × 1	2,26294E-10	3,64	5,906	7,86665E-09	0,75	6,187
12 × 1	2,27318E-10	4,07	6,390	7,90670E-09	0,24	6,593
14 × 1	2,27936E-10	4,33	7,593	7,93086E-09	0,07	7,562
16 × 1	2,28336E-10	4,50	8,437	7,94653E-09	0,27	8,531
18 × 1	2,28611E-10	4,62	8,968	7,95728E-09	0,40	9,359
20 × 1	2,28808E-10	4,70	10,859	7,96497E-09	0,50	10,687

Tabela B3 - Estudo comparativo da evolução do deslocamento máximo transversal a meio vão numa viga de material isotrópico com $L/h=20$ e $L/h=50$ para diferentes discretizações

Malha	L/h					
	20			50		
	w [m]	δ (%) [120]	t_{CPU} [s]	w [m]	δ (%) [120]	t_{CPU} [s]
2 × 1	7,39355E-08	69,68	4,171	2,86366E-06	70,61	3,843
4 × 1	1,12649E-07	11,36	4,531	4,37599E-06	11,65	4,359
6 × 1	1,19917E-07	4,61	4,953	4,65993E-06	4,84	4,546
8 × 1	1,22463E-07	2,44	5,546	4,75941E-06	2,65	5,453
10 × 1	1,23643E-07	1,46	5,906	4,80548E-06	1,67	5,703
12 × 1	1,24284E-07	0,94	6,609	4,83052E-06	1,14	6,750
14 × 1	1,24670E-07	0,63	7,578	4,84562E-06	0,83	7,375
16 × 1	1,24921E-07	0,42	8,171	4,85542E-06	0,62	8,000
18 × 1	1,25093E-07	0,29	8,968	4,86214E-06	0,48	9,187
20 × 1	1,25216E-07	0,19	10,640	4,86695E-06	0,38	10,781

Tabela B4 - Estudo comparativo da evolução do deslocamento máximo transversal a meio vão numa viga de material isotrópico com $L/h=100$ para diferentes discretizações

Malha	L/h		
	100		
	w [m]	δ (%) [120]	t_{CPU} [s]
2 × 1	4,57626E-05	70,74	3,890
4 × 1	6,99603E-05	11,69	4,328
6 × 1	7,45032E-05	4,88	4,890
8 × 1	7,60949E-05	2,68	5,421
10 × 1	7,68322E-05	1,70	5,859
12 × 1	7,72328E-05	1,17	6,843
14 × 1	7,74744E-05	0,85	7,265
16 × 1	7,76312E-05	0,65	8,109
18 × 1	7,77387E-05	0,51	9,406
20 × 1	7,78156E-05	0,41	10,906

2. B Estudo Paramétrico 2

Os resultados dispostos nas tabelas abaixo, correspondem ao Estudo Paramétrico 2 (4.2.1.1)

Tabela B5 - Estudo comparativo da evolução do deslocamento máximo transversal adimensionalizado numa placa de material isotrópico com $L/h=10$ e $L/h=20$ para diferentes discretizações

Malha	L/h					
	10			20		
	\bar{w}	δ (%) [120]	t_{CPU} [s]	\bar{w}	δ (%) [120]	t_{CPU} [s]
2 × 2	0,3511	0,4259	4,593	0,3261	0,4111	4,593
4 × 4	0,4188	0,4259	9,140	0,4022	0,4111	8,453
6 × 6	0,4230	0,4259	16,406	0,4075	0,4111	16,187
8 × 8	0,4242	0,4259	38,203	0,4091	0,4111	33,640
10 × 10	0,4248	0,4259	75,406	0,4099	0,4111	74,281
12 × 12	0,4252	0,4259	173,140	0,4103	0,4111	168,500
14 × 14	0,4253	0,4259	420,937	0,4105	0,4111	407,187
16 × 16	0,4255	0,4259	927,031	0,4106	0,4111	932,625
18 × 18	0,4256	0,4259	2048,515	0,4108	0,4111	1997,937
20 × 20	0,4256	0,4259	3539,587	0,4108	0,4111	3559,500

Tabela B6 - Estudo comparativo da evolução do deslocamento máximo transversal adimensionalizado numa placa de material isotrópico com $L/h=50$ e $L/h=100$ para diferentes discretizações

Malha	L/h					
	50			100		
	\bar{w}	δ (%) [120]	t_{CPU} [s]	\bar{w}	δ (%) [120]	t_{CPU} [s]
2 × 2	0,3191	0,4070	4,687	0,3181	0,4060	4,734
4 × 4	0,3975	0,4070	8,406	0,3968	0,4060	8,656
6 × 6	0,4031	0,4070	16,406	0,4025	0,4060	16,359
8 × 8	0,4049	0,4070	33,015	0,4043	0,4060	33,265
10 × 10	0,4057	0,4070	73,468	0,4051	0,4060	75,031
12 × 12	0,4061	0,4070	166,578	0,4055	0,4060	165,421
14 × 14	0,4063	0,4070	406,140	0,4057	0,4060	405,937
16 × 16	0,4065	0,4070	979,968	0,4059	0,4060	933,234
18 × 18	0,4066	0,4070	1994,000	0,4060	0,4060	1980,500
20 × 20	0,4067	0,4070	3535,296	0,4061	0,4060	3586,656

3. B Estudo Paramétrico 3

Os resultados dispostos nas tabelas abaixo, correspondem ao Estudo Paramétrico 3 (4.2.1.2).

Tabela B7 - Estudo comparativo da evolução de \bar{w} para uma FGP em função de diferentes valores de p para uma abordagem AA e utilizando a regra das misturas de Voigt

Malha	p									
	0		0,5		1		2		∞	
	\bar{w}	δ (%) [97]	\bar{w}	δ (%) [97]	\bar{w}	δ (%) [97]	\bar{w}	δ (%) [97]	\bar{w}	δ (%) [97]
2 × 2	0,0166	-	0,0207	-	0,0227	-	0,0245	-	0,0358	-
4 × 4	0,0204	-	0,0256	-	0,0283	-	0,0306	-	0,0440	-
6 × 6	0,0207	-	0,0260	-	0,0286	-	0,0311	-	0,0446	-
8 × 8	0,0207	-	-	-	0,0288	-	0,0312	-	0,0447	-
10 × 10	0,0208	-	-	-	0,0288	-	0,0312	-	0,0448	-
12 × 12	0,0208	-	-	-	0,0288	-	0,0313	-	0,0448	-
14 × 14	0,0208	-	-	-	0,0289	-	0,0313	-	0,0449	-
16 × 16	0,0208	-	-	-	0,0289	-	0,0313	-	0,0449	-
18 × 18	0,0208	0,00	-	-	0,0289	2,77	0,0313	3,83	0,0449	0,00
20 × 20	0,0208	-	-	-	0,0289	-	0,0313	-	0,0449	-

Tabela B8 - Tempos de computação em segundos do estudo comparativo da evolução de \bar{w} para uma abordagem AA e utilizando a regra das misturas de Voigt

Malha	p				
	0	0,5	1	2	∞
	t_{CPU} [s]	t_{CPU} [s]	t_{CPU} [s]	t_{CPU} [s]	t_{CPU} [s]
2 × 2	4,437	144,281	5,453	4,718	4,718
4 × 4	7,937	2646,312	9,953	9,890	8,156
6 × 6	14,328	13845,625	17,312	17,875	14,562
8 × 8	22,296	-	29,203	31,500	23,078
10 × 10	33,140	-	45,296	45,390	34,218
12 × 12	47,265	-	64,093	65,343	52,859
14 × 14	62,453	-	88,609	111,765	67,937
16 × 16	83,406	-	117,187	131,421	81,781
18 × 18	111,781	-	155,687	164,437	106,640
20 × 20	133,656	-	234,546	219,953	139,484

Tabela B9 - Estudo comparativo da evolução de \bar{w} para uma FGP em função de diferentes valores de p para uma abordagem AN e utilizando a regra das misturas de Voigt

Malha	p									
	0		0,5		1		2		∞	
	\bar{w}	δ (%) [97]	\bar{w}	δ (%) [97]	\bar{w}	δ (%) [97]	\bar{w}	δ (%) [97]	\bar{w}	δ (%) [97]
2 × 2	0,0166	-	0,0207	-	0,0227	-	0,0246	-	0,0358	-
4 × 4	0,0204	-	0,0257	-	0,0284	-	0,0306	-	0,0440	-
6 × 6	0,0207	-	-	-	0,0286	-	0,0311	-	0,0446	-
8 × 8	0,0207	-	-	-	0,0288	-	0,0312	-	0,0447	-
10 × 10	0,0208	-	-	-	0,0288	-	0,0312	-	0,0448	-
12 × 12	0,0208	-	-	-	0,0288	-	0,0313	-	0,0448	-
14 × 14	0,0208	-	-	-	0,0289	-	0,0313	-	0,0449	-
16 × 16	0,0208	-	-	-	0,0289	-	0,0313	-	0,0449	-
18 × 18	0,0208	0,00	-	-	0,0289	2,69	0,0313	3,69	0,0449	0,00
20 × 20	0,0208	-	-	-	0,0289	-	0,0313	-	0,0449	-

Tabela B10 - Tempos de computação em segundos do estudo comparativo da evolução de \bar{w} para uma abordagem AN e utilizando a regra das misturas de Voigt

Malha	p				
	0	0,5	1	2	∞
	t_{CPU} [s]	t_{CPU} [s]	t_{CPU} [s]	t_{CPU} [s]	t_{CPU} [s]
2 × 2	4,421	146,062	4,480	4,656	5,027
4 × 4	7,031	2405,562	7,359	8,000	6,990
6 × 6	11,269	-	12,703	13,484	11,684
8 × 8	18,296	-	19,843	24,718	19,055
10 × 10	26,046	-	30,421	35,281	26,105
12 × 12	35,953	-	43,625	47,640	33,537
14 × 14	50,812	-	60,203	73,406	52,158
16 × 16	66,218	-	82,906	90,625	65,989
18 × 18	83,531	-	115,687	133,031	83,487
20 × 20	108,343	-	159,218	164,500	109,589

Tabela B11 - Estudo comparativo da evolução de \bar{w} para uma FGP em função de diferentes valores de p para uma abordagem NA e utilizando a regra das misturas de Voigt

Malha	p									
	0		0,5		1		2		∞	
	\bar{w}	δ (%) [97]	\bar{w}	δ (%) [97]	\bar{w}	δ (%) [97]	\bar{w}	δ (%) [97]	\bar{w}	δ (%) [97]
2 × 2	0,0168	-	0,0208	-	0,0229	-	0,0248	-	0,0361	-
4 × 4	0,0206	-	0,0258	-	0,0285	-	0,0310	-	0,0444	-
6 × 6	0,0209	-	0,0261	-	0,0289	-	0,0314	-	0,0450	-
8 × 8	0,0209	-	0,0262	-	0,0290	-	0,0316	-	0,0452	-
10 × 10	0,0210	-	0,0263	-	0,0291	-	0,0316	-	0,0452	-
12 × 12	0,0210	-	0,0263	-	0,0291	-	0,0317	-	0,0453	-
14 × 14	0,0210	-	0,0263	-	0,0291	-	0,0317	-	0,0453	-
16 × 16	0,0210	-	0,0263	-	0,0292	-	0,0317	-	0,0453	-
18 × 18	0,0210	0,95	0,0263	1,14	0,0292	1,71	0,0317	2,52	0,0453	0,88
20 × 20	0,0210	-	0,0263	-	0,0292	-	0,0317	-	0,0453	-

Tabela B12 - Tempos de computação em segundos do estudo comparativo da evolução de \bar{w} para uma abordagem NA e utilizando a regra das misturas de Voigt

Malha	p				
	0	0,5	1	2	∞
	t_{CPU} [s]	t_{CPU} [s]	t_{CPU} [s]	t_{CPU} [s]	t_{CPU} [s]
2 × 2	4,671	5,093	4,500	4,703	4,062
4 × 4	6,937	9,328	7,890	7,562	6,937
6 × 6	11,703	14,234	14,671	14,296	11,468
8 × 8	18,734	22,828	24,000	23,953	18,328
10 × 10	26,703	41,296	35,328	34,718	27,671
12 × 12	38,421	50,812	50,203	49,671	37,421
14 × 14	52,734	71,375	80,937	67,359	50,453
16 × 16	70,671	114,421	93,468	95,031	69,562
18 × 18	90,093	158,921	131,218	129,531	88,828
20 × 20	118,000	177,406	170,562	192,984	115,171

Tabela B13 - Estudo comparativo da evolução de \bar{w} para uma FGP em função de diferentes valores de p para uma abordagem NN e utilizando a regra das misturas de Voigt

Malha	p									
	0		0,5		1		2		∞	
	\bar{w}	δ (%) [97]	\bar{w}	δ (%) [97]	\bar{w}	δ (%) [97]	\bar{w}	δ (%) [97]	\bar{w}	δ (%) [97]
2 × 2	0,0168	-	0,0209	-	0,0229	-	0,0249	-	0,0362	-
4 × 4	0,0206	-	0,0258	-	0,0286	-	0,0310	-	0,0444	-
6 × 6	0,0209	-	0,0261	-	0,0289	-	0,0314	-	0,0450	-
8 × 8	0,0209	-	0,0262	-	0,0291	-	0,0316	-	0,0452	-
10 × 10	0,0210	-	0,0263	-	0,0291	-	0,0316	-	0,0452	-
12 × 12	0,0210	-	0,0263	-	0,0291	-	0,0317	-	0,0453	-
14 × 14	0,0210	-	0,0263	-	0,0292	-	0,0317	-	0,0453	-
16 × 16	0,0210	-	0,0263	-	0,0292	-	0,0317	-	0,0453	-
18 × 18	0,0210	0,95	0,0263	1,14	0,0292	1,71	0,0317	2,52	0,0453	0,88
20 × 20	0,0210	-	0,0263	-	0,0292	-	0,0317	-	0,0454	-

Tabela B14 - Tempos de computação em segundos do estudo comparativo da evolução de \bar{w} para uma abordagem NN e utilizando a regra das misturas de Voigt

Malha	p				
	0	0,5	1	2	∞
	t_{CPU} [s]	t_{CPU} [s]	t_{CPU} [s]	t_{CPU} [s]	t_{CPU} [s]
2 × 2	3,984	3,734	4,062	3,734	4,015
4 × 4	5,187	5,671	5,531	5,312	5,453
6 × 6	7,796	9,125	8,875	8,968	8,625
8 × 8	11,625	13,734	12,937	13,312	10,968
10 × 10	16,015	20,218	19,546	19,015	16,328
12 × 12	22,343	29,984	29,171	28,390	22,656
14 × 14	30,484	42,656	39,828	39,718	35,140
16 × 16	41,656	62,718	57,078	56,765	49,703
18 × 18	55,203	84,843	77,078	97,828	62,578
20 × 20	74,703	121,343	116,953	117,921	93,062

Tabela B15 - Estudo comparativo da evolução de \bar{w} para uma FGP em função de diferentes valores de p para uma abordagem NN e utilizando Mori-Tanaka

Malha	p									
	0		0,5		1		2		∞	
	\bar{w}	δ (%) [97]	\bar{w}	δ (%) [97]	\bar{w}	δ (%) [97]	\bar{w}	δ (%) [97]	\bar{w}	δ (%) [97]
2 × 2	0,0168	-	0,0218	-	0,0238	-	0,0258	-	0,0362	-
4 × 4	0,0206	-	0,0270	-	0,0296	-	0,0321	-	0,0444	-
6 × 6	0,0209	-	0,0273	-	0,0300	-	0,0325	-	0,0450	-
8 × 8	0,0209	-	0,0274	-	0,0302	-	0,0326	-	0,0452	-
10 × 10	0,0210	-	0,0275	-	0,0302	-	0,0327	-	0,0452	-
12 × 12	0,0210	-	0,0275	-	0,0302	-	0,0327	-	0,0453	-
14 × 14	0,0210	-	0,0275	-	0,0303	-	0,0327	-	0,0453	-
16 × 16	0,0210	-	0,0275	-	0,0303	-	0,0328	-	0,0453	-
18 × 18	0,0210	0,96	0,0275	1,43	0,0303	1,94	0,0328	1,80	0,0453	0,89
20 × 20	0,0210	-	0,0275	-	0,0303	-	0,0328	-	0,0453	-

Tabela B16 - Tempos de computação em segundos do estudo comparativo da evolução de \bar{w} para uma abordagem NN e utilizando Mori-Tanaka

Malha	p				
	0	0,5	1	2	∞
	t_{CPU} [s]	t_{CPU} [s]	t_{CPU} [s]	t_{CPU} [s]	t_{CPU} [s]
2 × 2	3,984	4,421	4,281	4,687	4,125
4 × 4	5,546	6,890	6,609	6,828	5,156
6 × 6	8,109	11,250	10,187	12,578	8,375
8 × 8	11,859	17,250	16,046	17,515	11,609
10 × 10	16,640	29,796	24,421	26,437	16,734
12 × 12	22,390	38,640	36,000	37,859	23,078
14 × 14	33,437	64,625	53,296	61,656	35,078
16 × 16	45,562	73,031	68,718	71,781	50,203
18 × 18	60,187	100,640	94,046	99,718	56,640
20 × 20	74,062	144,765	151,765	139,562	74,078

4.B. Estudo Paramétrico 4

Os resultados que abaixo se apresentam, estão associados ao Estudo Paramétrico 4 (4.2.2.1).

Tabela B17 - Deslocamento máximo da extremidade livre de uma viga bimorph (CFFF) para diferentes potenciais elétricos aplicados

Malha	ϕ [V]							
	0	1	2	5	10	20	50	100
	w [m]	w [m]	w [m]	w [m]	w [m]	w [m]	w [m]	w [m]
5 × 1	0,000E+00	3,450E-07	6,900E-07	1,725E-06	3,450E-06	6,900E-06	1,725E-05	3,450E-05
10 × 1	0,000E+00	3,450E-07	6,900E-07	1,725E-06	3,450E-06	6,900E-06	1,725E-05	3,450E-05
15 × 1	0,000E+00	3,450E-07	6,900E-07	1,725E-06	3,450E-06	6,900E-06	1,725E-05	3,450E-05

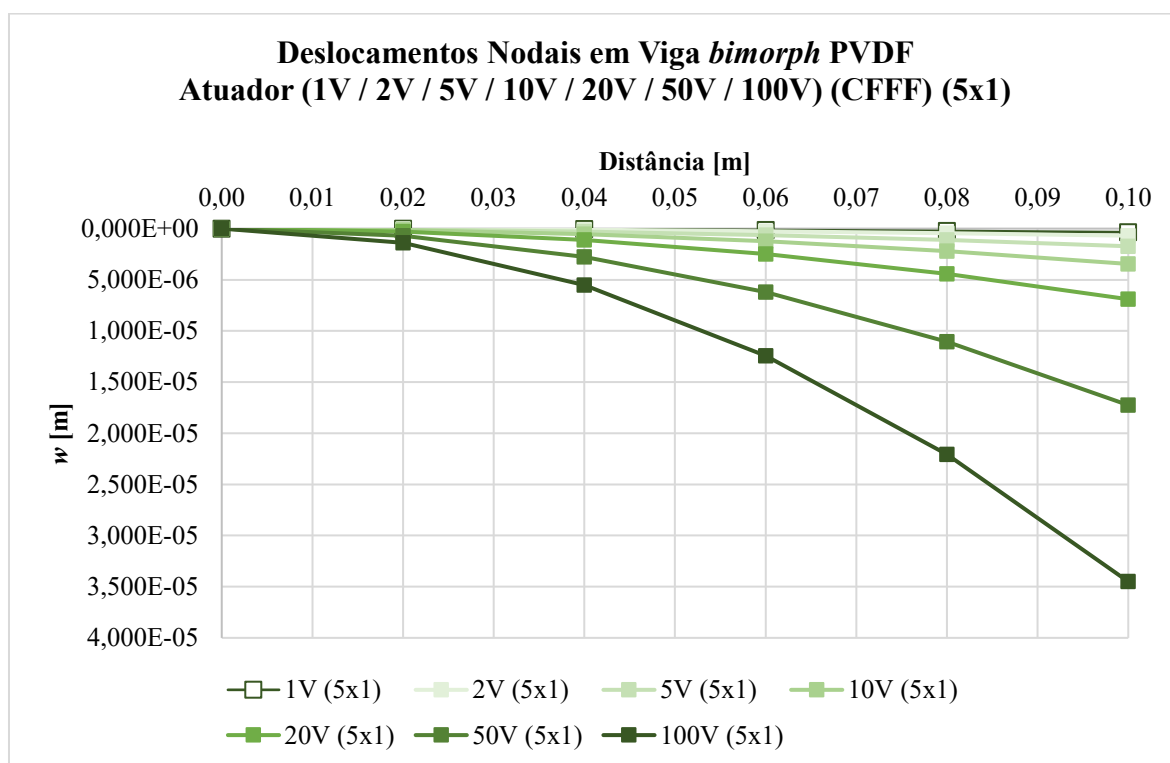


Figura B1 – Representação gráfica da evolução do deslocamento transversal nodal em função do comprimento da viga (CFFF) para diferentes potenciais aplicados utilizando uma malha de 5 × 1 elementos

Tabela B18 - Evolução do deslocamento transversal nodal em função do comprimento da viga (CFFF) para potenciais aplicados utilizando uma malha de 5×1 elementos

x [m]	ϕ [V]						
	1	2	5	10	20	50	100
	w [m]	w [m]	w [m]	w [m]	w [m]	w [m]	w [m]
0,00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00
0,02	1,380E-08	2,760E-08	6,900E-08	1,380E-07	2,760E-07	6,900E-07	1,380E-06
0,04	5,520E-08	1,104E-07	2,760E-07	5,520E-07	1,104E-06	2,760E-06	5,520E-06
0,06	1,242E-07	2,484E-07	6,210E-07	1,242E-06	2,484E-06	6,210E-06	1,242E-05
0,08	2,208E-07	4,416E-07	1,104E-06	2,208E-06	4,416E-06	1,104E-05	2,208E-05
0,10	3,450E-07	6,900E-07	1,725E-06	3,450E-06	6,900E-06	1,725E-05	3,450E-05

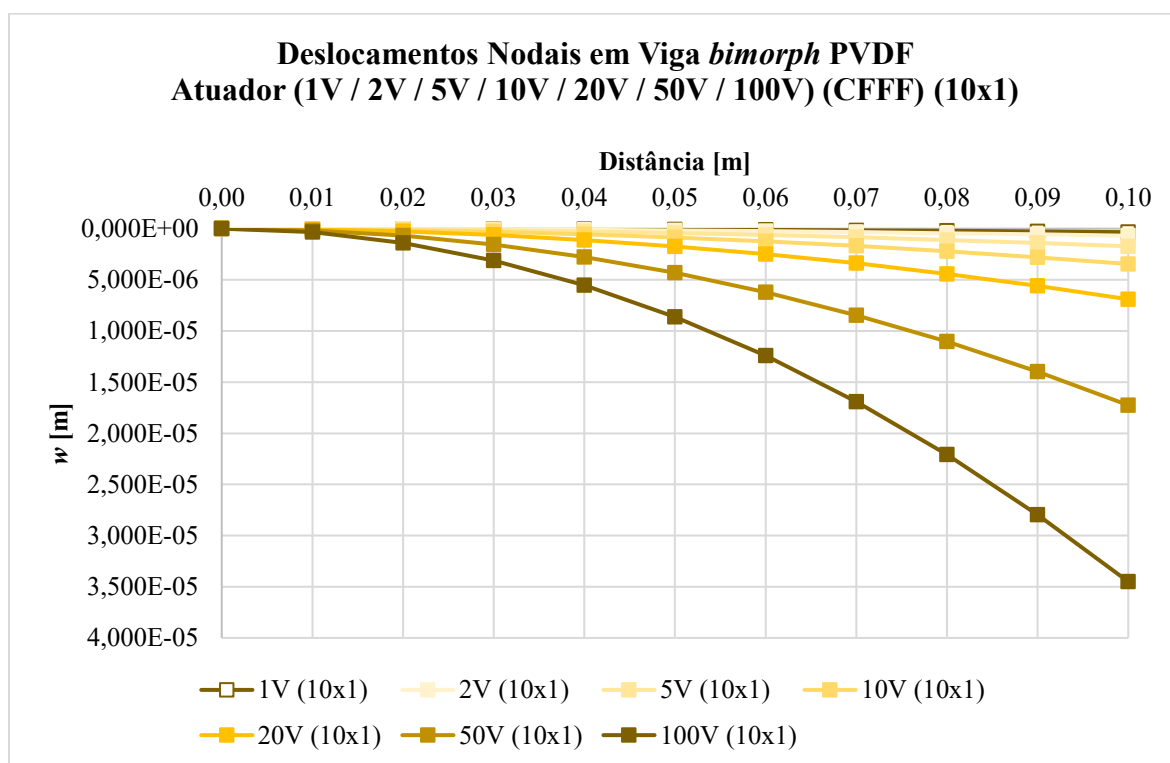


Figura B2 - Representação gráfica da evolução do deslocamento transversal nodal em função do comprimento da viga (CFFF) para diferentes potenciais aplicados utilizando uma malha de 10×1 elementos

Tabela B19 - Evolução do deslocamento transversal nodal em função do comprimento da viga (CFFF) para potenciais aplicados utilizando uma malha de 10×1 elementos

x [m]	ϕ [V]						
	1	2	5	10	20	50	100
	w [m]	w [m]	w [m]	w [m]	w [m]	w [m]	w [m]
0,00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00
0,01	3,450E-09	6,900E-09	1,725E-08	3,450E-08	6,900E-08	1,725E-07	3,450E-07
0,02	1,380E-08	2,760E-08	6,900E-08	1,380E-07	2,760E-07	6,900E-07	1,380E-06
0,03	3,105E-08	6,210E-08	1,553E-07	3,105E-07	6,210E-07	1,553E-06	3,105E-06
0,04	5,520E-08	1,104E-07	2,760E-07	5,520E-07	1,104E-06	2,760E-06	5,520E-06
0,05	8,625E-08	1,725E-07	4,313E-07	8,625E-07	1,725E-06	4,313E-06	8,625E-06
0,06	1,242E-07	2,484E-07	6,210E-07	1,242E-06	2,484E-06	6,210E-06	1,242E-05
0,07	1,691E-07	3,381E-07	8,453E-07	1,691E-06	3,381E-06	8,453E-06	1,691E-05
0,08	2,208E-07	4,416E-07	1,104E-06	2,208E-06	4,416E-06	1,104E-05	2,208E-05
0,09	2,795E-07	5,589E-07	1,397E-06	2,795E-06	5,589E-06	1,397E-05	2,795E-05
0,10	3,450E-07	6,900E-07	1,725E-06	3,450E-06	6,900E-06	1,725E-05	3,450E-05

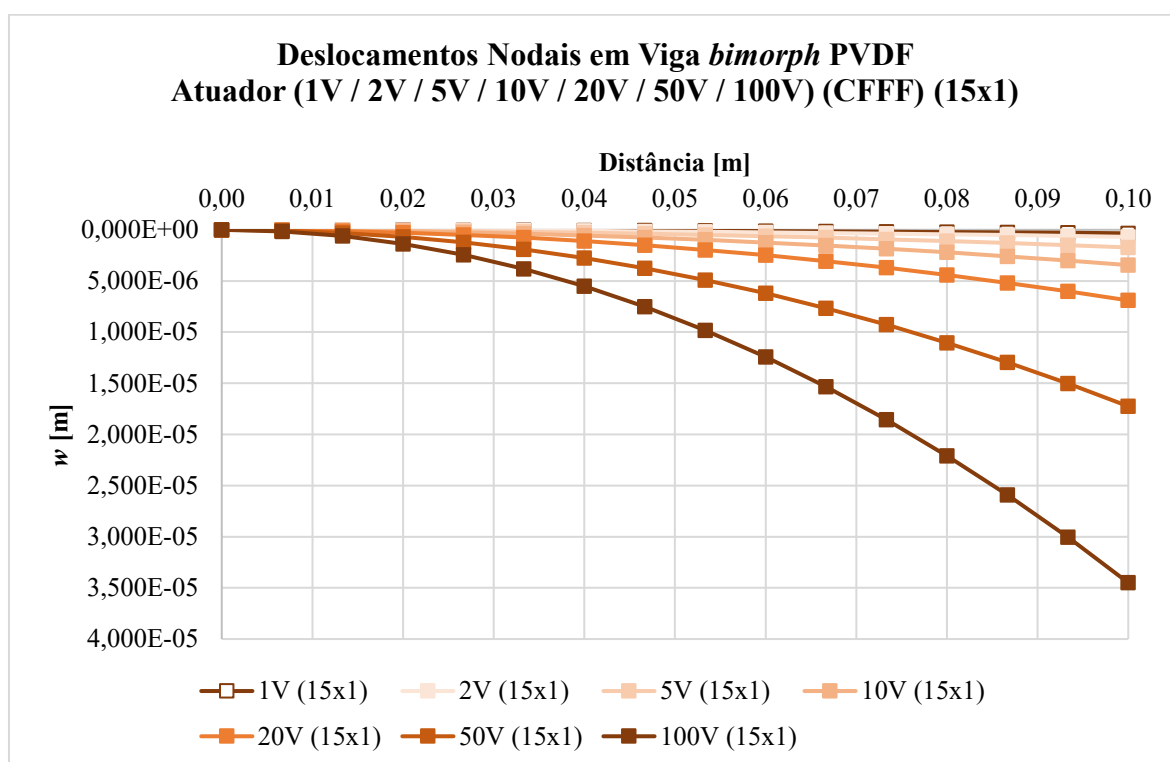


Figura B3 - Representação gráfica da evolução do deslocamento transversal nodal em função do comprimento da viga (CFFF) para diferentes potenciais aplicados utilizando uma malha de 15×1 elementos

Tabela B20 - Evolução do deslocamento transversal nodal em função do comprimento da viga (CFFF) para potenciais aplicados utilizando uma malha de 15×1 elementos

x [m]	ϕ [V]						
	1	2	5	10	20	50	100
	w [m]	w [m]	w [m]	w [m]	w [m]	w [m]	w [m]
0,0000	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00
0,0067	1,533E-09	3,067E-09	7,667E-09	1,533E-08	3,067E-08	7,667E-08	1,533E-07
0,0133	6,133E-09	1,227E-08	3,067E-08	6,133E-08	1,227E-07	3,067E-07	6,133E-07
0,0200	1,380E-08	2,760E-08	6,900E-08	1,380E-07	2,760E-07	6,900E-07	1,380E-06
0,0267	2,453E-08	4,907E-08	1,227E-07	2,453E-07	4,907E-07	1,227E-06	2,453E-06
0,0333	3,833E-08	7,667E-08	1,917E-07	3,833E-07	7,667E-07	1,917E-06	3,833E-06
0,0400	5,520E-08	1,104E-07	2,760E-07	5,520E-07	1,104E-06	2,760E-06	5,520E-06
0,0467	7,513E-08	1,503E-07	3,757E-07	7,513E-07	1,503E-06	3,757E-06	7,513E-06
0,0533	9,813E-08	1,963E-07	4,907E-07	9,813E-07	1,963E-06	4,907E-06	9,813E-06
0,0600	1,242E-07	2,484E-07	6,210E-07	1,242E-06	2,484E-06	6,210E-06	1,242E-05
0,0667	1,533E-07	3,067E-07	7,667E-07	1,533E-06	3,067E-06	7,667E-06	1,533E-05
0,0733	1,855E-07	3,711E-07	9,277E-07	1,855E-06	3,711E-06	9,277E-06	1,855E-05
0,0800	2,208E-07	4,416E-07	1,104E-06	2,208E-06	4,416E-06	1,104E-05	2,208E-05
0,0867	2,591E-07	5,183E-07	1,296E-06	2,591E-06	5,183E-06	1,296E-05	2,591E-05
0,0933	3,005E-07	6,011E-07	1,503E-06	3,005E-06	6,011E-06	1,503E-05	3,005E-05
0,1000	3,450E-07	6,900E-07	1,725E-06	3,450E-06	6,900E-06	1,725E-05	3,450E-05

5.B. Estudo Paramétrico 5

Os resultados dispostos nas tabelas abaixo, correspondem ao Estudo Paramétrico 3 (4.2.2.2).

Tabela B21 - Evolução do deslocamento transversal nodal para uma viga (CFFF) em configuração de atuador para uma discretização de 5×1 elementos

x [m]	w [m]
0,00	0,000E+00
0,02	1,380E-08
0,04	5,520E-08
0,06	1,242E-07
0,08	2,208E-07
0,10	3,450E-07

Tabela B22 - Evolução do deslocamento transversal nodal para uma viga (CFFF) em configuração de atuador para uma discretização de 10×1 elementos

x [m]	w [m]
0,00	0,000E+00
0,01	3,450E-09
0,02	1,380E-08
0,03	3,105E-08
0,04	5,520E-08
0,05	8,625E-08
0,06	1,242E-07
0,07	1,691E-07
0,08	2,208E-07
0,09	2,795E-07
0,10	3,450E-07

Tabela B23 - Evolução do deslocamento transversal nodal para uma viga (CFFF) em configuração de atuador para uma discretização de 15×1 elementos

x [m]	w [m]		
	presente	$\delta(\%)$ [100]	$\delta(\%)$ [122]
0,00	0,000E+00	0,00	0,00
0,00667	1,533E-09	-	-
0,01333	6,133E-09	-	-
0,02000	1,380E-08	0,72	0,00
0,02667	2,453E-08	-	-
0,03333	3,833E-08	-	-
0,04000	5,520E-08	0,18	0,00
0,04667	7,513E-08	-	-
0,05333	9,813E-08	-	-
0,06000	1,242E-07	0,00	0,00
0,06667	1,533E-07	-	-
0,07333	1,855E-07	-	-
0,08000	2,208E-07	0,00	0,00
0,08667	2,591E-07	-	-
0,09333	3,005E-07	-	-
0,10000	3,450E-07	0,00	0,00

Tabela B24 - Distribuição dos potenciais elétricos resultantes do deslocamento de 10 mm da extremidade livre da viga (CFFF) para uma discretização de 5×1 elementos

x [m]	ϕ [V]
0,01	299,658
0,03	233,067
0,05	166,477
0,07	99,886
0,09	33,295

Tabela B25 - Distribuição dos potenciais eléctricos resultantes do deslocamento de 10 mm da extremidade livre da viga (CFFF) para uma discretização de 10×1 elementos

x [m]	ϕ [V]
0,005	313,825
0,015	280,791
0,025	247,757
0,035	214,723
0,045	181,688
0,055	148,654
0,065	115,620
0,075	82,586
0,085	49,551
0,095	16,517

Tabela B26 - Distribuição dos potenciais eléctricos resultantes do deslocamento de 10 mm da extremidade livre da viga (CFFF) para uma discretização de 15×1 elementos

x [m]	ϕ [V]
0,0033	319,331
0,0100	297,308
0,0167	275,285
0,0233	253,262
0,0300	231,240
0,0367	209,217
0,0433	187,194
0,0500	165,171
0,0567	143,148
0,0633	121,126
0,0700	99,103
0,0767	77,080
0,0833	55,057
0,0900	33,034
0,0967	11,011

Tabela B27 - Evolução do deslocamento transversal nodal para uma viga (CCFF) em configuração de atuador para uma discretização de 5×1 elementos

x [m]	w [m]
0,000	0,000E+00
0,017	7,141E-10
0,033	1,649E-09
0,050	1,870E-09
0,067	1,649E-09
0,083	7,141E-10
0,100	0,000E+00

Tabela B28 - Evolução do deslocamento transversal nodal para uma viga (CCFF) em configuração de atuador para uma discretização de 10×1 elementos

x [m]	w [m]
0,000	0,000E+00
0,010	2,998E-10
0,020	7,611E-10
0,030	1,043E-09
0,040	1,222E-09
0,050	1,280E-09
0,060	1,222E-09
0,070	1,043E-09
0,080	7,611E-10
0,090	2,998E-10
0,100	0,000E+00

Tabela B29 - Evolução do deslocamento transversal nodal para uma viga (CCFF) em configuração de atuador para uma discretização de 15×1 elementos

x [m]	w [m]
0,000	0,000E+00
0,006	1,308E-10
0,013	3,497E-10
0,019	5,156E-10
0,025	6,549E-10
0,031	7,626E-10
0,038	8,396E-10
0,044	8,859E-10
0,050	9,013E-10
0,056	8,859E-10
0,063	8,396E-10
0,069	7,626E-10
0,075	6,549E-10
0,081	5,156E-10
0,088	3,497E-10
0,094	1,308E-10
0,100	0,000E+00

Tabela B30 - Distribuição dos potenciais elétricos resultantes do deslocamento de 10 mm da extremidade livre da viga (CCFF) para uma discretização de 6×1 elementos

x [m]	ϕ [V]
0,0085	-2002,213
0,025	0,000
0,0415	2002,213
0,0585	2002,213
0,075	0,000
0,0915	-2002,213

Tabela B31 - Distribuição dos potenciais elétricos resultantes do deslocamento de 10 mm da extremidade livre da viga (CCFF) para uma discretização de 10×1 elementos

x [m]	ϕ [V]
0,005	-2209,040
0,015	-1104,520
0,025	0,000
0,035	1104,520
0,045	2209,040
0,055	2209,040
0,065	1104,520
0,075	0,000
0,085	-1104,520
0,095	-2209,040

Tabela B32 - Distribuição dos potenciais elétricos resultantes do deslocamento de 10 mm da extremidade livre da viga (CCFF) para uma discretização de 16×1 elementos

x [m]	ϕ [V]
0,003	-2330,862
0,0095	-1664,901
0,016	-998,941
0,022	-332,980
0,028	332,980
0,0345	998,941
0,041	1664,901
0,047	2330,862
0,053	2330,862
0,0595	1664,901
0,066	998,941
0,072	332,980
0,078	-332,980
0,0845	-998,941
0,091	-1664,901
0,097	-2330,862

6.B. Estudo Paramétrico 6

Os resultados que em seguida se apresentam, correspondem ao Estudo Paramétrico 6 (4.2.2.3).

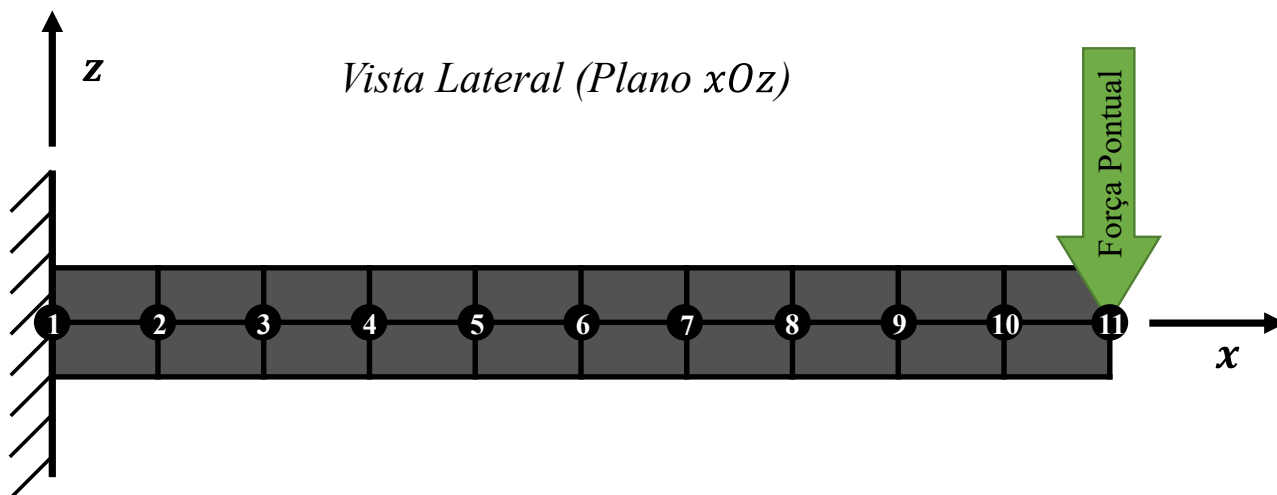


Figura B4 - Representação esquemática de uma viga de Al com 10×1 elementos (CFFF)

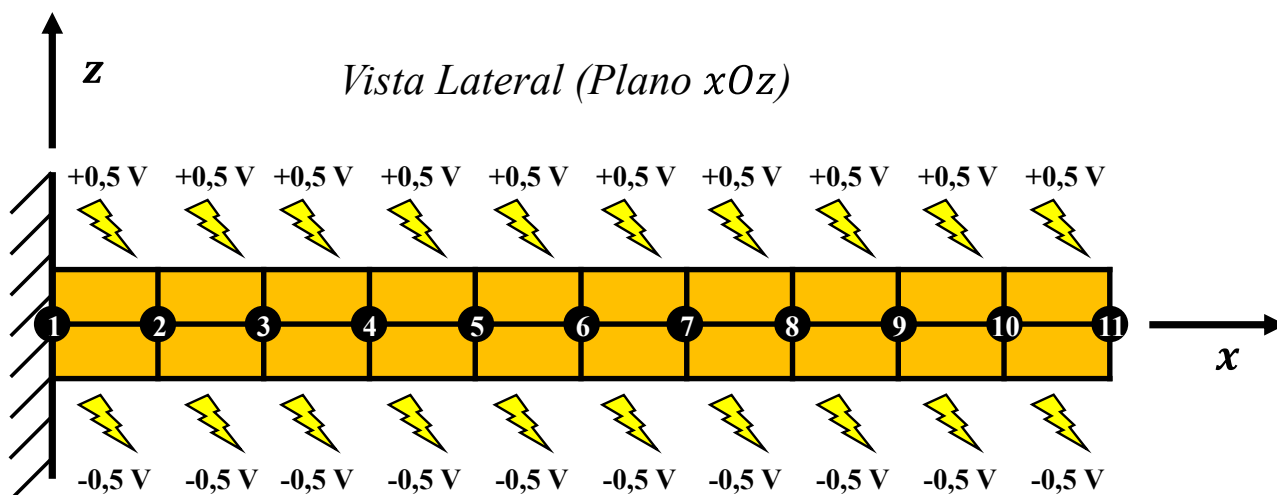


Figura B5 - Representação esquemática da configuração de sensor de uma viga bimorph em PVDF com 10×1 elementos (CFFF)

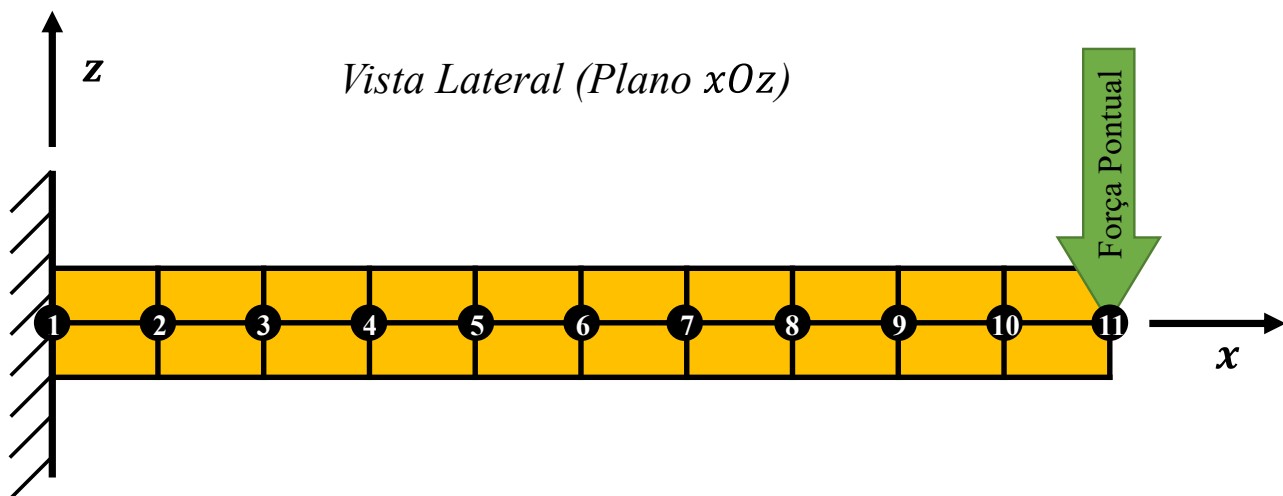


Figura B6 - Representação esquemática da configuração de sensor de uma viga bimorph em PVDF com 10×1 elementos (CFFF)

Tabela B33 - Evolução do deslocamento transversal nodal para uma viga (CFFF) em Al para uma discretização de 10×1 elementos

x [m]	w [m]		
	x	y	δ (%)
0	0,000E+00	0,000E+00	0,00
0,15	1,697E-04	1,697E-04	0,00
0,3	6,637E-04	6,637E-04	0,00
0,45	1,451E-03	1,451E-03	0,00
0,6	2,495E-03	2,495E-03	0,00
0,75	3,758E-03	3,758E-03	0,00
0,9	5,203E-03	5,203E-03	0,00
1,05	6,795E-03	6,795E-03	0,00
1,2	8,497E-03	8,497E-03	0,00
1,35	1,027E-02	1,027E-02	0,00
1,5	1,208E-02	1,208E-02	0,00

Tabela B34 - Evolução do deslocamento transversal nodal para uma viga (CFFF) bimorph PVDF em configuração de atuador para uma discretização de 10×1 elementos

x [m]	w [m]		
	x	y	δ (%)
0	0,000E+00	0,000E+00	0,00
0,15	1,380E-10	1,380E-10	0,00
0,3	5,520E-10	5,520E-10	0,00
0,45	1,242E-09	1,242E-09	0,00
0,6	2,208E-09	2,208E-09	0,00
0,75	3,450E-09	3,450E-09	0,00
0,9	4,968E-09	4,968E-09	0,00
1,05	6,762E-09	6,762E-09	0,00
1,2	8,832E-09	8,832E-09	0,00
1,35	1,118E-08	1,118E-08	0,00
1,5	1,380E-08	1,380E-08	0,00

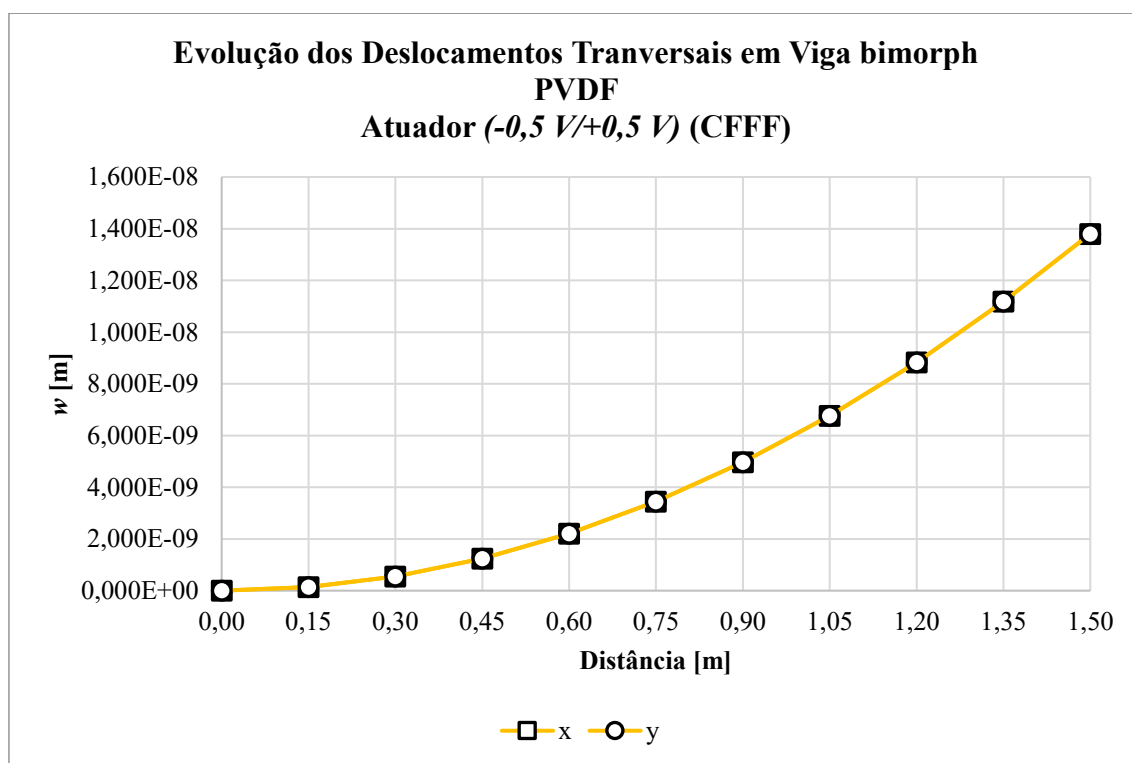


Figura B7 - Representação gráfica do perfil de deslocamentos transversais ao longo do comprimento de uma viga (CFFF) para configuração de atuador e uma discretização de 10×1 elementos

Tabela B35 - Evolução do deslocamento transversal nodal para uma viga (CFFF) bimorph PVDF em configuração de sensor para uma discretização de 10×1 elementos

x [m]	w [m]		
	x	y	δ (%)
0	0,000E+00	0,0000	0,00
0,15	6,144E-03	0,0061	0,00
0,3	2,381E-02	2,38E-02	0,00
0,45	5,171E-02	5,17E-02	0,00
0,6	8,858E-02	8,86E-02	0,00
0,75	1,331E-01	1,33E-01	0,00
0,9	1,841E-01	1,84E-01	0,00
1,05	2,401E-01	2,40E-01	0,00
1,2	3,000E-01	3,00E-01	0,00
1,35	3,625E-01	3,62E-01	0,00
1,5	4,262E-01	4,26E-01	0,00

Tabela B36 - Evolução do potencial elétrico para uma viga (CCFF) bimorph PVDF em configuração de sensor para uma discretização de 10×1 elementos

x [m]	ϕ [V]		
	x	y	δ (%)
0,075	3,292E+05	3,292E+05	0,00
0,225	2,945E+05	2,945E+05	0,00
0,375	2,599E+05	2,599E+05	0,00
0,525	2,252E+05	2,252E+05	0,00
0,675	1,906E+05	1,906E+05	0,00
0,825	1,559E+05	1,559E+05	0,00
0,975	1,213E+05	1,213E+05	0,00
1,125	8,663E+04	8,663E+04	0,00
1,275	5,198E+04	5,198E+04	0,00
1,425	1,733E+04	1,733E+04	0,00

Tabela B37 - Tempos de computação em segundos para modelos numéricos em diferentes direções

Direção	Material	t_{CPU} [s]
x	Al	6,140
	PVDF (A)	10,250
	PVDF (S)	10,187
y	Al	5,640
	PVDF (A)	9,843
	PVDF (S)	11,171

Tabela B38 - Evolução do deslocamento transversal nodal em função de p_x para uma viga (CFFF) bimorph FGM Al/PVDF em configuração de atuador para uma discretização de 10×1 elementos e respetivo estudo comparativo para uma viga discretizada em 1×10 elementos na direção y

x [m]	p					
	0	0,1	0,5	1	2	5
	w [m] (δ (%))	w [m] (δ (%))	w [m] (δ (%))	w [m] (δ (%))	w [m] (δ (%))	w [m] (δ (%))
0	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 ^(NN) (0,00)	0,000E+00 ^(NN) (0,00)	0,000E+00 ^(NN) (0,00)	0,000E+00 ^(NN) (0,00)	0,000E+00 ^(NN) (0,00)
0,15	1,380E-10 (0,00)	9,049E-12 ^(NN) (0,00)	8,271E-13 ^(NN) (0,00)	1,485E-13 ^(NN) (0,00)	8,971E-15 ^(NN) (0,00)	9,863E-18 ^(NN) (0,00)
0,3	5,520E-10 (0,00)	4,274E-11 ^(NN) (0,00)	4,462E-12 ^(NN) (0,00)	9,635E-13 ^(NN) (0,00)	9,421E-14 ^(NN) (0,00)	3,386E-16 ^(NN) (0,00)
0,45	1,242E-09 (0,00)	1,134E-10 ^(NN) (0,00)	1,334E-11 ^(NN) (0,00)	3,309E-12 ^(NN) (0,00)	4,391E-13 ^(NN) (0,00)	4,138E-15 ^(NN) (0,00)
0,6	2,208E-09 (0,00)	2,329E-10 ^(NN) (0,00)	3,028E-11 ^(NN) (0,00)	8,355E-12 ^(NN) (0,00)	1,385E-12 ^(NN) (0,00)	2,685E-14 ^(NN) (0,00)
0,75	3,450E-09 (0,00)	4,143E-10 ^(NN) (0,00)	5,889E-11 ^(NN) (0,00)	1,773E-11 ^(NN) (0,00)	3,504E-12 ^(NN) (0,00)	1,207E-13 ^(NN) (0,00)
0,9	4,968E-09 (0,00)	6,733E-10 ^(NN) (0,00)	1,040E-10 ^(NN) (0,00)	3,378E-11 ^(NN) (0,00)	7,731E-12 ^(NN) (0,00)	4,233E-13 ^(NN) (0,00)
1,05	6,762E-09 (0,00)	1,029E-09 ^(NN) (0,00)	1,726E-10 ^(NN) (0,00)	6,011E-11 ^(NN) (0,00)	1,566E-11 ^(NN) (0,00)	1,276E-12 ^(NN) (0,00)
1,2	8,832E-09 (0,00)	1,506E-09 ^(NN) (0,00)	2,757E-10 ^(NN) (0,00)	1,028E-10 ^(NN) (0,00)	3,021E-11 ^(NN) (0,00)	3,467E-12 ^(NN) (0,00)
1,35	1,118E-08 (0,00)	2,138E-09 ^(NN) (0,00)	4,336E-10 ^(NN) (0,00)	1,740E-10 ^(NN) (0,00)	5,788E-11 ^(NN) (0,00)	9,310E-12 ^(NN) (0,00)
1,5	1,380E-08 (0,00)	2,975E-09 (0,00)	6,972E-10 ^(NN) (0,00)	3,115E-10 ^(NN) (0,00)	1,227E-10 ^(NN) (0,00)	2,970E-11 ^(NN) (0,00)

Tabela B39 - Evolução do deslocamento transversal nodal em função de p_x para uma viga (CFFF) bimorph FGM Al/PVDF em configuração de sensor para uma discretização de 10×1 elementos e respectivo estudo comparativo para uma viga discretizada em 1×10 elementos na direção y

x [m]	p					
	0	0,1	0,5	1	2	5
	w [m] (δ (%))	w [m] (δ (%))	w [m] (δ (%))	w [m] (δ (%))	w [m] (δ (%))	w [m] (δ (%))
0	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 ^(NN) (0,00)	0,000E+00 ^(NN) (0,00)	0,000E+00 ^(NN) (0,00)	0,000E+00 ^(NN) (0,00)	0,000E+00 ^(NN) (0,00)
0,15	6,144E-03 (0,00)	5,911E-04 ^(NN) (0,00)	2,161E-04 ^(NN) (0,00)	1,792E-04 ^(NN) (0,00)	1,708E-04 ^(NN) (0,00)	1,702E-04 ^(NN) (0,00)
0,3	2,381E-02 (0,00)	2,557E-03 ^(NN) (0,00)	8,961E-04 ^(NN) (0,00)	7,192E-04 ^(NN) (0,00)	6,708E-04 ^(NN) (0,00)	6,654E-04 ^(NN) (0,00)
0,45	5,171E-02 (0,00)	6,201E-03 ^(NN) (0,00)	2,093E-03 ^(NN) (0,00)	1,624E-03 ^(NN) (0,00)	1,478E-03 ^(NN) (0,00)	1,455E-03 ^(NN) (0,00)
0,6	8,858E-02 (0,00)	1,168E-02 ^(NN) (0,00)	3,838E-03 ^(NN) (0,00)	2,892E-03 ^(NN) (0,00)	2,567E-03 ^(NN) (0,00)	2,502E-03 ^(NN) (0,00)
0,75	1,331E-01 (0,00)	1,910E-02 ^(NN) (0,00)	6,153E-03 ^(NN) (0,00)	4,520E-03 ^(NN) (0,00)	3,917E-03 ^(NN) (0,00)	3,772E-03 ^(NN) (0,00)
0,9	1,841E-01 (0,00)	2,846E-02 ^(NN) (0,00)	9,053E-03 ^(NN) (0,00)	6,504E-03 ^(NN) (0,00)	5,511E-03 ^(NN) (0,00)	5,231E-03 ^(NN) (0,00)
1,05	2,401E-01 (0,00)	3,971E-02 ^(NN) (0,00)	1,254E-02 ^(NN) (0,00)	8,841E-03 ^(NN) (0,00)	7,331E-03 ^(NN) (0,00)	6,850E-03 ^(NN) (0,00)
1,2	3,000E-01 (0,00)	5,271E-02 ^(NN) (0,00)	1,662E-02 ^(NN) (0,00)	1,152E-02 ^(NN) (0,00)	9,361E-03 ^(NN) (0,00)	8,602E-03 ^(NN) (0,00)
1,35	3,625E-01 (0,00)	6,716E-02 ^(NN) (0,00)	2,126E-02 ^(NN) (0,00)	1,453E-02 ^(NN) (0,00)	1,159E-02 ^(NN) (0,00)	1,046E-02 ^(NN) (0,00)
1,5	4,262E-01 (0,00)	8,251E-02 ^(NN) (0,00)	2,635E-02 ^(NN) (0,00)	1,784E-02 ^(NN) (0,00)	1,399E-02 ^(NN) (0,00)	1,242E-02 ^(NN) (0,00)

Tabela B40 - Evolução dos potenciais elétricos em função de p_x para uma viga (CFFF) bimorph FGM Al/PVDF em configuração de sensor para uma discretização de 10×1 elementos e respectivo estudo comparativo para uma viga discretizada em 1×10 elementos na direção y

x [m]	p					
	0	0,1	0,5	1	2	5
	ϕ [V] (δ (%))	ϕ [V] (δ (%))	ϕ [V] (δ (%))	ϕ [V] (δ (%))	ϕ [V] (δ (%))	ϕ [V] (δ (%))
0,075	3,292E+05 (0,00)	2,997E+04 ^(NN) (0,00)	9,507E+03 ^(NN) (0,00)	7,304E+03 ^(NN) (0,00)	6,587E+03 ^(NN) (0,00)	6,204E+03 ^(NN) (0,00)
0,225	2,945E+05 (0,00)	4,019E+04 ^(NN) (0,00)	1,082E+04 ^(NN) (0,00)	7,226E+03 ^(NN) (0,00)	6,038E+03 ^(NN) (0,00)	5,980E+03 ^(NN) (0,00)
0,375	2,599E+05 (0,00)	4,629E+04 ^(NN) (0,00)	1,235E+04 ^(NN) (0,00)	7,673E+03 ^(NN) (0,00)	5,751E+03 ^(NN) (0,00)	5,276E+03 ^(NN) (0,00)
0,525	2,252E+05 (0,00)	4,979E+04 ^(NN) (0,00)	1,328E+04 ^(NN) (0,00)	7,864E+03 ^(NN) (0,00)	5,406E+03 ^(NN) (0,00)	4,580E+03 ^(NN) (0,00)
0,675	1,906E+05 (0,00)	5,164E+04 ^(NN) (0,00)	1,412E+04 ^(NN) (0,00)	8,107E+03 ^(NN) (0,00)	5,188E+03 ^(NN) (0,00)	3,952E+03 ^(NN) (0,00)
0,825	1,559E+05 (0,00)	5,159E+04 ^(NN) (0,00)	1,473E+04 ^(NN) (0,00)	8,299E+03 ^(NN) (0,00)	5,015E+03 ^(NN) (0,00)	3,384E+03 ^(NN) (0,00)
0,975	1,213E+05 (0,00)	4,927E+04 ^(NN) (0,00)	1,508E+04 ^(NN) (0,00)	8,439E+03 ^(NN) (0,00)	4,886E+03 ^(NN) (0,00)	2,903E+03 ^(NN) (0,00)
1,125	8,663E+04 (0,00)	4,379E+04 ^(NN) (0,00)	1,499E+04 ^(NN) (0,00)	8,458E+03 ^(NN) (0,00)	4,767E+03 ^(NN) (0,00)	2,514E+03 ^(NN) (0,00)
1,275	5,198E+04 (0,00)	3,346E+04 ^(NN) (0,00)	1,392E+04 ^(NN) (0,00)	8,163E+03 ^(NN) (0,00)	4,597E+03 ^(NN) (0,00)	2,214E+03 ^(NN) (0,00)
1,425	1,733E+04 (0,00)	1,475E+04 ^(NN) (0,00)	9,233E+03 ^(NN) (0,00)	6,328E+03 ^(NN) (0,00)	3,930E+03 ^(NN) (0,00)	1,924E+03 ^(NN) (0,00)

Tabela B41 - Tempos de computação em segundos para diferentes valores de p utilizando modelos em diferentes direções

Direção	Configuração Funcional	p					
		0	0,1	0,5	1	2	5
		t_{CPU} [s]	t_{CPU} [s]	t_{CPU} [s]	t_{CPU} [s]	t_{CPU} [s]	t_{CPU} [s]
x	(A)	10,453	67,328	56,546	16,859	25,968	45,593
	(S)	9,968	68,515	56,640	16,484	26,656	45,687
y	(A)	10,031	68,765	59,812	17,828	27,703	51,062
	(S)	10,125	69,546	59,906	18,375	27,781	51,578

Tabela B42 - Evolução do deslocamento transversal nodal em função de px para uma viga (CFFF) bimorph FGM discreta Al/PVDF em configuração de atuador para uma discretização de 10×1 elementos e respetivo estudo comparativo para uma viga discretizada em 1×10 elementos na direção y

x [m]	p					
	0	0,1	0,5	1	2	5
	w [m] (δ (%))	w [m] (δ (%))	w [m] (δ (%))	w [m] (δ (%))	w [m] (δ (%))	w [m] (δ (%))
0	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)
0,15	1,380E-10 (0,00)	9,817E-12 (8,49)	8,942E-13 (8,12)	1,461E-13 (1,57)	5,107E-15 (43,08)	1,161E-18 (88,22)
0,3	5,520E-10 (0,00)	4,517E-11 (5,68)	4,678E-12 (4,84)	9,526E-13 (1,13)	7,764E-14 (17,58)	1,709E-16 (49,53)
0,45	1,242E-09 (0,00)	1,176E-10 (3,74)	1,372E-11 (2,86)	3,280E-12 (0,87)	3,989E-13 (9,16)	2,950E-15 (28,70)
0,6	2,208E-09 (0,00)	2,390E-10 (2,62)	3,083E-11 (1,80)	8,295E-12 (0,72)	1,308E-12 (5,59)	2,215E-14 (17,51)
0,75	3,450E-09 (0,00)	4,222E-10 (1,91)	5,959E-11 (1,18)	1,762E-11 (0,62)	3,370E-12 (3,82)	1,058E-13 (12,36)
0,9	4,968E-09 (0,00)	6,829E-10 (1,44)	1,048E-10 (0,79)	3,360E-11 (0,55)	7,516E-12 (2,78)	3,871E-13 (8,55)
1,05	6,762E-09 (0,00)	1,040E-09 (1,10)	1,735E-10 (0,52)	5,981E-11 (0,51)	1,532E-11 (2,20)	1,183E-12 (7,27)
1,2	8,832E-09 (0,00)	1,519E-09 (0,85)	2,767E-10 (0,34)	1,023E-10 (0,46)	2,969E-11 (1,71)	3,292E-12 (5,06)
1,35	1,118E-08 (0,00)	2,152E-09 (0,66)	4,344E-10 (0,20)	1,732E-10 (0,46)	5,698E-11 (1,57)	8,794E-12 (5,54)
1,5	1,380E-08 (0,00)	2,990E-09 (0,51)	6,979E-10 (0,10)	3,102E-10 (0,41)	1,210E-10 (1,32)	2,831E-11 (4,68)

Tabela B43 - Evolução do deslocamento transversal nodal em função de px para uma viga (CFFF) bimorph FGM discreta Al/PVDF em configuração de atuador para uma discretização de 10×1 elementos e respetivo estudo comparativo para uma viga discretizada em 1×10 elementos na direção y

x [m]	p					
	0	0,1	0,5	1	2	5
	w [m] (δ (%))	w [m] (δ (%))	w [m] (δ (%))	w [m] (δ (%))	w [m] (δ (%))	w [m] (δ (%))
0	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)
0,15	6,144E-03 (0,00)	6,259E-04 (5,90)	2,201E-04 (1,87)	1,791E-04 (0,05)	1,702E-04 (0,33)	1,697E-04 (0,26)
0,3	2,381E-02 (0,00)	2,665E-03 (4,23)	9,082E-04 (1,36)	7,184E-04 (0,11)	6,685E-04 (0,34)	6,637E-04 (0,26)
0,45	5,171E-02 (0,00)	6,387E-03 (2,99)	2,114E-03 (0,96)	1,622E-03 (0,15)	1,473E-03 (0,34)	1,451E-03 (0,26)
0,6	8,858E-02 (0,00)	1,195E-02 (2,26)	3,866E-03 (0,72)	2,887E-03 (0,17)	2,558E-03 (0,35)	2,496E-03 (0,26)
0,75	1,331E-01 (0,00)	1,944E-02 (1,78)	6,187E-03 (0,56)	4,511E-03 (0,18)	3,904E-03 (0,35)	3,762E-03 (0,27)
0,9	1,841E-01 (0,00)	2,887E-02 (1,46)	9,093E-03 (0,44)	6,492E-03 (0,19)	5,492E-03 (0,35)	5,217E-03 (0,27)
1,05	2,401E-01 (0,00)	4,020E-02 (1,23)	1,259E-02 (0,36)	8,823E-03 (0,20)	7,305E-03 (0,35)	6,831E-03 (0,28)
1,2	3,000E-01 (0,00)	5,327E-02 (1,06)	1,667E-02 (0,29)	1,150E-02 (0,21)	9,329E-03 (0,35)	8,577E-03 (0,29)
1,35	3,625E-01 (0,00)	6,778E-02 (0,93)	2,131E-02 (0,24)	1,450E-02 (0,21)	1,155E-02 (0,35)	1,043E-02 (0,30)
1,5	4,262E-01 (0,00)	8,320E-02 (0,84)	2,640E-02 (0,21)	1,780E-02 (0,21)	1,394E-02 (0,36)	1,238E-02 (0,32)

Tabela B44 - Evolução dos potenciais elétricos em função de px para uma viga (CFFF) bimorph FGM discreta Al/PVDF em configuração de sensor para uma discretização de 10×1 elementos e respectivo estudo comparativo para uma viga discretizada em 1×10 elementos na direção y

x [m]	p					
	0	0,1	0,5	1	2	5
	ϕ [V] (δ (%))	ϕ [V] (δ (%))	ϕ [V] (δ (%))	ϕ [V] (δ (%))	ϕ [V] (δ (%))	ϕ [V] (δ (%))
0,075	3,292E+05 (0,00)	3,190E+04 (6,42)	1,005E+04 (5,74)	7,872E+03 (7,78)	7,409E+03 (12,48)	7,388E+03 (19,09)
0,225	2,945E+05 (0,01)	4,033E+04 (0,35)	1,077E+04 (0,45)	7,135E+03 (1,26)	5,895E+03 (2,36)	5,709E+03 (4,52)
0,375	2,599E+05 (0,00)	4,632E+04 (0,07)	1,233E+04 (0,12)	7,648E+03 (0,32)	5,724E+03 (0,47)	5,246E+03 (0,57)
0,525	2,252E+05 (0,02)	4,976E+04 (0,05)	1,326E+04 (0,20)	7,832E+03 (0,40)	5,369E+03 (0,68)	4,529E+03 (1,12)
0,675	1,906E+05 (0,01)	5,159E+04 (0,10)	1,409E+04 (0,21)	8,077E+03 (0,37)	5,157E+03 (0,60)	3,914E+03 (0,97)
0,825	1,559E+05 (0,02)	5,153E+04 (0,13)	1,469E+04 (0,22)	8,269E+03 (0,37)	4,985E+03 (0,61)	3,348E+03 (1,06)
0,975	1,213E+05 (0,02)	4,920E+04 (0,15)	1,505E+04 (0,23)	8,408E+03 (0,37)	4,854E+03 (0,66)	2,867E+03 (1,22)
1,125	8,663E+04 (0,00)	4,372E+04 (0,16)	1,496E+04 (0,23)	8,425E+03 (0,39)	4,732E+03 (0,72)	2,476E+03 (1,52)
1,275	5,198E+04 (0,00)	3,340E+04 (0,16)	1,388E+04 (0,26)	8,122E+03 (0,50)	4,551E+03 (0,99)	2,163E+03 (2,32)
1,425	1,733E+04 (0,02)	1,472E+04 (0,19)	9,203E+03 (0,33)	6,278E+03 (0,79)	3,853E+03 (1,95)	1,815E+03 (5,67)

Tabela B45 - Tempos de computação em segundos para diferentes valores de p utilizando modelos em diferentes direções

Configuração Funcional	p					
	0	0,1	0,5	1	2	5
	t_{CPU} [s]	t_{CPU} [s]	t_{CPU} [s]	t_{CPU} [s]	t_{CPU} [s]	t_{CPU} [s]
(A)	10,250	14,000	15,218	13,750	14,328	15,357
(S)	9,906	37,234	15,375	14,421	14,687	15,786

7.B. Estudo Paramétrico 7

Os resultados que em seguida se apresentam, correspondem ao Estudo Paramétrico 7 (4.2.2.4).

Tabela B46 - Evolução do deslocamento transversal nodal em função de p_x para uma viga (CFFF) bimorph em FGM contínuo LaRC-Si/PVDF em configuração de atuador para uma discretização de 10×1 elementos

x [m]	p					
	0	0,1	0,5	1	2	5
	w [m]	w [m]	w [m]	w [m]	w [m]	w [m]
0	0,000E+00	0,000E+00 ^(NN)	0,000E+00 ^(NN)	0,000E+00 ^(NN)	0,000E+00 ^(NN)	0,000E+00 ^(NN)
0,01	2,297E-09	1,455E-09 ^(NN)	3,431E-10 ^(NN)	7,689E-11 ^(NN)	5,291E-12 ^(NN)	3,939E-15 ^(NN)
0,02	9,144E-09	6,078E-09 ^(NN)	1,695E-09 ^(NN)	4,695E-10 ^(NN)	5,194E-11 ^(NN)	1,883E-13 ^(NN)
0,03	2,051E-08	1,427E-08 ^(NN)	4,619E-09 ^(NN)	1,513E-09 ^(NN)	2,330E-10 ^(NN)	2,301E-12 ^(NN)
0,04	3,639E-08	2,626E-08 ^(NN)	9,560E-09 ^(NN)	3,569E-09 ^(NN)	7,073E-10 ^(NN)	1,487E-11 ^(NN)
0,05	5,680E-08	4,220E-08 ^(NN)	1,692E-08 ^(NN)	7,024E-09 ^(NN)	1,707E-09 ^(NN)	6,581E-11 ^(NN)
0,06	8,173E-08	6,224E-08 ^(NN)	2,707E-08 ^(NN)	1,230E-08 ^(NN)	3,548E-09 ^(NN)	2,268E-10 ^(NN)
0,07	1,112E-07	8,648E-08 ^(NN)	4,038E-08 ^(NN)	1,985E-08 ^(NN)	6,646E-09 ^(NN)	6,560E-10 ^(NN)
0,08	1,452E-07	1,150E-07 ^(NN)	5,720E-08 ^(NN)	3,016E-08 ^(NN)	1,154E-08 ^(NN)	1,670E-09 ^(NN)
0,09	1,837E-07	1,479E-07 ^(NN)	7,786E-08 ^(NN)	4,378E-08 ^(NN)	1,893E-08 ^(NN)	3,891E-09 ^(NN)
0,1	2,267E-07	1,853E-07 ^(NN)	1,027E-07 ^(NN)	6,129E-08 ^(NN)	2,970E-08 ^(NN)	8,496E-09 ^(NN)

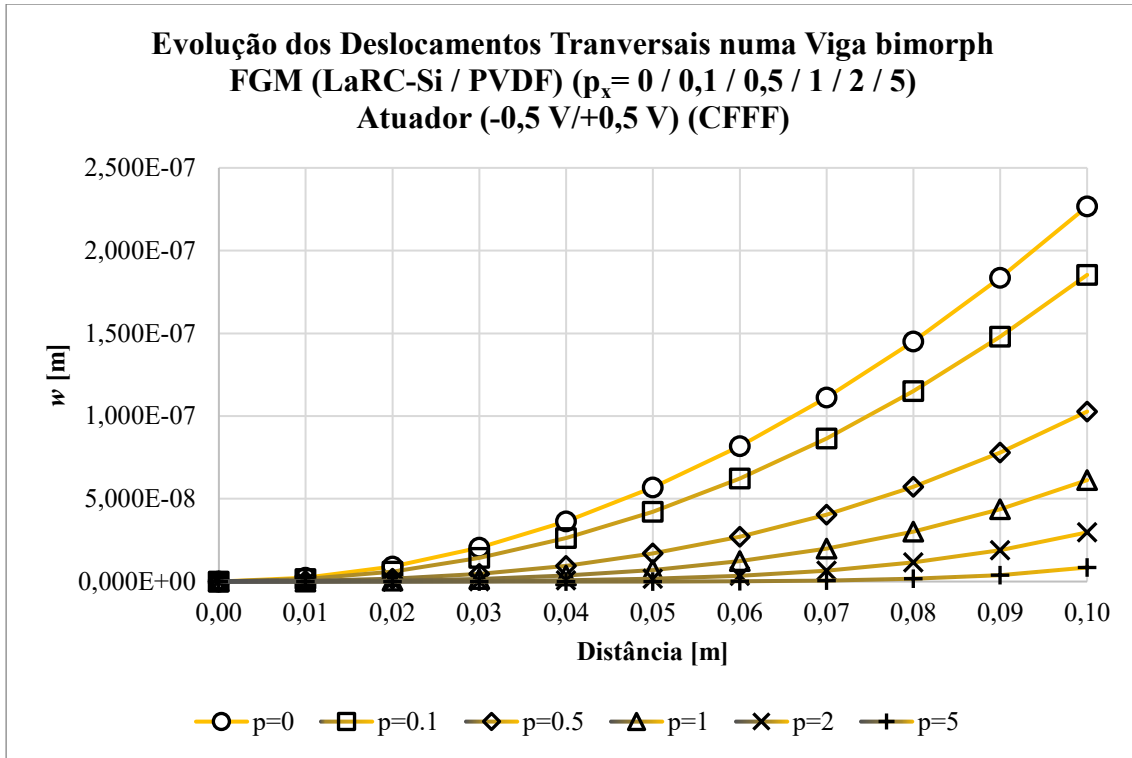


Figura B8 - Representação gráfica do perfil de deslocamentos transversais para vários valores de p ao longo do comprimento de uma viga (CFFF) em configuração de atuador e discretização de 10×1 elementos

Tabela B47 - Evolução do deslocamento transversal nodal em função de p_x para uma viga (CFFF) bimorph em FGM discreto LaRC-Si/PVDF em configuração de atuador para uma discretização de 10×1 elementos

x [m]	p					
	0	0,1	0,5	1	2	5
	w [m] (δ (%))	w [m] (δ (%))	w [m] (δ (%))	w [m] (δ (%))	w [m] (δ (%))	w [m] (δ (%))
0	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)
0,01	2,297E-09 (0,00)	1,503E-09 (3,32)	3,666E-10 (6,87)	7,663E-11 (0,34)	3,677E-12 (30,51)	5,135E-16 (86,96)
0,02	9,144E-09 (0,00)	6,228E-09 (2,46)	1,771E-09 (4,44)	4,680E-10 (0,32)	4,512E-11 (13,13)	1,135E-13 (39,71)
0,03	2,051E-08 (0,00)	1,452E-08 (1,77)	4,750E-09 (2,85)	1,509E-09 (0,31)	2,168E-10 (6,93)	1,798E-12 (21,86)
0,04	3,639E-08 (0,00)	2,661E-08 (1,33)	9,747E-09 (1,95)	3,558E-09 (0,30)	6,771E-10 (4,26)	1,284E-11 (13,63)
0,05	5,680E-08 (0,00)	4,264E-08 (1,04)	1,716E-08 (1,41)	7,004E-09 (0,29)	1,657E-09 (2,91)	5,969E-11 (9,30)
0,06	8,173E-08 (0,00)	6,276E-08 (0,83)	2,736E-08 (1,05)	1,226E-08 (0,29)	3,472E-09 (2,14)	2,115E-10 (6,73)
0,07	1,112E-07 (0,00)	8,707E-08 (0,68)	4,071E-08 (0,81)	1,979E-08 (0,28)	6,536E-09 (1,67)	6,220E-10 (5,18)
0,08	1,452E-07 (0,00)	1,157E-07 (0,57)	5,756E-08 (0,63)	3,008E-08 (0,28)	1,138E-08 (1,35)	1,603E-09 (4,06)
0,09	1,837E-07 (0,00)	1,486E-07 (0,47)	7,825E-08 (0,49)	4,366E-08 (0,28)	1,871E-08 (1,14)	3,754E-09 (3,53)
0,1	2,267E-07 (0,00)	1,860E-07 (0,40)	1,031E-07 (0,39)	6,113E-08 (0,27)	2,942E-08 (0,95)	8,265E-09 (2,72)

Tabela B48 - Evolução do deslocamento transversal nodal em função de p_x para uma viga (CCFF) bimorph em FGM contínuo LaRC-Si/PVDF em configuração de atuador para uma discretização de 10×1 elementos

x [m]	p					
	0	0,1	0,5	1	2	5
	w [m]	w [m]	w [m]	w [m]	w [m]	w [m]
0	0,000E+00	0,000E+00 ^(NN)	0,000E+00 ^(NN)	0,000E+00 ^(NN)	0,000E+00 ^(NN)	0,000E+00 ^(NN)
0,01	1,647E-10	-3,068E-11 ^(NN)	-1,281E-10 ^(NN)	1,394E-11 ^(NN)	1,952E-10 ^(NN)	2,493E-10 ^(NN)
0,02	4,213E-10	-1,218E-10 ^(NN)	-3,972E-10 ^(NN)	5,258E-11 ^(NN)	6,727E-10 ^(NN)	9,017E-10 ^(NN)
0,03	5,804E-10	-2,027E-10 ^(NN)	-6,231E-10 ^(NN)	1,103E-10 ^(NN)	1,222E-09 ^(NN)	1,740E-09 ^(NN)
0,04	6,801E-10	-2,049E-10 ^(NN)	-7,187E-10 ^(NN)	1,784E-10 ^(NN)	1,668E-09 ^(NN)	2,530E-09 ^(NN)
0,05	7,127E-10	-1,360E-10 ^(NN)	-6,670E-10 ^(NN)	2,456E-10 ^(NN)	1,895E-09 ^(NN)	3,060E-09 ^(NN)
0,06	6,801E-10	-2,109E-11 ^(NN)	-4,912E-10 ^(NN)	2,975E-10 ^(NN)	1,842E-09 ^(NN)	3,157E-09 ^(NN)
0,07	5,804E-10	9,555E-11 ^(NN)	-2,507E-10 ^(NN)	3,142E-10 ^(NN)	1,509E-09 ^(NN)	2,722E-09 ^(NN)
0,08	4,213E-10	1,681E-10 ^(NN)	-2,348E-11 ^(NN)	2,792E-10 ^(NN)	9,675E-10 ^(NN)	1,790E-09 ^(NN)
0,09	1,647E-10	9,424E-11 ^(NN)	3,820E-11 ^(NN)	1,236E-10 ^(NN)	3,294E-10 ^(NN)	6,078E-10 ^(NN)
0,1	0,000E+00	0,000E+00 ^(NN)	0,000E+00 ^(NN)	0,000E+00 ^(NN)	0,000E+00 ^(NN)	0,000E+00 ^(NN)

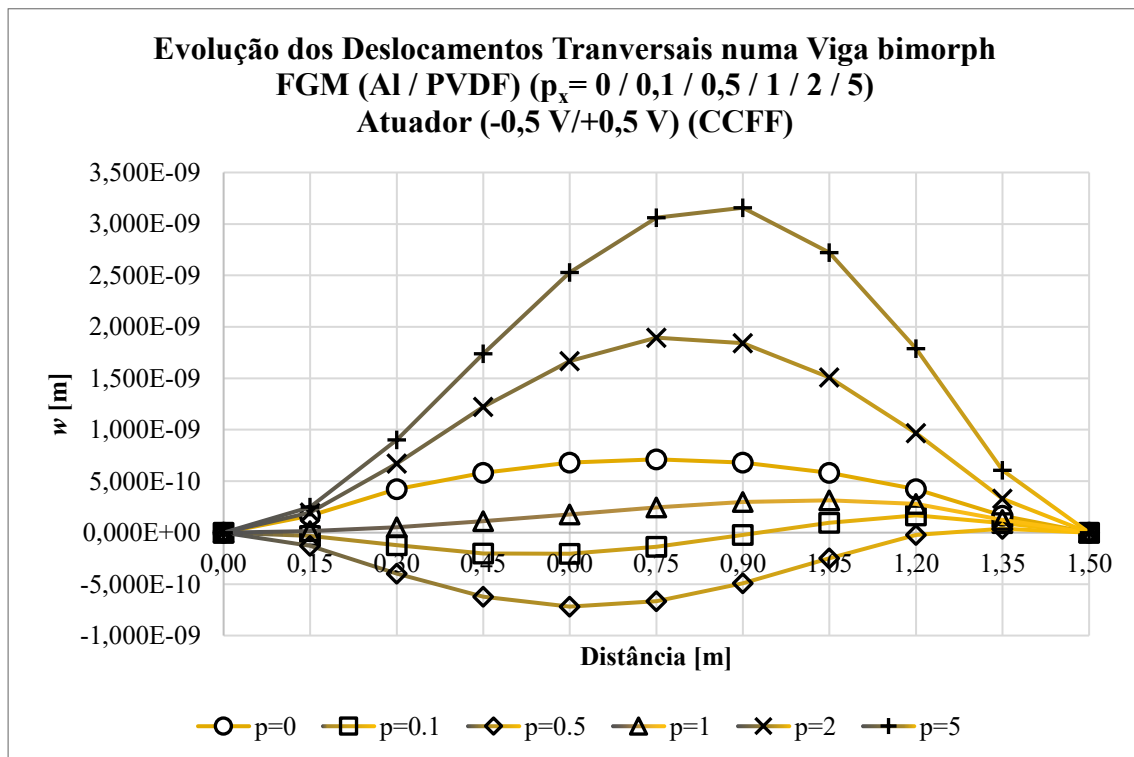


Figura B9 - Representação gráfica do perfil de deslocamentos transversais para vários valores de p ao longo do comprimento de uma viga (CCFF) em configuração de atuador e discretização de 10×1 elementos

Tabela B49 - Evolução do deslocamento transversal nodal em função de px para uma viga (CCFF) bimorph em FGM discreto LaRC-Si/PVDF em configuração de atuador para uma discretização de 10×1 elementos

x [m]	p					
	0	0,1	0,5	1	2	5
	w [m] (δ (%))	w [m] (δ (%))	w [m] (δ (%))	w [m] (δ (%))	w [m] (δ (%))	w [m] (δ (%))
0	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)
0,01	1,647E-10 (0,00)	-6,447E-12 (78,98)	-1,145E-10 (10,58)	1,427E-11 (2,34)	1,950E-10 (0,07)	2,457E-10 (1,44)
0,02	4,213E-10 (0,00)	-5,531E-11 (54,57)	-3,591E-10 (9,59)	5,379E-11 (2,31)	6,723E-10 (0,06)	8,891E-10 (1,40)
0,03	5,804E-10 (0,00)	-1,109E-10 (45,30)	-5,686E-10 (8,75)	1,128E-10 (2,23)	1,222E-09 (0,04)	1,717E-09 (1,35)
0,04	6,801E-10 (0,00)	-1,065E-10 (48,01)	-6,582E-10 (8,42)	1,822E-10 (2,13)	1,668E-09 (0,00)	2,497E-09 (1,30)
0,05	7,127E-10 (0,00)	-4,577E-11 (66,36)	-6,095E-10 (8,62)	2,506E-10 (2,04)	1,896E-09 (0,06)	3,022E-09 (1,24)
0,06	6,801E-10 (0,00)	5,082E-11 (340,91)	-4,436E-10 (9,68)	3,033E-10 (1,93)	1,845E-09 (0,14)	3,121E-09 (1,16)
0,07	5,804E-10 (0,00)	1,439E-10 (50,63)	-2,172E-10 (13,34)	3,200E-10 (1,83)	1,513E-09 (0,26)	2,693E-09 (1,05)
0,08	4,213E-10 (0,00)	1,928E-10 (14,68)	-5,347E-12 (77,23)	2,838E-10 (1,66)	9,719E-10 (0,46)	1,775E-09 (0,85)
0,09	1,647E-10 (0,00)	1,009E-10 (7,11)	4,347E-11 (13,80)	1,254E-10 (1,50)	3,316E-10 (0,65)	6,040E-10 (0,62)
0,1	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)

Tabela B50 - Evolução do deslocamento transversal nodal em função de p_x para uma viga (SSFF) bimorph em FGM contínuo LaRC-Si/PVDF em configuração de atuador para uma discretização de 10×1 elementos

x [m]	p					
	0	0,1	0,5	1	2	5
	w [m]	w [m]	w [m]	w [m]	w [m]	w [m]
0	0,000E+00	0,000E+00 ^(NN)	0,000E+00 ^(NN)	0,000E+00 ^(NN)	0,000E+00 ^(NN)	0,000E+00 ^(NN)
0,01	-2,037E-08	-1,708E-08 ^(NN)	-9,931E-09 ^(NN)	-6,055E-09 ^(NN)	-2,968E-09 ^(NN)	-8,530E-10 ^(NN)
0,02	-3,619E-08	-3,099E-08 ^(NN)	-1,885E-08 ^(NN)	-1,179E-08 ^(NN)	-5,894E-09 ^(NN)	-1,706E-09 ^(NN)
0,03	-4,750E-08	-4,133E-08 ^(NN)	-2,620E-08 ^(NN)	-1,688E-08 ^(NN)	-8,686E-09 ^(NN)	-2,557E-09 ^(NN)
0,04	-5,428E-08	-4,787E-08 ^(NN)	-3,154E-08 ^(NN)	-2,096E-08 ^(NN)	-1,118E-08 ^(NN)	-3,397E-09 ^(NN)
0,05	-5,654E-08	-5,046E-08 ^(NN)	-3,445E-08 ^(NN)	-2,363E-08 ^(NN)	-1,316E-08 ^(NN)	-4,199E-09 ^(NN)
0,06	-5,428E-08	-4,896E-08 ^(NN)	-3,457E-08 ^(NN)	-2,449E-08 ^(NN)	-1,429E-08 ^(NN)	-4,891E-09 ^(NN)
0,07	-4,750E-08	-4,325E-08 ^(NN)	-3,154E-08 ^(NN)	-2,308E-08 ^(NN)	-1,417E-08 ^(NN)	-5,315E-09 ^(NN)
0,08	-3,619E-08	-3,325E-08 ^(NN)	-2,499E-08 ^(NN)	-1,889E-08 ^(NN)	-1,224E-08 ^(NN)	-5,152E-09 ^(NN)
0,09	-2,037E-08	-1,887E-08 ^(NN)	-1,461E-08 ^(NN)	-1,141E-08 ^(NN)	-7,834E-09 ^(NN)	-3,791E-09 ^(NN)
0,1	0,000E+00	0,000E+00 ^(NN)	0,000E+00 ^(NN)	0,000E+00 ^(NN)	0,000E+00 ^(NN)	0,000E+00 ^(NN)

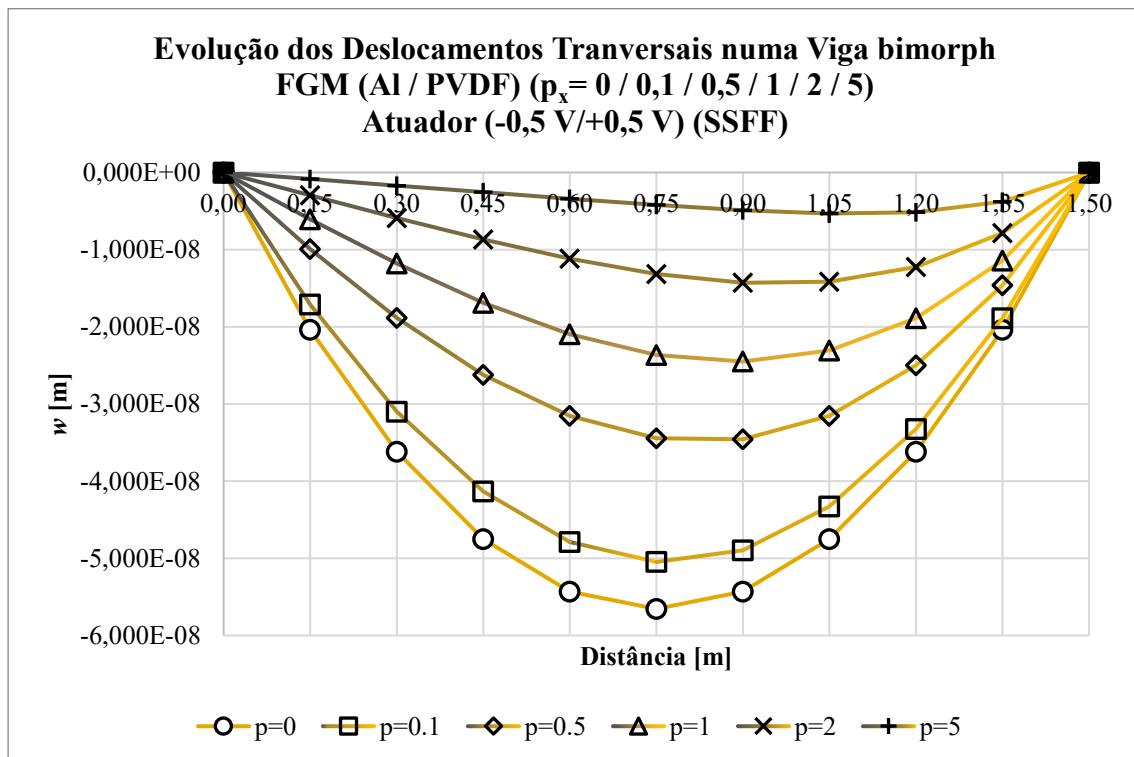


Figura B10 - Representação gráfica do perfil de deslocamentos transversais para vários valores de p ao longo do comprimento de uma viga (SSFF) em configuração de atuador e discretização de 10×1 elementos

Tabela B51 - Evolução do deslocamento transversal nodal em função de p_x para uma viga (SSFF) bimorph em FGM discreto LaRC-Si/PVDF em configuração de atuador para uma discretização de 10×1 elementos

x [m]	p					
	0	0,1	0,5	1	2	5
	w [m] (δ (%))	w [m] (δ (%))	w [m] (δ (%))	w [m] (δ (%))	w [m] (δ (%))	w [m] (δ (%))
0	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)
0,01	-2,037E-08 (0,00)	-1,710E-08 (0,15)	-9,947E-09 (0,17)	-6,038E-09 (0,27)	-2,940E-09 (0,92)	-8,280E-10 (2,92)
0,02	-3,619E-08 (0,00)	-3,099E-08 (0,01)	-1,8862E-08 (0,02)	-1,176E-08 (0,27)	-5,843E-09 (0,87)	-1,656E-09 (2,92)
0,03	-4,750E-08 (0,00)	-4,130E-08 (0,07)	-2,619E-08 (0,04)	-1,684E-08 (0,27)	-8,615E-09 (0,82)	-2,482E-09 (2,91)
0,04	-5,428E-08 (0,00)	-4,782E-08 (0,11)	-3,151E-08 (0,09)	-2,090E-08 (0,27)	-1,110E-08 (0,77)	-3,299E-09 (2,88)
0,05	-5,654E-08 (0,00)	-5,039E-08 (0,14)	-3,441E-08 (0,011)	-2,357E-08 (0,27)	-1,306E-08 (0,72)	-4,080E-09 (2,82)
0,06	-5,428E-08 (0,00)	-4,888E-08 (0,15)	-3,452E-08 (0,13)	-2,443E-08 (0,27)	-1,419E-08 (0,69)	-4,757E-09 (2,75)
0,07	-4,750E-08 (0,00)	-4,318E-08 (0,16)	-3,149E-08 (0,15)	-2,301E-08 (0,27)	-1,407E-08 (0,65)	-5,174E-09 (2,65)
0,08	-3,619E-08 (0,00)	-3,319E-08 (0,17)	-2,496E-08 (0,16)	-1,884E-08 (0,27)	-1,217E-08 (0,62)	-5,021E-09 (2,54)
0,09	-2,037E-08 (0,00)	-1,884E-08 (0,18)	-1,458E-08 (0,17)	-1,138E-08 (0,27)	-7,788E-09 (0,59)	-3,701E-09 (2,39)
0,1	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)

Tabela B52 - Evolução do deslocamento transversal nodal em função de p_x para uma viga (CSFF) bimorph em FGM contínuo LaRC-Si/PVDF em configuração de atuador para uma discretização de 10×1 elementos

x [m]	p					
	0	0,1	0,5	1	2	5
	w [m]	w [m]	w [m]	w [m]	w [m]	w [m]
0	0,000E+00	0,000E+00 ^(NN)	0,000E+00 ^(NN)	0,000E+00 ^(NN)	0,000E+00 ^(NN)	0,000E+00 ^(NN)
0,01	-7,550E-10	-9,064E-10 ^(NN)	-9,078E-10 ^(NN)	-6,889E-10 ^(NN)	-3,824E-10 ^(NN)	-1,148E-10 ^(NN)
0,02	-3,006E-09	-3,423E-09 ^(NN)	-3,356E-09 ^(NN)	-2,599E-09 ^(NN)	-1,491E-09 ^(NN)	-4,557E-10 ^(NN)
0,03	-6,329E-09	-6,934E-09 ^(NN)	-6,715E-09 ^(NN)	-5,323E-09 ^(NN)	-3,178E-09 ^(NN)	-1,003E-09 ^(NN)
0,04	-9,976E-09	-1,069E-08 ^(NN)	-1,031E-08 ^(NN)	-8,358E-09 ^(NN)	-5,202E-09 ^(NN)	-1,721E-09 ^(NN)
0,05	-1,326E-08	-1,400E-08 ^(NN)	-1,349E-08 ^(NN)	-1,117E-08 ^(NN)	-7,255E-09 ^(NN)	-2,556E-09 ^(NN)
0,06	-1,550E-08	-1,618E-08 ^(NN)	-1,561E-08 ^(NN)	-1,320E-08 ^(NN)	-8,946E-09 ^(NN)	-3,412E-09 ^(NN)
0,07	-1,598E-08	-1,656E-08 ^(NN)	-1,601E-08 ^(NN)	-1,380E-08 ^(NN)	-9,778E-09 ^(NN)	-4,107E-09 ^(NN)
0,08	-1,403E-08	-1,444E-08 ^(NN)	-1,401E-08 ^(NN)	-1,232E-08 ^(NN)	-9,130E-09 ^(NN)	-4,297E-09 ^(NN)
0,09	-8,942E-09	-9,160E-09 ^(NN)	-8,921E-09 ^(NN)	-7,997E-09 ^(NN)	-6,218E-09 ^(NN)	-3,348E-09 ^(NN)
0,1	0,000E+00	0,000E+00 ^(NN)	0,000E+00 ^(NN)	0,000E+00 ^(NN)	0,000E+00 ^(NN)	0,000E+00 ^(NN)

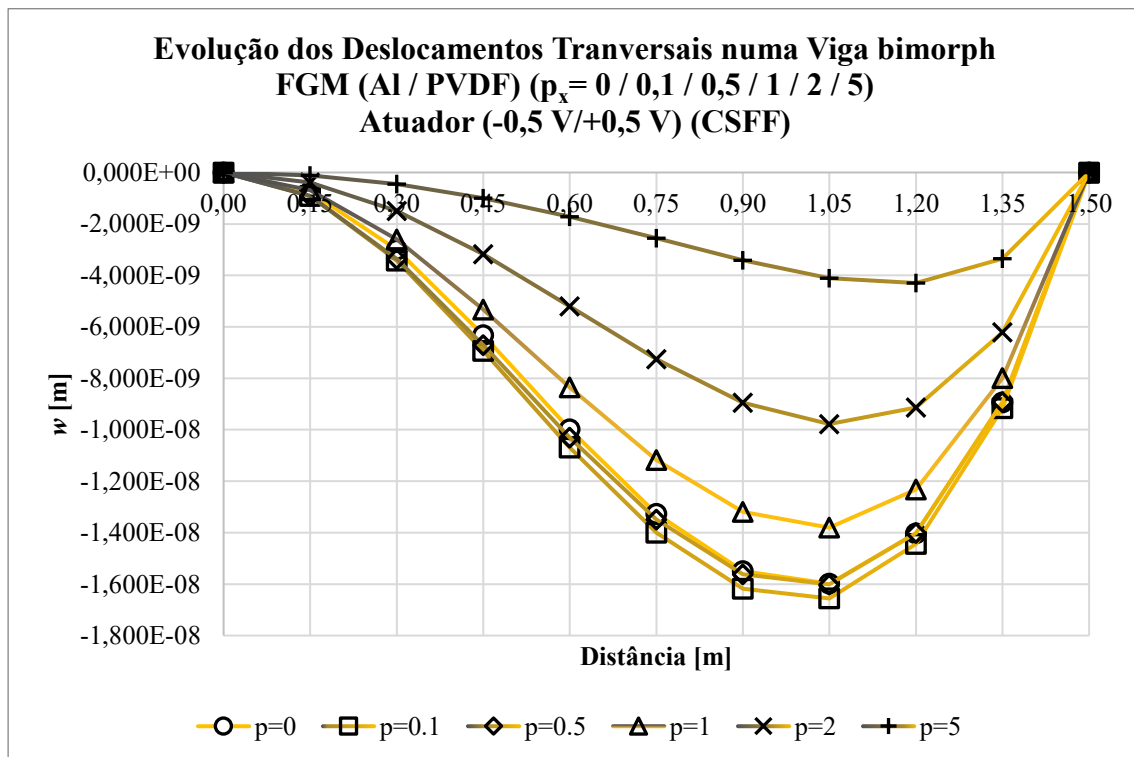


Figura B11 - Representação gráfica do perfil de deslocamentos transversais para vários valores de p ao longo do comprimento de uma viga (CSFF) em configuração de atuador e discretização de 10×1 elementos

Tabela B53 - Evolução do deslocamento transversal nodal em função de px para uma viga (CSFF) bimorph em FGM discreto LaRC-Si/PVDF em configuração de atuador para uma discretização de 10×1 elementos

x [m]	p					
	0	0,1	0,5	1	2	5
	w [m] (δ (%))	w [m] (δ (%))	w [m] (δ (%))	w [m] (δ (%))	w [m] (δ (%))	w [m] (δ (%))
0	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)
0,01	-7,550E-10 (0,00)	-8,828E-10 (2,60)	-8,943E-10 (1,49)	-6,873E-10 (0,23)	-3,802E-10 (0,57)	-1,114E-10 (2,92)
0,02	-3,006E-09 (0,00)	-3,353E-09 (2,04)	-3,315E-09 (1,23)	-2,593E-09 (0,24)	-1,482E-09 (0,56)	-4,424E-10 (2,91)
0,03	-6,329E-09 (0,00)	-6,825E-09 (1,57)	-6,648E-09 (1,00)	-5,310E-09 (0,25)	-3,160E-09 (0,55)	-9,741E-10 (2,88)
0,04	-9,976E-09 (0,00)	-1,055E-08 (1,25)	-1,022E-08 (0,83)	-8,336E-09 (0,26)	-5,174E-09 (0,53)	-1,672E-09 (2,82)
0,05	-1,326E-08 (0,00)	-1,385E-08 (1,03)	-1,340E-08 (0,71)	-1,115E-08 (0,26)	-7,217E-09 (0,52)	-2,486E-09 (2,75)
0,06	-1,550E-08 (0,00)	-1,604E-08 (0,87)	-1,552E-08 (0,62)	-1,316E-08 (0,26)	-8,899E-09 (0,52)	-3,321E-09 (2,66)
0,07	-1,598E-08 (0,00)	-1,643E-08 (0,75)	-1,592E-08 (0,55)	-1,377E-08 (0,26)	-9,729E-09 (0,51)	-4,002E-09 (2,56)
0,08	-1,403E-08 (0,00)	-1,435E-08 (0,66)	-1,394E-08 (0,49)	-1,228E-08 (0,26)	-9,084E-09 (0,50)	-4,191E-09 (2,46)
0,09	-8,942E-09 (0,00)	-9,107E-09 (0,58)	-8,881E-09 (0,44)	-7,976E-09 (0,26)	-6,187E-09 (0,49)	-3,271E-09 (2,31)
0,1	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)

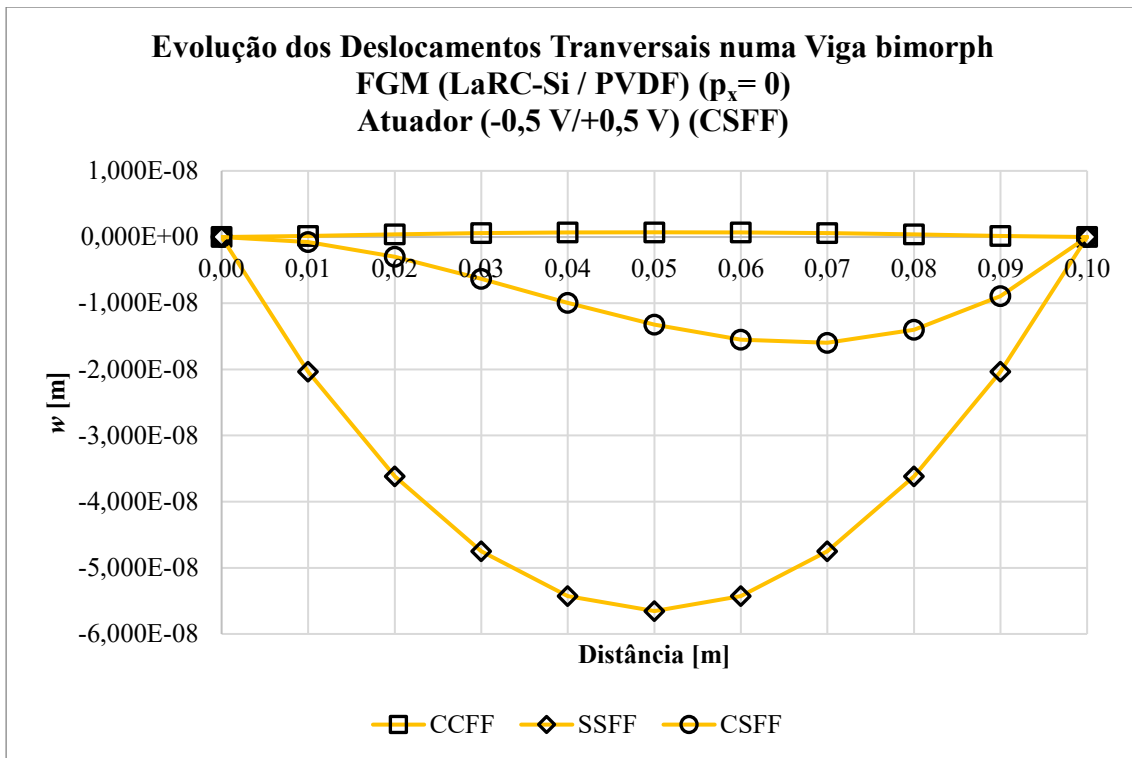


Figura B12 - Representação gráfica da evolução dos deslocamentos transversais ao longo do comprimento de uma viga bimorph em configuração de atuador com $p_x=0$ em função das condições de fronteira

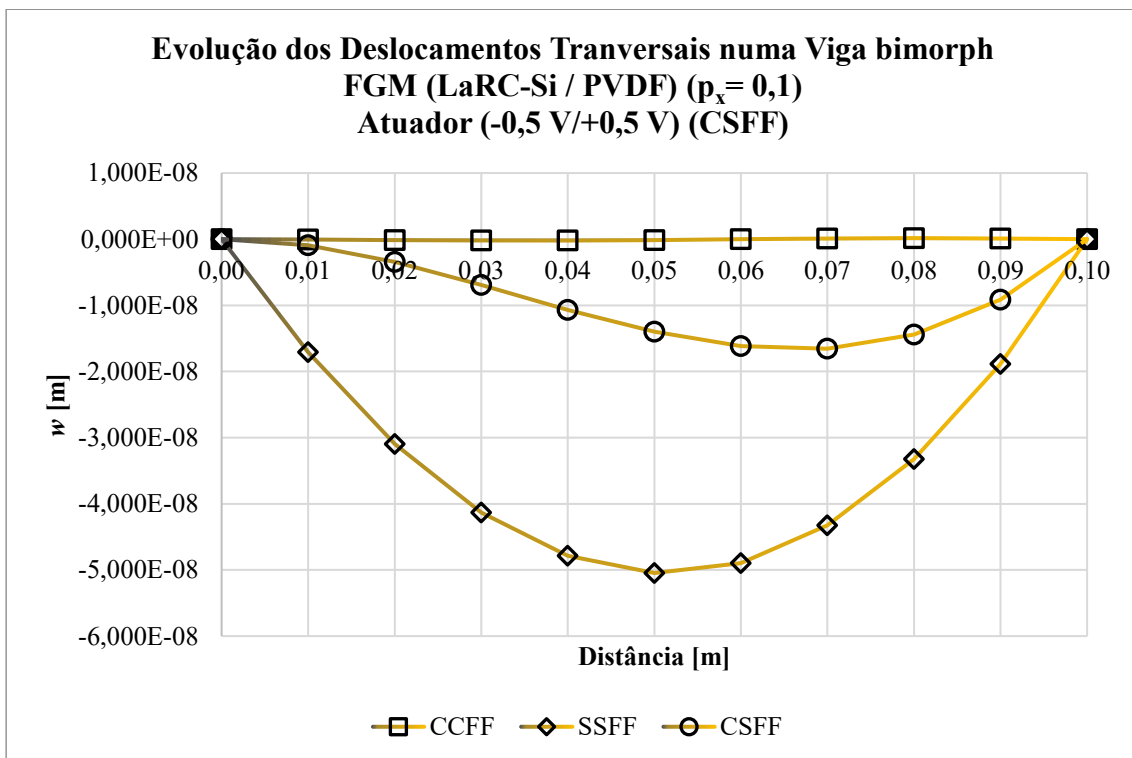


Figura B13 - Representação gráfica da evolução dos deslocamentos transversais ao longo do comprimento de uma viga bimorph em configuração de atuador com $p_x=0,1$ em função das condições de fronteira

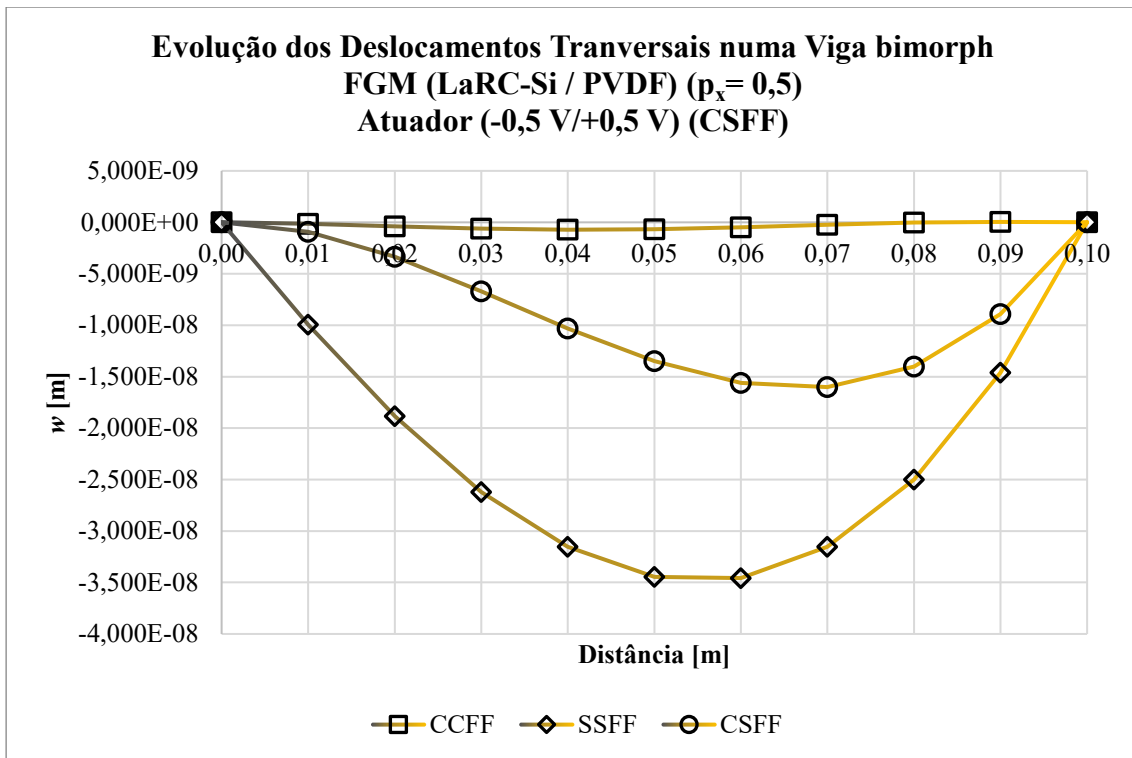


Figura B14 - Representação gráfica da evolução dos deslocamentos transversais ao longo do comprimento de uma viga bimorph em configuração de atuador com $p_x=0,5$ em função das condições de fronteira

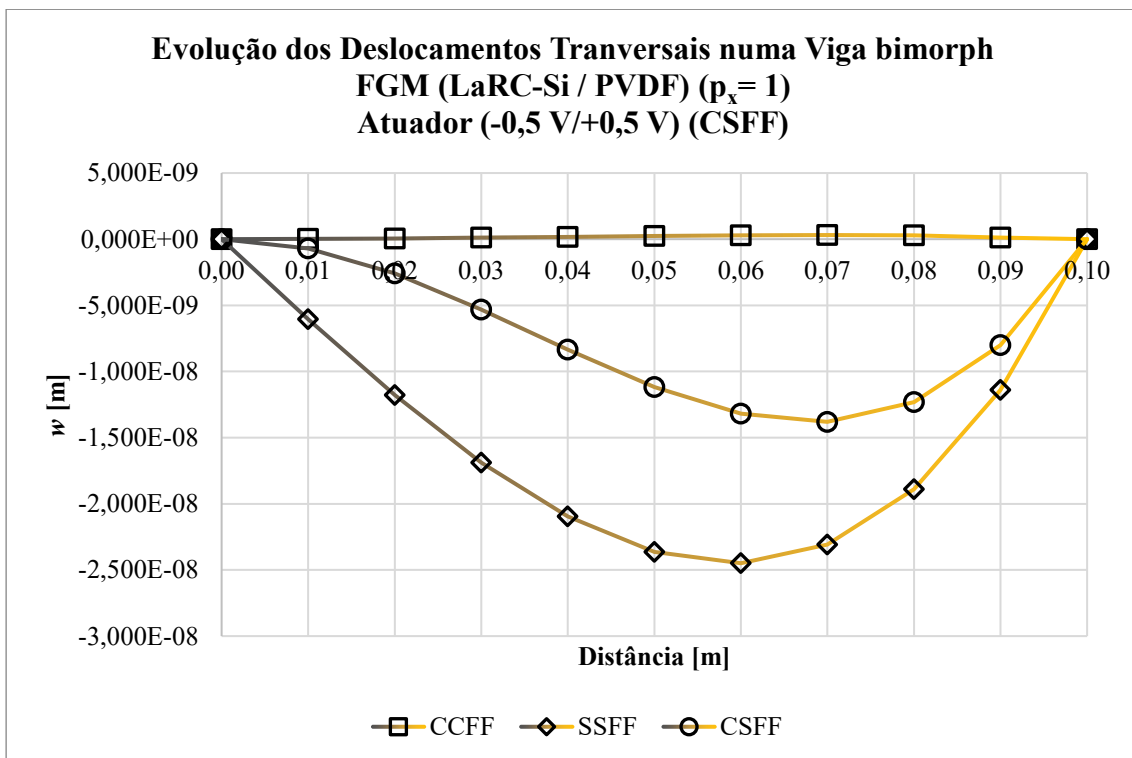


Figura B15 - Representação gráfica da evolução dos deslocamentos transversais ao longo do comprimento de uma viga bimorph em configuração de atuador com $p_x=1$ em função das condições de fronteira

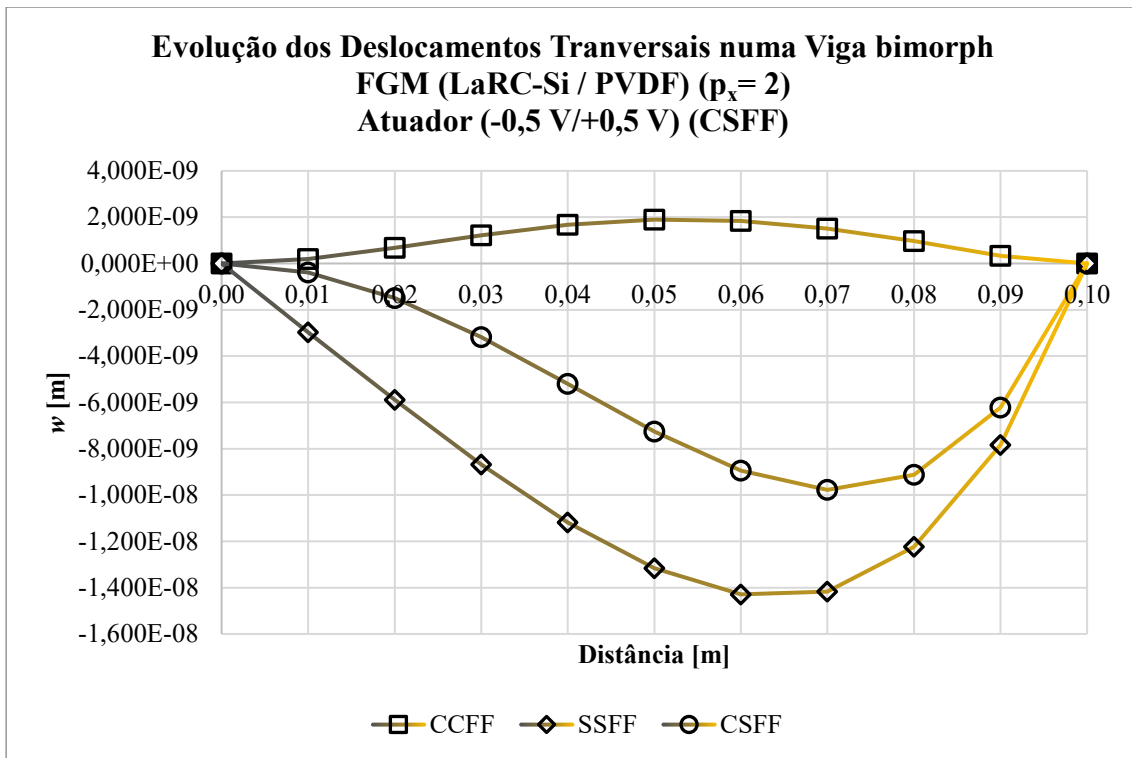


Figura B16 - Representação gráfica da evolução dos deslocamentos transversais ao longo do comprimento de uma viga bimorph em configuração de atuador com $p_x=2$ em função das condições de fronteira

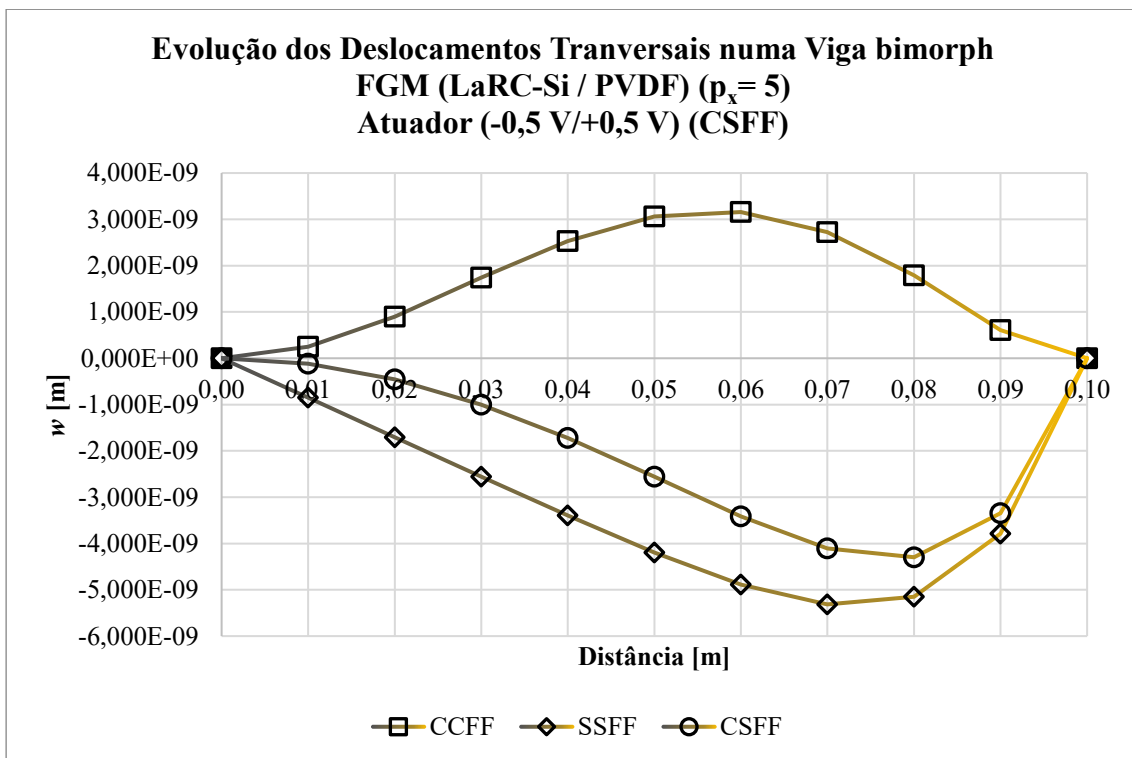


Figura B17 - Representação gráfica da evolução dos deslocamentos transversais ao longo do comprimento de uma viga bimorph em configuração de atuador com $p_x=5$ em função das condições de fronteira

Tabela B54 - Evolução do deslocamento transversal nodal em função de p_x para uma viga (CFFF) bimorph em FGM contínuo LaRC-Si/PVDF em configuração de sensor para uma discretização de 10×1 elementos

x [m]	p					
	0	0,1	0,5	1	2	5
	w [m]	w [m]	w [m]	w [m]	w [m]	w [m]
0	0,000E+00	0,000E+00 ^(NN)	0,000E+00 ^(NN)	0,000E+00 ^(NN)	0,000E+00 ^(NN)	0,000E+00 ^(NN)
0,01	2,162E-04	1,891E-04 ^(NN)	1,528E-04 ^(NN)	1,439E-04 ^(NN)	1,414E-04 ^(NN)	1,412E-04 ^(NN)
0,02	8,606E-04	7,610E-04 ^(NN)	6,169E-04 ^(NN)	5,766E-04 ^(NN)	5,627E-04 ^(NN)	5,610E-04 ^(NN)
0,03	1,901E-03	1,698E-03 ^(NN)	1,384E-03 ^(NN)	1,285E-03 ^(NN)	1,244E-03 ^(NN)	1,237E-03 ^(NN)
0,04	3,284E-03	2,959E-03 ^(NN)	2,426E-03 ^(NN)	2,241E-03 ^(NN)	2,155E-03 ^(NN)	2,136E-03 ^(NN)
0,05	4,963E-03	4,502E-03 ^(NN)	3,714E-03 ^(NN)	3,420E-03 ^(NN)	3,269E-03 ^(NN)	3,226E-03 ^(NN)
0,06	6,887E-03	6,281E-03 ^(NN)	5,213E-03 ^(NN)	4,791E-03 ^(NN)	4,557E-03 ^(NN)	4,478E-03 ^(NN)
0,07	9,007E-03	8,252E-03 ^(NN)	6,887E-03 ^(NN)	6,323E-03 ^(NN)	5,991E-03 ^(NN)	5,861E-03 ^(NN)
0,08	1,127E-02	1,037E-02 ^(NN)	8,696E-03 ^(NN)	7,982E-03 ^(NN)	7,540E-03 ^(NN)	7,345E-03 ^(NN)
0,09	1,364E-02	1,258E-02 ^(NN)	1,060E-02 ^(NN)	9,729E-03 ^(NN)	9,170E-03 ^(NN)	8,901E-03 ^(NN)
0,1	1,606E-02	1,484E-02 ^(NN)	1,255E-02 ^(NN)	1,152E-02 ^(NN)	1,084E-02 ^(NN)	1,050E-02 ^(NN)

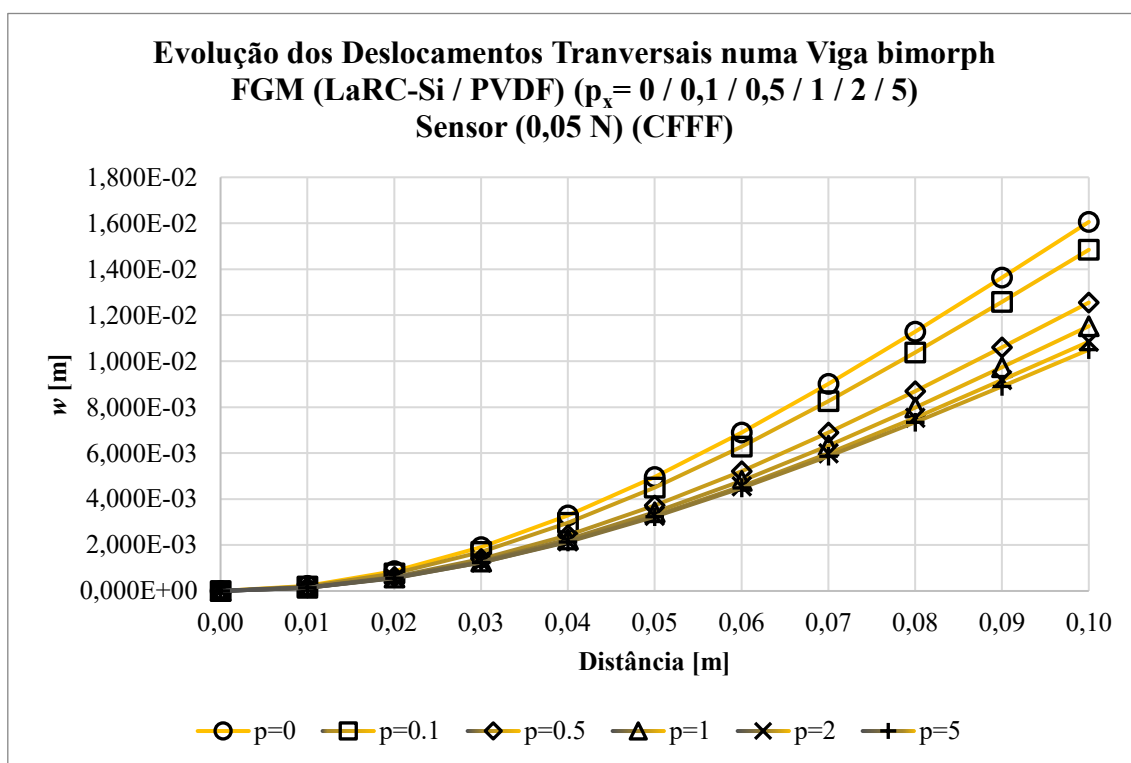


Figura B18 - Representação gráfica do perfil de deslocamentos transversais para vários valores de p ao longo do comprimento de uma viga (CFFF) em configuração de sensor e discretização de 10×1 elementos

Tabela B55 - Evolução do deslocamento transversal nodal em função de px para uma viga (CFFF) bimorph em FGM discreto LaRC-Si/PVDF em configuração de sensor para uma discretização de 10×1 elementos

x [m]	p					
	0	0,1	0,5	1	2	5
	w [m] (δ (%))	w [m] (δ (%))	w [m] (δ (%))	w [m] (δ (%))	w [m] (δ (%))	w [m] (δ (%))
0	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)
0,01	2,162E-04 (0,00)	1,903E-04 (0,63)	1,532E-04 (0,32)	1,436E-04 (0,21)	1,410E-04 (0,29)	1,408E-04 (0,27)
0,02	8,606E-04 (0,00)	7,642E-04 (0,42)	6,181E-04 (0,18)	5,753E-04 (0,22)	5,610E-04 (0,29)	5,595E-04 (0,27)
0,03	1,901E-03 (0,00)	1,703E-03 (0,26)	1,385E-03 (0,08)	1,282E-03 (0,23)	1,241E-03 (0,29)	1,234E-03 (0,27)
0,04	3,284E-03 (0,00)	2,964E-03 (0,17)	2,427E-03 (0,02)	2,236E-03 (0,24)	2,149E-03 (0,29)	2,130E-03 (0,26)
0,05	4,963E-03 (0,00)	4,506E-03 (0,11)	3,713E-03 (0,02)	3,411E-03 (0,24)	3,260E-03 (0,29)	3,218E-03 (0,26)
0,06	6,887E-03 (0,00)	6,285E-03 (0,07)	5,211E-03 (0,04)	4,779E-03 (0,24)	4,544E-03 (0,28)	4,466E-03 (0,26)
0,07	9,007E-03 (0,00)	8,255E-03 (0,03)	6,883E-03 (0,06)	6,308E-03 (0,24)	5,974E-03 (0,28)	5,845E-03 (0,27)
0,08	1,127E-02 (0,00)	1,037E-02 (0,01)	8,689E-03 (0,08)	7,963E-03 (0,24)	7,519E-03 (0,28)	7,325E-03 (0,27)
0,09	1,364E-02 (0,00)	1,258E-02 (0,00)	1,059E-02 (0,09)	9,705E-03 (0,24)	9,144E-03 (0,28)	8,877E-03 (0,27)
0,1	1,606E-02 (0,00)	1,484E-02 (0,02)	1,254E-02 (0,10)	1,149E-02 (0,24)	1,081E-02 (0,28)	1,047E-02 (0,27)

Tabela B56 - Evolução dos potenciais elétricos em função de p_x para uma viga (CFFF) bimorph em FGM contínuo LaRC-Si/PVDF em configuração de sensor para uma discretização de 10×1 elementos

x [m]	p					
	0	0,1	0,5	1	2	5
	ϕ [V]	ϕ [V]	ϕ [V]	ϕ [V]	ϕ [V]	ϕ [V]
0,005	-6,436E+02	-4,923E+02 ^(NN)	-1,894E+02 ^(NN)	-5,241E+01 ^(NN)	-3,630E+00 ^(NN)	-1,754E-03 ^(NN)
0,015	-5,642E+02	-4,840E+02 ^(NN)	-2,747E+02 ^(NN)	-1,302E+02 ^(NN)	-2,359E+01 ^(NN)	-1,106E-01 ^(NN)
0,025	-5,001E+02	-4,466E+02 ^(NN)	-2,937E+02 ^(NN)	-1,741E+02 ^(NN)	-5,339E+01 ^(NN)	-1,014E+00 ^(NN)
0,035	-4,330E+02	-3,975E+02 ^(NN)	-2,881E+02 ^(NN)	-1,955E+02 ^(NN)	-8,411E+01 ^(NN)	-4,431E+00 ^(NN)
0,045	-3,665E+02	-3,435E+02 ^(NN)	-2,677E+02 ^(NN)	-1,995E+02 ^(NN)	-1,083E+02 ^(NN)	-1,260E+01 ^(NN)
0,055	-2,998E+02	-2,857E+02 ^(NN)	-2,363E+02 ^(NN)	-1,892E+02 ^(NN)	-1,215E+02 ^(NN)	-2,659E+01 ^(NN)
0,065	-2,332E+02	-2,254E+02 ^(NN)	-1,961E+02 ^(NN)	-1,666E+02 ^(NN)	-1,215E+02 ^(NN)	-4,378E+01 ^(NN)
0,075	-1,666E+02	-1,629E+02 ^(NN)	-1,483E+02 ^(NN)	-1,326E+02 ^(NN)	-1,071E+02 ^(NN)	-5,654E+01 ^(NN)
0,085	-1,000E+02	-9,890E+01 ^(NN)	-9,375E+01 ^(NN)	-8,788E+01 ^(NN)	-7,766E+01 ^(NN)	-5,473E+01 ^(NN)
0,095	-3,296E+01	-3,292E+01 ^(NN)	-3,241E+01 ^(NN)	-3,179E+01 ^(NN)	-3,061E+01 ^(NN)	-2,749E+01 ^(NN)

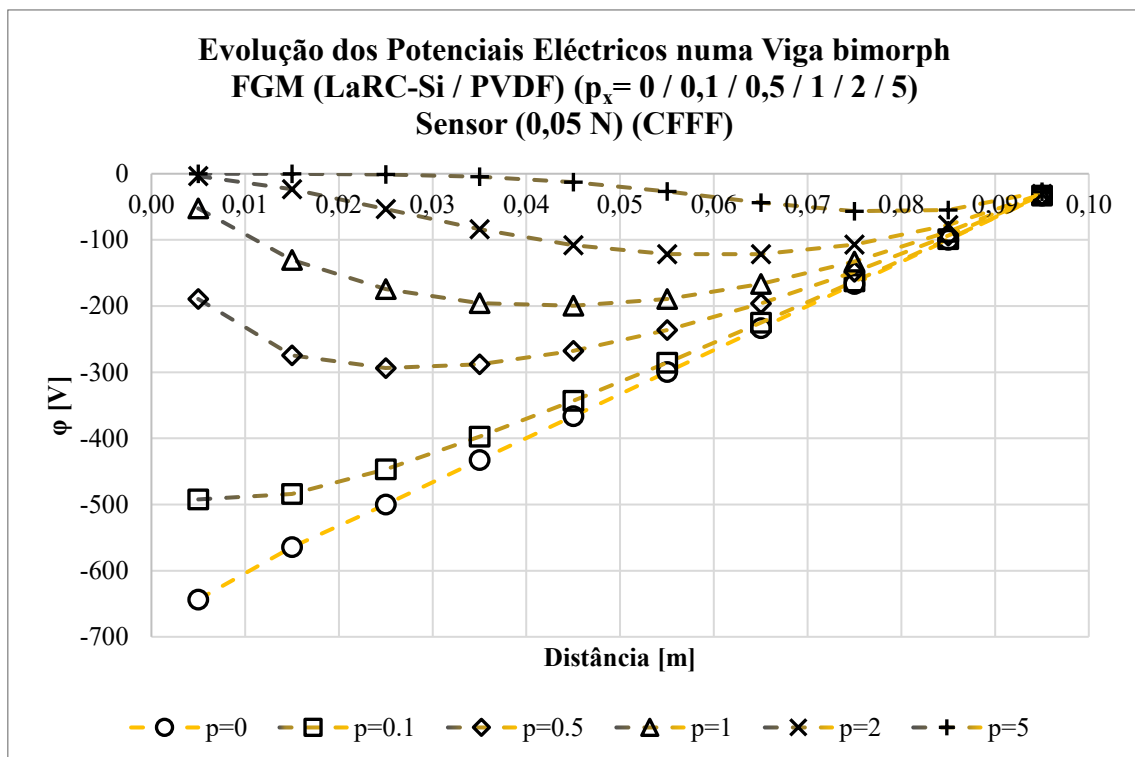


Figura B19 - Representação gráfica da distribuição de potenciais elétricos em função de p_x ao longo do comprimento de uma viga (CFFF) bimorph FGM LaRC-Si/PVDF em configuração de sensor para uma discretização de 10×1 elementos

Tabela B57 - Evolução dos potenciais elétricos em função de px para uma viga (CFFF) bimorph em FGM discreto LaRC-Si/PVDF em configuração de sensor para uma discretização de 10×1 elementos

x [m]	p					
	0	0,1	0,5	1	2	5
	ϕ [V] (δ (%))	ϕ [V] (δ (%))	ϕ [V] (δ (%))	ϕ [V] (δ (%))	ϕ [V] (δ (%))	ϕ [V] (δ (%))
0,005	-6,436E+02 (0,00)	-5,044E+02 (2,47)	-2,035E+02 (4,47)	-5,471E+01 (4,39)	-2,914E+00 (19,74)	-3,655E-04 (79,16)
0,015	-5,642E+02 (0,00)	-4,831E+02 (0,18)	-2,743E+02 (0,14)	-1,292E+02 (0,72)	-2,251E+01 (4,60)	-7,834E-02 (29,14)
0,025	-5,001E+02 (0,00)	-4,457E+02 (0,21)	-2,933E+02 (0,14)	-1,737E+02 (0,27)	-5,259E+01 (1,51)	-8,908E-01 (12,17)
0,035	-4,330E+02 (0,00)	-3,966E+02 (0,24)	-2,874E+02 (0,23)	-1,949E+02 (0,32)	-8,329E+01 (0,98)	-4,124E+00 (6,93)
0,045	-3,665E+02 (0,00)	-3,426E+02 (0,25)	-2,671E+02 (0,25)	-1,989E+02 (0,31)	-1,075E+02 (0,70)	-1,204E+01 (4,40)
0,055	-2,998E+02 (0,00)	-2,850E+02 (0,25)	-2,357E+02 (0,27)	-1,886E+02 (0,32)	-1,208E+02 (0,59)	-2,578E+01 (3,07)
0,065	-2,332E+02 (0,00)	-2,248E+02 (0,26)	-1,956E+02 (0,29)	-1,660E+02 (0,34)	-1,208E+02 (0,55)	-4,279E+01 (2,28)
0,075	-1,666E+02 (0,00)	-1,625E+02 (0,26)	-1,478E+02 (0,31)	-1,321E+02 (0,37)	-1,065E+02 (0,56)	-5,551E+01 (1,82)
0,085	-1,000E+02 (0,00)	-9,863E+01 (0,27)	-9,341E+01 (0,37)	-8,745E+01 (0,48)	-7,708E+01 (0,74)	-5,371E+01 (1,87)
0,095	-3,296E+01 (0,00)	-3,282E+01 (0,30)	-3,226E+01 (0,45)	-3,159E+01 (0,64)	-3,029E+01 (1,02)	-2,685E+01 (2,33)

Tabela B58 - Evolução do deslocamento transversal nodal em função de p_x para uma viga (CCFF) bimorph em FGM contínuo LaRC-Si/PVDF em configuração de sensor para uma discretização de 10×1 elementos

x [m]	p					
	0	0,1	0,5	1	2	5
	w [m]	w [m]	w [m]	w [m]	w [m]	w [m]
0	0,000E+00	0,000E+00 ^(NN)	0,000E+00 ^(NN)	0,000E+00 ^(NN)	0,000E+00 ^(NN)	0,000E+00 ^(NN)
0,01	2,276E-05	2,085E-05 ^(NN)	1,789E-05 ^(NN)	1,690E-05 ^(NN)	1,625E-05 ^(NN)	1,570E-05 ^(NN)
0,02	8,124E-05	7,525E-05 ^(NN)	6,503E-05 ^(NN)	6,105E-05 ^(NN)	5,826E-05 ^(NN)	5,605E-05 ^(NN)
0,03	1,530E-04	1,433E-04 ^(NN)	1,250E-04 ^(NN)	1,169E-04 ^(NN)	1,107E-04 ^(NN)	1,058E-04 ^(NN)
0,04	2,130E-04	2,014E-04 ^(NN)	1,776E-04 ^(NN)	1,657E-04 ^(NN)	1,560E-04 ^(NN)	1,481E-04 ^(NN)
0,05	2,370E-04	2,257E-04 ^(NN)	2,013E-04 ^(NN)	1,882E-04 ^(NN)	1,766E-04 ^(NN)	1,664E-04 ^(NN)
0,06	2,130E-04	2,040E-04 ^(NN)	1,839E-04 ^(NN)	1,727E-04 ^(NN)	1,622E-04 ^(NN)	1,521E-04 ^(NN)
0,07	1,530E-04	1,472E-04 ^(NN)	1,342E-04 ^(NN)	1,268E-04 ^(NN)	1,196E-04 ^(NN)	1,120E-04 ^(NN)
0,08	8,124E-05	7,849E-05 ^(NN)	7,228E-05 ^(NN)	6,878E-05 ^(NN)	6,538E-05 ^(NN)	6,152E-05 ^(NN)
0,09	2,276E-05	2,205E-05 ^(NN)	2,048E-05 ^(NN)	1,962E-05 ^(NN)	1,879E-05 ^(NN)	1,782E-05 ^(NN)
0,1	0,000E+00	0,000E+00 ^(NN)	0,000E+00 ^(NN)	0,000E+00 ^(NN)	0,000E+00 ^(NN)	0,000E+00 ^(NN)

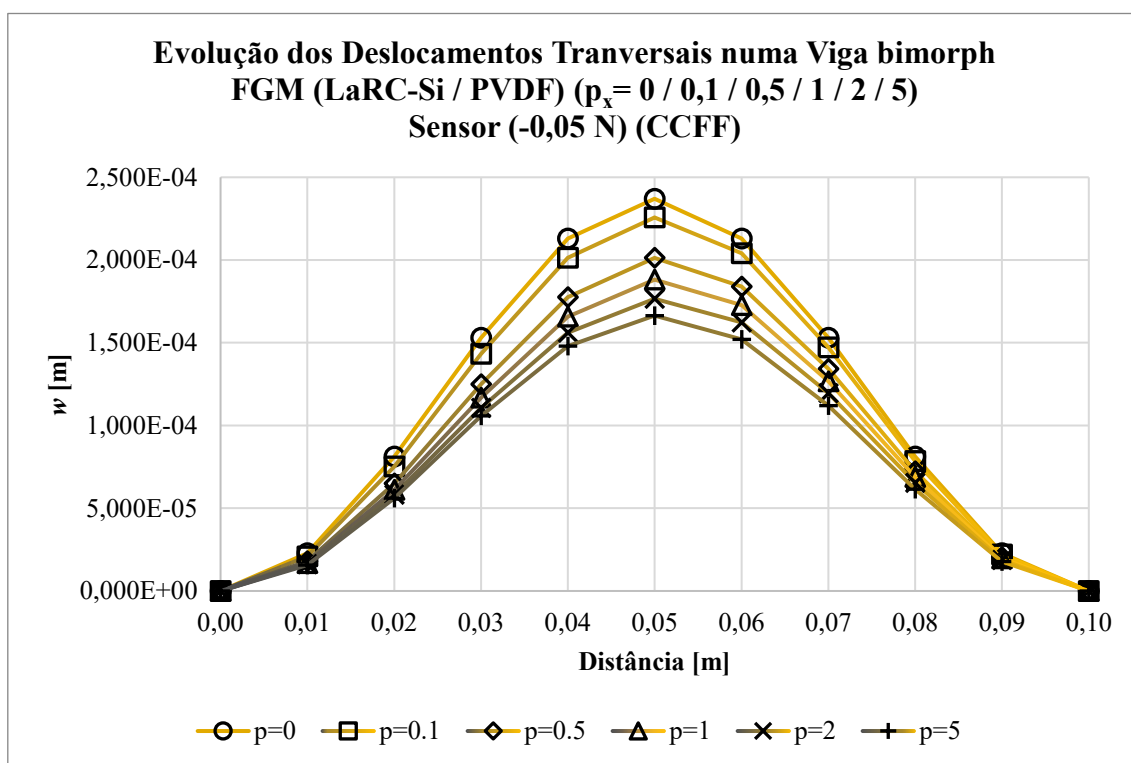


Figura B20 - Representação gráfica do perfil de deslocamentos transversais para vários valores de p ao longo do comprimento de uma viga (CCFF) em configuração de sensor e discretização de 10×1 elementos

Tabela B59 - Evolução do deslocamento transversal nodal em função de px para uma viga (CCFF) bimorph em FGM discreto LaRC-Si/PVDF em configuração de sensor para uma discretização de 10×1 elementos

x [m]	p					
	0	0,1	0,5	1	2	5
	w [m] (δ (%))	w [m] (δ (%))	w [m] (δ (%))	w [m] (δ (%))	w [m] (δ (%))	w [m] (δ (%))
0	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)
0,01	2,276E-05 (0,00)	2,092E-05 (0,34)	1,792E-05 (0,13)	1,686E-05 (0,23)	1,619E-05 (0,32)	1,564E-05 (0,38)
0,02	8,124E-05 (0,00)	7,538E-05 (0,17)	6,505E-05 (0,02)	6,089E-05 (0,25)	5,807E-05 (0,32)	5,584E-05 (0,38)
0,03	1,530E-04 (0,00)	1,434E-04 (0,04)	1,250E-04 (0,06)	1,165E-04 (0,26)	1,103E-04 (0,32)	1,054E-04 (0,39)
0,04	2,130E-04 (0,00)	2,013E-04 (0,04)	1,774E-04 (0,12)	1,653E-04 (0,27)	1,555E-04 (0,32)	1,475E-04 (0,40)
0,05	2,370E-04 (0,00)	2,255E-04 (0,08)	2,010E-04 (0,15)	1,876E-04 (0,27)	1,760E-04 (0,33)	1,657E-04 (0,42)
0,06	2,130E-04 (0,00)	2,038E-04 (0,11)	1,836E-04 (0,17)	1,722E-04 (0,28)	1,616E-04 (0,34)	1,514E-04 (0,45)
0,07	1,530E-04 (0,00)	1,471E-04 (0,13)	1,340E-04 (0,18)	1,264E-04 (0,29)	1,192E-04 (0,36)	1,115E-04 (0,50)
0,08	8,124E-05 (0,00)	7,838E-05 (0,14)	7,214E-05 (0,20)	6,857E-05 (0,31)	6,513E-05 (0,39)	6,115E-05 (0,59)
0,09	2,276E-05 (0,00)	2,202E-05 (0,15)	2,043E-05 (0,22)	1,955E-05 (0,34)	1,871E-05 (0,44)	1,770E-05 (0,69)
0,1	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)

Tabela B60 - Evolução dos potenciais elétricos em função de p_x para uma viga (CCFF) bimorph em FGM contínuo LaRC-Si/PVDF em configuração de sensor para uma discretização de 10×1 elementos

x [m]	p					
	0	0,1	0,5	1	2	5
	ϕ [V]	ϕ [V]	ϕ [V]	ϕ [V]	ϕ [V]	ϕ [V]
0,005	-6,882E+01	-5,513E+01 ^(NN)	-2,255E+01 ^(NN)	-6,266E+00 ^(NN)	-4,259E-01 ^(NN)	-2,000E-04 ^(NN)
0,015	-3,390E+01	-3,135E+01 ^(NN)	-1,956E+01 ^(NN)	-9,314E+00 ^(NN)	-1,642E+00 ^(NN)	-7,512E-03 ^(NN)
0,025	-9,040E-01	-2,606E+00 ^(NN)	-3,233E+00 ^(NN)	-1,862E+00 ^(NN)	-4,326E-01 ^(NN)	-5,866E-03 ^(NN)
0,035	3,243E+01	2,845E+01 ^(NN)	1,950E+01 ^(NN)	1,339E+01 ^(NN)	5,997E+00 ^(NN)	3,238E-01 ^(NN)
0,045	6,595E+01	6,100E+01 ^(NN)	4,701E+01 ^(NN)	3,535E+01 ^(NN)	1,955E+01 ^(NN)	2,298E+00 ^(NN)
0,055	6,595E+01	6,261E+01 ^(NN)	5,199E+01 ^(NN)	4,218E+01 ^(NN)	2,760E+01 ^(NN)	6,111E+00 ^(NN)
0,065	3,243E+01	3,168E+01 ^(NN)	2,860E+01 ^(NN)	2,512E+01 ^(NN)	1,899E+01 ^(NN)	6,962E+00 ^(NN)
0,075	-9,040E-01	1,966E-02 ^(NN)	1,930E+00 ^(NN)	2,811E+00 ^(NN)	3,056E+00 ^(NN)	1,706E+00 ^(NN)
0,085	-3,390E+01	-3,203E+01 ^(NN)	-2,744E+01 ^(NN)	-2,428E+01 ^(NN)	-2,045E+01 ^(NN)	-1,423E+01 ^(NN)
0,095	-6,882E+01	-6,661E+01 ^(NN)	-6,160E+01 ^(NN)	-5,868E+01 ^(NN)	-5,547E+01 ^(NN)	-5,018E+01 ^(NN)

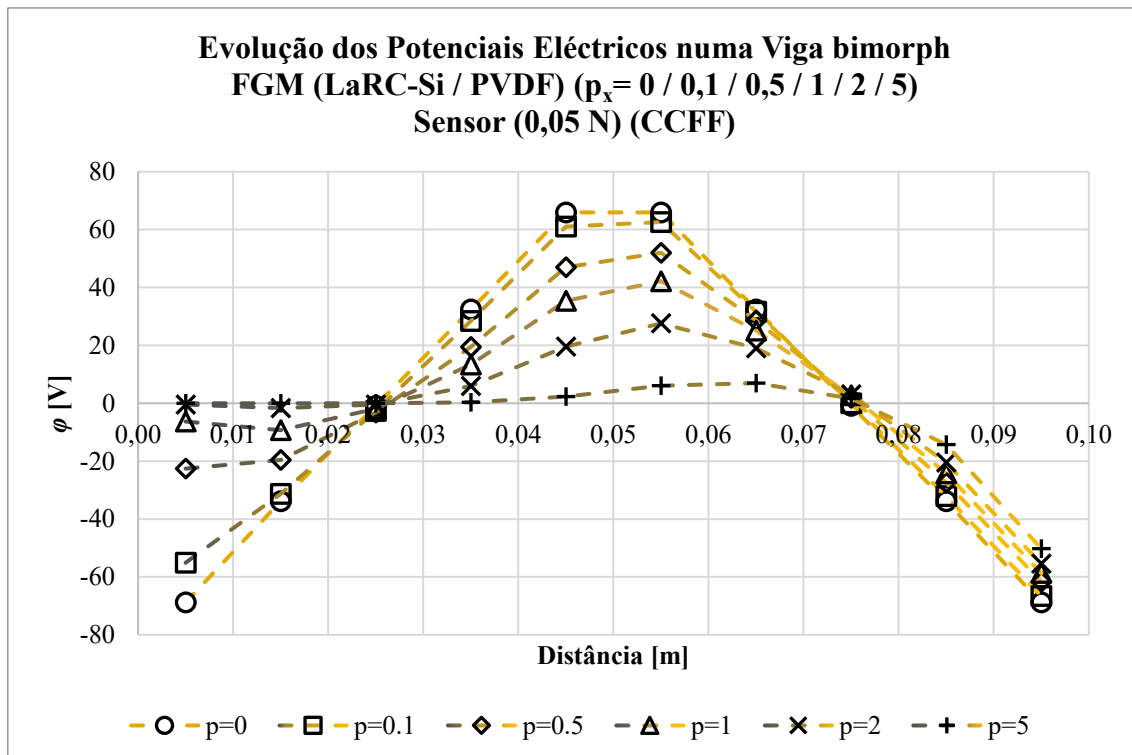


Figura B21 - Representação gráfica da distribuição de potenciais elétricos em função de p_x ao longo do comprimento de uma viga (CCFF) bimorph FGM LaRC-Si/PVDF em configuração de sensor para uma discretização de 10×1 elementos

Tabela B61 - Evolução dos potenciais elétricos em função de p_x para uma viga (CCFF) bimorph em FGM discreto LaRC-Si/PVDF em configuração de sensor para uma discretização de 10×1 elementos

x [m]	p					
	0	0,1	0,5	1	2	5
	ϕ [V] (δ (%))	ϕ [V] (δ (%))	ϕ [V] (δ (%))	ϕ [V] (δ (%))	ϕ [V] (δ (%))	ϕ [V] (δ (%))
0,005	-6,882E+01 (0,00)	-5,626E+01 (2,05)	-2,410E+01 (6,88)	-6,502E+00 (3,77)	-3,388E-01 (20,45)	-4,112E-05 (79,45)
0,015	-3,390E+01 (0,00)	-3,108E+01 (0,87)	-1,933E+01 (1,18)	-9,119E+00 (2,10)	-1,527E+00 (7,06)	-5,027E-03 (33,08)
0,025	-9,040E-01 (0,00)	-2,444E+00 (6,22)	-3,092E+00 (4,39)	-1,768E+00 (5,02)	-3,794E-01 (12,30)	-3,346E-03 (42,95)
0,035	3,243E+01 (0,00)	2,852E+01 (0,23)	1,960E+01 (0,54)	1,348E+01 (0,61)	6,031E+00 (0,58)	3,119E-01 (3,67)
0,045	6,595E+01 (0,00)	6,095E+01 (0,10)	4,699E+01 (0,03)	3,534E+01 (0,05)	1,950E+01 (0,26)	2,218E+00 (3,48)
0,055	6,595E+01 (0,00)	6,249E+01 (0,19)	5,186E+01 (0,25)	4,203E+01 (0,36)	2,743E+01 (0,65)	5,914E+00 (3,22)
0,065	3,243E+01 (0,00)	3,160E+01 (0,27)	2,847E+01 (0,46)	2,495E+01 (0,67)	1,878E+01 (1,09)	6,721E+00 (3,47)
0,075	-9,040E-01 (0,00)	-1,616E-02 (182,19)	1,856E+00 (3,82)	2,710E+00 (3,57)	2,914E+00 (4,63)	1,529E+00 (10,37)
0,085	-3,390E+01 (0,00)	-3,203E+01 (0,00)	-2,751E+01 (0,26)	-2,440E+01 (0,52)	-2,068E+01 (1,15)	-1,457E+01 (2,40)
0,095	-6,882E+01 (0,00)	-6,652E+01 (0,13)	-6,143E+01 (0,28)	-5,838E+01 (0,50)	-5,503E+01 (0,81)	-4,921E+01 (1,94)

Tabela B62 - Evolução do deslocamento transversal nodal em função de p_x para uma viga (SSFF) bimorph em FGM contínuo LaRC-Si/PVDF em configuração de sensor para uma discretização de 10×1 elementos

x [m]	p					
	0	0,1	0,5	1	2	5
	w [m]	w [m]	w [m]	w [m]	w [m]	w [m]
0	0,000E+00	0,000E+00 ^(NN)	0,000E+00 ^(NN)	0,000E+00 ^(NN)	0,000E+00 ^(NN)	0,000E+00 ^(NN)
0,01	3,005E-04	2,867E-04 ^(NN)	2,517E-04 ^(NN)	2,301E-04 ^(NN)	2,114E-04 ^(NN)	1,983E-04 ^(NN)
0,02	5,764E-04	5,513E-04 ^(NN)	4,853E-04 ^(NN)	4,436E-04 ^(NN)	4,067E-04 ^(NN)	3,806E-04 ^(NN)
0,03	8,031E-04	7,702E-04 ^(NN)	6,809E-04 ^(NN)	6,226E-04 ^(NN)	5,697E-04 ^(NN)	5,311E-04 ^(NN)
0,04	9,562E-04	9,196E-04 ^(NN)	8,171E-04 ^(NN)	7,480E-04 ^(NN)	6,832E-04 ^(NN)	6,338E-04 ^(NN)
0,05	1,011E-03	9,752E-04 ^(NN)	8,715E-04 ^(NN)	7,993E-04 ^(NN)	7,291E-04 ^(NN)	6,727E-04 ^(NN)
0,06	9,562E-04	9,244E-04 ^(NN)	8,308E-04 ^(NN)	7,639E-04 ^(NN)	6,967E-04 ^(NN)	6,392E-04 ^(NN)
0,07	8,031E-04	7,780E-04 ^(NN)	7,029E-04 ^(NN)	6,481E-04 ^(NN)	5,915E-04 ^(NN)	5,404E-04 ^(NN)
0,08	5,764E-04	5,592E-04 ^(NN)	5,074E-04 ^(NN)	4,691E-04 ^(NN)	4,289E-04 ^(NN)	3,908E-04 ^(NN)
0,09	3,005E-04	2,918E-04 ^(NN)	2,656E-04 ^(NN)	2,461E-04 ^(NN)	2,253E-04 ^(NN)	2,052E-04 ^(NN)
0,1	0,000E+00	0,000E+00 ^(NN)	0,000E+00 ^(NN)	0,000E+00 ^(NN)	0,000E+00 ^(NN)	0,000E+00 ^(NN)

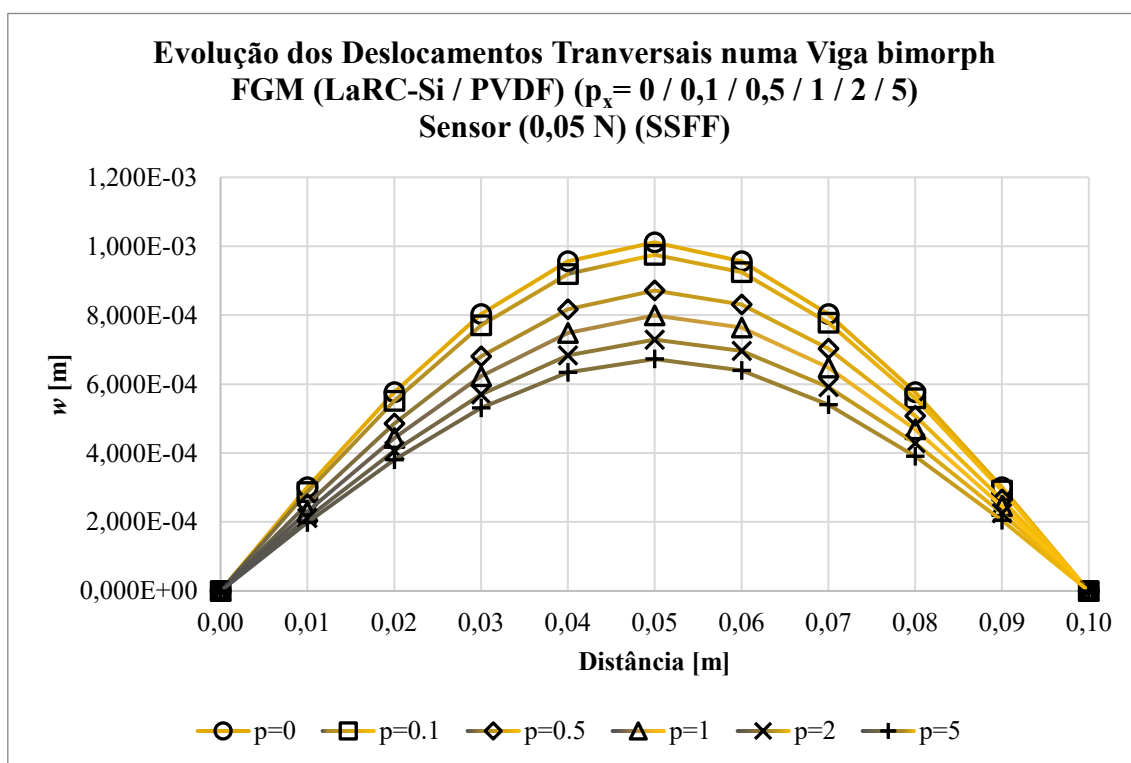


Figura B22 - Representação gráfica do perfil de deslocamentos transversais para vários valores de p ao longo do comprimento de uma viga (SSFF) em configuração de sensor e discretização de 10×1 elementos

Tabela B63 - Evolução do deslocamento transversal nodal em função de px para uma viga (SSFF) bimorph em FGM discreto LaRC-Si/PVDF em configuração de sensor para uma discretização de 10×1 elementos

x [m]	p					
	0	0,1	0,5	1	2	5
	w [m] (δ (%))	w [m] (δ (%))	w [m] (δ (%))	w [m] (δ (%))	w [m] (δ (%))	w [m] (δ (%))
0	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)
0,01	3,005E-04 (0,00)	2,861E-04 (0,22)	2,511E-04 (0,22)	2,295E-04 (0,25)	2,108E-04 (0,28)	1,977E-04 (0,29)
0,02	5,764E-04 (0,00)	5,500E-04 (0,23)	4,842E-04 (0,23)	4,425E-04 (0,25)	4,056E-04 (0,28)	3,795E-04 (0,29)
0,03	8,031E-04 (0,00)	7,684E-04 (0,24)	6,793E-04 (0,23)	6,211E-04 (0,25)	5,681E-04 (0,28)	5,296E-04 (0,29)
0,04	9,562E-04 (0,00)	9,174E-04 (0,24)	8,152E-04 (0,23)	7,462E-04 (0,25)	6,813E-04 (0,28)	6,319E-04 (0,29)
0,05	1,011E-03 (0,00)	9,729E-04 (0,24)	8,694E-04 (0,24)	7,973E-04 (0,25)	7,271E-04 (0,28)	6,706E-04 (0,30)
0,06	9,562E-04 (0,00)	9,222E-04 (0,24)	8,289E-04 (0,24)	7,620E-04 (0,25)	6,947E-04 (0,28)	6,373E-04 (0,31)
0,07	8,031E-04 (0,00)	7,762E-04 (0,24)	7,013E-04 (0,24)	6,465E-04 (0,25)	5,899E-04 (0,28)	5,387E-04 (0,31)
0,08	5,764E-04 (0,00)	5,579E-04 (0,24)	5,062E-04 (0,24)	4,680E-04 (0,25)	4,277E-04 (0,28)	3,895E-04 (0,32)
0,09	3,005E-04 (0,00)	2,911E-04 (0,24)	2,650E-04 (0,24)	2,455E-04 (0,25)	2,247E-04 (0,28)	2,045E-04 (0,33)
0,1	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)

Tabela B64 - Evolução dos potenciais elétricos em função de p_x para uma viga (SSFF) bimorph em FGM contínuo LaRC-Si/PVDF em configuração de sensor para uma discretização de 10×1 elementos

x [m]	p					
	0	0,1	0,5	1	2	5
	ϕ [V]	ϕ [V]	ϕ [V]	ϕ [V]	ϕ [V]	ϕ [V]
0,005	1,666E+01	1,268E+01 ^(NN)	4,814E+00 ^(NN)	1,317E+00 ^(NN)	8,971E-02 ^(NN)	4,229E-05 ^(NN)
0,015	4,997E+01	4,275E+01 ^(NN)	2,410E+01 ^(NN)	1,135E+01 ^(NN)	2,033E+00 ^(NN)	9,255E-03 ^(NN)
0,025	8,329E+01	7,434E+01 ^(NN)	4,880E+01 ^(NN)	2,889E+01 ^(NN)	8,833E+00 ^(NN)	1,663E-01 ^(NN)
0,035	1,166E+02	1,070E+02 ^(NN)	7,741E+01 ^(NN)	5,247E+01 ^(NN)	2,252E+01 ^(NN)	1,178E+00 ^(NN)
0,045	1,501E+02	1,406E+02 ^(NN)	1,095E+02 ^(NN)	8,155E+01 ^(NN)	4,421E+01 ^(NN)	5,125E+00 ^(NN)
0,055	1,501E+02	1,430E+02 ^(NN)	1,183E+02 ^(NN)	9,466E+01 ^(NN)	6,075E+01 ^(NN)	1,329E+01 ^(NN)
0,065	1,166E+02	1,127E+02 ^(NN)	9,804E+01 ^(NN)	8,326E+01 ^(NN)	6,073E+01 ^(NN)	2,189E+01 ^(NN)
0,075	8,329E+01	8,149E+01 ^(NN)	7,415E+01 ^(NN)	6,630E+01 ^(NN)	5,357E+01 ^(NN)	2,827E+01 ^(NN)
0,085	4,997E+01	4,941E+01 ^(NN)	4,684E+01 ^(NN)	4,390E+01 ^(NN)	3,879E+01 ^(NN)	2,732E+01 ^(NN)
0,095	1,666E+01	1,664E+01 ^(NN)	1,640E+01 ^(NN)	1,611E+01 ^(NN)	1,555E+01 ^(NN)	1,406E+01 ^(NN)

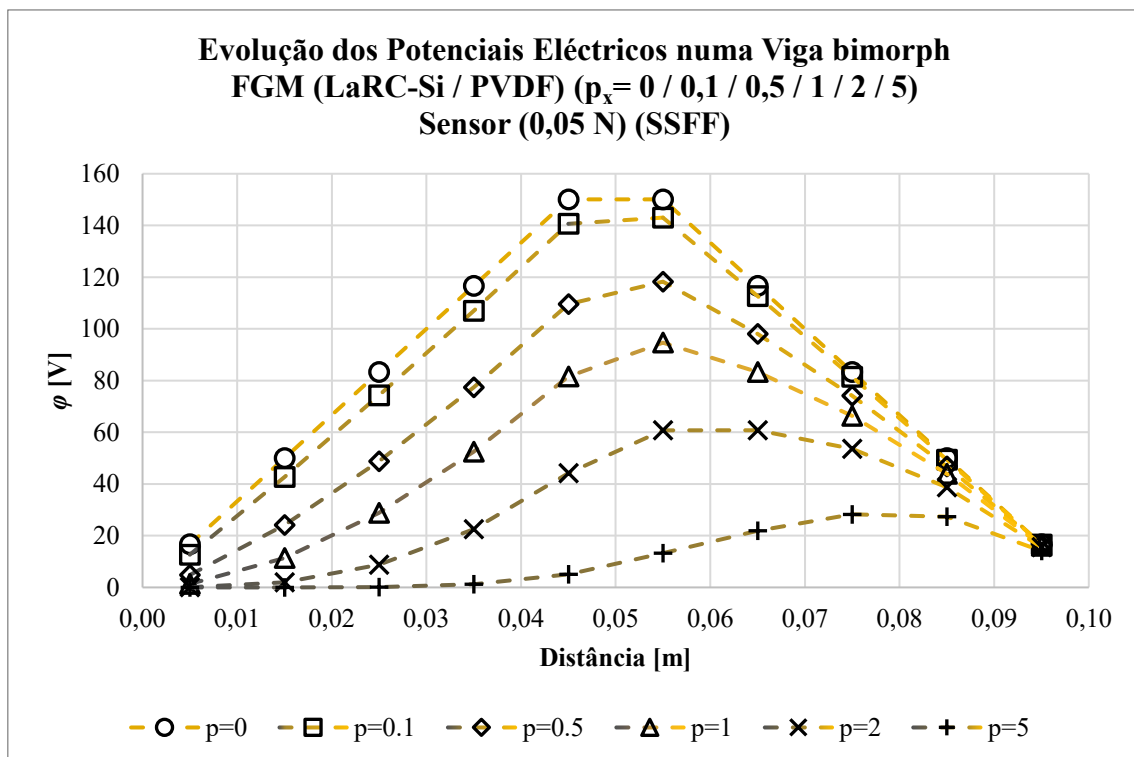


Figura B23 - Representação gráfica da distribuição de potenciais elétricos em função de p_x ao longo do comprimento de uma viga (SSFF) bimorph FGM LaRC-Si/PVDF em configuração de sensor para uma discretização de 10×1 elementos

Tabela B65 - Evolução dos potenciais elétricos em função de px para uma viga (SSFF) bimorph em FGM discreto LaRC-Si/PVDF em configuração de sensor para uma discretização de 10×1 elementos

x [m]	p					
	0	0,1	0,5	1	2	5
	ϕ [V] (δ (%))	ϕ [V] (δ (%))	ϕ [V] (δ (%))	ϕ [V] (δ (%))	ϕ [V] (δ (%))	ϕ [V] (δ (%))
0,005	1,666E+01 (0,00)	1,308E+01 (3,15)	5,290E+00 (9,88)	1,423E+00 (8,05)	7,580E-02 (15,51)	9,508E-06 (77,51)
0,015	4,997E+01 (0,00)	4,276E+01 (0,03)	2,426E+01 (0,67)	1,143E+01 (0,70)	1,991E+00 (2,07)	6,931E-03 (25,11)
0,025	8,329E+01 (0,00)	7,423E+01 (0,15)	4,884E+01 (0,09)	2,893E+01 (0,12)	8,759E+00 (0,83)	1,484E-01 (10,79)
0,035	1,166E+02 (0,00)	1,068E+02 (0,20)	7,737E+01 (0,06)	5,246E+01 (0,02)	2,242E+01 (0,45)	1,110E+00 (5,79)
0,045	1,501E+02 (0,00)	1,403E+02 (0,22)	1,093E+02 (0,16)	8,143E+01 (0,15)	4,402E+01 (0,42)	4,930E+00 (3,79)
0,055	1,501E+02 (0,00)	1,427E+02 (0,25)	1,180E+02 (0,25)	9,439E+01 (0,28)	6,044E+01 (0,52)	1,290E+01 (2,92)
0,065	1,166E+02 (0,00)	1,124E+02 (0,26)	9,775E+01 (0,29)	8,297E+01 (0,35)	6,038E+01 (0,56)	2,139E+01 (2,31)
0,075	8,329E+01 (0,00)	8,127E+01 (0,26)	7,392E+01 (0,31)	6,605E+01 (0,37)	5,327E+01 (0,56)	2,776E+01 (1,83)
0,085	4,997E+01 (0,00)	4,928E+01 (0,27)	4,667E+01 (0,36)	4,370E+01 (0,46)	3,851E+01 (0,70)	2,684E+01 (1,79)
0,095	1,666E+01 (0,00)	1,659E+01 (0,32)	1,630E+01 (0,57)	1,596E+01 (0,89)	1,531E+01 (1,53)	1,357E+01 (3,52)

Tabela B66 - Evolução do deslocamento transversal nodal em função de p_x para uma viga (CSFF) bimorph em FGM contínuo LaRC-Si/PVDF em configuração de sensor para uma discretização de 10×1 elementos

x [m]	p					
	0	0,1	0,5	1	2	5
	w [m]	w [m]	w [m]	w [m]	w [m]	w [m]
0	0,000E+00	0,000E+00 ^(NN)	0,000E+00 ^(NN)	0,000E+00 ^(NN)	0,000E+00 ^(NN)	0,000E+00 ^(NN)
0,01	3,520E-05	3,190E-05 ^(NN)	2,690E-05 ^(NN)	2,523E-05 ^(NN)	2,414E-05 ^(NN)	2,327E-05 ^(NN)
0,02	1,276E-04	1,169E-04 ^(NN)	9,919E-05 ^(NN)	9,247E-05 ^(NN)	8,782E-05 ^(NN)	8,427E-05 ^(NN)
0,03	2,464E-04	2,282E-04 ^(NN)	1,954E-04 ^(NN)	1,813E-04 ^(NN)	1,708E-04 ^(NN)	1,628E-04 ^(NN)
0,04	3,571E-04	3,336E-04 ^(NN)	2,883E-04 ^(NN)	2,669E-04 ^(NN)	2,499E-04 ^(NN)	2,364E-04 ^(NN)
0,05	4,260E-04	4,007E-04 ^(NN)	3,493E-04 ^(NN)	3,235E-04 ^(NN)	3,016E-04 ^(NN)	2,832E-04 ^(NN)
0,06	4,318E-04	4,079E-04 ^(NN)	3,585E-04 ^(NN)	3,326E-04 ^(NN)	3,096E-04 ^(NN)	2,887E-04 ^(NN)
0,07	3,770E-04	3,574E-04 ^(NN)	3,161E-04 ^(NN)	2,941E-04 ^(NN)	2,738E-04 ^(NN)	2,540E-04 ^(NN)
0,08	2,766E-04	2,628E-04 ^(NN)	2,337E-04 ^(NN)	2,181E-04 ^(NN)	2,033E-04 ^(NN)	1,881E-04 ^(NN)
0,09	1,459E-04	1,388E-04 ^(NN)	1,239E-04 ^(NN)	1,159E-04 ^(NN)	1,083E-04 ^(NN)	1,001E-04 ^(NN)
0,1	0,000E+00	0,000E+00 ^(NN)	0,000E+00 ^(NN)	0,000E+00 ^(NN)	0,000E+00 ^(NN)	0,000E+00 ^(NN)

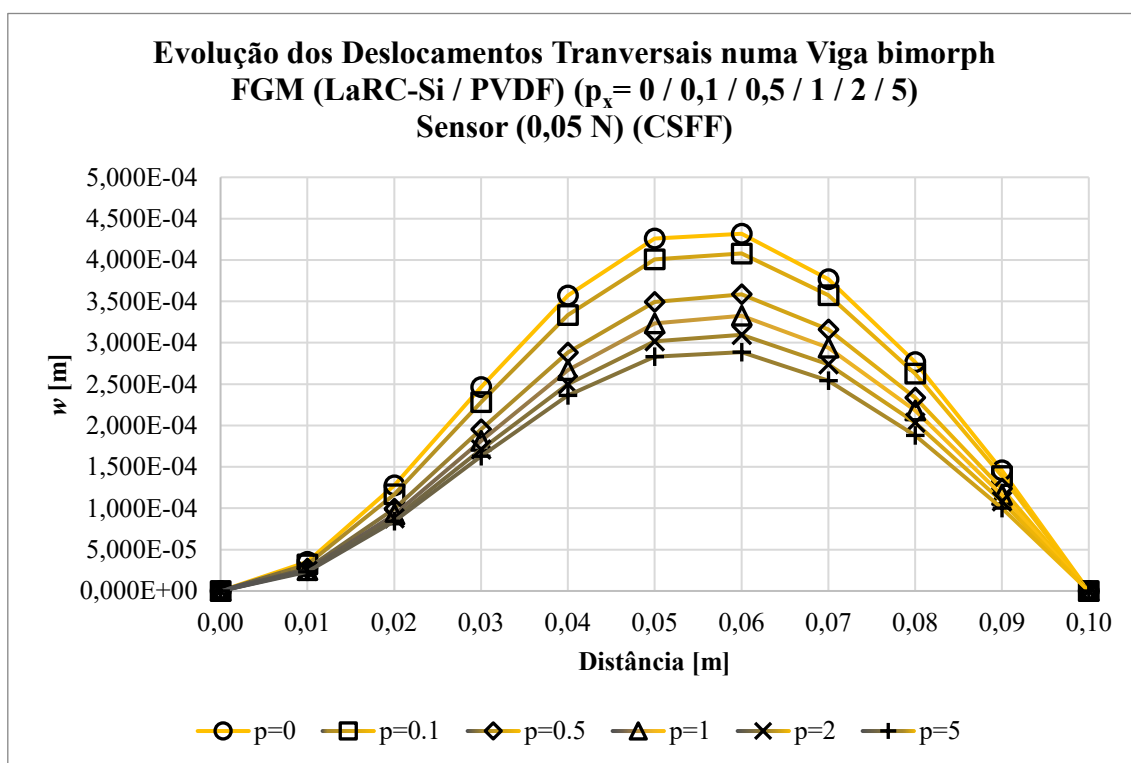


Figura B24 - Representação gráfica do perfil de deslocamentos transversais para vários valores de p ao longo do comprimento de uma viga (SSFF) em configuração de sensor e discretização de 10×1 elementos

Tabela B67 - Evolução do deslocamento transversal nodal em função de px para uma viga (CSFF) bimorph em FGM discreto LaRC-Si/PVDF em configuração de sensor para uma discretização de 10×1 elementos

x [m]	p					
	0	0,1	0,5	1	2	5
	w [m] (δ (%))	w [m] (δ (%))	w [m] (δ (%))	w [m] (δ (%))	w [m] (δ (%))	w [m] (δ (%))
0	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)
0,01	3,520E-05 (0,00)	3,203E-05 (0,41)	2,695E-05 (0,18)	2,517E-05 (0,21)	2,407E-05 (0,29)	2,320E-05 (0,29)
0,02	1,276E-04 (0,00)	1,172E-04 (0,24)	9,926E-05 (0,07)	9,226E-05 (0,23)	8,756E-05 (0,29)	8,403E-05 (0,29)
0,03	2,464E-04 (0,00)	2,285E-04 (0,10)	1,953E-04 (0,02)	1,808E-04 (0,24)	1,703E-04 (0,29)	1,623E-04 (0,29)
0,04	3,571E-04 (0,00)	3,337E-04 (0,03)	2,881E-04 (0,07)	2,663E-04 (0,24)	2,491E-04 (0,29)	2,357E-04 (0,29)
0,05	4,260E-04 (0,00)	4,006E-04 (0,02)	3,490E-04 (0,09)	3,227E-04 (0,24)	3,007E-04 (0,29)	2,823E-04 (0,30)
0,06	4,318E-04 (0,00)	4,078E-04 (0,04)	3,581E-04 (0,11)	3,318E-04 (0,25)	3,087E-04 (0,29)	2,878E-04 (0,31)
0,07	3,770E-04 (0,00)	3,572E-04 (0,05)	3,158E-04 (0,12)	2,934E-04 (0,25)	2,731E-04 (0,29)	2,532E-04 (0,32)
0,08	2,766E-04 (0,00)	2,627E-04 (0,06)	2,335E-04 (0,12)	2,175E-04 (0,25)	2,028E-04 (0,29)	1,875E-04 (0,32)
0,09	1,459E-04 (0,00)	1,387E-04 (0,06)	1,237E-04 (0,12)	1,156E-04 (0,25)	1,079E-04 (0,29)	9,973E-05 (0,34)
0,1	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 (0,00)

Tabela B68 - Evolução dos potenciais elétricos em função de p_x para uma viga (CSFF) bimorph em FGM contínuo LaRC-Si em configuração de sensor para uma discretização de 10×1 elementos

x [m]	p					
	0	0,1	0,5	1	2	5
	ϕ [V]	ϕ [V]	ϕ [V]	ϕ [V]	ϕ [V]	ϕ [V]
0,005	-1,062E+02	-8,417E+01 ^(NN)	-3,382E+01 ^(NN)	-9,333E+00 ^(NN)	-6,311E-01 ^(NN)	-2,955E-04 ^(NN)
0,015	-5,774E+01	-5,247E+01 ^(NN)	-3,193E+01 ^(NN)	-1,510E+01 ^(NN)	-2,651E+00 ^(NN)	-1,204E-02 ^(NN)
0,025	-1,219E+01	-1,353E+01 ^(NN)	-1,111E+01 ^(NN)	-6,493E+00 ^(NN)	-1,769E+00 ^(NN)	-2,904E-02 ^(NN)
0,035	3,390E+01	2,876E+01 ^(NN)	1,864E+01 ^(NN)	1,274E+01 ^(NN)	5,822E+00 ^(NN)	3,249E-01 ^(NN)
0,045	8,012E+01	7,305E+01 ^(NN)	5,490E+01 ^(NN)	4,101E+01 ^(NN)	2,271E+01 ^(NN)	2,698E+00 ^(NN)
0,055	9,285E+01	8,681E+01 ^(NN)	7,005E+01 ^(NN)	5,621E+01 ^(NN)	3,663E+01 ^(NN)	8,165E+00 ^(NN)
0,065	7,204E+01	6,832E+01 ^(NN)	5,803E+01 ^(NN)	4,942E+01 ^(NN)	3,661E+01 ^(NN)	1,346E+01 ^(NN)
0,075	5,149E+01	4,943E+01 ^(NN)	4,390E+01 ^(NN)	3,935E+01 ^(NN)	3,230E+01 ^(NN)	1,738E+01 ^(NN)
0,085	3,089E+01	2,997E+01 ^(NN)	2,773E+01 ^(NN)	2,606E+01 ^(NN)	2,338E+01 ^(NN)	1,680E+01 ^(NN)
0,095	1,030E+01	1,009E+01 ^(NN)	9,708E+00 ^(NN)	9,561E+00 ^(NN)	9,374E+00 ^(NN)	8,644E+00 ^(NN)

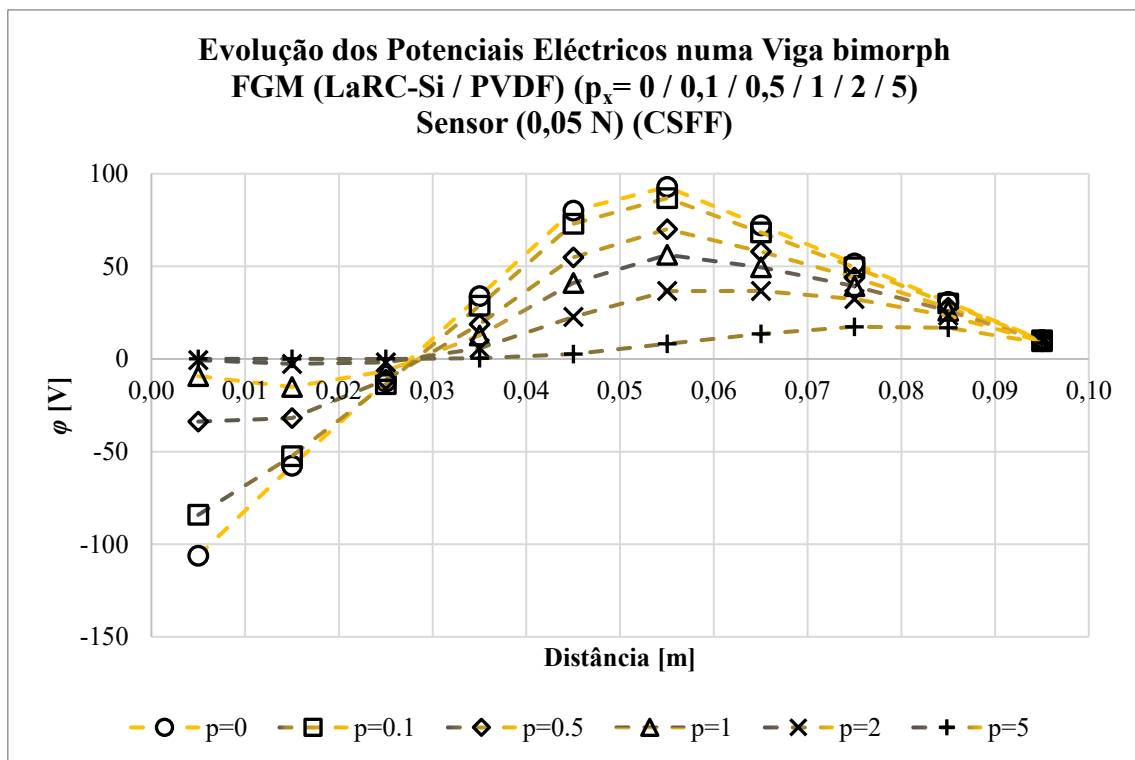


Figura B25 - Representação gráfica da distribuição de potenciais elétricos em função de p_x ao longo do comprimento de uma viga (CSFF) bimorph FGM LaRC-Si/PVDF em configuração de sensor para uma discretização de 10×1 elementos

Tabela B69 - Evolução dos potenciais elétricos em função de px para uma viga (CSFF) bimorph em FGM discreto LaRC-Si/PVDF em configuração de sensor para uma discretização de 10×1 elementos

x [m]	p					
	0	0,1	0,5	1	2	5
	ϕ [V] (δ (%))	ϕ [V] (δ (%))	ϕ [V] (δ (%))	ϕ [V] (δ (%))	ϕ [V] (δ (%))	ϕ [V] (δ (%))
0,005	-1,062E+02 (0,00)	-8,597E+01 (2,14)	-3,618E+01 (6,99)	-9,694E+00 (3,86)	-5,027E-01 (20,33)	-6,089E-05 (79,40)
0,015	-5,774E+01 (0,00)	-5,210E+01 (0,70)	-3,162E+01 (0,95)	-1,483E+01 (1,80)	-2,478E+00 (6,53)	-8,157E-03 (32,26)
0,025	-1,219E+01 (0,00)	-1,329E+01 (1,76)	-1,091E+01 (1,75)	-6,363E+00 (2,01)	-1,682E+00 (4,87)	-2,319E-02 (20,14)
0,035	3,390E+01 (0,00)	2,888E+01 (0,44)	1,880E+01 (0,85)	1,286E+01 (0,93)	5,884E+00 (1,06)	3,159E-01 (2,75)
0,045	8,012E+01 (0,00)	7,304E+01 (0,03)	5,493E+01 (0,05)	4,102E+01 (0,01)	2,267E+01 (0,16)	2,611E+00 (3,24)
0,055	9,285E+01 (0,00)	8,671E+01 (0,12)	6,995E+01 (0,15)	5,607E+01 (0,25)	3,646E+01 (0,48)	7,935E+00 (2,83)
0,065	7,204E+01 (0,00)	6,823E+01 (0,13)	5,791E+01 (0,21)	4,924E+01 (0,35)	3,640E+01 (0,58)	1,315E+01 (2,32)
0,075	5,149E+01 (0,00)	4,936E+01 (0,14)	4,380E+01 (0,23)	3,921E+01 (0,37)	3,212E+01 (0,56)	1,707E+01 (1,81)
0,085	3,089E+01 (0,00)	2,993E+01 (0,15)	2,765E+01 (0,28)	2,594E+01 (0,46)	2,322E+01 (0,70)	1,650E+01 (1,78)
0,095	1,030E+01 (0,00)	1,007E+01 (0,19)	9,660E+00 (0,49)	9,476E+00 (0,89)	9,231E+00 (1,53)	8,341E+00 (3,51)

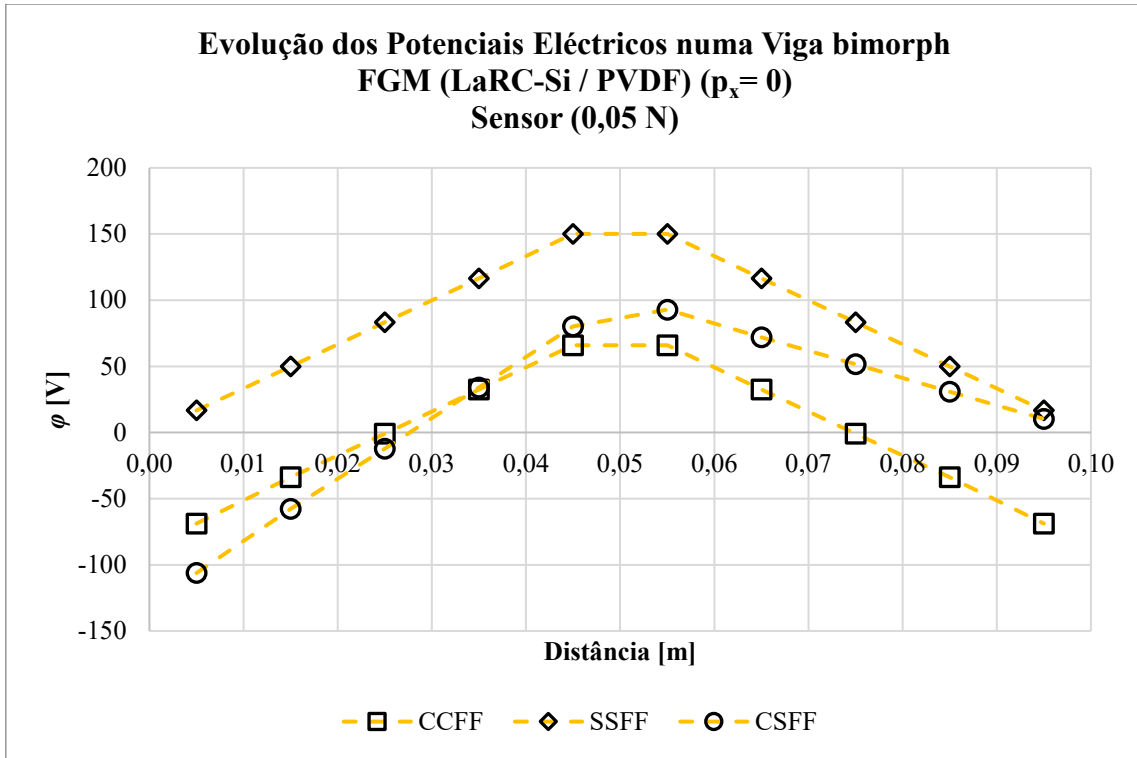


Figura B26 - Representação gráfica da evolução dos deslocamentos transversais ao longo do comprimento de uma viga bimorph em configuração de atuador com $p_x=0$ em função das condições de fronteira

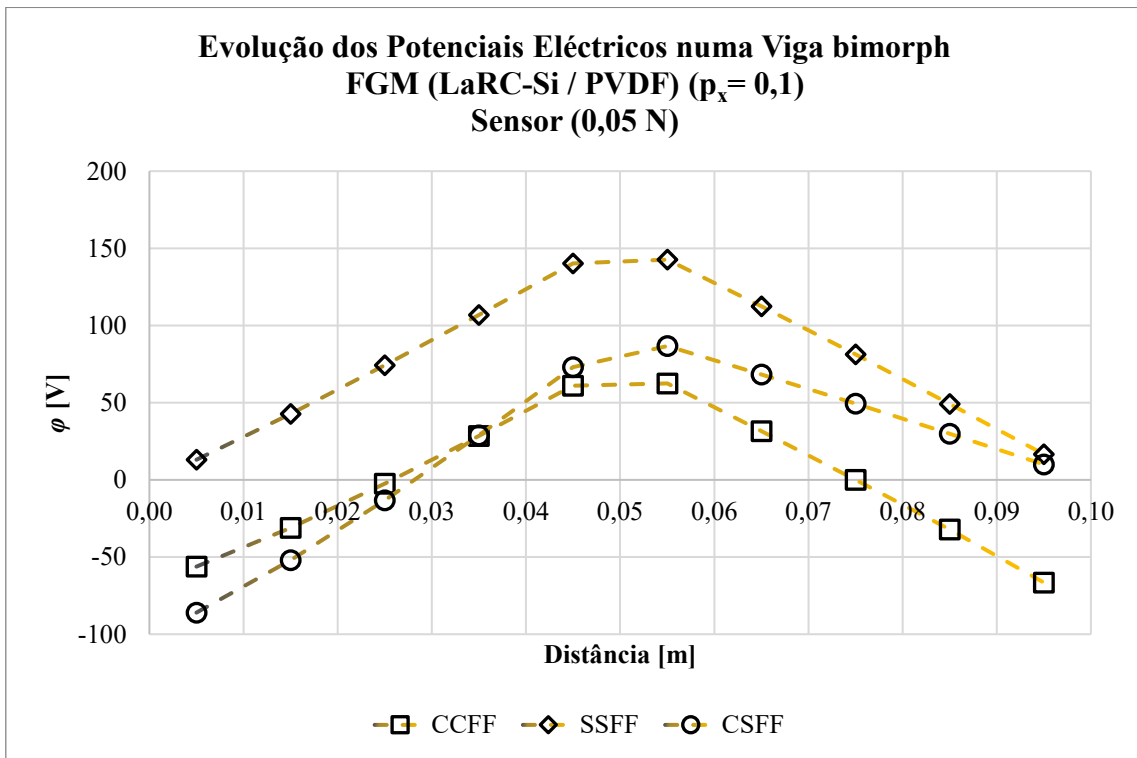


Figura B27 - Representação gráfica da evolução dos deslocamentos transversais ao longo do comprimento de uma viga bimorph em configuração de atuador com $p_x=0,1$ em função das condições de fronteira

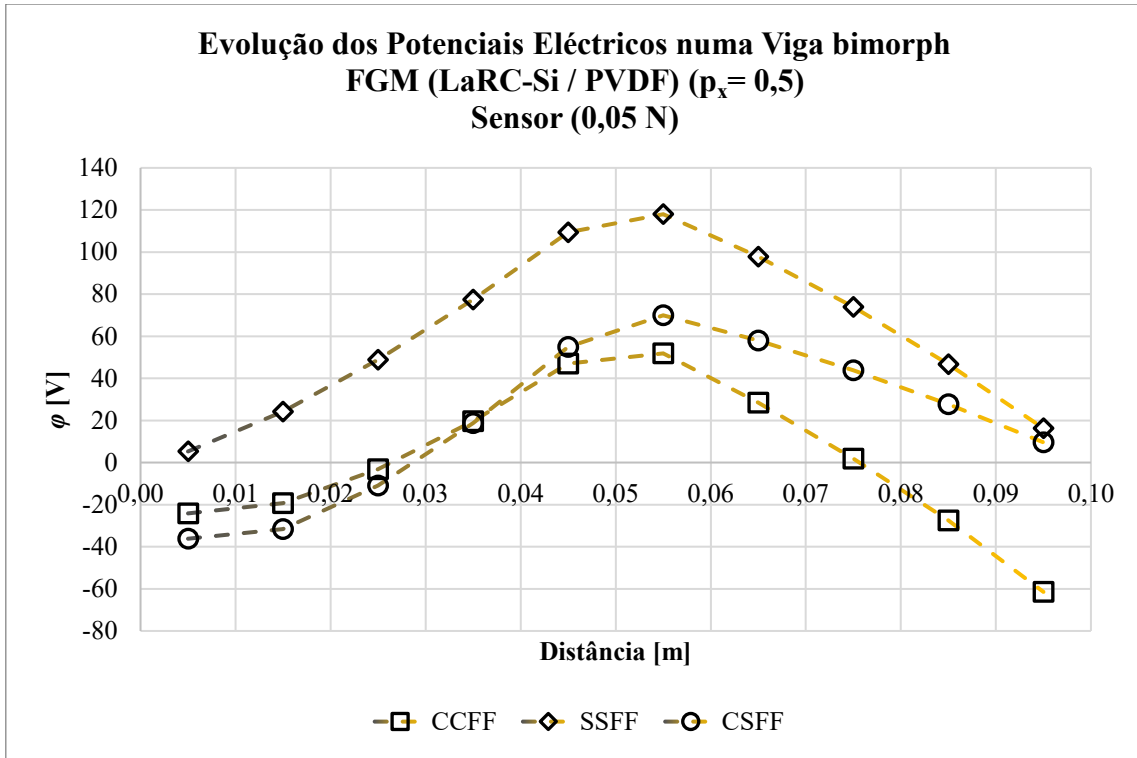


Figura B28 - Representação gráfica da evolução dos deslocamentos transversais ao longo do comprimento de uma viga bimorph em configuração de atuador com $p_x=0,5$ em função das condições de fronteira

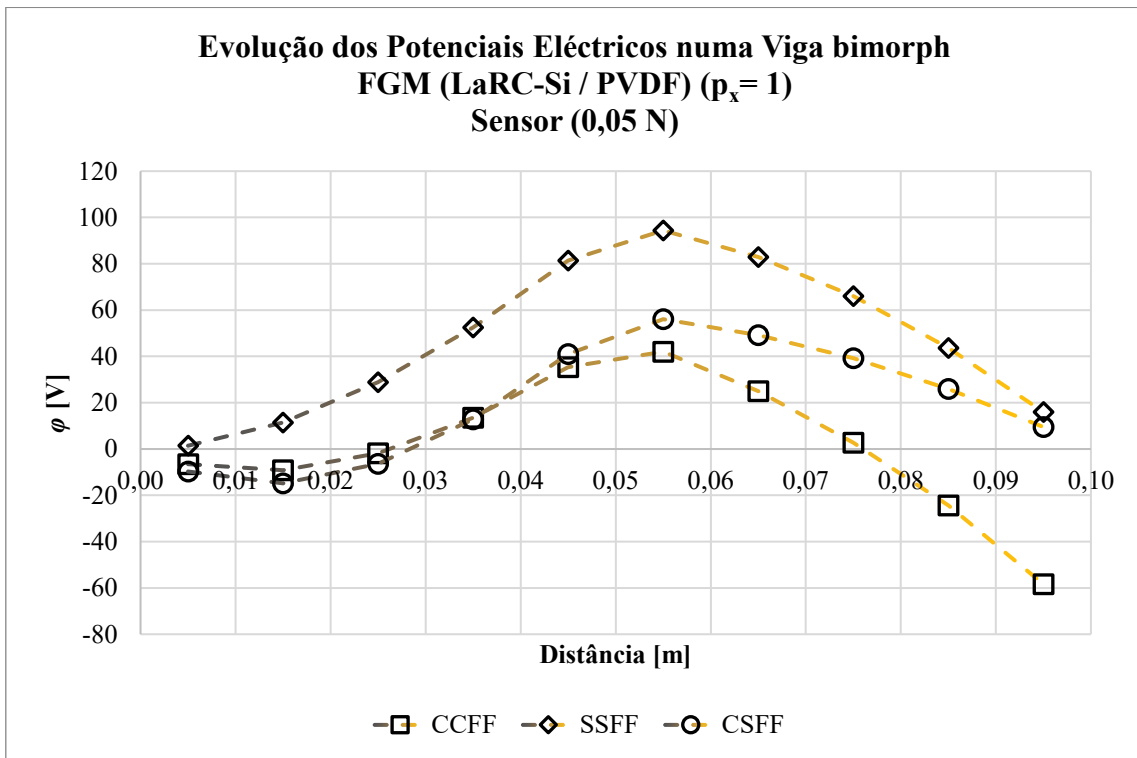


Figura B29 - Representação gráfica da evolução dos deslocamentos transversais ao longo do comprimento de uma viga bimorph em configuração de atuador com $p_x=1$ em função das condições de fronteira

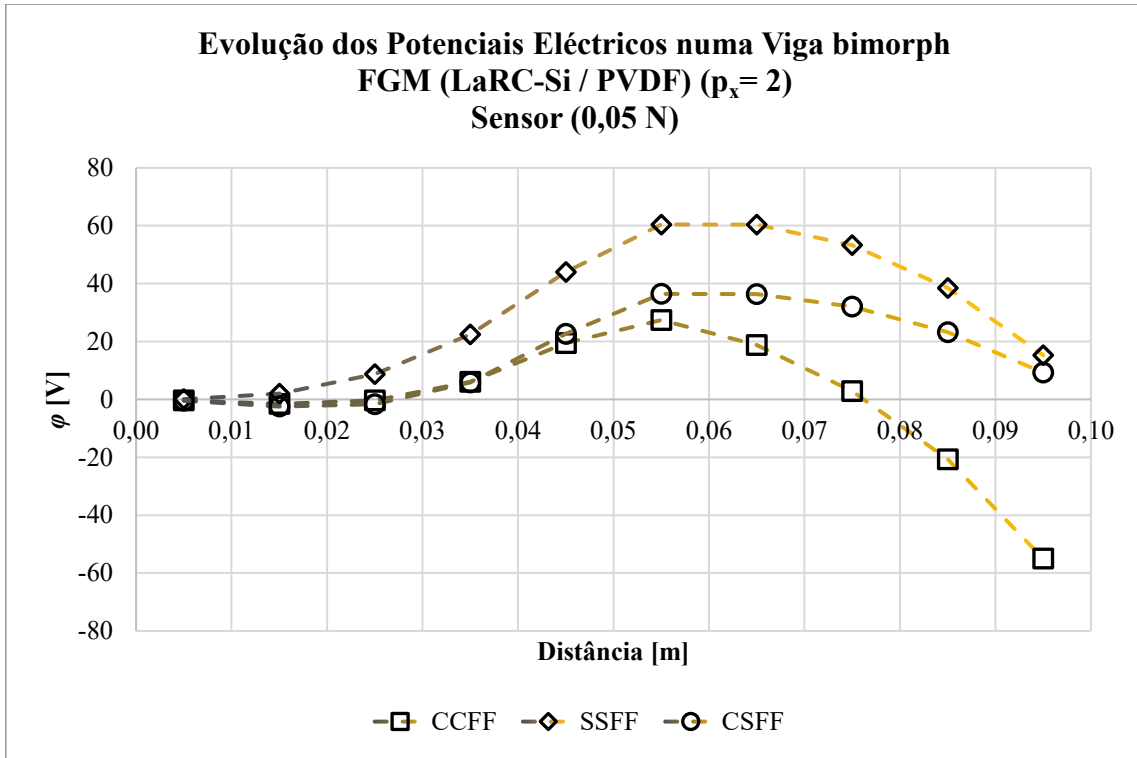


Figura B30 - Representação gráfica da evolução dos deslocamentos transversais ao longo do comprimento de uma viga bimorph em configuração de atuador com $p_x=0$ em função das condições de fronteira

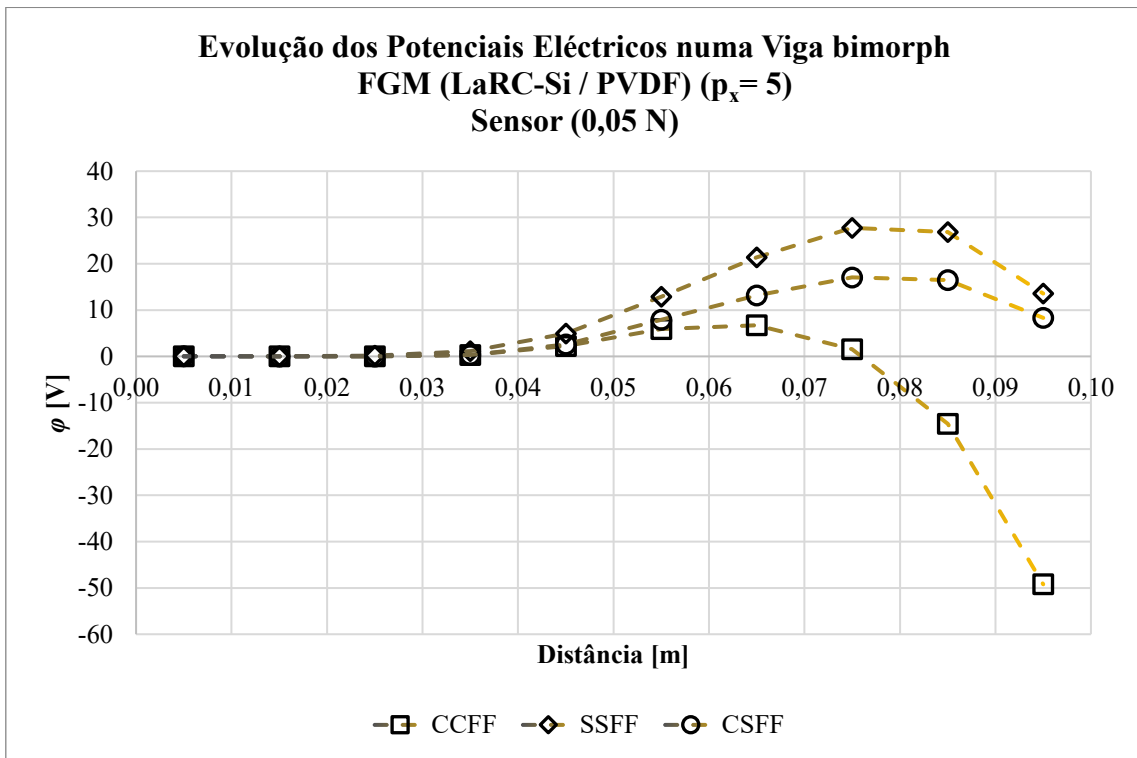


Figura B31 - Representação gráfica da evolução dos deslocamentos transversais ao longo do comprimento de uma viga bimorph em configuração de atuador com $p_x=0$ em função das condições de fronteira

Tabela B70 - Evolução do deslocamento transversal nodal em função de px para uma viga (CSFF) bimorph em FGM contínuo LaRC-Si/PVDF em configuração de atuador para uma discretização de 10×1 elementos tendo em consideração a contribuição do material para os termos de corte

x [m]	p					
	0	0,1	0,5	1	2	5
	w [m] (δ (%))	w [m] (δ (%))	w [m] (δ (%))	w [m] (δ (%))	w [m] (δ (%))	w [m] (δ (%))
0	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 ^(NN) (0,00)	0,000E+00 ^(NN) (0,00)	0,000E+00 ^(NN) (0,00)	0,000E+00 ^(NN) (0,00)	0,000E+00 ^(NN) (0,00)
0,01	-7,550E-10 (0,00)	-9,064E-10 ^(NN) (0,00)	-9,078E-10 ^(NN) (0,00)	-6,889E-10 ^(NN) (0,00)	-6,889E-10 ^(NN) (95,99)	-4,540E-12 ^(NN) (96,04)
0,02	-3,006E-09 (0,00)	-3,423E-09 ^(NN) (0,00)	-3,356E-09 ^(NN) (0,00)	-2,599E-09 ^(NN) (0,00)	-2,599E-09 ^(NN) (96,10)	-1,752E-11 ^(NN) (96,15)
0,03	-6,329E-09 (0,00)	-6,934E-09 ^(NN) (0,00)	-6,715E-09 ^(NN) (0,00)	-5,323E-09 ^(NN) (0,00)	-5,323E-09 ^(NN) (96,16)	-3,795E-11 ^(NN) (96,22)
0,04	-9,976E-09 (0,00)	-1,069E-08 ^(NN) (0,00)	-1,031E-08 ^(NN) (0,00)	-8,358E-09 ^(NN) (0,00)	-8,358E-09 ^(NN) (96,19)	-6,458E-11 ^(NN) (96,25)
0,05	-1,326E-08 (0,00)	-1,400E-08 ^(NN) (0,00)	-1,349E-08 ^(NN) (0,00)	-1,117E-08 ^(NN) (0,00)	-1,117E-08 ^(NN) (96,21)	-9,547E-11 ^(NN) (96,27)
0,06	-1,550E-08 (0,00)	-1,618E-08 ^(NN) (0,00)	-1,561E-08 ^(NN) (0,00)	-1,320E-08 ^(NN) (0,00)	-1,320E-08 ^(NN) (96,21)	-1,271E-10 ^(NN) (96,28)
0,07	-1,598E-08 (0,00)	-1,656E-08 ^(NN) (0,00)	-1,601E-08 ^(NN) (0,00)	-1,380E-08 ^(NN) (0,00)	-1,380E-08 ^(NN) (96,22)	-1,526E-10 ^(NN) (96,28)
0,08	-1,403E-08 (0,00)	-1,444E-08 ^(NN) (0,00)	-1,401E-08 ^(NN) (0,00)	-1,232E-08 ^(NN) (0,00)	-1,232E-08 ^(NN) (96,22)	-1,596E-10 ^(NN) (96,29)
0,09	-8,942E-09 (0,00)	-9,160E-09 ^(NN) (0,00)	-8,921E-09 ^(NN) (0,00)	-7,997E-09 ^(NN) (0,00)	-7,997E-09 ^(NN) (96,22)	-1,243E-10 ^(NN) (96,29)
0,1	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 ^(NN) (0,00)	0,000E+00 ^(NN) (0,00)	0,000E+00 ^(NN) (0,00)	0,000E+00 ^(NN) (0,00)	0,000E+00 ^(NN) (0,00)

Tabela B71 - Evolução do deslocamento transversal nodal em função de p_x para uma viga (CSFF) bimorph em FGM contínuo LaRC-Si/PVDF em configuração de sensor para uma discretização de 10×1 elementos tendo em consideração a contribuição do material para os termos de corte

x [m]	p					
	0	0,1	0,5	1	2	5
	w [m] (δ (%))	w [m] (δ (%))	w [m] (δ (%))	w [m] (δ (%))	w [m] (δ (%))	w [m] (δ (%))
0	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 ^(NN) (0,00)	0,000E+00 ^(NN) (0,00)	0,000E+00 ^(NN) (0,00)	0,000E+00 ^(NN) (0,00)	0,000E+00 ^(NN) (0,00)
0,01	3,520E-05 (0,00)	3,190E-05 ^(NN) (0,00)	2,690E-05 ^(NN) (0,00)	2,523E-05 ^(NN) (0,00)	8,570E-07 ^(NN) (96,45)	8,274E-07 ^(NN) (96,44)
0,02	1,276E-04 (0,00)	1,169E-04 ^(NN) (0,00)	9,919E-05 ^(NN) (0,00)	9,247E-05 ^(NN) (0,00)	2,968E-06 ^(NN) (96,62)	2,850E-06 ^(NN) (96,62)
0,03	2,464E-04 (0,00)	2,282E-04 ^(NN) (0,00)	1,954E-04 ^(NN) (0,00)	1,813E-04 ^(NN) (0,00)	5,645E-06 ^(NN) (96,69)	5,384E-06 ^(NN) (96,69)
0,04	3,571E-04 (0,00)	3,336E-04 ^(NN) (0,00)	2,883E-04 ^(NN) (0,00)	2,669E-04 ^(NN) (0,00)	8,187E-06 ^(NN) (96,72)	7,746E-06 ^(NN) (96,72)
0,05	4,260E-04 (0,00)	4,007E-04 ^(NN) (0,00)	3,493E-04 ^(NN) (0,00)	3,235E-04 ^(NN) (0,00)	9,855E-06 ^(NN) (96,73)	9,249E-06 ^(NN) (96,73)
0,06	4,318E-04 (0,00)	4,079E-04 ^(NN) (0,00)	3,585E-04 ^(NN) (0,00)	3,326E-04 ^(NN) (0,00)	1,004E-05 ^(NN) (96,76)	9,358E-06 ^(NN) (96,76)
0,07	3,770E-04 (0,00)	3,574E-04 ^(NN) (0,00)	3,161E-04 ^(NN) (0,00)	2,941E-04 ^(NN) (0,00)	8,847E-06 ^(NN) (96,77)	8,200E-06 ^(NN) (96,77)
0,08	2,766E-04 (0,00)	2,628E-04 ^(NN) (0,00)	2,337E-04 ^(NN) (0,00)	2,181E-04 ^(NN) (0,00)	6,556E-06 ^(NN) (96,78)	6,059E-06 ^(NN) (96,78)
0,09	1,459E-04 (0,00)	1,388E-04 ^(NN) (0,00)	1,239E-04 ^(NN) (0,00)	1,159E-04 ^(NN) (0,00)	3,488E-06 ^(NN) (96,78)	3,222E-06 ^(NN) (96,78)
0,1	0,000E+00 (0,00)	0,000E+00 ^(NN) (0,00)	0,000E+00 ^(NN) (0,00)	0,000E+00 ^(NN) (0,00)	0,000E+00 ^(NN) (0,00)	0,000E+00 ^(NN) (0,00)

Tabela B72 - Evolução dos potenciais elétricos em função de px para uma viga (CSFF) bimorph em FGM contínuo LaRC-Si/PVDF em configuração de sensor para uma discretização de 10×1 elementos tendo em consideração a contribuição do material para os termos de corte

x [m]	p					
	0	0,1	0,5	1	2	5
	ϕ [V] (δ (%))	ϕ [V] (δ (%))	ϕ [V] (δ (%))	ϕ [V] (δ (%))	ϕ [V] (δ (%))	ϕ [V] (δ (%))
0,005	-1,062E+02 (0,00)	-8,417E+01 ^(NN) (0,00)	-3,382E+01 ^(NN) (0,00)	-9,333E+00 ^(NN) (0,00)	-2,424E-02 ^(NN) (96,16)	-1,159E-05 ^(NN) (96,08)
0,015	-5,774E+01 (0,00)	-5,247E+01 ^(NN) (0,00)	-3,193E+01 ^(NN) (0,00)	-1,510E+01 ^(NN) (0,00)	-9,344E-02 ^(NN) (96,48)	-4,104E-04 ^(NN) (96,59)
0,025	-1,219E+01 (0,00)	-1,353E+01 ^(NN) (0,00)	-1,111E+01 ^(NN) (0,00)	-6,493E+00 ^(NN) (0,00)	-5,774E-02 ^(NN) (96,74)	-8,752E-04 ^(NN) (96,99)
0,035	3,390E+01 (0,00)	2,876E+01 ^(NN) (0,00)	1,864E+01 ^(NN) (0,00)	1,274E+01 ^(NN) (0,00)	2,307E-01 ^(NN) (96,04)	1,303E-02 ^(NN) (95,99)
0,045	8,012E+01 (0,00)	7,305E+01 ^(NN) (0,00)	5,490E+01 ^(NN) (0,00)	4,101E+01 ^(NN) (0,00)	8,641E-01 ^(NN) (96,19)	1,026E-01 ^(NN) (96,20)
0,055	9,285E+01 (0,00)	8,681E+01 ^(NN) (0,00)	7,005E+01 ^(NN) (0,00)	5,621E+01 ^(NN) (0,00)	1,383E+00 ^(NN) (96,23)	3,066E-01 ^(NN) (96,24)
0,065	7,204E+01 (0,00)	6,832E+01 ^(NN) (0,00)	5,803E+01 ^(NN) (0,00)	4,942E+01 ^(NN) (0,00)	1,384E+00 ^(NN) (96,22)	5,048E-01 ^(NN) (96,25)
0,075	5,149E+01 (0,00)	4,943E+01 ^(NN) (0,00)	4,390E+01 ^(NN) (0,00)	3,935E+01 ^(NN) (0,00)	1,224E+00 ^(NN) (96,21)	6,531E-01 ^(NN) (96,24)
0,085	3,089E+01 (0,00)	2,997E+01 ^(NN) (0,00)	2,773E+01 ^(NN) (0,00)	2,606E+01 ^(NN) (0,00)	8,879E-01 ^(NN) (96,20)	6,311E-01 ^(NN) (96,24)
0,095	1,030E+01 (0,00)	1,009E+01 ^(NN) (0,00)	9,708E+00 ^(NN) (0,00)	9,561E+00 ^(NN) (0,00)	3,513E-01 ^(NN) (96,21)	3,145E-01 ^(NN) (96,36)

8.B. Estudo Paramétrico 8

Os resultados que em seguida se apresentam, correspondem ao Estudo Paramétrico 8 (4.2.2.5).

Tabela B73 - Deslocamento máximo transversal adimensionalizado de uma placa SSFF em configuração de atuador para diferentes L/h e discretizações

Malha	L/h					
	5		10		50	
	\bar{w}	t_{CPU} [s]	\bar{w}	t_{CPU} [s]	\bar{w}	t_{CPU} [s]
4 × 2	26,758	9,390	107,000	9,125	2675,800	18,453
8 × 4	26,054	24,562	105,400	47,687	2655,200	48,812
12 × 6	25,871	69,531	104,700	105,359	2646,200	108,218
16 × 8	25,806	120,078	104,400	245,281	2642,200	240,734
20 × 10	25,777	340,812	104,300	528,531	2639,700	310,687

Tabela B74 – Potencial elétrico máximo adimensionalizado em circuito fechado de uma placa SSFF em configuração de atuador para diferentes L/h e discretizações

Malha	L/h					
	5		10		50	
	$\bar{\phi}$	t_{CPU} [s]	$\bar{\phi}$	t_{CPU} [s]	$\bar{\phi}$	t_{CPU} [s]
4 × 2	0,598	9,390	0,508	9,125	0,596	18,453
8 × 4	0,585	24,562	0,576	47,687	0,571	48,812
12 × 6	0,595	69,531	0,577	105,359	0,571	108,218
16 × 8	0,605	120,078	0,578	245,281	0,572	240,734
20 × 10	0,614	340,812	0,583	528,531	0,572	310,687

Tabela B75 - Deslocamento máximo transversal de uma placa SSFF em configuração de sensor para diferentes L/h e discretizações

Malha	L/h					
	5		10		50	
	\bar{w}	t_{CPU} [s]	\bar{w}	t_{CPU} [s]	\bar{w}	t_{CPU} [s]
4×2	155,66	7,861	2246,3	8,563	1,36E+06	9,050
8×4	168,21	22,883	2404,7	20,927	1,44E+06	23,679
12×6	170,83	70,109	2445,5	80,843	1,45E+06	75,342
16×8	171,76	122,268	2460,2	125,684	1,46E+06	130,255
20×10	172,19	356,007	2467,00	347,964	1,46E+06	401,861

Tabela B76 – Potencial elétrico máximo em circuito fechado de uma placa SSFF em configuração de sensor para diferentes L/h e discretizações

Malha	L/h					
	5		10		50	
	$\bar{\phi}$	t_{CPU} [s]	$\bar{\phi}$	t_{CPU} [s]	$\bar{\phi}$	t_{CPU} [s]
4×2	0,127	7,861	0,51	8,563	12,74	9,050
8×4	0,145	22,883	0,593	20,927	15,05	23,679
12×6	0,148	70,109	0,605	80,843	15,44	75,342
16×8	0,149	122,268	0,609	125,684	15,57	130,255
20×10	0,15	356,007	0,611	347,964	15,62	401,861

9.B. Estudo Paramétrico 9

Os resultados que em seguida se apresentam, bem como as correspondentes representações gráficas, e ainda as representações esquemáticas utilizadas, correspondem ao Estudo Paramétrico 9 (4.2.2.6).

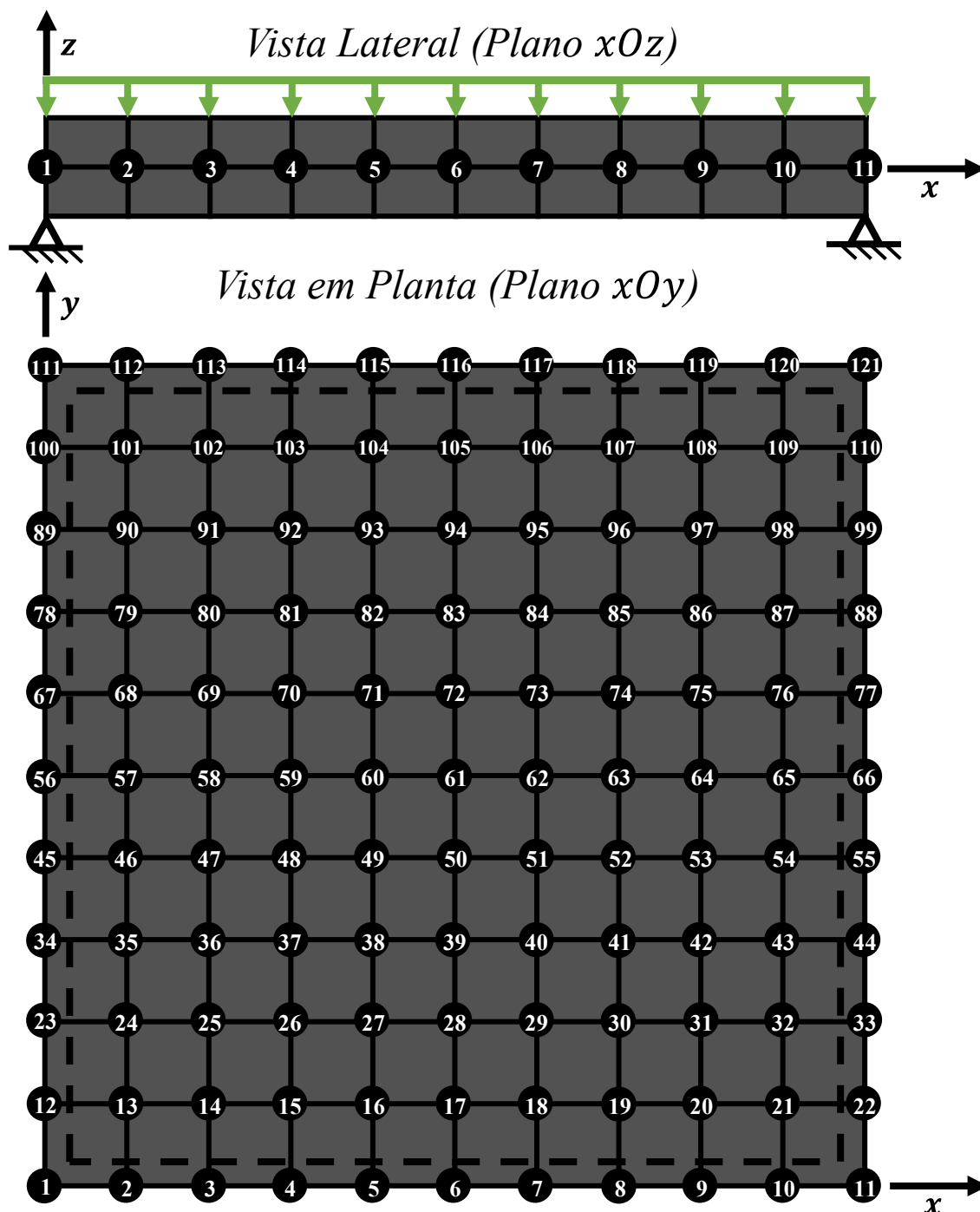


Figura B32 - Representação esquemática de uma placa SSSS em alumínio

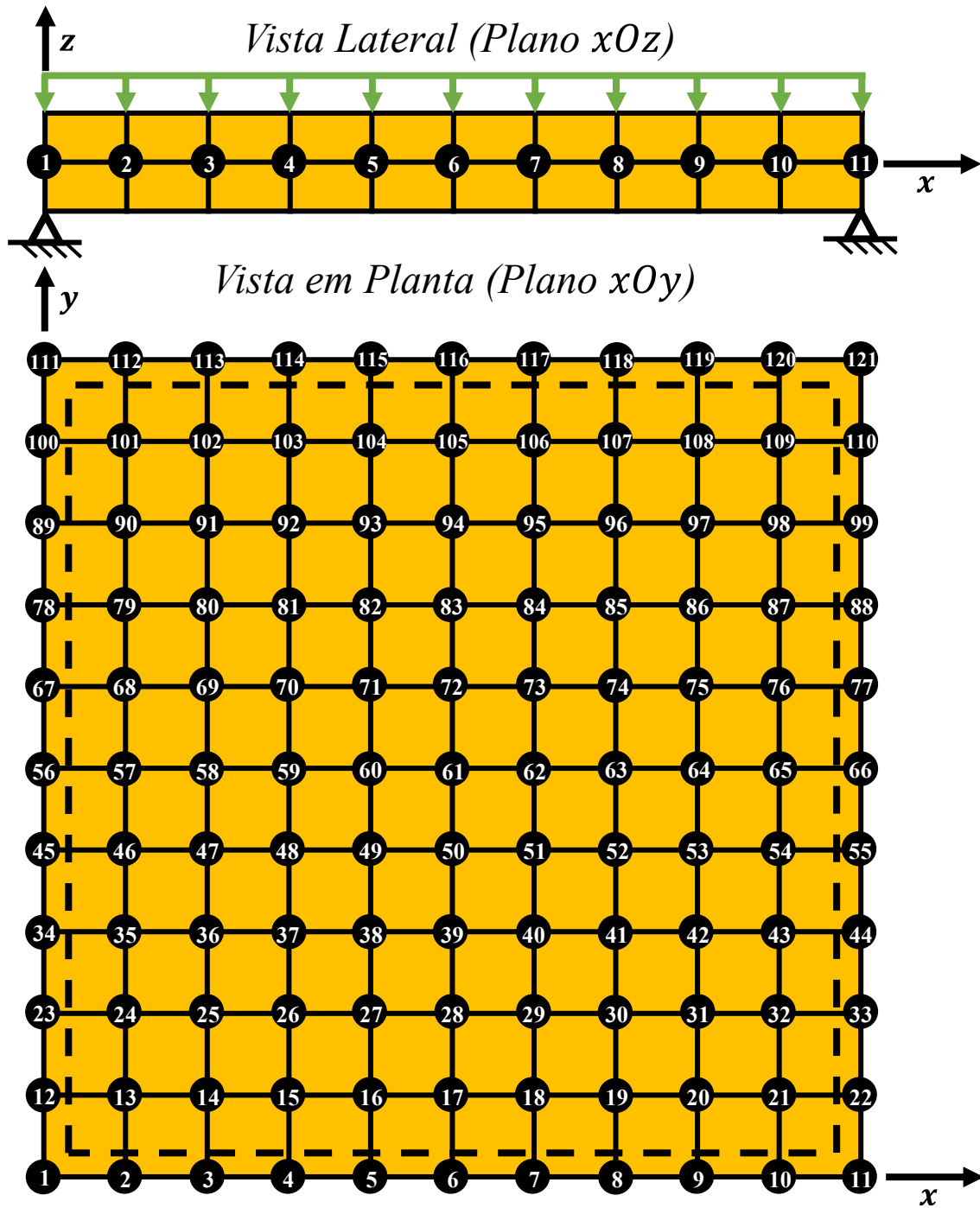


Figura B33 - Representação esquemática de uma placa SSSS em PVDF em configuração de sensor

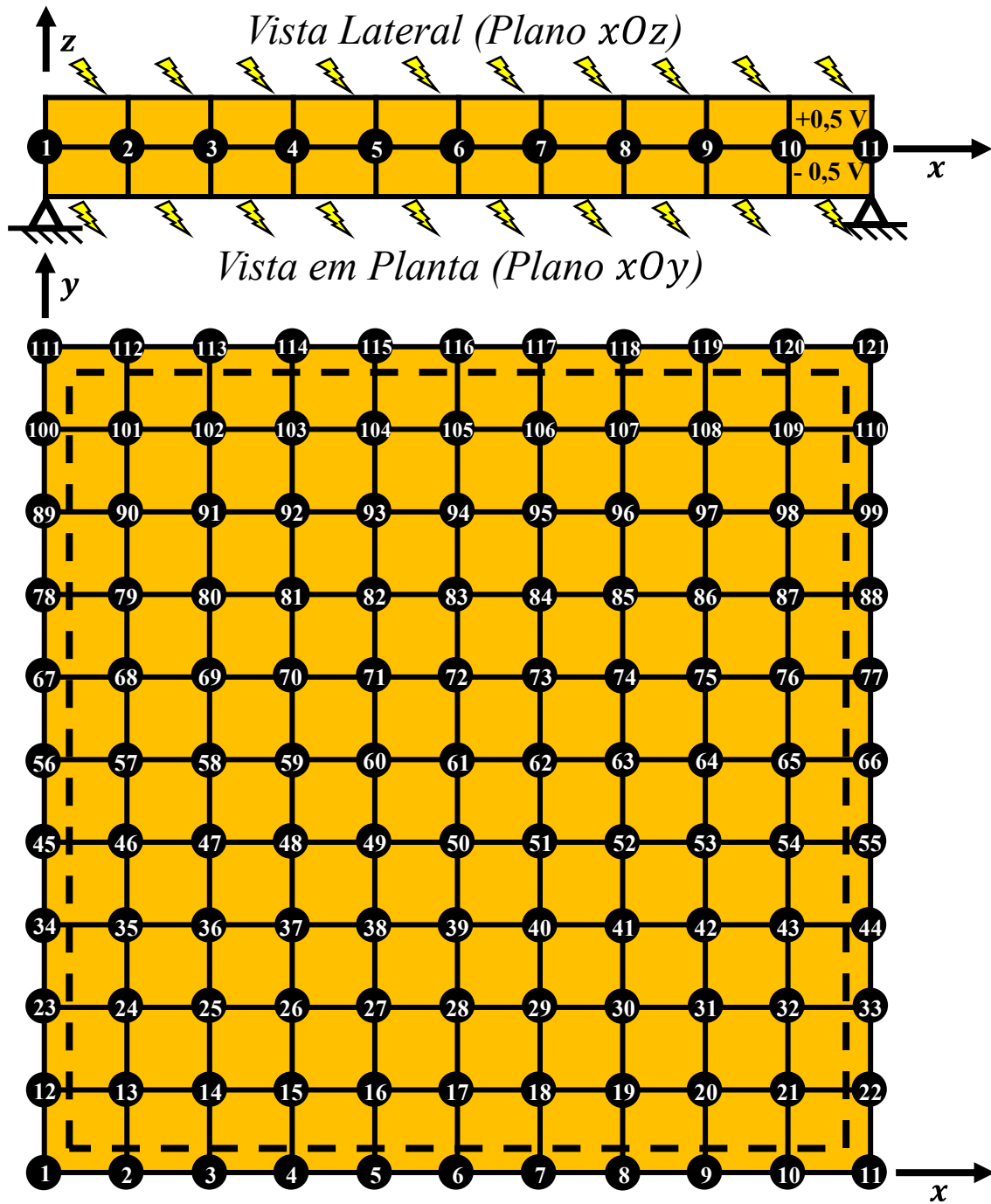


Figura B34 - Representação esquemática de uma placa SSSS em PVDF em configuração de atuador

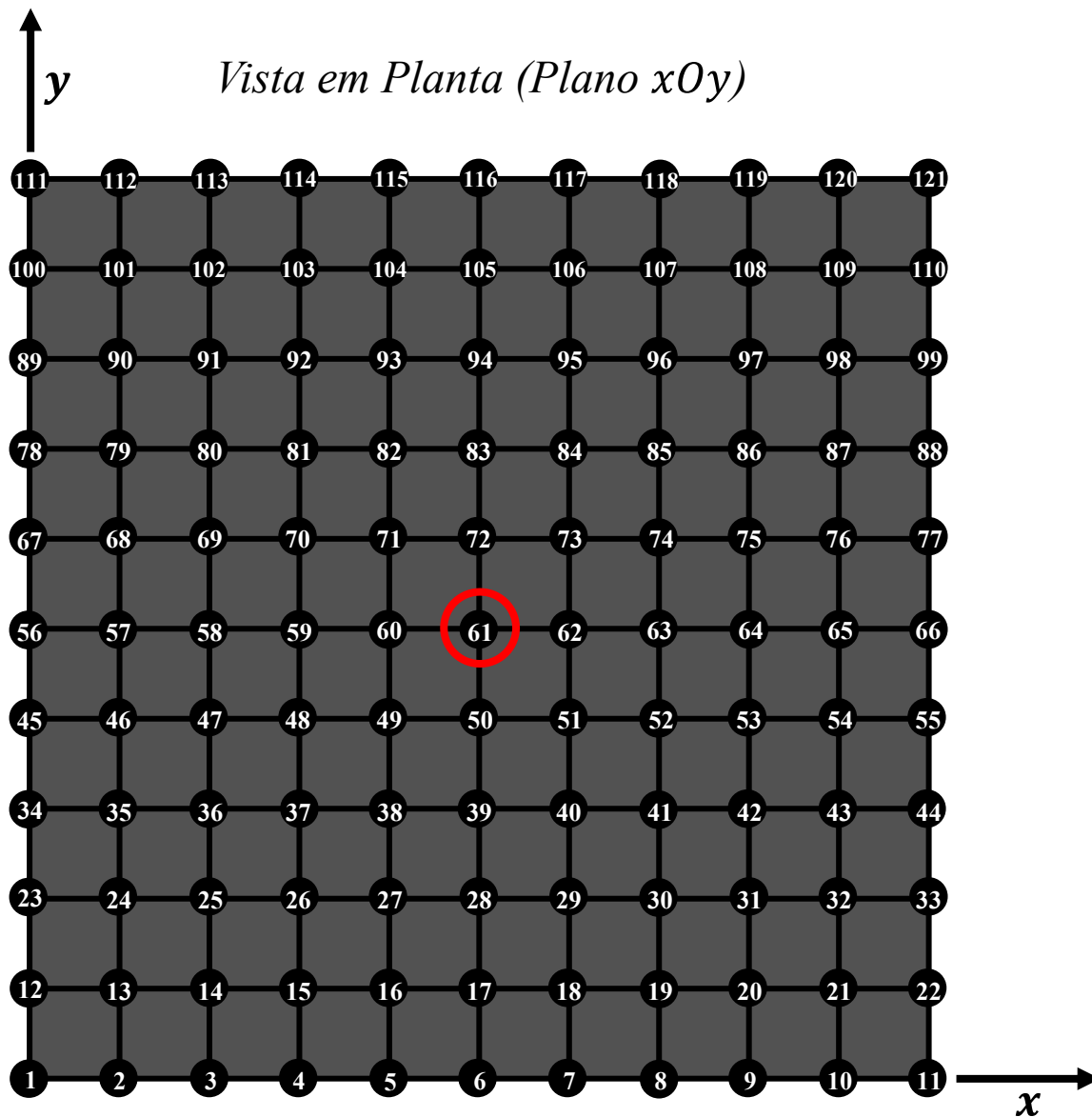


Figura B35 - Representação esquemática da localização do deslocamento transversal máximo de uma placa SSSS em alumínio

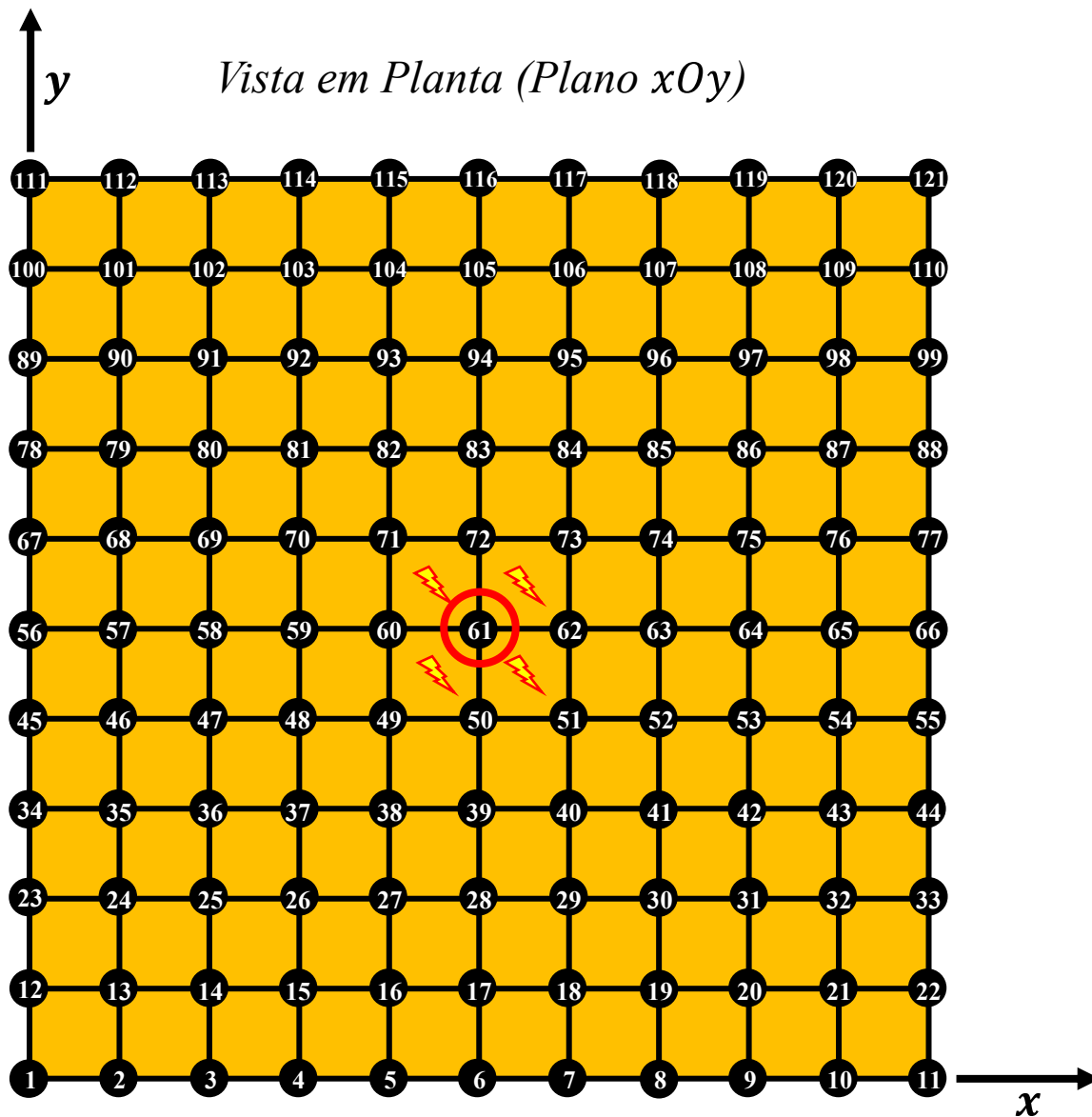


Figura B36 - Representação esquemática da localização do deslocamento transversal máximo e do potencial elétrico máximo de uma placa SSSS em PVDF para configuração de atuador e sensor

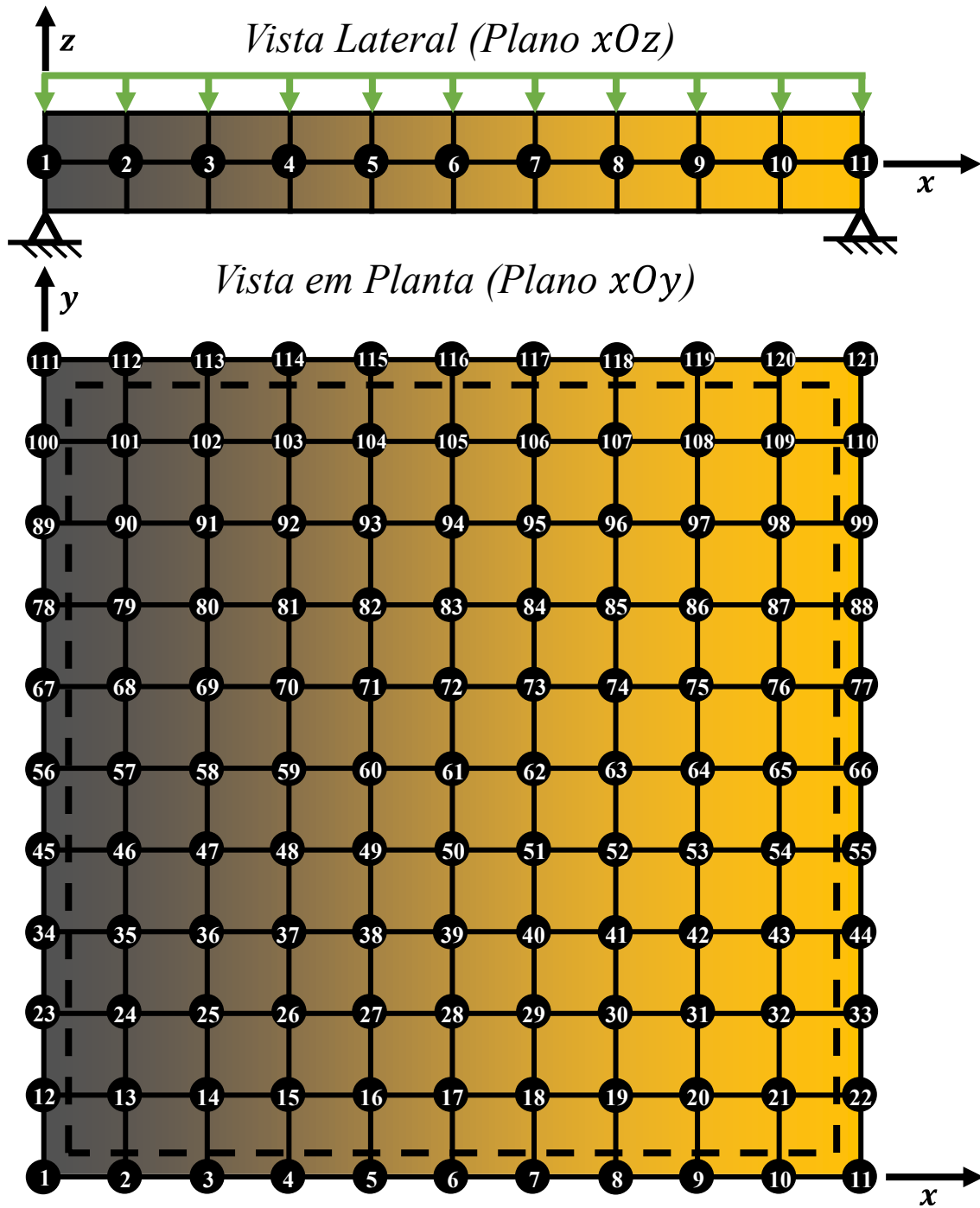


Figura B37 - Representação esquemática de uma placa SSSS em FGM AL/PVDF com gradiente segundo x em configuração de sensor

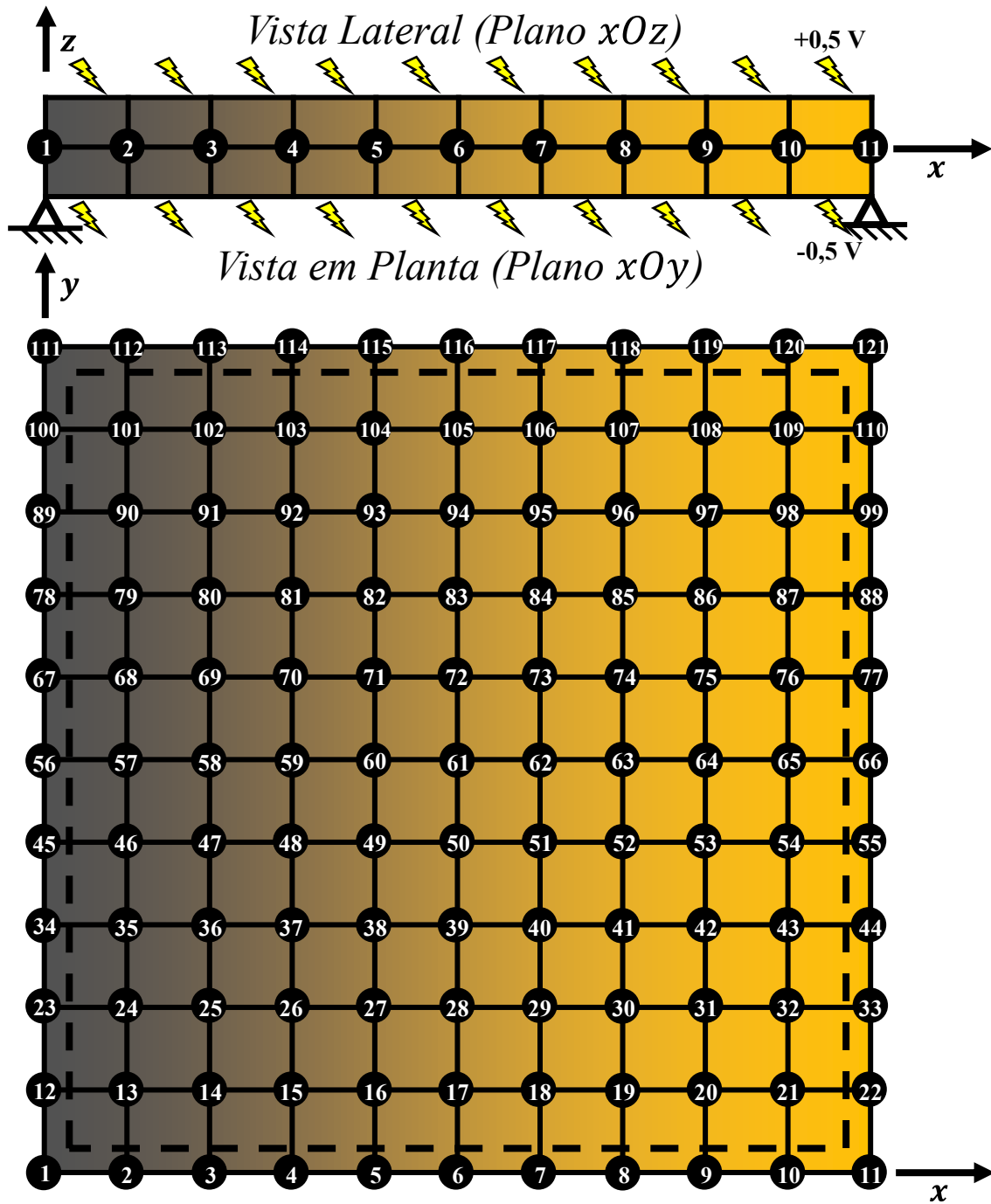


Figura B38 - Representação esquemática de uma placa SSSS em FGM AL/PVDF com gradiente segundo x em configuração de atuador

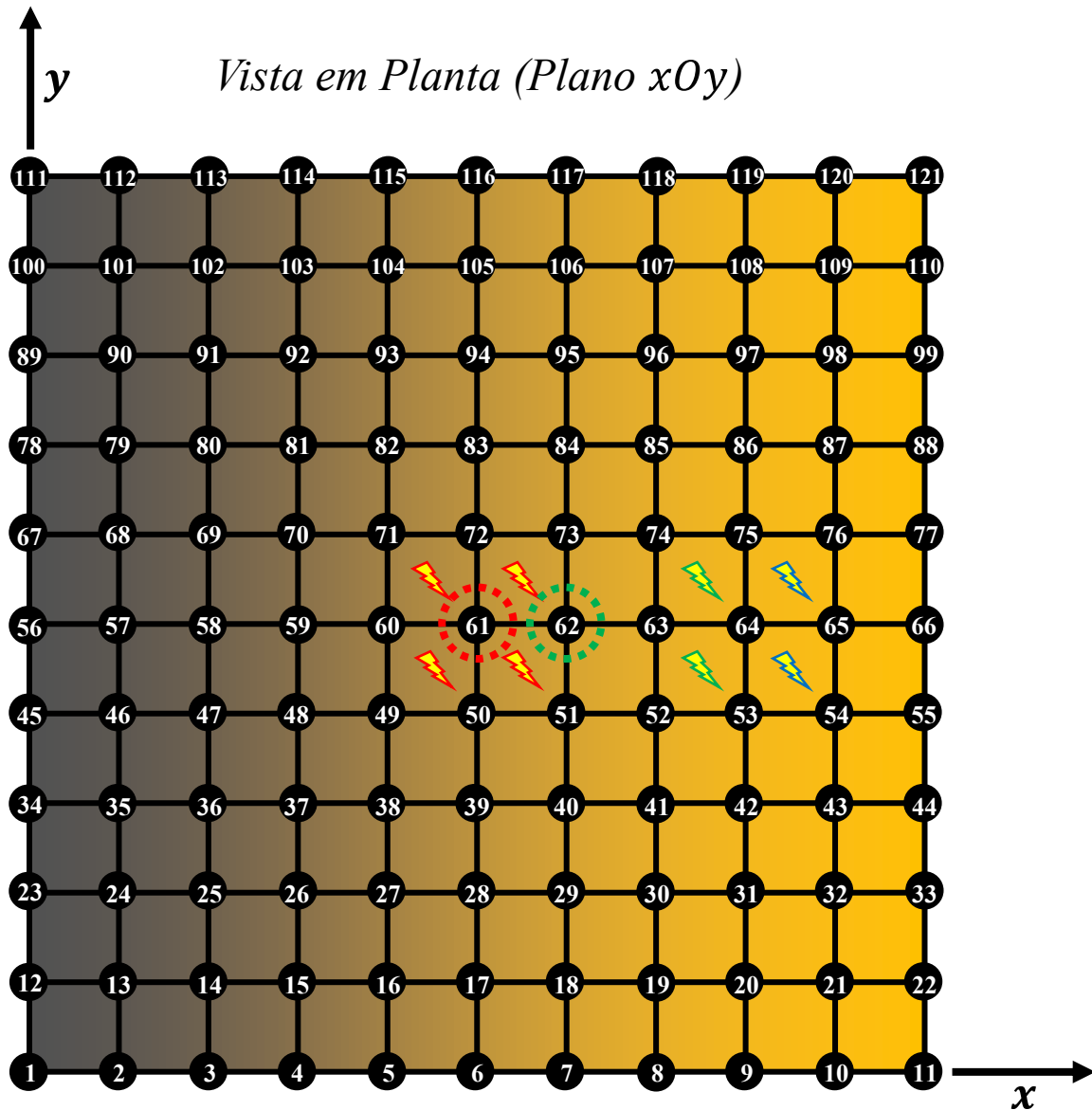


Figura B39 - Representação esquemática da localização do deslocamento transversal máximo e do potencial elétrico máximo em função de p_x para uma placa FGM SSSS em configuração de sensor (deslocamentos – vermelho, $p_x=0$ e 5, verde, $p_x=0.1, 0.5, 1$ e 2; potenciais – vermelho, $p_x=0$, verde, $p_x=0.1$ e 5, azul, $p_x=0.5, 1$ e 2)

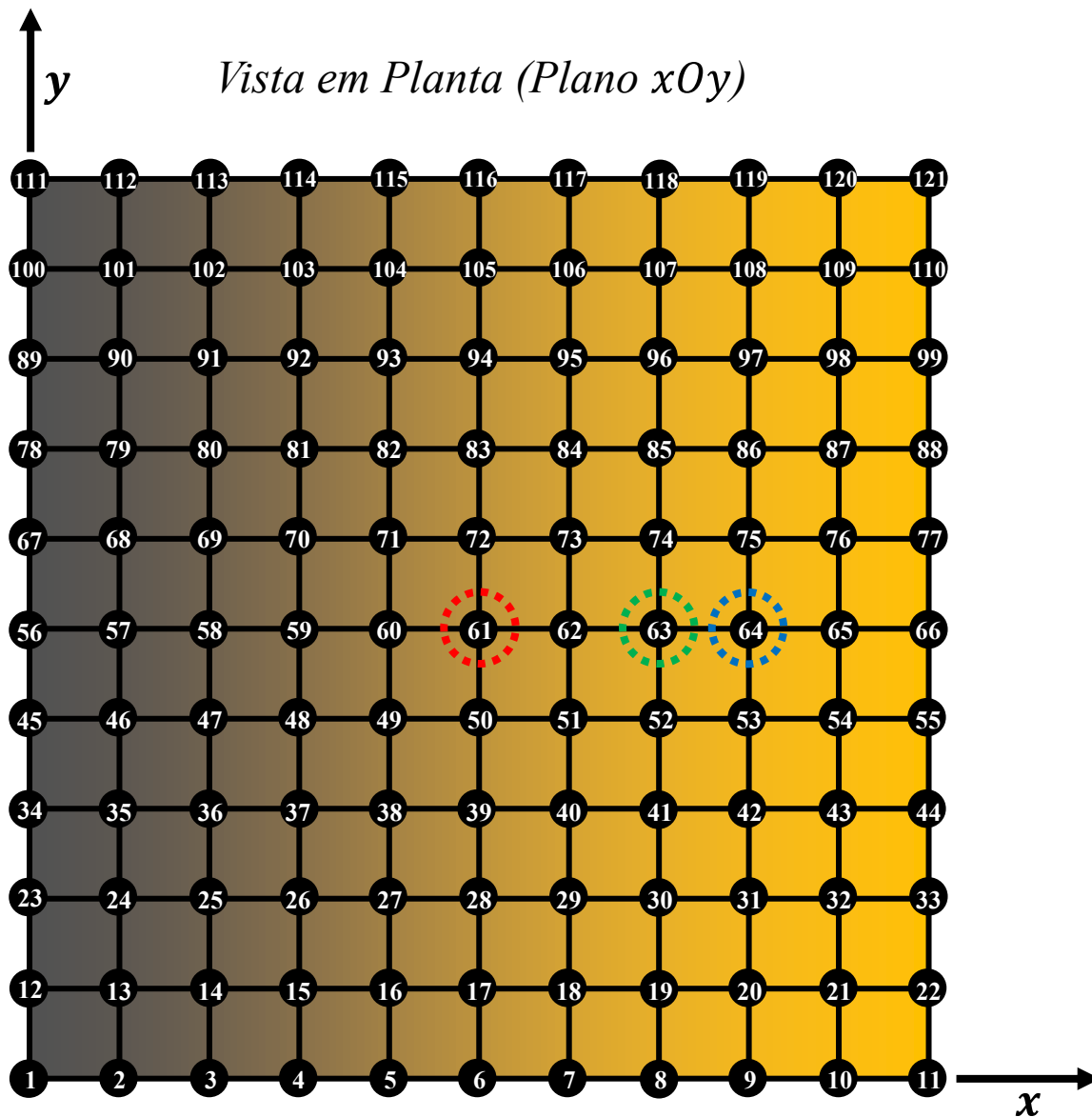


Figura B40 - Representação esquemática da localização do deslocamento transversal máximo em função de p_x para uma placa FGM SSSS em configuração de sensor (deslocamentos – vermelho, $p_x=0$, verde, $p_x=0.1$, 0.5 e 1 , azul, $p_x=2$ e 5)

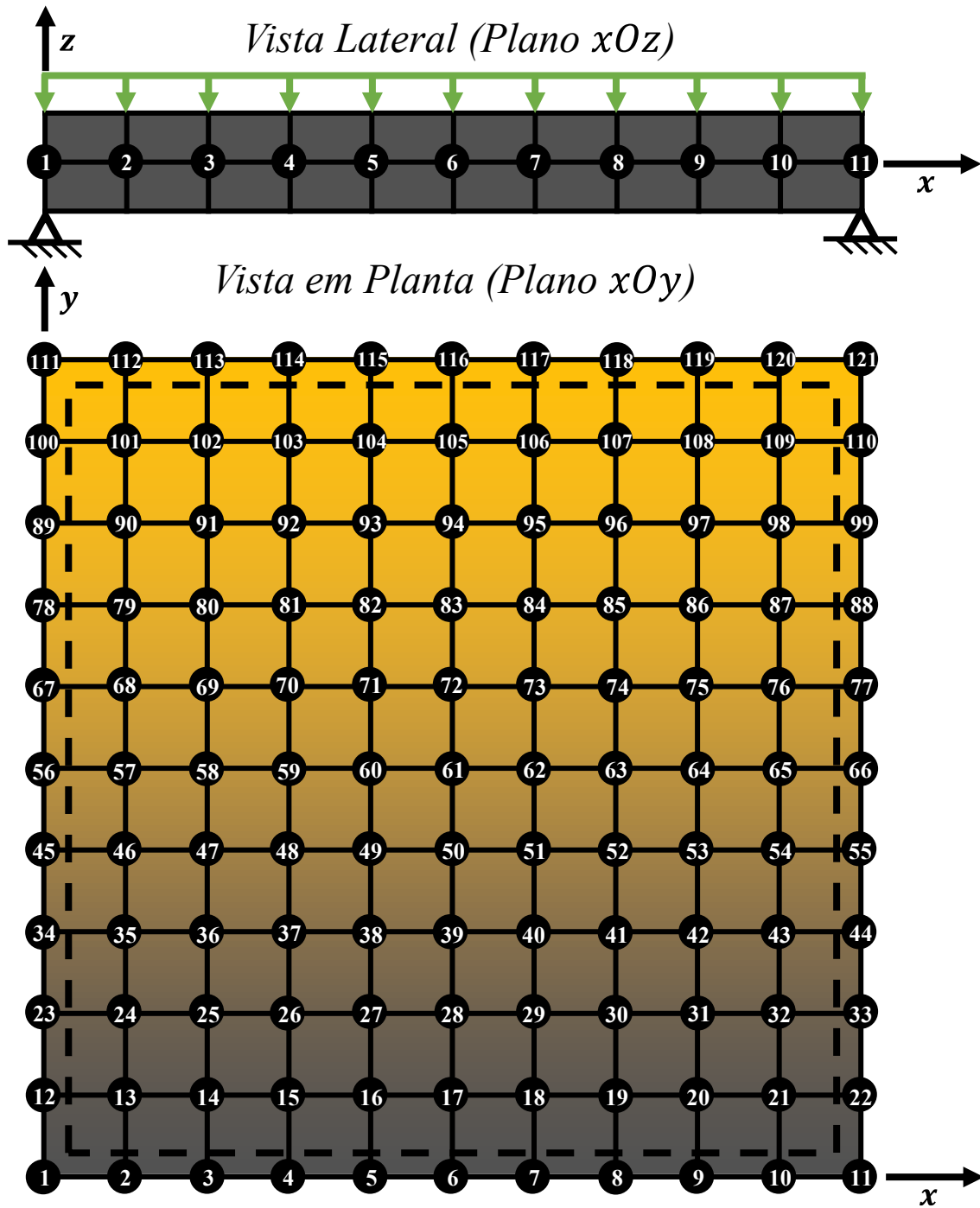


Figura B41 - Representação esquemática de uma placa SSSS em FGM AL/PVDF com gradiente segundo y em configuração de sensor

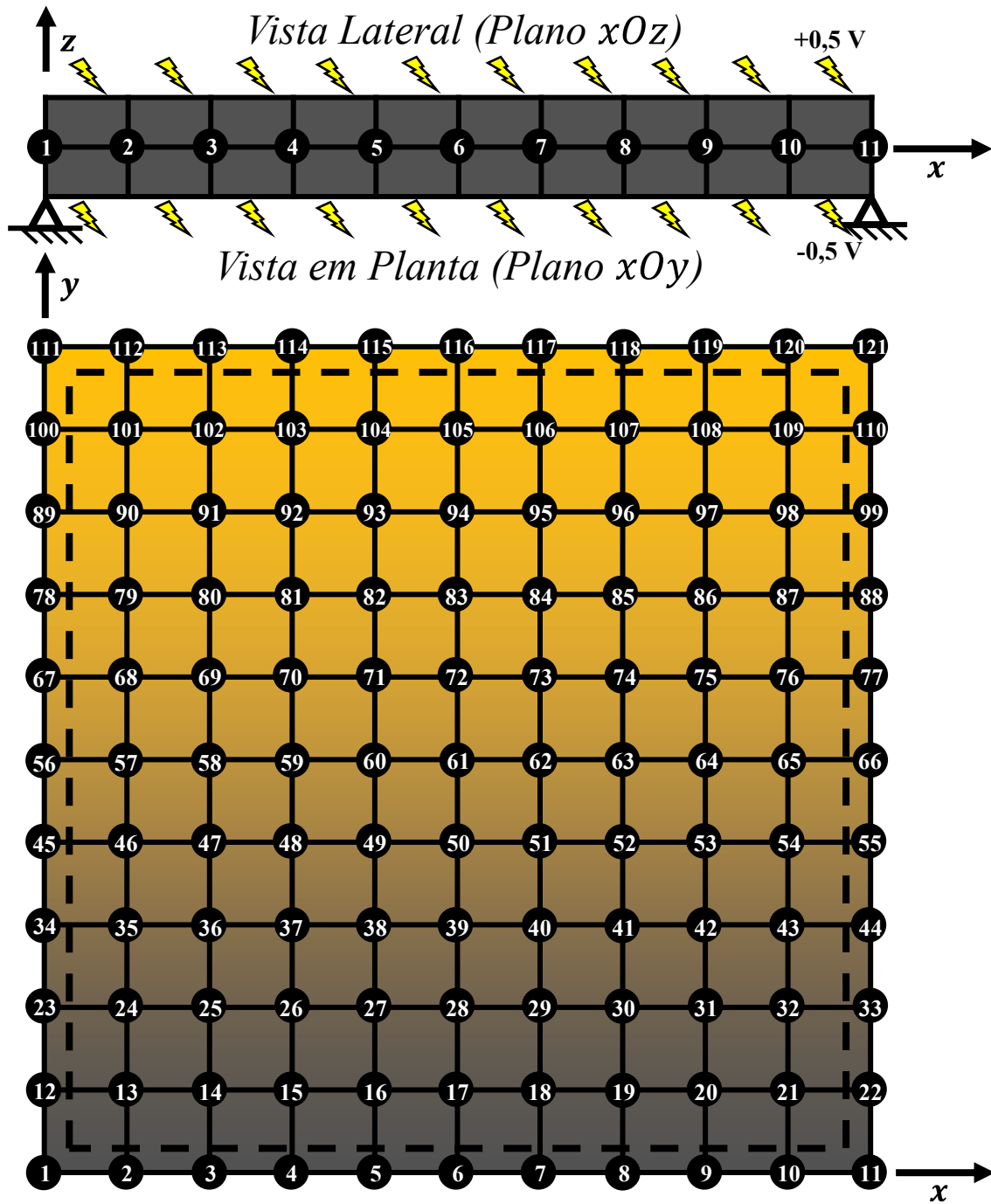


Figura B42 - Representação esquemática de uma placa SSSS em FGM AL/PVDF com gradiente segundo x em configuração de atuador

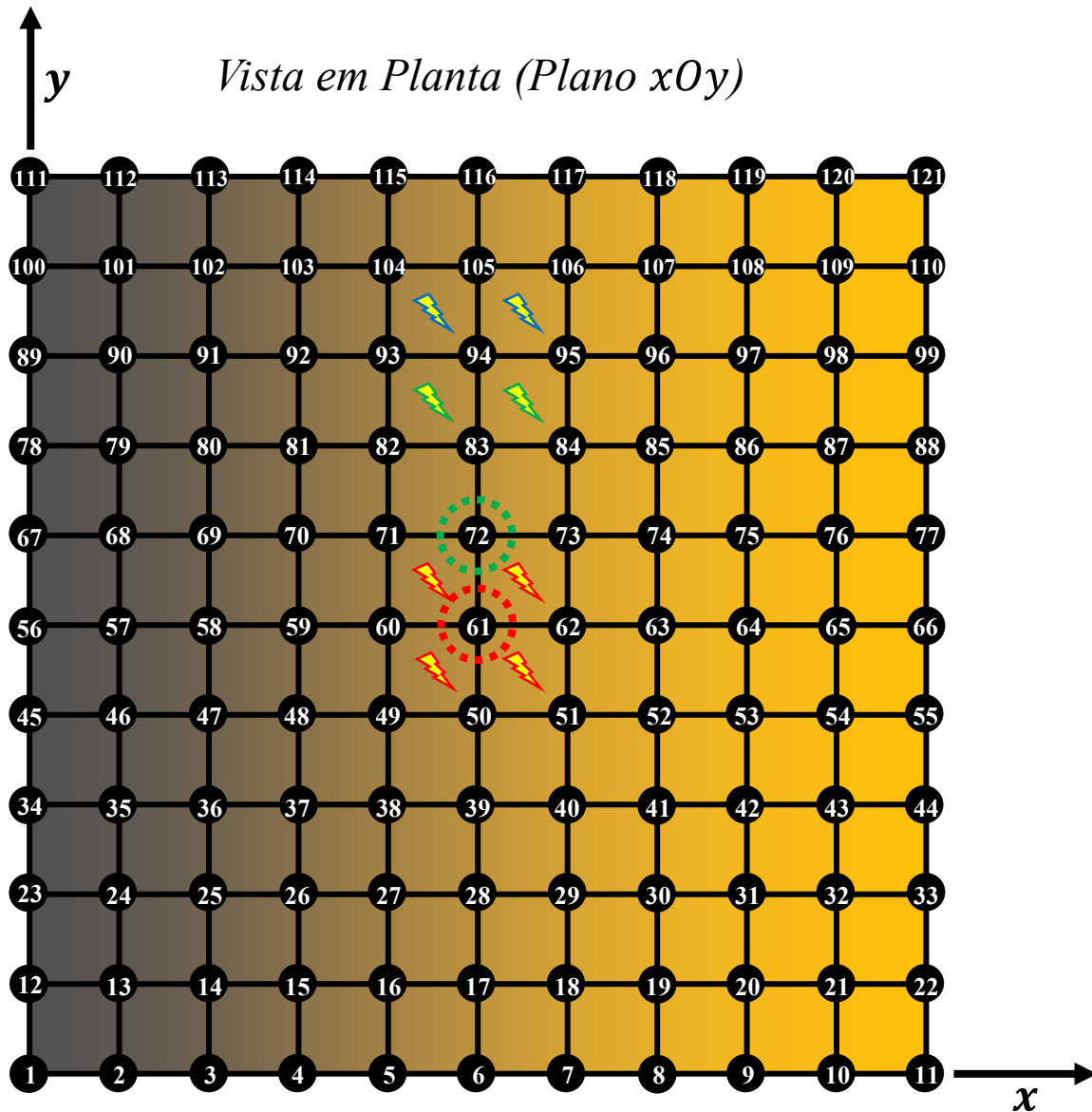


Figura B43 - Representação esquemática da localização do deslocamento transversal máximo e do potencial elétrico máximo em função de p_y para uma placa FGM SSSS em configuração de sensor (deslocamentos – vermelho, $p_y=0$ e 5, verde, $p_y=0.1, 0.5, 1$ e 2; potenciais – vermelho, $p_y=0$, verde, $p_y=0.1$ e 5, azul, $p_y=0.5, 1$ e 2)

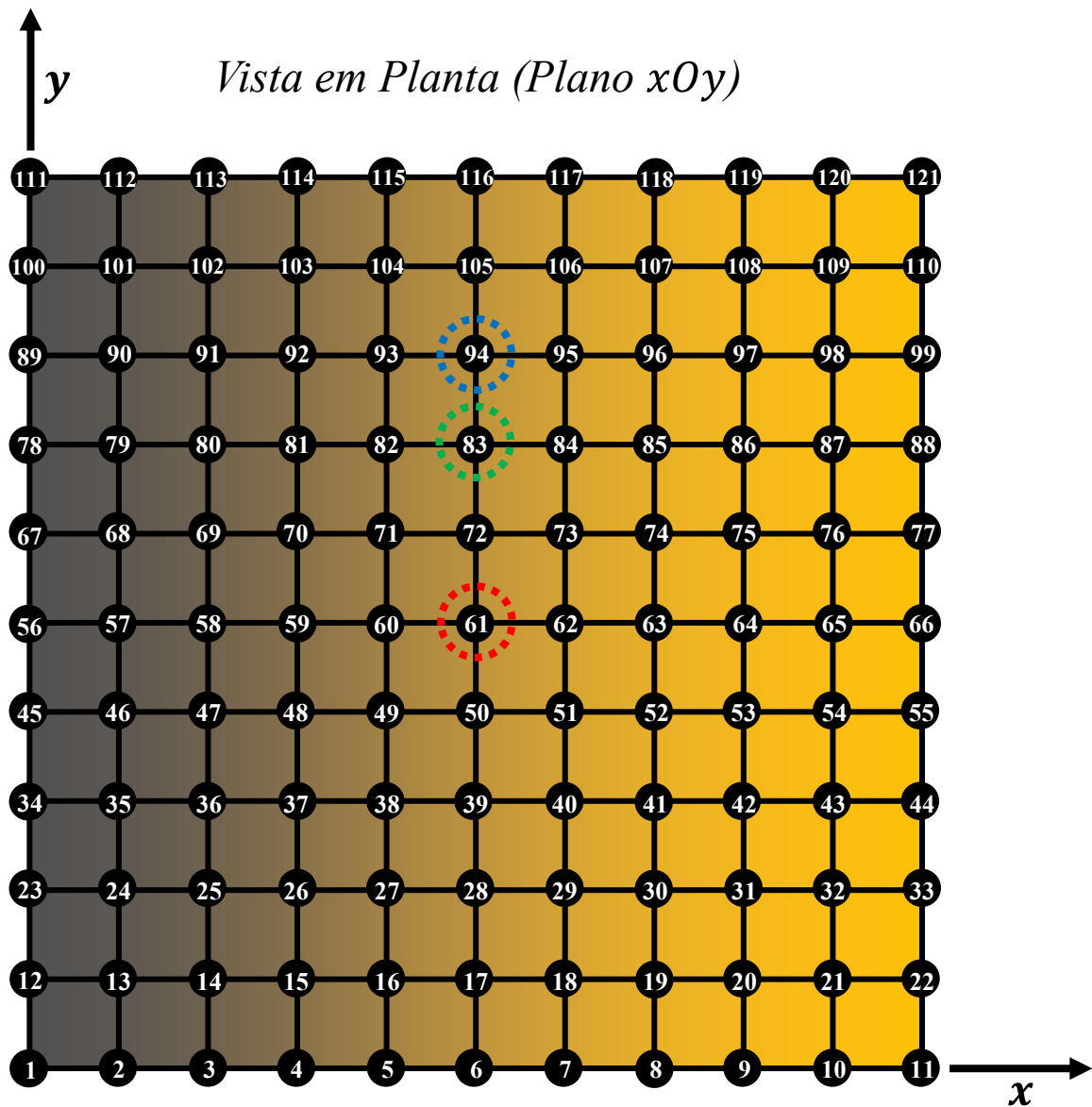


Figura B44 - Representação esquemática da localização do deslocamento transversal máximo em função de p_y para uma placa FGM SSSS em configuração de sensor (deslocamentos – vermelho, $p_x=0$, verde, $p_x=0.1$, 0.5 e 1 , azul, $p_x=2$ e 5)

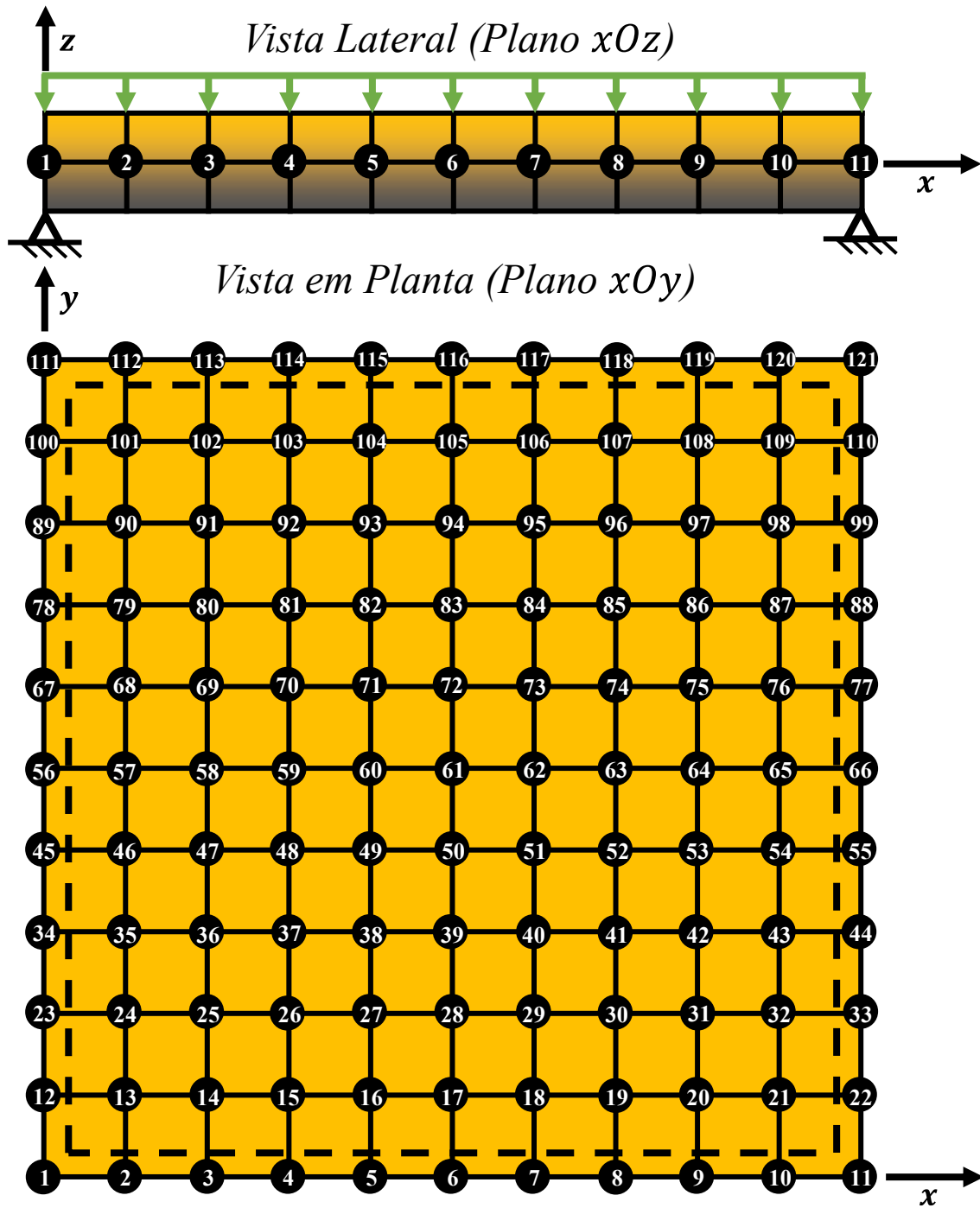


Figura B45 - Representação esquemática de uma placa SSSS em FGM AL/PVDF com gradiente segundo z em configuração de sensor

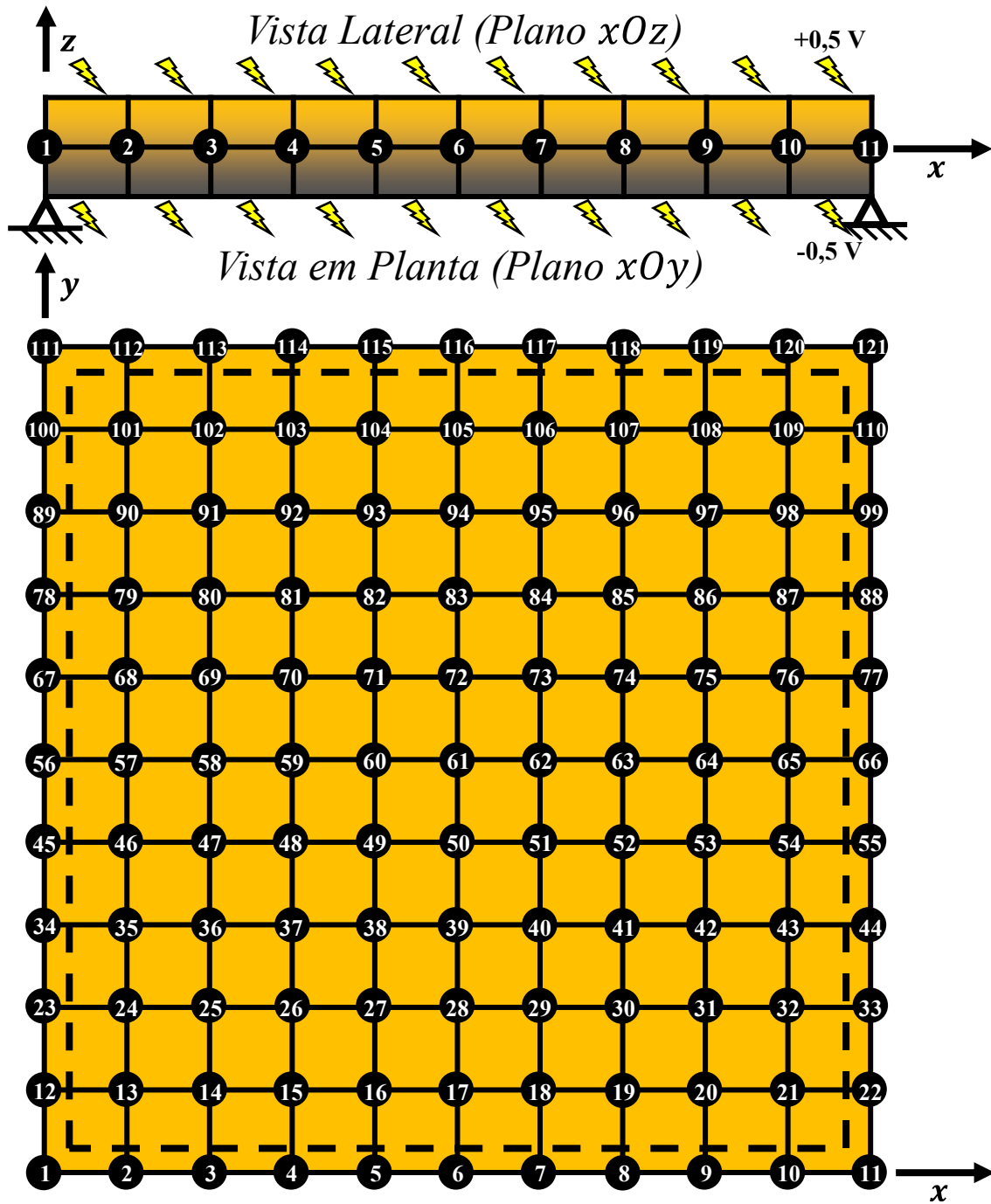


Figura B46 - Representação esquemática de uma placa SSSS em FGM AL/PVDF com gradiente segundo z em configuração de atuador

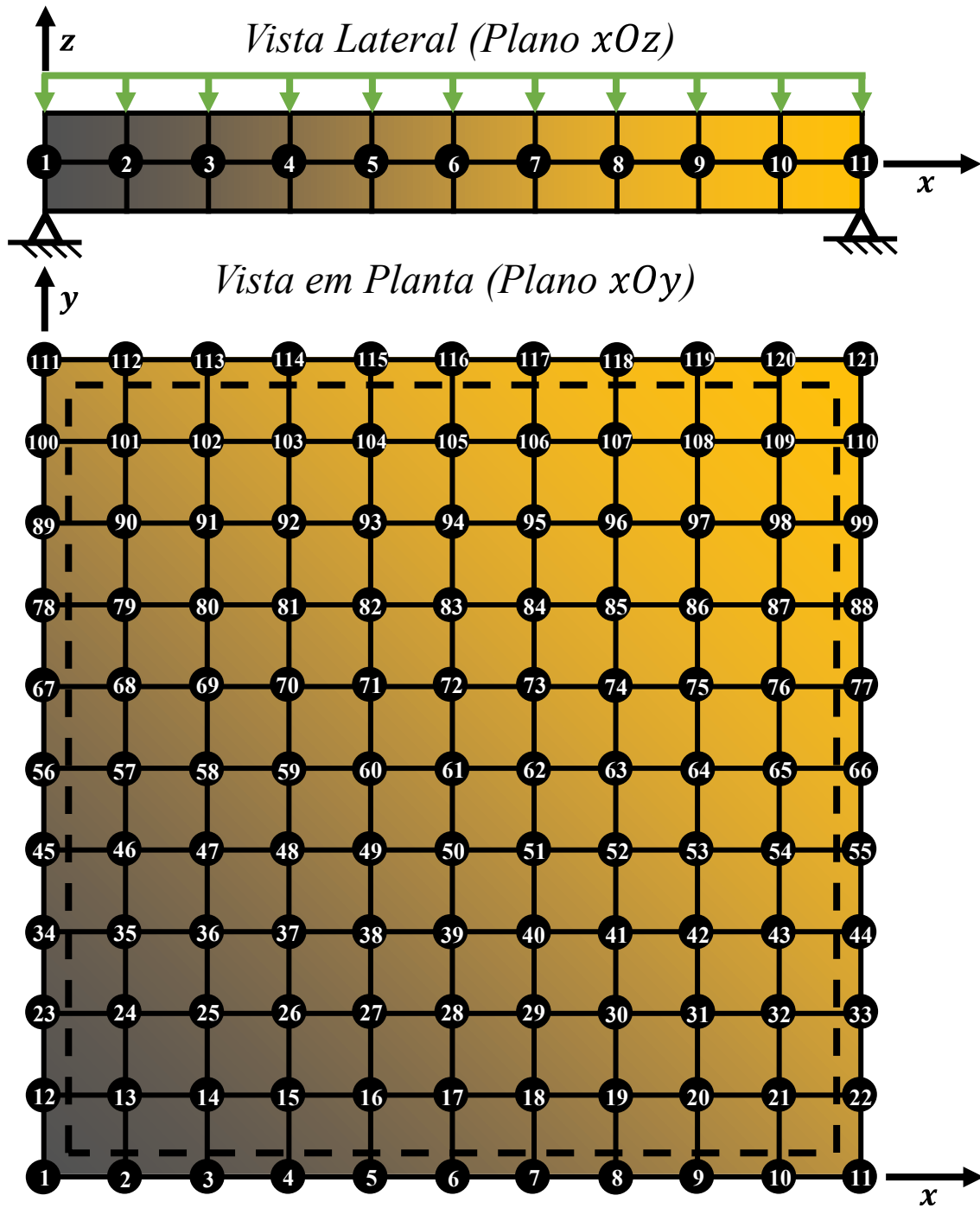


Figura B47 - Representação esquemática de uma placa SSSS em FGM AL/PVDF com gradiente segundo x e y em configuração de sensor

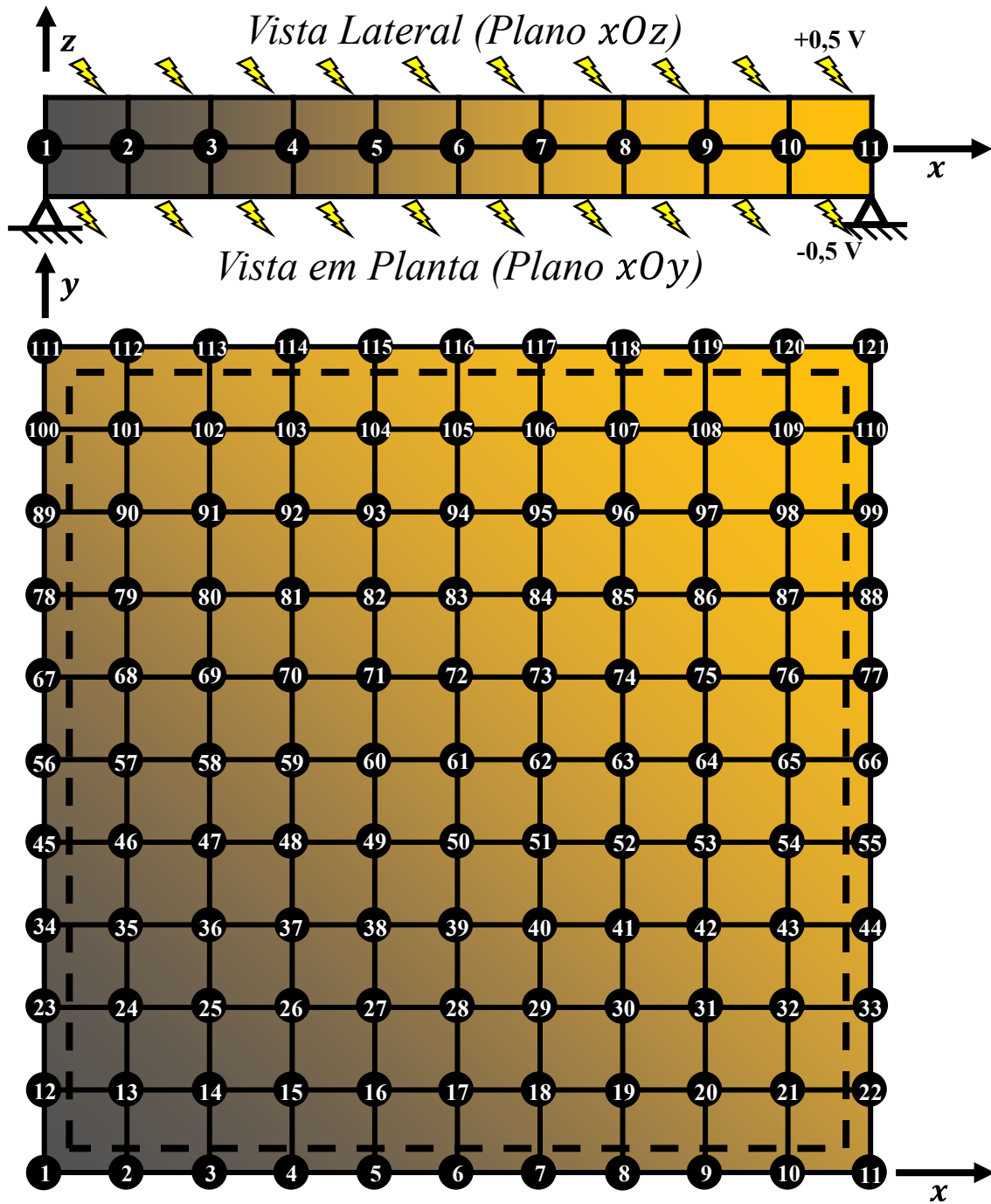


Figura B48 - Representação esquemática de uma placa SSSS em FGM AL/PVDF com gradiente segundo x e y em configuração de atuador

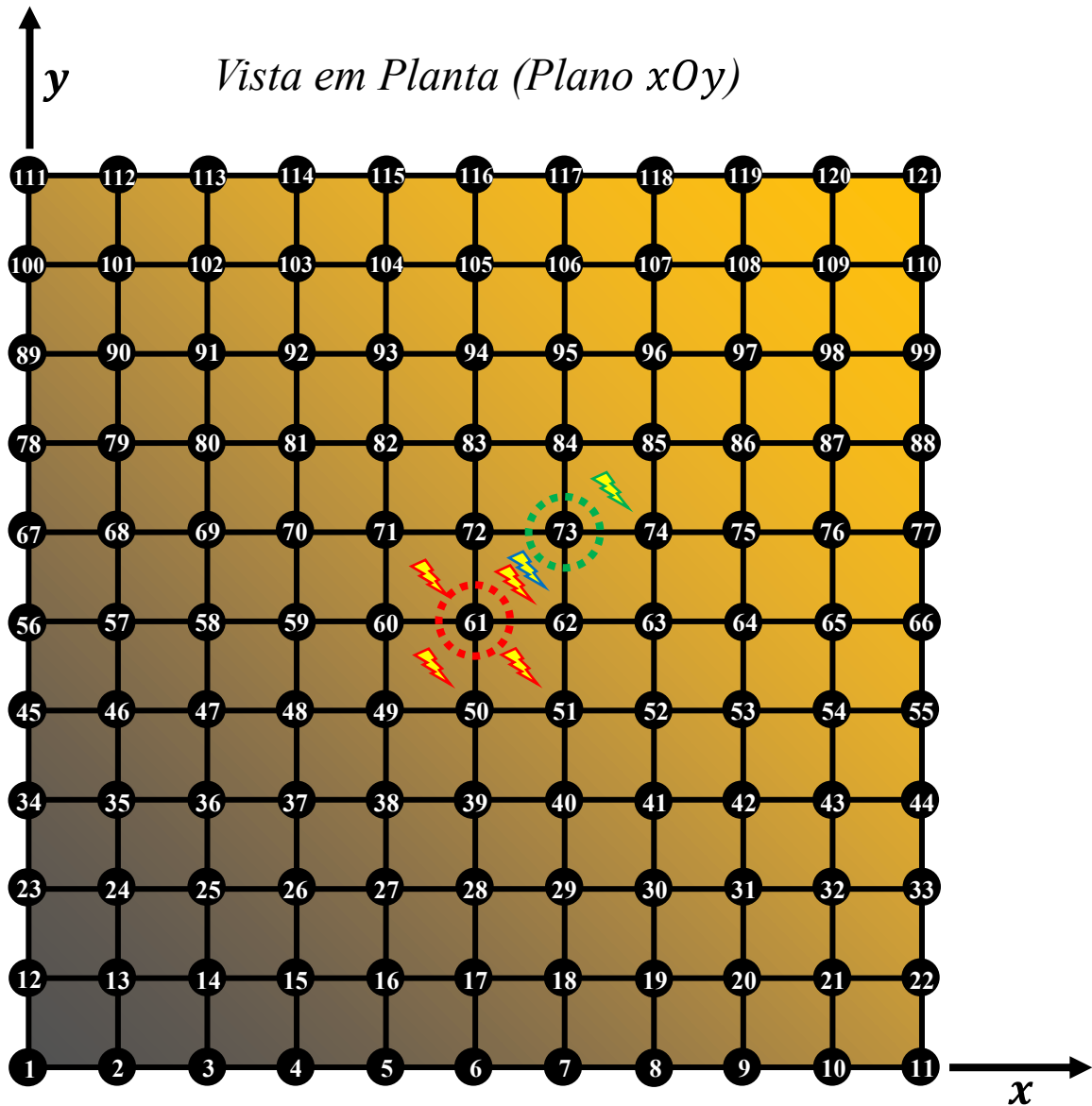


Figura B49 - Representação esquemática da localização do deslocamento transversal máximo e do potencial elétrico máximo em função de p_x e p_y para uma placa FGM SSSS em configuração de sensor (deslocamentos – vermelho, $p=0, 1, 2$ e 5 , verde, $p_x=p_y=0.1$ e 0.5 ; potenciais – vermelho, $p_x=p_y=0$, verde, $p_x=p_y=0.1, 0.5$ e 1 , azul, $p_x=p_y=2$ e 5)

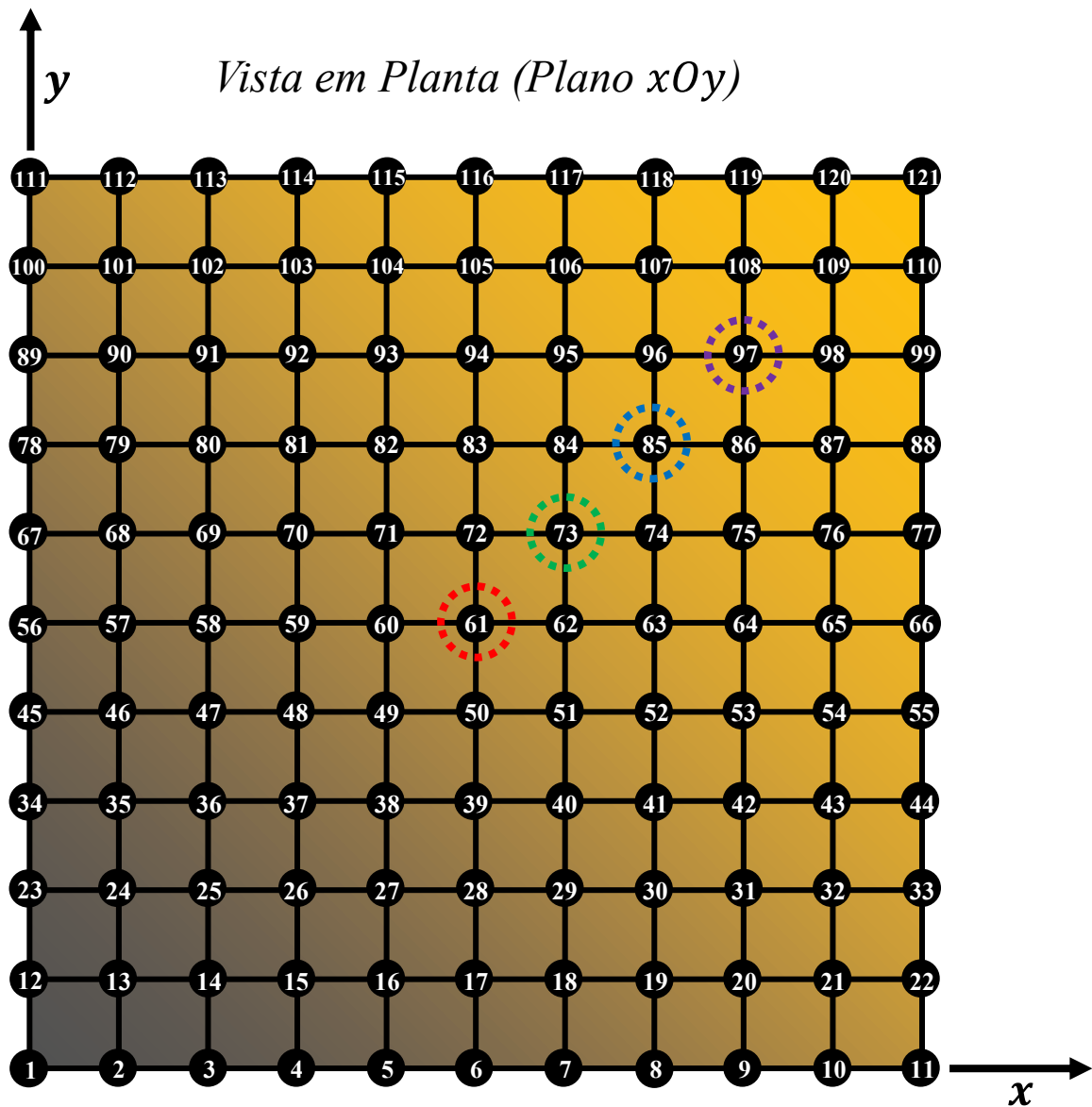


Figura B50 - Representação esquemática da localização do deslocamento transversal máximo em função de p_x e p_y para uma placa FGM SSSS em configuração de sensor (deslocamentos – vermelho, $p_x=p_y=0$, verde, $p_x=p_y=0.1$, azul, $p_x=p_y=0.5$ e 1, roxo, $p=2$ e 5)

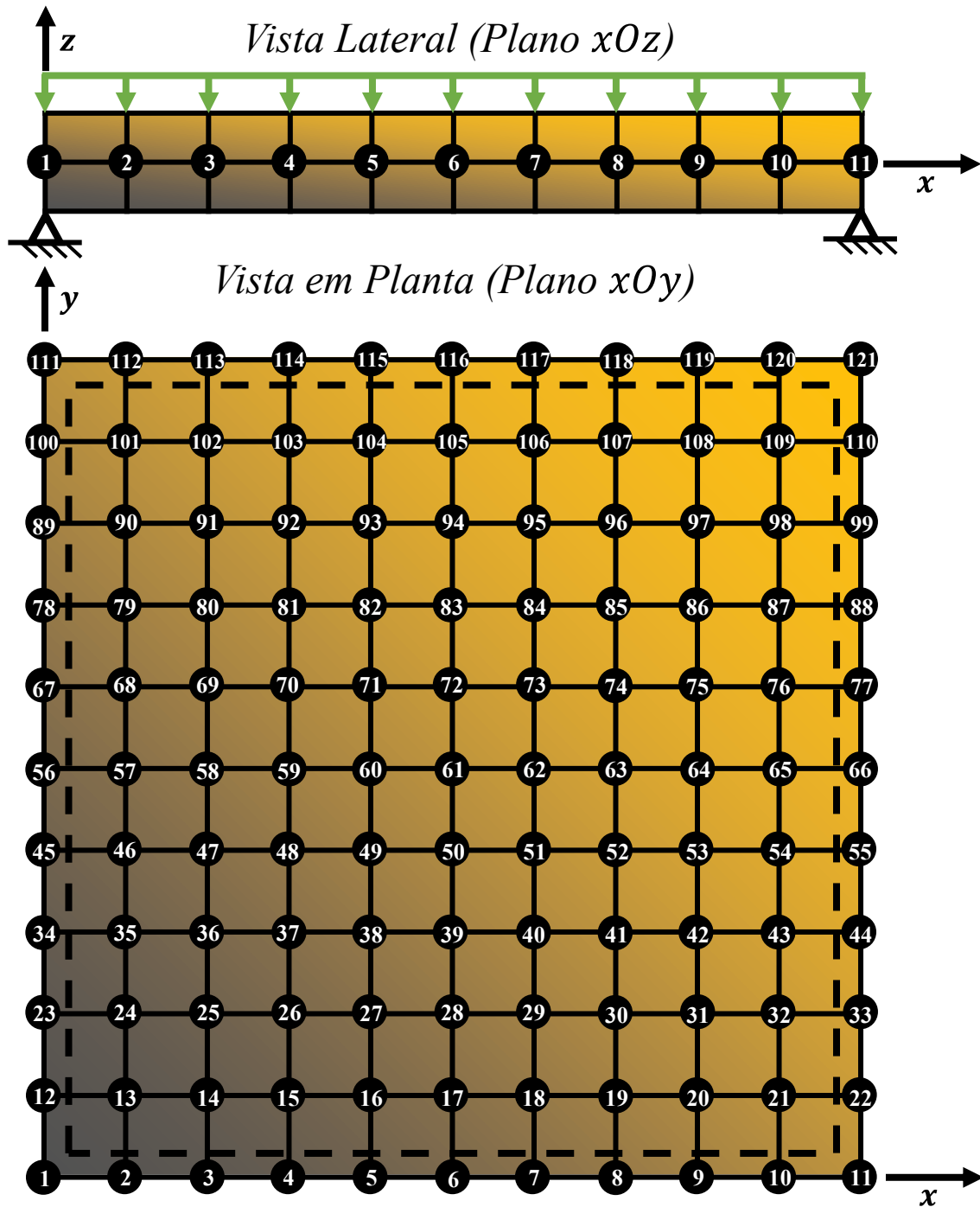


Figura B51 - Representação esquemática de uma placa SSSS em FGM AL/PVDF com gradiente segundo x , y e z em configuração de sensor

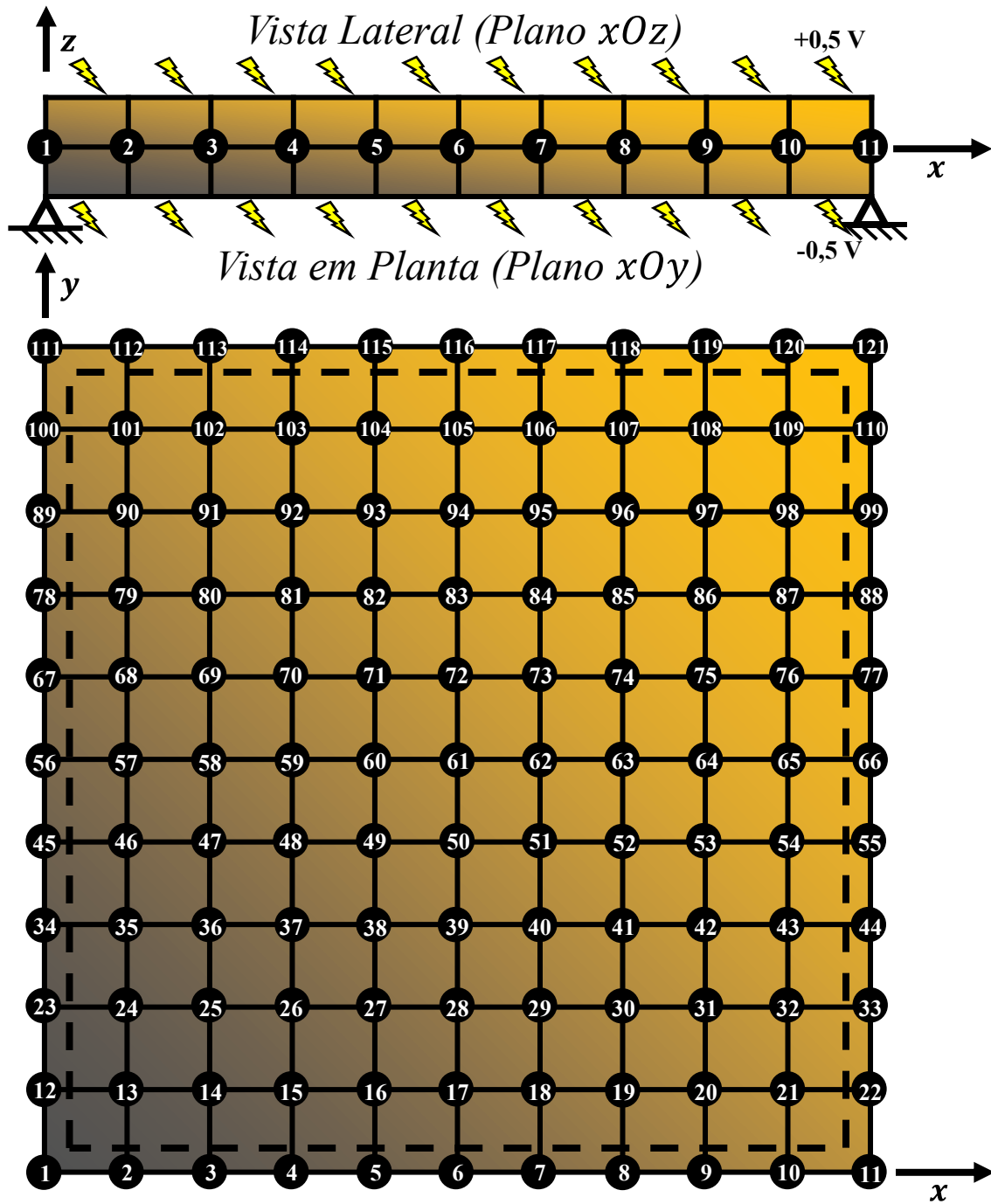


Figura B52 - Representação esquemática de uma placa SSSS em FGM AL/PVDF com gradiente segundo x , y e z em configuração de sensor

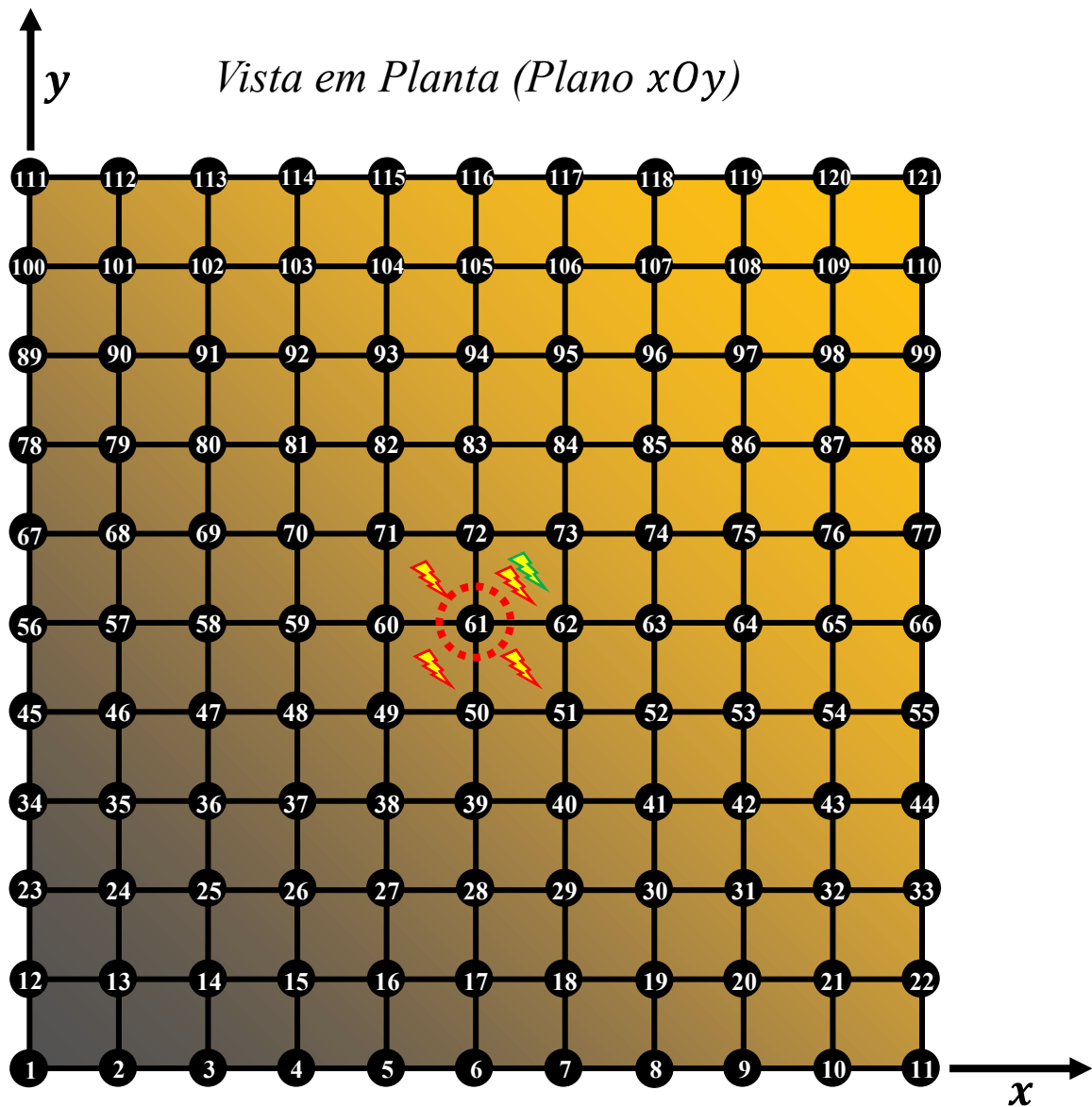


Figura B53 - Representação esquemática da localização do deslocamento transversal máximo e do potencial elétrico máximo em função de p_x , p_y e p_z para uma placa FGM SSSS em configuração de sensor (deslocamentos – vermelho, $p_x=p_y=p_z=0, 0.1, 0.5, 1, 2$ e 5 ; potenciais – vermelho, $p_x=p_y=p_z=0$, verde, $p_x=p_y=p_z=0.1, 0.5, 1, 2$ e 5)

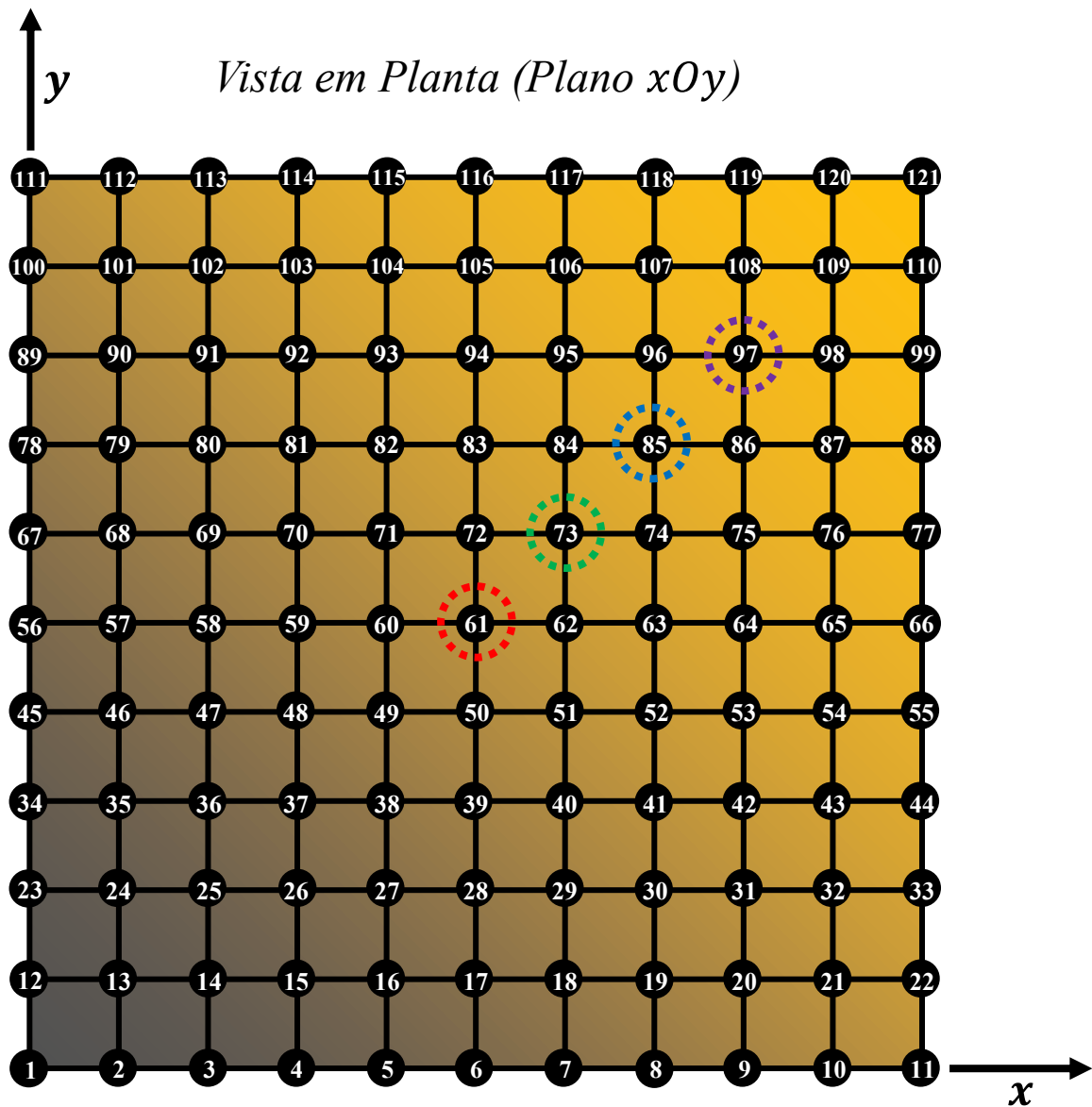


Figura B54 - Representação esquemática da localização do deslocamento transversal máximo em função de p_x e p_y para uma placa FGM SSSS em configuração de sensor (deslocamentos – vermelho, $p_x=p_y=p_z=0$, verde, $p_x=p_y=p_z=0.1$ e 0.5 , azul, $p_x=p_y=p_z=1$ e 2 , roxo, $p_x=p_y=p_z=5$)

Tabela B77 - Tempos de computação em [s] referentes às abordagens contínua (valores de cima) e discreta (valores de baixo) aos modelos utilizados no âmbito do Estudo Paramétrico 9

Gradiente	Direção	Configuração Funcional	p					
			0	0,1	0,5	1	2	5
			t_{CPU} [s]	t_{CPU} [s]	t_{CPU} [s]	t_{CPU} [s]	t_{CPU} [s]	t_{CPU} [s]
1D	x	(A)	94,437 96,828	52,781 120,828	51,093 105,375	57,031 111,109	58,218 110,531	54,703 117,156
		(S)	99,593 95,609	50,796 102,281	50,812 101,203	55,156 104,5	53,046 104,375	54,062 106,015
	y	(A)	94,437 96,828	52,781 120,828	51,093 105,375	57,031 111,109	58,218 110,531	54,703 117,156
		(S)	99,593 95,609	50,796 102,281	50,812 101,203	55,156 104,5	53,046 104,375	54,062 106,015
	z	(A)	78,328 428,843	65,984 448,453	67,562 461,562	69,046 451,578	69,828 444,109	71,968 472,671
		(S)	75,734 427,531	66,671 452,750	67,734 507,468	70,390 490,921	62,187 444,609	74,203 446,796
2D	xy	(A)	102,875 99,171	559,203 163,526	316,484 139,843	175,093 158,421	239,953 137,218	841,000 116,046
		(S)	75,703 102,875	337,546 106,264	265,312 118,734	139,500 136,984	193,875 119,015	1432,703 137,890
3D	xyz	(A)	98,000 438,656	695,796 566,687	688,734 648,593	686,343 554,718	742,656 552,875	768,500 549,140
		(S)	95,187 446,234	644,578 564,093	654,937 627,328	727,562 552,562	654,640 526,250	740,890 556,953

10.B. Estudo Paramétrico 10

Os resultados que em seguida se apresentam, correspondem ao Estudo Paramétrico 10 (4.2.3.1).

Tabela B78 - Série de 10 corridas com 30 indivíduos e 30 iterações (Goldstein-Price)

Corrida	X_1^*	X_2^*	$f(X_1^*, X_2^*)$	t_{CPU} [s]
1	0,054357	-1,013649	4,100860	3,296
2	0,089522	-1,032867	6,917462	0,235
3	0,224430	-0,851770	15,070106	0,250
4	-0,025338	-0,966257	3,771728	0,390
5	-0,119798	-0,979818	7,887331	0,250
6	0,197708	-0,980394	19,712203	0,313
7	0,060365	-0,966802	3,918118	0,187
8	0,074968	-0,975930	4,304699	0,407
9	-0,085326	-1,018447	4,863761	0,328
10	-0,103480	-0,992813	6,285767	0,297
		Média	7,683204	0,595
		Desvio Padrão	5,411061	-

Tabela B79 - Série de 10 corridas com 50 indivíduos e 30 iterações (Goldstein-Price)

Corrida	X_1^*	X_2^*	$f(X_1^*, X_2^*)$	t_{CPU} [s]
1	-0,000317	-1,062143	5,010446	1,703
2	0,061655	-0,961175	4,032722	0,172
3	0,045953	-1,002077	3,593506	0,234
4	-0,089326	-1,067398	5,928797	0,281
5	-0,068973	-0,973889	4,792127	0,016
6	-0,113539	-1,058040	6,702373	0,156
7	-0,003923	-1,008483	3,028064	0,250
8	-0,015368	-0,978920	3,305431	0,109
9	0,034008	-0,829546	19,764702	0,250
10	-0,101864	-1,089037	7,732977	0,157
		Média	6,389115	0,333
		Desvio Padrão	4,940166	-

Tabela B80 - Série de 10 corridas com 100 indivíduos e 30 iterações (Goldstein-Price)

Corrida	X_1^*	X_2^*	$f(X_1^*, X_2^*)$	t_{CPU} [s]
1	-0,123197	-1,054968	7,292478	1,796
2	-0,020078	-0,952349	4,197787	0,329
3	0,062927	-0,975552	3,913939	0,296
4	-0,032549	-0,997864	3,284414	0,266
5	0,042318	-0,956949	3,837230	0,063
6	0,010187	-0,990097	3,046271	0,312
7	0,006683	-1,021000	3,242890	0,203
8	-0,027264	-1,019542	3,243466	0,313
9	0,036420	-0,989560	3,299420	0,218
10	-0,010363	-1,038769	3,645426	0,360
		Média	3,900332	0,416
		Desvio Padrão	1,247123	-

Tabela B81 - Série de 10 corridas com 200 indivíduos e 30 iterações (Goldstein-Price)

Corrida	X_1^*	X_2^*	$f(X_1^*, X_2^*)$	t_{CPU} [s]
1	0,020053	-0,973497	3,286902	1,906
2	-0,043182	-1,030651	3,614512	0,500
3	-0,004471	-1,009316	3,033919	0,484
4	0,037548	-0,963674	3,613665	0,453
5	0,013080	-0,989932	3,057727	0,469
6	0,101940	-0,933313	5,791570	0,406
7	-0,067845	-0,986112	4,458223	0,516
8	0,045274	-0,951866	4,025601	0,562
9	0,007022	-0,919000	5,891191	0,329
10	0,014431	-1,038952	3,911627	0,578
		Média	4,068494	0,620
		Desvio Padrão	1,032010	-

Tabela B82 - Série de 10 corridas com 30 indivíduos e 50 iterações (Goldstein-Price)

Corrida	X_1^*	X_2^*	$f(X_1^*, X_2^*)$	t_{CPU} [s]
1	0,007555	-1,000212	3,014821	1,750
2	-0,084050	-0,974906	5,482167	0,250
3	0,029154	-0,988971	3,195052	0,234
4	-0,022950	-0,982395	3,335276	0,266
5	0,021417	-0,977062	3,232877	0,296
6	0,062541	-0,985165	3,913871	0,219
7	0,013990	-0,981795	3,136041	0,203
8	0,105208	-0,990123	6,218529	0,250
9	0,007884	-1,123517	14,511807	0,172
10	-0,054440	-1,065016	5,079223	0,297
		Média	5,111966	0,394
		Desvio Padrão	3,493160	-

Tabela B83 - Série de 10 corridas com 50 indivíduos e 50 iterações (Goldstein-Price)

Corrida	X_1^*	X_2^*	$f(X_1^*, X_2^*)$	t_{CPU} [s]
1	-0,062500	-0,964129	4,826852	1,750
2	-0,061029	-0,994112	4,061189	0,296
3	0,012615	-1,044915	4,158306	0,297
4	0,041914	-0,964777	3,635842	0,313
5	-0,012141	-1,101061	9,321170	0,297
6	0,077001	-0,994515	4,607463	0,328
7	-0,074473	-1,019943	4,377834	0,390
8	0,046172	-1,036680	4,660336	0,313
9	0,039576	-1,009107	3,545414	0,281
10	-0,062089	-0,984217	4,274513	0,266
		Média	4,746892	0,453
		Desvio Padrão	1,660365	-

Tabela B84 - Série de 10 corridas com 100 indivíduos e 50 iterações (Goldstein-Price)

Corrida	X_1^*	X_2^*	$f(X_1^*, X_2^*)$	t_{CPU} [s]
1	0,027631	-1,055566	5,142212	1,953
2	0,026151	-0,946760	4,126904	0,453
3	0,012356	-0,986859	3,077122	0,453
4	-0,016873	-0,987189	3,182006	0,484
5	0,027143	-0,997386	3,176231	0,500
6	0,021897	-0,976606	3,242479	0,547
7	0,067992	-0,981958	4,078066	0,485
8	0,018117	-0,959472	3,639355	0,484
9	0,072131	-0,990463	4,318665	0,656
10	0,016402	-0,993835	3,061876	0,438
		Média	3,704492	0,645
		Desvio Padrão	0,694305	-

Tabela B85 - Série de 10 corridas com 200 indivíduos e 50 iterações (Goldstein-Price)

Corrida	X_1^*	X_2^*	$f(X_1^*, X_2^*)$	t_{CPU} [s]
1	-0,029262	-1,012652	3,210205	2,312
2	-0,014788	-0,999919	3,055285	0,750
3	0,011740	-0,954425	3,826308	0,703
4	-0,034189	-1,011876	3,275968	0,891
5	0,018269	-0,981461	3,156924	0,781
6	-0,043559	-0,978254	3,831848	0,797
7	-0,009009	-0,985449	3,135727	1,047
8	-0,012307	-1,000729	3,036481	0,984
9	-0,022614	-0,994755	3,163610	0,797
10	-0,009850	-1,005250	3,025398	1,047
		Média	3,271775	1,011
		Desvio Padrão	0,303924	-

Tabela B86 - Série de 10 corridas com 30 indivíduos e 100 iterações (Goldstein-Price)

Corrida	X_1^*	X_2^*	$f(X_1^*, X_2^*)$	t_{CPU} [s]
1	-0,005596	-0,982714	3,153480	2,109
2	0,048096	-0,965525	3,705291	0,484
3	0,112689	-0,975704	6,353915	0,516
4	0,041596	-1,016563	3,765468	0,547
5	0,005989	-1,004279	3,022795	0,687
6	0,031345	-0,940702	4,416861	0,563
7	-0,074033	-1,056896	5,019710	0,547
8	0,010213	-1,026909	3,423687	0,328
9	-0,013411	-0,986448	3,157835	0,469
10	0,063772	-0,995587	4,064711	0,578
		Média	4,008375	0,683
		Desvio Padrão	1,033481	-

Tabela B87 - Série de 10 corridas com 50 indivíduos e 100 iterações (Goldstein-Price)

Corrida	X_1^*	X_2^*	$f(X_1^*, X_2^*)$	t_{CPU} [s]
1	-0,033853	-1,008925	3,265283	2,187
2	-0,019130	-0,981850	3,293822	0,641
3	-0,011607	-0,982422	3,203078	0,640
4	-0,042215	-1,051102	4,225841	0,578
5	-0,043405	-0,974085	3,931140	0,657
6	-0,059119	-0,963779	4,716208	0,640
7	-0,034482	-0,992913	3,368505	0,563
8	-0,017100	-0,997738	3,083551	0,922
9	0,032526	-0,995532	3,248368	0,578
10	0,005121	-1,013586	3,104335	0,719
		Média	3,544013	0,813
		Desvio Padrão	0,554664	

Tabela B88 - Série de 10 corridas com 100 indivíduos e 100 iterações (Goldstein-Price)

Corrida	X_1^*	X_2^*	$f(X_1^*, X_2^*)$	t_{CPU} [s]
1	-0,025957	-1,011438	3,165795	2,531
2	-0,008292	-1,023294	3,218807	1,015
3	-0,018408	-1,010569	3,093114	0,985
4	0,016490	-1,003806	3,090391	0,953
5	0,018184	-1,008574	3,154010	1,125
6	-0,035960	-0,993810	3,386550	1,203
7	0,025985	-1,005581	3,223603	1,188
8	0,023103	-1,008630	3,218594	1,140
9	-0,033467	-1,032183	3,519869	1,235
10	0,001371	-0,977458	3,210057	0,984
		Média	3,228079	1,236
		Desvio Padrão	0,132210	-

Tabela B89 - Série de 10 corridas com 200 indivíduos e 100 iterações (Goldstein-Price)

Corrida	X_1^*	X_2^*	$f(X_1^*, X_2^*)$	t_{CPU} [s]
1	-0,035097	-1,015493	3,306107	3,000
2	0,016420	-0,978665	3,186822	1,640
3	0,022623	-0,985783	3,143848	2,000
4	-0,007075	-0,999763	3,012968	1,969
5	-0,004196	-0,987104	3,086073	1,562
6	-0,012643	-0,986666	3,148000	1,563
7	0,014104	-1,005702	3,083572	2,078
8	0,018141	-0,999664	3,082727	1,766
9	-0,007817	-0,989173	3,082141	1,609
10	-0,020862	-1,001244	3,105202	1,875
		Média	3,123746	1,906
		Desvio Padrão	0,079784	-

Tabela B90 - Série de 10 corridas com 30 indivíduos e 200 iterações (Goldstein-Price)

Corrida	X_1^*	X_2^*	$f(X_1^*, X_2^*)$	t_{CPU} [s]
1	0,018446	-0,996962	3,077932	2,375
2	-0,036652	-1,019181	3,357093	1,093
3	-0,017271	-1,022549	3,217592	0,922
4	-0,001677	-0,988095	3,065198	0,969
5	0,014638	-1,014041	3,190925	1,203
6	0,028750	-1,008466	3,306662	1,031
7	0,011033	-0,997898	3,027574	0,844
8	-0,002997	-1,003933	3,006425	0,875
9	0,024834	-0,985382	3,165718	0,969
10	-0,024855	-1,031383	3,433740	1,094
		Média	3,184886	1,138
		Desvio Padrão	0,145391	-

Tabela B91 - Série de 10 corridas com 50 indivíduos e 200 iterações (Goldstein-Price)

Corrida	X_1^*	X_2^*	$f(X_1^*, X_2^*)$	t_{CPU} [s]
1	-0,003569	-1,013999	3,078752	2,734
2	-0,025574	-1,015036	3,183543	1,359
3	0,006662	-0,992923	3,022486	1,532
4	-0,005195	-0,992384	3,039682	1,375
5	-0,005586	-1,004633	3,011611	1,453
6	-0,017754	-1,003276	3,072104	1,515
7	0,000315	-1,004622	3,009641	1,688
8	-0,013864	-0,994957	3,073189	1,187
9	0,011652	-1,013719	3,155477	1,063
10	-0,018441	-0,993307	3,128699	1,344
		Média	3,077518	1,525
		Desvio Padrão	0,060918	-

Tabela B92 - Série de 10 corridas com 100 indivíduos e 200 iterações (Goldstein-Price)

Corrida	X_1^*	X_2^*	$f(X_1^*, X_2^*)$	t_{CPU} [s]
1	-0,001443	-0,995153	3,012082	3,718
2	-0,004336	-0,995819	3,016015	2,141
3	0,017176	-1,000842	3,078994	2,266
4	0,010844	-1,001826	3,035788	2,140
5	0,019350	-1,001740	3,105105	2,344
6	-0,025035	-0,995752	3,186493	2,453
7	-0,004660	-1,004894	3,010952	2,531
8	0,028371	-0,977691	3,273690	3,047
9	-0,015783	-1,023147	3,222920	2,297
10	0,004708	-1,000310	3,005962	2,375
		Média	3,094800	2,531
		Desvio Padrão	0,099238	-

Tabela B93 - Série de 10 corridas com 200 indivíduos e 200 iterações (Goldstein-Price)

Corrida	X_1^*	X_2^*	$f(X_1^*, X_2^*)$	t_{CPU} [s]
1	0,004452	-0,999694	3,004746	4,953
2	0,000815	-1,004242	3,008752	3,937
3	-0,009541	-0,993157	3,056054	4,266
4	0,001849	-0,991159	3,030862	3,937
5	-0,008576	-0,996298	3,030894	4,547
6	0,001176	-1,005353	3,014227	4,828
7	-0,002106	-0,997937	3,003871	4,797
8	0,002198	-1,001500	3,002917	4,719
9	-0,003353	-0,990496	3,047910	4,828
10	0,002094	-0,998004	3,001919	4,328
		Média	3,020215	4,514
		Desvio Padrão	0,019962	-

11.B. Estudo Paramétrico 11

Os resultados que em seguida se apresentam, correspondem ao Estudo Paramétrico 11 (4.2.3.1).

Tabela B94 - Série de 10 corridas com 30 indivíduos e 30 iterações (Rastringin)

Corrida	X_1^*	X_2^*	$f(X_1^*, X_2^*)$	t_{CPU} [s]
1	-0,111555	-1,104754	5,679443	1,968
2	0,010335	-1,096583	3,009173	0,500
3	1,119457	0,098724	5,812884	0,516
4	0,066828	-0,990610	1,871836	0,500
5	0,001821	1,097128	3,009419	0,469
6	-0,005717	-0,939357	1,606053	0,343
7	1,193071	-0,949331	9,325971	0,375
8	-0,067351	-1,964785	4,990810	0,500
9	0,041382	-0,047900	0,789637	0,329
10	1,883580	0,026081	6,240722	0,468
		Média	4,233595	0,597
		Desvio Padrão	2,634375	-

Tabela B95 - Série de 10 corridas com 50 indivíduos e 30 iterações (Rastringin)

Corrida	X_1^*	X_2^*	$f(X_1^*, X_2^*)$	t_{CPU} [s]
1	1,006270	0,922370	3,037269	1,734
2	0,972741	-1,013573	2,156216	0,469
3	0,007011	-0,924504	1,968595	0,500
4	-0,967744	0,023387	1,249520	0,437
5	0,051114	-0,990649	1,512556	0,485
6	-1,059823	0,058875	2,501283	0,515
7	-1,956437	-1,016648	5,288142	0,516
8	1,043673	0,036170	1,721826	0,453
9	-0,927534	0,967919	3,018443	0,422
10	-2,033286	-0,074457	5,432205	0,453
		Média	2,788606	0,598
		Desvio Padrão	1,477270	-

Tabela B96 - Série de 10 corridas com 100 indivíduos e 30 iterações (Rastringin)

Corrida	X_1^*	X_2^*	$f(X_1^*, X_2^*)$	t_{CPU} [s]
1	1,070032	1,021883	3,236184	2,031
2	-0,023368	-0,055105	0,704613	0,531
3	1,061914	0,043427	2,246688	0,750
4	-1,039774	-0,007658	1,403400	0,547
5	1,025850	-0,954570	2,499818	0,609
6	0,025041	2,002587	4,135828	0,719
7	-0,002708	-1,101895	3,196003	0,531
8	-0,022004	-1,026724	1,290709	0,563
9	-0,103512	0,019274	2,125816	0,578
10	-0,926902	0,034465	2,130194	0,562
		Média	2,296925	0,742
		Desvio Padrão	1,028440	-

Tabela B97 - Série de 10 corridas com 200 indivíduos e 30 iterações (Rastringin)

Corrida	X_1^*	X_2^*	$f(X_1^*, X_2^*)$	t_{CPU} [s]
1	0,976659	-0,006909	1,070681	2,171
2	-0,996676	0,961793	2,207354	0,813
3	0,029321	0,971536	1,273468	0,906
4	-0,965164	-0,961859	2,381087	0,797
5	-0,981925	-0,004633	1,032855	0,781
6	0,069298	-0,040355	1,259202	0,735
7	0,012607	0,912529	2,336856	0,812
8	-1,057593	-0,041077	2,099047	0,953
9	-0,084063	-0,026362	1,507375	0,828
10	-0,036343	-0,017563	0,322037	1,000
		Média	1,548996	0,980
		Desvio Padrão	0,684051	-

Tabela B98 - Série de 10 corridas com 30 indivíduos e 50 iterações (Rastringin)

Corrida	X_1^*	X_2^*	$f(X_1^*, X_2^*)$	t_{CPU} [s]
1	0,878469	0,997531	4,544475	2,140
2	0,988149	1,022850	2,153260	0,563
3	0,916388	1,942062	6,615207	0,593
4	-0,068384	0,108830	3,173676	0,641
5	-0,074111	1,028452	2,287291	0,516
6	0,979209	0,962862	2,242176	0,578
7	0,957429	-1,093776	4,154834	0,734
8	0,055107	0,988370	1,600080	0,750
9	-0,066758	-0,093492	2,556374	0,797
10	-0,965641	-0,006808	1,173782	0,719
		Média	3,050115	0,803
		Desvio Padrão	1,635872	-

Tabela B99 - Série de 10 corridas com 50 indivíduos e 50 iterações (Rastringin)

Corrida	X_1^*	X_2^*	$f(X_1^*, X_2^*)$	t_{CPU} [s]
1	-0,977747	-1,039490	2,440371	2,171
2	-0,014885	0,920879	2,102405	0,813
3	1,022510	-1,004396	2,158007	0,906
4	0,903080	-0,952674	3,959596	0,844
5	0,914701	-0,034601	2,475423	0,734
6	0,994854	1,049215	2,570116	0,735
7	-0,035934	0,949162	1,661837	0,781
8	0,031633	0,991367	1,195384	0,906
9	1,066488	-0,089703	3,552181	0,469
10	0,014195	0,079757	1,275890	0,781
		Média	2,339121	0,914
		Desvio Padrão	0,892300	-

Tabela B100 - Série de 10 corridas com 100 indivíduos e 50 iterações (Rastringin)

Corrida	X_1^*	X_2^*	$f(X_1^*, X_2^*)$	t_{CPU} [s]
1	0,018520	-0,027336	0,215866	2,328
2	0,932615	-0,975751	2,820693	0,812
3	-0,059880	0,945807	2,171732	0,703
4	0,066014	-0,018636	0,921135	0,985
5	0,043353	-0,067537	1,262078	0,828
6	-0,019243	-0,056192	0,693350	0,797
7	-0,970859	-0,012110	1,138804	0,797
8	0,027988	-0,056204	0,775248	0,859
9	0,049296	-1,045977	1,986721	0,937
10	-1,029487	0,009689	1,249607	0,922
		Média	1,323523	0,997
		Desvio Padrão	0,783916	-

Tabela B101 - Série de 10 corridas com 200 indivíduos e 50 iterações (Rastringin)

Corrida	X_1^*	X_2^*	$f(X_1^*, X_2^*)$	t_{CPU} [s]
1	-0,005965	0,034255	0,238961	2,812
2	-0,981788	-0,015438	1,076550	1,391
3	0,031599	-0,005773	0,204056	1,343
4	-1,024340	0,048787	1,634526	1,219
5	1,015079	-0,005637	1,081540	1,235
6	0,000170	0,027981	0,154940	1,468
7	0,051979	-0,000974	0,531475	1,422
8	-1,004979	1,035313	2,331885	1,391
9	-0,022667	-0,977116	1,159711	1,515
10	-0,044182	-0,068857	1,310920	1,469
		Média	0,972456	1,527
		Desvio Padrão	0,703167	-

Tabela B102 - Série de 10 corridas com 30 indivíduos e 100 iterações (Rastringin)

Corrida	X_1^*	X_2^*	$f(X_1^*, X_2^*)$	t_{CPU} [s]
1	0,068020	-1,011764	1,955058	2,968
2	0,957477	0,981920	2,300191	1,282
3	0,911046	-0,029292	2,521433	1,359
4	-0,012427	0,994136	1,025717	1,406
5	-0,033618	-1,046274	1,737782	1,516
6	-0,089218	0,030665	1,724452	1,406
7	-1,026665	-0,007453	1,205081	1,297
8	-0,054851	0,023320	0,698723	1,453
9	-0,043539	-1,049676	1,958738	1,547
10	-0,992949	1,051746	2,625834	1,125
		Média	1,775301	1,536
		Desvio Padrão	0,638717	-

Tabela B103 - Série de 10 corridas com 50 indivíduos e 100 iterações (Rastringin)

Corrida	X_1^*	X_2^*	$f(X_1^*, X_2^*)$	t_{CPU} [s]
1	1,010959	0,004882	1,050464	2,859
2	-1,071350	0,011615	2,162704	1,781
3	0,022158	-0,000195	0,097254	1,656
4	0,040729	-0,034217	0,558698	1,469
5	-0,024935	0,039399	0,429489	1,656
6	-0,046751	-0,050173	0,925843	1,360
7	-0,015146	0,016384	0,098685	1,578
8	-0,026821	-0,991462	1,139759	1,672
9	-0,013495	0,006780	0,045227	1,734
10	-0,029172	-0,028394	0,327882	1,344
		Média	0,683600	1,711
		Desvio Padrão	0,657373	-

Tabela B104 - Série de 10 corridas com 100 indivíduos e 100 iterações (Rastringin)

Corrida	X_1^*	X_2^*	$f(X_1^*, X_2^*)$	t_{CPU} [s]
1	0,992942	0,017629	1,057359	3,375
2	0,953985	-0,020066	1,404913	1,953
3	0,069504	0,046394	1,367345	1,906
4	-0,019288	-0,962005	1,282776	1,953
5	0,003840	0,011743	0,030271	1,922
6	0,047019	-0,049061	0,909224	1,984
7	0,020573	-0,043067	0,449588	1,953
8	-0,062011	0,005996	0,760478	1,922
9	0,048633	0,062457	1,229686	1,500
10	-0,005670	-0,051091	0,519824	1,969
		Média	0,901146	2,044
		Desvio Padrão	0,456641	-

Tabela B105 - Série de 10 corridas com 200 indivíduos e 100 iterações (Rastringin)

Corrida	X_1^*	X_2^*	$f(X_1^*, X_2^*)$	t_{CPU} [s]
1	0,004075	-0,007900	0,015675	4,250
2	-0,002620	-1,024247	1,166273	2,828
3	-0,014660	-0,028511	0,203449	2,687
4	0,010909	-0,984566	1,039954	2,641
5	-0,033818	-0,026869	0,368927	2,625
6	-0,011152	-0,043845	0,403649	2,719
7	0,024940	0,049012	0,595980	2,781
8	0,037575	0,019690	0,355633	2,828
9	0,023691	0,027389	0,259598	2,875
10	-0,018646	-0,009641	0,087333	3,047
		Média	0,449647	2,928
		Desvio Padrão	0,382569	-

Tabela B106 - Série de 10 corridas com 30 indivíduos e 200 iterações (Rastringin)

Corrida	X_1^*	X_2^*	$f(X_1^*, X_2^*)$	t_{CPU} [s]
1	0,004247	1,002959	1,011234	4,468
2	0,033416	0,081077	1,497019	3,125
3	1,001791	0,012916	1,037296	3,047
4	0,037298	-1,000626	1,276069	2,860
5	-0,020191	-0,008101	0,093788	2,609
6	-0,030896	-0,044845	0,585153	3,031
7	-0,008861	0,027796	0,168461	2,344
8	-0,029907	0,066617	1,044635	2,469
9	0,027733	0,993673	1,147485	2,812
10	0,978225	0,015086	1,095492	2,578
		Média	0,895663	2,934
		Desvio Padrão	0,463505	-

Tabela B107 - Série de 10 corridas com 50 indivíduos e 200 iterações (Rastringin)

Corrida	X_1^*	X_2^*	$f(X_1^*, X_2^*)$	t_{CPU} [s]
1	-0,021880	0,026014	0,228787	5,046
2	0,023769	-0,956731	1,394506	3,641
3	-0,036047	-0,008870	0,272295	3,938
4	-0,046351	0,037004	0,693686	4,031
5	0,995185	-0,009651	1,013442	3,781
6	0,047491	0,041014	0,776051	3,813
7	0,006187	0,985583	1,019966	4,125
8	-0,976131	0,001798	1,065724	4,171
9	0,012318	-0,044573	0,421688	3,563
10	0,035532	-0,008430	0,263532	3,922
		Média	0,714968	4,003
		Desvio Padrão	0,407327	-

Tabela B108 - Série de 10 corridas com 100 indivíduos e 200 iterações (Rastringin)

Corrida	X_1^*	X_2^*	$f(X_1^*, X_2^*)$	t_{CPU} [s]
1	-0,002958	0,988078	1,006077	5,171
2	0,029404	0,019645	0,247510	3,766
3	-0,031775	-0,016703	0,254951	3,891
4	0,003973	0,040462	0,326196	3,718
5	0,007187	-0,071803	1,015950	3,829
6	-0,001920	1,010115	1,041253	3,984
7	-0,012849	0,008606	0,047426	4,312
8	0,037178	-0,050508	0,774871	3,985
9	0,012449	0,988405	1,034200	4,531
10	-0,027226	0,021580	0,238954	4,563
		Média	0,598739	4,175
		Desvio Padrão	0,409020	-

Tabela B109 - Série de 10 corridas com 200 indivíduos e 200 iterações (Rastringin)

Corrida	X_1^*	X_2^*	$f(X_1^*, X_2^*)$	t_{CPU} [s]
1	-0,020504	0,009356	0,100649	7,625
2	-0,044887	-0,001077	0,397334	5,437
3	-0,010535	-0,008420	0,036072	5,391
4	-0,047354	-0,043378	0,812629	5,593
5	-0,003815	0,014158	0,042629	5,500
6	-0,047846	0,011730	0,478057	6,719
7	0,006643	0,019235	0,082063	7,594
8	-0,019805	-0,007518	0,088930	8,594
9	-0,040924	0,010485	0,352239	9,656
10	-0,025717	-0,004549	0,135030	10,047
		Média	0,252563	7,216
		Desvio Padrão	0,253661	-

12.B. Estudo Paramétrico 12

Os resultados que em seguida se apresentam, correspondem ao Estudo Paramétrico 12 (4.2.3.2).

Tabela B110 – Melhor e pior ótimo, valor médio e desvio padrão de uma série de 10 corridas para diferentes valores de β e γ

β		γ									
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,5	MO	3,005580	3,010832	3,044376	3,003948	3,001748	3,051106	3,007667	3,026983	3,006529	3,014746
	PO	3,375716	3,388965	3,331532	3,271129	4,259143	3,477191	3,150300	3,531258	3,253041	3,136538
	\bar{X}	3,123603	3,106832	3,163917	3,088378	3,201352	3,178844	3,094274	3,178574	3,083829	3,069414
	σ	0,117432	0,118003	0,101429	0,085107	0,379549	0,136618	0,050727	0,164541	0,078907	0,048426
1	MO	3,036346	3,004325	3,015836	3,004935	3,025698	3,000174	3,025164	3,002355	3,005283	3,011368
	PO	3,158222	3,265509	3,256705	3,214325	3,299396	3,284949	3,441408	3,726381	3,600763	3,311806
	\bar{X}	3,036346	3,106548	3,112191	3,084603	3,095578	3,105288	3,129402	3,173657	3,087401	3,124684
	σ	0,044708	0,090289	0,096642	0,082529	0,083129	0,108860	0,133255	0,214011	0,182263	0,104310
1,5	MO	3,004946	3,003990	3,023329	3,004664	3,005179	3,002065	3,000054	3,008084	3,021882	3,001037
	PO	3,192899	3,380076	3,326639	3,232381	3,306860	3,327811	3,314414	3,155002	3,185534	3,271831
	\bar{X}	3,062149	3,077382	3,099325	3,089507	3,088086	3,086450	3,095889	3,065223	3,082400	3,114448
	σ	0,063778	0,114255	0,086740	0,080272	0,096298	0,117163	0,098413	0,047017	0,054777	0,072908
2	MO	3,003514	3,001628	3,002591	3,004111	3,001550	3,000604	3,000224	3,002046	3,000852	3,001742
	PO	3,080035	3,135755	3,151387	3,254752	3,156112	3,086344	3,161298	3,254376	3,136504	3,111922
	\bar{X}	3,030202	3,034401	3,052272	3,063211	3,036432	3,039193	3,039437	3,058430	3,046951	3,034889
	σ	0,024213	0,042489	0,041239	0,076461	0,047007	0,032529	0,046956	0,078803	0,048169	0,032342
2,5	MO	3,001482	3,006967	3,004523	3,000810	3,000191	3,015675	3,003868	3,000378	3,005996	3,000939
	PO	3,072795	3,084844	3,161608	3,168011	3,109549	3,289050	3,156902	3,128179	3,211086	3,097368
	\bar{X}	3,035024	3,043201	3,040025	3,053870	3,038735	3,095759	3,040683	3,056945	3,059571	3,026912
	σ	0,026061	0,027686	0,046512	0,060736	0,038788	0,086955	0,051531	0,051869	0,063652	0,032154
3	MO	3,001482	3,002410	3,001333	3,002478	3,010992	3,001731	3,002826	3,003753	3,003234	3,001332
	PO	3,072795	3,163920	3,152433	3,135595	3,129982	3,123703	3,135691	3,158411	3,107272	3,127436
	\bar{X}	3,035024	3,037529	3,036328	3,081069	3,063100	3,052649	3,043507	3,056085	3,039672	3,044868
	σ	0,026061	0,060768	0,048267	0,121213	0,044687	0,034677	0,039935	0,053345	0,038027	0,049741
3,5	MO	3,000949	3,008745	3,003501	3,008271	3,011035	3,001580	3,003370	3,008639	3,006572	3,036731
	PO	3,019425	3,150872	3,140091	3,082353	3,276458	3,219566	3,209670	3,091023	3,073113	3,129320
	\bar{X}	3,021442	3,045899	3,060436	3,043323	3,070058	3,058243	3,057623	3,047545	3,034579	3,059161
	σ	0,021740	0,043170	0,046314	0,025272	0,088626	0,064594	0,066460	0,035354	0,022583	0,029551
4	MO	3,000359	3,008488	3,001980	3,008557	3,002550	3,007786	3,001904	3,001563	3,011107	3,004304
	PO	3,126885	3,171874	3,103457	3,270076	3,163823	3,138323	3,111779	3,175869	3,164563	3,075746
	\bar{X}	3,033648	3,065011	3,030805	3,094106	3,052220	3,061076	3,055810	3,043908	3,071405	3,042005
	σ	0,048099	0,048532	0,033073	0,086450	0,052764	0,046932	0,038330	0,053049	0,043435	0,027528
4,5	MO	3,001393	3,006090	3,006357	3,004773	3,004674	3,005206	3,003424	3,000209	3,001854	3,001972
	PO	3,118001	3,133280	3,111502	3,120665	3,159618	3,154916	3,102114	3,124522	3,138558	3,082254
	\bar{X}	3,038877	3,047787	3,051204	3,036909	3,061360	3,037453	3,047625	3,054792	3,040336	3,026277
	σ	0,040651	0,037170	0,037062	0,036596	0,055690	0,044777	0,034769	0,049681	0,051775	0,030412
5	MO	3,002248	3,008972	3,007961	3,001709	3,000678	3,012006	3,001112	3,015696	3,003409	3,003273
	PO	3,090695	3,119370	3,063781	3,190339	3,319514	3,226302	3,158076	3,366756	3,139473	3,088404
	\bar{X}	3,027847	3,045968	3,028389	3,052447	3,060733	3,081402	3,049056	3,071745	3,039686	3,042330
	σ	0,026080	0,038493	0,018062	0,056224	0,097175	0,064871	0,047878	0,106779	0,041939	0,035144

Tabela B111 – Melhor e pior ótimo, valor médio e desvio padrão de uma série de 10 corridas para diferentes valores de β e γ (continuação)

β		γ									
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
5,5	MO	3,007486	3,000286	3,004582	3,001374	3,002082	3,012006	3,001956	3,026356	3,008109	3,000900
	PO	3,124565	3,354682	3,111718	3,351918	3,264947	3,226302	3,105110	3,158600	3,156523	3,271580
	\bar{X}	3,055228	3,081411	3,040832	3,091673	3,097792	3,081402	3,042067	3,093604	3,054958	3,054502
	σ	0,042476	0,103949	0,035276	0,109317	0,091342	0,064871	0,036215	0,043596	0,045269	0,090227
6	MO	3,001512	3,002482	3,003224	3,003308	3,002028	3,006561	3,004595	3,004421	3,002182	3,004977
	PO	3,115750	3,257310	3,096366	3,142307	3,058737	3,254859	3,294544	3,150319	3,173509	3,188211
	\bar{X}	3,035029	3,062343	3,051600	3,068460	3,028199	3,088454	3,101380	3,064618	3,066427	3,060045
	σ	0,042340	0,076078	0,027924	0,048117	0,020318	0,092602	0,096898	0,053897	0,068096	0,062209
6,5	MO	3,003443	3,000489	3,002558	3,007065	3,000974	3,004468	3,003236	3,000994	3,005882	3,001883
	PO	3,186410	3,101786	3,152214	3,161841	3,161896	3,174503	3,275767	3,161103	3,296789	3,405995
	\bar{X}	3,039789	3,046331	3,079753	3,062903	3,048618	3,072436	3,077566	3,057659	3,101398	3,070164
	σ	0,055802	0,034404	0,059440	0,052312	0,053226	0,058760	0,086449	0,057187	0,101540	0,121546
7	MO	3,003777	3,004425	3,005070	3,006205	3,003713	3,015032	3,013472	3,005078	3,007283	3,001549
	PO	3,075078	3,112177	3,143894	3,159078	3,306555	3,428278	3,270326	3,129257	3,175117	3,139955
	\bar{X}	3,032474	3,046748	3,057753	3,059114	3,052924	3,124448	3,089384	3,047355	3,064882	3,038313
	σ	0,030058	0,041041	0,049779	0,053572	0,091783	0,152749	0,079052	0,043565	0,054898	0,042130
7,5	MO	3,008939	3,005803	3,012311	3,010471	3,004302	3,002744	3,003688	3,029894	3,006367	3,007281
	PO	3,190947	3,266118	3,374017	3,265156	3,326251	3,271150	3,299810	3,200779	3,109480	3,168992
	\bar{X}	3,059507	3,071282	3,096592	3,077099	3,112576	3,098662	3,120202	3,083896	3,051739	3,073463
	σ	0,058475	0,077320	0,108970	0,072343	0,116486	0,079983	0,117224	0,057703	0,029586	0,054561
8	MO	3,011061	3,014296	3,000897	3,000278	3,010536	3,006295	3,018462	3,004842	3,003928	3,007121
	PO	3,109297	3,169608	3,226794	3,167470	3,175760	3,205357	3,385627	3,156485	3,415499	3,116755
	\bar{X}	3,044983	3,063995	3,069928	3,079778	3,077383	3,110872	3,116192	3,055592	3,087604	3,039408
	σ	0,028310	0,060135	0,071201	0,066478	0,053420	0,059627	0,105057	0,046345	0,125595	0,041633
8,5	MO	3,001805	3,014282	3,007887	3,006369	3,026536	3,000125	3,002337	3,004474	3,006834	3,003766
	PO	3,207160	3,346313	3,299814	3,141646	3,312862	3,133060	3,184032	3,235524	3,301218	3,208509
	\bar{X}	3,056004	3,103125	3,135553	3,063083	3,109489	3,046037	3,066422	3,058800	3,074128	3,087310
	σ	0,068940	0,105228	0,208460	0,050631	0,085144	0,040770	0,060095	0,076159	0,090043	0,067664
9	MO	3,000077	3,012012	3,000912	3,005861	3,003801	3,001316	3,006289	3,022940	3,000107	3,006296
	PO	3,098744	3,098468	3,503257	3,265136	3,296061	3,243551	3,170901	3,335167	3,120748	3,448754
	\bar{X}	3,033868	3,059365	3,132254	3,091825	3,121119	3,075785	3,079611	3,125566	3,056173	3,113849
	σ	0,028886	0,033248	0,161680	0,089791	0,090514	0,069929	0,056724	0,114047	0,049300	0,151231
9,5	MO	3,000453	3,002741	3,010194	3,007667	3,000930	3,002330	3,002844	3,010430	3,012040	3,006624
	PO	3,116474	3,064185	3,158309	3,127298	3,108552	3,217779	3,594066	3,262105	3,124695	3,162259
	\bar{X}	3,035275	3,024825	3,060736	3,060995	3,038015	3,066821	3,130533	3,055323	3,049575	3,047821
	σ	0,039825	0,021744	0,057074	0,042765	0,036450	0,061900	0,186878	0,074180	0,041338	0,043915
10	MO	3,005749	3,016807	3,005968	3,000890	3,012448	3,029304	3,013491	3,002003	3,001288	3,001857
	PO	3,231556	3,167457	3,184705	3,933710	3,248509	3,235000	3,373766	3,154090	3,271528	3,177038
	\bar{X}	3,075190	3,066192	3,068525	3,149190	3,073995	3,117863	3,100358	3,071773	3,080535	3,045755
	σ	0,073279	0,046588	0,065509	0,279787	0,087099	0,077783	0,110926	0,054248	0,093803	0,051618

Anexo C

Estudos de Otimização

O presente anexo é dedicado à apresentação integral de resultados decorrente dos estudos de otimização de estruturas realizados. Esta abordagem, decorre da necessidade de otimizar e em última análise economizar, espaço no documento principal, por forma a não ultrapassar os limites impostos por regulamento, nem maçar o leitor com estudos de menor importância.

Em termos de estrutura, a cada estudo realizado, e sempre que necessário, é reservado um tópico para exposição dos resultados obtidos. A análise dos mesmos é feita exclusivamente no documento principal.

1.C. Estudo de Otimização 1

Os resultados que em seguida se apresentam, correspondem ao Estudo de Otimização 1 (4.3).

Tabela C1 - Resultados obtidos para uma série de 10 corridas, 50 indivíduos e 50 iterações no estudo de otimização de uma viga (CFFF) com dois gradientes e dois potenciais elétricos distintos aplicados

Corrida	X_1^*	X_2^*	X_3^*	X_4^*	$f(X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*)$	t_{CPU} [s]
1	6	5	4	2	2,099E-20	580,203
2	6	5	4	2	1,762E-20	696,078
3	5	6	2	3	1,630E-20	796,547
4	6	5	3	2	1,542E-20	851,953
5	6	5	1	2	9,630E-21	967,000
6	5	6	5	1	9,044E-21	1012,375
7	6	5	2	1	7,880E-21	1109,172
8	6	5	5	1	1,230E-20	1259,375
9	5	6	2	3	1,589E-20	1339,672
10	6	5	1	2	1,142E-20	1400,343
Média					1,365E-20	1001,272
Desvio Padrão					4,246E-21	-

Tabela C2 - Resultados obtidos para uma série de 10 corridas, 50 indivíduos e 50 iterações no estudo de otimização de uma viga (CCFF) com dois gradientes e dois potenciais elétricos distintos aplicados

Corrida	X_1^*	X_2^*	X_3^*	X_4^*	$f(X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*)$	t_{CPU} [s]
1	5	4	3	2	7,954E-28	492,953
2	6	3	2	5	3,487E-28	587,578
3	5	4	3	5	2,602E-29	672,828
4	2	3	2	3	4,770E-27	705,453
5	4	2	2	4	1,145E-26	770,641
6	3	6	3	2	3,562E-28	872,922
7	5	3	3	4	1,051E-27	943,140
8	4	6	1	2	2,832E-28	1029,641
9	5	3	2	3	5,864E-28	1041,844
10	4	5	4	3	5,750E-28	1211,531
Média					2,024E-27	832,853
Desvio Padrão					3,584E-27	-

Tabela C3 - Resultados obtidos para uma série de 10 corridas, 50 indivíduos e 50 iterações no estudo de otimização de uma viga (SSFF) com dois gradientes e dois potenciais elétricos distintos aplicados

Corrida	X_1^*	X_2^*	X_3^*	X_4^*	$f(X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*)$	t_{CPU} [s]
1	6	5	4	2	2,850E-21	529,906
2	5	6	1	2	1,095E-21	632,062
3	6	5	4	1	2,482E-21	734,907
4	6	5	1	5	1,377E-21	794,468
5	5	6	2	4	2,841E-21	831,672
6	6	5	1	2	1,277E-21	938,485
7	6	5	2	1	9,481E-22	1015,968
8	6	5	2	3	2,297E-21	1105,000
9	5	6	2	1	1,367E-21	1262,860
10	6	5	2	3	2,106E-21	1253,312
Média					1,864E-21	909,864
Desvio Padrão					7,314E-22	-

Tabela C4 - Resultados obtidos para uma série de 10 corridas, 50 indivíduos e 50 iterações no estudo de otimização de uma viga (CSFF) com dois gradientes e dois potenciais elétricos distintos aplicados

Corrida	X_1^*	X_2^*	X_3^*	X_4^*	$f(X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*)$	t_{CPU} [s]
1	4	1	2	1	1,529E-23	513,421
2	2	4	4	1	1,177E-23	611,516
3	2	1	1	5	1,978E-24	690,500
4	6	2	2	6	9,008E-23	758,719
5	3	1	1	3	1,124E-24	855,672
6	6	5	3	1	4,233E-22	932,109
7	2	4	1	3	5,685E-24	979,609
8	6	2	2	6	5,453E-27	1013,157
9	1	4	1	5	3,853E-22	1207,406
10	2	5	4	1	3,242E-22	1292,687
Média					1,259E-22	885,480
Desvio Padrão					1,773E-22	-