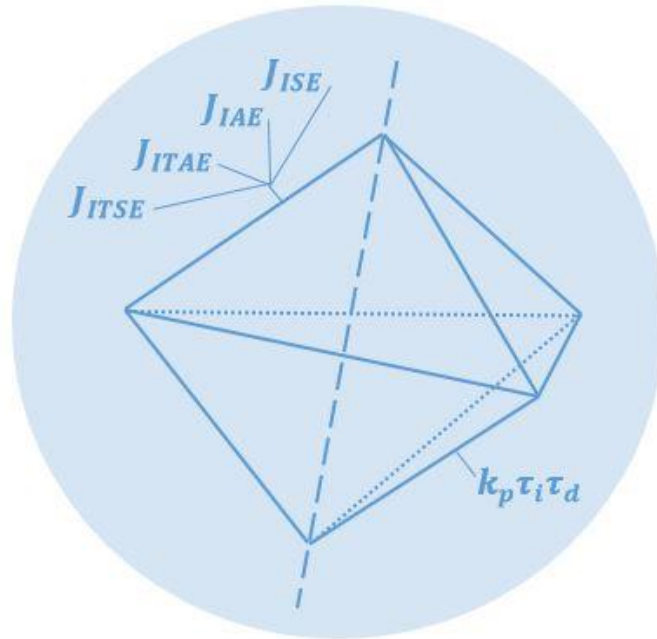




INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DE LISBOA
Área Departamental de Engenharia Mecânica



Auto-Sintonização de Controladores PID através de métodos de Otimização *Simplex*

ANDRÉ GONÇALO DA SILVA CALÇADA
(Licenciado)

Dissertação de natureza científica para obtenção do grau de Mestre
em Engenharia Mecânica

Orientadores:

Prof. Doutor José Manuel Prista do Valle Cardoso Igreja
Prof. Doutor Nuno Alexandre Soares Domingues

Júri:

Presidente: Prof. Doutor Ivan Rodolfo Pereira Garcia de Galvão
Vogais: Prof. Doutor Pedro Miguel Abreu Silva
Prof. Doutor Nuno Alexandre Soares Domingues

Abril de 2022



INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DE LISBOA
Área Departamental de Engenharia Mecânica

**Auto-Sintonização de Controladores PID através de
métodos de Otimização *Simplex***

ANDRÉ GONÇALO DA SILVA CALÇADA
(Licenciado)

Dissertação de natureza científica para obtenção do grau de Mestre
em Engenharia Mecânica

Orientadores:

Prof. Doutor José Manuel Prista do Valle Cardoso Igreja
Prof. Doutor Nuno Alexandre Soares Domingues

Júri:

Presidente: Prof. Doutor Ivan Rodolfo Pereira Garcia de Galvão
Vogais: Prof. Doutor Pedro Miguel Abreu Silva
Prof. Doutor Nuno Alexandre Soares Domingues

Abril de 2022

*“One good test is worth a thousand
expert opinions.”*

Wernher Von Braun (1912 – 1977)

Agradecimentos

No âmbito desta etapa final da realização do Trabalho Final de Mestrado gostaria de deixar neste espaço um profundo agradecimento a certas pessoas que estiveram ligadas de forma direta e indireta em todo este processo.

Em primeiro lugar, ao Professor José Igreja na qualidade de meu orientador do Trabalho Final de Mestrado pelo apoio, disponibilidade e paciência desde o momento em que propus o tema. Um profundo agradecimento à sua colaboração e compreensão na resolução de certas dificuldades que foram sentidas durante a execução do trabalho até ao chegar do objetivo delineado.

Em segundo, de forma indireta e não menos importante, um agradecimento eterno a todos os meus Professores do ISEL. Um agradecimento eterno e profundo pelo fato de todos vós me terem inculcido e ensinado ciência que para mim vou levar sempre comigo.

Foi um prazer poder ter sido vosso discente.

Grato eternamente por tudo.

*O documento apresenta-se segundo
o novo acordo ortográfico*

Resumo

No contexto atual, a procura por a melhoria contínua nas diversas áreas da ciência e do meio industrial é uma necessidade absoluta.

Nesse sentido, e de forma particular na área do controlo de sistemas essa necessidade é também verificada. Mais concretamente na área do controlo de sistemas com os órgãos PID essa situação é possível verificar devido ao número de estudos publicados com o objetivo de criar regras de sintonização para os órgãos PID, em que, se verifica que existem atualmente mais estudos publicados para a sintonização PID do que sobre o próprio algoritmo PID, justificada pela correlação da sintonização PID e desempenho ótimo do controlador. Ao se abordar a questão da procura por os melhores parâmetros para o controlador, surgem as técnicas da otimização, em que, por sua vez ao se abordar a disciplina da otimização é inevitável não pensar em como abordar um dos métodos de otimização mais conhecidos, sendo este o método *simplex*. Têm surgido estudos recentes neste sentido de como utilizar o método *simplex* para a sintonização de controladores PID, no entanto, estes mesmos estudos limitam-se a apresentar os resultados (que são positivos) mas todo o método e o procedimento em si de como efetivamente ser executado é grandemente ocultado.

Neste trabalho executa-se o método, a fim de testar a metodologia proposta, para dinâmicas de segunda, terceira e quarta ordens, bem como, explica-se e ilustra-se todo o processo em si, cuja chave principal passa pela construção de um sistema recursivo dado pela resposta do controlador discreto em consonância com o modelo de estado discreto do processo.

Como resultados obteve-se a sintonização do controlador PID para as dinâmicas de segunda, terceira e quarta ordens, com os valores das variáveis respetivamente de $(k_p, \tau_i, \tau_d = 0,11055, 0,362872, 1,61E^{-17})$, $(k_p, \tau_i, \tau_d = 0,118107, 0,075027, 9,654E^{-17})$ e $(k_p, \tau_i, \tau_d = 0,6161747, 0,212889, 0)$ e como conclusões verificou-se a eficácia do método aplicado, pela utilização do mesmo na minimização do índice ITAE com o método *simplex*, para todas as dinâmicas.

Palavras chave: Controladores PID, Sintonização PID, Método *Simplex*, Otimização de Controladores.

Abstract

Nowadays, the search for a continuous improvement in the different areas of science as well as in the industrial environment it is an absolute necessity.

That being alleged, in the domain of the control of systems that necessity it is also verified. More specifically in the domain of the control of systems that use PID controllers, it is possible to verify that fact due to the fact of the amount of studies published with the main goal of creating rules for PID tuning leading to the fact that there are more studies published for PID tuning then about the PID algorithm itself. This scenario it is justified by the correlation of the PID tuning and the optimal performance of the controller.

By addressing the question about the search for the best PID parameters, there is the emerging concept of optimization techniques and by addressing the question of optimization techniques there is no way of how not to think about the usage of one of the most popular optimization techniques that exists, which is the simplex method.

There have been recent studies of how to use the simplex method in order to obtain the PID controller parameters, but these studies limit themselves on showing the results (which are good) but the whole method itself it is greatly hidden.

In this work the method is executed, with de purpose of testing de proposal methodology, for second, third e fourth order dynamic systems, as well, as the explanation of the whole process in order of how to obtain the PID parameters by the usage of the simplex method, which the main key it's the construction of a calculus cycle given by the response of a discrete PID controller with the accordance of the discrete state space of the dynamic model.

As results it was obtained the PID values for second, third and fourth orders respectively of $(k_p, \tau_i, \tau_d = 0,11055, 0,362872, 1,61E^{-17})$, $(k_p, \tau_i, \tau_d = 0,118107, 0,075027, 9,654E^{-17})$ and $(k_p, \tau_i, \tau_d = 0,6161747, 0,212889, 0)$ and as conclusions it was verified the efficiency of the method, by the usage of himself in the minimization process of the ITAE index with the simplex method, for all the dynamics.

Keywords: PID Controllers, PID Tuning, Simplex Method, Controllers Optimization.

Índice

Agradecimentos	i
Resumo	v
Abstract	vii
Índice	ix
Índice de Figuras	xi
Índice de Tabelas	xiii
Lista de Abreviaturas, Acrónimos e de Siglas.....	xv
Lista de Símbolos	xvii
Lista de Funções <i>Maple</i>	xix
1. Introdução	1
1.1. Enquadramento	1
1.2. Objetivos	9
1.3. Estrutura do Trabalho	9
2. Método <i>Simplex</i>	11
2.1. Métodos <i>Simplex</i>	11
2.2. O Método de <i>Nelder-Mead</i>	11
2.3. Critério de Precisão e Índice de Precisão	12
2.4. Operações Sobre um <i>Simplex</i>	13
2.5. Dados de Inicialização da Rotina	13
2.6. O Algoritmo	14
2.6.1. A Rotina de Busca	14
3. A Formalização do Problema de Otimização	17
3.1. Particularidades Sobre Problemas de Otimização	17
3.1.1. Pontos Extremos: Caso Diferenciável	18
3.1.2. Pontos Extremos: Caso Não Diferenciável	19
3.2. Sintonização PID, Discretização do Sistema e Formalização das Funções Objetivo	19
4. Avaliação do Desempenho da Malha de Controlo	24
4.1. Revisão Sobre a Malha de Controlo e Seleção de Variáveis	26
4.2. Recolha de Dados	27

4.3. Observação de Tendências das Variáveis no Domínio do Tempo	28
4.4. Avaliação do Desempenho com Base em Índices Caracterizadores da Resposta ao Degrau	30
4.5. Avaliação do Desempenho com Base em Índices de Integrais	33
4.5.1. ISE – Integral do Quadrado do Erro	34
4.5.2. IAE – Integral do Valor Absoluto do Erro	35
4.5.3. ITAE – Integral do Tempo Multiplicado pelo Valor Absoluto do Erro ...	35
4.5.4. ITSE – Integral do Tempo Multiplicado pelo Quadrado do Erro	36
5. Casos de Estudo	37
5.1. Dinâmica de Segunda Ordem	37
5.2. Dinâmica de Terceira Ordem	38
5.3. Dinâmica de Quarta Ordem	39
6. Resultados	41
6.1. Resultados de Abordagem Heurística para Dinâmica de Segunda Ordem	42
6.2. Resultados de Abordagem Heurística para Dinâmica de Terceira Ordem	48
6.3. Resultados de Abordagem Heurística para Dinâmica de Quarta Ordem	52
6.4. Interpretação de Resultados	56
7. Conclusões e Trabalhos Futuros.....	61
7.1. Conclusões	61
7.2. Trabalhos Futuros	62
Referências Bibliográficas.....	65
Apêndices	69
Apêndice I.....	71
Apêndice II.....	75
Apêndice III	79
Apêndice IV.....	83
Apêndice V.....	95
Apêndice VI.....	101
Apêndice VII	111

Índice de Figuras

Figura 1 – Interligação entre os seis conceitos essenciais da teoria do controlo.....	1
Figura 2 – Princípio de funcionamento de um controlador PID. Adaptado de [30].....	4
Figura 3 – A importante dependência das condições iniciais para o método de Simplex. Adaptado de [46]	8
Figura 4 – O simplex no espaço tridimensional. Adaptado de [29].	15
Figura 5 – Fluxograma do método simplex.....	16
Figura 6 – Análise de todos os índices numa perspetiva de ‘Resposta ao Degrau’ de uma dinâmica de quarta ordem aleatória. Adaptado de [47].....	25
Figura 7 – Análise de todos os índices numa perspetiva de ‘Resposta ao Degrau’ de uma dinâmica de quarta ordem aleatória. Adaptado de [47].....	25
Figura 8 – Conjunto típico de dados no domínio do tempo. Adaptado de [40]	30
Figura 9 – Respostas ao degrau com diferentes rácios de ruído-sinal. Adaptado de [40]	31
Figura 10 – Resposta ao degrau típica com os seus parâmetros. Adaptado de [40].....	33
Figura 11 – Sistema massa, mola e amortecedor.....	38
Figura 12 – Ilustração do cálculo da variável estado X_1 no passo em $k = 2$	42
Figura 13 - Ilustração do cálculo da variável estado X_2 no passo em $k = 2$	43
Figura 14 – Ilustração do cálculo da variável processo Y no passo $k = 2$	43
Figura 15 – Ilustração do cálculo do erro no passo $k = 2$	43
Figura 16 – Ilustração do cálculo da resposta do controlador U no passo $k = 2$	44
Figura 17 – Gráfico da função erro de dinâmica de segunda ordem, constituído pela amplitude do erro em função do tempo	44
Figura 18 – Gráfico da função output de dinâmica de segunda ordem, constituído pela amplitude do output em função do tempo	45
Figura 19 – Gráfico da função output de dinâmica de segunda ordem, constituído pela amplitude do output derivada da minimização do índice ISE em função do tempo	45
Figura 20 – Gráfico da função output de dinâmica de segunda ordem, constituído pela amplitude do output derivada da minimização do índice IAE em função do tempo.....	46
Figura 21 – Gráfico da função output de dinâmica de segunda ordem, constituído pela amplitude do output derivada da minimização do índice ITAE em função do tempo	46

Figura 22 – Gráfico da função output de dinâmica de segunda ordem, constituído pela amplitude do output derivada da minimização do índice ITSE em função do tempo.....	47
Figura 23 – Gráfico da função erro de dinâmica de terceira ordem, constituído pela amplitude do erro em função do tempo	49
Figura 24 – Gráfico da função output de dinâmica de terceira ordem, constituído pela amplitude do output em função do tempo	49
Figura 25 – Gráfico da função output de dinâmica de terceira ordem, constituído pela amplitude do output derivada da minimização do índice ISE em função do tempo	50
Figura 26 – Gráfico da função output de dinâmica de terceira ordem, constituído pela amplitude do output derivada da minimização do índice IAE em função do tempo.....	50
Figura 27 – Gráfico da função output de dinâmica de terceira ordem, constituído pela amplitude do output derivada da minimização do índice ITAE em função do tempo	51
Figura 28 – Gráfico da função output de dinâmica de terceira ordem, constituído pela amplitude do output derivada da minimização do índice ITSE em função do tempo.....	51
Figura 29 – Gráfico da função erro de dinâmica de quarta ordem, constituído pela amplitude do erro em função do tempo	53
Figura 30 – Gráfico da função output de dinâmica de quarta ordem, constituído pela amplitude do output em função do tempo	53
Figura 31 – Gráfico da função output de dinâmica de quarta ordem, constituído pela amplitude do output derivada da minimização do índice ISE em função do tempo	54
Figura 32 – Gráfico da função output de dinâmica de quarta ordem, constituído pela amplitude do output derivada da minimização do índice IAE em função do tempo.....	54
Figura 33 – Gráfico da função output de dinâmica de quarta ordem, constituído pela amplitude do output derivada da minimização do índice ITAE em função do tempo	55
Figura 34 – Gráfico da função output de dinâmica de quarta ordem, constituído pela amplitude do output derivada da minimização do índice ITSE em função do tempo.....	55
Figura 35 – Gráfico da sobreposição das diversas funções output de dinâmica de segunda ordem.....	59
Figura 36 – Gráfico da sobreposição das diversas funções output de dinâmica de terceira ordem.....	59
Figura 37 – Gráfico da sobreposição das diversas funções output de dinâmica de quarta ordem.....	60

Índice de Tabelas

Tabela 1 – Análise analítica da resposta ao degrau da função output de dinâmica de segunda ordem proveniente da minimização dos índices de performance ISE, IAE, ITAE e ITSE.....	47
Tabela 2 – Análise analítica da resposta ao degrau da função output de dinâmica de segunda ordem proveniente de parâmetros heurísticos do controlador.....	48
Tabela 3 – Análise analítica da resposta ao degrau da função output de dinâmica de terceira ordem proveniente da minimização dos índices de performance ISE, IAE, ITAE e ITSE.....	52
Tabela 4 – Análise analítica da resposta ao degrau da função output de dinâmica de terceira ordem proveniente de parâmetros heurísticos do controlador.....	52
Tabela 5 – Análise analítica da resposta ao degrau da função output de dinâmica de quarta ordem proveniente da minimização dos índices de performance ISE, IAE, ITAE e ITSE.....	56
Tabela 6 – Análise analítica da resposta ao degrau da função output de dinâmica de quarta ordem proveniente de parâmetros heurísticos do controlador.....	56

Lista de Abreviaturas, Acrónimos e de Siglas

<i>AI</i>	Area Index
IAE	Integral do Valor Absoluto do Erro
<i>II</i>	Idle Index
ITAE	Integral do Tempo Multiplicado pelo Valor Absoluto do Erro
ITSE	Integral do Tempo Multiplicado pelo Quadrado do Erro
ISE	Integral do Quadrado do Erro
<i>MIMO</i>	<i>Multiple Input Multiple Output</i>
<i>OI</i>	<i>Output Index</i>
PD	Proporcional e Derivativo
PI	Proporcional e Integral
PID	Proporcional, Integral e Derivativo
<i>RI</i>	<i>R-Index</i>
<i>SAMA</i>	<i>Scientific Apparatus Makers Association</i>
<i>SISO</i>	<i>Single Input Single Output</i>

Lista de Símbolos

F	Função custo arbitrária
D	Domínio da função custo
\mathbb{R}	Conjunto dos números reais
\mathbb{R}^3	Espaço cartesiano real tridimensional
\subseteq	Relação de inclusão entre conjuntos
g_i	Função restrição
\in	Relação de pertença
ϵ	Índice de precisão
P_1	Vértice do 3-simplex
P_2	Vértice do 3-simplex
P_3	Vértice do 3-simplex
P_4	Vértice do 3-simplex
R_1	Reflexão de P_1 em torno do plano que contém P_2, P_3 e P_4
$\overrightarrow{OR_1}$	Segmento de reta orientado com origem O e extremidade R_1
q	Fator de contração
p	Fator de expansão
$\overrightarrow{R_1P_1}$	Segmento de reta orientado com origem R_1 e extremidade P_1
P'_i	O transformado de P_i por redução de arestas
$\overrightarrow{P_iP_4}$	Segmento de reta orientado com origem P_i e extremidade P_4
\vec{e}_x	Versor do eixo O_x
\vec{e}_y	Versor do eixo O_y
\vec{e}_z	Versor do eixo O_z
S_i	3-simplex inicial
J_{ISE}	Função de custo do Integral do Quadrado do Erro

- J_{IAE} Função de custo do Integral do Valor Absoluto do Erro
- J_{ITAE} Função de custo do Integral do Tempo Multiplicado pelo Valor Absoluto do Erro
- J_{ITSE} Função de custo do Integral do Tempo Multiplicado pelo Quadrado do Erro
- $y_0(t)$ *Setpoint*
- $u(t)$ *Output* do controlador
- $y(t)$ *Output* do processo
- $e(t)$ Erro do processo
- k_p Variável proporcional do controlador
- τ_i Variável integral do controlador
- τ_d Variável derivativa do controlador

Lista de funções *Maple*

Função	Definição
<i>with(DynamicSystems):</i>	Executa a biblioteca de programação associada a criar, manipular e a simular modelos de sistemas lineares.
<i>TransferFunction():</i>	Cria uma função transferência.
<i>PrintSystem()</i>	Revela todo o conteúdo de uma função transferência definida <i>a priori</i> .
<i>ToDiscrete(, ,):</i>	Executa a passagem do domínio contínuo para o domínio discreto de uma determinada função transferência definida <i>a priori</i> , durante um determinado tempo de amostragem e através de um determinado método de discretização.
<i>Restart</i>	Apaga toda a programação definida <i>a priori</i> .
<i>SystemOptions()</i>	Função que permite que a partir de determinada operação as mesmas sejam realizadas no domínio discreto ou no domínio contínuo.

1. Introdução

1.1. Enquadramento

A teoria do controlo é constituída por seis conceitos físicos de carácter fundamental que se encontram intrinsecamente ligados e correlacionados entre si. Sendo estes, o *input* (sinal de entrada), o controlador, o modelo de processo, o *output* (sinal de saída), a discretização e a malha do controlo. A figura 1 ilustra a correlação e a interligação entre os seis conceitos físicos de carácter fundamental constituintes da teoria do controlo.

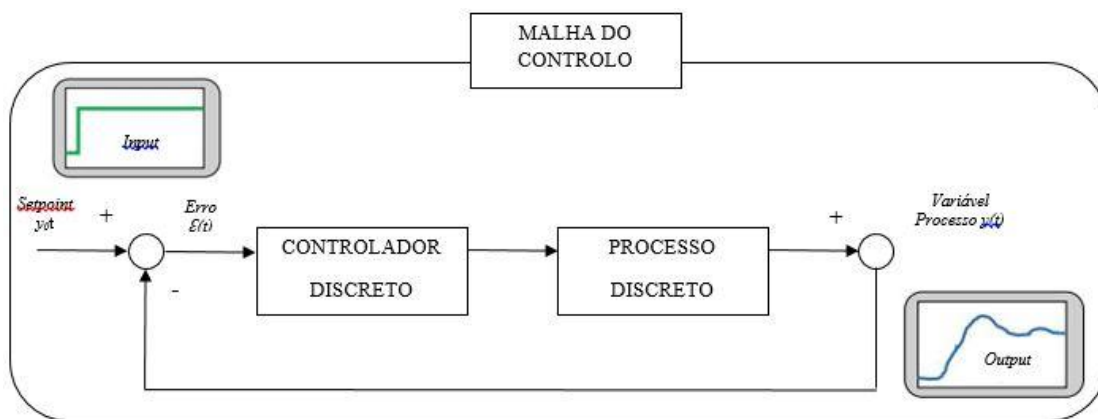


Figura 1 – Interligação entre os seis conceitos essenciais da teoria do controlo

Os controladores PID (Proporcional, Integral e Derivativo) são órgãos eletrónicos de máquinas e/ ou de processos industriais que atuam sobre os modelos de processo por meio do princípio da terceira Lei de Newton, isto é, tendo como base os princípios de ação e reação.

Historicamente, desde a sua conceção, durante a sua evolução (muito proporcionada nas décadas de 50 e 60 com a área espacial) e até à data contemporânea, os controladores PID constituem ainda os órgãos de controlo mais populares e mais usados [3-4]. O motivo principal para o uso desta tecnologia está relacionada com o fato de ser simples, tanto a nível funcional como estrutural, ser fácil de sintonizar e ter um baixo custo de implementação [8-10]. O controlador PID é constituído por três ações, sendo estas respetivamente, a proporcional (P), a integral (I) e a derivativa (D).

A expressão que define o controlador PID apresenta a seguinte forma (1) [14-18]:

$$u(t) = k_p \left(e(t) + \frac{1}{\tau_i} \int_0^t e(t) dt + \tau_d \frac{de}{dt} \right) \quad (1)$$

Em que, u , representa a variável de controlo, e , o erro definido por $y_0(t) - y(t)$, onde $y_0(t)$ é o valor de referência (*Setpoint*) e $y(t)$ o valor de saída do processo (variável do processo). A ideologia, portanto, associada a um controlador PID é ler um transdutor, calcular a resposta de saída do atuador através do cálculo proporcional, integral e derivativo e então somar os três componentes para proceder ao cálculo da saída [14-18].

A saída do controlador PID é composta pelas três ações e baseada no erro da medida do processo a ser controlado. Se a malha do processo de controlo estiver com o funcionamento correto, qualquer que seja a variação no erro, causada por uma mudança de *Setpoint* ou por perturbação induzida no processo, será eliminada rapidamente por uma combinação dos três fatores P, I e D.

O fator proporcional (k_p) resulta do produto entre o ganho e o erro de medida. Desta forma, quanto maior o ganho ou o erro, maior será a saída do fator proporcional. Colocando um ganho proporcional, demasiado elevado levará o controlador a exceder o *Setpoint* e pode colocar o sistema em oscilação. A componente proporcional mostra-se insuficiente quando o erro se torna muito pequeno e a saída do controlador se torna diminuta.

O fator integral (τ_i) pode ser interpretado como um acumulador de erro que tanto pode aumentar a componente integral quando o erro for positivo, como diminuir quando este for negativo. Quando o controlador está a desempenhar de forma eficaz a sua tarefa, o valor do integral deve ser praticamente nulo, mesmo quando for demasiado pequeno para a componente proporcional, o integral está a acumulá-lo até que seja suficiente para atuar. Assim, uma das tarefas da componente integral é eliminar o erro em regime estacionário. O ponto fraco da componente de integral é que pode contribuir para a sobre-elevação se o seu valor for muito elevado ao se aproximar do *Setpoint*. Quanto menor o tempo de integral, mais agressivo será o efeito desta componente na supressão de erro.

A componente derivativa (τ_d) compara o erro atual com o erro da última verificação. Esta, portanto, depende da taxa de variação do erro. Quanto maior o ganho da componente derivativa ou maior for a variação de erro, maior será a componente derivativa. O efeito da componente derivativa é contrapor a possível sobre-elevação provocada pelas componentes proporcional e integral. Uma derivativa bem sintonizada possibilita a utilização de componentes proporcional e integral mais agressivas. Quanto maior for o tempo da componente derivativa, maior será a sua agressividade. Se o ganho da ação derivativa não for limitado, pode atingir valores suficientes para atuar no processo sob a forma de saltos bruscos e descontrolados quando o sinal do erro incorporar ruído de alta frequência ou na resposta ao degrau.

Os controladores PID são órgãos que não são necessariamente colocados em funcionamento com uma dependência das três variáveis, isto é, existem também bastantes aplicações para controladores somente com a ação proporcional e integral (PI) e proporcional e derivativa (PD), sendo que esta conjugação já não é bastante utilizada como a combinação PI. [22-24].

Quando (k_p, τ_i, τ_d) são não nulos, agrupam-se linearmente os três modos e, deste modo, as suas vantagens e desvantagens. Trata-se de um compensador de atraso e de avanço. A ação do controlador PID ocorre na região de baixa frequência e a ação do controlador PD ocorre na região das altas frequências, o que, conseqüentemente, permite efetivar um melhoramento do desempenho transitório e estacionário [30].

A figura 2 ilustra, portanto, de uma forma resumida o princípio de funcionamento de um controlador PID, em que, a variável de controle, u , é recursivamente definida e continuamente calculada com base no valor de erro medido no passado, presente e futuro.

Concretamente, a variável proporcional do controlador opera com uma dependência associada ao erro no presente do processo, a variável integral opera com uma dependência associada aos erros acumulados já passados e a variável derivativa opera com base numa previsão dos futuros erros do processo no domínio do tempo.

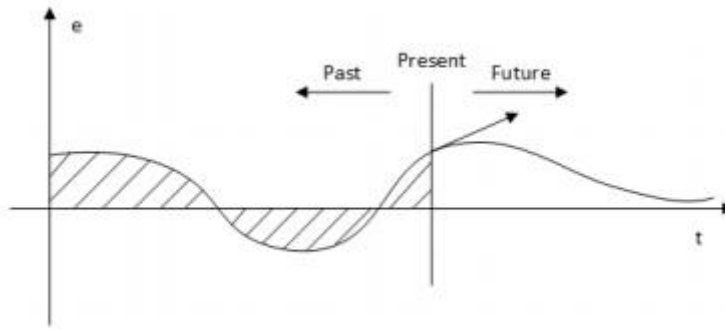


Figura 2 – Princípio de funcionamento de um controlador PID. Adaptado de [30]

Os modelos de processo são as expressões que exprimem e conservam os conceitos físicos, sob a forma de linguagem matemática, que se pretendem controlar e atuar sobre. Estas são sempre desenvolvidas e expressas tendo como base a primeira, a segunda e a terceira Leis de *Newton*. Os modelos de processo são, portanto, a modelagem do sistema que se pretende controlar e atuar sobre. Estes, por sua vez, podem ser decompostos ou apresentados na forma de modelo de estado ou na forma de função de transferência.

De acordo com as teorias do controlo, e também em conformidade com a maior parte das regras de sintonia de controladores, as mesmas assentam maioritariamente em funções de transferência. Independentemente de como o modelo de processo for apresentado, é, portanto, possível converter um modelo de estado numa função de transferência e também é possível converter uma função de transferência num modelo de estado.

Para a conversão de um modelo de estado numa função de transferência, tem-se que [30]:

Dadas as equações de estado e resposta (2) e (3) respetivamente

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2)$$

$$y = Cx + Du \quad (3)$$

e aplicando a transformada de *Laplace* a (2) e a (3), tendo em conta condições iniciais nulas, obtém-se (4) e (5):

$$X(s) = AX(s) + BU(s) \quad (4)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) \quad (5)$$

Explicitando $X(s)$ na equação (4), tem-se que:

$$(sI - A)X(s) = BU(s) \quad (5)$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1} + BU(s) \quad (6)$$

Em que, I é a matriz identidade e substituindo a equação (6) na equação (5), obtém-se:

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}BU(s) + DU(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s) \quad (7)$$

Designa-se, portanto a matriz $[C(sI - A)^{-1}B + D]$ de matriz de função transferência, uma vez que ela relaciona o vetor de saída $Y(s)$ ao vetor de entrada, $U(s)$.

Para a conversão de uma função transferência num modelo de estado, tem-se que:

Considerando $G(s)$ uma função de transferência (8):

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} \quad (8)$$

Introduzindo a varável auxiliar $W(s)$ de modo que (9) e (10):

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0 \quad (9)$$

$$W(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 \quad (10)$$

Tem-se que (11) e (12):

$$Y(s) = (b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0)W(s) \quad (11)$$

$$R(s) = (s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0)W(s) \quad (12)$$

Ou, passando para o tempo (13) e (14):

$$y(t) = b_{n-1}w^{(n-1)}(t) + \dots + b_1w'(t) + b_0w(t) \quad (13)$$

$$r(t) = w^{(n)}(t) + a_{n-1}w^{(n-1)}(t) + \dots + a_1w'(t) + a_0w(t) \quad (14)$$

Definindo as funções (15):

$$x_1(t) = w(t), x_2(t) = w'(t), \dots, x_n(t) = w^{(n-1)}(t) \quad (15)$$

Conclui-se que (16), (17) e (18):

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \dot{x}_2(t) = x_3(t), \dots, \dot{x}_{n-1}(t) = x_n(t) \quad (16)$$

$$\dot{x}_n(t) = -a_0x_1(t) - a_1x_2(t), \dots, -a_{n-1}x_n(t) + r(t) \quad (17)$$

$$y(t) = -b_0x_1(t) - b_1x_2(t) + \dots + b_{n-1}x_n(t) \quad (18)$$

Deste modo a representação em modelo de estado fica com (19), (20), (21) e (22):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$C = [b_0 \quad b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_{n-1}] \quad (21)$$

$$D = 0 \quad (22)$$

De notar que com este processo geral que a representação de uma função de transferência em modelo de estado não é um processo de carácter único.

Ao iniciar-se a operação de fecho da malha, que traduz o início da atuação do controlador sobre o modelo de planta e a recolha de uma resposta (*feedback*),

recursivamente, a discretização é um processo de caráter imperativo, na medida em que, todos os aparelhos eletrônicos só atuam de modo digital, ou seja, no domínio do tempo discreto.

A maior parte dos modelos de processo, que traduzem as grandezas físicas sobre as quais se pretende atuar sobre, são grandezas analógicas por natureza, tais como temperatura, pressão, velocidade sendo, portanto, representadas por valores contínuos e, assim, para poderem ser processadas por sistemas digitais precisam antes ser convertidas para uma cadeia de bits. Por este motivo têm grande utilidade e são de grande importância as técnicas de discretização, ou seja, a passagem de representação analógica de sistemas para a sua representação discreta [36], [39], [43].

A malha do controle é o conceito que traduz o funcionamento do conjunto global, isto é, designa-se por malha do controle o sinal desde a sua entrada, à sua saída e até à sua realimentação de forma recursiva. É, portanto, com o objetivo de melhorar o funcionamento do conjunto, ou seja, da malha do controle, que têm surgido e sido desenvolvidas novas técnicas de sintonia de controladores PID face às que foram historicamente desenvolvidas, como por exemplo, o método de *Ziegler e Nichols* ou o método de *Cohen-Coon* [36], [39], [43].

Os estudos nesta área têm incidido sobre a utilização de técnicas de otimização aplicadas à engenharia, como a utilização da programação quadrática (programação não linear) e os algoritmos genéticos para a sintonia das três variáveis do controlador PID. Tendo em conta esta abordagem de estudo a partir de técnicas não lineares, os estudos referem que esta análise deve incidir na construção de funções de custo que devem posteriormente ser minimizadas ou maximizadas em função dos objetivos que se pretendem.

Concretamente, nesta situação, a situação em questão trata-se de um cenário, em que, se pretende alcançar as três variáveis do controlador fazendo com que o erro obtido pelo processo seja o menor possível. Portanto, neste caso, a função custo a construir é a função erro e o objetivo que se pretende é que a mesma seja o mais diminuta possível.

Tendo em conta este cenário, o processo da sintonia do controlador PID é um processo, em que, se está perante uma situação em que a função erro construída é um valor

numérico que não apresenta derivadas nem dependências explícitas, e tal como referido anteriormente, o número de variáveis a calcular são somente três, não sendo, portanto, superior a uma dúzia de variáveis, fazendo com que estas duas premissas sejam ideais para a aplicação do método de *Simplex* de caráter quadrático [11-13].

Os estudos desenvolvidos nesta área sugerem que para a aplicação desde cálculo que se tenha como base, face à aplicação direta do método, uma abordagem heurística, isto é, uma abordagem de fornecer os valores ao sistema por mera intuição, ou uma abordagem de pré sintonia, por métodos historicamente já estudados por exemplo, para que antes da aplicação do método se se possa aproximar o mais possível dos verdadeiros resultados. Se não se tiver em conta este método de operação, pode-se correr o risco de aquando do processo de inicialização do algoritmo estar-se perante uma situação em que o algoritmo detetou um ponto mínimo, mas que de fato não é o mínimo global [3].

Como ilustra a figura 3, não fazendo uma pré sintonia ou uma abordagem heurística de sintonia primeiramente, metaforicamente pode-se correr o risco de se estar perante um vale, mas que não é o vale maior. As condições iniciais para a aplicação deste método são, portanto, deveras importantes, na medida em que para efeitos de inicialização do método de otimização é razoável tomar-se para primeiros valores da sintonização do controlador aqueles que obtidos por um primeiro processo de sintonização com o intuito de se tornar mais provável a obtenção de resultados o mais próximo do que é pretendido. [3].

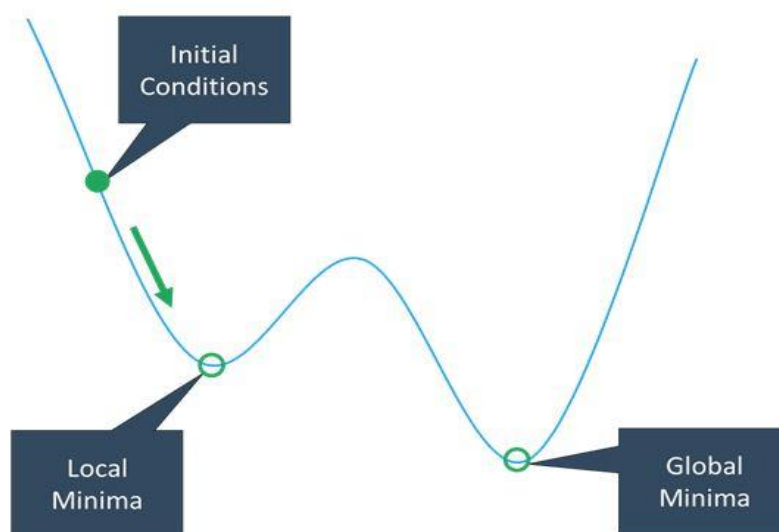


Figura 3 – A importante dependência das condições iniciais para o método de Simplex. Adaptado de [46].

1.2. Definição de Objetivos

A presente dissertação tem como objetivos proceder à sintonia do controlador PID pelo método *Simplex*, procedendo deste modo ao cálculo das três variáveis constituintes do controlador (k_p, τ_i, τ_d). Procede-se a esta sintonia testando três dinâmicas diferentes (segunda, terceira e quarta ordens).

Agindo em conformidade com os estudos já desenvolvidos nesta área, para avaliar a eficácia deste método procede-se à comparação dos resultados obtidos comparando os mesmos partindo primeiramente de uma abordagem heurística.

1.3. A Estrutura do Trabalho

A estrutura da presente dissertação é assente em sete capítulos, incluindo o presente.

O capítulo 2 descreve os métodos *Simplex*, onde se inclui o método de *Nelder-Mead*, bem como o algoritmo, as características do *Simplex*, as propriedades e a convergência do método de *Nelder-Mead*.

O capítulo 3 detalha a formalização do problema de otimização para que se possa iniciar a resolução do problema e obter resultados. São então definidas as funções objetivo e as respetivas restrições para que o algoritmo possa inicializar o processo de resolução.

O capítulo 4 descreve os índices de desempenho que se encontram estudados cientificamente até à data contemporânea de maneira a que se consiga então perceber a eficácia do método de *Simplex* face aos métodos que se pretender comparar.

O capítulo 5 aborda três casos de estudo a fim de se por em prática a metodologia proposta.

O capítulo 6 mostra os resultados numéricos obtidos decorrentes dos casos de estudo realizados, confrontando os resultados obtidos decorrentes de uma abordagem heurística inicial com os consequentes resultados otimizados.

No capítulo 7 encontram-se as conclusões acerca do desempenho do método *Simplex* e algumas considerações de propostas para trabalhos futuros.

Os apêndices I, II e III contêm a programação em *Maple* para o processo de discretização das funções transferência de segunda, terceira e quarta ordem, respectivamente, a serem utilizados no caso de estudo.

Nos apêndices IV, V e VI encontra-se o algoritmo de sistema recursivo desenvolvido em *Excel* para posteriormente dar início ao cálculo das variáveis pelo método *Simplex*, tendo em conta a abordagem heurística para os três casos de estudo propostos.

No apêndice VII encontra-se a ilustração da aplicação do método *Simplex* ao algoritmo de sistema de sistema recursivo construído em *Excel* pela utilização de um *Add-In* do *Microsoft Excel*, designado de *GlobalMinimize*.

2. Método de *Nelder Mead*

2.1 Métodos *Simplex*

Um *simplex* em \mathbb{R}^n é um polítopo formado pelo conjunto de $n + 1$ pontos em \mathbb{R}^n chamados vértices do *simplex*. Os métodos *simplex* são métodos de busca direta, isto é, são métodos iterativos, em que, não procedem ao cálculo, nem realizam aproximações de derivadas e utilizam a função objetivo para sucessivas comparações ao longo das diversas iterações. Estes métodos partem de um *simplex* inicial, em que, a cada iteração um novo *simplex* sendo que posteriormente são realizados testes com os valores da função nos vértices. Os vértices constantemente atualizados, satisfazem de alguma maneira uma condição pré determinada *a priori* [25-26], [29], [44].

O primeiro método *simplex* foi proposto por Spendley, Hext e Himsforth e parte de um *simplex* inicial em \mathbb{R}^n com $n+1$ vértices, em que, a cada iteração procede à exclusão do pior dos vértices (onde a função tem seu valor maior), através da reflexão axonométrica deste vértice em relação ao centróide dos n melhores vértices, proporcionando deste modo um novo vértice com o valor da função menor que o do vértice excluído, ou procede à repetição da mesma operação para o segundo pior vértice, refletindo-o axonometricamente em relação ao centróide de outros n vértices. O segundo método *Simplex* foi publicado por John Nelder e Roger Mead em 1965 com o intuito de melhorar o método anteriormente publicado. Mudanças neste método têm vindo a ser propostas desde então, assim como novos métodos baseados em *simplex* [6-7].

Recentemente, continuam a ser realizados estudos científicos utilizando o Método de *Nelder-Mead*, associados à área do controlo, mas com algumas modificações. Por exemplo, Fu, Zhou, Liang, & Lin, em 2018 [29] utilizam o método mas com uma adaptação ao índice de precisão ou critério de precisão do método (também denominado por critério de paragem segundo outros autores). O método de *Nelder-Mead* é descrito com detalhe no próximo subcapítulo.

2.2 O Método de *Nelder-Mead*

O método de *Nelder-Mead* é um dos métodos de busca direta mais utilizados em problemas de minimização de uma função de n variáveis, especialmente nas diversas áreas engenharia.

A popularidade do método deve-se a diversos fatores, nomeadamente:

- A facilidade da implementação computacional, por meio de programação;
- A não necessidade do cálculo explícito ou implícito de quaisquer derivadas da função objetivo, usando apenas valores da função numérica;
- Em cada iteração, poucas avaliações da função objetivo são realizadas, sendo necessário no máximo $n + 2$ avaliações da função;
- O acentuado decréscimo do valor da função objetivo nas primeiras iterações.

Esta seção discute uma adaptação do método de Nelder-Mead a problemas de otimização com a forma:

$$\begin{aligned} &\text{Encontrar o mínimo local de } F : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ &\text{Sujeito às restrições } g_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, g_i(x) \geq 0, x \in D, i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Em que, D , é um subconjunto de \mathbb{R}^3 definido pela natureza do problema. Essencialmente, o método consiste numa rotina de sucessivas comparações dos valores de F entre os vértices de um 3 *simplex*, isto é, um tetraedro contido em D sobre o qual atuam operações que têm em conta as restrições do problema. A rotina termina quando se atinge um 3-simplex onde os valores de F nos seus vértices satisfazem um critério de precisão pré-estabelecido, tal que, pelo menos, um dos vértices obtido corresponde à solução ótima do problema (neste caso, um mínimo local de F que satisfaz as restrições impostas) [19-21].

2.3. Critério de Precisão e Índice de Precisão

O critério de precisão permite decidir se estamos ou não na presença de um ponto estacionário de F , ou num extremo relativo de F [29].

Para o definir, fixa-se $0 < \epsilon < 1$. Seja $S = (P_1, P_2, P_3, P_4)$ um 3-simplex. Sem perda de generalidade, pode-se supor que os vértices de S estão ordenado tal que (23):

$$F(P_1) \geq F(P_2) \geq F(P_3) \geq F(P_4) \quad (23)$$

Nestas condições, é possível afirmar que o *simplex* S satisfaz o critério de precisão se (24):

$$(F(P_1) - F(P_4))/F(P_4) \leq \epsilon \quad (24)$$

Intuitivamente, o *simplex* S satisfaz o critério de precisão se a diferença relativa entre o maior e o menor valor de F entre todos os vértices for suficientemente pequena. Atendendo a (23), tem-se nesta situação que os valores $F(P_1)$, $F(P_2)$, $F(P_3)$, $F(P_4)$ são aproximadamente idênticos, sugerindo assim que os vértices de S encontram-se numa vizinhança suficientemente pequena de um ponto estacionário de F . Ao valor ϵ dá-se a designação de índice de precisão, que deve ser fixado mediante a natureza da função F .

2.4. Operações Sobre um *Simplex*

Seja $O = (0, 0, 0)$ a origem. Esta adaptação do método de Nelder-Mead aplica quatro operações sobre cada 3-simplex (P_1, P_2, P_3, P_4) . Sendo elas:

- Reflexão: Aplica (P_1, P_2, P_3, P_4) em (R_1, P_2, P_3, P_4) , onde R_1 , é a reflexão de P_1 , em torno do plano que contém P_2, P_3 e P_4 ;
- Contração: fixado um valor $0 < q < 1$ (denominado fator de contração), aplica (P_1, P_2, P_3, P_4) em (C_1, P_2, P_3, P_4) , em que:

$$C_1 = P_1 + (q - 1)\overrightarrow{OR_1} \leq \epsilon \quad (25)$$

- Expansão: Fixando um valor $p > 1$ (denominado fato de expansão), aplica (P_1, P_2, P_3, P_4) em (E_1, P_2, P_3, P_4) , em que:

$$E_1 = R_1 + p\overrightarrow{R_1P_1} \leq \epsilon \quad (26)$$

- Redução de arestas: Aplica (P_1, P_2, P_3, P_4) em (P'_1, P'_2, P'_3, P'_4) , em que:

$$P'_i = P_i + \left(\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{P_iP_4} \quad i = 1, 2, 3 \quad (27)$$

2.5. Dados de Inicialização da Rotina

As restrições $g_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $g_i(x) \geq 0$, $i = 1, \dots, m$ impostas tornam o problema equivalente a encontrar um mínimo local de F numa região admissível do seu domínio D , isto é, no subconjunto $Q = \{\text{conjunto dos pontos } (x, y, z) \text{ pertencentes a } D \text{ tais que } g_i(x, y, z) \geq 0, i = 1, \dots, m\}$.

Deste modo, para efeitos de inicialização da rotina é necessário fixar o seguinte conjunto de dados [29]:

- Um ponto inicial $I = (x_i, y_i, z_i)$ na região admissível Q ;
- Um valor de h para o comprimento de todas as arestas do 3-simplex inicial S_i , cujos vértices são $I, P_x = I + h\vec{e}_x, P_y = I + h\vec{e}_y$ e $P_z = I + h\vec{e}_z$. A escolha de P_0 e de h devem ser tais que pelo menos os vértices de S_i estejam contidos na região admissível Q ;
- Um valor $0 < q < 1$ para o fator de contração e um valor $p > 1$ para o fator de expansão;
- O índice de precisão ϵ , escolhido pela natureza do problema e em particular da função F ;
- O número máximo N de iterações da rotina, de modo a garantir que o algoritmo termine sempre.

2.6. O Algoritmo

1. Introduzir um 3-simplex inicial $S_i = (P_1, P_2, P_3, P_4)$ cujos vértices pertencem à região admissível Q do problema. Mais precisamente, dado I em Q [29]:
 - 1.1. Proceder ao cálculo dos vértices P_x, P_y e P_z ;
 - 1.2. Verificar se P_x, P_y e P_z pertencem a Q . Se sim, tomar S_i com vértices I, P_x, P_y e P_z e avançar para a rotina de busca.
Caso não se verifique, deve-se alterar o valor de h para metade e regressar ao passo (1.1);

2.6.1. A Rotina de Busca

2. Adicionar +1 ao contador j da iteração e proceder ao cálculo de $F(P_1), F(P_2), F(P_3)$ e $F(P_4)$. Considerando que os pontos estão ordenados como em (2.1) proceder ao cálculo da diferença relativa como em (2.2). Se o critério de precisão for satisfeito, o algoritmo termina e P_4 é um solução ótima do problema. Caso contrário, existem duas situações possíveis [29]:
 - 2.1. $j = N$ e esta é $(N + 1)$ -ésima iteração da rotina, pelo que o algoritmo termina sem solução;
 - 2.2. $j + 1 < N$ e avançar para o passo 3.
3. Aplicar uma reflexão a S_i , obtendo-se $S_r = (R_1, P_2, P_3, P_4)$. Se $R_1 \in Q$ avançar para o passo (4). Caso contrário, tem-se que:
 - 3.1. Aplicar uma contração a $S_r = (R_1, P_2, P_3, P_4)$, obtendo-se $S_c = (C_1, P_2, P_3, P_4)$;

- 3.2. Se $C_1 \in Q$, tomar $R_1 = C_1$ e avançar para o passo 4. Caso contrário, regressar ao passo 3.1.
4. Proceder ao cálculo de $F(R_1)$.
- 4.1. Se $F(P_2) > F(R_1)$, tem-se que:
- 4.1.1. Aplicar uma expansão ao *Simplex* $S_c = (C_1, P_2, P_3, P_4)$, obtendo-se o *Simplex* $S_c = (E_1, P_2, P_3, P_4)$, até que $E_1 \in Q$;
- 4.1.2. Proceder ao cálculo de $F(E_1)$, em que, se se verificar que $F(R_1) > F(E_1)$, tomar o *Simplex* S_c obtido em (4.1.1) e regressar ao passo (2). Caso contrário tomar o *Simplex* S_r obtido em (3) e regressar ao passo (2);
- 4.2. Se $F(R_1) \geq F(P_2)$, tem-se que:
- 4.2.1. Aplicar uma contração a $S_r = (R_1, P_2, P_3, P_4)$, obtendo-se um *Simplex* $S'_c = (C'_1, P_2, P_3, P_4)$;
- 4.2.2. Proceder ao cálculo de $F(C'_1)$, em que, se se verificar que $F(P_2) > F(C'_1)$, tomar o *Simplex* obtido S'_c obtido em (4.2.1) e regressar ao passo (2). Caso contrário aplicar uma redução de arestas (como em (2.5)) ao *Simplex* inicial S_i obtido no passo (1). Tomar o *Simplex* resultante S'_i e regressar ao passo (2).

A figura 4 ilustra a geometria tridimensional que é enformada pela metodologia do algoritmo *simplex*. Neste caso, os pontos ilustrados designados por (m_0, m_1, m_2, m_3) , são então, os pontos anteriormente designados por (P_1, P_2, P_3, P_4) que se encontram contidos numa região admissível Q . Os restantes pontos ilustrados representam as translações que vão sendo executadas pelas reflexões, contrações ou expansões. A figura 5 ilustra a metodologia anteriormente descrita na forma de fluxograma.

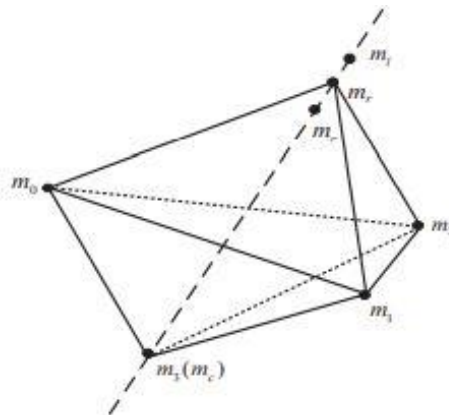


Figura 4 – O simplex no espaço tridimensional. Adaptado de [29].

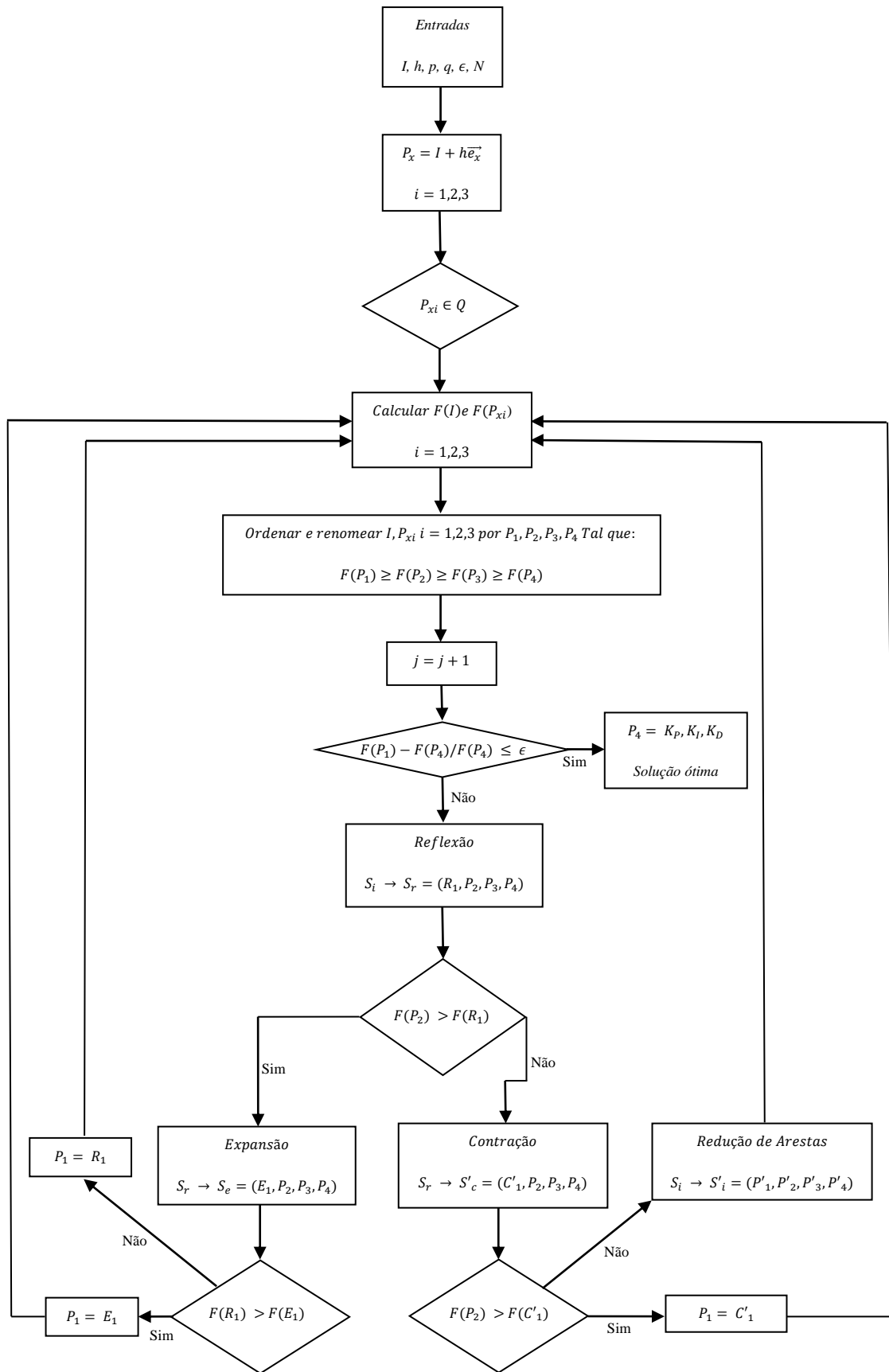


Figura 5 – Fluxograma do método simplex.

3. A Formalização do Problema de Otimização

Considerando f uma função cujo seu domínio é o conjunto \mathbb{R}^n dos n-tuplos de números reais e cuja imagem está contida em \mathbb{R} ($f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$), um ponto $d \in \mathbb{R}^n$ considera-se como um máximo local de f (respetivamente mínimo local de f) se existe uma vizinhança U de d tal que $f(d) \geq f(x)$ (respetivamente $f(d) \leq f(x)$) para todo o x em U .

No caso em que $U = \mathbb{R}^n$, o ponto d diz-se um máximo global de f (respetivamente mínimo global de f). Um ponto $d \in \mathbb{R}^n$ diz-se extremo local de f (respetivamente extremo local de f) se d é máximo ou mínimo global (respetivamente máximo ou mínimo global) [1-5].

Uma função arbitrária não tem que possuir necessariamente pontos extremos, sendo que por vezes é útil garantir a existência teórica de pontos extremos de uma função, mesmo não tendo conhecimento dos mesmos, para legitimar a procura destes mesmos [1-5].

3.1. Particularidades Sobre Problemas de Otimização

Em áreas aplicadas, diversos problemas de otimização admitem a seguinte formulação:

$$\begin{aligned} &\text{Encontrar extremo local de } f(x), x \in D \\ &\text{Sujeito a } g_i(x) \geq 0, i = 1, \dots, m \\ &\quad h_j(x) = 0, j = 1, \dots, p \end{aligned}$$

Em que, $g_i, h_j : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ são designadas restrições e f é designada de função objetivo. Neste tipo de problema pressupõe-se sempre que a função objetivo e as restrições podem ser calculadas em qualquer ponto de \mathbb{R}^n [10], [27-28].

A Programação Linear é a disciplina da teoria de otimização que lida com o caso em que a função objetivo e as restrições são funções lineares em \mathbb{R}^n . Caso pelo menos uma das funções não seja linear em \mathbb{R}^n , a resolução do problema é do âmbito da Programação Não-Linear. Sendo que em todo o caso, encontrar um extremo local da função objetivo é sempre parte de qualquer problema de otimização deste tipo.

Isto justifica a importância dos resultados de existência de extremos locais, bem como a discussão de métodos/algoritmos que permitam encontrar extremos locais de uma

função. Uma situação bem estudada é aquela onde f é diferenciável em \mathbb{R}^n , em que, neste caso é possível recorrer a instrumentos de Análise Real para estudar a existência de pontos extremos e desenvolver métodos para os encontrar (isto inclui programação linear e alguns métodos de programação não-linear) [33], [35], [45].

3.1.1. Pontos Extremos: Caso Diferenciável

Em termos simplificativos, considerando $n = 1$, e considerando que $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em \mathbb{R} e seja $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a primeira função derivada de f .

Nesta situação existe um critério simples para a deteção de extremos locais:

- Proposição 1 (Teste da Primeira Derivada): Seja $d \in \mathbb{R}$, então d é extremo local de f se e só se $f'(d) = 0$.

A existir, o extremo relativo garantido pelo teste não é necessariamente absoluto porque a derivada de f num ponto d depende apenas dos valores de f em pontos vizinhos de d . O teste é insuficiente para determinar a natureza do extremo local (isto é, se é máximo ou mínimo).

A ideologia centra-se no fato de encontrando um extremo local d , o ponto $(d, f(d))$ do gráfico de f pode se encontrar tanto num ‘vale’ como num ‘cume’. Pode-se distinguir as duas situações no caso em que f' também é diferenciável em \mathbb{R} , isto é, quando f possui segunda função derivada $f'' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- Proposição 2 (Teste da Segunda Derivada): Seja $d \in \mathbb{R}$ um extremo relativo de f . Então d é máximo (mínimo, respetivamente) se e só se $f''(d) < 0$ ($f''(d) > 0$ respetivamente).

Intuitivamente, a existência da segunda derivada corresponde à situação onde a reta tangente ao gráfico de f (isto é f') ‘desliza suavemente’ pelos ‘vales’ e/ou ‘cumes’ do gráfico de f , em que, num ‘cume’ o declive da reta tangente está a diminuir ($f''(d) < 0$) enquanto num ‘vale’ este declive está a aumentar ($f''(d) > 0$).

No caso em que $n > 1$ a situação apresenta um carácter mais complexo, na medida em que, há que atender às variações de f em diferentes direções de \mathbb{R}^n (derivadas parciais de f) e a intuição sobre ‘vales’ e ‘cumes’ pode não ser cumprida.

3.1.2. Pontos Extremos: Caso Não diferenciável

Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ não é diferenciável em \mathbb{R}^n , os critérios discutidos para $n = 1$ falham em geral (e também para $n > 1$).

Continuando no pressuposto que f pode ser calculada em todos os pontos do seu domínio, uma alternativa para proceder ao cálculo de extremos locais de f sujeitos a restrições consiste em recorrer a métodos de programação não-linear, como por exemplo, o método de *simplex* de acordo com Yang *et al.* [45].

3.2. Sintonização PID, Discretização do Sistema e Formalização das Funções Objetivo

Existem problemas de sintonização PID formulados como um problema de otimização com restrições. As funções objetivo utilizadas na bibliografia, e posteriormente definidas no capítulo 4, dependem dos chamados índices de desempenho ISE, IAE, ITAE e ITSE [45], [29].

Nesta situação, pretende-se encontrar num mínimo local $(x, y e z) \in \mathbb{R}^3$ das funções objetivo $J_{ISE,IAE,ITAE,ITSE} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sujeito às restrições $x > 0, y > 0, z > 0$.

Esta solução corresponde a um triplo $(k_p, k_i, k_d) \in \mathbb{R}^3$ de valores para os parâmetros do controlador PID que otimizam a performance do sistema controlado (podem existir outros valores para os quais o sistema tenha ótima performance, pois este mínimo local de $J_{ISE}, J_{IAE}, J_{ITAE}$ e J_{ITSE} , a existir, não tem de ser de carácter único).

Para se proceder à definição das funções objetivo do problema de otimização, tem-se que:

- (i) Considerando $(k_p, k_i, k_d) \in \mathbb{R}^3$ um triplo de valores para os parâmetros do controlador PID. A função estado $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m, x(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))$ que descreve a dinâmica do sistema com controlador PID é, a existir, a única solução de um conjunto de equações integro-diferenciais ordinárias nas funções $x_1, \dots, x_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com condições iniciais (o designado de modelo de estado do sistema).

Os coeficientes deste conjunto de equações dependem da escolha de $(k_p, k_i, k_d) \in \mathbb{R}^3$. Assim, existe no máximo uma única solução para a função de estado do sistema controlado.

$$x_{k_p, k_i, k_d} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad x_{k_p, k_i, k_d}(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t)) \in \mathbb{R}^m \quad (28)$$

A partir da função estado x_{k_p, k_i, k_d} encontra-se a dinâmica da variável processo (cujo valor se pretende controlar e fazer convergir para o *setpoint* desejado). Por considerações teóricas, a variável processo é uma função da forma:

$$y_{k_p, k_i, k_d} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (29)$$

$$y_{k_p, k_i, k_d}(t) = \text{combinação linear de } x_1(t), \dots, x_m(t) \in \mathbb{R} \quad (30)$$

Deste modo, dado $(k_p, k_i, k_d) \in \mathbb{R}^3$ existe no máximo uma única variável processo $y_{k_p, k_i, k_d} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- (ii) Tendo a variável processo $y_{k_p, k_i, k_d} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ define-se a função erro associada, em que, $r \in \mathbb{R}$ é o valor de referencia desejado (*setpoint*):

$$e_{k_p, k_i, k_d} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad e_{k_p, k_i, k_d}(t) = y_{k_p, k_i, k_d}(t) - r, \quad (31)$$

- (iii) Tendo a função erro associada e_{k_p, k_i, k_d} definem-se os índices de desempenho do sistema controlado:

$$J_{ISE}(k_p, k_i, k_d) = \int_{-\infty}^{+\infty} |e_{k_p, k_i, k_d}(t)|^2 dt \quad (32)$$

$$J_{IAE}(k_p, k_i, k_d) = \int_{-\infty}^{+\infty} |e_{k_p, k_i, k_d}(t)| dt \quad (33)$$

$$J_{ITAE}(k_p, k_i, k_d) = \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot |e_{k_p, k_i, k_d}(t)| dt \quad (34)$$

$$J_{ITSE}(k_p, k_i, k_d) = \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot |e_{k_p, k_i, k_d}(t)|^2 dt \quad (35)$$

Definem-se então as funções objetivo:

$$\begin{aligned} J_{ISE} : D \subseteq \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) \rightarrow J_{ISE}(x, y, z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} |e_{x,y,z}(t)|^2 dt \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} J_{IAE} : D \subseteq \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) \rightarrow J_{IAE}(x, y, z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} |e_{x,y,z}(t)| dt \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} J_{ITAE} : D \subseteq \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) \rightarrow J_{ITAE}(x, y, z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot |e_{x,y,z}(t)| dt \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} J_{ITSE} : D \subseteq \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) \rightarrow J_{ITSE}(x, y, z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot |e_{x,y,z}(t)|^2 dt \end{aligned} \quad (39)$$

Em que, D é o subconjunto dos triplos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ para os quais existe uma solução $x_{x,y,z}$ para a função estado do sistema (necessariamente única como referido anteriormente) e tal que $\int_{-\infty}^{+\infty} |e_{x,y,z}(t)|^2 dt, \int_{-\infty}^{+\infty} |e_{x,y,z}(t)| dt, \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot |e_{x,y,z}(t)| dt, \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot |e_{x,y,z}(t)|^2 dt$ sejam convergentes. A discussão sugere assim que sintonizar o controlador PID do sistema é equivalente a encontrar um mínimo local em D das funções $J_{ISE}, J_{IAE}, J_{ITAE}, J_{ITSE}$ sujeito às restrições:

$$x > 0, y > 0, z > 0 \quad (40)$$

Como referido no primeiro capítulo, o controlador PID em termos físicos opera no domínio digital, respetivamente, em consonância com a função transferência também

ela discretizada, portanto, tendo em conta (1) discretizada em consonância com a equação que rege um modelo de estado (2) discretizado, em termos práticos os passos (i) – (iii) são processados matematicamente da seguinte forma:

$$u(0) = Kp \cdot e(0) + Ki \cdot (e(0)) \cdot \Delta t + kd \cdot [y(0) - y(-1)] \cdot (\Delta t)^{-1} \quad (41)$$

$$x(1) = A\Delta \cdot x(0) + B\Delta \cdot u(0) \rightarrow y(1) = C\Delta \cdot x(1) \quad (42)$$

$$u(1) = Kp \cdot e(1) + Ki \cdot (e(0)) \cdot \Delta t + ki \cdot e(1) \cdot \Delta t + kd \cdot [y(1) - y(0)] \cdot (\Delta t)^{-1} \quad (43)$$

$$x(2) \cdots \rightarrow y(2) \cdots \rightarrow \quad (44)$$

$$u(2) \cdots \rightarrow x(3) \cdots \rightarrow y(3) \quad (45)$$

$$u(3) \cdots \rightarrow \quad (46)$$

A definição das restrições deve-se à relevância física da solução que se pretende encontrar. Contudo, as definições de $J_{ISE}, J_{IAE}, J_{ITAE}$ e J_{ITSE} são demasiado gerais para efeitos de computação direta. Para contornar esta situação, utiliza-se a construção feita nos passos (i) – (iii) e seguem-se os seguintes passos:

- (1) Seja $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e supondo que $(x, y, z) \in D$. Resolve-se numericamente o respetivo conjunto de equações integro-diferenciais de modo a obter soluções numéricas para a função de estado $x_{x,y,z}$ e para a variável processo $y_{x,y,z}$ do sistema com controlador PID;
- (2) Consequentemente procede-se ao cálculo de uma solução numérica para a função erro associada $e_{x,y,z}$;
- (3) Fornece-se $J_{ISE}(x, y, z), J_{IAE}(x, y, z), J_{ITAE}(x, y, z)$ e $J_{ITSE}(x, y, z)$ calculando numericamente
$$\int_{-\infty}^{+\infty} (e_{x,y,z}(t))^2 dt, \int_{-\infty}^{+\infty} |e_{x,y,z}(t)| dt, \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot |e_{x,y,z}(t)| dt, \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot (e_{x,y,z}(t))^2 dt$$
a partir da solução numérica para $e_{x,y,z}$.

Deste modo, de acordo com Yang *et al.* [45] é possível calcular $J_{ISE}, J_{IAE}, J_{ITAE}$ e J_{ITSE} em todos os pontos do seu domínio D e assim aplicar métodos de Programação Não-Linear para efeitos de otimização e conseqüentemente sintonização do controlador PID. Neste caso, utiliza-se o método *simplex* juntamente com uma rotina de inicialização que procura uma primeira solução do problema (isto é necessário visto não de possuir conhecimento *a priori* de elementos em D).

4. Avaliação do Desempenho da Malha de Controlo

Independentemente de quais forem os métodos que se pretendem implementar, para efetuar a sintonia de um controlador, para posteriormente se avaliar qual foi a eficácia desses mesmos métodos, de acordo com Domański [40], este processo incide sempre numa abordagem , em que, primeiramente se deve avaliar a resposta ao degrau, ou à rampa ou ao impulso e conseqüentemente avaliar medidas com base em integrais.

No caso de se pretender avaliar a performance de uma sintonia em que o modelo de planta esteja perante perturbações induzidas existem ainda índices avaliadores da performance com base em áreas, nomeadamente o *Idle Index* (II), o *Area Index* (AI), o *Output Index* (OI) e o *R-Index* (RI).

Para primeiramente se construir a resposta ao degrau é necessário fazer uma primeira análise sobre a própria malha de controlo de modo a seleccionar as variáveis de forma correta para que desta forma se proceda a uma recolha de dados também ela executada de forma correta. Deve-se seguidamente observar as tendencias no dominio do tempo e desta forma está-se na posse dos dados tecnicos corretos para se contruir a resposta ao degrau.

Tendo a resposta ao degrau construída, é possível a partir desta construir ainda outros índices com base em medidas de integrais, sendo estes, o ISE, o IAE, o ITAE e o ITSE os mais comumente utilizados pela comunidade científica para avaliar a performance da malha do controlo.

Tendo a resposta ao degrau e os índices com base em integrais, de acordo com Domański [40], a avaliação da performance do controlador pode incidir em cada um desses índices de forma individual (dependendo do significado fisico que se pretender atribuir à junção desse indice como o modelo de planta) ou pode incidir de uma forma global numa análise de perspectiva de ‘resposta ao degrau’ sobre todos os indices como ilustram as figuras 6 e 7.

Na figura 6 verifica-se que o índice ITSE é o que apresenta a melhor sintonia para o controlador, contrariamente ao caso na figura 7, em que, é o índice ITAE que apresenta

o melhor índice para a sintonia, ambos os casos numa perspectiva de análise geral de ‘resposta ao degrau’ [40-42].

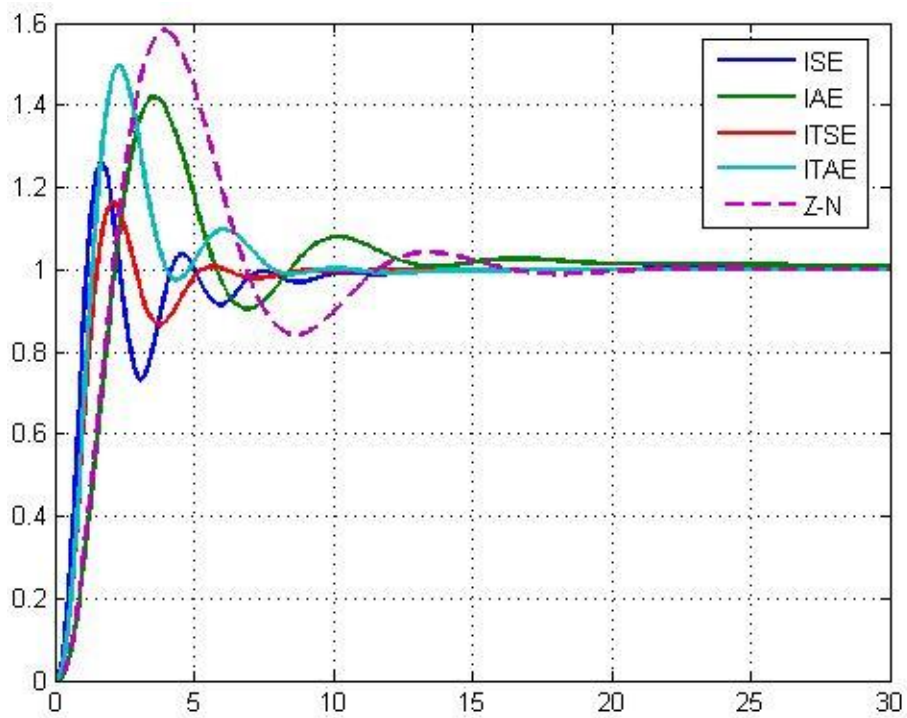


Figura 6 – Análise de todos os índices numa perspectiva de ‘Resposta ao Degrau’ de uma dinâmica de quarta ordem aleatória. Adaptado de [47].

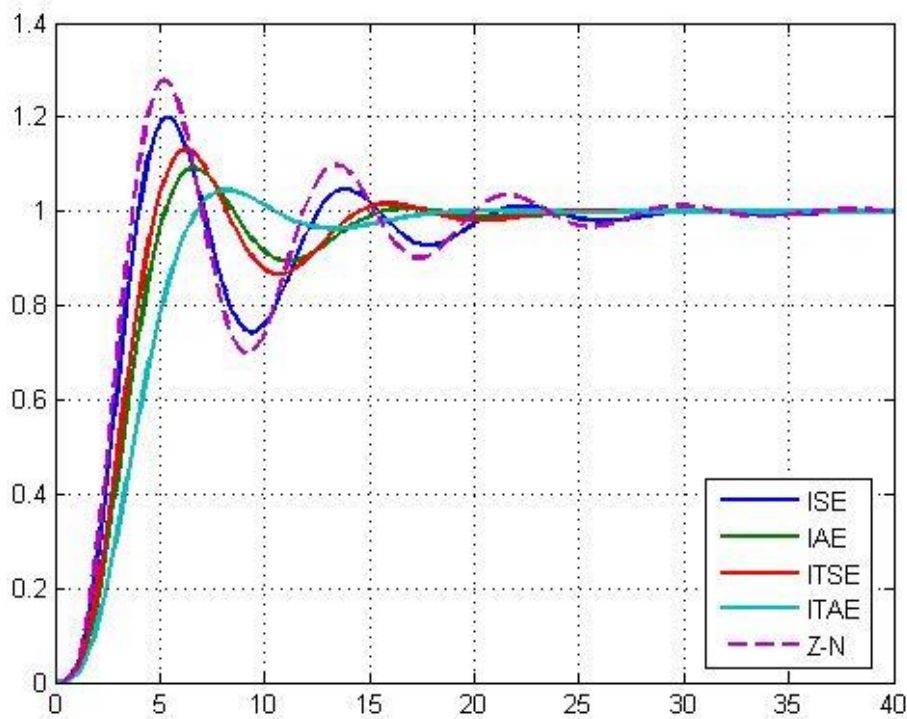


Figura 7 – Análise de todos os índices numa perspectiva de ‘Resposta ao Degrau’ de uma dinâmica de quarta ordem aleatória. Adaptado de [47].

4.1. Revisão Sobre a Malha de Controle e Seleção de Variáveis

De uma forma geral, a avaliação da performance de uma malha de controle deve começar por uma análise que incida sobre a sua estrutura e arranjos. Existem sistemas de controle que usam variadas formas de construir a sua malha e o próprio sistema pode também usar diferentes tipos de controle PID. É necessário, portanto, ter em conta a estrutura da malha e o algoritmo a ser utilizado. O objetivo do controle tem que ser tido em conta de forma a se saber qual é o processo a controlar e as variáveis envolvidas no processo. É necessário identificar os principais intervenientes na malha com o objetivo de principalmente identificar perturbações quantificáveis e não quantificáveis, sendo que no decorrer deste processo, é necessário possuir informações obtidas por pessoal técnico envolvido de uma forma geral na implementação destes processos (técnicos, operadores e engenheiros). É necessário saber qual é o tipo de controle sobre a malha, se se trata de controle em cascata, se é SISO ou MIMO, etc., ou de controle antecipatório (*feedforward*), em que, por exemplo, neste caso seria necessário analisar quais os tipos de módulos de controle antecipatório que são usados, como estão embutidos na malha e como são constituídos. Adicionalmente é necessário avaliar se são utilizados mais blocos de carácter antecipatório nomeadamente compensadores, filtros, preditores tipo *Smith* ou blocos de funções não lineares. É importante analisar também a fonte e o carácter do sinal do *setpoint*, bem como a frequência e o carácter das intervenções humanas no mesmo. Deve-se também verificar o tipo de ação do controlador, isto é, se é direto ou indireto, bem como, também se existem mecanismo do tipo *anti-windup*. A capacidade de conseguir ler e interpretar diagramas do tipo SAMA é de carácter importante, na medida em que constitui um tipo de estudo que nunca se deve descartar, pois aumenta a rapidez no processo geral de análise de controle de processos [40-42].

De uma forma particular, é necessário seleccionar adequada para a posterior avaliação das medições. Existem quatro principais variáveis:

- *Setpoint* ($y_0(t)$);
- *Output* do controlador (MV $u(t)$);
- *Output* do processo (CV $y(t)$);
- Erro do sinal ($e(t) = y_0(t) - y(t)$);

De salientar que o erro do sinal $e(t) = y_0(t) - y(t)$, não é obtido diretamente mas sim por cálculos intermédios em cada instância do processo.

O *output* do processo ($y(t)$) e o *output* do controlador ($m(t)$) são frequentemente considerados os sinais a ser mais analisados para se proceder ao cálculo de diversos índices. É o *output* que retém as informações acerca das propriedades da malha de controlo, e isso é de fato indiscutível numa situação em que estamos perante um *setpoint* fixo. Perante uma situação em que temos uma alteração do *setpoint*, o *output* altera-se no sentido de o alcançar.

O erro do sinal retém informação fiável de análise para os diversos cálculos de índices de performance. No entanto, não se deve descartar as contribuições do *output* e do *output* do controlador nos diversos tipos de análises [38].

4.2. Recolha de Dados

A recolha de dados é o próximo passo no processo, na medida que é a partir dos conjuntos de dados recolhidos que se realizam os processos de avaliação dos índices de performance. O objetivo é proceder à recolha de dados de carácter verdadeiro em relação às variáveis escolhidas. Apesar de parecer um processo simples, a realidade industrial acarreta obstáculos que podem comprometer o tal carácter verdadeiro dos dados recolhidos. Podem ser distinguidos dois tipos de problemas que é necessário ter em consideração, sendo portanto, os constrangimentos de carácter tecnológico e as limitações da instrumentação.

Os processos industriais são muitas vezes afetados por diversos impactos que influenciam a normal operação (funcionamento), deste modo, a recolha de dados para o processo de avaliação da performance deve ter tal fato em conta, sendo que, devem ser selecionados intervalos apropriados de operação para que se faça a posterior análise. Os processos devem de operar num regime normal de funcionamento sem qualquer situação de urgência, não devendo também ser afetado por intervenções humanas [40-42].

Os impactos/ perturbações têm duas fontes de origem: externa e interna.

As perturbações externas encontram-se relacionadas com mudanças nos processos tecnológicos, alterações de processos de fabrico, alterações de equipamentos de fabrico,

alterações nos produtos envolvidos nos processos de fabrico ou alterações nos regimes de funcionamento. Condições ambientais podem também influenciar o processo.

As perturbações internas encontram-se relacionadas com falhas dos equipamentos, falhas tecnológicas e intervenções humanas.

Devem ser conhecidos, *a priori*, todos os possíveis acontecimentos que possam ocorrer para que sejam selecionados de forma correta os intervalos de tempo sob quando fazer a análise do controlo.

É necessário ter também em conta possíveis constrangimentos impostos por limitações do *server* de armazenamento dos dados recolhidos, pois por exemplo, os *servers* têm capacidade de armazenamento limitada e usam algoritmos específicos para fazer a compressão de dados. A extração destes dados pode resultar em alterações do seu carácter, podendo, portanto, comprometer as verdadeiras grandezas medidas, que como consequência podem ser verificados ‘buracos’ de ausência de dados, ou interpolações lineares para preencherem esses ‘buracos’ que comprometem a análise. Os *servers* de armazenamento devem, portanto, ser verificados se necessário para que os dados envolvidos na análise do controlo não sejam provenientes dessas situações [40].

4.3. Observação de Tendências das Variáveis no Domínio do Tempo

Uma vez que os dados sobre as variáveis estão recolhidos, pode-se então começar a construir os processos de análise, sendo que, é uma boa prática começar com análises de carácter visual. Com este tipo de análise é possível ter uma primeira impressão da qualidade da performance da malha de controlo. Adicionalmente, deve-se ter em conta que os dados recolhidos podem ainda não se encontrar livres de erros, podendo sempre aparecer valores em falta e/ ou valores estranhos que não são gerados pelo processo em si. Frequentemente, estes vazios são preenchidos por textos do tipo ‘*BAD DATA*’ ou ‘*N/D*’, a recolha de dados deve ser revista, portanto, perante um cenário destes.

Perante uma situação destas é necessário analisar o cenário e perceber se é possível simplesmente apagar estes dados ausentes (análise estática), ou se, é possível fazer interpolações para obter a aproximação dos dados. Neste caso, tal é aceitável se estivermos com uma ausência de dados a rondar os três casos e se o conjunto global dos dados for na ordem dos mil, deste modo, é possível afirmar que não se afeta negativamente a análise.

Uma situação ainda mais desafiante trata-se de quando estamos perante um cenário em que o conjunto de dados encontra-se completo mas existem valores que apresentam um carácter anómalo, sem que, tais valores anómalos designam-se por ‘*outliers*’ e não são criados pela malha nem pelo processo mas aparecem derivado de falhas no sistema, perdas de comunicação/ rede ou simplesmente falhas na instrumentação. Frequentemente, estes fenómenos nem são sequer sinalizados pelo sistema com o rótulo de ‘má qualidade’, portanto, a sua deteção e o seu isolamento podem não ser de carácter óbvio.

Existem certos aparelhos de medição que requerem períodos de calibração e durante este processo o sinal recebido pelos mesmos é perdido ou recebe um último resultado constante não expetável. Por exemplo, qualquer operação de limpeza ou de sopro com ar pode afetar as verdadeiras grandezas medidas. Este tipo de assunto pode ser abordado com os técnicos ou com os operadores da área do local em questão que maioritariamente têm o conhecimento sobre como lidar com estas questões. Outro tipo de *outliers* aparece de forma acidental associado a nenhuma razão clara, em que, simplesmente surgem picos de valores de carácter estranho e inesperado. O primeiro método para lidar com este tipo de fenómenos é com a aplicação de filtros, mas no entanto, a adição de filtros pode ter como consequência a adição de dinâmica adicional à malha o que pode comprometer a posterior avaliação do processo de controlo. Desta forma, a forma mais simples de lidar com estes fenómenos é simplesmente proceder à anulação dos mesmos, mas sempre com um parecer do pessoal qualificado do processo em questão [40-42].

A figura 8 ilustra um conjunto típico de dados no domínio do tempo, em que, é possível verificar os *outliers*, também denominados de ‘artefactos’ e calibrações da instrumentação.

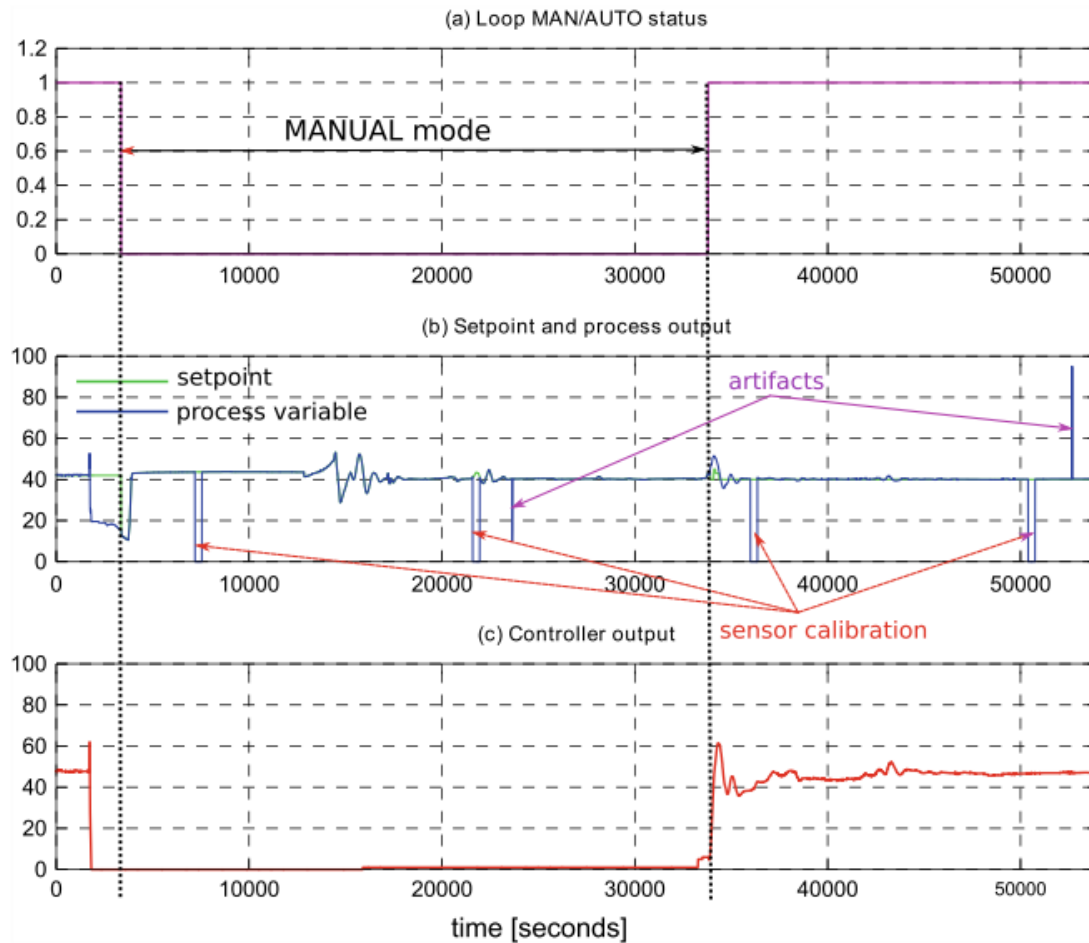


Figura 8 – Conjunto típico de dados no domínio do tempo. Adaptado de [40]

4.4. Avaliação do Desempenho com Base em Índices Caracterizadores da Resposta ao Degrau

A avaliação dos sistemas de controlo analisando a forma e os parâmetros da resposta ao degrau constituem o método mais antigo, mais clássico e o mais amplamente utilizado.

Apresenta, de fato, diversas razões para tal sendo que a principal é o entendimento comum e a interpretação direta de resultados, e além disso, estas medidas permitem ainda a realização de análises do tipo ‘árvores de falhas’ bem como ilustrar direções para a nova sintonia do controlador e conseqüentemente a melhoria contínua da malha de controlo [38], [40-42].

É necessário ter em conta que a análise das respostas no domínio do tempo ou a estimação de parâmetros usando a resposta ao degrau unitário funciona de forma adequada somente em situações em que existe pouco ruído induzido no sinal.

A figura 9 ilustra a resposta ao degrau com diferentes níveis de ruído.

É possível verificar, portanto, que com pouco ruído estamos perante uma análise mais viável dos parâmetros comparativamente com o segundo caso, em que, qualquer género de decisão e/ou interpretação acarreta elevados níveis de relativismo.

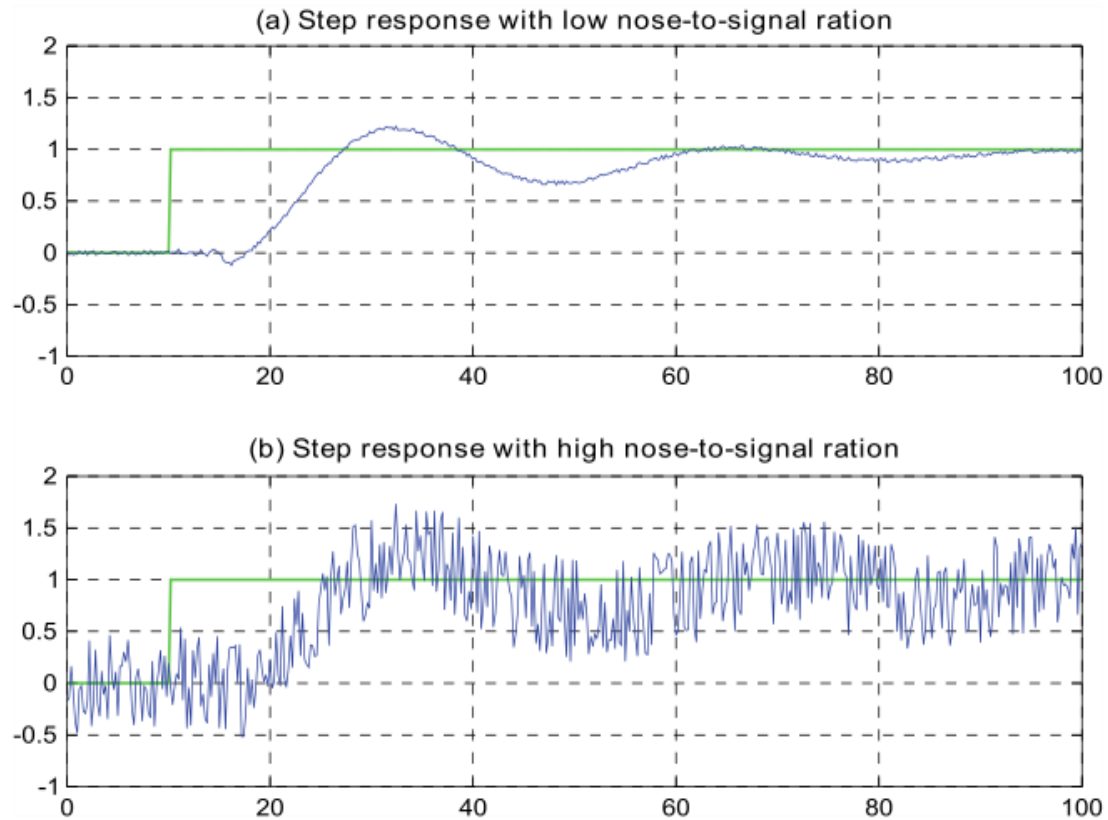


Figura 9 – Respostas ao degrau com diferentes rácios de ruído-sinal. Adaptado de [40]

A figura 10 ilustra os valores que são de carácter mensurável e que servem de base para o posterior cálculo dos índices que podem ser obtidos por uma análise decorrente da resposta ao degrau, sendo estes os seguintes:

- *Offset* (erro): Trata-se da diferença obtida pela variável processo entre o valor que é obtido efetivamente e o valor que era desejável obter em cada instância do processo (47). Idealmente, este valor seria de zero;

$$e_{\infty} \leq Y_0 - \bar{y} \quad (47)$$

- *Overshoot* (sobressinal): É o índice que reflete o comportamento oscilatório da malha com uma resposta sub-amortecida. Frequentemente, é um valor que se

deseja que seja nulo (resposta sobre-amortecida). Este índice é um índice cujo seu valor em termos ideais tenda para zero. Deste modo, quanto maior for o valor de *overshoot*, pior será a sintonia e conseqüentemente a qualidade da malha. Com um valor elevado de *overshoot* considera-se que o sistema é classificado de agressivo. A percentagem de *overshoot* é obtida pela expressão 48;

$$100 \cdot \frac{e_1}{\bar{y}} \quad (48)$$

- Tempo de acomodação (T_s): É um índice que informa o quanto rápido o sistema tende a estabilizar até alcançar o menor valor de *offset*. Idealmente, este índice deve ser o menor possível. O *overshoot* e o T_s estão correlacionados, na medida em que, quanto maior for o *overshoot* maior será o T_s e vice-versa. Um valor alto deste índice caracteriza o sistema como sendo lento.
- Tempo de subida (T_r): Define-se como o tempo que a resposta leva entre a primeira vez que cruza um determinado limite inferior e a primeira vez que cruza um determinado limite superior. Estes limites são geralmente definidos em percentagem do valor final. Comumente tomam-se os tempos de subida 10%–90%, 5%–95% e 0–100%. Trata-se de um índice que não incorpora informação sobre possíveis oscilações e deste modo ele não deve ser utilizado para análises de forma isolada mas sim com a interpretação em sintonia de outros índices;
- Tempo de pico (T_p): Informa o quanto rápido a resposta ao degrau atinge o seu valor máximo. Este índice transmite informação sobre o quanto agressivo o sistema é, sendo o seu uso também de caráter bastante limitativo. Se não houver *overshoot* verifica-se que $T_p \rightarrow \infty$. Semelhantemente comparativamente ao T_r este índice não deve ser usado para análises de forma isolada mas sim em sintonia com outros índices;
- Rácio de decaimento (DR): Definido em percentagem pela expressão 49, este índice é caracterizado por definir o rácio de picos sucessivos abaixo ou acima do *offset*. Descreve um fator pela qual a oscilação é reduzida durante um ciclo completo. Este índice tem um valor desejável de 25%, em que, para este caso

verifica-se um bom compromisso entre o valor de subida com uma convergência curta em direção ao valor do setpoint desejável;

$$100 \cdot \frac{e_3}{e_1} \quad (49)$$

- Valor de pico (PV): É um índice que efetua a mesma medição que o overshoot, sendo que, no entanto simplesmente reflete o valor máximo atingido pela malha na resposta ao degrau (50).

$$PV = \bar{y} + e_1 \quad (50)$$

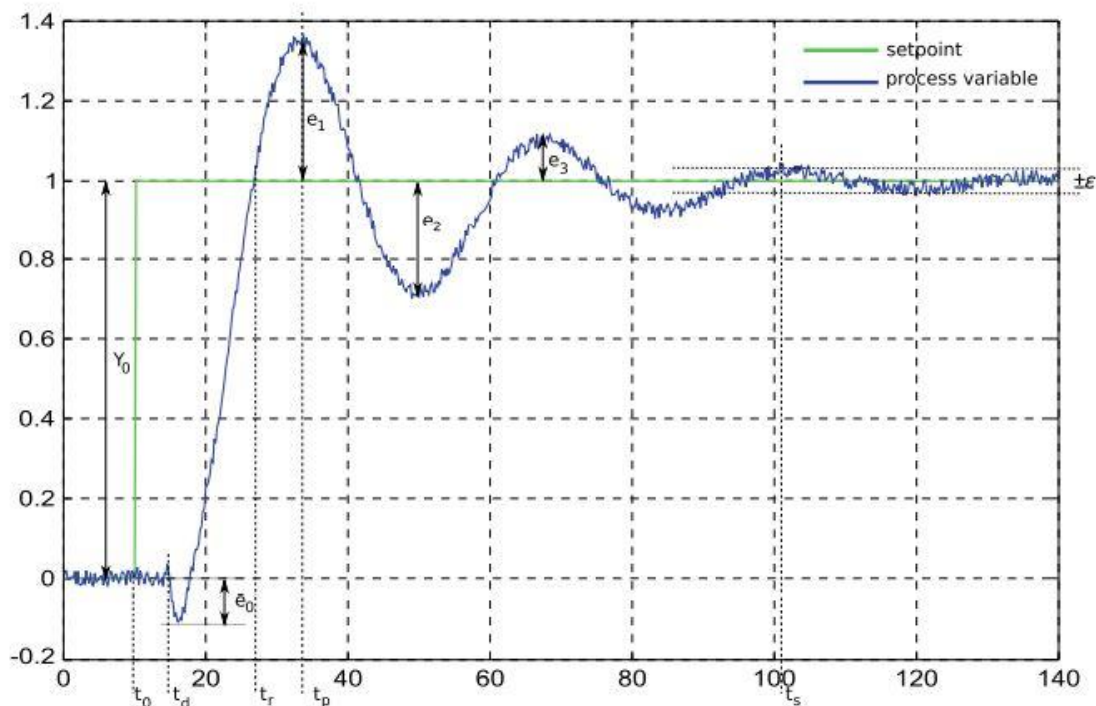


Figura 10 – Resposta ao degrau típica com os seus parâmetros. Adaptado de [40]

4.5. Avaliação do Desempenho com Base em Índices de Integrais

A partir do momento em que estão recolhidos os dados da malha de controlo, obtidos por medições, referentes à resposta ao degrau do sistema de controlo e sendo estes dados de natureza e carácter fiáveis, é, portanto, possível começar a proceder ao cálculo de índices de integrais. Os métodos de análise de desempenho utilizando com base nos índices de integrais têm sido larga e historicamente utilizados devido à sua flexibilidade, robustez face ao ruído, carácter informativo, facilidade de execução e interpretação.

O significado e o caráter físico destes índices é abordado neste subcapítulo, sendo que, as preocupações que devem ser tidas em conta nos testes de resposta ao degrau, anteriormente descritos, são exatamente os mesmos que devem ser tidos em conta nas experiências nesta fase. De acordo com a literatura científica até ao momento existem quatro índices de performance que são os que são maioritariamente abordados para análises científicas dos sistemas de controlo, sendo estes, o integral do quadrado do erro (ISE), o integral do valor absoluto do erro (IAE), o produto do integral do tempo e o valor absoluto do erro (ITAE) e o produto do integral do tempo e o quadrado do erro (ITSE). Existem ainda outros índices, nomeadamente o erro quadrático, a variância quadrada total e o integral do quadrado da derivada do tempo do sinal de *input* do controlador (ISTC), em que, este contrariamente aos outros índices não se foca no erro mas sim no sinal de *input*. De notar que todos os índices de integrais têm um limite inferior de zero, caracterizador de um sistema de controlo ideal ao mostrar um rastreamento exato e nenhuma variabilidade, e não têm limite superior.

4.5.1. ISE – Integral do Quadrado do Erro

O integral do quadrado do erro é o valor do integral dos erros quadrados do controlador num período específico de tempo (51). No domínio discreto, e também por uma questão de facilidade na interpretação dos resultados, este índice é abordado na forma de média (52). O índice ISE é um índice cuja sua avaliação incide numa penalização com grande intensidade em erros de grande valor face a pequenos erros. Os grandes erros têm tendência a ocorrer imediatamente após uma perturbação induzida ou no início de uma resposta ao degrau e podem desta forma ser observados sob a forma do *overshoot*, por exemplo, em uma análise de resposta ao degrau.

Este índice é maioritariamente utilizado em análises para indicar *overshoot* e controlo agressivo. Estudos científicos já provaram que a sintonia de controladores com recurso à minimização deste índice penaliza grandes desvios do *setpoint* e proporciona um controlo agressivo [29], [40-42].

$$ISE = \int_{t_1}^{t_2} \epsilon(t)^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} [y_0(t) - y(t)]^2 dt \quad (51)$$

$$ISE = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{k=N} \epsilon(k)^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{k=N} [y_0(k) - y(k)]^2 \quad (52)$$

4.5.2. IAE – Integral do Valor Absoluto do Erro

O integral do valor absoluto do erro é o integral do valor absoluto dos erros do controlador num período específico de tempo (53). No domínio discreto este índice é frequentemente utilizado sob a forma da média da soma dos erros absolutos (54). As avaliações realizadas com base neste índice não diferenciam as contribuições positivas e negativos do erro do controlador, sendo neste sentido um índice menos conservador. No entanto, tendo em conta a literatura científica acerca deste índice, verifica-se que é o índice que mais se deve ter em conta nas análises da avaliação da performance de controladores, na medida em que, este é o índice que tem em conta as considerações económicas da malha de controlo, contrariamente ao ISE, apesar de este apresentar um carácter de cálculo mais fácil. As contribuições económicas referidas encontram-se relacionadas com perdas de produtos, excesso de consumo de matérias-primas e reduções na capacidade funcional da planta. O IAE tem também uma incidência bastante penalizadora em controladores que não estejam em condições de serviço contínuas, ou seja, com interrupções daí ser apropriado para respostas não monótonas [29], [40-42].

$$IAE = \int_{t_1}^{t_2} |\epsilon(t)| dt = \int_{t_1}^{t_2} |y_0(t) - y(t)| dt \quad (53)$$

$$IAE = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{k=N} |\epsilon(k)| = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{k=N} |y_0(k) - y(k)| \quad (54)$$

4.5.3. ITAE - Integral do Tempo Multiplicado pelo Valor Absoluto do Erro

O integral do valor absoluto do erro é o integral do valor absoluto dos erros do controlador multiplicado pelo tempo durante um período específico de tempo (55). No domínio discreto este índice é frequentemente utilizado tendo como base a soma de N

amostras de dados (56). É caracterizado por ser um índice conservador e frequentemente mais utilizado em conjuntos de dados pequenos. Com o fator do tempo acoplado ao cálculo, verifica-se que este índice penaliza erros que ocorrem mais tarde no tempo e oferece menos ênfase aos que ocorrem no início da resposta do controlador [29], [40-42].

$$ITAE = \int_{t_1}^{t_2} t \cdot |\epsilon(t)| dt = \int_{t_1}^{t_2} t \cdot |y_0(t) - y(t)| dt \quad (55)$$

$$ITAE = \sum_{k=1}^{k=N} k \cdot \Delta t \cdot |\epsilon(k)| = \sum_{k=1}^{k=N} k \cdot \Delta t \cdot |y_0(k) - y(k)| \quad (56)$$

4.5.4. ITSE - Integral do Tempo Multiplicado pelo Quadrado do Erro

O integral do quadrado do erro é o integral do valor dos quadrados dos erros do controlador multiplicado pelo tempo durante um período específico de tempo (57). No domínio discreto este índice é frequentemente utilizado tendo como base a soma de N amostras de dados (58). De forma semelhante ao ITAE, com o fator do tempo acoplado ao cálculo, verifica-se que este índice penaliza erros que ocorrem mais tarde no tempo e oferece menos ênfase aos que ocorrem no início da resposta do controlador, mas neste caso em consonância com o fato de penalizar erros grandes mais tarde no tempo [29], [40-42].

$$ITSE = \int_{t_1}^{t_2} t \cdot \epsilon(t)^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} t \cdot [y_0(t) - y(t)]^2 dt \quad (57)$$

$$ITSE = \sum_{k=1}^{k=N} k \cdot \Delta t \cdot \epsilon(k)^2 = \sum_{k=1}^{k=N} k \cdot \Delta t \cdot [y_0(k) - y(k)]^2 \quad (58)$$

5. Casos de Estudo

No presente capítulo, para testar a metodologia proposta e observar os resultados obtidos, foram realizados três casos de estudo com base em dinâmicas de segunda, terceira e quarta ordem.

5.1. Dinâmica de Segunda Ordem

O caso de estudo com base numa dinâmica de segunda ordem foi realizado tendo em conta a função transferência (59) [30].

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1} \quad (59)$$

Os sistemas de segunda ordem são aqueles cuja sua modelação física pode ser descrita por uma equação diferencial de segunda ordem. A classificação de um sistema de segunda ordem é definida pela localização dos polos do mesmo. Existem três arranjos possíveis para os sistemas em questão, de modo que, estes podem possuir dois polos reais e distintos, dois polos reais e iguais e ainda dois polos complexos conjugados. Este tipo de função transferência de segunda ordem é utilizada quer em inúmeras aplicações da vida quotidiana quer na área industrial, sendo utilizada para descrever a dinâmica maioritária dos seguintes sistemas [30]:

- Pequenos motores de corrente contínua;
- Pequenos circuitos com dinâmica de segunda ordem;
- Sistemas massa e mola;
- Sistemas massa, mola e amortecedor;
- Circuitos do tipo LC;
- Circuitos do tipo RC;
- Molas de torsão e rotação;
- Suspensões magnéticas.

A título representativo, na Figura 11 é exposto um exemplo de um sistema de massa, mola e amortecedor, em que, $f(t)$ representa a força externa aplicada na massa, $z(t)$ representa a posição, (m) representa a massa e (k) e (b) representam a mola e o amortecedor respetivamente.

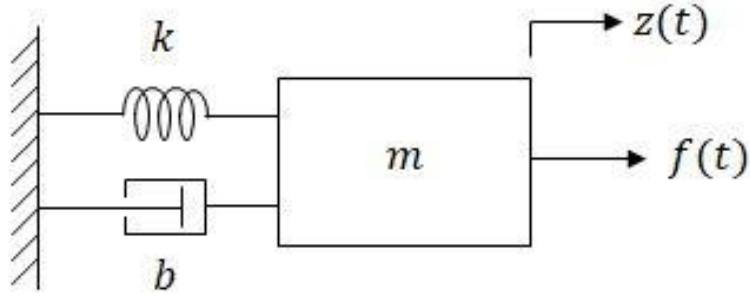


Figura 11 – Sistema massa, mola e amortecedor. Adaptado de [30]

Tendo em conta a natureza da função transferência utilizada (59) e a sua respetiva discretização, executada e ilustrada pelo anexo I, os valores de $A\Delta$ e $B\Delta$ são de natureza matricial, deste modo, é necessário ter em conta na execução do sistema recursivo dado pelas expressões (41) – (46) que o mesmo será executado na forma matricial (60) – (63). Em anexo (Anexo IV) encontra-se a folha de cálculo da implementação deste algoritmo em Excel.

$$\begin{Bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A\Delta_{11} & A\Delta_{12} \\ A\Delta_{21} & A\Delta_{22} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} B\Delta_{11} \\ B\Delta_{12} \end{Bmatrix} \cdot \{u(k)\} \quad (60)$$

$$\begin{Bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A\Delta_{11}x_1(k) + A\Delta_{12}x_2(k) \\ A\Delta_{21}x_1(k) + A\Delta_{22}x_2(k) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} B\Delta_{11}u(k) \\ B\Delta_{21}u(k) \end{Bmatrix} \quad (61)$$

$$\begin{Bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A\Delta_{11}x_1(k) + A\Delta_{12}x_2(k) + B\Delta_{11}u(k) \\ A\Delta_{21}x_1(k) + A\Delta_{22}x_2(k) + B\Delta_{21}u(k) \end{Bmatrix} \quad (62)$$

$$\{y(k)\} = \{C_{11} \ C_{12}\} \cdot \begin{Bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{Bmatrix} = \{C_{11}x_1(k) + C_{12}x_2(k)\} \quad (63)$$

5.2. Dinâmica de Terceira Ordem

O caso de estudo com base numa dinâmica de terceira ordem foi realizado tendo em conta a função transferência (64).

$$G(s) = \frac{10}{(s+1)^2 \cdot (s+2)} \quad (64)$$

Os sistemas de terceira ordem são aqueles cuja sua modelação física pode ser descrita por uma equação diferencial de terceira ordem. Um sistema de terceira ordem é um sistema que se caracteriza por possuir três polos e por ser um sistema que se pode obter a partir de uma dinâmica de segunda ordem com um pólo adicional. Em termos da curva de reação deste tipo de dinâmica, verifica-se que a resposta fica mais lenta em virtude do fato de o terceiro pólo aumentar o tempo de subida e que quanto mais próximo estiver da origem, mais influente efetivamente é [30].

Tendo em conta a natureza da função transferência utilizada (64) e a sua respetiva discretização, executada e ilustrada pelo anexo II, os valores de $A\Delta$ e $B\Delta$ são de natureza matricial, deste modo, é necessário ter em conta na execução do sistema recursivo dado pelas expressões (41) – (46) que o mesmo será executado na forma matricial (65) – (68). Em anexo (Anexo V) encontra-se a folha de cálculo da implementação deste algoritmo em Excel.

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\Delta_{11} & A\Delta_{12} & A\Delta_{13} \\ A\Delta_{21} & A\Delta_{22} & A\Delta_{23} \\ A\Delta_{31} & A\Delta_{32} & A\Delta_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B\Delta_{11} \\ B\Delta_{12} \\ B\Delta_{13} \end{pmatrix} \cdot \{u(k)\} \quad (65)$$

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\Delta_{11}x_1(k) + A\Delta_{12}x_2(k) + A\Delta_{13}x_3(k) \\ A\Delta_{21}x_1(k) + A\Delta_{22}x_2(k) + A\Delta_{23}x_3(k) \\ A\Delta_{31}x_1(k) + A\Delta_{32}x_2(k) + A\Delta_{33}x_3(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B\Delta_{11}u(k) \\ B\Delta_{21}u(k) \\ B\Delta_{31}u(k) \end{pmatrix} \quad (66)$$

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\Delta_{11}x_1(k) + A\Delta_{12}x_2(k) + A\Delta_{13}x_3(k) + B\Delta_{11}u(k) \\ A\Delta_{21}x_1(k) + A\Delta_{22}x_2(k) + A\Delta_{23}x_3(k) + B\Delta_{21}u(k) \\ A\Delta_{31}x_1(k) + A\Delta_{32}x_2(k) + A\Delta_{33}x_3(k) + B\Delta_{31}u(k) \end{pmatrix} \quad (67)$$

$$\{y(k)\} = \{C_{11}C_{12}C_{13}\} \cdot \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{pmatrix} = \{C_{11}x_1(k) + C_{12}x_2(k) + C_{13}x_3(k)\} \quad (68)$$

5.3. Dinâmica de Quarta Ordem

O caso de estudo com base numa dinâmica de quarta ordem foi realizado tendo em conta a função transferência (69).

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^4} \quad (69)$$

Os sistemas de quarta ordem são aqueles cuja sua modelação física pode ser descrita por uma equação diferencial de quarta ordem. A curva de reação de um sistema de quarta ordem é caracterizada por se tornar acelerada e com maior *overshoot* em função da existência de um zero adicional ou por se tornar mais lenta e com menor *overshoot* em função da existência de um pólo adicional [30].

Tendo em conta a natureza da função transferência utilizada (69) e a sua respetiva discretização, executada e ilustrada pelo anexo II, os valores de $A\Delta$ e $B\Delta$ são de natureza matricial, deste modo, é necessário ter em conta na execução do sistema recursivo dado pelas expressões (41) – (46) que o mesmo será executado na forma matricial (70) – (73). Em anexo (Anexo VI) encontra-se a folha de cálculo da implementação deste algoritmo em Excel.

$$\begin{Bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A\Delta_{11}A\Delta_{12}A\Delta_{13}A\Delta_{14} \\ A\Delta_{21}A\Delta_{22}A\Delta_{23}A\Delta_{24} \\ A\Delta_{31}A\Delta_{32}A\Delta_{33}A\Delta_{34} \\ A\Delta_{41}A\Delta_{42}A\Delta_{43}A\Delta_{44} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} B\Delta_{11} \\ B\Delta_{12} \\ B\Delta_{13} \\ B\Delta_{14} \end{Bmatrix} \cdot \{u(k)\} \quad (70)$$

$$\begin{Bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A\Delta_{11}x_1(k) + A\Delta_{12}x_2(k) + A\Delta_{13}x_3(k) + A\Delta_{14}x_4(k) \\ A\Delta_{21}x_1(k) + A\Delta_{22}x_2(k) + A\Delta_{23}x_3(k) + A\Delta_{24}x_4(k) \\ A\Delta_{31}x_1(k) + A\Delta_{32}x_2(k) + A\Delta_{33}x_3(k) + A\Delta_{34}x_4(k) \\ A\Delta_{41}x_1(k) + A\Delta_{42}x_2(k) + A\Delta_{43}x_3(k) + A\Delta_{44}x_4(k) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} B\Delta_{11}u(k) \\ B\Delta_{21}u(k) \\ B\Delta_{31}u(k) \\ B\Delta_{41}u(k) \end{Bmatrix} \quad (71)$$

$$\begin{Bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A\Delta_{11}x_1(k) + A\Delta_{12}x_2(k) + A\Delta_{13}x_3(k) + A\Delta_{14}x_4(k) + B\Delta_{11}u(k) \\ A\Delta_{21}x_1(k) + A\Delta_{22}x_2(k) + A\Delta_{23}x_3(k) + A\Delta_{24}x_4(k) + B\Delta_{21}u(k) \\ A\Delta_{31}x_1(k) + A\Delta_{32}x_2(k) + A\Delta_{33}x_3(k) + A\Delta_{34}x_4(k) + B\Delta_{31}u(k) \\ A\Delta_{41}x_1(k) + A\Delta_{42}x_2(k) + A\Delta_{43}x_3(k) + A\Delta_{44}x_4(k) + B\Delta_{41}u(k) \end{Bmatrix} \quad (72)$$

$$\{y(k)\} = \{C_{11}C_{12}C_{13}C_{14}\} \cdot \begin{Bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{Bmatrix} = \{C_{11}x_1(k) + C_{12}x_2(k) + C_{13}x_3(k) + C_{14}x_4(k)\} \quad (73)$$

6. Resultados

O processo de minimização das funções ISE, IAE, ITAE e ITSE como referido no primeiro capítulo foi executado utilizando um *plugin* do *Microsoft Excel* designado por *GlobalMinimize*.

Em anexo (Anexo VII) encontra-se a ilustração deste procedimento.

A execução deste processo é efetuado da seguinte forma:

- Ter ambas as folhas de Excel abertas simultaneamente, isto é, a folha de cálculo com as funções que se pretendem minimizar (nestes casos as funções a minimizar são determinadas células da folha de cálculo) e a folha do *plugin GlobalMinimize*;
- Tendo aberta a folha de cálculo com o algoritmo de sintonização e as respetivas funções a minimizar executar o comando de *Ctrl + m* de modo a abrir a janela do *plugin*;
- Proceder à seleção da função a minimizar, selecionado a célula em questão que contém a função;
- Proceder à seleção de variáveis que se pretendem variar por modo a encontrar o valor mínimo da função (restrições), sendo que neste caso as restrições são as variáveis do controlador e estas variáveis têm que apresentar como restrições os seus valores serem maiores que zero. Estas restrições são da natureza física do problema, ou seja, ou valores dos parâmetros do controlador nunca podem ser menores que zero;
- Selecionar o método de otimização com que se pretende executar a resolução do problema, sendo que neste caso o método a ser utilizado é o método *simplex*;
- Após a seleção do método, das variáveis e respetivas restrições, bem como a função objetivo executa-se o comando *Minimize*, em que, de imediato se verifica o algoritmo a iniciar a resolução e as iterações a serem executadas até se encontrar o melhor valor otimizado;

Os resultados obtidos são introduzidos automaticamente pelo próprio *plugin* nas células que continham os valores antigos. As células que continham as variáveis e a função objetivo são, portanto, substituídas pelos novos valores otimizados encontrados de forma automática pelo algoritmo *simplex*. Neste caso, este procedimento constituído por estes seis pontos é executado de forma individual para cada uma das funções objetivo, que neste caso foram respetivamente as funções ISE, IAE, ITAE e ITSE.

6.1. Resultados de Abordagem Heurística para Dinâmica de Segunda Ordem

Tendo em conta o algoritmo recursivo construído para a sintonia PID, em k passos heurísticos, em que, o número de passos neste processo escolhido foi em função da visualização da resposta favorável por meio de gráficos, que tem como base na sua génese as equações (41) – (46) e (60) – (63) e sendo este processo ilustrado pelas imagens (12) – (16), obtêm-se os resultados ilustrados pelas imagens (17) – (22).

As imagens (17) e (18) ilustram a função erro geral do processo e a função output respetivamente, obtidos por valores heurísticos atribuídos ao controlador. As imagens (27) – (30) ilustram os gráficos das funções de custo minimizadas.

As tabelas (1) e (2) apresentam os valores analíticos obtidos decorrentes da análise de resposta ao degrau das funções output do processo obtidas por valores heurísticos atribuídos ao controlador e da minimização das funções de custo ISE, IAE, ITAE e ITSE, respetivamente.

Y(-1)		Δt	Kp	Ki	Kd	Valores Heurísticos (Kp, Ki, Kd)													
1	1	1	0,12467	0,45673	0,0004	0,12467	0,45673	0,0004											
t(s)	X1(k)	X2(k)	Y(k)	e(k)	Σ Erros	u(k)	e(k) ²	J (ISE)	e(k)	J (IAE)	t· e(k)	J (ITAE)	t·(e(k)) ²	J (ITSE)	AΔ	BΔ	CΔ		
0	0	0	0	1	1	0,581	1	0,99961	1	2,97653	0	0,99985	0	1,37193	0,7859	-0,7358	1	0,3403	0,4834
1	0,19771	0,80229	1,80228604	0,92326	0,64366	0,80229	0,80229	0,80229	0,80229	0,80229	0,80229	0,80229	0,80229	0,80229	0,80229	0,80229	0,80229	0,80229	0,80229
2	0,2905	0,61	0,39	2,192291033	1,05007	0,1521	0,39	0,78001	0,78001	0,78001	0,78001	0,78001	0,78001	0,78001	0,78001	0,78001	0,78001	0,78001	0,78001
3	0,98715	0,01285	2,205145125	1,00891	0,00017	0,01285	0,03856	0,03856	0,03856	0,03856	0,03856	0,03856	0,03856	0,03856	0,03856	0,03856	0,03856	0,03856	0,03856
4	1,14851	-0,14851	2,056631378	0,92087	0,02206	0,14851	0,59405	0,08823	0,59405	0,59405	0,59405	0,59405	0,59405	0,59405	0,59405	0,59405	0,59405	0,59405	0,59405
5	1,09667	-0,09667	1,959959634	0,8831	0,00935	0,09667	0,48336	0,04673	0,09667	0,09667	0,09667	0,09667	0,09667	0,09667	0,09667	0,09667	0,09667	0,09667	0,09667
6	0,91696	0,00141	1,997530513	0,91696	0,00141	0,03757	0,22543	0,00847	0,03757	0,03757	0,03757	0,03757	0,03757	0,03757	0,03757	0,03757	0,03757	0,03757	0,03757
7	0,12161	0,87839	0,12161	2,119136695	0,983	0,01479	0,12161	0,85124	0,12161	0,12161	0,12161	0,12161	0,12161	0,12161	0,12161	0,12161	0,12161	0,12161	0,12161
8	0,1076	0,8924	0,1076	2,226741052	1,03044	0,01158	0,1076	0,86083	0,1076	0,1076	0,1076	0,1076	0,1076	0,1076	0,1076	0,1076	0,1076	0,1076	0,1076
9	0,03358	0,96642	0,03358	2,260319734	1,03657	0,00113	0,03358	0,30221	0,03358	0,03358	0,03358	0,03358	0,03358	0,03358	0,03358	0,03358	0,03358	0,03358	0,03358
10	0,00109	1,033	-0,033	2,227320169	1,01319	0,00109	0,033	0,33	0,033	0,033	0,033	0,033	0,033	0,033	0,033	0,033	0,033	0,033	0,033
11	0,00266	1,05162	-0,05162	2,175703365	0,98728	0,00266	0,05162	0,56778	0,05162	0,05162	0,05162	0,05162	0,05162	0,05162	0,05162	0,05162	0,05162	0,05162	0,05162
12	0,00074	1,02729	-0,02729	2,148418086	0,97783	0,00074	0,02729	0,32742	0,02729	0,02729	0,02729	0,02729	0,02729	0,02729	0,02729	0,02729	0,02729	0,02729	0,02729
13	0,00071	0,99184	0,00816	2,1565823	0,98598	6,7E-05	0,00816	0,10613	0,00816	0,00816	0,00816	0,00816	0,00816	0,00816	0,00816	0,00816	0,00816	0,00816	0,00816
14	0,00071	0,97342	0,02658	2,183166378	1,00042	0,00071	0,02658	0,37218	0,02658	0,02658	0,02658	0,02658	0,02658	0,02658	0,02658	0,02658	0,02658	0,02658	0,02658
15	0,00045	0,97887	0,02113	2,204300773	1,00941	0,00045	0,02113	0,31702	0,02113	0,02113	0,02113	0,02113	0,02113	0,02113	0,02113	0,02113	0,02113	0,02113	0,02113
16	0,00002	0,99647	0,00353	2,207827397	1,00883	1,2E-05	0,00353	0,05643	0,00353	0,00353	0,00353	0,00353	0,00353	0,00353	0,00353	0,00353	0,00353	0,00353	0,00353
17	0,00011	1,01028	-0,01028	2,197547096	1,00241	0,00011	0,01028	0,17477	0,01028	0,01028	0,01028	0,01028	0,01028	0,01028	0,01028	0,01028	0,01028	0,01028	0,01028
18	0,00015	1,01233	-0,01233	2,185218012	0,99652	0,00015	0,01233	0,22192	0,01233	0,01233	0,01233	0,01233	0,01233	0,01233	0,01233	0,01233	0,01233	0,01233	0,01233
19	0,00053	1,0053	-0,0053	2,179914387	0,99497	2,8E-05	0,0053	0,10077	0,0053	0,0053	0,0053	0,0053	0,0053	0,0053	0,0053	0,0053	0,0053	0,0053	0,0053

Figura 12 – Ilustração do cálculo da variável estado X1 no passo em $k = 2$

EATÓRIO : \times \checkmark f_x $=(\$P\$6*B5)+(\$Q\$6*C5)+(\$R\$6*G5)$

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
Y(-1)	Δt	Kp	Ki	Kd		Valores Heurísticos (Kp,Ki,Kd)													
1	1	0,12467	0,45673	0,0004		0,12467	0,45673	0,0004											
t(s)	X1(k)	X2(k)	Y(k)	e(k)	Σ Erros	u(k)	e(k) ²	J (ISE)	e(k)	J (IAE)	t·e(k)	J (ITAE)	t·e(k) ²	J (ITSE)	AΔ	BΔ	CΔ		
0	0	0	0	1		0,581	0,337561	0,99961	1	2,97653	0	0,99985	0	1,37193	0,7859	-0,7358	1	0,3403	0,4834
1	0,581	0	0,19771	0,80229	1,80228604	0,92326	0,64366		0,80229		0,80229		0,64366		0,5	0	0		
2	1,37986	0,2905	0,61	0,39	2,192291033	1,05007	0,1521		0,39		0,78001		0,30421						
3	1,92075	0,68993	0,98715	0,01285	2,205145125	1,00891	0,00017		0,01285		0,03856		0,0005						
4	2,01078	0,96038	1,14851	-0,14851	2,056631378	0,92087	0,02206		0,14851		0,59405		0,08823						
5	1,7945	1,00539	1,09667	-0,09667	1,959959634	0,8831	0,00935		0,09667		0,48336		0,04673						
6	1,55363	0,89725	0,96243	0,03757	1,997530513	0,91696	0,00141		0,03757		0,22543		0,00847						
7	1,47776	0,77681	0,87839	0,12161	2,119136695	0,983	0,01479		0,12161		0,85124		0,10352						
8	1,57279	0,73888	0,8924	0,1076	2,226741052	1,03044	0,01158		0,1076		0,86083		0,09263						
9	1,72283	0,7864	0,96642	0,03358	2,260319734	1,03657	0,00113		0,03358		0,30221		0,01015						
10	1,81191	0,86141	1,033	-0,033	2,227320169	1,01319	0,00109		0,033		0,33		0,01089						
11	1,80335	0,90595	1,05162	-0,05162	2,175703365	0,98728	0,00266		0,05162		0,56778		0,02931						
12	1,73793	0,90167	1,02729	-0,02729	2,148418086	0,97783	0,00074		0,02729		0,32742		0,00893						
13	1,68022	0,86896	0,99184	0,00816	2,1565823	0,98598	6,7E-05		0,00816		0,10613		0,00087						
14	1,66708	0,84011	0,97342	0,02658	2,183166378	1,00042	0,00071		0,02658		0,37218		0,00989						
15	1,69243	0,83354	0,97887	0,02113	2,204300773	1,00941	0,00045		0,02113		0,31702		0,0067						
16	1,72616	0,84621	0,99647	0,00353	2,207827397	1,00883	1,2E-05		0,00353		0,05643		0,0002						
17	1,74277	0,86308	1,01028	-0,01028	2,197547096	1,00241	0,00011		0,01028		0,17477		0,0018						
18	1,737	0,87139	1,01233	-0,01233	2,185218012	0,99652	0,00015		0,01233		0,22192		0,00274						
19	1,72046	0,8685	1,0053	-0,0053	2,179914387	0,99497	2,8E-05		0,0053		0,10077		0,00053						

Figura 13 - Ilustração do cálculo da variável estado X2 no passo em k = 2

EATÓRIO : \times \checkmark f_x $=(\$S\$5*B6)+(\$T\$5*C6)$

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
Y(-1)	Δt	Kp	Ki	Kd		Valores Heurísticos (Kp,Ki,Kd)													
1	1	0,12467	0,45673	0,0004		0,12467	0,45673	0,0004											
t(s)	X1(k)	X2(k)	Y(k)	e(k)	Σ Erros	u(k)	e(k) ²	J (ISE)	e(k)	J (IAE)	t·e(k)	J (ITAE)	t·e(k) ²	J (ITSE)	AΔ	BΔ	CΔ		
0	0	0	0	1		0,581	0,337561	0,99961	1	2,97653	0	0,99985	0	1,37193	0,7859	-0,7358	1	0,3403	0,4834
1	0,581	0	0,19771	0,80229	1,80228604	0,92326	0,64366		0,80229		0,80229		0,64366		0,5	0	0		
2	1,37986	0,2905	0,61	0,39	2,192291033	1,05007	0,1521		0,39		0,78001		0,30421						
3	1,92075	0,68993	0,98715	0,01285	2,205145125	1,00891	0,00017		0,01285		0,03856		0,0005						
4	2,01078	0,96038	1,14851	-0,14851	2,056631378	0,92087	0,02206		0,14851		0,59405		0,08823						
5	1,7945	1,00539	1,09667	-0,09667	1,959959634	0,8831	0,00935		0,09667		0,48336		0,04673						
6	1,55363	0,89725	0,96243	0,03757	1,997530513	0,91696	0,00141		0,03757		0,22543		0,00847						
7	1,47776	0,77681	0,87839	0,12161	2,119136695	0,983	0,01479		0,12161		0,85124		0,10352						
8	1,57279	0,73888	0,8924	0,1076	2,226741052	1,03044	0,01158		0,1076		0,86083		0,09263						
9	1,72283	0,7864	0,96642	0,03358	2,260319734	1,03657	0,00113		0,03358		0,30221		0,01015						
10	1,81191	0,86141	1,033	-0,033	2,227320169	1,01319	0,00109		0,033		0,33		0,01089						
11	1,80335	0,90595	1,05162	-0,05162	2,175703365	0,98728	0,00266		0,05162		0,56778		0,02931						
12	1,73793	0,90167	1,02729	-0,02729	2,148418086	0,97783	0,00074		0,02729		0,32742		0,00893						
13	1,68022	0,86896	0,99184	0,00816	2,1565823	0,98598	6,7E-05		0,00816		0,10613		0,00087						
14	1,66708	0,84011	0,97342	0,02658	2,183166378	1,00042	0,00071		0,02658		0,37218		0,00989						
15	1,69243	0,83354	0,97887	0,02113	2,204300773	1,00941	0,00045		0,02113		0,31702		0,0067						
16	1,72616	0,84621	0,99647	0,00353	2,207827397	1,00883	1,2E-05		0,00353		0,05643		0,0002						
17	1,74277	0,86308	1,01028	-0,01028	2,197547096	1,00241	0,00011		0,01028		0,17477		0,0018						
18	1,737	0,87139	1,01233	-0,01233	2,185218012	0,99652	0,00015		0,01233		0,22192		0,00274						
19	1,72046	0,8685	1,0053	-0,0053	2,179914387	0,99497	2,8E-05		0,0053		0,10077		0,00053						
20	1,70803	0,86023	0,99708	0,00292	2,18283721	0,99733	8,5E-06		0,00292		0,05846		0,00017						
21	1,70671	0,85402	0,99363	0,00637	2,189212062	1,00067	4,1E-05		0,00637		0,13387		0,00085						
22	1,71359	0,85336	0,99565	0,00435	2,193565017	1,00241	1,9E-05		0,00435		0,09577		0,00042						

Figura 14 - Ilustração do cálculo da variável processo Y no passo k = 2

EATÓRIO : \times \checkmark f_x $=1-D6$

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
Y(-1)	Δt	Kp	Ki	Kd		Valores Heurísticos (Kp,Ki,Kd)													
1	1	0,12467	0,45673	0,0004		0,12467	0,45673	0,0004											
t(s)	X1(k)	X2(k)	Y(k)	e(k)	Σ Erros	u(k)	e(k) ²	J (ISE)	e(k)	J (IAE)	t·e(k)	J (ITAE)	t·e(k) ²	J (ITSE)	AΔ	BΔ	CΔ		
0	0	0	0	1		0,581	0,337561	0,99961	1	2,97653	0	0,99985	0	1,37193	0,7859	-0,7358	1	0,3403	0,4834
1	0,581	0	0,19771	0,80229	1,80228604	0,92326	0,64366		0,80229		0,80229		0,64366		0,5	0	0		
2	1,37986	0,2905	0,61	0,39	2,192291033	1,05007	0,1521		0,39		0,78001		0,30421						
3	1,92075	0,68993	0,98715	0,01285	2,205145125	1,00891	0,00017		0,01285		0,03856		0,0005						
4	2,01078	0,96038	1,14851	-0,14851	2,056631378	0,92087	0,02206		0,14851		0,59405		0,08823						
5	1,7945	1,00539	1,09667	-0,09667	1,959959634	0,8831	0,00935		0,09667		0,48336		0,04673						
6	1,55363	0,89725	0,96243	0,03757	1,997530513	0,91696	0,00141		0,03757		0,22543		0,00847						
7	1,47776	0,77681	0,87839	0,12161	2,119136695	0,983	0,01479		0,12161		0,85124		0,10352						
8	1,57279	0,73888	0,8924	0,1076	2,226741052	1,03044	0,01158		0,1076		0,86083		0,09263						
9	1,72283	0,7864	0,96642	0,03358	2,260319734	1,03657	0,00113		0,03358		0,30221		0,01015						
10	1,81191	0,86141	1,033	-0,033	2,227320169	1,01319	0,00109		0,033		0,33		0,01089						
11	1,80335	0,90595	1,05162	-0,05162	2,175703365	0,98728	0,00266		0,05162		0,56778		0,02931						
12	1,73793	0,90167	1,02729	-0,02729	2,148418086	0,97783	0,00074		0,02729		0,32742		0,00893						
13	1,68022	0,86896	0,99184	0,00816	2,1565823	0,98598	6,7E-05		0,00816		0,10613		0,00087						
14	1,66708	0,84011	0,97342	0,02658	2,183166378	1,00042	0,00071		0,02658		0,37218		0,00989						
15	1,69243	0,83354	0,97887	0,02113	2,204300773	1,00941	0,00045		0,02113		0,31702		0,0067						
16	1,72616	0,84621	0,99647	0,00353	2,207827397	1,00883	1,2E-05		0,00353		0,05643		0,0002						
17	1,74277	0,86308	1,01028	-0,01028	2,197547096	1,00241	0,00011		0,01028		0,17477		0,0018						
18	1,737	0,87139	1,01233	-0,01233	2,185218012														

LEATÓRIO : X ✓ f_c $=\{S\}S2*E6)+\{D\}S2*F6*\{B\}S2)+(\{E\}S2)*\{((D6-D5)/\{B\}S2)\}$

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	
Y(-1)	Δt	K _p	K _i	K _d		Valores Heurísticos (K _p ,K _i ,K _d)														
1	1	0,12467	0,45673	0,0004		0,12467	0,45673	0,0004												
t(s)	X1(k)	X2(k)	Y(k)	e(k)	Σ Erros	u(k)	e(k) ²	J (ISE)	∫ e(k)	J (ITAE)	t ∫ e(k)	J (ITSE)	t ∫ e(k) ²	J (ITSE)	A _Δ	B _Δ	C _Δ			
0	0	0	0	0	0	0,581	0,337561	1	0,99961	1	2,97653	0	0,99985	0	1,37193	0,7859	-0,7358	1	0,3403	0,4834
1	0,581	0	0,19771	0,80229	1,80228604	0,64366	0,64366	0,80229	0,80229	0,80229	0,80229	0,64366	0,64366	0,64366	0,5	0	0			
2	1,37986	0,2905	0,61	0,39	2,192291033	1,05007	0,1521	0,39	0,78001	0,39	0,78001	0,39	0,39	0,39	0,78001	0,39	0,39			
3	1,92075	0,68993	0,98715	0,01285	2,205145125	1,00891	0,00017	0,01285	0,01285	0,01285	0,01285	0,00017	0,00017	0,00017	0,01285	0,01285	0,01285			
4	2,01078	0,96038	1,14851	-0,14851	2,056631378	0,92087	0,02206	0,14851	0,14851	0,14851	0,14851	0,02206	0,02206	0,02206	0,14851	0,14851	0,14851			
5	1,7945	1,00539	1,09667	-0,09667	1,959959634	0,8831	0,00935	0,09667	0,09667	0,09667	0,09667	0,00935	0,00935	0,00935	0,09667	0,09667	0,09667			
6	1,55363	0,89725	0,96243	0,03757	1,997530513	0,91696	0,00141	0,03757	0,03757	0,03757	0,03757	0,00141	0,00141	0,00141	0,03757	0,03757	0,03757			
7	1,47776	0,77681	0,87839	0,12161	2,119136695	0,983	0,01479	0,12161	0,12161	0,12161	0,12161	0,01479	0,01479	0,01479	0,12161	0,12161	0,12161			
8	1,57279	0,73888	0,8924	0,1076	2,226741052	1,03044	0,01158	0,1076	0,1076	0,1076	0,1076	0,01158	0,01158	0,01158	0,1076	0,1076	0,1076			
9	1,72283	0,7864	0,96642	0,03358	2,260319734	1,03657	0,00113	0,03358	0,03358	0,03358	0,03358	0,00113	0,00113	0,00113	0,03358	0,03358	0,03358			
10	1,81191	0,86141	1,033	-0,033	2,227320169	1,01319	0,00109	0,033	0,033	0,033	0,033	0,00109	0,00109	0,00109	0,033	0,033	0,033			
11	1,80335	0,90595	1,05162	-0,05162	2,175703365	0,98728	0,00266	0,05162	0,05162	0,05162	0,05162	0,00266	0,00266	0,00266	0,05162	0,05162	0,05162			
12	1,73793	0,90167	1,02729	-0,02729	2,148418086	0,97783	0,00074	0,02729	0,02729	0,02729	0,02729	0,00074	0,00074	0,00074	0,02729	0,02729	0,02729			
13	1,68022	0,86896	0,99184	0,00816	2,1565823	0,98598	6,7E-05	0,00816	0,00816	0,00816	0,00816	6,7E-05	6,7E-05	6,7E-05	0,00816	0,00816	0,00816			
14	1,66708	0,84011	0,97342	0,02658	2,183166378	1,00042	0,00071	0,02658	0,02658	0,02658	0,02658	0,00071	0,00071	0,00071	0,02658	0,02658	0,02658			
15	1,69243	0,83354	0,97887	0,02113	2,204300773	1,00941	0,00045	0,02113	0,02113	0,02113	0,02113	0,00045	0,00045	0,00045	0,02113	0,02113	0,02113			
16	1,72616	0,84621	0,99647	0,00353	2,207827397	1,00883	1,2E-05	0,00353	0,00353	0,00353	0,00353	1,2E-05	1,2E-05	1,2E-05	0,00353	0,00353	0,00353			
17	1,74277	0,86308	1,01028	-0,01028	2,197547096	1,00241	0,00011	0,01028	0,01028	0,01028	0,01028	0,00011	0,00011	0,00011	0,01028	0,01028	0,01028			
18	1,737	0,87139	1,01233	-0,01233	2,185218012	0,99652	0,00015	0,01233	0,01233	0,01233	0,01233	0,00015	0,00015	0,00015	0,01233	0,01233	0,01233			
19	1,72046	0,8685	1,0053	-0,0053	2,179914387	0,99497	2,8E-05	0,0053	0,0053	0,0053	0,0053	2,8E-05	2,8E-05	2,8E-05	0,0053	0,0053	0,0053			
20	1,70803	0,86023	0,99708	0,00292	2,18283721	0,99733	8,5E-06	0,00292	0,00292	0,00292	0,00292	8,5E-06	8,5E-06	8,5E-06	0,00292	0,00292	0,00292			
21	1,70671	0,85402	0,99363	0,00637	2,189212062	1,00067	4,1E-05	0,00637	0,00637	0,00637	0,00637	4,1E-05	4,1E-05	4,1E-05	0,00637	0,00637	0,00637			

Figura 16 – Ilustração do cálculo da resposta do controlador U no passo k = 2

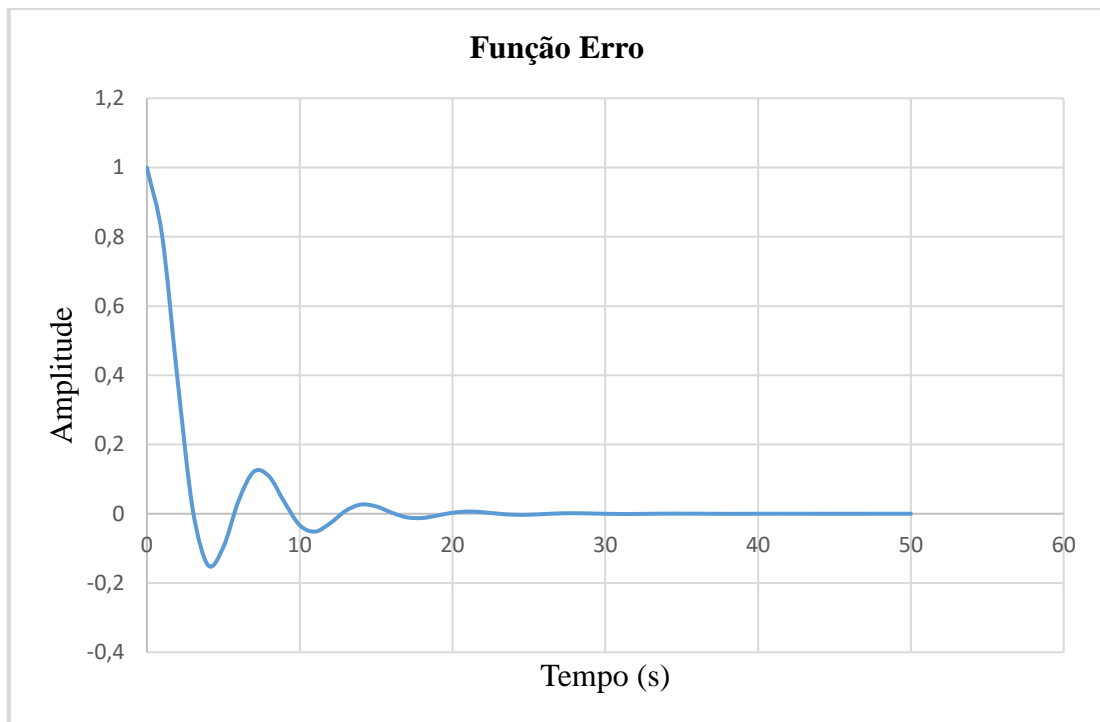


Figura 17 – Gráfico da função erro de dinâmica de segunda ordem, constituído pela amplitude do erro em função do tempo

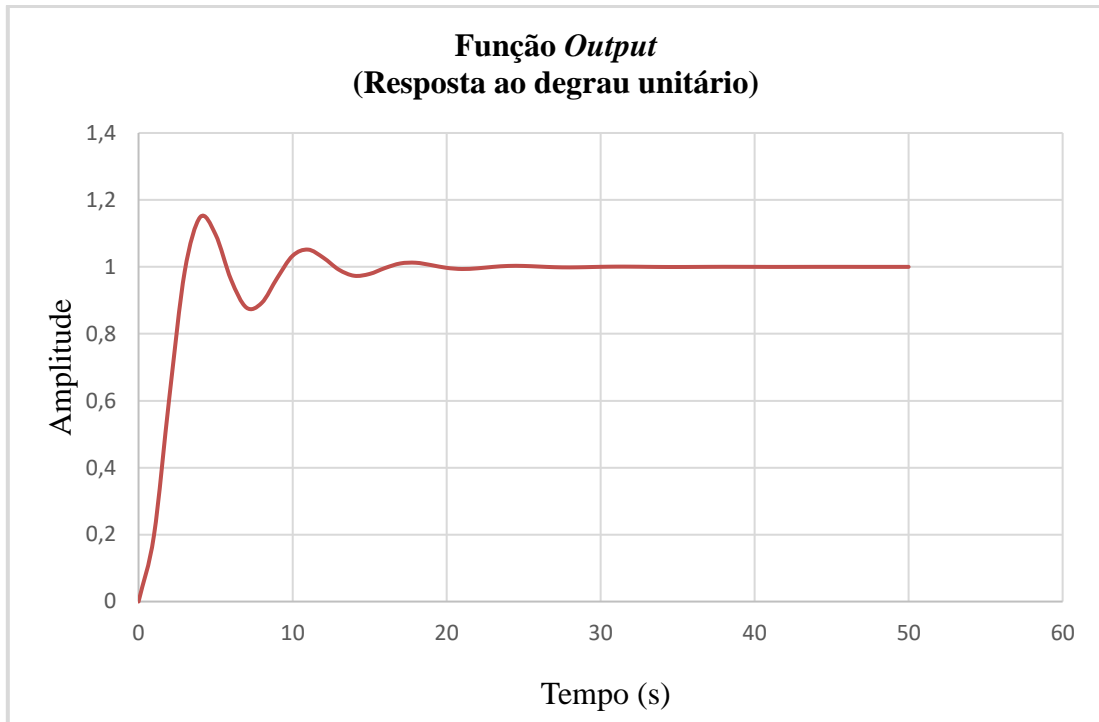


Figura 18 – Gráfico da função output de dinâmica de segunda ordem, constituído pela amplitude do output em função do tempo

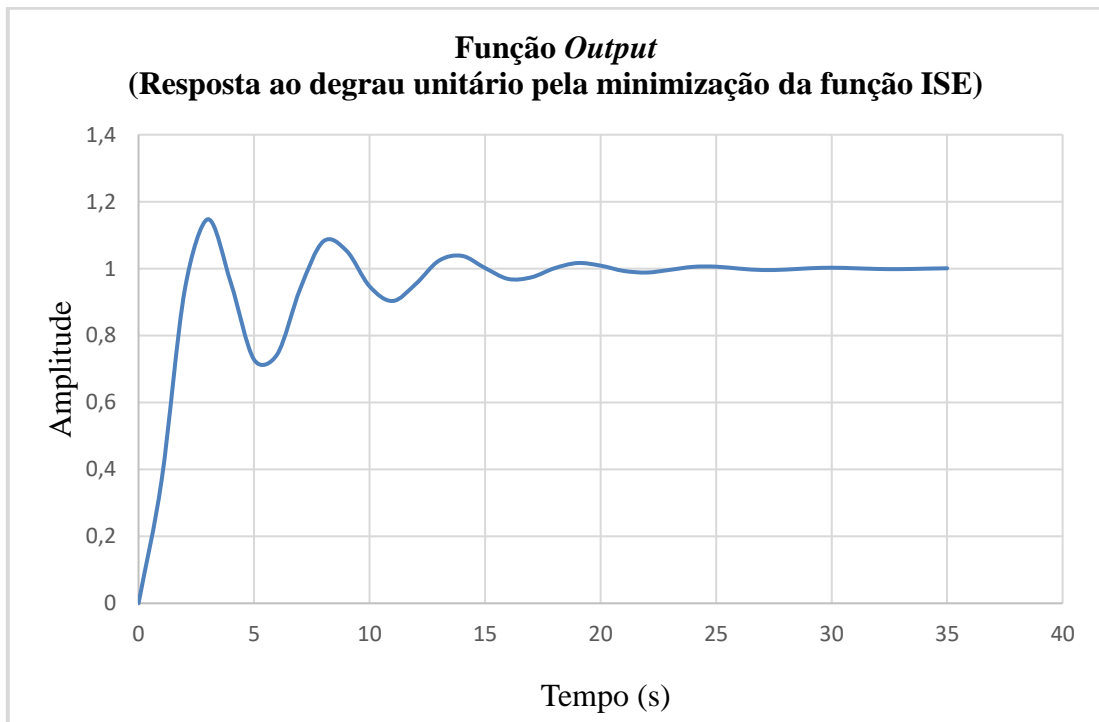


Figura 19 – Gráfico da função output de dinâmica de segunda ordem, constituído pela amplitude do output derivada da minimização do índice ISE em função do tempo

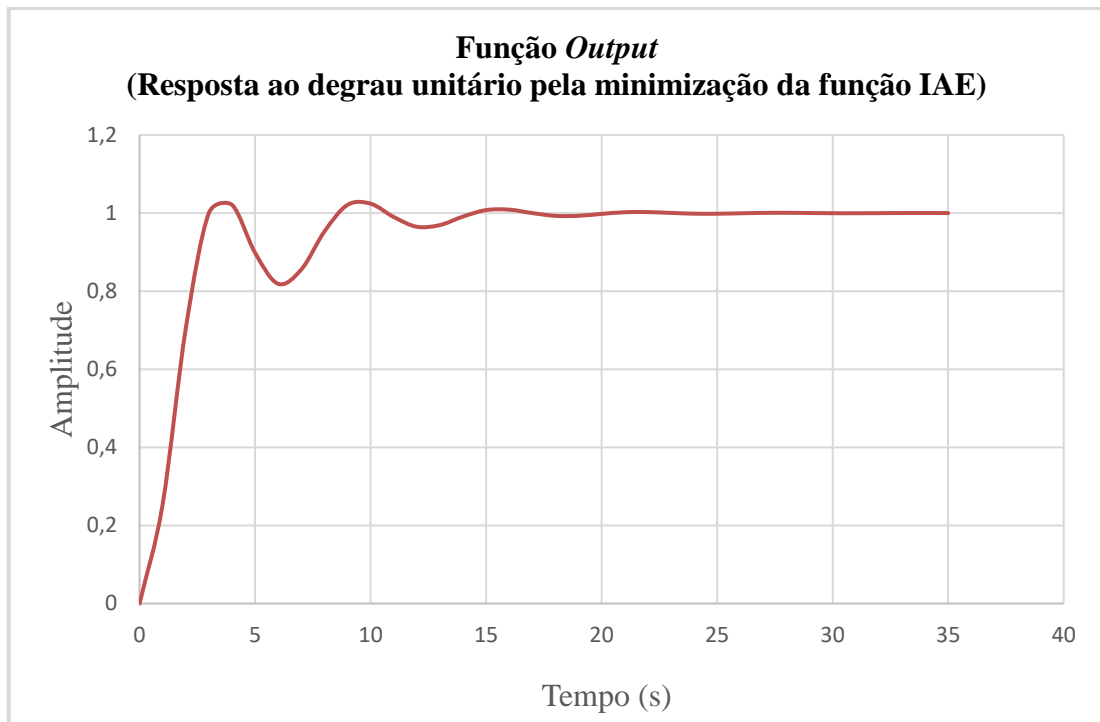


Figura 20 – Gráfico da função output de dinâmica de segunda ordem, constituído pela amplitude do output derivada da minimização do índice IAE em função do tempo

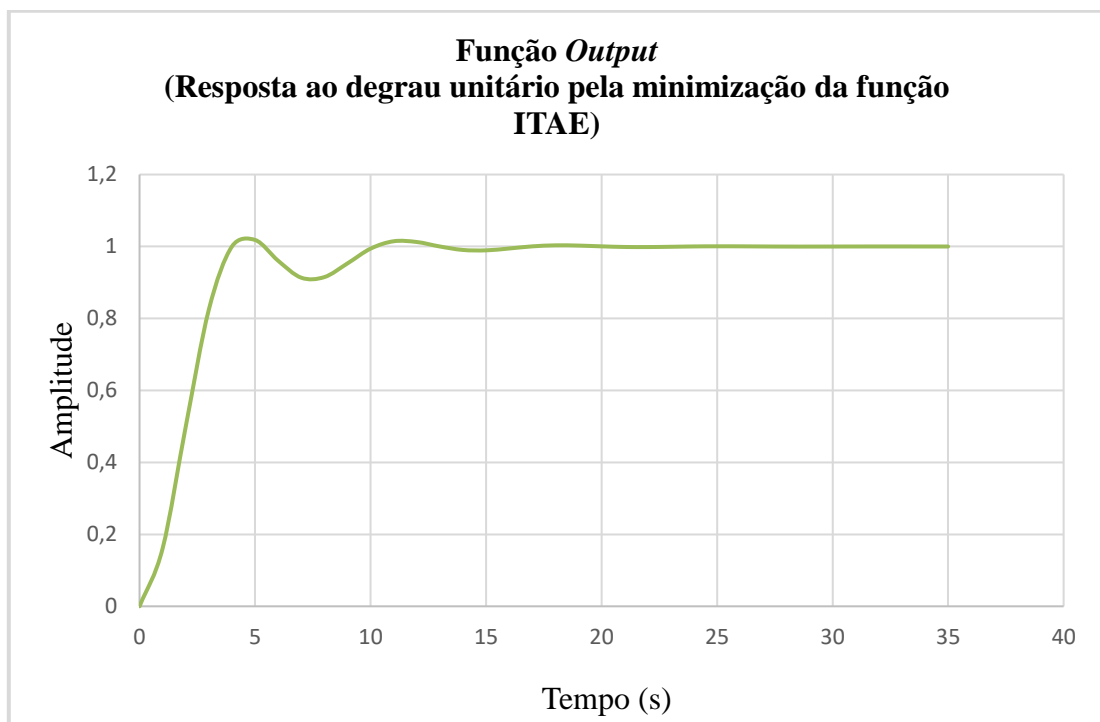


Figura 21 – Gráfico da função output de dinâmica de segunda ordem, constituído pela amplitude do output derivada da minimização do índice ITAE em função do tempo

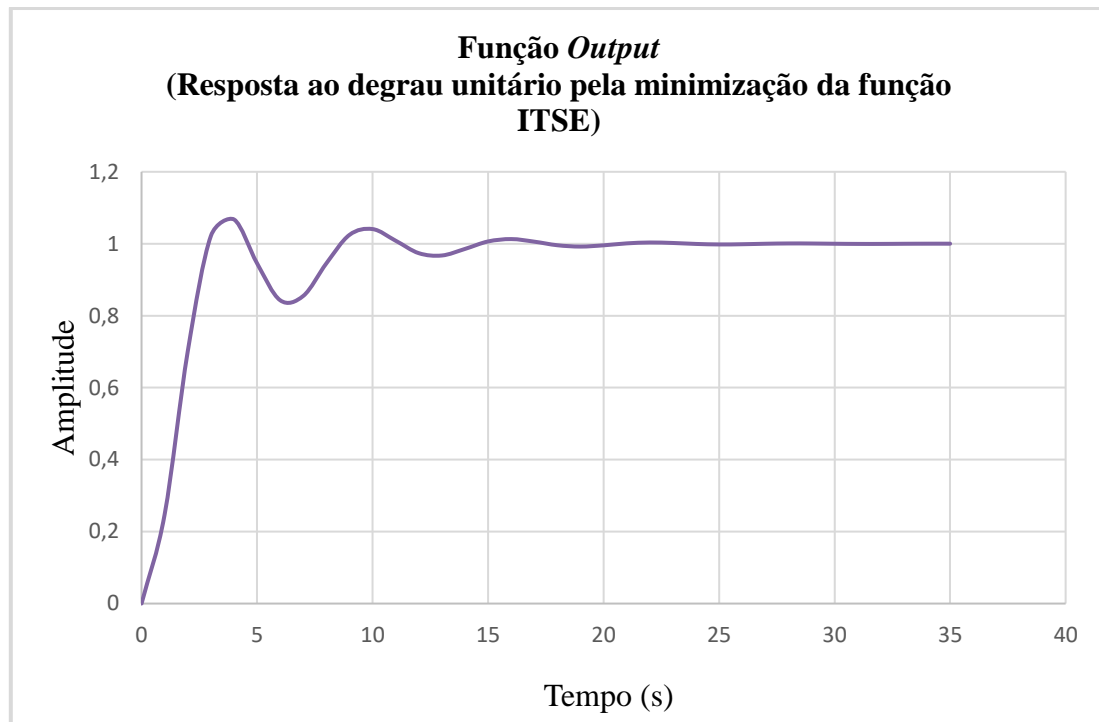


Figura 22 – Gráfico da função output de dinâmica de segunda ordem, constituído pela amplitude do output derivada da minimização do índice ITSE em função do tempo

Tabela 1 – Análise analítica da resposta ao degrau da função output de dinâmica de segunda ordem proveniente da minimização dos índices de performance ISE, IAE, ITAE e ITSE

Índice de Performance	Controlador (Kp, Ki, Kd)	Overshoot (%)	Tempo de Acomodação (s)	Tempo de Subida (s)	Tempo de Pico (s)	Rácio de Decaimento (%)
ISE	0,6324870; 0,449618; 0.	14,75 %	14 s	2,5 s	3 s	54,92 %
IAE	0,352184; 0,394972; 0.	2,1 %	9 s	3 s	4 s	114,29 %
ITAE	0,11055; 0,362872; 1,61E ⁻¹⁷ .	1,8 %	8 s	4 s	5 s	66,67 %
ITSE	0,303881; 0,423943; 0.	6,7 %	10 s	2,5 s	4 s	59,70 %

Tabela 2 – Análise analítica da resposta ao degrau da função output de dinâmica de segunda ordem proveniente de parâmetros heurísticos do controlador

Controlador Heurístico (Kp, Ki, Kd)	Overshoot (%)	Tempo de Acomodação (s)	Tempo de Subida (s)	Tempo de Pico (s)	Rácio de Decaimento (%)
0,12467; 0,456729; 0,0004.	14,8 %	18 s	3,5 s	4 s	34,46 %

6.2. Resultados de Abordagem Heurística para Dinâmica de Terceira Ordem

Tendo em conta o algoritmo recursivo construído para a sintonia PID, em k passos heurísticos, em que, o número de passos neste processo escolhido foi em função da visualização da resposta favorável por meio de gráficos, que tem como base na sua génese as equações (41) – (46) e (65) – (68) obtêm-se os resultados ilustrados pelas imagens (23) – (28).

As imagens (23) e (24) ilustram a função erro geral do processo e a função output respetivamente, obtidos por valores heurísticos atribuídos ao controlador. As imagens (25) – (28) ilustram os gráficos das funções de custo minimizadas.

As tabelas (3) e (4) apresentam os valores analíticos obtidos decorrentes da análise de resposta ao degrau das funções output do processo obtidas por valores heurísticos atribuídos ao controlador e da minimização das funções de custo ISE, IAE, ITAE e ITSE, respetivamente.

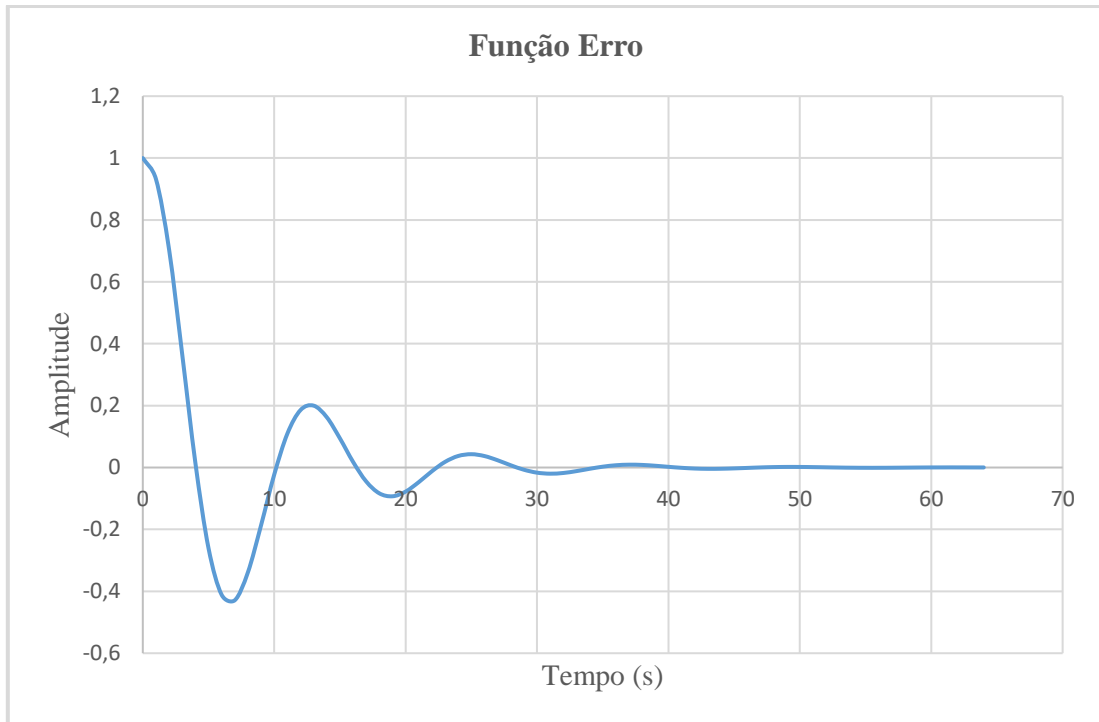


Figura 23 – Gráfico da função erro de dinâmica de terceira ordem, constituído pela amplitude do erro em função do tempo

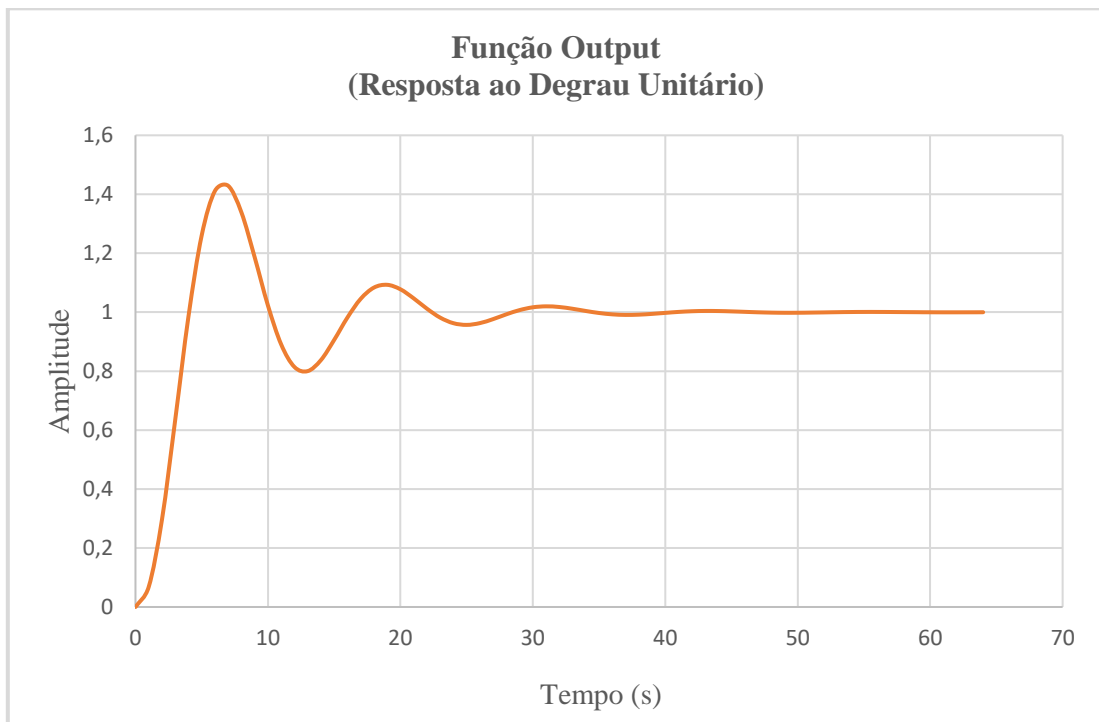


Figura 24 – Gráfico da função output de dinâmica de terceira ordem, constituído pela amplitude do output em função do tempo

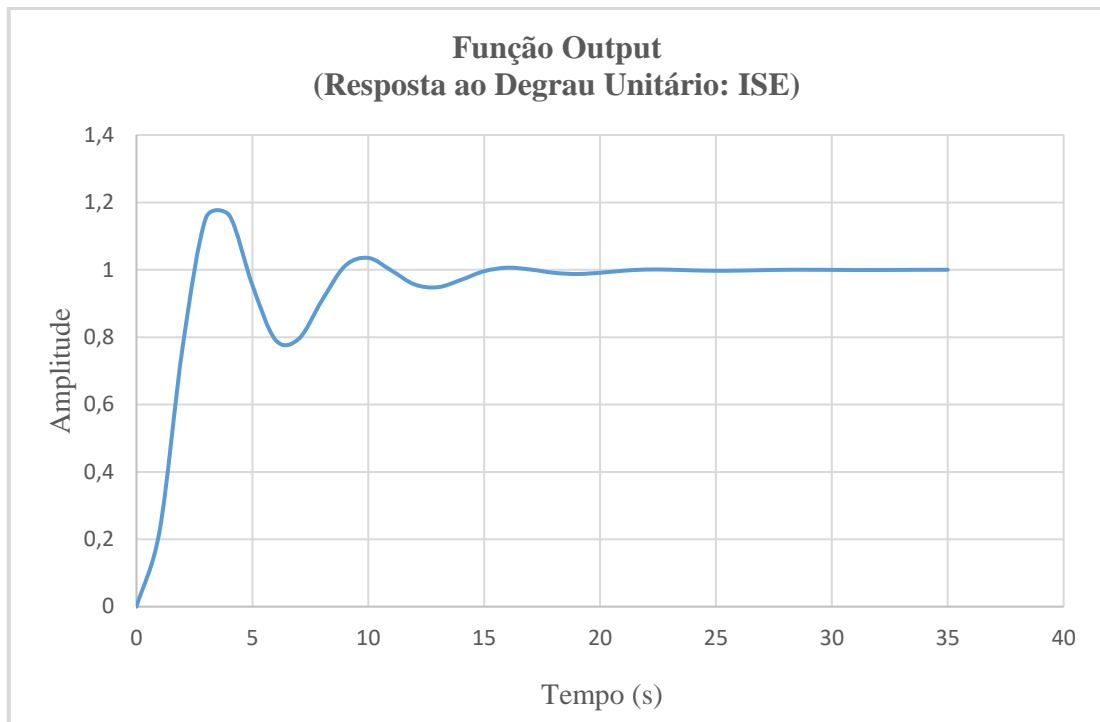


Figura 25 – Gráfico da função output de dinâmica de terceira ordem, constituído pela amplitude do output derivada da minimização do índice ISE em função do tempo

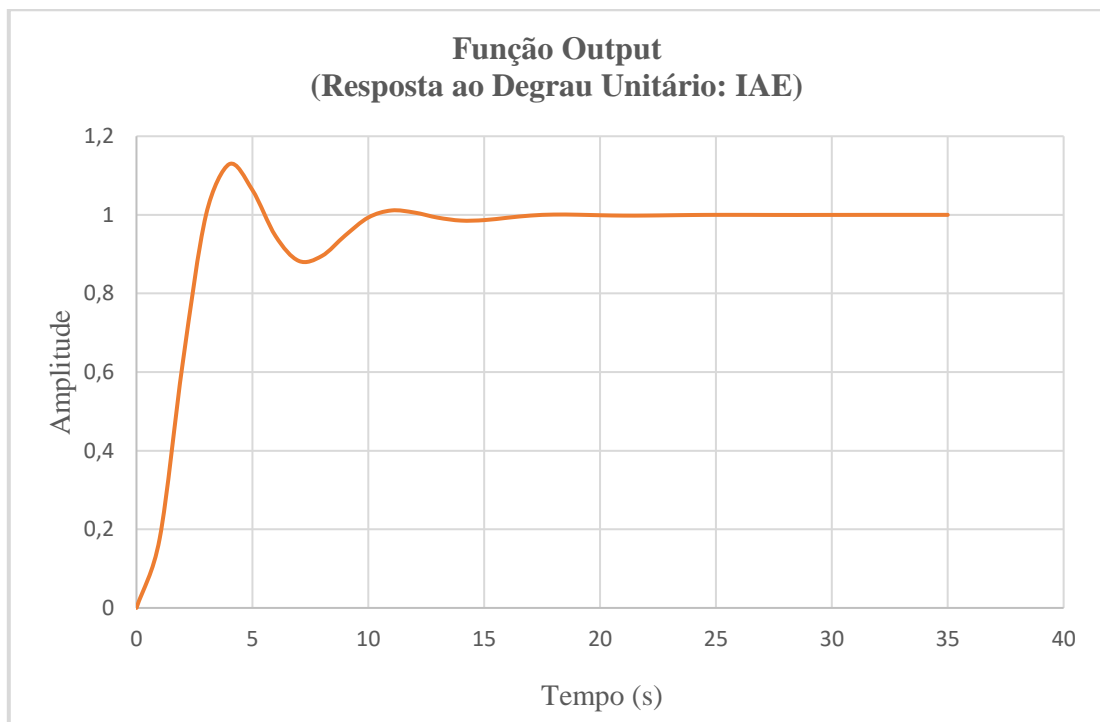


Figura 26 – Gráfico da função output de dinâmica de terceira ordem, constituído pela amplitude do output derivada da minimização do índice IAE em função do tempo

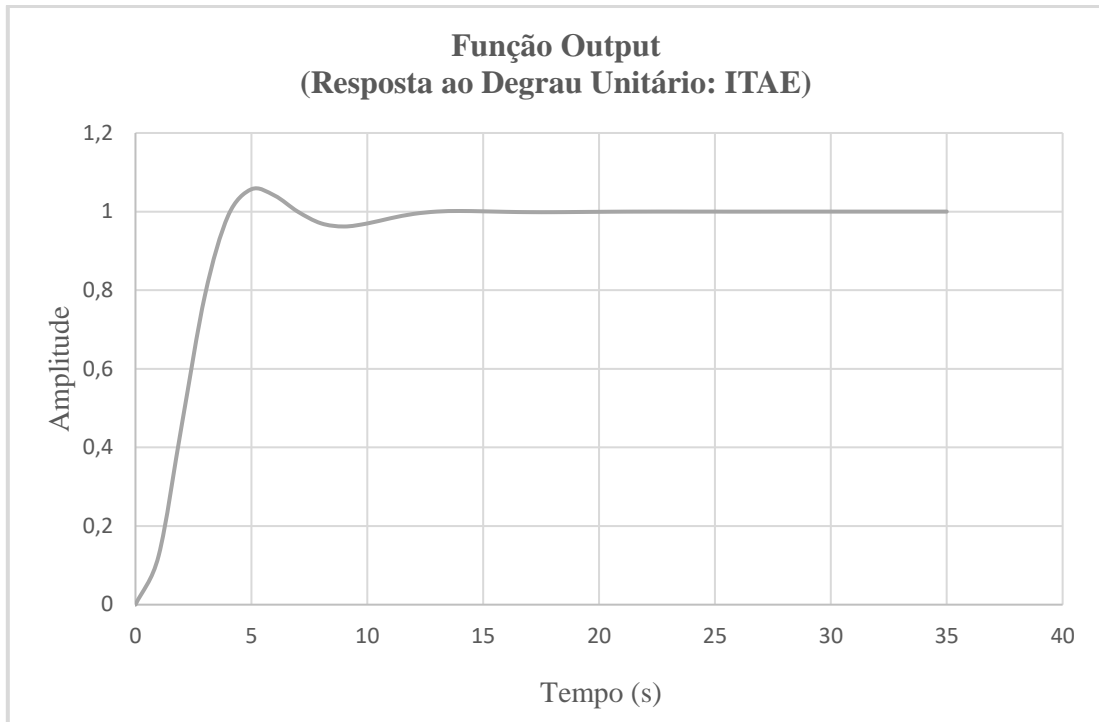


Figura 27 – Gráfico da função output de dinâmica de terceira ordem, constituído pela amplitude do output derivada da minimização do índice ITAE em função do tempo

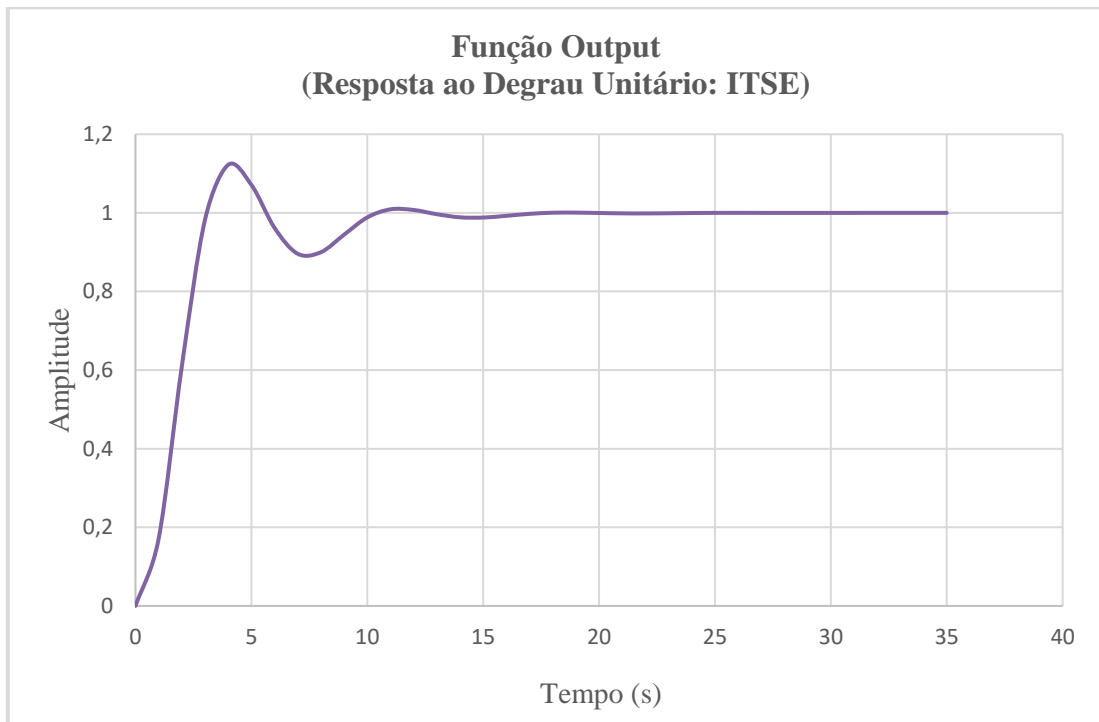


Figura 28 – Gráfico da função output de dinâmica de terceira ordem, constituído pela amplitude do output derivada da minimização do índice ITSE em função do tempo

Tabela 3 – Análise analítica da resposta ao degrau da função output de dinâmica de terceira ordem proveniente da minimização dos índices de performance ISE, IAE, ITAE e ITSE

Índice de Performance	Controlador (Kp, Ki, Kd)	Overshoot (%)	Tempo de Acomodação (s)	Tempo de Subida (s)	Tempo de Pico (s)	Rácio de Decaimento (%)
ISE	0,2652572; 0,084864; 0.	16,2 %	16 s	3 s	4 s	21,67 %
IAE	0,189079; 0,084228; 0.	12,88 %	11 s	3 s	4 s	8,69 %
ITAE	0,118107; 0,075027; 9,654E ⁻¹⁷ .	5,68 %	13 s	4 s	5 s	2,6 %
ITSE	0,1813021; 0,084126; 0.	12,22 %	12 s	3 s	4 s	7,36 %

Tabela 4 – Análise analítica da resposta ao degrau da função output de dinâmica de terceira ordem proveniente de parâmetros heurísticos do controlador

Controlador Heurístico (Kp, Ki, Kd)	Overshoot (%)	Tempo de Acomodação (s)	Tempo de Subida (s)	Tempo de Pico (s)	Rácio de Decaimento (%)
0,0005; 0,10566; 0,0008.	42,88 %	32 s	5 s	7 s	21,2 %

6.3. Resultados de Abordagem Heurística para Dinâmica de Quarta Ordem

Tendo em conta o algoritmo recursivo construído para a sintonia PID, em k passos heurísticos, em que, o número de passos neste processo escolhido foi em função da visualização da resposta favorável por meio de gráficos, que tem como base na sua génese as equações (41) – (46) e (70) – (73) obtêm-se os resultados ilustrados pelas imagens (29) – (34). As imagens (29) e (30) ilustram a função erro geral do processo e a função output respetivamente, obtidos por valores heurísticos atribuídos ao controlador. As imagens (31) – (34) ilustram os gráficos das funções de custo minimizadas. As tabelas (5) e (6) apresentam os valores analíticos obtidos decorrentes

da análise de resposta ao degrau das funções output do processo obtidas por valores heurísticos atribuídos ao controlador e da minimização das funções de custo ISE, IAE, ITAE e ITSE, respetivamente.

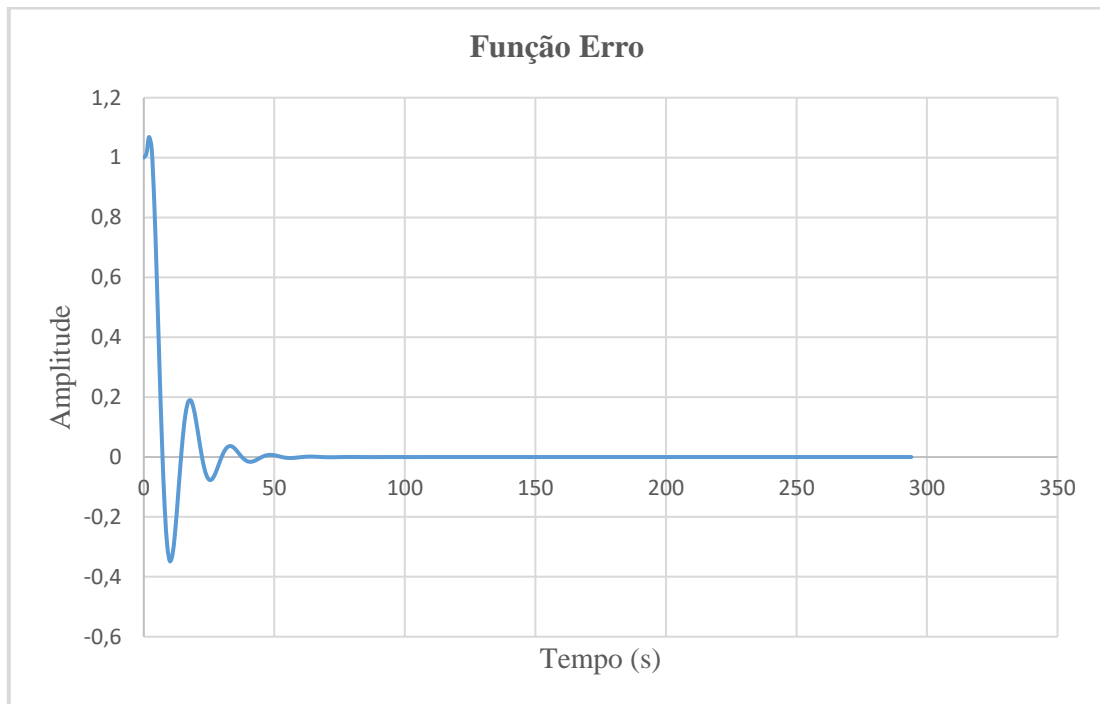


Figura 29 – Gráfico da função erro de dinâmica de quarta ordem, constituído pela amplitude do erro em função do tempo

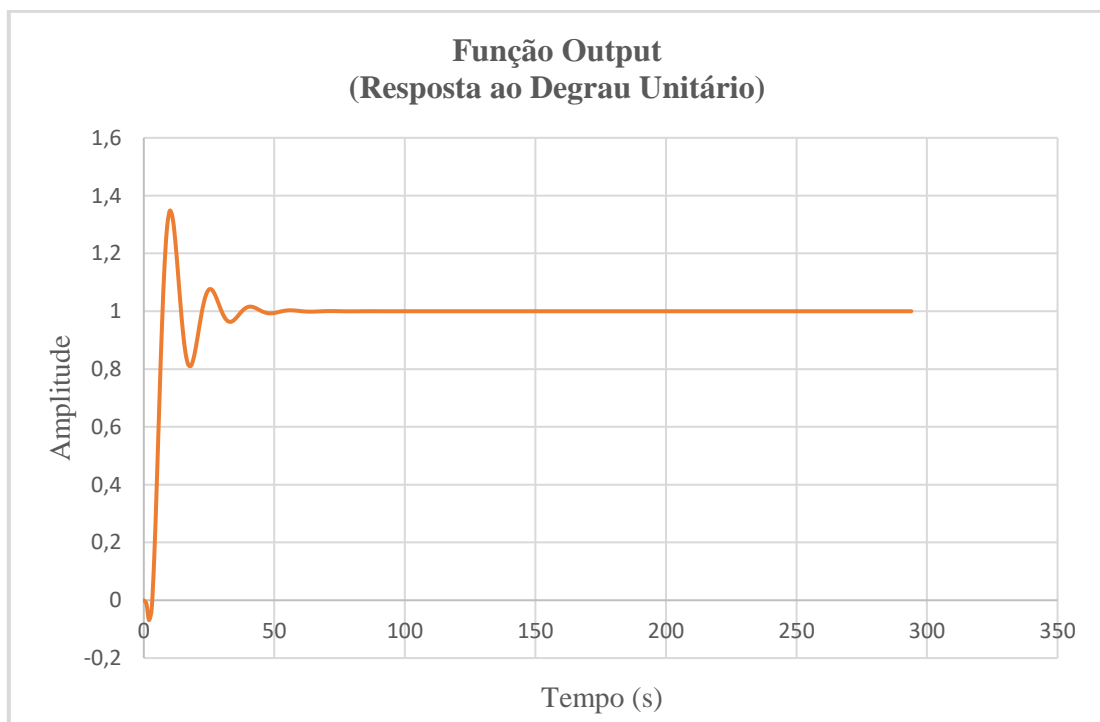


Figura 30 – Gráfico da função output de dinâmica de quarta ordem, constituído pela amplitude do output em função do tempo

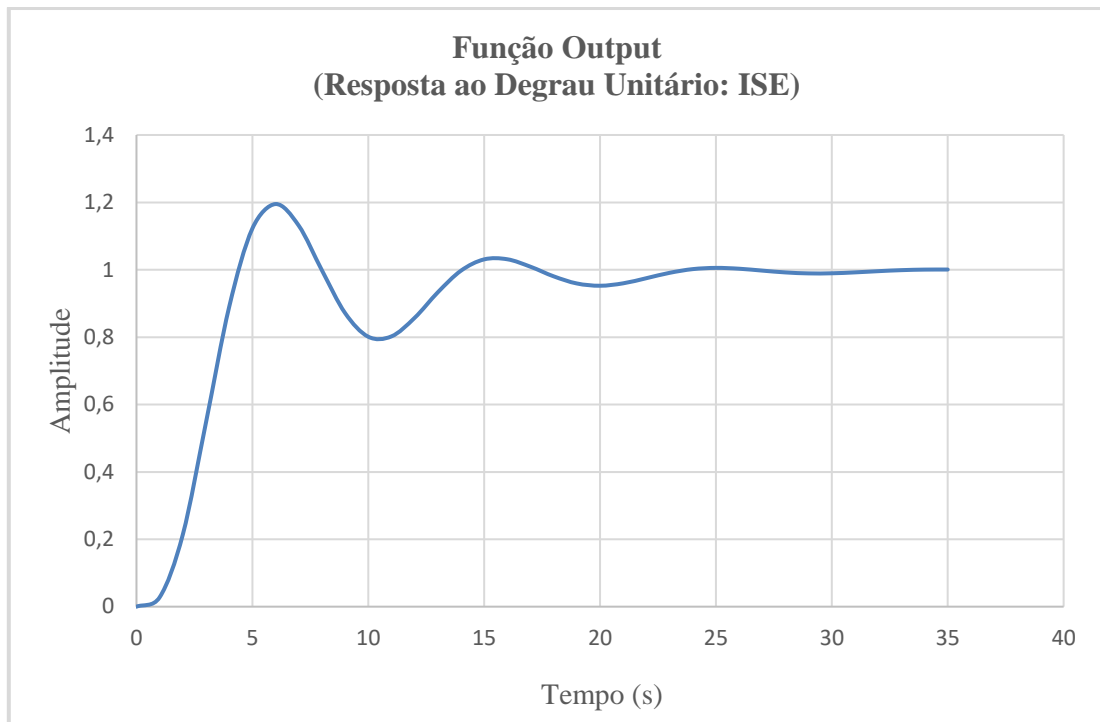


Figura 31 – Gráfico da função output de dinâmica de quarta ordem, constituído pela amplitude do output derivada da minimização do índice ISE em função do tempo

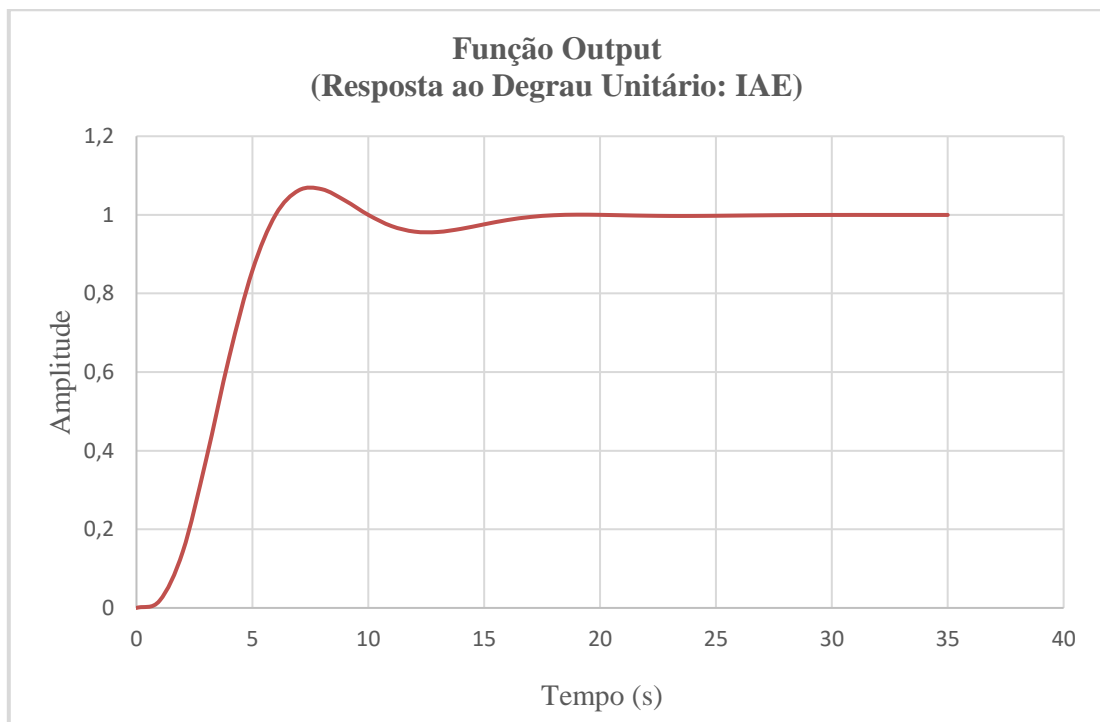


Figura 32 – Gráfico da função output de dinâmica de quarta ordem, constituído pela amplitude do output derivada da minimização do índice IAE em função do tempo

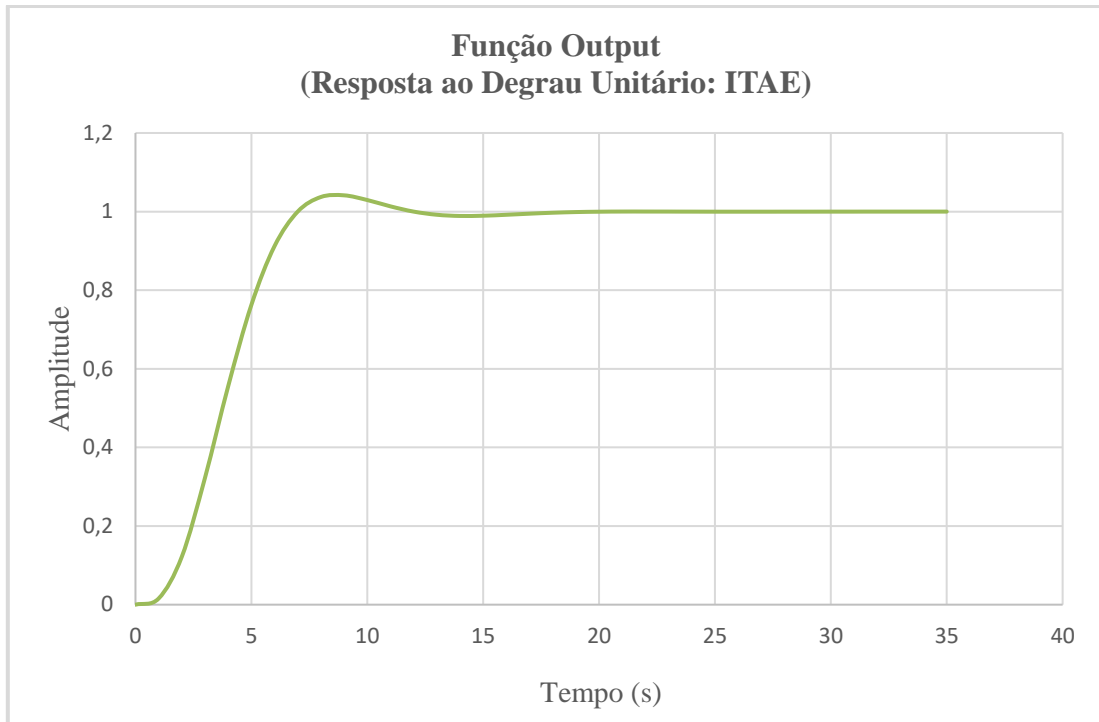


Figura 33 – Gráfico da função output de dinâmica de quarta ordem, constituído pela amplitude do output derivada da minimização do índice ITAE em função do tempo

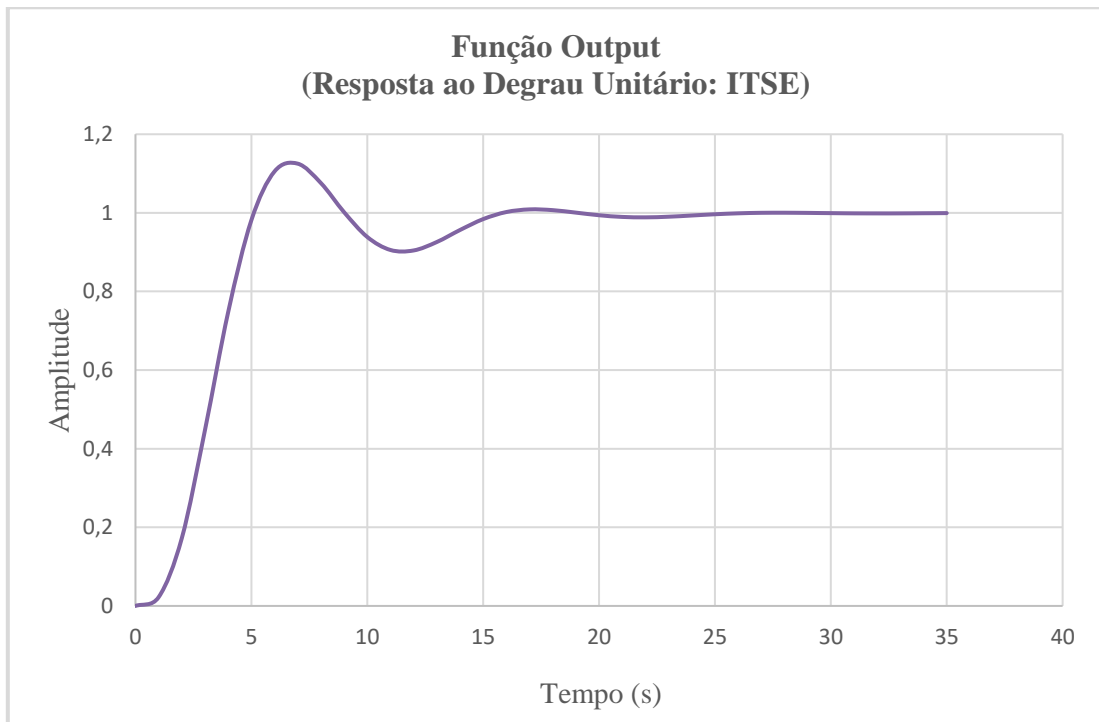


Figura 34 – Gráfico da função output de dinâmica de quarta ordem, constituído pela amplitude do output derivada da minimização do índice ITSE em função do tempo

Tabela 5 – Análise analítica da resposta ao degrau da função output de dinâmica de quarta ordem proveniente da minimização dos índices de performance ISE, IAE, ITAE e ITSE

Índice de Performance	Controlador (Kp, Ki, Kd)	Overshoot (%)	Tempo de Acomodação (s)	Tempo de Subida (s)	Tempo de Pico (s)	Rácio de Decaimento (%)
ISE	1,2359035; 0,239034; 0.	19,49 %	25 s	5 s	6 s	15,75 %
IAE	0,7536422; 0,224772; 0.	6,52 %	19 s	6 s	8 s	0,61 %
ITAE	0,6161747; 0,212889; 0.	4,14 %	11 s	7 s	9 s	32,13 %
ITSE	0,9402002; 0,240903; 0.	12,51 %	16 s	6 s	7 s	1,6 %

Tabela 6 – Análise analítica da resposta ao degrau da função output de dinâmica de quarta ordem proveniente de parâmetros heurísticos do controlador

Controlador Heurístico (Kp, Ki, Kd)	Overshoot (%)	Tempo de Acomodação (s)	Tempo de Subida (s)	Tempo de Pico (s)	Rácio de Decaimento (%)
0,12467; 0,456729; 0,0004.	34,81 %	56 s	8 s	10 s	2,93 %

6.4. Interpretação de Resultados

As imagens (17) - (18), (23) – (24) e (29) – (30) ilustram a função erro geral do processo e a função output proveniente das três dinâmicas abordadas, respetivamente, obtidos por valores heurísticos atribuídos ao controlador, em que, em todas as dinâmicas tanto a função erro converge para zero e a função *output* converge para o *setpoint* definido.

Esta constatação conduz logo numa primeira instância de análise que o processo se encontra bem sintonizado, mas nunca pondo de lado a hipótese de que o mesmo pode ser melhorado por meios de otimização.

Adotando a teoria de análise de performance de Domański, analisando desta forma a resposta ao degrau de cada uma das funções output associadas à minimização de cada uma das funções de custo e a função output associada à abordagem heurística, de sintonia do controlador, tem-se que:

- Analisando tecnicamente os valores da resposta ao degrau das tabelas (1) - (2), (3) - (4) e (5) - (6) é possível constatar que os valores de tempo de pico e de tempo de subida apresentam valores muito próximos uns dos outros para todas as dinâmicas, de salientar que como referido no capítulo quatro a análise somente destes valores isolados não apresentam um relevante caráter de interpretação.
- Relativamente à dinâmica de segunda ordem verifica-se também que para todos os parâmetros do controlador que se obtém um rácio de decaimento favorável, na medida em que todos os rácios de decaimento obtidos são superiores a 25 %, sendo este o valor, sempre no mínimo desejável. Isto significa que para todos os parâmetros atribuídos ao controlador sempre que a resposta completa um ciclo completo apresentam um bom compromisso de convergência curta em direção ao *setpoint* definido.
- Relativamente à dinâmica de terceira ordem apenas se verifica que o índice ISE e a abordagem heurística apresentam um rácio de decaimento favorável. Na dinâmica de quarta ordem apenas se verifica que o índice ITAE apresenta um valor de rácio favorável. De salientar que neste caso estes resultados não significam necessariamente um caráter menos positivo, sendo que, à semelhança dos valores de tempo de pico e de tempo de assentamento, este índice não deve ser abordado somente numa análise sozinha, mas sim em consonância com os outros parâmetros da resposta ao degrau. Neste caso, este fenómeno pode ser explicado pelo fato de as dinâmicas estarem a estabilizar muito mais rapidamente e em consonância com o fato das curvas de resposta nem sequer apresentarem um terceiro pico, o que é de fato positivo, na medida em que constitui uma curva de reação boa.

- Todos os valores de *overshoot* são reduzidos quando se aplica o método *simplex* a todas as funções custo, bem como todos os valores de tempo de acomodação/assentamento, apesar de se verificar uma pouca redução quando aplicado o método à função custo ISE na dinâmica de segunda ordem. Em termos físicos, após a aplicação do método *simplex* às funções custo verifica-se que para todos os casos o sistema torna-se menos agressivo.
- Relativamente ao tempo de acomodação/ assentamento verifica-se também a correlação expetável, descrita em termos bibliográficos, na medida em que ao se verificar um decréscimo nos tempos de acomodação verifica-se de forma proporcional um decréscimo nos valores de *overshoot* em percentagem.

Desta análise de valores de resposta ao degrau, e agindo em conformidade com Domański, verifica-se que o índice que apresenta um maior número de parametros favoráveis de resposta ao degrau é o índice ITAE para todas as dinâmicas, pelo fato de apresentar o melhor valor de overshoot e de tempo de acomodação, sendo portanto, este índice a função ‘alvo’ mais correta a minimizar, conforme é possível verificar de forma analítica e visual nas figuras (35) – (37).

Como referido nos capítulos 3 e 4, em termos analíticos, ou seja, por meios de análise de resposta ao degrau o índice ITAE é de fato o índice ‘alvo’ a minimizar, porém, esta análise pode ser tida em conta por outra perspectiva na medida em que, derivado da natureza física do problema em questão, estando portanto, definições físicas associadas a cada índice, em termos práticos numa realizada industrial poderá ser mais adequado minimizar outros índices que não o ITAE.

Considerando esta situação como sendo o cenário a ocorrer, neste caso em concreto, estaria-se a penalizar erros que ocorreriam mais tarde no domínio do tempo e a proporcionar menos ênfase aos que ocorreriam no início da resposta.

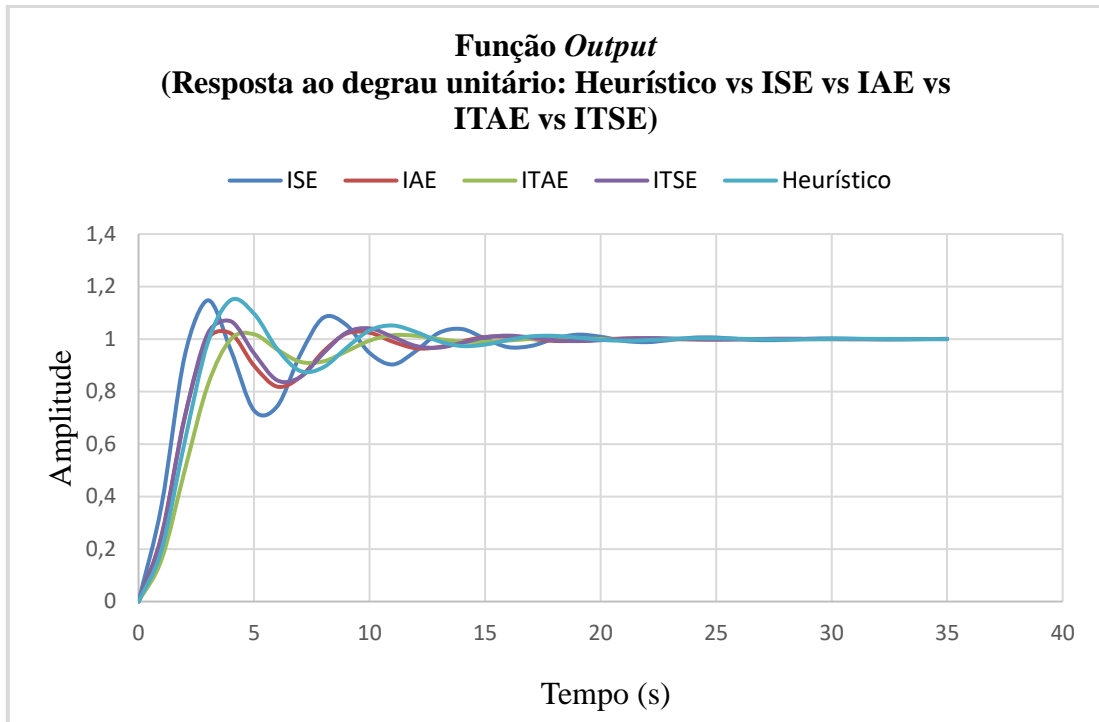


Figura 35 – Gráfico da sobreposição das diversas funções output de dinâmica de segunda ordem

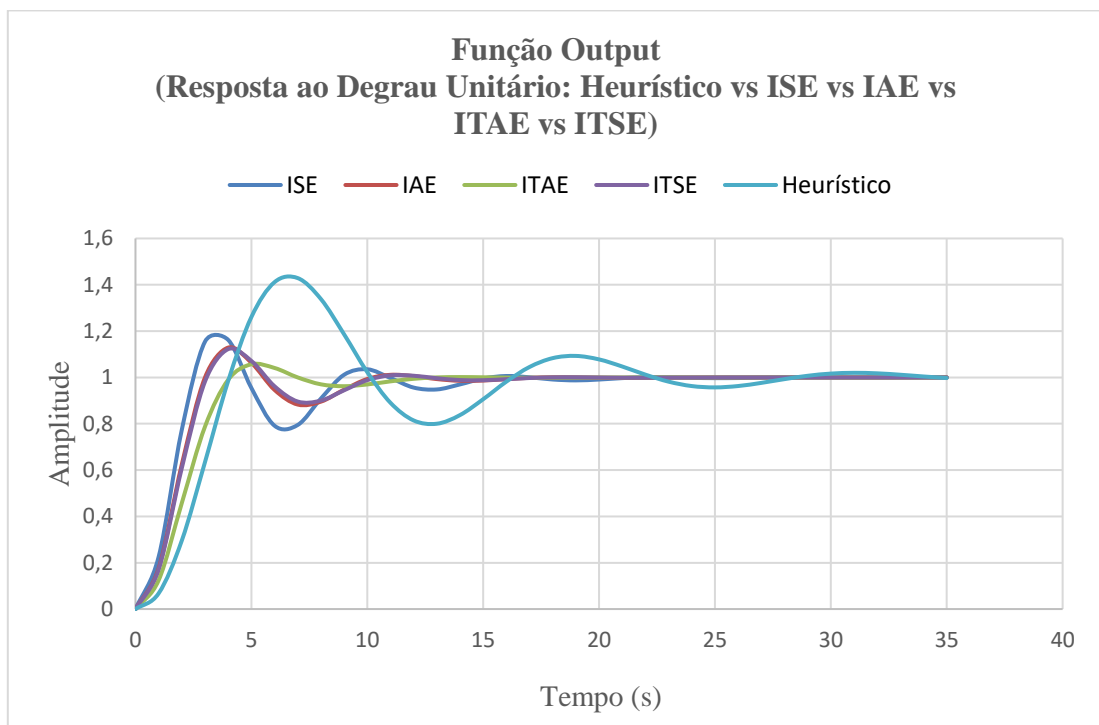


Figura 36 – Gráfico da sobreposição das diversas funções output de dinâmica de terceira ordem

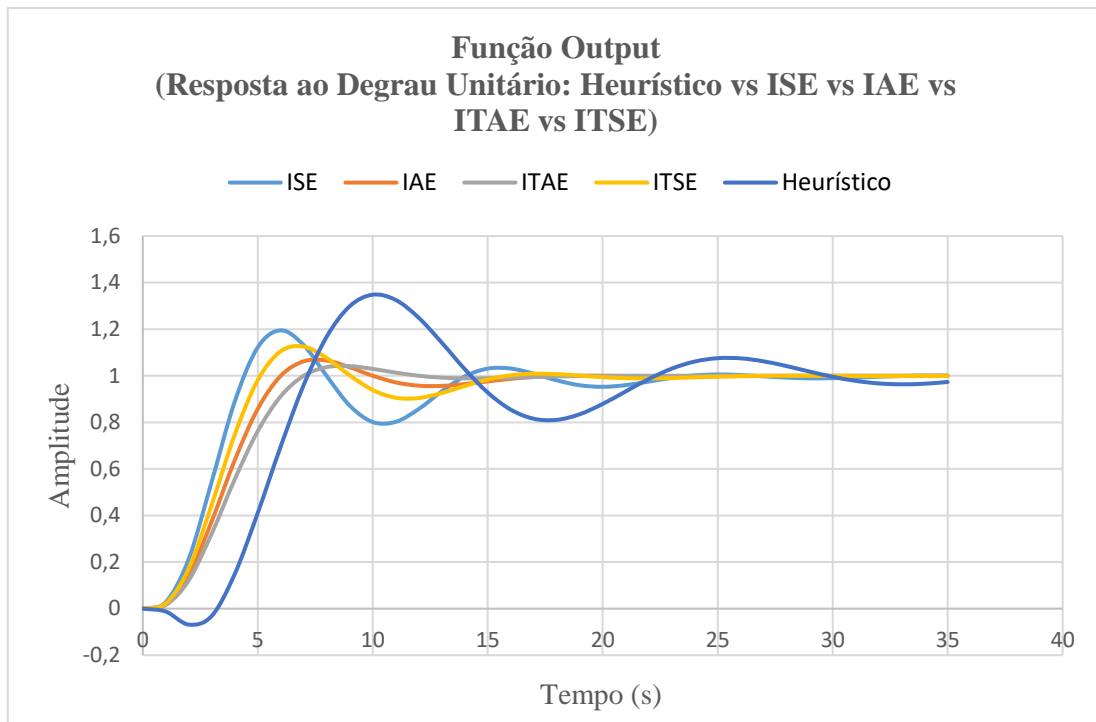


Figura 37 – Gráfico da sobreposição das diversas funções output de dinâmica de quarta ordem

7. Conclusões e Trabalhos Futuros

7.1. Conclusões

No âmbito da realização deste trabalho foi delineado como objetivos proceder à sintonia de um controlador PID pelo método *simplex* e avaliar a eficácia desse mesmo método.

Nesse sentido, verificou-se que esses mesmos objetivos foram cumpridos.

Tendo em conta o caso de estudo abordado constituído por um modelo de processo de segunda ordem, os melhores valores para os parâmetros do controlador encontrados foram $(k_p, \tau_i, \tau_d = 0,11055, 0,362872, 1,61E^{-17})$.

Relativamente à dinâmica de terceira ordem os melhores valores para os parâmetros do controlador encontrados foram $(k_p, \tau_i, \tau_d = 0,118107, 0,075027, 9,654E^{-17})$.

Relativamente à dinâmica de quarta ordem os melhores valores para os parâmetros do controlador encontrados foram $(k_p, \tau_i, \tau_d = 0,6161747, 0,212889, 0)$.

A eficácia do método é comprovada, na medida em que todas as funções output são melhoradas, quando comparadas com a função output inicial, a partir da qual se procede primeiramente à inicialização do método. Este resultado em termos matemáticos, *a priori*, seria de fato expetável, na medida em que, ao se possuir uma solução inicial e se a partir desta se pretender aplicar métodos matemáticos de otimização, que se verificam que são de fato possíveis, o novo resultado tem que necessariamente ser melhor que o inicial.

Ao longo dos capítulos procedeu-se à explicação e à ilustração das evidencias de como de deve proceder à construção deste método, contrariamente à bibliografia associada a estes temas de estudo, em que na maior parte dos casos limitam-se a apresentar somente resultados, mas todo o processo em si de construção do método até chegar à obtenção destes resultados é grandemente ocultada, tendo sido essas as principais dificuldades no processo de compreensão para a construção deste método, mas que foi superado. Como este trabalho procedeu-se a essa explicação exaustiva da construção do método envolvido.

Com a construção deste método verifica-se uma contribuição alternativa para a sintonia de controladores PID. Deste modo, para se proceder a uma sintonia de controlador PID, basta adaptar o algoritmo construído em Excel na presente dissertação para o modelo de planta que se pretender controlar e atuar sobre, seguindo os passos e as explicações apresentados ao longo dos capítulos da presente dissertação.

De salientar que para a replicação desta metodologia de sintonia PID apresentada não é de carácter único relativamente à utilização de *softwares* como o *Maple* e o *GlobalMinimize*, isto é, para a discretização do modelo de processo que se pretender utilizar podem ser utilizadas outras ferramentas, bem como para a aplicação do método de *simplex* no processo de minimização das funções de custo.

7.2. Trabalhos Futuros

Com a criação deste algoritmo em Excel, que constitui no geral um método alternativo de sintonia PID, é de fato fácil e intuitivo introduzir valores heurísticos para os parâmetros do controlador e em consonância com os gráficos das funções erro e output construídos fazer variar estas três variáveis e observar imediatamente o comportamento no domínio do tempo se está a ter um comportamento favorável ou não. Neste sentido, para o engenheiro mecânico que se encontre envolvido nestes processos, verifica-se algum carácter lógico se no seguimento deste trabalho desenvolvido se se confrontasse este mesmo método heurístico com métodos historicamente desenvolvidos de sintonia PID.

Os métodos historicamente desenvolvidos de sintonia PID, como o método *Ziegler-Nichols* ou o método de *Cohen-Coon*, são métodos, em que, para a sua aplicação é necessário recorrer primeiramente a cálculos analíticos ou gráficos. Deste modo, perceber se primeira abordagem heurística por este método é mais eficaz com e sem ser otimizada é deveras interessante, na medida em que em teoria seria um processo sempre mais fácil, estar a variar variáveis heurísticamente, do que proceder a métodos de cálculo e só depois proceder à sua otimização.

No seguimento desta dissertação, e para além da proposta já mencionada em epígrafe, são propostos também os seguintes desenvolvimentos futuros:

- Execução de um estudo que contemple as limitações deste processo de sintonia que não foram abordadas neste trabalho;

- Execução do mesmo estudo mas com aplicação em mais modelos de plantas característicos de diversas aplicações industriais, de modo a entender em que domínios industriais é que este método é mais aplicável ou se em todos;
- Execução do mesmo estudo mas com dinâmicas que contemplem atraso na resposta.

Referências Bibliográficas

- [1] J. Mange, S. Pace, and A. Dunn, “Optimization of PID Controller Parameters for Automated Ground Vehicle Control on Dynamic Terrain,” no. 1, pp. 3–8.
- [2] I. Juniku and P. Marango, “A comparison of PSO and BFO applications for the PID controller synthesis in time-delay systems,” pp. 320–332.
- [3] R. Abrajan-Guerrero and L. A. Marquez-Martinez, “Automatic PID tuning , a heuristic optimization approach,” *Amca*, 2010.
- [4] S. N. Norman, “CONTROL SYSTEMS ENGINEERING,” *Materwiss. Werksttech.*, vol. 34, no. 8, pp. 1–30, 2003, doi: 10.1002/mawe.200390155.
- [5] T. Kealy and A. O’dwyer, “Analytical ISE calculation and optimum control system design,” *Proc. Irish Signals Syst. Conf. Univ. Limerick,irel.*, pp. 418–423, 2003, [Online]. Available: <http://arrow.dit.ie/engscheleart>.
- [6] A. Y. Begum and G. V Marutheeswar, “Optimal Tuning of Controllers for Cascade Temperature Control of Superheater Using Nelder Mead Algorithm,” vol. 15, 2016.
- [7] V. De Oliveira and A. Karimi, *Robust and gain-scheduled PID controller design for condensing boilers by linear programming*, vol. 2, no. PART 1. IFAC, 2012.
- [8] V. Bagyaveereswaran, S. Umashankar, and P. Arulmozhivarman, “Simulation tool for tuning and performance analysis of robust, tracking, disturbance rejection and aggressiveness controller,” *Algorithms*, vol. 12, no. 7, 2019, doi: 10.3390/a12070144.
- [9] A. Karimi, M. Kunze, and R. Longchamp, “Robust PID controller design by linear programming,” *Proc. Am. Control Conf.*, vol. 2006, no. 1, pp. 3831–3836, 2006, doi: 10.1109/acc.2006.1657316.
- [10] P. J. P. P.G. Howlett, *Advances in Industrial Control*. 2006.
- [11] F. Alariqi and A. AbdulRahman, “Optimum tuning of the PID controller for stable and unstable systems using nonlinear optimization technique,” *Lect. Notes Eng. Comput. Sci.*, vol. 2209, no. January, pp. 292–296, 2014.
- [12] J. min Li, Y. C. Liou, and L. jun Zhu, “Optimization of PID parameters with an improved simplex PSO,” *J. Inequalities Appl.*, vol. 2015, no. 1, 2015, doi: 10.1186/s13660-015-0785-2.
- [13] P. E. Fishback, *Linear and Nonlinear Programming with Maple*. 2009.
- [14] K. J. Astrom and T. Hagglund, : *PID Controllers : : Theory , • Design , Tuning*.

2002.

- [15] L. Carotenuto, P. Pugliese, and Y. D. Sergeyev, “Maximizing performance and robustness of PI and PID controllers by global optimization,” *Control Intell. Syst.*, vol. 34, no. 3, pp. 225–234, 2006, doi: 10.2316/journal.201.2006.3.201-1558.
- [16] T. Dogruer and N. Tan, “Design of PI Controller using Optimization Method in Fractional Order Control Systems,” *IFAC-PapersOnLine*, vol. 51, no. 4, pp. 841–846, 2018, doi: 10.1016/j.ifacol.2018.06.124.
- [17] M. Pandit, H. M. Dubey, and J. C. Bansal, *Nature Inspired Optimization for Electrical Power System*. 2020.
- [18] R. Argelaguet, M. Pons, J. Quevedo, and J. Aguilar, “A New Tuning of PID Controllers Based on LQR Optimization,” *IFAC Proc. Vol.*, vol. 33, no. 4, pp. 271–276, 2000, doi: 10.1016/s1474-6670(17)38256-3.
- [19] Y. Yaguang, J. Chenbing, C. Jingping, and L. Yongzai, “Optimization method for PID controller design,” *Comput. Ind.*, vol. 16, no. 1, pp. 81–85, 1991, doi: 10.1016/0166-3615(91)90011-W.
- [20] H. Rasool, A. Rasool, A. A. Ikram, U. Rasool, M. Jamil, and H. Rasool, “Compatibility of objective functions with simplex algorithm for controller tuning of HVDC system,” *Ing. e Investig.*, vol. 39, no. 3, pp. 34–43, 2019, doi: 10.15446/ing.investig.v39n3.70221.
- [21] C. van de Panne and A. Whinston, “The Simplex and the Dual Method for Quadratic Programming,” *or*, vol. 15, no. 4, p. 355, 1964, doi: 10.2307/3007121.
- [22] John Doyle, “Feedback control: Theory and design. Konstanty J. Kurman,” *Automatica*, vol. 22, no. 6, pp. 1–90, 1990, doi: 10.1016/0005-1098(86)90018-X.
- [23] C. A. Neto and M. Embirucu, “Tuning of PID Controllers: An Optimization-Based Method,” *IFAC Proc. Vol.*, vol. 33, no. 4, pp. 367–372, 2000, doi: 10.1016/s1474-6670(17)38271-x.
- [24] D. JAIN, D. M. K. BHASKAR, and M. KUMAR, “Comparative Analysis of Different Methods of Tuning the PID Controller Parameters for Load Frequency Control Problem,” *Int. J. Adv. Res. Electr. Electron. Instrum. Eng.*, vol. 3, no. 11, pp. 13144–13154, 2014, doi: 10.15662/ijareeie.2014.0311030.
- [25] U. S. Hegde, S. Uma, and P. N. Aravind, “Optimum Solution of Linear Programming Problem by Simplex Method,” vol. 05, no. 01, pp. 197–201, 2017.
- [26] M. Saeki and K. Aimoto, “PID controller optimization for H_∞ control by linear programming,” *Int. J. Robust Nonlinear Control*, vol. 10, no. 2, pp. 83–99, 2000, doi: 10.1002/(SICI)1099-1239(200002)10:2<83::AID-RNC464>3.0.CO;2-L.

- [27] M. K. Joyo *et al.*, “Optimized proportional-integral-derivative controller for upper limb rehabilitation robot,” *Electron.*, vol. 8, no. 8, 2019, doi: 10.3390/electronics8080826.
- [28] E. J. Oliveira, L. M. Honorio, A. H. Anzai, and T. X. Soares, “Linear Programming for Optimum PID Controller Tuning,” *Appl. Math.*, vol. 05, no. 06, pp. 886–897, 2014, doi: 10.4236/am.2014.56084.
- [29] L. Fu, L. Zhou, J. Liang, and M. Lin, “PID Parameters Self-tuning Based on Simplex Method,” *Proc. 30th Chinese Control Decis. Conf. CCDC 2018*, pp. 4769–4774, 2018, doi: 10.1109/CCDC.2018.8407956.
- [30] K. Ogata, *Modern Control Engineering Fifth Edition*. 2009.
- [31] A. Basu and S. Mohanty, “Improving the Performance of PID Controller using Fractional Elements for Heating Furnace,” vol. 9, no. 8, pp. 1211–1236, 2017.
- [32] A. O’Dwyer, *Handbook of PI and PID controller tuning rules, 2nd Edition*. 2006.
- [33] FERNANDO G. MARTINS, “Tuning PID Controllers using the ITAE Criterion,” *TEMPUS*, 2005.
- [34] L. Xi-ming, “A novel PID controller tuning method based on optimization technique LIANG,” *Natl. Nat. Sci. Found. China*, 2010, doi: 10.1007/s11771.
- [35] K. P. Ghadle, “New Approach for Wolfe’S Modified Simplex Method To Solve Quadratic Programming Problems,” *Int. J. Res. Eng. Technol.*, vol. 04, no. 01, pp. 371–376, 2015, doi: 10.15623/ijret.2015.0401055.
- [36] P. C. CHAU, *PROCESS CONTROL*, no. July. San Diego: Cambridge University Press, 2016.
- [37] J. Sá da Costa, “TUNING-RULES FOR FRACTIONAL PID CONTROLLERS,” 2010, [Online]. Available: <https://repositorio.flacsoandes.edu.ec/bitstream/10469/2461/4/TFLACSO-2010ZVNBA.pdf>.
- [38] M. T. Özdemir and D. Öztürk, “Comparative performance analysis of optimal PID parameters tuning based on the optics inspired optimization methods for automatic generation control,” *Energies*, vol. 10, no. 12, 2017, doi: 10.3390/en10122134.
- [39] I. . Ferreira, “PID CONTROLLER TUNING USING FRACTIONAL CALCULUS CONCEPTS,” 2004.
- [40] P. D. Domanski, *Studies in Systems , Decision and Control 245 Control Performance Assessment: Theoretical Analyses and Industrial Practice*. Warsaw, Poland: Springer, 2019.

- [41] M. Jelali, *Control Performance Management in Industrial Automation*. Koeln, Germany: Springer, 2013.
- [42] A. J. Michael, *Process Control Performance Assessment : Advances in Industrial Control*, First., no. December. New York: Springer, 2006.
- [43] A. Visioli, *Practical PID Control*. 2006.
- [44] C. C. Heckman, "Linear Programming: The Simplex Method," *Numer. Optim.*, vol. 2, pp. 355–391, 2006, doi: 10.1007/978-0-387-40065-5_13.
- [45] Y. Yang and C. Jia, "Optimization method for PID controller design," vol. 16, pp. 81–85, 1991.
- [46] "Excel Solver: Which Solving Method Should I Choose? - EngineerExcel." <https://engineerexcel.com/excel-solver-solving-method-choose/> (accessed Jan. 26, 2022).
- [47] "Learning PID Tuning III: Performance Index Optimization." <https://www.mathworks.com/matlabcentral/mlc-downloads/downloads/submissions/18674/versions/1/previews/html/optimalpidtuning.html> (accessed Jan. 26, 2022).

Apêndices

Apêndice I

Folha de Cálculo em *Maple* de Discretização da Função de Transferência de Dinâmica de Segunda Ordem


```

> with(DynamicSystems) :
> sys_c := TransferFunction(  $\frac{1}{s^2 + s + 1}$  ) :
> PrintSystem(sys_c)

```

Transfer Function
continuous
1 output(s); 1 input(s)
inputvariable = [uI(s)]
outputvariable = [yI(s)]
 $tf_{1,1} = \frac{1}{s^2 + s + 1}$

(1)

```

> sys_d := ToDiscrete(sys_c, 1, method=zoh) :
> PrintSystem(sys_d)

```

Transfer Function
discrete; samptime = 1
1 output(s); 1 input(s)
inputvariable = [uI(z)]
outputvariable = [yI(z)]
 $tf_{1,1} = \frac{0.3333333333 (1.020899540 z + 0.725059450)}{z^2 - 0.7858931114 z + 0.3678794412}$

(2)

```

> SystemOptions(discrete=true)

```

false

(3)

```

> sys_d := StateSpace(  $\frac{0.3333333333 (1.020899540 z + 0.725059450)}{z^2 - 0.7858931114 z + 0.3678794412}$  )
> PrintSystem(sys_d)

```

State Space
discrete; samptime = 1.
1 output(s); 1 input(s); 2 state(s)
inputvariable = [uI(q)]
outputvariable = [yI(q)]
statevariable = [x1(q), x2(q)]

(4)

State Space

discrete; samptime = 1.

1 output(s); 1 input(s); 2 state(s)

inputvariable = [$u1(q)$]

outputvariable = [$y1(q)$]

statevariable = [$x1(q), x2(q)$]

$$a = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.367879441199999990 & 0.785893111400000066 \end{bmatrix}$$

(5)

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 0.2416864833 & 0.3402998466 \end{bmatrix}$$

$$d = \begin{bmatrix} 0. \end{bmatrix}$$

>

Apêndice II

Folha de Cálculo em *Maple* de Discretização da Função de Transferência de Dinâmica de Terceira Ordem


```

> with(DynamicSystems) :
> sys_c := TransferFunction(  $\frac{10}{(s+1)^2 \cdot (s+2)}$  ) :
> PrintSystem(sys_c)

```

Transfer Function
continuous
1 output(s); 1 input(s)
inputvariable = [uI(s)]
outputvariable = [yI(s)]
 $tf_{1,1} = \frac{10}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2}$

(1)

```

> sys_d := ToDiscrete(sys_c, 1, method=zoh) :
> PrintSystem(sys_d)

```

Transfer Function
discrete; samptime = 1
1 output(s); 1 input(s)
inputvariable = [uI(z)]
outputvariable = [yI(z)]
 $tf_{1,1} = \frac{-0.644529172 z^2 - 0.9957413674 z - 0.0872275378}{(-z + 0.1353352832) (-z + 0.3678794412)^2}$

(2)

```

> restart
> with(DynamicSystems) :
> SystemOptions(discrete=true)

```

false

(3)

```

> sys_d := StateSpace(  $\frac{-0.644529172 z^2 - 0.9957413674 z - 0.0872275378}{(-z + 0.1353352832) (-z + 0.3678794412)^2}$  )
> PrintSystem(sys_d)

```

State Space
discrete; samptime = 1.
1 output(s); 1 input(s); 3 state(s)
inputvariable = [uI(q)]
outputvariable = [yI(q)]
statevariable = [xI(q), x2(q), x3(q)]

(4)

State Space

discrete; samptime = 1.

1 output(s); 1 input(s); 3 state(s)

inputvariable = [$u1(q)$]

outputvariable = [$y1(q)$]

statevariable = [$x1(q), x2(q), x3(q)$]

$$a = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.018315638889999995 & -0.234909420000000008 & 0.871094165599999970 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$c = [0.08722753780 \quad 0.9957413674 \quad 0.6445291720]$$

$$d = [0.]$$



Apêndice III

Folha de Cálculo em *Maple* de Discretização da Função de Transferência de Dinâmica de Quarta Ordem


```

> with(DynamicSystems) :
> sys_c := TransferFunction(  $\frac{1}{(s + 1)^4}$  ) :
> PrintSystem(sys_c)

```

Transfer Function
continuous
1 output(s); 1 input(s)
inputvariable = [uI(s)]
outputvariable = [yI(s)]

$$tf_{1,1} = \frac{1}{s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 1}$$

(1)

```

> sys_d := ToDiscrete(sys_c, 1, method=zoh) :
> PrintSystem(sys_d)

```

Transfer Function
discrete; samptime = 1
1 output(s); 1 input(s)
inputvariable = [uI(z)]
outputvariable = [yI(z)]

$$tf_{1,1} = \frac{0.3333333333 (3.1101547 z^3 + 15.71558161 z^2 + 7.04418039 z + 0.281718172)}{(2.718281828 z - 1)^4}$$

(2)

```

> restart
> with(DynamicSystems) :
> SystemOptions(discrete=true)

```

false

(3)

```

> sys_d
:= StateSpace(  $\frac{1}{(2.718281828 z - 1)^4} (0.3333333333 (3.1101547 z^3 + 15.71558161 z^2 + 7.04418039 z + 0.281718172))$  )

```

State Space
discrete; samptime = 1.
1 output(s); 1 input(s); 4 state(s)
inputvariable = [uI(q)]
outputvariable = [yI(q)]
statevariable = [xI(q), x2(q), x3(q), x4(q)]

(4)

```

> PrintSystem(sys_d)

```

State Space

discrete; samptime = 1.

1 output(s); 1 input(s); 4 state(s)

inputvariable = $[u1(q)]$

outputvariable = $[y1(q)]$

statevariable = $[x1(q), x2(q), x3(q), x4(q)]$

$$a = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.0183156389000000003 & 0.199148273600000009 & -0.8120116997999999986 & 1.471517764999999 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$c = [0.001719949436 \quad 0.04300622146 \quad 0.09594697262 \quad 0.01898815680]$$

$$d = [0.]$$



Apêndice IV

Folha de Cálculo de *Excel* do Algoritmo de Sistema Recursivo de Sintonização PID de Dinâmica de Segunda Ordem

		Valores Heurísticos (Kp,Ki,Kd)																			
Y(-1)	Δt	Kp	Ki	Kd																	
1	1	0,12467	0,456729	0,0004																	
t(s)	X1(k)	X2(k)	Y(k)	e(k)	Σ Erros	u(k)	e(k)^2	J (ISE)	e(k)	J (IAE)	t· e(k)	J (ITAE)	t·(e(k))^2	J(ITSE)	AΔ	BΔ	CΔ				
0	0	0	0	1	1	0,580999	1	1,862345	1	2,976526	0	8,162549	0	1,371926	0,7859	-0,7358	1	0,3403	0,4834		
1	0,580999	0	0,197714	0,802286	1,80228604	0,923256	0,643663		0,802286		0,802286		0,643663		0,5	0	0				
2	1,379864	0,2905	0,609995	0,390005	2,192291033	1,05007	0,152104		0,390005		0,78001		0,304208								
3	1,920755	0,689932	0,987146	0,012854	2,205145125	1,008907	0,000165		0,012854		2,205145125		0,000496								
4	2,010777	0,960377	1,148514	-0,14851	2,056631378	0,920873	0,022056		0,148514		0,594055		0,088225								
5	1,794496	1,005388	1,096672	-0,09667	1,959959634	0,883098	0,009345		0,096672		0,483359		0,046727								
6	1,553627	0,897248	0,962429	0,037571	1,997530513	0,91696	0,001412		0,037571		0,225425		0,008469								
7	1,477761	0,776814	0,878394	0,121606	2,119136695	0,982998	0,014788		0,121606		0,851243		0,103516								
8	1,572791	0,738881	0,892396	0,107604	2,226741052	1,030438	0,011579		0,107604		0,860835		0,09263								
9	1,722826	0,786396	0,966421	0,033579	2,260319734	1,036569	0,001128		0,033579		0,302208		0,010148								
10	1,811909	0,861413	1,033	-0,033	2,227320169	1,013194	0,001089		0,033		0,329996		0,01089								
11	1,803346	0,905954	1,051617	-0,05162	2,175703365	0,987279	0,002664		0,051617		0,567785		0,029307								
12	1,737927	0,901673	1,027285	-0,02729	2,148418086	0,977833	0,000744		0,027285		0,327423		0,008934								
13	1,68022	0,868964	0,991836	0,008164	2,1565823	0,985977	6,67E-05		0,008164		0,106135		0,000867								
14	1,667079	0,84011	0,973416	0,026584	2,183166378	1,000422	0,000707		0,026584		0,372177		0,009894								
15	1,692426	0,833539	0,978866	0,021134	2,204300773	1,009405	0,000447		0,021134		0,317016		0,0067								
16	1,726165	0,846213	0,996473	0,003527	2,207827397	1,008826	1,24E-05		0,003527		0,056426		0,000199								
17	1,742775	0,863082	1,01028	-0,01028	2,197547096	1,002407	0,000106		0,01028		0,174765		0,001797								
18	1,736998	0,871387	1,012329	-0,01233	2,185218012	0,996516	0,000152		0,012329		0,221924		0,002736								
19	1,720456	0,868499	1,005304	-0,0053	2,179914387	0,994966	2,81E-05		0,005304		0,100769		0,000534								
20	1,708031	0,860228	0,997077	0,002923	2,18283721	0,997326	8,54E-06		0,002923		0,058456		0,000171								
21	1,706712	0,854015	0,993625	0,006375	2,189212062	1,00067	4,06E-05		0,006375		0,133872		0,000853								
22	1,71359	0,853356	0,995647	0,004353	2,193565017	1,002408	1,89E-05		0,004353		0,095765		0,000417								
23	1,72122	0,856795	0,999906	9,42E-05	2,193659228	1,001921	8,88E-09		9,42E-05		0,002167		2,04E-07								
24	1,724198	0,86061	1,002763	-0,00276	2,190895947	1,000302	7,64E-06		0,002763		0,066319		0,000183								
25	1,722113	0,862099	1,002774	-0,00277	2,188122369	0,999033	7,69E-06		0,002774		0,069339		0,000192								
26	1,718109	0,861056	1,000907	-0,00091	2,187215159	0,998851	8,23E-07		0,000907		0,023587		2,14E-05								
27	1,715547	0,859055	0,999068	0,000932	2,188147358	0,999506	8,69E-07		0,000932		0,025169		2,35E-05								
28	1,715662	0,857774	0,998488	0,001512	2,189659675	1,000269	2,29E-06		0,001512		0,042345		6,4E-05								
29	1,717458	0,857831	0,999127	0,000873	2,190533018	1,000589	7,63E-07		0,000873		0,025327		2,21E-05								
30	1,719148	0,858729	1,000136	-0,00014	2,190397419	1,000402	1,84E-08		0,000136		0,004068		5,52E-07								
31	1,719627	0,859574	1,000707	-0,00071	2,189690529	1,000007	5E-07		0,000707		0,021914		1,55E-05								
32	1,718987	0,859813	1,000605	-0,00061	2,18908535	0,999743	3,66E-07		0,000605		0,019366		1,17E-05								
33	1,718045	0,859494	1,00013	-0,00013	2,188955412	0,999743	1,69E-08		0,00013		0,004288		5,57E-07								
34	1,717539	0,859022	0,99973	0,00027	2,189225438	0,999916	7,29E-08		0,00027		0,009181		2,48E-06								

35	1,717661	0,85877	0,999649	0,000351	2,189576066	1,000087	1,23E-07		0,000351		0,012272		4,3E-06							
36	1,718114	0,858831	0,999833	0,000167	2,189743066	1,00014	2,79E-08		0,000167		0,006012		1E-06							
37	1,718478	0,859057	1,000066	-6,6E-05	2,189676731	1,000081	4,4E-09		6,63E-05		0,002454		1,63E-07							
38	1,718539	0,859239	1,000175	-0,00017	2,18950185	0,999987	3,06E-08		0,000175		0,006645		1,16E-06							
39	1,718359	0,859269	1,000128	-0,00013	2,189373659	0,999934	1,64E-08		0,000128		0,004999		6,41E-07							
40	1,718142	0,859179	1,000011	-1,1E-05	2,189362648	0,999944	1,21E-10		1,1E-05		0,00044		4,85E-09							
41	1,718048	0,859071	0,999927	7,34E-05	2,18943606	0,999988	5,39E-09		7,34E-05		0,00301		2,21E-07							
42	1,718097	0,859024	0,999921	7,93E-05	2,189515406	1,000025	6,3E-09		7,93E-05		0,003333		2,64E-07							
43	1,718208	0,859049	0,99997	2,97E-05	2,189545109	1,000032	8,82E-10		2,97E-05		0,001277		3,79E-08							
44	1,718284	0,859104	1,000023	-2,3E-05	2,189522152	1,000015	5,27E-10		2,3E-05		0,00101		2,32E-08							
45	1,718286	0,859142	1,000042	-4,2E-05	2,189480086	0,999994	1,77E-09		4,21E-05		0,001893		7,96E-08							
46	1,718238	0,859143	1,000026	-2,6E-05	2,18945385	0,999984	6,88E-10		2,62E-05		0,001207		3,17E-08							
47	1,71819	0,859119	0,999998	1,87E-06	2,189455719	0,999988	3,49E-12		1,87E-06		8,78E-05		1,64E-10							
48	1,718174	0,859095	0,999981	1,91E-05	2,189474792	0,999999	3,64E-10		1,91E-05		0,000916		1,75E-08							
49	1,71819	0,859087	0,999982	1,75E-05	2,1894923	1,000007	3,07E-10		1,75E-05		0,000858		1,5E-08							
50	1,718216	0,859095	0,999995	4,66E-06	2,189496965	1,000007	2,18E-11		4,66E-06		0,000233		1,09E-09							
51	1,718231	0,859108	1,000007	-6,9E-06	2,189490043	1,000003	4,79E-11		6,92E-06		0,000353		2,44E-09							
52	1,718229	0,859116	1,00001	-9,9E-06	2,18948018	0,999998	9,73E-11		9,86E-06		0,000513		5,06E-09							
53	1,718217	0,859115	1,000005	-5,1E-06	2,189475039	0,999996	2,64E-11		5,14E-06		0,000272		1,4E-09							
54	1,718206	0,859108	0,999999	1,43E-06	2,18947647	0,999998	2,05E-12		1,43E-06		7,73E-05		1,11E-10							
55	1,718204	0,859103	0,999995	4,78E-06	2,189481254	1	2,29E-11		4,78E-06		0,000263		1,26E-09							
56	1,718209	0,859102	0,999996	3,76E-06	2,189485012	1,000002	1,41E-11		3,76E-06		0,00021		7,91E-10							
57	1,718215	0,859104	0,999999	5,49E-07	2,189485561	1,000002	3,01E-13		5,49E-07		3,13E-05		1,72E-11							
58	1,718218	0,859107	1,000002	-1,9E-06	2,18948363	1	3,73E-12		1,93E-06		0,000112		2,16E-10							
59	1,718216	0,859109	1,000002	-2,3E-06	2,189481374	0,999999	5,09E-12		2,26E-06		0,000133		3E-10							
60	1,718213	0,859108	1,000001	-9,5E-07	2,189480425	0,999999	8,99E-13		9,48E-07		5,69E-05		5,4E-11							
61	1,718211	0,859107	0,999999	5,51E-07	2,189480977	1	3,04E-13		5,51E-07		3,36E-05		1,85E-11							
62	1,718211	0,859106	0,999999	1,16E-06	2,189482141	1	1,36E-12		1,16E-06		7,22E-05		8,41E-11							
63	1,718212	0,859105	0,999999	7,82E-07	2,189482923	1	6,11E-13		7,82E-07		4,92E-05		3,85E-11							
64	1,718214	0,859106	1	2,66E-09	2,189482925	1	7,06E-18		2,66E-09		1,7E-07		4,52E-16							
65	1,718214	0,859107	1,000001	-5,1E-07	2,189482414	1	2,61E-13		5,11E-07		3,32E-05		1,7E-11							
66	1,718214	0,859107	1,000001	-5E-07	2,189481911	1	2,54E-13		5,04E-07		3,32E-05		1,67E-11							
67	1,718213	0,859107	1	-1,6E-07	2,189481752	1	2,53E-14		1,59E-07		1,07E-05		1,69E-12							
68	1,718213	0,859107	1	1,75E-07	2,189481927	1	3,05E-14		1,75E-07		1,19E-05		2,08E-12							
69	1,718213	0,859106	1	2,76E-07	2,189482203	1	7,63E-14		2,76E-07		1,91E-05		5,26E-12							
70	1,718213	0,859106	1	1,56E-07	2,189482359	1	2,45E-14		1,56E-07		1,09E-05		1,71E-12							
71	1,718213	0,859106	1	-2,8E-08	2,189482331	1	7,73E-16		2,78E-08		1,97E-06		5,49E-14							
72	1,718213	0,859107	1	-1,3E-07	2,189482201	1	1,69E-14		1,3E-07		9,37E-06		1,22E-12							
73	1,718213	0,859107	1	-1,1E-07	2,189482092	1	1,2E-14		1,1E-07		7,99E-06		8,75E-13							
74	1,718213	0,859107	1	-2,2E-08	2,18948207	1	4,88E-16		2,21E-08		1,63E-06		3,61E-14							

75	1,718213	0,859107	1	5,02E-08	2,18948212	1	2,52E-15	5,02E-08	3,77E-06	1,89E-13						
76	1,718213	0,859106	1	6,39E-08	2,189482184	1	4,08E-15	6,39E-08	4,85E-06	3,1E-13						
77	1,718213	0,859106	1	2,97E-08	2,189482213	1	8,84E-16	2,97E-08	2,29E-06	6,8E-14						
78	1,718213	0,859107	1	-1,3E-08	2,189482201	1	1,63E-16	1,28E-08	9,96E-07	1,27E-14						
79	1,718213	0,859107	1	-3,2E-08	2,189482169	1	1,03E-15	3,21E-08	2,53E-06	8,13E-14						
80	1,718213	0,859107	1	-2,3E-08	2,189482145	1	5,34E-16	2,31E-08	1,85E-06	4,27E-14						
81	1,718213	0,859107	1	-1,6E-09	2,189482144	1	2,66E-18	1,63E-09	1,32E-07	2,15E-16						
82	1,718213	0,859107	1	1,36E-08	2,189482157	1	1,85E-16	1,36E-08	1,11E-06	1,51E-14						
83	1,718213	0,859107	1	1,44E-08	2,189482172	1	2,08E-16	1,44E-08	1,2E-06	1,72E-14						
84	1,718213	0,859107	1	5,23E-09	2,189482177	1	2,74E-17	5,23E-09	4,4E-07	2,3E-15						
85	1,718213	0,859107	1	-4,3E-09	2,189482173	1	1,88E-17	4,33E-09	3,68E-07	1,59E-15						
86	1,718213	0,859107	1	-7,7E-09	2,189482165	1	5,92E-17	7,69E-09	6,62E-07	5,09E-15						
87	1,718213	0,859107	1	-4,7E-09	2,18948216	1	2,22E-17	4,71E-09	4,1E-07	1,93E-15						
88	1,718213	0,859107	1	4,27E-10	2,189482161	1	1,83E-19	4,27E-10	3,76E-08	1,61E-17						
89	1,718213	0,859107	1	3,51E-09	2,189482164	1	1,24E-17	3,51E-09	3,13E-07	1,1E-15						
90	1,718213	0,859107	1	3,17E-09	2,189482167	1	1,01E-17	3,17E-09	2,85E-07	9,05E-16						
91	1,718213	0,859107	1	8,06E-10	2,189482168	1	6,5E-19	8,06E-10	7,34E-08	5,91E-17						
92	1,718213	0,859107	1	-1,3E-09	2,189482167	1	1,67E-18	1,29E-09	1,19E-07	1,54E-16						
93	1,718213	0,859107	1	-1,8E-09	2,189482165	1	3,24E-18	1,8E-09	1,67E-07	3,01E-16						
94	1,718213	0,859107	1	-9,2E-10	2,189482164	1	8,43E-19	9,18E-10	8,63E-08	7,92E-17						
95	1,718213	0,859107	1	2,8E-10	2,189482165	1	7,86E-20	2,8E-10	2,66E-08	7,46E-18						
96	1,718213	0,859107	1	8,78E-10	2,189482165	1	7,72E-19	8,78E-10	8,43E-08	7,41E-17						
97	1,718213	0,859107	1	6,79E-10	2,189482166	1	4,61E-19	6,79E-10	6,58E-08	4,47E-17						
98	1,718213	0,859107	1	8,95E-11	2,189482166	1	8,01E-21	8,95E-11	8,77E-09	7,85E-19						
99	1,718213	0,859107	1	-3,6E-10	2,189482166	1	1,28E-19	3,58E-10	3,54E-08	1,27E-17						
100	1,718213	0,859107	1	-4,1E-10	2,189482165	1	1,69E-19	4,1E-10	4,1E-08	1,69E-17						
101	1,718213	0,859107	1	-1,7E-10	2,189482165	1	2,82E-20	1,68E-10	1,7E-08	2,85E-18						
102	1,718213	0,859107	1	1,05E-10	2,189482165	1	1,1E-20	1,05E-10	1,07E-08	1,12E-18						
103	1,718213	0,859107	1	2,13E-10	2,189482166	1	4,55E-20	2,13E-10	2,2E-08	4,68E-18						
104	1,718213	0,859107	1	1,41E-10	2,189482166	1	1,98E-20	1,41E-10	1,46E-08	2,06E-18						
105	1,718213	0,859107	1	-2E-12	2,189482166	1	3,85E-24	1,96E-12	2,06E-10	4,04E-22						
106	1,718213	0,859107	1	-9,4E-11	2,189482166	1	8,9E-21	9,43E-11	1E-08	9,43E-19						
107	1,718213	0,859107	1	-9,1E-11	2,189482166	1	8,35E-21	9,14E-11	9,78E-09	8,93E-19						
108	1,718213	0,859107	1	-2,8E-11	2,189482165	1	7,71E-22	2,78E-11	3E-09	8,33E-20						
109	1,718213	0,859107	1	3,28E-11	2,189482166	1	1,07E-21	3,28E-11	3,57E-09	1,17E-19						
110	1,718213	0,859107	1	5,04E-11	2,189482166	1	2,54E-21	5,04E-11	5,55E-09	2,8E-19						
111	1,718213	0,859107	1	2,8E-11	2,189482166	1	7,84E-22	2,8E-11	3,11E-09	8,7E-20						
112	1,718213	0,859107	1	-5,6E-12	2,189482166	1	3,16E-23	5,62E-12	6,3E-10	3,54E-21						
113	1,718213	0,859107	1	-2,4E-11	2,189482166	1	5,72E-22	2,39E-11	2,7E-09	6,47E-20						
114	1,718213	0,859107	1	-2E-11	2,189482166	1	3,92E-22	1,98E-11	2,26E-09	4,47E-20						

115	1,718213	0,859107	1	-3,7E-12	2,189482166	1	1,39E-23	3,73E-12	4,3E-10	1,6E-21						
116	1,718213	0,859107	1	9,34E-12	2,189482166	1	8,73E-23	9,34E-12	1,08E-09	1,01E-20						
117	1,718213	0,859107	1	1,16E-11	2,189482166	1	1,35E-22	1,16E-11	1,36E-09	1,58E-20						
118	1,718213	0,859107	1	5,29E-12	2,189482166	1	2,79E-23	5,29E-12	6,24E-10	3,3E-21						
119	1,718213	0,859107	1	-2,5E-12	2,189482166	1	6E-24	2,45E-12	2,92E-10	7,14E-22						
120	1,718213	0,859107	1	-5,9E-12	2,189482166	1	3,46E-23	5,88E-12	7,06E-10	4,15E-21						
121	1,718213	0,859107	1	-4,2E-12	2,189482166	1	1,74E-23	4,17E-12	5,04E-10	2,1E-21						
122	1,718213	0,859107	1	-2,3E-13	2,189482166	1	5,23E-26	2,29E-13	2,79E-11	6,38E-24						
123	1,718213	0,859107	1	2,51E-12	2,189482166	1	6,31E-24	2,51E-12	3,09E-10	7,76E-22						
124	1,718213	0,859107	1	2,62E-12	2,189482166	1	6,85E-24	2,62E-12	3,25E-10	8,5E-22						
125	1,718213	0,859107	1	9,21E-13	2,189482166	1	8,48E-25	9,21E-13	1,15E-10	1,06E-22						
126	1,718213	0,859107	1	-8,2E-13	2,189482166	1	6,65E-25	8,16E-13	1,03E-10	8,38E-23						
127	1,718213	0,859107	1	-1,4E-12	2,189482166	1	1,98E-24	1,41E-12	1,79E-10	2,51E-22						
128	1,718213	0,859107	1	-8,5E-13	2,189482166	1	7,15E-25	8,46E-13	1,08E-10	9,15E-23						
129	1,718213	0,859107	1	9,35E-14	2,189482166	1	8,74E-27	9,35E-14	1,21E-11	1,13E-24						
130	1,718213	0,859107	1	6,47E-13	2,189482166	1	4,19E-25	6,47E-13	8,41E-11	5,45E-23						
131	1,718213	0,859107	1	5,74E-13	2,189482166	1	3,3E-25	5,74E-13	7,52E-11	4,32E-23						
132	1,718213	0,859107	1	1,39E-13	2,189482166	1	1,93E-26	1,39E-13	1,83E-11	2,54E-24						
133	1,718213	0,859107	1	-2,4E-13	2,189482166	1	5,81E-26	2,41E-13	3,21E-11	7,73E-24						
134	1,718213	0,859107	1	-3,3E-13	2,189482166	1	1,08E-25	3,28E-13	4,4E-11	1,44E-23						
135	1,718213	0,859107	1	-1,6E-13	2,189482166	1	2,69E-26	1,64E-13	2,21E-11	3,63E-24						
136	1,718213	0,859107	1	5,46E-14	2,189482166	1	2,98E-27	5,46E-14	7,43E-12	4,06E-25						
137	1,718213	0,859107	1	1,61E-13	2,189482166	1	2,61E-26	1,61E-13	2,21E-11	3,57E-24						
138	1,718213	0,859107	1	1,22E-13	2,189482166	1	1,5E-26	1,22E-13	1,69E-11	2,07E-24						
139	1,718213	0,859107	1	1,42E-14	2,189482166	1	2,02E-28	1,42E-14	1,98E-12	2,81E-26						
140	1,718213	0,859107	1	-6,7E-14	2,189482166	1	4,44E-27	6,66E-14	9,33E-12	6,21E-25						
141	1,718213	0,859107	1	-7,5E-14	2,189482166	1	5,63E-27	7,51E-14	1,06E-11	7,94E-25						
142	1,718213	0,859107	1	-3E-14	2,189482166	1	8,85E-28	2,98E-14	4,23E-12	1,26E-25						
143	1,718213	0,859107	1	2E-14	2,189482166	1	3,99E-28	2E-14	2,86E-12	5,71E-26						
144	1,718213	0,859107	1	3,91E-14	2,189482166	1	1,53E-27	3,91E-14	5,63E-12	2,2E-25						
145	1,718213	0,859107	1	2,55E-14	2,189482166	1	6,52E-28	2,55E-14	3,7E-12	9,45E-26						
146	1,718213	0,859107	1	0	2,189482166	1	0	0	0	0						
147	1,718213	0,859107	1	-1,7E-14	2,189482166	1	3E-28	1,73E-14	2,55E-12	4,41E-26						
148	1,718213	0,859107	1	-1,7E-14	2,189482166	1	2,85E-28	1,69E-14	2,5E-12	4,21E-26						
149	1,718213	0,859107	1	-5,1E-15	2,189482166	1	2,61E-29	5,11E-15	7,61E-13	3,89E-27						
150	1,718213	0,859107	1	5,88E-15	2,189482166	1	3,46E-29	5,88E-15	8,83E-13	5,19E-27						
151	1,718213	0,859107	1	9,1E-15	2,189482166	1	8,29E-29	9,1E-15	1,37E-12	1,25E-26						
152	1,718213	0,859107	1	4,88E-15	2,189482166	1	2,39E-29	4,88E-15	7,43E-13	3,63E-27						
153	1,718213	0,859107	1	0	2,189482166	1	0	0	0	0						
154	1,718213	0,859107	1	-4,4E-15	2,189482166	1	1,97E-29	4,44E-15	6,84E-13	3,04E-27						

155	1,718213	0,859107	1	-4E-15	2,189482166	1	1,6E-29	4E-15	6,2E-13	2,48E-27							
156	1,718213	0,859107	1	0	2,189482166	1	0	0	0	0							
157	1,718213	0,859107	1	0	2,189482166	1	0	0	0	0							
158	1,718213	0,859107	1	1,78E-15	2,189482166	1	3,16E-30	1,78E-15	2,81E-13	4,99E-28							
159	1,718213	0,859107	1	0	2,189482166	1	0	0	0	0							
160	1,718213	0,859107	1	0	2,189482166	1	0	0	0	0							
161	1,718213	0,859107	1	0	2,189482166	1	0	0	0	0							
162	1,718213	0,859107	1	0	2,189482166	1	0	0	0	0							
163	1,718213	0,859107	1	0	2,189482166	1	0	0	0	0							
164	1,718213	0,859107	1	0	2,189482166	1	0	0	0	0							
165	1,718213	0,859107	1	0	2,189482166	1	0	0	0	0							
166	1,718213	0,859107	1	0	2,189482166	1	0	0	0	0							
167	1,718213	0,859107	1	0	2,189482166	1	0	0	0	0							
168	1,718213	0,859107	1	0	2,189482166	1	0	0	0	0							
169	1,718213	0,859107	1	0	2,189482166	1	0	0	0	0							
170	1,718213	0,859107	1	0	2,189482166	1	0	0	0	0							
171	1,718213	0,859107	1	0	2,189482166	1	0	0	0	0							
172	1,718213	0,859107	1	0	2,189482166	1	0	0	0	0							
173	1,718213	0,859107	1	0	2,189482166	1	0	0	0	0							
174	1,718213	0,859107	1	0	2,189482166	1	0	0	0	0							
175	1,718213	0,859107	1	0	2,189482166	1	0	0	0	0							
176	1,718213	0,859107	1	0	2,189482166	1	0	0	0	0							
177	1,718213	0,859107	1	0	2,189482166	1	0	0	0	0							
178	1,718213	0,859107	1	0	2,189482166	1	0	0	0	0							
179	1,718213	0,859107	1	0	2,189482166	1	0	0	0	0							
180	1,718213	0,859107	1	0	2,189482166	1	0	0	0	0							
181	1,718213	0,859107	1	0	2,189482166	1	0	0	0	0							
182	1,718213	0,859107	1	0	2,189482166	1	0	0	0	0							
183	1,718213	0,859107	1	0	2,189482166	1	0	0	0	0							
184	1,718213	0,859107	1	0	2,189482166	1	0	0	0	0							
185	1,718213	0,859107	1	0	2,189482166	1	0	0	0	0							
186	1,718213	0,859107	1	0	2,189482166	1	0	0	0	0							
187	1,718213	0,859107	1	0	2,189482166	1	0	0	0	0							
188	1,718213	0,859107	1	0	2,189482166	1	0	0	0	0							
189	1,718213	0,859107	1	0	2,189482166	1	0	0	0	0							
190	1,718213	0,859107	1	0	2,189482166	1	0	0	0	0							
191	1,718213	0,859107	1	0	2,189482166	1	0	0	0	0							
192	1,718213	0,859107	1	0	2,189482166	1	0	0	0	0							
193	1,718213	0,859107	1	0	2,189482166	1	0	0	0	0							
194	1,718213	0,859107	1	0	2,189482166	1	0	0	0	0							

355	1,718213	0,859107	1	0	2,189482166	1	0		0		0							
356	1,718213	0,859107	1	0	2,189482166	1	0		0		0							
357	1,718213	0,859107	1	0	2,189482166	1	0		0		0							
358	1,718213	0,859107	1	0	2,189482166	1	0		0		0							
359	1,718213	0,859107	1	0	2,189482166	1	0		0		0							
360	1,718213	0,859107	1	0	2,189482166	1	0		0		0							
361	1,718213	0,859107	1	0	2,189482166	1	0		0		0							
362	1,718213	0,859107	1	0	2,189482166	1	0		0		0							
363	1,718213	0,859107	1	0	2,189482166	1	0		0		0							
364	1,718213	0,859107	1	0	2,189482166	1	0		0		0							
365	1,718213	0,859107	1	0	2,189482166	1	0		0		0							
366	1,718213	0,859107	1	0	2,189482166	1	0		0		0							
367	1,718213	0,859107	1	0	2,189482166	1	0		0		0							
368	1,718213	0,859107	1	0	2,189482166	1	0		0		0							

Apêndice V

Folha de Cálculo de *Excel* do Algoritmo de Sistema Recursivo de Sintonização PID de Dinâmica de Terceira Ordem

Valores Heurísticos (Kp,Ki,Kd)																							
Y(-1)	Δt	Kp	Ki	Kd																			
1	1	0,0005	0,10566	0,0008																			
t(s)	X1(k)	X2(k)	X3(k)	Y(k)	e(k)	Σ Erros	u(k)	e(k)^2	J (ISE)	e(k)	J (IAE)	t· e(k)	J (ITAE)	t·e(k)^2	J(ITSE)	AΔ			BΔ	CΔ			
0	0	0	0	0	1		1	0,10536	1	3,223938	1	6,101835	0	41,1104	0	8,393077	0,8711	-0,2349	0,0183	1	0,6445	0,9957	0,0872
1	0,10536	0	0	0,0679045	0,932095	1,93209548	0,204666	0,868802		0,932095		0,932095		0,868802			1	0	0	0			
2	0,296445	0,10536	0	0,2959655	0,704034	2,636129934	0,279068	0,495665		0,704034		1,408069		0,991329			0	1	0	0			
3	0,512552	0,296447	0,10536	0,634697	0,365303	3,001432913	0,317585	0,133446		0,365303		1,095909		0,400339									
4	0,696362	0,5125518	0,296445	0,9850033	0,014997	3,016429633	0,319004	0,000225		0,014997		0,059987		0,0009									
5	0,810631	0,6963622	0,512552	1,2605142	-0,26051	2,755915404	0,29128	0,067868		0,260514		1,302571		0,339338									
6	0,843225	0,8106313	0,696362	1,4113271	-0,41133	2,344588306	0,247644	0,16919		0,411327		2,467963		1,01514									
7	0,804504	0,8432253	0,810631	1,4287893	-0,42879	1,915799033	0,202223	0,18386		0,428789		3,001525		1,287022									
8	0,719787	0,8045039	0,843225	1,3384766	-0,33848	1,577322414	0,166418	0,114566		0,338477		2,707813		0,916531									
9	0,619878	0,7197872	0,804504	1,1863562	-0,18636	1,390966173	0,146755	0,034729		0,186356		1,677206		0,312558									
10	0,532375	0,6198781	0,719787	1,0230936	-0,02309	1,367872583	0,144387	0,000533		0,023094		0,230936		0,005333									
11	0,475702	0,5323748	0,619878	0,8907287	0,109271	1,477143875	0,156024	0,01194		0,109271		1,201984		0,131342									
12	0,456696	0,4757017	0,532375	0,8144201	0,18558	1,662723749	0,175715	0,03444		0,18558		2,226958		0,413279									
13	0,471544	0,4566964	0,475702	0,8001236	0,199876	1,862600101	0,196891	0,039951		0,199876		2,598393		0,519357									
14	0,50908	0,4715435	0,456696	0,8374417	0,162558	2,025158374	0,214089	0,026425		0,162558		2,275816		0,369953									
15	0,555141	0,5090797	0,471544	0,9057975	0,094203	2,119360888	0,224033	0,008874		0,094203		1,413038		0,133112									
16	0,596663	0,5551407	0,50908	0,9816946	0,018305	2,13766627	0,225936	0,000335		0,018305		0,292886		0,005361									
17	0,624602	0,5966629	0,555141	1,0450618	-0,04506	2,092604477	0,221133	0,002031		0,045062		0,76605		0,03452									
18	0,635227	0,6246024	0,596663	1,0833493	-0,08335	2,009255179	0,212287	0,006947		0,083349		1,500287		0,125048									
19	0,629833	0,6352268	0,624602	1,0928879	-0,09289	1,916367258	0,202445	0,008628		0,092888		1,764871		0,163935									
20	0,613307	0,6298328	0,635227	1,0777929	-0,07779	1,838574394	0,194213	0,006052		0,077793		1,555857		0,121035									
21	0,592142	0,6133073	0,629833	1,0472269	-0,04723	1,79134751	0,189226	0,00223		0,047227		0,991765		0,046838									
22	0,5725	0,5921417	0,613307	1,0120525	-0,01205	1,779295046	0,187966	0,000145		0,012052		0,265154		0,003196									
23	0,558801	0,5725004	0,592142	0,9818205	0,01818	1,797474551	0,189906	0,00033		0,01818		0,418129		0,007601									
24	0,553033	0,5588007	0,5725	0,9627498	0,03725	1,834724754	0,19386	0,001388		0,03725		0,894005		0,033302									
25	0,554822	0,5530332	0,558801	0,9569654	0,043035	1,877759344	0,198421	0,001852		0,043035		1,075865		0,046299									
26	0,562045	0,5548221	0,553033	0,9628988	0,037101	1,914860495	0,202347	0,001376		0,037101		0,96463		0,035789									
27	0,571738	0,562045	0,554822	0,9764936	0,023506	1,938366867	0,20483	0,000553		0,023506		0,634672		0,014919									
28	0,581	0,5717377	0,562045	0,992744	0,007256	1,945622832	0,205591	5,26E-05		0,007256		0,203167		0,001474									
29	0,587685	0,581	0,571738	1,0071199	-0,00712	1,93850292	0,20483	5,07E-05		0,00712		0,206477		0,00147									
30	0,590748	0,5876845	0,581	1,0165578	-0,01656	1,921945156	0,203072	0,000274		0,016558		0,496733		0,008225									
31	0,590258	0,590748	0,587685	1,0198751	-0,01988	1,9020701	0,200965	0,000395		0,019875		0,616127		0,012246									
32	0,587127	0,5902578	0,590748	1,0176362	-0,01764	1,884433859	0,199099	0,000311		0,017636		0,56436		0,009953									
33	0,582704	0,5871269	0,590258	1,0116256	-0,01163	1,872808308	0,19787	0,000135		0,011626		0,383643		0,00446									
34	0,578349	0,5827041	0,587127	1,0041421	-0,00414	1,868666185	0,197435	1,72E-05		0,004142		0,140832		0,000583									
35	0,575103	0,5783494	0,582704	0,997328	0,002672	1,871338219	0,197721	7,14E-06		0,002672		0,093521		0,00025									
36	0,573503	0,5751026	0,578349	0,9926842	0,007316	1,878654041	0,198499	5,35E-05		0,007316		0,26337		0,001927									
37	0,573569	0,5735026	0,575103	0,9908506	0,009149	1,887803461	0,199468	8,37E-05		0,009149		0,338529		0,003097									
38	0,574913	0,5735688	0,573503	0,9916432	0,008357	1,896160236	0,200353	6,98E-05		0,008357		0,317557		0,002654									
39	0,576923	0,5749128	0,573569	0,9942831	0,005717	1,90187715	0,200957	3,27E-05		0,005717		0,22296		0,001275									

130	0,578905	0,5789048	0,578905	1,0000001	-6,9E-08	1,892973427	0,200012	4,81E-15		6,93E-08		9,01E-06		6,25E-13						
131	0,578905	0,5789047	0,578905	1	-4,1E-08	1,892973387	0,200012	1,65E-15		4,06E-08		5,32E-06		2,16E-13						
132	0,578905	0,5789047	0,578905	1	-8,5E-09	1,892973378	0,200012	7,19E-17		8,48E-09		1,12E-06		9,49E-15						
133	0,578905	0,5789047	0,578905	1	1,85E-08	1,892973397	0,200012	3,43E-16		1,85E-08		2,46E-06		4,57E-14						
134	0,578905	0,5789047	0,578905	1	3,5E-08	1,892973432	0,200012	1,23E-15		3,5E-08		4,69E-06		1,64E-13						
135	0,578905	0,5789047	0,578905	1	3,93E-08	1,892973471	0,200012	1,55E-15		3,93E-08		5,31E-06		2,09E-13						
136	0,578905	0,5789047	0,578905	1	3,32E-08	1,892973504	0,200012	1,1E-15		3,32E-08		4,51E-06		1,49E-13						
137	0,578905	0,5789047	0,578905	1	2,03E-08	1,892973525	0,200012	4,13E-16		2,03E-08		2,78E-06		5,66E-14						
138	0,578905	0,5789047	0,578905	1	5,44E-09	1,89297353	0,200012	2,96E-17		5,44E-09		7,51E-07		4,09E-15						
139	0,578905	0,5789047	0,578905	1	-7,4E-09	1,892973523	0,200012	5,52E-17		7,43E-09		1,03E-06		7,68E-15						
140	0,578905	0,5789047	0,578905	1	-1,6E-08	1,892973507	0,200012	2,44E-16		1,56E-08		2,19E-06		3,42E-14						
141	0,578905	0,5789047	0,578905	1	-1,8E-08	1,892973489	0,200012	3,32E-16		1,82E-08		2,57E-06		4,67E-14						
142	0,578905	0,5789047	0,578905	1	-1,6E-08	1,892973473	0,200012	2,5E-16		1,58E-08		2,24E-06		3,54E-14						
143	0,578905	0,5789047	0,578905	1	-1E-08	1,892973463	0,200012	1,02E-16		1,01E-08		1,44E-06		1,46E-14						
144	0,578905	0,5789047	0,578905	1	-3,2E-09	1,89297346	0,200012	1,04E-17		3,23E-09		4,65E-07		1,5E-15						
145	0,578905	0,5789047	0,578905	1	2,89E-09	1,892973462	0,200012	8,33E-18		2,89E-09		4,19E-07		1,21E-15						
146	0,578905	0,5789047	0,578905	1	6,94E-09	1,892973469	0,200012	4,81E-17		6,94E-09		1,01E-06		7,03E-15						
147	0,578905	0,5789047	0,578905	1	8,4E-09	1,892973478	0,200012	7,06E-17		8,4E-09		1,24E-06		1,04E-14						
148	0,578905	0,5789047	0,578905	1	7,5E-09	1,892973485	0,200012	5,63E-17		7,5E-09		1,11E-06		8,34E-15						
149	0,578905	0,5789047	0,578905	1	4,99E-09	1,89297349	0,200012	2,49E-17		4,99E-09		7,43E-07		3,71E-15						
150	0,578905	0,5789047	0,578905	1	1,83E-09	1,892973492	0,200012	3,34E-18		1,83E-09		2,74E-07		5,01E-16						

Apêndice VI

Folha de Cálculo de *Excel* do Algoritmo de Sistema Recursivo de Sintonização PID de Dinâmica de Quarta Ordem

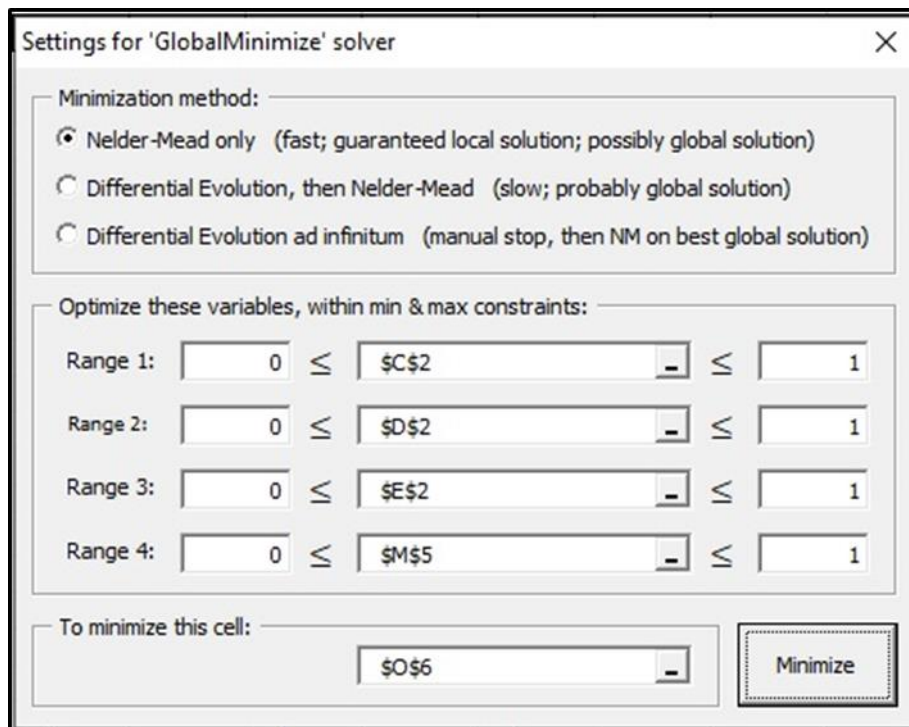
		Valores Heurísticos (Kp,Ki,Kd)																							
Y(-1)	Δt	Kp	Ki	Kd																					
1	1	0,397837	0,178373	1,24556																					
t(s)	X1(k)	X2(k)	X3(k)	X4(k)	Y(k)	e(k)	Σ Erros	u(k)	e(k)^2	J (ISE)	e(k)	J (IAE)	t·e(k)	J (ITAE)	t·(e(k))^2	J(ITSE)	AΔ			BA	CΔ				
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	5,992677	0	9,092448	0	70,02725	0	19,44512	1,4715	-0,8129	0,1991	-0,0183	1	0,0189	0,0959	0,0430	0,0017
1	-0,66935	0	0	0	-0,012651	1,012651	2,012650715	0,746115	1,025461		1,012651		1,012651	1,025461	1,025461		1	0	0	0	0				
2	-0,23883	-0,66935	0	0	-0,068705	1,068705	3,081355329	0,904982	1,14213		1,068705		2,137409	2,284259			0	1	0	0	0				
3	1,097654	-0,238833	-0,66935	0	-0,030941	1,030941	4,112295834	1,190706	1,062838		1,030941		3,092822	3,188515			0	0	1	0	0				
4	2,866784	1,0976538	-0,23883	0	0,1491774	0,850823	4,963118454	1,448123	0,723899		0,850823		3,40329	2,895597											
5	4,726761	2,8667838	1,097654	0	0,4114595	0,588541	5,551658999	1,551097	0,34638		0,588541		2,942703	1,7319											
6	6,39466	4,7267606	2,866784	0	0,6974271	0,302573	5,854231882	1,520801	0,09155		0,302573		1,815437	0,549302											
7	7,658936	6,3946599	4,726761	0	0,9612525	0,038748	5,892979398	1,395174	0,001501		0,038748		0,271233	0,01051											
8	8,408178	7,6589364	6,39466	0	1,1683769	-0,16838	5,724602458	1,212114	0,028351		0,168377		1,347016	0,226806											
9	8,631975	8,4081779	7,658936	0	1,2988229	-0,29882	5,425779602	1,011408	0,089295		0,298823		2,689406	0,803656											
10	8,403246	8,631975	8,408178	0	1,3481794	-0,34818	5,077600201	0,828665	0,121229		0,348179		3,481794	1,212289											
11	7,851176	8,4032457	8,631975	0	1,3254334	-0,32543	4,752166778	0,689857	0,105907		0,325433		3,579768	1,164976											
12	7,130491	7,8511764	8,403246	0	1,2490337	-0,24903	4,50313311	0,609002	0,062018		0,249034		2,988404	0,744213											
13	6,392385	7,1304912	7,851176	0	1,1422308	-0,14223	4,360902343	0,588253	0,02023		0,142231		1,849	0,262985											
14	5,76144	6,3923848	7,130491	0	1,028532	-0,02853	4,332370295	0,619808	0,000814		0,028532		0,399449	0,011397											
15	5,321079	5,7614403	6,392385	0	0,9279631	0,072037	4,404407233	0,689022	0,005189		0,072037		1,080554	0,07784											
16	5,108238	5,3210788	5,76144	0	0,8545791	0,145421	4,549828142	0,778016	0,021147		0,145421		2,326735	0,338356											
17	5,116386	5,108238	5,321079	0	0,8153861	0,184614	4,734442024	0,869126	0,034082		0,184614		3,138436	0,579399											
18	5,304828	5,1163863	5,108238	0	0,8105769	0,189423	4,923865095	0,947654	0,035881		0,189423		3,409615	0,64586											
19	5,611648	5,3048281	5,116386	0	0,8347978	0,165202	5,089067315	1,003644	0,027292		0,165202		3,138842	0,518544											
20	5,967563	5,6116484	5,304828	0	0,8790516	0,120948	5,210015697	1,032565	0,014629		0,120948		2,418968	0,29257											
21	6,308315	5,9675626	5,611648	0	0,9328173	0,067183	5,277198409	1,035006	0,004514		0,067183		1,410837	0,094784											
22	6,583939	6,3083153	5,967563	0	0,9860091	0,013991	5,291189326	1,015625	0,000196		0,013991		0,3078	0,004306											
23	6,764004	6,5839394	6,308315	0	1,030497	-0,0305	5,260692301	0,981645	0,00093		0,030497		0,701432	0,021392											
24	6,838778	6,764004	6,583939	0	1,0610303	-0,06103	5,199662011	0,94123	0,003725		0,06103		1,464727	0,089393											
25	6,816896	6,8387782	6,764004	0	1,0755303	-0,07553	5,12413168	0,902019	0,005705		0,07553		1,888258	0,142621											
26	6,720551	6,8168958	6,838778	0	1,0748262	-0,07483	5,049305496	0,870014	0,005599		0,074826		1,945481	0,145573											
27	6,579451	6,7205512	6,816896	0	1,061979	-0,06198	4,987326487	0,848945	0,003841		0,061979		1,673433	0,103718											
28	6,424715	6,5794513	6,720551	0	1,0413802	-0,04138	4,94594628	0,840104	0,001712		0,04138		1,158646	0,047945											
29	6,283698	6,4247154	6,579451	0	1,0178085	-0,01781	4,928137766	0,842602	0,000317		0,017809		0,516447	0,009197											
30	6,176381	6,2836982	6,424715	0	0,995603	0,004397	4,93253474	0,853922	1,93E-05		0,004397		0,131909	0,00058											
31	6,11361	6,1763813	6,283698	0	0,9780612	0,021939	4,954473525	0,870623	0,000481		0,021939		0,680102	0,014921											
32	6,097104	6,1136097	6,176381	0	0,9671148	0,032885	4,987358696	0,889059	0,001081		0,032885		1,052325	0,034606											
33	6,120911	6,0971037	6,11361	0	0,9632827	0,036717	5,024076021	0,905994	0,001348		0,036717		1,211672	0,044489											
34	6,173798	6,1209109	6,097104	0	0,9658556	0,034144	5,058220422	0,919039	0,001166		0,034144		1,16091	0,039639											
35	6,242028	6,1737983	6,120911	0	0,9732408	0,026759	5,084979669	0,926868	0,000716		0,026759		0,936574	0,025062											
36	6,312004	6,2420277	6,173798	0	0,9833807	0,016619	5,101599004	0,929229	0,000276		0,016619		0,598296	0,009943											
37	6,372402	6,312004	6,242028	0	0,9941668	0,005833	5,107432226	0,926783	3,4E-05		0,005833		0,215829	0,001259											
38	6,415533	6,372402	6,312004	0	1,0037831	-0,00378	5,103649131	0,920826	1,43E-05		0,003783		0,143758	0,000544											
39	6,437877	6,4155327	6,372402	0	1,0109387	-0,01094	5,092710395	0,912963	0,00012		0,010939		0,426611	0,004667											
40	6,439857	6,4378765	6,415533	0	1,0149736	-0,01497	5,077736832	0,9048	0,000224		0,014974		0,598943	0,008968											
41	6,425032	6,4398571	6,437877	0	1,0158441	-0,01584	5,061892742	0,897686	0,000251		0,015844		0,649608	0,010292											
42	6,398942	6,4250321	6,439857	0	1,0140144	-0,01401	5,047878303	0,892551	0,000196		0,014014		0,588606	0,008249											
43	6,367861	6,3989421	6,425032	0	1,0102875	-0,01029	5,037590803	0,889835	0,000106		0,010288		0,442363	0,004551											
44	6,337667	6,367861	6,398942	0	1,0056143	-0,00561	5,031976523	0,889514	3,15E-05		0,005614		0,247028	0,001387											

Apêndice VII

Procedimento Ilustrativo de Execução do *Add-In* *GlobalMinimize*



Janela de apresentação do Add-in GlobalMinimize



Janela de execução do Add-in GlobalMinimize

J (ISE)
0,999608

Settings for 'GlobalMinimize' solver

Minimization method:

- Nelder-Mead only (fast; guaranteed local solution; possibly global solution)
- Differential Evolution, then Nelder-Mead (slow; probably global solution)
- Differential Evolution ad infinitum (manual stop, then NM on best global solution)

Optimize these variables, within min & max constraints:

Range 1: 0 ≤ \$C\$2 ≤ 1

Range 2: 0 ≤ \$D\$2 ≤ 1

Range 3: 0 ≤ \$E\$2 ≤ 1

Range 4: 0 ≤ \$M\$5 ≤ 1

To minimize this cell: \$O\$6

Minimize

Seleção da função a minimizar

Valores Heurísticos (Kp,Ki,Kd)		
Kp	Ki	Kd
0.12467	0.456729	0.0004

X2(k)	Y(k)	e(k)
0	0	1
0	0,197714	0,802286
0,2905	0,609995	0,390005
0,689932	0,987146	0,012854
0,960377	1,148514	-0,148514
1,005388	1,096672	-0,096672
0,897248	0,962429	0,037571
0,776814	0,878394	0,121606
0,738881	0,892396	0,107604
0,786396	0,966421	0,033579
0,861413	1,033	-0,033
0,905954	1,051617	-0,051617
0,901673	1,027285	-0,027285
0,868964	0,991836	0,008164
0,84011	0,973416	0,026584

Settings for 'GlobalMinimize' solver

Minimization method:

- Nelder-Mead only (fast; guaranteed local solution; possibly global solution)
- Differential Evolution, then Nelder-Mead (slow; probably global solution)
- Differential Evolution ad infinitum (manual stop, then NM on best global solution)

Optimize these variables, within min & max constraints:

Range 1: 0 ≤ \$C\$2 ≤ 1

Range 2: 0 ≤ \$D\$2 ≤ 1

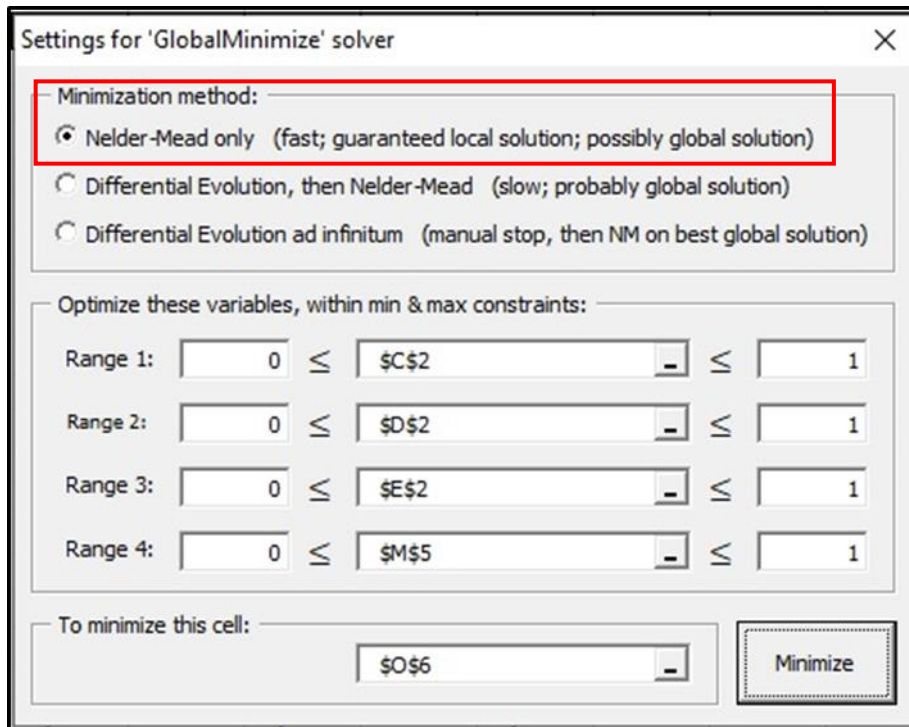
Range 3: 0 ≤ \$E\$2 ≤ 1

Range 4: 0 ≤ \$M\$5 ≤ 1

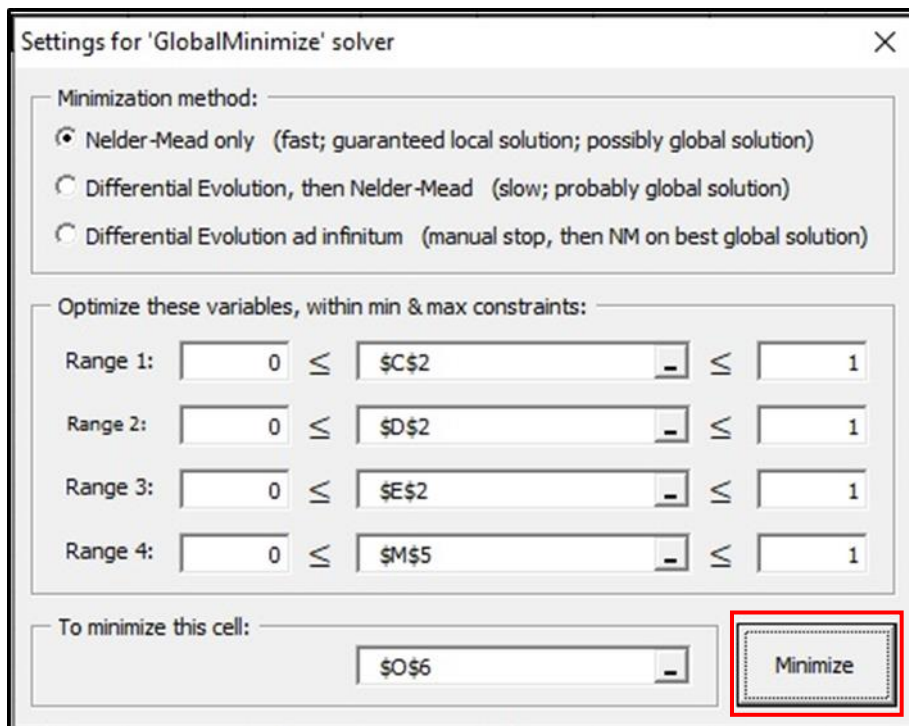
To minimize this cell: \$O\$6

Minimize

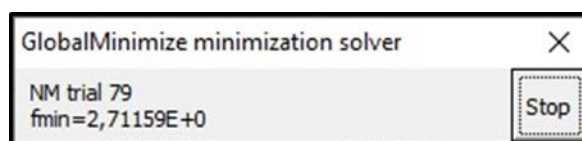
Seleção de variáveis e restrições



Seleção do método de otimização do Add-in GlobalMinimize



Execução do comando minimize para se iniciar o algoritmo simplex na resolução do problema de otimização



Execução de iterações do algoritmo simplex no âmbito da resolução do problema