PROCESSOS DE RACIOCÍNIO ESPACIAL NUMA TAREFA DE INVESTIGAÇÃO COM POLIEDROS E MATERIAIS MANIPULÁVEIS

Lina Brunheira

Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa e UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

lbrunheira@eselx.ipl.pt

João Pedro da Ponte

Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

jpponte@ie.ulisboa

Resumo: Este artigo enquadra-se numa experiência de formação inicial com futuros professores e educadores. O objetivo é compreender de que forma as tarefas de investigação podem contribuir para o desenvolvimento do raciocínio espacial e quais os processos de raciocínio que promovem. Os dados foram recolhidos por registos áudio e vídeo e a sua análise incidiu nos processos de *construção, análise e transformação de modelos mentais e operações com modelos mentais*. O estudo sugere que o tipo de tarefas propostas, os recursos e as interações na sala de aula são condições relevantes para a ativação destes processos. No que respeita às tarefas, a realização de contagens de elementos dos poliedros e o estabelecimento de relações e justificações revelam-se promotores dos processos de raciocínio espacial; o material manipulável é importante como suporte, apoiando os processos de raciocínio espacial, mas a sua utilização deve ser considerada de modo a não reduzir demasiado o desafio cognitivo; e o contexto de trabalho colaborativo favorece a comunicação do raciocínio e a estruturação espacial.

Palavras-chave: Geometria; Raciocínio Espacial; Poliedros; Materiais manipuláveis; Ensino exploratório.

Introdução

A evolução da matemática no séc. XIX, onde a busca pelo rigor se traduziu na recusa das demonstrações apoiadas em figuras e na desconfiança sobre a perceção visual, contribuiu para a desvalorização da visualização (Veloso, 1998). Também o enfraquecimento da investigação na área da visualização, particularmente depois de a psicologia ter sido dominada pela corrente *behaviorista*, teve uma influência na sua desvalorização (Presmeg, 2006). Contudo, a evolução das perspectivas sobre a geometria que identificamos em matemáticos como Atiyah (1982) ou Malkevitch (2009), valorizando a sua componente visual, contribuíram para uma mudança de paradigma. O conceito de visualização, inicialmente muito associado à criação de imagens mentais (Zimmermann & Cunningham,1991), passou ser visto como uma forma de raciocínio baseado no uso de elementos visuais ou espaciais, mentais ou físicos, que visam a resolução de problemas ou demonstração de propriedades (Gutiérrez, 1996) ou representar e comunicar informação, pensar e desenvolver ideias anteriormente desconhecidas e avançar na sua compreensão (Arcavi, 2003). Surgem assim novas expressões que remetem para esta conceptualização, como "o raciocínio espacial", capaz de fornecer "não apenas o *input* para o raciocínio geométrico formal, mas também ferramentas cognitivas críticas para uma análise geométrica formal" (Battista, 2007, p. 844).

Sinclair et al. (2016) afirmam que na última década o raciocínio espacial tem merecido uma atenção crescente na investigação, quer no campo da educação matemática, quer das ciências cognitivas. Contudo, estes autores defendem a necessidade de mais investigação sobre a promoção de oportunidades de envolvimento em raciocínio espacial, tanto para alunos como professores, bem como as formas de avaliar e valorizar tal raciocínio. Nesse sentido, este artigo visa compreender, num contexto de formação inicial de professores, de que forma as tarefas podem contribuir para o desenvolvimento do raciocínio espacial e quais os processos de raciocínio envolvidos durante a sua resolução. Concretamente, procuraremos responder às seguintes questões: Quais os processos de raciocínio espacial em que os formandos se envolvem quando resolvem tarefas de contagem e estabelecimento de relações em classes de poliedros? De que forma estas tarefas, realizadas num contexto de ensino exploratório e com recurso a materiais manipuláveis, promovem a realização destes processos?

Raciocínio espacial e materiais manipuláveis

Gutiérrez (1996) e, mais recentemente, Sinclair et al. (2016), referem a existência de vários termos ou expressões (entre os quais raciocínio visual, pensamento espacial, imagens mentais, espaciais, visuais, etc.) que pretendem significar algo parecido e que têm em comum a atividade de imaginar objetos estáticos ou dinâmicos e atuar sobre eles (por exemplo, rodar, aumentar, etc.). Esta variedade de termos gera uma "confusão" que reflete a coexistência de diferentes correntes de investigação que se dedicam e este estudo.

Tomemos como referência a proposta de Battista (2007) que define raciocínio espacial como sendo a

> capacidade de 'ver', analisar e refletir sobre objetos espaciais, imagens, relações e transformações. O raciocínio espacial inclui gerar imagens, analisá-las para responder a questões sobre elas, transformar e operar sobre imagens, e manter as imagens ao serviço de outras operações mentais. (p. 843)

Pelo seu lado, Gutiérrez (1996) utiliza o termo visualização, mas a sua definição é muito próxima da anterior, pois concebe-a como um tipo de raciocínio baseado no uso de elementos visuais ou espaciais, igualmente desenvolvida com vista à resolução de questões, como problemas ou demonstração de propriedades. Para este investigador, este tipo de raciocínio integra quatro elementos principais: imagens mentais, representações externas, processos de visualização e capacidades de visualização.

As imagens mentais são o centro do raciocínio espacial. Gutiérrez (1996) define imagem mental como uma representação cognitiva de um conceito ou propriedade através de elementos visuais ou espaciais que assume constituir o elemento básico. No entanto, considera relevante ter ainda em conta outro tipo de representações que mobilizamos e se articulam com as imagens mentais: as representações externas, que correspondem a qualquer tipo de representação verbal ou gráfica de conceitos ou propriedades, incluindo retratos, desenhos, diagramas, etc. que ajudam a criar ou transformar as imagens mentais e a realizar raciocínio espacial. Para o autor, um processo de visualização é uma ação mental ou física que envolve imagens mentais. Existem dois processos: a interpretação visual da informação para criar as imagens mentais e a interpretação de imagens mentais para gerar informação, a qual se decompõe em três subprocessos: observação e análise de imagens mentais, transformação de imagens mentais noutras imagens mentais e a transformação de imagens mentais noutro tipo de informação.

Na perspetiva de Battista (2009), para que seja possível operar mentalmente com objetos geométricos (por exemplo, compará-los, decompô-los e analisá-los), é necessário que estes tenham sido abstraídos a um nível suficientemente profundo, o que envolve a estruturação espacial. A estruturação espacial é um tipo especial de abstração correspondente ao ato mental de construir uma organização ou uma configuração para um objeto ou conjunto de objetos. Inclui identificar unidades, relações entre as unidades e reconhecer que um subconjunto de objetos, devidamente repetidos, pode gerar todo o conjunto (Battista & Clements, 1996). A estruturação espacial está assim associada a um modelo mental, ou seja, uma versão visual, não-verbal, da situação (objeto, ação…) que tem uma estrutura isomórfica à estrutura percecionada da situação e que é ativada para interpretar e raciocinar sobre ela (Battista, 2007). Desta forma, podemos afirmar que o modelo mental resulta do conjunto das imagens mentais que capturam as propriedades percecionadas do objeto.

No caso de objetos tridimensionais, como explica Yamanskaya (citado por Gutiérrez, 1996), a criação das imagens que dão origem aos modelos (mentais) daqueles objetos só é possível a partir da acumulação de diferentes representações que são necessárias à sua construção e, quanto mais rico e diverso for o repertório de representações, mais fácil é a construção dos modelos. Mas a construção dos modelos mentais destes objetos implica ainda a coordenação e a integração de imagens correspondentes a partes desse objeto ou das suas vistas[1] (Battista & Clements, 1996). Contudo, como refere Gutiérrez (1996), frequentemente a única informação que os alunos têm sobre os sólidos é a partir das suas representações no plano, em particular dos manuais escolares. Estas representações fornecem uma informação parcelar pois usam habitualmente o mesmo tipo de perspetiva e variam pouco as posições dos sólidos, o que não favorece a construção de modelos mentais e justifica a necessidade de manipulação dos modelos tridimensionais.

Além da utilização de modelos tridimensionais de sólidos, há ainda a considerar o interesse da sua construção física. Como refere Guillén Soler (2004), a construção de modelos de sólidos conduz a uma análise primária dos seus elementos (vértices, arestas e faces), bem como da forma como se organizam localmente, e favorece uma contagem estruturada. O material utilizado na construção pode, inclusivamente, conduzir a diferenças na sua análise. Por exemplo, os modelos "abertos" podem facilitar que a atenção se foque nas arestas, ao contrário dos "fechados" que direcionam a atenção para as faces. Mais ainda, a construção destes modelos promove a perceção dos aspetos comuns e diferenças entre sólidos e a introdução das ideias que estão na "génese" das suas classes.

Metodologia de investigação

Opções metodológicas, participantes e recolha de dados

Os dados que apresentamos foram recolhidos durante o segundo ciclo de uma investigação baseada em design, na modalidade de experiência de formação (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer & Schauble, 2003), envolvendo uma turma de 25 formandos que frequentavam a disciplina de Geometria (2.º ano da Licenciatura em Educação Básica) lecionada pela primeira autora deste artigo. Habitualmente, o trabalho em aula desenvolvia-se a partir de tarefas consistentes com um ensino exploratório (Ponte, 2005) e realizadas de acordo com a dinâmica: lançamento da tarefa pela professora, seguida de trabalho em grupos de três a cinco elementos, apresentação e discussão coletiva, finalizando com uma sistematização. A turma mostrou-se sempre bastante empenhada e o ambiente de trabalho era muito bom. Os dados

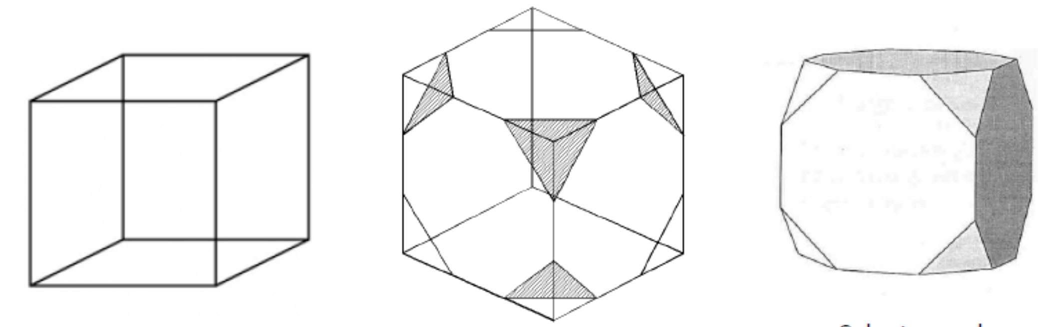
[1] Referimo-nos às projeções ortogonais do objeto, tal como Veloso (1998) descreve.

que apresentamos referem-se a um grupo de formandos que exibe habitualmente algumas dificuldades, tanto no domínio de conceitos trabalhados no ensino básico como na aquisição de novos conceitos e desenvolvimento de capacidades.

A recolha de dados foi feita a partir dos registos áudio e vídeo das aulas que foram ainda confrontados com a análise documental das produções escritas, muito embora não haja aqui referência a essas produções. Esta opção deriva do facto de os diálogos e os gestos captados nas imagens vídeo evidenciarem o raciocínio espacial dos participantes de uma forma mais clara. Como defendem Battista e Clements (1996), as ações físicas e mentais (neste caso explanadas em parte nos diálogos) tornam-se representações explícitas da estruturação dos objetos, um elemento fundamental do raciocínio espacial.

Neste artigo apresentamos dados resultantes da realização da tarefa *Sólidos platónicos truncados* (Figura 1). Para a resolução da tarefa, cada grupo tinha ao seu dispor peças encaixáveis (ver Figuras 2 a 11) para que pudessem construir os sólidos platónicos, uma classe que já haviam estudado com apoio deste material, bem como a classe dos anti-prismas. Optámos por esta tarefa pois ela envolve o trabalho com figuras tridimensionais que, na perspectiva de Gutiérrez (2017), é a área da matemática que implica uma maior exigência em termos do raciocínio espacial. Além disso, o facto de se partir de um tipo de sólido para gerar mentalmente outro é uma atividade que implica necessariamente a construção de imagens mentais, bem como a realização de operações e transformações de imagens mentais. Finalmente, este tipo de tarefa corresponde ao que Battista e Clements (1996) designam por tarefa de contagem ou enumeração que, como referem, influencia e é influenciada pela estruturação espacial. Por um lado, a estruturação espacial fornece o *input* e a organização para a contagem. Por outro, as tentativas de contagem geram frequentemente a estruturação ou restruturação espacial.

Sólidos platónicos truncados



Cubo

Cubo truncado

Imagina que vamos cortar um cubo junto de cada vértice por um plano, de modo a que a secção obtida seja um polígono regular, tal como mostra sequência de figuras que termina no cubo truncado.

1. No caso do cubo truncado, as faces correspondentes às secções são triângulos equiláteros e as restantes octógonos regulares. Observa os outros sólidos platónicos e diz como serão as faces dos sólidos platónicos truncados.
2. Quantos vértices, arestas e faces tem o cubo truncado? E os outros poliedros truncados? Preenche a tabela da página seguinte.
3. Observa os dados e compara-os. Estabelece as seguintes relações e procura justificá-las.

a. Qual a relação entre o número de vértices do sólido original e do sólido truncado? b. E entre o número de faces? c. E de arestas? Sugestão: Além de observares os valores, pensa na forma como chegaste até eles.

Figura 1 – Tarefa proposta (Adaptado de Projeto Matemática para Todos, s.d.)

Análise de dados

Para analisarmos o raciocínio espacial desenvolvido durante a atividade de contagem e estabelecimento de relações na classe dos sólidos platónicos, utilizamos um quadro de análise que construímos a partir das ideias de Battista (2009) e Gutiérrez (1996) sobre raciocínio espacial que, do nosso ponto de vista, se complementam.

Desta forma, consideramos que o raciocínio espacial inclui, por um lado, a *construção mental de imagens e modelos* sobre objetos espaciais e relações e, por outro, a *análise e realização de transformações e operações* entre objetos e relações usando as imagens e modelos mentais, ainda que se possam apoiar em representações externas (Tabela 1).

Tabela 1 – Processos de raciocínio espacial

Processos	Subprocessos
Construção dos modelos mentais	Interpretação visual da informação
	Identificação de subconjuntos do objeto
	Coordenação dos subconjuntos do objeto
	Integração dos subconjuntos do objeto
Análise e transformação de modelos mentais e operações com modelos mentais	Observação e análise de imagens mentais
	Transformação de imagens mentais noutras imagens mentais
	Transformação de imagens mentais noutro tipo de informação

A construção de modelos inclui a *interpretação visual da informação* (como perceber quais as características do plano de corte a partir das secções apresentadas), a *identificação de subconjuntos do objeto* (como decompor um sólido noutros sólidos ou em partes do sólido, como as faces), a *coordenação de subconjuntos do objeto* (implica identificar relações entre os subconjuntos, por exemplo, perceber se duas faces que se situam em subconjuntos diferentes são adjacentes ou partilham algum vértice) e *a integração dos subconjuntos do objeto* (que se traduz, por exemplo, na construção da imagem de um sólido a partir do conhecimento sobre a suas faces). A análise, transformação e operação com modelos mentais inclui a *observação e análise de imagens mentais* (conduz, por exemplo, a identificar o número de arestas em torno de um vértice), a *transformação de imagens mentais noutras imagens mentais* (como identificar qual a face resultante de uma secção do sólido por um determinado plano) e a *transformação de imagens mentais noutro tipo de informação* (por exemplo, generalizar que o número de vértices de um sólido platónico truncado corresponde ao produto do número de vértices do sólido platónico pelo número de arestas convergentes no mesmo vértice).

Resultados

Na aula anterior à realização da tarefa *Sólidos Platónicos Truncados*, a turma tinha estudado a classe dos sólidos platónicos, nomeadamente as propriedades que a caracterizam. Já nesta aula, a professora fez uma introdução da tarefa com foco na ideia de seccionar um sólido (desconhecida da maioria) e incentivou à descoberta de novos sólidos e das relações entre si. Nesta secção, apresentamos e analisamos dados de três episódios ocorridos durante a resolução da tarefa em grupos. Os episódios ocorreram sequencialmente na mesma aula, sem interrupção para trabalho coletivo, e são representativos dos aspetos e questões que emergiram no grupo.

Episódio A

Sandra, Vânia, Afonso e Mónica estão numa fase inicial da resolução da tarefa e estão a contar o número de faces, vértices e arestas de um cubo truncado. No diálogo que se segue discutem o número de arestas:

Sandra: Dá-me 40. 3 e 3 são 6, mais 6 são 12 [contou as arestas das faces triangulares no topo]. 12 + 12 são 24 [juntou às da base]. 25, 26, 28, 28 [circunda uma face lateral, figuras 2, 3 e 4], 29, 30, 31, 32 [outra], 33,34,35,36 [outra], 37, 38, 39, 40! [a 4ª face lateral].

Figuras 2, 3, 4 – Sandra conta as arestas de um cubo truncado a partir do cubo

Sandra: É o número de arestas do cubo mais 24 porque é o número de arestas que se acrescenta. 12 + 12, 24.

Vânia: Tem de ser 48. Quanto é que vos deu as arestas?

Afonso: 40.

Vânia: A nós deu-nos 48.

Afonso: Repara, quantas arestas é que tu já tens?

Vânia: Nós não fizemos assim. Tu tens em cada face um octógono. Então sabes que são 8 arestas em cada lado, então fazes 8, 8, 8, 8, 8, 8 [aponta para cada face do sólido]. 6 vezes 8.

Afonso: Mas a nós deu-nos 40. Só se nos enganámos.

Sandra: Acho que faltam os de cima [volta a repetir o que fizeram]. Esquecemo-nos de contar as de cima e as de baixo que são 4+4, 8. Dá 48.

Afonso: Não! Mas ao contares estas já estás a contar as de cima! Logo é 40.

Neste momento, a professora passa pelo grupo e alerta para o que diz o Afonso:

> **Professora**: Reparem que isto [apontando para as arestas do modelo físico] é só uma aresta!
>
> **Sandra**: Então ainda dá menos do que 40!

Sandra e o Afonso voltam ao cubo, contam as arestas (12):

> **Sandra** e **Afonso**: Então 12 + 24. Dá 36!

Neste episódio podemos observar como o mesmo objeto pode ser estruturado de formas diferentes, o que é evidenciado pela explicitação das contagens. As ações de Sandra e Afonso sugerem um modelo mental que resulta da *identificação de subconjuntos do objeto*: a composição das faces triangulares (e respetivas arestas) com as arestas do cubo que surgem associadas às arestas das quatro faces laterais. Contudo, a *integração* dos vários elementos não é correta devido a um problema de *coordenação* — não identificam inicialmente que estão a duplicar a contagem de quatro arestas. Já Vânia e Mónica (que não intervém neste diálogo apesar de estar a trabalhar com a colega) revelam um modelo que resulta também da *identificação de subconjuntos do objeto*: a composição de 6 octógonos e respetivas arestas, o que não requer a contagem separada das arestas das faces triangulares. No entanto, também este par erra na contagem pelo mesmo problema identificado no raciocínio dos colegas — a coordenação dos 6 octógonos que têm 12 arestas em comum.

Apesar dos erros, Sandra já havia identificado que o número de arestas do sólido truncado é a soma do número de arestas do sólido original com o número de arestas que resultam da secção. Esta relação resulta da *transformação de imagens mentais noutro tipo de informação* e, curiosamente, é a sua aplicação e o confronto de resultados diferentes que os leva a repensar as suas estratégias e a restruturar o sólido. Há ainda a referir que, se o material disponível foi fundamental para realizar as contagens, possibilitando a realização de ações que explicitam o modelo mental, as diferenças entre o modelo físico e o sólido geométrico (nomeadamente a existência de arestas que se encaixam mas não se "fundem") levaram Vânia e Mónica a fazer uma interpretação visual da informação errada.

Episódio B

Afonso e Mónica estão a determinar o número de faces, vértices e arestas de outros sólidos truncados sobre os quais não existe qualquer representação externa. No início deste episódio estão a analisar o icosaedro truncado:

> **Afonso**: O número de vértices, ou seja 12, vezes 5. Percebes porque é que é?
>
> **Mónica**: Não.
>
> **Afonso**: Vamos fazer com este [usa o modelo do octaedro]. Então é assim: cada vértice, quando tiver a face truncada[2], essa face vai ficar com o número de lados que é o número de arestas que converge nesse vértice. E depois só temos de multiplicar pelo número de vértices.
>
> **Mónica**: Ah! Já percebi.

[2] Para simplificar, consideremos que a expressão "face truncada" corresponde à nova face que se obtém quando o poliedro é truncado.

Neste diálogo é percetível que Afonso já encontrou uma relação entre o número de vértices do sólido original e do sólido truncado e explica-a a Mónica. Esta relação pressupõe a construção de uma imagem mental da face truncada em que os vértices da nova face se situam nas arestas que convergem num vértice do poliedro original, ou seja, a *transformação de imagens mentais noutras imagens mentais* que é apoiada pela utilização do material. Ao encontrar a relação referida, Afonso procede à *transformação de imagens mentais noutro tipo de informação*. A utilização desta expressão é representativa de uma situação em que é a estruturação espacial do sólido que determina a contagem e não o contrário.

No próximo passo, vão analisar o dodecaedro truncado, mas começam por registar o número de vértices do dodecaedro. Mónica segura no sólido e Afonso conta (Figura 5):

Afonso: 1, 2, 3, 4, espera. Já contaste este?

Figuras 5, 6 e 7 – Mónica e Afonso contam os vértices do dodecaedro

Afonso: Põe assim que é mais fácil [Figura 6]. Estão 5 aqui e 5 aqui [pentágono na base e no topo]. … 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 [Figura 7]. OK 10. Então são…

Mónica: 20.

Afonso: 5, 5, 10. Sim, são 20.

Afonso: Agora número de vértices do sólido truncado… é só fazer 5 vezes 20. Vamos ver porquê. O número de arestas que converge…

Mónica: É 3, agora é 3.

Afonso: Ah, pois é, agora é triângulos [a face truncada]. 60.

Mónica: Então, número de faces do sólido truncado. Então este é 12. Somar as faces truncadas 20. 20+12.

Nesta interação, vemos que a determinação do número de vértices do dodecaedro truncado surge naturalmente da relação encontrada e Mónica parece encontrar sentido nessa relação que Afonso lhe explicou, já que é ela que corrige o colega ao dizer que deve multiplicar por 3 e não por 5. Curiosamente, o que parece ser mais desafiante é a contagem dos vértices do sólido original. De facto, o dodecaedro é o poliedro regular que tem mais vértices e é importante, mais do que nos outros sólidos, encontrar uma organização mental que nos permita realizar a contagem eficazmente. A primeira tentativa deste par foi percorrer, aparentemente sem critério, todos os vértices, uma abordagem que foi rapidamente abandonada. A estratégia que usaram depois mostra que, por um lado, a posição do modelo físico é relevante, em particular pelo posicionamento de uma face na horizontal, como se tratasse de uma base. Por outro lado, a forma de contar mostra que o modelo mental que estão a construir resulta da *identificação dos subconjuntos do objeto*: os 5 vértices da face topo, os 5 vértices da face "base" e os 10 vértices que se encontram na zona central do poliedro e que formam uma espécie de ziguezague. Desta forma, neste caso é a tarefa de contagem e as ações que desencadeia, nomeadamente fixando a posição do modelo e percorrendo organizadamente os elementos, que sugerem uma estruturação do sólido.

Ainda neste episódio vemos que o par de formandos já percebeu que para contar o número de faces de um sólido truncado tem de adicionar o número de faces do sólido original com o seu número de vértices (de novo *transformação de imagens mentais noutro tipo de informação*).

Episódio C

Mónica e Afonso identificaram todas as relações pedidas e o número de faces, vértices e arestas dos poliedros truncados. Contudo, a professora pediu-lhes para completarem a resposta à primeira questão, sobre o tipo de faces de cada novo poliedro, uma vez que só tinham referido a face que se obtém ao truncar o sólido e omitiram a forma da face original depois de transformada. No diálogo seguinte estão a analisar o tetraedro truncado:

> **Afonso**: É um quadrilátero assimétrico. Não sei. Quando se corta o tetraedro fica assim [Figura 8]… Não sei dizer bem qual é o quadrilátero…


Figuras 8 e 9 – Afonso e a professora simulam como ficam as faces triangulares quando o cubo é truncado

> **Professora**: Ah! Já estou a perceber. A outra face fica um quadrilátero, qual é esse quadrilátero?
>
> **Afonso**: Pois é essa a questão. A Mónica diz que é um paralelogramo.
>
> **Professora**: Mas não se esqueçam que o que acontece a este vértice vai acontecer aos outros também! Portanto, têm de fazer assim [Mónica coloca as mãos também, Figura 17]

Figura 10 – Mónica simula com a professora como fica uma face triangular depois de truncar três vértices

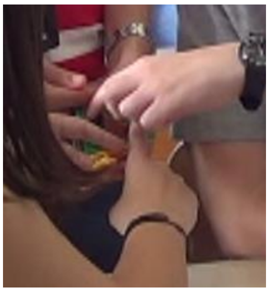


Figura 11 – Afonso conta o número de arestas da nova face

> **Afonso**: Ah, sim, já percebi. Tem 1, 2, 3, 4, 5, 6 [contorna a figura formada, Figura 11]. OK, já percebi. É um… pentágono? Não, um hexágono.
>
> **Professora**: Mas agora pensem lá… O Afonso contou um a um, usando o seu dedo. Não existe uma lógica que me permita perceber quantos lados é que eu vou ter?
>
> **Afonso**: Ah! Basta contar o número de vértices e o número de lados já existentes!
>
> **Professora**: Ou seja? Isso não é o mesmo número? Ou seja, aqui [tetraedro] tens 3 lados e 3 vértices. Passaste a ter?
>
> **Afonso**: Um hexágono, sim.
>
> **Professora**: É importante a estrutura da figura para nós percebermos o que está a acontecer.

Num outro momento, a professora passa pelo grupo e Afonso aborda-a:

> **Afonso**: Nós estivemos a ver a figura e deu-nos em todos um hexágono.
>
> **Professora**: Em todos?
>
> **Afonso**: Sim.
>
> **Professora**: Então vamos lá pensar naquela relação que tu disseste há bocado. Portanto, quando temos triângulos nas faces vamos passar a ter hexágonos. Foi o que aconteceu no tetraedro, e aqui [octaedro]?
>
> **Afonso**: Também é um triângulo, vai acontecer o mesmo.
>
> **Professora**: Portanto ficamos com hexágonos. No icosaedro idem. E no dodecaedro?
>
> **Afonso**: Também porque convergem 3 arestas num vértice. Ah não! Pois é, não pode ser. Então fica… é multiplicar, não? 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. É um…
>
> **Mónica**: Já falámos disso aqui.
>
> **Professora**: Então qual é o prefixo de 10…

Anteriormente, Afonso havia determinado corretamente o tipo de face que surge nos poliedros quando os truncamos e justificou o número de vértices dessa face. Esta ação implica uma *transformação* do modelo mental do poliedro original, através da *transformação de imagens mentais noutras imagens mentais*, dando origem a um novo modelo — o do poliedro truncado. Contudo, os formandos não tiveram o mesmo sucesso em transformar mentalmente as faces existentes. No caso do tetraedro, foi necessária uma simulação com materiais e a realização de ações físicas para contar o número de arestas do hexágono resultante, ou seja, foi necessário ir além de uma operação mental. Mesmo depois da análise do tetraedro truncado, não foi fácil generalizar a relação pois Afonso considerava que seriam sempre hexágonos e foi a professora que lhe sugeriu repensar esta conclusão.

Desta forma, podemos perceber que mesmo tendo descoberto anteriormente todos os valores corretos para o número de arestas, vértices e faces dos poliedros truncados e um dos tipos de faces, estes formandos não tinham ainda uma estruturação completa dos sólidos, mas sim uma estruturação local, focada nas faces truncadas.

Discussão

A análise da forma como os participantes resolveram a tarefa revelou vários aspetos sobre os processos de raciocínio espacial em que se envolveram. Verificamos que os futuros professores construíram modelos mentais dos sólidos platónicos e dos sólidos platónicos truncados, analisaram, transformaram e operaram com estes modelos, o que já era esperado. Analisando mais detalhadamente estes processos, percebemos que o trabalho realizado envolveu ainda todos os subprocessos que considerámos no quadro de análise, ainda que com níveis de desafio diferentes.

Na *construção de modelos mentais*, a *interpretação visual da informação* e a *identificação de subconjuntos dos objetos* que, integrados, resultassem no objeto completo parecem ser processos que os participantes realizaram com alguma facilidade; já a *coordenação dos subconjuntos* constituiu um desafio maior, uma vez que surgiram alguns erros de duplicação de arestas (Episódio A). Para a superação deste desafio contribuíram especialmente a manipulação dos modelos físicos e a explicitação verbal dos modelos mentais que tinham dos sólidos, o que permitiu corrigir a interpretação errada de duas formandas. Na construção dos modelos mentais, destacamos ainda como o mesmo objeto pode ser estruturado de formas diferentes (Episódio A) e que, por vezes, a estruturação dos objetos é apenas local, ou seja, pode não existir um modelo para todo o objeto mas apenas de partes do objeto, sem haver integração (Episódio C).

Do ponto de vista da *análise, transformação e operação sobre os modelos mentais*, consideramos que a *observação e análise de imagens mentais* foi um processo realizado com sucesso na maioria das vezes, o que contribuiu para a *transformação de imagens mentais noutro tipo de informação* — neste caso, a explicitação das relações entre os elementos dos sólidos. Já a *transformação de imagens mentais noutras imagens mentais* assume diferentes níveis de dificuldade, tal como vimos na determinação da forma das faces do sólido truncado (Episódio C), o que provavelmente decorre da complexidade do objeto e da operação a realizar. No entanto, destacamos que, mais uma vez, foi determinante a manipulação física dos sólidos e a explicitação verbal dos modelos mentais para o raciocínio correto.

Assim, no que diz respeito à utilização dos materiais manipuláveis, confirma-se a perspetiva de que constituem representações externas que, tal como refere Gutiérrez (1996), ajudam a realizar raciocínio espacial. Concretamente, na análise dos sólidos platónicos, os materiais favoreceram *a identificação de subconjuntos do objeto* por permitirem manipular essas representações colocando-as em posições mais favoráveis à organização da contagem (Episódio B) e realizar simulações que apoiam a construção dos modelos mentais dos novos sólidos através da transformação de imagens mentais noutras imagens mentais (Episódio C).

Apesar das vantagens reconhecidas, há alguns aspetos a ressalvar. Em primeiro lugar, como referem ainda Sarama e Clements (2016), embora forneçam suporte e mediação, os materiais não "carregam" diretamente as ideias matemáticas subjacentes, pelo que é necessário estar atento ao entendimento que os indivíduos fazem dos recursos. Em segundo lugar, é tão importante saber como e quando usar os materiais, como perceber quando devemos limitar a sua utilização. Nesta tarefa, a existência de modelos físicos para os sólidos platónicos e a inexistência do mesmo tipo de modelo para os truncados obrigou a um trabalho mental que não seria realizado se existissem os modelos para todos os sólidos. Este é um aspeto importante para o raciocínio espacial e que pode depender de individuo para indivíduo, pelo que cabe ao professor estar atento às necessidades de cada um.

Finalmente, centremo-nos no papel da tarefa. Tal como referem Battista e Clements (1996), a atividade influencia e é influenciada pela forma como os indivíduos estruturam os objetos. Neste caso, parece-nos que a mobilização de vários processos de raciocínio espacial foi particularmente promovida por alguns fatores: a complexidade dos sólidos utilizados e da operação de secção por um plano que deve ser adequada aos indivíduos a que se destina, mantendo um nível de desafio cognitivo elevado mas alcançável; o pedido do número de faces, vértices e arestas que, associado à complexidade dos objetos, implica a sua estruturação; o estabelecimento de relações e sua justificação que reforça a necessidade de estruturação.

Além do enunciado da tarefa, temos a forma como foi realizada. Como os diálogos mostram, a interação entre os participantes com a comunicação dos seus raciocínios foi um elemento determinante para o sucesso da atividade. Como mostra o episódio A, o confronto de respostas diferentes resultou na revisão do raciocínio dos futuros professores ou no seu enriquecimento, decorrente da diversidade de perspetivas. Também o episódio C, em que os formandos interagem com a professora, mostra a importância do seu apoio para ultrapassar erros de interpretação e raciocínio e reorientar a sua análise com base em estratégias produtivas. De facto, apesar do raciocínio espacial apelar a uma atividade centrada em imagens mentais, eventualmente mais difíceis de partilhar, sublinhamos a relevância do trabalho de natureza exploratória (Ponte, 2005), com uma forte componente de discussão e negociação de resultados que se revela fundamental.

Conclusão

O desenvolvimento do raciocínio espacial envolve a realização de processos associados à construção, análise, transformação de modelos mentais e operações com modelos mentais (Battista, 2009; Gutiérrez, 1996). Este estudo sugere que há várias condições que são relevantes para a ativação destes processos, em particular, no que respeita ao tipo de tarefas propostas, os recursos disponibilizados e as interações na sala de aula. No que respeita às tarefas, a seleção dos sólidos e das operações mentais deve manter o nível de desafio cognitivo elevado, mas alcançável; a realização de contagens de elementos dos poliedros e o estabelecimento de relações e justificações revelam-se promotores dos processos de raciocínio espacial; o material manipulável é importante como suporte, mas a sua utilização não deve diminuir o desafio cognitivo, nomeadamente, substituindo ou sobrepondo-se às imagens mentais; e o contexto de trabalho colaborativo favorece a comunicação do raciocínio que, por sua vez, estimula a estruturação e restruturação espacial dos objetos.

Referências

Atiyah, M. (1982). What is geometry? The 1982 Presidential Address. *The Mathematical Gazette, 66*(437), 179-184.

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843-908). Greenwich, CN: Information Age.

Battista, M. T. (2009). Highlights of research on learning school geometry. In T. V. Craine & R. Rubenstein (Eds.), *Understanding geometry for a changing world* (pp. 91-108). Reston, VA: NCTM.

Battista, M. T., & Clements, D. H. (1996). Students' understanding of three-dimensional rectangular arrays of cubes. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(3), 258-292.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, *32*(1), 9–13.

Guillén Soler, G. (2004). El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos: describir, clasificar, definir y demostrar como componentes de la actividad matemática. *Educación Matemática, 16* (3), 103-125.

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. In L. Puig & A. Gutierrez (Eds.*), Proceedings of the 20th PME International Conference,* (Vol. 1, pp. 3-19). Valencia: Spain.

Malkevich, J. (2009). What is geometry? In T. V. Craine & R. Rubenstein (Eds.), *Understanding geometry for a changing world* (pp. 3-16). Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática*. Lisboa: APM e IIE.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Presmeg, N. C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. In A. Gutiérrez, P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 205-235). Rotterdam: Sense.

Projecto Matemática para Todos (s.d.). *Investigações na sala de aula: Propostas de trabalho*. Lisboa: APM

Sarama, J. & Clements, D. H. (2016). Physical and virtual manipulatives: what is "concrete"? In P. S. Moyer-Packenham (Ed.) *International Perspectives on Teaching and Learning Mathematics with Virtual Manipulatives* (pp. 71-93). Cham: Springer.

Sinclair, N., Bussi, M. G. B., De Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A., & Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: An ICME-13 survey team report. *ZDM Mathematics education*, *48*(5), 691-719.

Veloso, E. (1998). *Geometria: Temas actuais.* Lisboa: IIE.

Zimmermann, W., & Cunningham, S. (1991). *Visualization in teaching and learning mathematics*. Washington, DC: Mathematical Association of America.