

Da área ao volume – quando a intuição nos desafia

LINA BRUNHEIRA

Este artigo é uma espécie de sequência do artigo *Valorizar o raciocínio espacial no ensino e na aprendizagem da Geometria (e não só)*, publicado na EM 155. Nesse artigo, discuti o conceito *raciocínio espacial* recorrendo a várias resoluções do problema *Frascos de perfume*, também publicado no mesmo número, na secção *Materiais para a aula de matemática*. Retomo o mesmo problema neste artigo, concentrando-me, desta vez, num aspeto diferente – a relação entre a área e o volume e o papel da intuição na compreensão desta relação. Para facilidade de leitura, reproduzo este problema na figura 1.

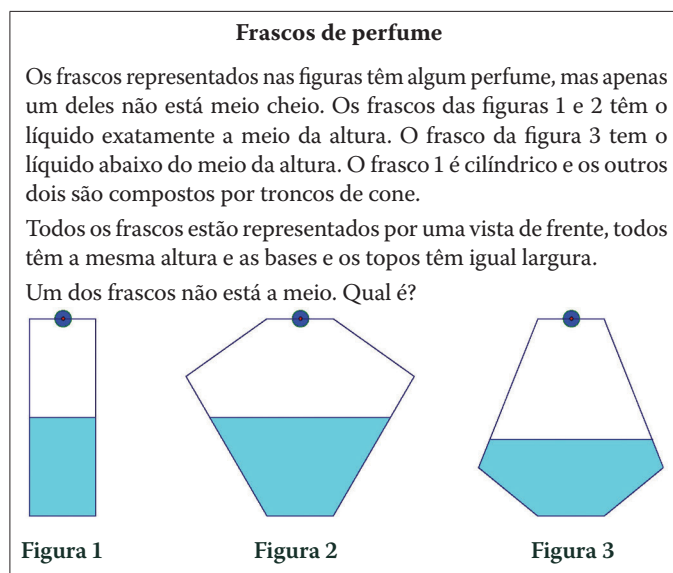


Figura 1. Enunciado do problema

No artigo atrás referido, afirmo que se trata de um problema do espaço 3D que se reduz a um problema do espaço 2D. Efetivamente, os frascos 2 e 3 são composições de troncos de cone, logo podemos raciocinar com base numa única vista.

Desse modo, concentremo-nos no frasco 2. Se decompusermos o hexágono correspondente à representação da parte vazia do frasco, obtemos um trapézio congruente com o correspondente à parte do frasco com perfume e ainda dois triângulos congruentes (figura 2). Sabemos que os trapézios são congruentes porque as suas bases são congruentes, são trapézios isósceles e têm a mesma altura. Consequentemente, há uma parte vazia do frasco

igual à parte com perfume, sobrando ainda duas partes sem perfume (representadas pelos triângulos). Logo, o frasco não está a meio. Note-se ainda que nesta resolução não recorremos ao cálculo de áreas, veremos de seguida porque é que esse é um aspeto sensível.

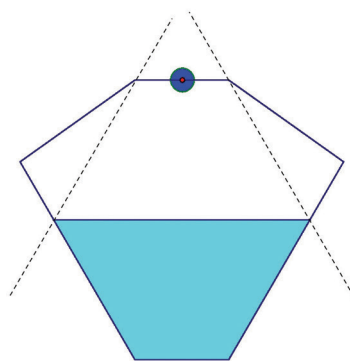


Figura 2. Decomposição do frasco 2

ÁREAS IGUAIS IMPLICAM VOLUMES IGUAIS?

Este ano letivo, alguns estudantes resolveram analisar ainda o frasco 3, apesar de já terem percebido que o frasco 2 era solução. Calcularam as áreas da parte vazia e da parte com líquido e, com surpresa, afirmaram “mas o frasco 3 também não está a meio!”. A razão da sua afirmação é simples – na figura apresentada, as áreas das partes com e sem líquido não são iguais. Então se as áreas não são iguais, como poderão sê-lo os volumes das partes dos frascos correspondentes?

Consideremos uma situação mais simples, como a do frasco 1 que é cilíndrico. Podemos argumentar que se os retângulos que decompõem a vista do frasco nas partes vazia e preenchida (retângulos branco e colorido) são congruentes, assim serão os respetivos cilindros e, portanto, o frasco está a meio. Neste caso, não há apenas igualdade na medida das áreas, mas também igualdade de figuras. No entanto, a questão não é assim tão simples. Imaginemos que usamos o mesmo retângulo para formar dois cilindros: o primeiro cilindro é obtido fazendo a revolução em torno de um eixo de simetria do retângulo e o segundo cilindro é obtido usando o outro eixo, tal como se mostram as figuras 3 e 4. Teremos o mesmo volume?



Figura 3

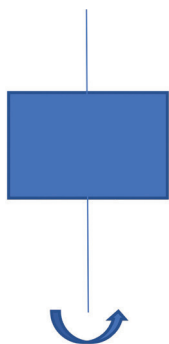


Figura 4

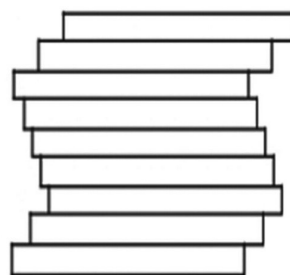
Designemos as medidas do retângulo por a e b . Calculando as expressões relativas aos volumes dos dois cilindros obtemos $\pi \times \left(\frac{b}{2}\right)^2 \times a$ para um caso e $\pi \times \left(\frac{a}{2}\right)^2 \times b$ para outro. Ora, igualando as expressões para obtermos os mesmos volumes, resulta facilmente a conclusão de que $a = b$, ou seja, só para o caso particular do quadrado é que os volumes dos sólidos gerados são iguais. Significa, portanto, que o facto de as figuras serem congruentes não é condição suficiente para que os volumes gerados pela revolução em torno de um eixo gerem sólidos com o mesmo volume. Em particular, a mesma conclusão se pode tirar para duas figuras com a mesma área.

O DESAFIO DA INTUIÇÃO

A conclusão a que acabámos de chegar não envolve processos muito complexos, podendo até ser facilitada com a utilização de valores específicos. Contudo, não só foi surpreendente como foi difícil de aceitar para muitas estudantes, pelo que deparei-me com o desafio de procurar “desmontar” esta convicção e encontrar o motivo que nos faz intuir que se as medidas das áreas forem iguais, os respetivos sólidos também terão o mesmo volume. Como referem Martinho e Rocha (2018) num artigo desta revista, “alguns alunos tendem a tirar conclusões precipitadas com base na intuição, o que ocorre quando transportam para novas situações um contexto que, apesar de lhe ser alheio, lhes aparece como logicamente coerente” (p. 35) e referem Stavy e Tirosh (2000) que explicam que, frequentemente, os alunos usam regras intuitivas como “mais A – mais B” ou “mesmo A – mesmo B”. Um dos exemplos dado pelas primeiras autoras envolve também cilindros: “Imaginemos dois cilindros construídos com uma folha de papel A4 [com a maior dimensão] ora na horizontal ora na vertical. Neste caso alguns alunos tendem a considerar que, se a folha (área da superfície lateral) é a mesma, então o volume dos cilindros também o será (regra “mesmo A – mesmo B”)” (p. 35). No caso que estamos a analisar, aplicar-se-á também a regra “mesmo A – mesmo B”, ou seja, mesma área, mesmo volume. Haverá alguma razão lógica para crermos nesta regra?

De facto, se pensarmos em dois prismas com igual altura e bases com a mesma medida de área, os dois prismas têm o mesmo volume e o mesmo acontece se compararmos um cilindro e um prisma com bases equivalentes. Na verdade, o mesmo se aplica

a outros sólidos com formas irregulares, mas que mantêm a mesma base e que, quando seccionados por um plano qualquer paralelo às bases, originam figuras equivalentes. Este resultado decorre do princípio de Cavalieri e a sua compreensão pode ser muito facilitada por experiências simples, envolvendo estruturas em camadas (figuras 5 a 8), como ficou patente no artigo de Cristina Loureiro, no *Caderno de Apontamentos de Geometria* da revista 143 (2017). Pensar num paralelepípedo como sendo a “acumulação” em altura de figuras iguais à base, por impreciso que seja já que as figuras não têm espessura, ajuda-nos a compreender a fórmula do volume do prisma ou do cilindro e relacionar duas variáveis – a área da base e o volume do sólido.



Figuras 5, 6, 7 e 8. Estruturas em camadas (Retirado de Loureiro, 2017)

Contudo, esta associação em que se aplica a regra “mesma área – mesmo volume” (desde que as alturas sejam iguais) deixa de ser válida para o caso em análise e, em última instância, para os nossos frascos. Vejamos porquê recorrendo a diferentes formas de estruturar mentalmente os sólidos, tomando como exemplo um cilindro. De acordo com a perspetiva anterior, podemos encarar o cilindro como a “acumulação” em altura da circunferência da base. Em alternativa, podemos perspetivar este sólido a partir da rotação de um retângulo em torno de um eixo de simetria. No primeiro caso, sempre que seccionamos o cilindro paralelamente à sua base obtemos circunferências congruentes (figura 9), pelo que se aplica o princípio de Cavalieri. No segundo caso, obtemos retângulos congruentes quando seccionamos o cilindro através de planos que contêm o eixo de rotação (figura 10), contudo esses planos não são paralelos, pelo que não se aplica o princípio de Cavalieri.

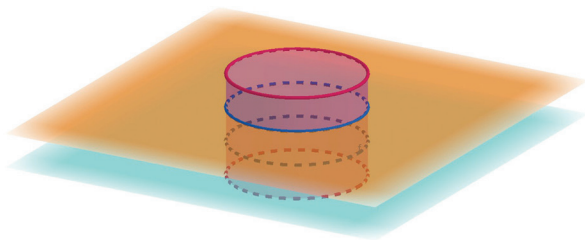


Figura 9

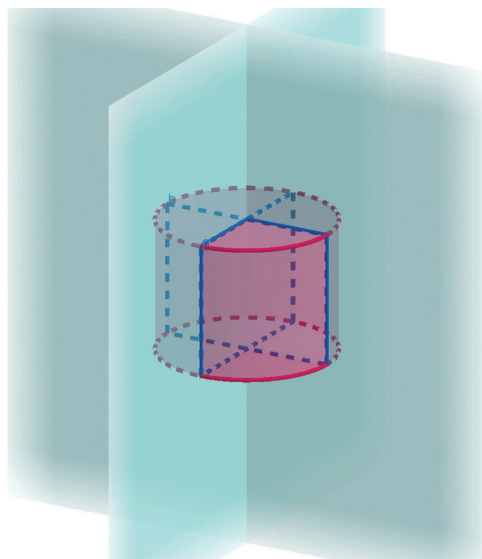


Figura 10

Claro que é possível que esta abordagem não seja suficiente para abalar a forte intuição de que os volumes devem ser sempre iguais... Se isso acontecer, é sempre possível recorrer a uma outra estratégia: colocar a figura do frasco 3 num programa de geometria dinâmica como o GeoGebra (figura 11), identificar os três troncos de cone que compõem o frasco e calcular o seu volume usando uma folha de cálculo. É evidente que o resultado obtido será um valor aproximado, mas talvez seja o suficiente para convencer...

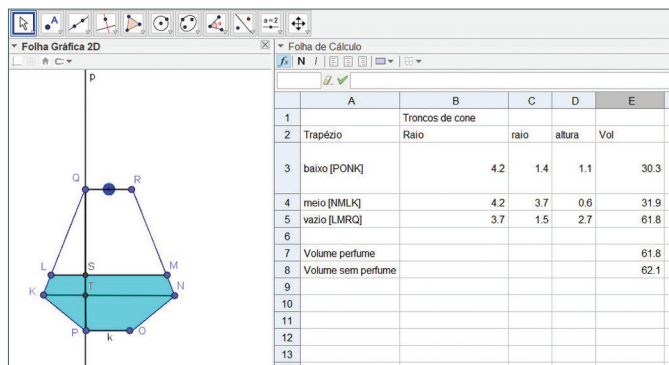


Figura 11

Chegados a esta fase, pode o leitor perguntar-se qual é a minha “posição” sobre a intuição. Esta não é uma questão estranha.

Na verdade, como tão bem descrevem Davis e Hersh (1995), a intuição pode ser vista como uma substituta perigosa e ilegítima para a demonstração ou, noutros contextos, pode ser vista como uma luz inexplicável através da qual alguns felizardos adquirem conhecimento matemático. Aliás, aqueles autores apresentam uma lista de seis significados atribuídos à intuição que mostram bem estas visões contraditórias. Por exemplo, *intuitivo é o oposto de rigoroso*, denotando um aspeto negativo, se bem que, como afirmam, também não sabemos bem o significado de rigoroso; *intuitivo significa plausível*, algo que é muito valorizado numa conjectura e que nos leva a avançar para a demonstração; *intuitivo significa visual*, o que pode também ser encarado positivamente porque a componente visual pode atribuir significado (ao contrário do abstrato) ou, pelo contrário, negativamente se formos levados a tomar como óbvia uma afirmação dúbia ou falsa (como a resposta errada relativa ao frasco 3).

Apesar destas visões contraditórias, é inegável o papel da intuição na matemática, como assinalaram matemáticos famosos tais como Hadamard, Steen ou Poincaré (Saraiva, 2008), pelo que é fundamental o reconhecimento da sua importância no ensino. Esta opção levanta duas questões: Como a desenvolvemos? Que propostas fazemos aos nossos alunos para mobilizá-la? Para responder à primeira, voltamos a Davis e Hersh:

Temos intuição porque temos representações mentais dos objectos matemáticos. Adquirimos estas representações, não através da memorização de fórmulas verbais, mas através de experiências repetidas (a um nível elementar, experiências de manipulação de objetos físicos; a um nível avançado, experiências de resolução de problemas e descoberta de coisas por nós próprios) (p. 366).

À segunda pergunta, ousa dar a minha resposta: criamos situações onde a intuição seja nossa aliada, mas também outras que nos desafie ou mesmo que nos engane. Propomos e, sobretudo, discutimos.

Referências

- Davis, P. J. & Hersh, R. (1995). *A experiência matemática*. Lisboa: Gradiva.
- Loureiro, C. (2017). Como ligar 2D com 3D? Sólidos em camadas, uma possibilidade inesperada e fascinante. *Educação e Matemática*, 143, 24-25.
- Martinho, H. & Rocha, H. (2018). A escrita matemática e a intuição em Geometria. *Educação e Matemática*, 149-150, 34-38.
- Saraiva, M. (2008). Raciocinar em Matemática com imagens visuais vagas e com intuição. *Educação e Matemática*, 100, 29-32.
- Stavy, R., & Tirosh, D. (2000). *How students (mis-)understand science and mathematics*. New York: Teachers College Press.

LINA BRUNHEIRA

ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO DE LISBOA