# Definir figuras geométricas: uma experiência de formação com futuras professoras e educadoras

## Defining geometric figures: a teacher education experiment with prospective elementary and infant teachers

Lina Brunheira
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa
UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal
lbrunheira@eselx.ipl.pt

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal
jpponte@ie.ulisboa.pt

***Abstract.*** This article reports a research concerning a prospective elementary and infant teachers education experiment, in a geometry course in the 2nd year of studies of a degree in education. The subject of this study is the construction of definitions, a process developed through working on exploratory tasks. Specifically, we seek to know which features of definitions of geometric figures do prospective teachers attend to when selecting and constructing definitions and how the spatial and geometric structuring of the figures relates to the process of defining. Data was gathered from the participants' reports, audio and video records of classroom discussions on definitions of quadrilaterals and of parallelepipeds. The results show that initially the participants had misconceptions about definitions, just focusing on the necessary properties of the figures. The work developed led them to consider the sufficiency and inclusiveness of the condition. The participants constructed mostly correct but not economic definitions, mobilizing a deeper knowledge of the figures. The spatial and geometric structuring of the figures influenced the process of defining, but also evolved with this activity. Finally, the construction of definitions in the final stage of the study of figures promoted the articulation between the definitions and their classification.
*Keywords*: geometry; quadrilaterals, geometric reasoning; structuring; defining; prospective teacher education.

***Resumo***. Este artigo relata uma investigação envolvendo uma experiência de formação com futuras professoras e educadoras na unidade curricular de Geometria do 2.º ano de

uma licenciatura em educação básica. O tema da investigação é a construção de definições, um processo que foi promovido por um ensino de natureza exploratória. Especificamente, pretendemos saber quais as características sobre a definição de figuras geométricas a que os futuros professores atendem quando selecionam e constroem definições e como se relaciona a estruturação espacial e geométrica das figuras com o processo de definir. Os dados foram recolhidos por registos áudio e vídeo das aulas e das produções escritas das formandas sobre as definições de quadriláteros e do paralelepípedo. Os resultados mostram que, inicialmente, as formandas tinham uma conceção muito limitada do que é uma definição, restringindo-se às propriedades necessárias. Com o trabalho desenvolvido passaram a considerar o caráter suficiente e inclusivo da condição apresentada. Construíram definições tendencialmente corretas mas não económicas, mobilizando um conhecimento mais profundo das figuras. A estruturação geométrica e espacial influenciou o processo de definir, mas evoluiu igualmente com esta atividade. Finalmente, a construção de definições como etapa final do estudo das figuras promoveu a articulação entre as definições e sua classificação.
*Palavras-chave*: geometria; quadriláteros; raciocínio geométrico; estruturação; definir; formação inicial de professores.

(Recebido em julho de 2017, aceite para publicação em janeiro de 2018)

## Introdução

As definições têm um papel decisivo na matemática. Como refere Veloso (1998), "sem definições não existe matemática, nem é possível a comunicação matemática" (p. 375). Contudo, na sua opinião, em geometria existe uma tradição que apelida por "definomania", que consiste numa preocupação excessiva em apresentar de início todos os termos ou conceitos que irão ser utilizados no trabalho posterior. No seu entender, os conceitos devem ser construídos de forma lenta e progressiva, em vez de se impor artificialmente definições que, ao contrário do que se pensa, muitas vezes têm apenas um carácter relativo. Os alunos devem familiarizar-se progressivamente com as definições, o que deve resultar da sua experiência matemática em vez de a preceder. Uma prática contrária a esta orientação leva os alunos a memorizar as definições, que acaba por conduzir a dificuldades em raciocinar de acordo com elas (De Villiers, Govender & Patterson, 2009; Mariotti & Fischbein, 1997).

Uma perspetiva que procura contrariar este problema consiste na valorização do processo de definir. Para De Villiers (1998), definir é um processo matemático crucial na compreensão dos conceitos em geometria e recorda Freudenthal (1973) que se opunha a um ensino da geometria que priva os alunos dessa oportunidade. Também Mariotti e Fischbein (1997) consideram o processo de definir como uma componente do raciocínio geométrico, pelo que defendem a sua presença nas aulas de geometria. Pelo seu lado, Zazkis e Leikin (2008) notam que, para que os professores possam contemplar este processo nas suas aulas, devem ser nele proficientes, pelo que este deve integrar a formação inicial. Leikin e Zazkis (2010) referem ainda que as ideias dos professores sobre definição afetam a forma como apresentam os conceitos matemáticos aos alunos, pelo que é importante dar-lhes atenção durante a sua formação, quer do ponto de vista matemático, quer didático.

Numa revisão de estudos recentes, Sinclair et al. (2016) indicam que, nos últimos anos, têm surgido alguns trabalhos respeitantes ao processo de definir e à necessidade das definições, bem como à compreensão dos alunos sobre as definições de triângulos e quadriláteros. Contudo, segundo os autores, a investigação sobre o envolvimento dos alunos no processo de construir definições é quase inexistente.

A experiência pessoal da primeira autora deste artigo na lecionação de uma unidade curricular sobre geometria numa Licenciatura em Educação Básica (LEB), evidenciou dificuldades e desafios que se colocam quando se envolvem os futuros professores em atividades de organização local, como a classificação hierárquica de quadriláteros, a qual depende das definições sobre estas figuras. Este problema conduziu ao desenvolvimento de uma experiência de formação nesta unidade curricular e, paralelamente, à realização de uma investigação orientada pelas seguintes questões: Quais os requisitos sobre a definição de figuras geométricas a que os futuros professores atendem quando selecionam e constroem definições? Como se relaciona a estruturação espacial e geométrica das figuras com o processo de definir?

## Quadro teórico

### Raciocínio geométrico e níveis de estruturação

Tal como no raciocínio matemático em geral, o geométrico raciocínio corresponde a um conjunto de processos que permitem extrair nova informação de informação já conhecida (Duval, 1998; Leighton, 2004; Oliveira, 2008). Também no que respeita aos tipos de raciocínio, falamos igualmente em geometria de raciocínio indutivo, abdutivo e dedutivo (Duval, 1998), sendo que o último, já por si considerado o tipo de raciocínio matemático por excelência, teve durante séculos um foco especial no ensino da geometria.

Quanto à especificidade do raciocínio em geometria, Duval (1998) considera que, estando os processos de raciocínio dependentes da forma como a informação é apresentada e organizada, no caso específico da geometria, o raciocínio tem uma componente visual forte, já que a informação é dada segundo uma organização visual, a partir da qual nós podemos nomear objetos, levantar questões e conjeturas sobre esses objetos e suas relações. Numa perspetiva semelhante, Mariotti (1992) responde a esta questão:

> O que há de específico no raciocínio geométrico? A geometria, enquanto campo matemático, lida com um tipo particular de "objetos": as figuras geométricas. Do ponto de vista matemático, as figuras geométricas são entidades puramente abstratas, completamente controladas pelas suas definições num quadro de uma axiomática, mas o que elas têm de específico é que preservam uma característica manejável pictoricamente chamada espacialidade. (pp. 9-10)

Para analisar o raciocínio geométrico, Battista (2008) formulou uma categorização que parte da teoria de Van Hiele mas assume como eixo organizador uma ideia particular: a estruturação. Assim, Battista estabelece três níveis de estruturação, correspondentes a graus de sofisticação diferentes: a *estruturação espacial*, a *estruturação geométrica* e a *estruturação lógica/axiomática*.

A *estruturação espacial* é um tipo especial de abstração correspondente ao ato mental de construir uma organização ou uma configuração para um objeto ou conjunto de objetos, através da identificação das suas componentes, da forma como se combinam e relacionam. A estruturação espacial está assim associada a um modelo mental, ou seja, uma versão visual, não-verbal, da situação (objeto, ação…) que é ativada para interpretar e raciocinar sobre ela (Battista, 2007). Por exemplo, diferentes formas de estruturar um quadrilátero determinam modelos diferentes, como um caminho fechado constituído por quatro segmentos, uma composição de segmentos unidos pelos seus extremos ou uma composição de quatro ângulos ligados.

A *estruturação geométrica* descreve a estruturação espacial através de conceitos formais tais como congruência, paralelismo, ângulo, transformações geométricas ou sistemas de coordenadas. Assim, um paralelogramo pode ser estruturado espacialmente como uma configuração visual consistindo em dois pares de lados opostos iguais. Já a estruturação geométrica torna esta visão explícita em termos verbais através de conceitos apropriados: lados opostos congruentes e paralelos. A estruturação geométrica assenta na estruturação espacial, isto é, para que seja possível estruturar geometricamente um objeto, é necessário que o indivíduo tenha interiorizado a estruturação espacial correspondente. De outra forma, a estruturação geométrica não tem significado para o indivíduo.

A *estruturação lógica/axiomática* organiza formalmente os conceitos geométricos num sistema para que as suas relações possam ser estabelecidas através de dedução lógica. Para operar a este nível, é necessário que a estruturação espacial atinja um nível "simbólico", ou seja, que as afirmações verbais ou simbólicas possam substituir os próprios modelos mentais.

## Raciocínio geométrico e o processo de definir

Eleger o desenvolvimento do raciocínio geométrico com um dos principais objetivos do ensino deste tema implica dar atenção aos seus processos, entre os quais se encontra a construção de definições (De Villiers et al., 2009; Freudenthal, 1973; Mariotti & Fischbein, 1997). De acordo com Mariotti e Fischbein (1997), "o processo de definir no campo da geometria apresenta-se de grande complexidade devido quer às características gerais do processo de definir quer às características específicas dos conceitos geométricos" (p. 224). Estes conceitos requerem um movimento duplo e simultâneo entre os níveis conceptual e figurativo, envolvendo as seguintes ações:

> Observar; identificar as principais características; enunciar propriedades de acordo com estas características; voltar à observação, verificar a definição no que respeita às diferenças figurativas, e assim sucessivamente. O processo de elaborar a definição consiste num duplo processo partindo do particular para o geral e vice-versa, do geral para o particular. (p. 227)

A construção de uma definição para um conjunto de objetos implica assim identificar os atributos que são comuns aos elementos do conjunto e fazer uma generalização de modo a chegar a um conjunto de condições necessárias, usando raciocínio indutivo ou abdutivo; para que o conjunto de condições seja também suficiente, é necessário que implique os objetos em causa, o que envolve raciocínio dedutivo. Adicionalmente, se pretendermos que a definição corresponda a um conjunto mínimo de condições, isto é, seja económica (De Villiers et al., 2009), mobilizamos ainda raciocínio dedutivo uma vez que nenhuma condição pode ser deduzida de outras.

Podemos considerar diferentes tipos de definições em geometria. De Villiers et al. (2009) distinguem particularmente as definições inclusivas das exclusivas, o que decorre da relação entre os processos de definir e de classificar. Uma definição é considerada inclusiva "se permite a inclusão de conceitos mais particulares como um subconjunto de um conceito mais geral" (p. 191); é exclusiva se "os conceitos envolvidos são considerados disjuntos entre si" (p. 191). Historicamente, as definições inclusivas nem sempre foram as preferidas (veja-se as definições de Euclides para alguns quadriláteros), mas os autores consideram que estas definições têm várias vantagens. Do ponto de vista matemático, a utilização de definições inclusivas permite uma maior simplicidade em definir conceitos particulares e também economia na produção de teoremas. Zaslavsky e Shir (2005) sugerem ainda que as definições se distingam também pela sua "forma de apresentação", separando as definições estruturais — que recorrem às propriedades dos objetos — das processuais — que recorrem à forma como os objetos podem ser construídos.

Procurando concretizar os papéis desempenhados pelas definições, Zaslavsky e Shir (2005) apresentam quatro aspetos: (i) permitem introduzir novos objetos numa teoria e captar a sua essência exprimindo as propriedades que os caracterizam; (ii) constituem uma componente fundamental na formação de conceitos; (iii) são os alicerces da demonstração e da resolução de problemas; e (iv) permitem criar alguma uniformidade no significado que atribuímos aos conceitos, o que apoia a comunicação. Do ponto de vista dos seus princípios lógicos, Winicki-Landman e Leikin (2000) apontam aspetos igualmente referidos por vários matemáticos: (i) definir implica atribuir um nome; (ii) para definir um conceito novo, só podemos utilizar conceitos previamente definidos; (iii) uma definição estabelece um conjunto de condições necessárias e suficientes para identificar o conceito; (iv) o conjunto das condições deve ser mínimo; e (v) as definições são arbitrárias.

Como afirmam Zaslavsky e Shir (2005), há aspetos que são "imperativos" na construção de definições, como não conterem afirmações contraditórias ou não conduzirem a ambiguidades, mas há outros sobre os quais não existe consenso. A imposição de que o conjunto de condições seja mínimo, tal como defendem De Villiers et al. (2009) é um aspeto controverso, o que deriva das diferenças de opinião sobre o que constitui uma "boa definição". De facto, as definições dos conceitos não se regem apenas por requisitos matemáticos. Um exemplo disso é a preferência por definições "elegantes" (Vinner, 1991), que frequentemente se sobrepõe ao interesse da definição económica, como exemplifica a definição de retângulo que refere a existência de quatro ângulos retos, uma vez que três ângulos retos é suficiente. Outro critério a ter em conta, mais de natureza didática, é que a definição seja intuitiva (Poincaré, citado por Zaskis & Leikin, 2008), o que pode justificar que a condição "quadrilátero com quatro eixos de simetria" não seja apresentada mais frequentemente como definição para quadrado. Deste modo, a adoção de uma ou outra definição, em certa medida, é matéria de preferência pessoal e subjetiva dos matemáticos.

Como refere De Villiers (1998), apesar da importância fundamental das definições em matemática, o processo de definir é negligenciado no ensino. Mais ainda, os alunos habituam-se a lidar com definições sem nunca discutirem o conceito de definição ou analisarem exemplos de definições alternativas, o que faz com que criem conceções erradas sobre o significado e o papel das definições (Zaslavsky & Shir, 2005). Esta tendência é acentuada pelo conflito existente entre a forma como o conhecimento matemático está organizado e a forma como ele é criado e evolui (De Villiers et al., 2009; Pólya, 1975), bem como a forma como é aprendido (Vinner, 1991). Assim, o processo de definir "é uma atividade matemática tão importante como outros processos tal como resolver problemas, formular conjeturas, generalizar, especializar, provar" (De Villiers, 1998, p. 249).

## A formação de professores dos anos iniciais em geometria

A perspetiva de que os futuros professores precisam de desenvolver uma compreensão profunda de ideias fundamentais da Matemática (Ma, 1999; NCTM, 1994) está presente em muitos estudos e programas de formação, muito embora com diferentes interpretações e formas de concretização. Na perspetiva de Ponte e Chapman (2008), esta orientação não trata simplesmente de oferecer mais matemática aos futuros professores mas, sobretudo, permitir-lhes que compreendam e reconstruam aquilo que sabem com maior profundidade e significado. Para Albuquerque et al. (2006), é necessário contemplar o estudo daquela disciplina de um ponto de vista superior e com um "estabelecimento claro das suas relações com a matemática que se vai ensinar" (p. 14).

Para o NCTM (1994), o conhecimento matemático necessário ao professor inclui o domínio de diferentes tipos de raciocínio matemático, formas de resolver problemas e de comunicar matemática eficazmente, a compreensão de conceitos, de procedimentos específicos e do processo de fazer matemática. No caso particular da geometria, os professores dos anos iniciais devem compreender como ela é usada para descrever o mundo em que vivemos e resolver problemas, saber analisar figuras bi e tridimensionais, produzir argumentações e justificações e privilegiar a visualização espacial (NCTM, 1994). Em Portugal, Albuquerque et al. (2005) sugerem que, em geometria e até ao 2.º ciclo, a formação dos professores deve incluir uma perspetiva histórica do tema, um foco sobre a visualização e a representação espacial, o tratamento das formas geométricas básicas, suas propriedades e relações, e as transformações geométricas. Para estes autores, esta formação deverá desenvolver-se em torno de atividades próprias da matemática, como a formulação e resolução de problemas, e incluir processos a ela associados: formulação de conjeturas, teste e validação, argumentação, prova e refutação, sem ignorar o recurso à tecnologia ou outras ferramentas e materiais. No que diz respeito ao processo de definir, é também referido que "a construção das definições deve ser progressiva e resultante da experiência matemática" (p. 20).

Contudo, De Villiers (2017) refere que persiste uma crença de que uma boa prática significa fornecer primeiro uma definição concisa do conceito, depois exemplos e contraexemplos e, posteriormente, explorar as suas propriedades. No entanto, particularmente no estudo das figuras geométricas, a investigação tem mostrado que esta abordagem tem consequências negativas a vários níveis — ao nível da conceção sobre a matemática, da conceção sobre definição e das conceções sobre os conceitos definidos. No que diz respeito à matemática, conduz à ideia errada de que a criação matemática começa com definições (que os alunos não sabem de onde vêm nem como foram escolhidas) e que não existe mais do que uma definição para o mesmo conceito, promovendo uma imagem da matemática como uma ciência "absolutista" (De Villiers, 2017). No que respeita ao conceito de definição, alguns estudos revelam que os futuros professores têm ideias erradas sobre o que é uma definição, mesmo quando estudaram matemática avançada na universidade, e que esse conhecimento pode ser diferente consoante os temas matemáticos envolvidos (Leikin & Zazkis, 2010). Quanto aos conceitos definidos, vários estudos sobre a aprendizagem dos triângulos e quadriláteros, envolvendo alunos, professores e futuros professores, mostram que frequentemente os indivíduos conhecem as definições, mas não raciocinam de acordo com tais definições (e.g., Fujita, 2012; Gutiérrez & Jaime, 1999).

Desta forma, alguns investigadores fazem propostas de atividades a partir de experiências empíricas que procuraram lidar com estes problemas. Gutiérrez e Jaime (1999) sugerem que se devem criar oportunidades para que os futuros professores apresentem, expliquem e argumentem sobre definições de conceitos geométricos, analisem respostas de alunos em situações que testem estes conceitos e reflitam em torno dos seus significados. Zazkis e Leikin (2008) consideram que a construção de definições pode ajudar os futuros professores a distinguirem condições necessárias de condições suficientes, utilizarem linguagem adequada e revelarem ainda as suas conceções sobre definição. Além disso, as investigadoras sublinham que a capacidade para construir definições varia consideravelmente entre os formandos, mesmo para conceitos tão familiares como o quadrado. Desta forma, Leikin e Zazkis (2010) sugerem que seja dada maior atenção à discussão do papel da definição, sua estrutura e função, quer na matemática escolar, quer na universidade.

A análise e construção de definições estão ainda alinhadas com a abordagem metodológica para a formação inicial proposta por Watson e Mason (2007), segundo a qual o trabalho a desenvolver deve partir de tarefas matemáticas que promovam o pensamento matemático dos futuros professores e desenvolvam a sua perceção sobre o poder dessas tarefas. Nesta perspetiva, surge com especial interesse o ensino exploratório, assente essencialmente em tarefas de cunho exploratório e investigativo, onde cabe a quem aprende uma parte importante do trabalho de descoberta e construção do conhecimento, baseado numa dinâmica de aula em que se reserva um espaço significativo ao seu trabalho sobre as tarefas, a par de momentos de discussão e negociação de significados (Ponte, 2005).

## Metodologia de investigação

### Opções metodológicas, participantes e recolha de dados

Este estudo tem um propósito interventivo, visando modificar as práticas da formação inicial de professores e educadores de infância, por forma a melhorar as suas aprendizagens e contribuir para o conhecimento sobre a sua formação, partindo da compreensão que construímos sobre a forma como desenvolvem o seu raciocínio geométrico. A investigação foca-se na aprendizagem em contexto, a partir da conceção de estratégias e ferramentas de ensino, pelo que optámos pela metodologia de investigação baseada em *design*, na modalidade de experiência de formação (Cobb et al., 2003) em que a professora (a primeira autora do artigo) tem também o papel de investigadora. O *design* da experiência é orientado pela seguinte conjetura: o processo de definir figuras geométricas i) promove o conhecimento dos conceitos a definir e a noção de definição; ii) promove o raciocínio geométrico, particularmente a estruturação espacial e geométrica; e iii) consolida o processo de classificação de figuras.

Orientada por esta conjetura, o estudo dos quadriláteros e dos prismas foi desenvolvido ao longo três fases, correspondentes a três processos: investigar as propriedades, classificar e definir (Figura 1). A investigação sobre quadriláteros recorreu ao *GeoGebra*, através da manipulação de quadriláteros notáveis previamente construídos pela professora, e incidiu sobre as propriedades invariantes relativas a lados, ângulos, diagonais e eixos de simetria. Seguiu-se a classificação das figuras com recurso a diagramas de Venn e a um fluxograma e, por fim, a definição de três quadriláteros (quadrado, retângulo e papagaio). Dois meses mais tarde, a turma estudou os prismas seguindo a mesma orientação: investigação sobre as propriedades, desta vez com recurso a materiais manipuláveis; classificação com recurso a diagramas de Venn e, finalmente, definição de um prisma (paralelepípedo). Cada fase foi desencadeada por uma tarefa de natureza exploratória e as aulas seguiram uma orientação consistente com esta abordagem, começando com a introdução da tarefa, seguida de trabalho em pequenos grupos e terminando com uma discussão coletiva. Apesar de trabalharem em pequenos grupos, foi pedido às formandas para que fizessem uma primeira resolução individual e, de seguida, discutissem as produções individuais com as colegas, donde deveria resultar uma produção comum.

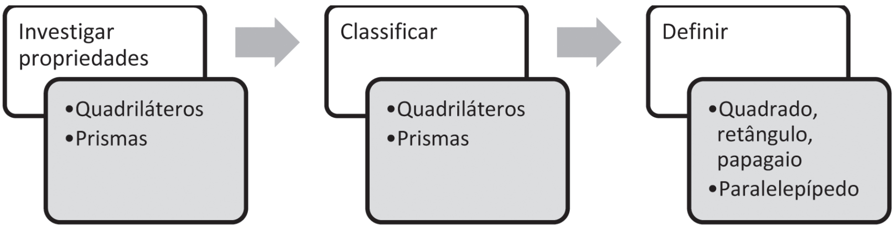


Figura 1. Orientação dada ao estudo dos quadriláteros e dos prismas

Os dados que apresentamos foram recolhidos durante o segundo ciclo do estudo, no ano letivo de 2014/15, envolvendo uma turma de 25 futuras educadoras ou professoras dos 1.º e 2.º ciclos que frequentavam a disciplina de Geometria (2.º ano da LEB). Analisamos alguns dados de toda a turma por forma a dar uma perspetiva geral sobre o tipo de definições que construíram e os aspetos que revelam, bem como as resoluções de Júlia e alguns diálogos relevantes em que interveio. Júlia é uma formanda muito empenhada e participativa, com bom aproveitamento nas disciplinas de matemática. No questionário inicial considerou a matemática relevante para a sua formação, assinalou não sentir habitualmente dificuldades nessa área e indicou não ter ainda decidido entre ser educadora ou professora de 1.º ciclo.

A recolha de dados foi feita a partir dos registos áudio e vídeo das aulas. Foi ainda realizada a análise documental das produções escritas, todas elaboradas na sala de aula. Neste artigo apresentamos dados de três tarefas: uma tarefa de diagnóstico que inclui uma questão sobre definições para quadrado; uma tarefa que integra a construção de definições para retângulo e papagaio; e uma tarefa de classificação e definição de prismas, onde se pede a definição de paralelepípedo.

## Análise de dados

Neste ponto, começamos por sintetizar alguns princípios sobre definições enfatizados nas aulas. Assim, assumimos que, no contexto de trabalho sobre figuras geométricas, uma definição corresponde a uma condição, frequentemente obtida por conjunções de condições, a que a figura definida deve satisfazer para que possa ser nomeada dessa forma. Deve conter um conjunto necessário e suficiente de condições e constituir, tendencialmente, um conjunto o mínimo possível (Leikin & Zazkis, 2010). Este último princípio visou dois objetivos: compreender que esse é o modo como habitualmente as definições são apresentadas, que há vantagens em fazê-lo do ponto de vista matemático e, mais importante, raciocinar geometricamente identificando relações entre os elementos das figuras e entre as propriedades identificadas. Além destes princípios, e atendendo a que as figuras em causa foram organizadas hierarquicamente, foi ainda sublinhado o princípio de inclusão, de forma a existir coerência entre as definições e as classificações estabelecidas (De Villiers et al., 2009).

Ao selecionar ou construir definições de figuras, as formandas explicitam propriedades que, na sua perspetiva, determinam as classes, o que envolve a sua estruturação espacial e geométrica (Battista, 2008). A identificação destas propriedades pode ser reveladora de uma estruturação com diferentes graus de sofisticação. Assim, de forma a analisar a relação da estruturação espacial e geométrica das figuras com o processo de definir, temos em conta o seguinte quadro de descritores que apresenta quatro níveis de estruturação[1] (Quadro 1), muito embora não haja neste estudo intenção de atribuir níveis às formandas.

Quadro 1. Descritores dos níveis de estruturação espacial e geométrica

<table>
<tr><th rowspan="2">Níveis</th><th colspan="2">Estruturação geométrica</th></tr>
<tr><th>Estruturação espacial</th><th>Domínio de conceitos</th></tr>
<tr><td>N0</td><td>Não estabelece relações geométricas entre as figuras e os seus elementos, ou não estabelece na maioria das vezes.</td><td>Não domina os conceitos mais elementares e a sua linguagem é muito limitada no vocabulário de geometria.</td></tr>
<tr><td>N1</td><td>Perceciona relações geométricas associadas a elementos visíveis das figuras, mas esta perceção pode depender da posição das figuras e dos seus elementos ou do contexto em que estão imersos.</td><td>No plano, utiliza os conceitos de lado e ângulo, congruência, perpendicularidade e paralelismo.<br>No espaço, usa o conceito de vértice, aresta e face.</td></tr>
<tr><td>N2</td><td>Perceciona relações geométricas associadas a elementos visíveis das figuras em qualquer posição ou contexto.<br>Perceciona relações geométricas associadas a elementos invisíveis das figuras, mas esta perceção pode depender da posição das figuras e dos seus elementos.</td><td rowspan="2">No plano, utiliza os conceitos de eixo de simetria, diagonal, mediatriz, ponto médio e as transformações geométricas.<br>No espaço, utiliza o conceito de congruência, paralelismo e perpendicularidade.</td></tr>
<tr><td>N3</td><td>Perceciona relações geométricas associadas a elementos visíveis e invisíveis das figuras, independentemente da sua posição ou contexto.<br>Generaliza as relações geométricas para uma família de figuras.</td></tr>
</table>

De forma a identificar quais os requisitos sobre a definição de figuras geométricas a que as participantes atendem quando selecionam e constroem definições, a análise das definições foca-se nos seguintes aspetos: a condição é necessária e suficiente; a definição é inclusiva; e a definição é económica. Usaremos as categorias apresentadas no quadro 2, adaptadas de De Villiers et al. (2009), seguindo a terminologia dos autores:

Quadro 2. Descritores das categorias de definições construídas, de acordo com os requisitos

| Características da definição construída | Categoria |
|---|---|
| Corresponde a um conjunto mínimo[2] (ou quase mínimo) de propriedades necessárias e suficientes. A definição é inclusiva. | Definição económica |
| Corresponde a um conjunto de propriedades necessárias e suficientes mas contém condições supérfluas. A definição é inclusiva. | Definição correta (mas não económica) |
| Contém propriedades que não são necessárias ou não são suficientes[3]. | Definição incorreta |

## Resultados

### Tarefa de diagnóstico

Na primeira aula foi realizado um teste diagnóstico de escolha múltipla que continha uma questão relativa à definição de quadrado, um quadrilátero em que as possíveis definições não envolvem questões de inclusão, o que poderia enviesar as conclusões sobre o raciocínio subjacente à escolha de cada afirmação (Figura 2):

> Assinale todas as possíveis definições para quadrado:
>
> (A) Polígono de quatro lados iguais.
> (B) Polígono de quatro lados iguais e quatro ângulos iguais.
> (C) Quadrilátero com quatro eixos de simetria.
> (D) Quadrilátero com diagonais iguais e perpendiculares.

Figura 2. Questão da tarefa de diagnóstico sobre a definição de quadrado

As opções A e D são incorretas, pois contêm propriedades que, embora necessárias, são insuficientes para definir o quadrado. Em teoria, será mais fácil identificar que a afirmação A é insuficiente para definir quadrado, pois não há referência aos quatro ângulos retos que é uma propriedade facilmente reconhecível nestas figuras. Já a afirmação D não toma em consideração que, além das propriedades apresentadas, as diagonais têm de se intersetar no seu ponto médio. As hipóteses B e C estão ambas corretas, distinguindo-se pelas propriedades que envolvem diferentes elementos dos quadrados. De novo, as propriedades da afirmação B são mais facilmente reconhecíveis do que as da afirmação C, além de que a definição B é aquela que é habitualmente usada em manuais escolares.

Os resultados obtidos relativamente à escolha de cada opção encontram-se na tabela 1. Todas as formandas assinalaram a definição B como estando correta, mas apenas 57% o fizeram para a outra definição correta (C). Além disso, verificamos que as opções erradas (A e D) são também selecionadas por muitas participantes, mas de novo com uma diferença significativa de representatividade. Notamos que, em ambos os casos, as definições são incorretas pela mesma razão — as propriedades que contêm verificam-se, mas não dizem respeito apenas aos quadrados.

Tabela 1. Resultados da questão sobre definições de quadrado da tarefa de diagnóstico, por alínea

| Opção | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| % | 86 | 100 | 57 | 54 |

Assim, os resultados apresentados na tabela mostram que as escolhas não se dividem tanto entre as definições corretas ou incorretas, mas entre as definições A e B que remetem para elementos visíveis (lados e ângulos) e C e D que remetem para elementos ocultos (diagonais e eixos de simetria). A menor representatividade das opções relativas a elementos ocultos pode decorrer de dois motivos: a maior dificuldade em reconhecer estas propriedades como verdadeiras (de natureza conceptual e cognitiva, associada ao conceito de quadrado e à sua estruturação geométrica) e a consciência de que as diagonais e os eixos de simetria não são habitualmente usados na definição de quadrado apresentada nos manuais escolares (dificuldade de natureza meta-conceptual, associada ao conceito que as formandas têm sobre o que é uma definição em geometria). A ampla escolha de definições envolvendo elementos visíveis pode revelar uma tendência para aceitar como definições afirmações que contenham propriedades verdadeiras e/ou conhecidas ou facilmente reconhecíveis. Além disso, a escolha conjunta das opções A e B significa ainda que 86% das participantes parece não identificar qualquer conflito na existência de definições diferentes para o mesmo objeto, quando uma corresponde claramente a uma restrição da outra, o que aponta para uma conceção incorreta de definição. Finalmente, a escolha da opção D por mais de metade das formandas pode derivar de não se recordarem que as diagonais não têm de se intersetar sempre nos pontos médios (o que acontece para os quadriláteros mais familiares).

Uma análise mais detalhada do conjunto das opções escolhidas revela ainda os seguintes aspetos: a) apenas 4% das participantes identificaram exatamente as duas opções corretas; b) apenas 8% escolheram a definição B como única opção; e c) 32% escolheram todas as opções. Júlia é uma das formandas que assinala todas as opções, o que pode revelar alguma facilidade em reconhecer as propriedades das figuras mas, simultaneamente, uma conceção errada de definição que atende apenas ao requisito de que as propriedades enunciadas sejam necessárias.

## Tarefa de definição de quadriláteros

### *Trabalho prévio*

A tarefa sobre a definição de quadriláteros surgiu depois da investigação sobre as propriedades dos quadriláteros e da sua classificação. Uma vez que a definição depende em grande medida destas duas etapas, apresentamos sucintamente alguns resultados a ter em conta. Em primeiro lugar, durante a investigação das propriedades, as formandas mostraram alguma facilidade em identificar a congruência e paralelismo dos lados e diagonais; surgiram alguns erros na identificação dos eixos de simetria e a maioria inicialmente ignorou a forma como as diagonais se intersetam. Ainda nesta tarefa, realçamos dois aspetos: a maioria não recordava conceitos como diagonal de um polígono ou concorrência de retas e ignorou os casos particulares das classes de quadriláteros (por exemplo, quando o paralelogramo tomava a forma de um retângulo no ecrã). Em segundo lugar, o diagnóstico inicial revelou que apenas 1/3 da turma reconhecia a hierarquia entre o quadrado e o retângulo e, ainda assim, apenas algumas formandas sabiam justificá-lo. Durante a tarefa sobre classificação, as formandas estabeleceram relações entre os quadriláteros estudados conseguindo realizar uma classificação hierárquica entre o quadrado e o retângulo e entre este e o paralelogramo, justificando adequadamente a relação. Contudo, a classe dos papagaios revelou-se bastante mais difícil, com 58% a fazer uma classificação que não inclui o quadrado nesta classe (Brunheira & Ponte, 2015).

A tarefa seguinte centrou-se em três quadriláteros — o quadrado, o retângulo e o papagaio — com a construção de definições para as duas últimas figuras (Figura 3):

1. Considera as seguintes definições para quadrado, propostas por um grupo de futuros professores:
   Definição A: Quadrilátero com todos os lados iguais, paralelos dois a dois e todos os ângulos iguais.
   Definição B: Polígono com quatro lados e duas diagonais iguais.
   a. Parece-te que as definições são corretas?
   b. Alguma das definições é correta e económica?
2. Propõe duas definições diferentes para retângulo.
3. Propõe duas definições diferentes para papagaio.

Figura 3. Excerto da tarefa sobre as definições de quadriláteros

### *Definição de retângulo*

A tabela 2 apresenta uma análise quantitativa das definições apresentadas individualmente, classificadas em três categorias: definições económicas, definições corretas mas não económicas e definições incorretas. Foram produzidas 47 propostas para definições de retângulo (várias iguais), distribuídas da seguinte forma:

Tabela 2. Tipos de definições apresentadas para retângulo

| | Definições económicas | Definições corretas não económicas | Definições incorretas |
|---|---|---|---|
| Frequências Absoluta e Relativa | 7 (15%) | 35 (74%) | 5 (11%) |

Uma vez que, à exceção de uma formanda, cada participante registou duas definições, interessa também saber que tipo de definições construíram e, em particular, se ambas são do mesmo tipo. Assim, das 24 formandas presentes, destacam-se 12 (50%) que registaram duas definições corretas (não económicas) e 7 (29%) uma correta (não económica) e outra económica, o que significa que a grande maioria (79%) construiu definições corretas, mas apenas uma parte conseguiu que uma delas fosse económica e nenhuma construiu duas definições económicas.

Vejamos alguns exemplos. Comecemos pela resposta de Maria João (Figura 4):

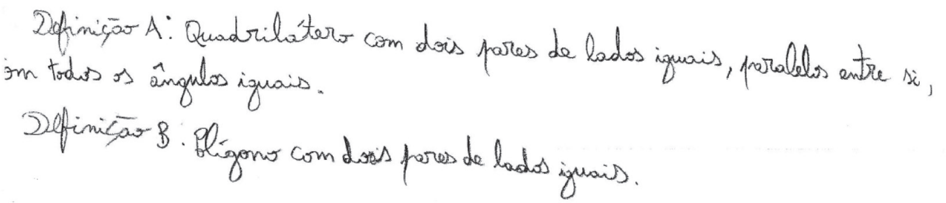
Definição A: Quadrilátero com dois pares de lados iguais, paralelos entre si, com todos os ângulos iguais.
Definição B: Polígono com dois pares de lados iguais.

Figura 4. Definições para retângulo propostas por Maria João

Maria João apresenta a definição A correta (não económica), mas a definição B está incorreta por apresentar uma condição necessária mas não suficiente, pois qualquer paralelogramo ou papagaio satisfazem a condição apresentada.

No que diz respeito às definições corretas mas não económicas, vejamos a resposta de Anabela (Figura 5) que é muito representativa das propostas de definição para retângulo:

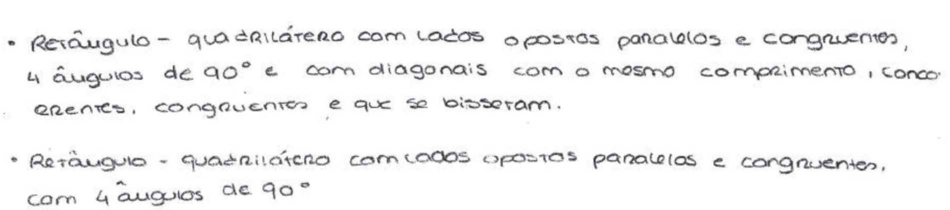
• Retângulo – quadrilátero com lados opostos paralelos e congruentes, 4 ângulos de 90° e com diagonais com o mesmo comprimento, concorrentes, congruentes e que se bissetam.
• Retângulo – quadrilátero com lados opostos paralelos e congruentes, com 4 ângulos de 90°

Figura 5. Definições de retângulo apresentadas por Anabela

Por um lado, ambas as definições referem os lados e os ângulos, o que acontece em quase todas as definições propostas pela turma, não havendo qualquer definição que se refira exclusivamente a elementos invisíveis. Por outro lado, a primeira definição corresponde a uma listagem quase exaustiva das propriedades estudadas e, a segunda, a uma restrição da primeira. Embora nenhuma das definições seja económica, a formanda evidencia a compreensão de que não é necessário apresentar todas as propriedades da figura.

As respostas de Lúcia (Figura 6), igualmente corretas mas não económicas, constituem um exemplo pouco comum de definições que não referem a congruência dos lados opostos do retângulo.

Definição A: Quadrilátero com 4 ângulos retos e duas diagonais iguais.

Definição B: Quadrilátero com 2 pares de lados paralelos 2 a 2 e 4 ângulos retos.

Figura 6. Definições de retângulo apresentadas por Lúcia

No que respeita às definições económicas, Jacinta apresenta duas (Figura 7 — transcritas dada a insuficiente qualidade do original), uma primeira correta que recorre aos elementos comummente referidos (ângulos e lados) e uma segunda económica que traduz uma maior criatividade:

Definição A: Quadrilátero com quatro ângulos retos e lados opostos congruentes;

Definição B: Quadrilátero com lados paralelos dois a dois e diagonais congruentes.

Figura 7. Definições de retângulo apresentadas por Jacinta

Terminamos com a resolução de Júlia (Figura 8) que é única por apresentar duas definições incorretas que incluem condições suficientes, mas não necessárias. Contudo, é de salientar que a incorreção resulta de um único problema — a não inclusão do quadrado como caso particular do retângulo, ou seja, as definições não são inclusivas.

(2) A: Quadrilátero em que as diagonais são congruentes e bissetam-se mas não são perpendiculares.

B: Quadrilátero com todos os ângulos retos e com os lados opostos congruentes e paralelos, embora a dimensão de dois lados consecutivos não seja igual.

Figura 8. Definições para retângulo propostas por Júlia

### *Definição de papagaio*

A tabela 3 apresenta uma análise quantitativa das definições apresentadas individualmente. Foram produzidas 45 propostas para definições de papagaio (várias iguais), distribuídas da seguinte forma:

Tabela 3. Tipos de definições apresentadas para papagaio

| | **Definições económicas** | **Definições corretas não económicas** | **Definições incorretas** |
|---|---|---|---|
| Frequência Absoluta | 7 (16%) | 7 (16%) | 31 (69%) |

No caso desta figura, considerando as duas definições de cada formanda, destaca--se que 11 (46%) construíram duas definições incorretas e 6 (25%) construíram uma definição correta (mas não económica) e uma incorreta.

Da comparação entre os resultados obtidos relativamente às definições de retângulo e os resultados relativos às definições de papagaio, resulta claramente o aumento das definições incorretas. O número de definições económicas mantém-se e o número de definições corretas mas não económicas reduziu-se drasticamente. Assim sendo, torna-se relevante analisar o tipo de erros cometidos pelas participantes.

Das 31 respostas incorretas, uma parte significativa (32%) corresponde a definições exclusivas. Contudo, a maior parte (perfazendo 58% das definições incorretas) corresponde a definições que são incorretas por corresponderem a condições que não são necessárias e/ou não são suficientes, além de serem exclusivas, pelo que não conduzem nem aos casos particulares, nem ao papagaio prototípico. As respostas de Júlia (Figura 9) são representativas deste grande grupo. Por um lado, persiste a intenção de que a definição não inclua casos particulares; por outro lado, as propriedades que apresenta não são suficientes, pelo que a formanda parece não estruturar convenientemente a figura em causa.

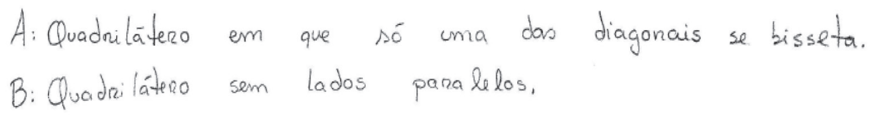
A: Quadrilátero em que só uma das diagonais se bisseta.
B: Quadrilátero sem lados paralelos.

Figura 9. Definições de papagaio apresentadas por Júlia

No que diz respeito às definições corretas mas não económicas, estas resultam sempre da conjunção da condição "quadrilátero com dois pares de lados consecutivos iguais" com outra condição, como "diagonais perpendiculares" ou "um par de ângulos opostos iguais".

As definições económicas, embora em número reduzido, recorrem a três elementos diferentes: lados, eixos de simetria e diagonais. Jacinta apresenta a definição "Quadrilátero com um eixo de simetria que passa por dois vértices opostos" que preenche os requisitos de uma definição económica. Isabel apresenta outra definição (Figura 10) que carece de melhoria da linguagem, pela opção pela expressão "polígono com 4 lados" ao invés de quadrilátero. Contudo, a propriedade a que recorre é a mais comum na definição de papagaio e torna a definição económica.

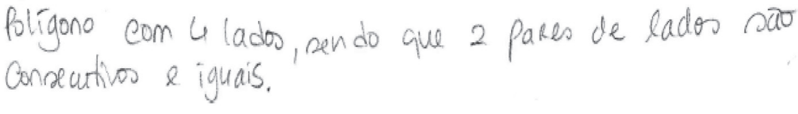
Polígono com 4 lados, sendo que 2 pares de lados são consecutivos e iguais.

Figura 10. Definição de papagaio apresentada por Isabel

Em suma, a análise das definições produzidas pela turma para retângulo e papagaio mostram, em primeiro lugar, que o tipo de figura a definir tem uma grande influência no sucesso da tarefa. Se é verdade que, tanto para um caso como para outro, o número de definições económicas é muito reduzido, já o número de definições incorretas é muito maior no caso do papagaio.

Um aspeto que é notório na análise das produções de cada participante é que as formandas não se dividem pelo tipo de definições que produzem, ou seja, não existe o grupo das participantes que produzem definições económicas, o grupo das que produzem definições corretas e o grupo que produz as incorretas. De uma maneira geral, todas as participantes produzem mais do que um tipo de definição, até para o mesmo quadrilátero. Isto pode significar que não dominam o conceito de definição, mas pode também ser consequência de um domínio diferenciado sobre cada figura, em particular de uma estruturação insuficiente do papagaio. Verificamos assim que a aprendizagem deste processo não é linear, tal como acontece com o processo de classificação, o que é natural atendendo à sua interdependência. Aliás, o facto de a maioria das definições erradas de papagaio revelar problemas de inclusão, é mais um argumento a sugerir que esta aprendizagem está dependente de vários fatores, inclusivamente do tipo de propriedades envolvidas na definição.

Ainda no que respeita ao raciocínio, o papagaio é um quadrilátero que coloca desafios diferentes dos outros quadriláteros, o que já foi notado no processo de classificar. O facto de ser o único quadrilátero estudado em que a figura prototípica não tem os lados paralelos, leva a que várias formandas vejam a condição "quadrilátero sem lados paralelos" como sendo suficiente para o definir. Isto pode acontecer porque os exemplos de figuras que verificam a condição, mas não são papagaios, são quadriláteros não notáveis que estão habitualmente fora do universo dos quadriláteros em que os indivíduos pensam. Contudo, a forma como as formandas estruturam esta figura espacial e geometricamente tem um papel significativo. As propriedades relativas aos lados (paralelismo e dimensão relativa), bem como os ângulos, parecem ser muito marcantes na estruturação das figuras, o que no caso do retângulo apoia o raciocínio. Já para o papagaio, o paralelismo dos lados não se aplica a toda a classe, a identificação da congruência de lados fica dificultada por estes serem consecutivos e a relação entre os ângulos não apoia a definição. Assim, a construção de definições para papagaio suscita o recurso a outros elementos da figura, como os eixos de simetria, o que requer um domínio maior da linguagem matemática e de outros conceitos, o que requer operar no nível 2 de estruturação geométrica.

### *A discussão coletiva*

A análise das definições construídas para o papagaio mostrou que produzir definições inclusivas pode constituir um obstáculo significativo. Nesta secção, procuramos compreender porquê a partir do raciocínio de Júlia patente durante a discussão coletiva. O episódio seguinte acontece quando Tita propôs a propriedade dos quadriláteros "todos os ângulos retos" como definição para retângulo. Nesse momento, Júlia intervém:

| | |
|---|---|
| Júlia: | Oh professora, eu não estou a perceber. Isso para mim também pode ser o quadrado... |
| Professora: | Mas a definição para retângulo tem de ir incluir o caso do quadrado. Daí quando tu dizes que tanto dá para o retângulo como para o quadrado, ótimo! É isso mesmo que nós queremos! |
| Júlia: | Sim, mas também tem de haver alguma coisa que os distinga! |
| Professora: | Certo, mas é na definição de quadrado. Que são os 4 lados iguais. Estás a ver? Na definição de quadrado, eu tenho de acrescentar essa informação porque, de facto, o quadrado "vai mais além" do que um retângulo qualquer... |
| Júlia: | Então, por exemplo, um trapézio tem de incluir os outros todos! |
| Professora: | Pois tem! |
| Júlia: | Então mas como é que eu vou distinguir umas figuras das outras?! |
| Professora: | Distingues porque os casos particulares têm de ter mais propriedades do que os casos mais gerais... |
| Júlia: | Então tenho de ir sempre aos outros... |
| Isabel: | Isso para mim é muito estranho... |

Neste diálogo, Júlia revela um grande desconforto com a aceitação de uma definição para retângulo que se resuma a "Quadrilátero com todos os ângulos retos". Contudo, mais do que a dificuldade em aceitar a relação entre o retângulo e o quadrado, o que revela é a sua estranheza perante as definições inclusivas e que é partilhada por outras colegas, como mostra a afirmação de Isabel. Para Júlia, uma definição tem de permitir identificar um único tipo de figura e não uma classe de figuras.

Depois de discutida a inclusão das figuras que pertencem à mesma classe, este critério passou a ser mais atendido. Quando foram analisadas as definições propostas para papagaio, um dos grupos propôs "Quadrilátero na qual apenas uma diagonal se bisseta", ao que uma das formandas retorquiu imediatamente dizendo "Não é inclusiva". Contudo, esta definição tinha outro problema:

| | |
|---|---|
| Professora: | Pois, exatamente... "Apenas uma das diagonais se bisseta", não pode ser... Mas olhem lá uma coisa, na definição B o problema não é só não ser inclusiva... O que é que acontece? (Silêncio) Ela é suficiente para identificar um papagaio? |
| Mª João: | Eu acho que sim... |
| Professora: | Vamos imaginar que tiramos o "apenas". "Uma das diagonais bisseta a outra". (Silêncio) Só há o papagaio? |
| Sandra: | Se bisseta sim... |
| Professora: | Então se eu colocar assim? Até vou por assim para se ver melhor. Isto é o ponto médio (Figura 11). Estas diagonais são de um papagaio? |

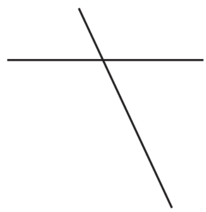

Figura 11. Figura desenhada no quadro conforme definição de papagaio

Neste momento da discussão, a turma não identificava outras figuras que correspondessem à definição sem serem papagaios. Esta dificuldade pode resultar de dois aspetos: por um lado, ao procurar visualizar figuras em que uma das diagonais bisseta a outra, os indivíduos colocam essas diagonais perpendiculares, sem que se apercebam de que estão a introduzir uma nova condição; por outro, sem desenhar, não é fácil imaginar um quadrilátero que corresponda à definição proposta e tenha diagonais oblíquas, uma vez que esta conjunção de condições resulta num quadrilátero não notável.

## Tarefa de definição do paralelepípedo

A segunda tarefa relativa à construção de uma definição recaiu sobre o paralelepípedo. A escolha deste poliedro deve-se a, por um lado, permitir a apresentação de diferentes definições potencialmente ao alcance das formandas e, por outro, por haver uma analogia entre algumas das condições que definem este sólido e as que definem o paralelogramo — o paralelismo (e congruência) das faces acontece na figura tridimensional da mesma forma que o paralelismo (e congruência) dos lados surge na figura bidimensional. O pedido de uma definição económica poderia conduzir as formandas a raciocinar de modo a estruturarem espacial e geometricamente estes sólidos de modo a encontrarem relações entre os seus elementos, nomeadamente que se as faces de um prisma quadrangular forem paralelas duas a duas são também congruentes duas a duas e que a recíproca também é verdadeira.

Note-se que, antes desta proposta, as formandas realizaram um jogo em que precisaram de identificar o critério que permite distinguir os paralelepípedos de outros sólidos. Já nesta tarefa, tomaram contacto com a definição de prisma, analisaram as propriedades de vários prismas e distinguiram prismas retos de oblíquos. Assim, o item sobre a definição de paralelepípedo (Figura 12) apresenta algumas propriedades dos paralelepípedos já identificadas numa atividade anterior, de modo a apoiar o trabalho das formandas:

5. Os paralelepípedos pertencem também à classe dos prismas.
   Considera as seguintes propriedades anteriormente descobertas:
   - Poliedro com seis faces;
   - Poliedro com faces opostas iguais;
   - Poliedro com faces paralelas duas a duas;
   - Poliedro cujas faces são paralelogramos.

Apresenta uma definição para paralelepípedo (procura usar uma definição económica).

Figura 12. Excerto da tarefa sobre prismas

Estiveram presentes apenas 20 participantes, mas duas deixaram a questão por resolver. Desta forma, entre as 18 respostas, duas correspondem a definições incorretas, dez são definições corretas mas não económicas e seis são económicas. Vejamos um dos casos de definições incorretas (Figura 13):

5) Um paralelepípedo é um prisma quadrangular reto ou oblíqua

Figura 13. Definição de paralelepípedo apresentada por Isabel

Isabel optou por construir uma definição que não utiliza as propriedades apresentadas no enunciado e mobiliza uma outra, que é verificada pelos paralelepípedos mas não é suficiente, uma vez que há prismas quadrangulares que não são paralelepípedos, bastando que o quadrilátero que se encontra na base não seja um paralelogramo.

No que diz respeito às definições corretas mas não económicas, apresentamos as definições construídas por Maria João (Figura 14) e Mónica (Figura 15):


5. Paralelepípedos são prismas cujas faces são paralelogramos com faces paralelas duas a duas

Figura 14. Definição de paralelepípedo apresentada por Maria João

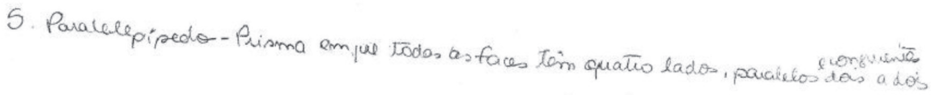
5. Paralelepípedo - Prisma em que todas as faces têm quatro lados, paralelos congruentes dois a dois

Figura 15. Definição de paralelepípedo apresentada por Mónica

A propriedade "faces paralelas duas a duas", apresentada por Maria João, é desnecessária pois a condição de que as faces sejam paralelogramos implica que sejam paralelas duas a duas. Do mesmo modo, a inclusão do termo "congruentes" na definição de Mónica é também desnecessária. As definições apresentadas são corretas mas não económicas, o que significa que falham no propósito de identificarem que algumas propriedades podem ser deduzidas de outras. Contudo, além de este objetivo ser mais difícil de alcançar no espaço do que no plano, a construção de definições económicas para objetos mais complexos pode não ser tão adequada quanto noutras situações já que, do ponto de vista da identificação da figura a partir da sua definição, é tanto mais difícil aceder-lhe quanto menor for o número de propriedades fornecidas. Este aspeto pode explicar a necessidade que, aparentemente, estas formandas sentem em apresentar propriedades que, apesar de desnecessárias, são estruturantes na organização espacial dos paralelepípedos.

Finalmente, apresentamos as definições construídas por Iva (Figura 16) e Marina (Figura 17) que são económicas:

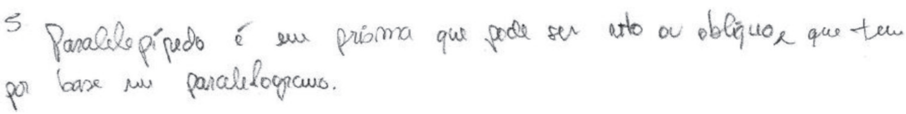
5 Paralelepípedo é um prisma que pode ser reto ou oblíquo, e que tem por base um paralelogramo.

Figura 16. Definição de paralelepípedo apresentada por Iva

5. um paralelipípedo é um poliedro com 6 faces paralelas duas a duas

Figura 17. Definição de paralelepípedo apresentada por Marina

A definição de Iva recorre também ao conceito de prisma e inclui a informação que é reto ou oblíquo, o que não acrescenta nenhuma propriedade, mas esta formanda percebe que basta que a base do prisma seja um paralelogramo para que seja um paralelepípedo. Marina é das poucas formandas que usa a classe dos poliedros em vez dos prismas e inclui apenas duas propriedades que são necessárias e suficientes para que o sólido seja um paralelepípedo.

Finalmente, apresentamos a definição dada por Júlia (Figura 18) e que foi posteriormente discutida coletivamente.

Poliedro cujas faces são paralelogramos = Paralelepípedo

Figura 18. Definição de paralelepípedo apresentada por Júlia

| | |
|---|---|
| Júlia: | Professora, e se dissermos só “poliedro cujas faces são paralelogramos”? |
| Professora: | Sem dizer que são seis? |
| Júlia: | Sim. |
| Professora: | Eu tenho dúvida em relação a isso. Tenho que ir pesquisar um pouco mais porque não tenho a certeza. O mundo dos poliedros é vastíssimo e eu não sei se existe um poliedro com essas condições sem ser com seis faces. Se tiver obrigatoriamente seis faces, então de certeza que é um paralelepípedo. |

De facto, para dar resposta a esta questão, a professora procurou pensar nos poliedros que conhecia e encontrar algum exemplo que verifique a condição sem ser um paralelepípedo, mas em vão. Sem a possibilidade de esgotar uma infinidade de casos, a estratégia mais acessível é conceber mentalmente um sólido com tais propriedades para perceber se necessariamente somos levados a construir um paralelepípedo. Esta tarefa é complexa mas Júlia e Lúcia envolvem-se nela e procuram convencer a professora de que se trata de uma condição suficiente:

| | |
|---|---|
| Lúcia: | Professora, mas um paralelepípedo tem de ter na base quatro arestas, certo? E para ligar essas 4 arestas à base oposta vamos ter de formar outras quatro arestas obrigatoriamente. |
| Júlia: | Pois… |
| Professora: | Então tu estás a dizer… |
| Lúcia: | Se as bases não fossem paralelogramos… |
| Professora: | Mas tu já estás a partir do princípio que existem bases e que o sólido está organizado dessa forma… [como um prisma] |
| Lúcia: | Ah pronto… |
| Júlia: | Mas professora, como eu digo que as faces são todas paralelogramos… |
| Professora: | Pois eu percebi isso! |
| Lúcia: | É que as faces podem estar dispostas de maneira diferente e não formar um paralelepípedo, percebes? (dirigindo-se a Júlia) |
| Professora: | Pois, como te digo tenho de pesquisar mais um pouco, mas é uma questão muito interessante!... |
| Júlia: | É que eu não estou a ver… |
| Professora : | Pois, não estás a imaginar outra organização que não seja essa não é?! |
| Júlia: | Pois! |
| Professora: | É uma questão de irmos investigar mais um pouco… Tu também podes procurar! Com os quadriláteros é muito mais fácil ver se existem outros que cumprem a definição… |

Nesta discussão, Lúcia usa um argumento que não é válido porque não está a considerar um poliedro qualquer, mas um prisma, o que não consta da sua definição (poliedro cujas faces são paralelogramos). Numa pesquisa posterior encontrámos o dodecaedro rômbico que é apenas constituído por paralelogramos sem ser um paralelepípedo, logo a definição de Júlia é incorreta. Contudo, mais importante que validar a sua resposta, este episódio mostra que a procura de uma definição económica pode ser desafiante e incentivar as formandas a gerarem imagens mentais que respeitem as relações apresentadas, o que favorece a estruturação espacial e geométrica. Finalmente, esta definição mostra também que Júlia parece ter ultrapassado a dificuldade em aceitar definições inclusivas, já que a sua proposta inclui paralelepípedos retângulos.

## Conclusão

No início da unidade curricular, a atividade de construir e analisar definições era completamente estranha às formandas. Mas o facto de nunca terem discutido o significado, requisitos ou importância de uma definição não significa que não tivessem conceções prévias sobre este conceito. Como com outros conceitos, as suas ideias foram sendo moldadas ao longo do tempo pela sua experiência de utilização de definições (Vinner, 1991), resultando numa noção difusa, com aspetos corretos e incorretos (Zaslavsky & Shir, 2005). Neste estudo, tal como em Zaskis e Leikin (2008), a construção de definições constituiu uma ferramenta de investigação para compreender o significado que os indivíduos atribuem às definições e aceder à sua compreensão sobre os conceitos definidos.

No que respeita aos requisitos a que uma definição deve obedecer, no início da unidade, as participantes consideravam uma definição válida sempre que a condição fosse necessária, sem ter em conta que esta deveria ser também suficiente. Além disso, não conheciam o conceito de definição inclusiva nem de definição económica, muito embora reconhecessem que uma definição de uma figura não apresenta necessariamente todas as suas propriedades. Já no âmbito do estudo dos quadriláteros, e depois de estabelecida a sua hierarquia, as definições inclusivas constituíram um desafio significativo para as formandas, em parte por considerarem que estas definições conduzem a ambiguidade. Porém, as atividades realizadas levaram a maioria a ter em conta que as definições das figuras que se encontram organizadas em classes devem ser inclusivas, como se verificou na tarefa de definição de paralelepípedo. Contudo, a aprendizagem relativa às definições económicas revelou-se mais problemática. Mesmo depois da apresentação e discussão do conceito, muitas formandas não o tiveram em conta ou não conseguiram produzir definições com este requisito.

Outra conclusão que destacamos diz respeito à influência mútua entre a estruturação espacial e geométrica e o processo de definir. Em primeiro lugar, a construção de definições económicas é influenciada pela necessidade de contemplar na definição as propriedades mais estruturantes nas figuras. Por exemplo, a propriedade "lados opostos iguais" do retângulo é muito estruturante para a maioria dos indivíduos, pelo que, mesmo sendo supérflua quando conjugada com a condição "quadrilátero com quatro ângulos retos", é muito natural que seja incluída na definição desta figura. Esta tendência pode ter a ver com a perspetiva dita "didática" de que a definição deve ser intuitiva (Zaskis & Leikin, 2008). Em segundo lugar, o estudo mostra que o sucesso na construção de definições depende igualmente da figura a definir, nomeadamente dos elementos que servem para estruturar a figura, como mostrou a diferença de sucesso entre a construção de definições para retângulo e para papagaio. No caso desta última figura, além da congruência dos pares de lados consecutivos, as definições alternativas mais viáveis envolvem as diagonais ou o eixo de simetria, que constituem elementos pouco familiares às formandas, como mostrou o diagnóstico inicial.

Os exemplos anteriores evidenciam que o processo de definir é influenciado pela forma como os indivíduos estruturam as figuras espacial e geometricamente. No entanto, como referem Freudenthal (1973), Mariotti e Fischbein (1997) e De Villiers (1998), a atividade de definir é também muito relevante do ponto de vista didático. Os resultados deste estudo sugerem que, além ser influenciada, esta atividade é também promotora da estruturação espacial e geométrica. O percurso de Júlia evidencia esta ideia. Quando confrontada com quadriláteros familiares, como o quadrado e o retângulo, reconhece as suas propriedades, incluindo as que envolvem diagonais e eixos de simetria e usa uma linguagem correta que incorpora adequadamente os conceitos envolvidos. Porém, a sua análise do papagaio revela maiores fragilidades, pois além da relação entre as diagonais, a formanda não identifica outra propriedade que possa usar para o definir. Nesta fase, as suas respostas são afetadas por uma conceção de definição limitada às definições exclusivas. Contudo, a partir do momento que entende e aceita a organização das figuras em classes e a consequente necessidade de definições inclusivas, Júlia parece desafiada pelo raciocínio subjacente a esta organização.

Além das conclusões anteriores, assinalamos um resultado um pouco divergente do que é afirmado por Zaskis e Leikin (2008). Segundo as autoras, quando uma definição apresentada é incorreta trata-se de uma manifestação de dificuldades de raciocínio lógico que podem resultar de uma compreensão limitada do conceito definido ou da própria noção de definição. Os nossos resultados confirmam esta afirmação, mas mostram outras *nuances*. Por exemplo, a condição "Quadrilátero em que uma diagonal bisseta a outra" que foi apresentada para definir papagaio não é correta, por ser insuficiente. Porém, várias formandas consideraram-na correta por não se aperceberem que existem outros quadriláteros nestas condições, uma vez que inconscientemente imaginavam as diagonais perpendiculares.

Desta forma, as conclusões apoiam a conjetura formulada no que respeita à promoção dos conhecimentos sobre a noção de definição, as figuras geométricas e o raciocínio. Quanto à sequência seguida, consideramos que a construção de definições no final da sequência sobre os quadriláteros constituiu uma forma de questionar a organização em classes anteriormente estabelecida. Na etapa anterior, as formandas pareciam já ter entendido a hierarquia entre algumas figuras e, apesar das dificuldades iniciais com os papagaios, estabeleceram que estes incluem outras figuras como os quadrados. A construção de definições acabou por constituir um "teste final" à aceitação destas relações, desafiando as formandas a considerarem a coerência da atividade de organização local de conceitos.

Concluímos assim que a construção de definições desafiou significativamente as participantes, que manifestaram algumas dificuldades na aceitação do caráter inclusivo das definições e, principalmente, na construção de definições inclusivas e económicas. No entanto, mais importante do que as definições produzidas, ressalta-se o contributo da experiência de formação para o conhecimento das propriedades das figuras e o desenvolvimento do raciocínio, sobretudo do ponto de vista da estruturação geométrica. A sequência que orientou o estudo dos quadriláteros, reservando o processo de definir para a fase final, promoveu a articulação entre as definições e a sua classificação, dois processos interdependentes que devem ser coerentes.

## Notas

[1] Quadro elaborado no âmbito da tese de doutoramento da primeira autora.

[2] Consideramos também como definições económicas, um conjunto de condições quase mínimo de que é exemplo a definição de retângulo "Quadrilátero com quatro ângulos retos".

[3] Uma definição pode ser incorreta por ter elementos contraditórios ou ser ambígua. Contudo, na maioria dos casos, uma definição é incorreta se apresenta condições que não são suficientes ou não são necessárias.

## Agradecimentos

O presente artigo foi realizado no âmbito do projeto *O raciocínio geométrico e a visualização espacial na formação inicial de professores dos primeiros anos* sedeado no Centro Interdisciplinar de Estudos Educacionais - referência ESEXL/IPL-CIED/2016/A12.

## Referências

Albuquerque, C., Veloso, E., Rocha, I., Santos, L., Serrazina, L., & Nápoles, S. (2006). *A Matemática na formação inicial de professores*. Lisboa: APM e SPCE.

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843-908). Greenwich, CN: Information Age.

Battista, M. T. (2008). Development of the shape makers geometry microworld. In G. W. Blume & M. K. Heid (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Cases and perspectives* (vol. *2*, pp. 131-56). Charlotte: Information Age.

Brunheira, L., & Ponte, J. P. (2015). A influência das representações na classificação de quadriláteros em futuras professoras e educadoras. In L. Santos (Ed.), *Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 195-208). Bragança: SPIEM.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher, 32*(1), 9–13.

De Villiers, M. (1998). An alternative approach to proof in dynamic geometry. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), D*esigning learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp.369-394). New York and London: Routledge.

De Villiers, M (2017). From a golden rectangle to golden quadrilaterals and beyond. *At right angles, 6*(1), 64-69.

De Villiers, M., Govender, R. & Patterson, N. (2009). Defining in geometry. In T. V. Craine & R. Rubenstein (Eds.), *Understanding geometry for a changing world* (pp. 189-203). Reston, VA: NCTM.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point a view. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century* (pp. 37-52). Dordrecht/Boston: Kluwer.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel.

Fujita, T. (2012). Learners' level of understanding of the inclusion relations of quadrilaterals and prototype phenomenon. *The Journal of Mathematical Behavior*, *31*(1), 60-72.

Gutiérrez, A., & Jaime, A. (1999). Preservice primary teachers' understanding of the concept of altitude of a triangle. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *2*(3), 253-275.

Leighton, J. P. (2004). Defining and describing reason. In J. P. Leighton & R. J. Sternberg (Eds.), *The nature of reasoning* (pp. 3-11). Cambridge: Cambridge University Press.

Leikin, R., & Zazkis, R. (2010). On the content-dependence of prospective teachers' knowledge: a case of exemplifying definitions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *41*(4), 451-466.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and in the United States*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Mariotti, M. A. (1992). Geometrical reasoning as a dialectic between the figural and the conceptual aspects. *Structural Topology, 18*, 9-18.

Mariotti, M. A., & Fischbein, E. (1997). Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics*, *34*(3), 219-248.

NCTM (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática* (tradução do inglês). Lisboa: APM e IIE.

Oliveira, P. (2008). O raciocínio matemático à luz de uma epistemologia soft. *Educação e Matemática, 100,* 3-9.

Pólya, G. (1975). *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., & Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed., pp. 225-263). New York, NY: Routledge.

Sinclair, N., Bussi, M. G. B., De Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A., & Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: An ICME-13 survey team report. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 48*(5), 691-719.

Veloso, E. (1998). *Geometria: Temas actuais.* Lisboa: IIE.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65–81). Dordrecht: Kluwer.

Watson, A., & Mason, J. (2007). Taken-as-shared: A review of common assumptions about mathematical tasks in teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10*(4), 205-215.

Winicki-Landman, G., & Leikin, R. (2000). On equivalent and non-equivalent definitions I. *For the Learning of Mathematics, 20*(1), 17–21.

Zaslavsky, O., & Shir, K. (2005). Students' conceptions of a mathematical definition. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(4), 317-346.

Zazkis, R., & Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: A case of a square. *Educational Studies in Mathematics, 69*(2), 131-148.