



**Instituto Politécnico de Lisboa  
Escola Superior de Educação**



**MATERIAIS ESTRUTURADOS:  
QUAL O SEU PAPEL NA APRENDIZAGEM DOS  
PRIMEIROS NÚMEROS?**

Dissertação apresentada para obtenção do grau de Mestre em Educação  
Matemática na Educação Pré-Escolar e no 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico

**Sílvia Isabel Cardoso Lima Pinto**

**2012**



**Instituto Politécnico de Lisboa**  
**Escola Superior de Educação**



**MATERIAIS ESTRUTURADOS:  
QUAL O SEU PAPEL NA APRENDIZAGEM DOS  
PRIMEIROS NÚMEROS?**

Dissertação apresentada para obtenção do grau de Mestre em Educação  
Matemática na Educação Pré-Escolar e no 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico

**Orientadora:** Professora Doutora Margarida Rodrigues

Sílvia Isabel Cardoso Lima Pinto

2012

## Agradecimentos

Este trabalho só foi possível devido ao apoio de algumas pessoas.

À Professora Margarida Rodrigues por toda a sua orientação, motivação, força, paciência e disponibilidade que teve sempre comigo;

Às minhas colegas e alunos;

A todos os meus amigos que compreenderam a minha ausência;

À minha amiga de sempre, Ângela, que me deu coragem e não me deixou desistir;

À minha família que me apoia em todos os momentos (mesmo quando é complicado).

A todos vocês um muito obrigado pela vossa dedicação, compreensão, amizade e amor, este trabalho é o resultado disso.

Sílvia Pinto

Dezembro de 2012

## Resumo

O presente estudo centra-se na importância da utilização de materiais estruturados na aprendizagem dos primeiros números, no âmbito do desenvolvimento do sentido de número.

Este estudo tem como objectivo central entender o papel da utilização de materiais estruturados na aprendizagem dos primeiros números, por parte de alunos de 1.º ano.

A par deste objectivo pretende-se dar resposta acerca das relações numéricas que emergem da utilização dos materiais (colar de contas, moldura do dez e ábaco horizontal) e entender de que modo estes intervêm na estruturação do processo de cálculo.

De acordo com o objectivo do estudo, a investigação adopta uma natureza particularista, descritiva e interpretativa, tendo optado por uma abordagem de tipo qualitativo, sendo que o objecto de análise incide em três pares de alunos de uma turma de 1.º ano.

Devido à pretensão de realizar o estudo em contexto natural, a recolha de dados foi feita numa escola, recorrendo a mais que uma técnica, para que se pudesse efectuar, posteriormente, a triangulação de dados. Utilizou-se a observação participante, as gravações áudio e vídeo e também documentos (produções dos alunos).

Os resultados do estudo sugerem a influência dos materiais estruturados utilizados na mobilização pelos alunos da estrutura do cinco e do dez, na adopção da estratégia de compensação, em situações de cálculo. Há evidência do contributo dos materiais na transição dos alunos do nível de cálculo estruturado para o nível de cálculo formal, no que se refere aos pares com nível mais elevado de desempenho em Matemática. O par com nível mais baixo de desempenho, embora em processo de construção de estruturação numérica, utilizou, predominantemente, estratégias mais elementares de cálculo, como a contagem unitária, desde o número um (contagem de todos), não dando evidência de integração e utilização da estrutura numérica subjacente aos materiais, sendo que a estrutura do cinco emergia principalmente na fase de explicitação da resolução.

**Palavras-chave:** Sentido de número, Materiais estruturados, Materiais manipuláveis.

## Abstract

This study focuses on the importance of using structured materials in the learning of the first numbers, in the development of number sense.

This study aims to understand the role of the use of structured materials in the learning of the early numbers, by 1<sup>st</sup> grade students.

Alongside this goal, the study pretends to give answer about the numerical relationships that emerge from the use of materials (beads, horizontal abacus and frame of ten) and to understand how they are involved in the structuring of the calculation process.

According to the aim of the study, the research adopts a particularistic, descriptive and interpretive nature, having opted for a qualitative approach, with the object of analysis focused on three pairs of students in a class of 1<sup>st</sup> grade.

Due to the desire to conduct the study in a natural context, data collection was done in a school, using more than one technique, so that to make the data triangulation. It was used participant observation, audio and video recordings and also documents (student productions).

Study results suggest the influence of structured materials used by students in mobilizing the structure of five and ten, in adopting the compensation strategy in situations of calculation. There is evidence of the contribute of structured materials in the transition by the students of the structured calculus level to the formal calculus level, with regard to the pair of students with the highest level of performance in mathematics. The pair with the lowest level of performance, although the process of building numerical structure, utilized predominantly most basic strategies for calculating, as counting one by one from the number one (counting all), giving no evidence of integration and use of numerical structure underlying structured materials, and the structure of five emerged particularly in the explanation of resolution.

**Keywords:** Number Sense, Structured Materials, Manipulative Materials.

## Índice Geral

CAPÍTULO I.....	1
INTRODUÇÃO.....	1
Problema e Objectivo do Estudo.....	1
Pertinência e Enquadramento do Estudo.....	1
Organização do Estudo e Abordagem Metodológica.....	3
CAPÍTULO II.....	5
REVISÃO DA LITERATURA.....	5
O desenvolvimento do sentido de número.....	5
Sentido de número: O que é?.....	5
A contagem nas primeiras aprendizagens do número.....	7
A construção de relações numéricas nas primeiras aprendizagens do número.....	10
Os materiais manipuláveis na aprendizagem da Matemática.....	16
Perspectiva histórica.....	16
Conceito.....	17
A importância dos materiais manipuláveis no ensino da Matemática.....	21
Os materiais utilizados no estudo.....	25
O papel do professor.....	30
CAPÍTULO III.....	35
METODOLOGIA.....	35
Opções Metodológicas.....	35
Técnicas e Instrumentos de Recolha de Dados.....	36
Técnica de Tratamento de Informação.....	39
Contextualização do Estudo.....	41
Escola.....	41
Professora Participante.....	42

Turma .....	43
Alunos Seleccionados .....	43
Ética.....	44
CAPÍTULO IV .....	45
APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS .....	45
1.ª Tarefa - Colar de Contas (e recta numérica) .....	45
Primeiras Reacções.....	46
1.ª Parte.....	47
2.ª Parte.....	50
3ª Parte.....	51
Síntese .....	53
2.ª Tarefa - Moldura do 10 .....	54
Síntese .....	62
3.ª Tarefa - Ábaco Horizontal .....	63
1.ª Parte.....	64
2.ª Parte.....	69
Síntese .....	72
4.ª Tarefa - Situações Problemáticas com Recurso a Materiais .....	74
1.º Problema .....	74
2.º Problema .....	76
3.º Problema .....	78
Síntese .....	81
5.ª Tarefa - Cálculo Mental .....	82
Resolução dos Cálculos .....	82
Síntese .....	87
CAPÍTULO V .....	91
CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES .....	91

Conclusões do Estudo .....	91
Modo de utilização dos materiais .....	92
Relações numéricas emergentes da utilização dos materiais .....	95
O papel dos materiais na estruturação do processo de cálculo .....	97
Recomendações e Limitações do Estudo.....	100
Reflexões Finais.....	102
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	105
ANEXOS .....	112

## Índice de Figuras

Figura 1. Cartões com pontos.....	11
Figura 2. Colares de contas.....	26
Figura 3. Molduras com seis e oito pintas na disposição linear.....	27
Figura 4. Molduras com seis e oito pintas na disposição paritária.....	27
Figura 5. Ábaco horizontal.....	28
Figura 6. Disposições no ábaco enquanto modelo combinado (Treffers, 2001b, p. 45).....	29
Figura 7. O cálculo de $6+7$ no ábaco horizontal (Verschafel, et al., 2007, p. 600) .	30
Figura 8. Localização, no colar de contas representado no papel, dos números 5, 10, 15 e 20 (par Ivo/Santiago).....	47
Figura 9. Localização, no colar de contas representado no papel, dos números 4, 9, 14 e 19 (par Ivo/Santiago).....	48
Figura 10. Localização, no colar de contas e na linha numérica, dos números 4, 6, 9 e 11 (par Gil/Márcio).....	50
Figura 11. Posicionamento, na linha numérica vazia, dos números 8, 14 e 17 (par David/Bela).....	52
Figura 12. Moldura com três pintas.....	56
Figura 13. A soma de 9 com 10 (par Bela/David).....	65
Figura 14. A soma de 6 com 7 (par Bela/David).....	66
Figura 15. A soma de 7 com 8 (par Gil/Márcio).....	68
Figura 16. A representação no ábaco do dobro de 8 (par Ivo/Santiago).....	70
Figura 17. Resolução do 2º problema (David).....	77
Figura 18. Resolução do 3.º problema (Gil).....	79

# CAPÍTULO I

## INTRODUÇÃO

### Problema e Objectivo do Estudo

A presente investigação centra-se na importância da utilização de materiais estruturados na aprendizagem dos primeiros números, no âmbito do desenvolvimento do sentido de número.

Este estudo tem como objectivo central entender o papel da utilização de materiais estruturados na aprendizagem dos primeiros números, por parte de alunos de 1.º ano.

De acordo com o objectivo acima referido, e no âmbito da aprendizagem dos números até 20, pretende-se dar resposta às seguintes questões:

1. De que modo são utilizados o colar de contas, o ábaco horizontal e a moldura do dez?
2. Que relações numéricas emergem da utilização do colar de contas, do ábaco horizontal e da moldura do dez?
3. De que modo o colar de contas, o ábaco horizontal e a moldura do dez intervêm na estruturação do processo de cálculo?

### Pertinência e Enquadramento do Estudo

Este estudo justifica-se pelo facto do Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB) (Ponte, et al., 2007) valorizar, dando grande relevância, uma perspectiva de desenvolvimento de sentido de número, sugerindo a utilização de materiais estruturados, nomeadamente do colar de contas, da moldura do dez e do ábaco horizontal, na aprendizagem dos primeiros números. Na coluna *Notas* da tabela constante na secção *Tópicos e objectivos específicos* dos 1.º e 2.º anos, pode ler-

se: “Propor o uso de modelos estruturados de contagem como, por exemplo, o colar de contas, cartões com pontos, molduras de dez e ábacos horizontais” (Ponte, et al., 2007, p. 15).

De acordo com o PMEB, a «aprendizagem da Matemática inclui sempre vários recursos. Os alunos devem utilizar materiais manipuláveis na aprendizagem de diversos conceitos, principalmente no 1.º ciclo» (Ponte, et al., 2007, p.9).

Os materiais manipuláveis (estruturados e não estruturados) devem ser utilizados nas situações de aprendizagem em que o seu uso seja facilitador da compreensão dos conceitos e das ideias matemáticas. No entanto, a simples utilização dos materiais não é suficiente para o desenvolvimento dos conceitos, sendo indispensável registar o trabalho feito e reflectir sobre ele (Ponte, et al., 2007, p.14).

É também de referir que a utilização dos modelos estruturados de contagem, sugeridos pelo PMEB, designadamente o colar de contas, a moldura de dez e o ábaco horizontal, pelos professores, é recente, começando a ser abordada, principalmente a partir de 2006/2007, no Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1º e 2º Ciclos do Ensino Básico, já que foi a partir deste ano que este Programa de Formação teve como preocupação apoiar os formandos no entendimento das orientações do PMEB. É, pois, de grande pertinência desenvolver investigação incidente no papel que estes modelos poderão ter na aprendizagem dos primeiros números.

A relevância do estudo reside também no facto de existir pouca investigação nesta problemática, a nível internacional, sendo que em Portugal, o estudo é pioneiro. Existindo investigações desenvolvidas em Portugal, incidentes nos materiais estruturados (por exemplo, Botas, 2008), este é o primeiro que foca exclusivamente os materiais estruturados de apoio à contagem.

A utilização destes materiais enquadra-se no âmbito do desenvolvimento do sentido de número pelas crianças, isto é, no âmbito do desenvolvimento de uma compreensão flexível e global dos números e das operações (McIntosh, Reys & Reys, 1992), assim como das suas relações. Este desenvolvimento contribui para que as crianças consigam desenvolver estratégias que facilitem a utilização dos números e das operações, no dia-a-dia, seja em que contexto for.

Com o PMEB, pretende-se que os alunos desenvolvam uma atitude optimista perante a Matemática e que obtenham conhecimentos novos e diferentes, tendo

em conta a utilização de ferramentas e formas de procedimento e comunicação matemática distintas, potenciadoras de melhorar as aprendizagens dos alunos.

Assim, as crianças devem desenvolver o seu sentido de número, desde os primeiros anos, altura em que os alunos estão mais susceptíveis a esse desenvolvimento, através de diversos tipos de experiências, e com recurso a diferentes materiais. Desta forma, as experiências tornam-se mais significativas com repercussões positivas ao nível da melhoria das aprendizagens.

No seio da comunidade da educação matemática é consensual, actualmente, que a aprendizagem da Matemática apela à utilização de materiais manipuláveis no ensino de conceitos básicos, sendo o colar de contas, a moldura do dez e o ábaco horizontal ferramentas bastante ricas na aprendizagem dos primeiros números pelo estabelecimento de relações numéricas e pela compreensão da estrutura dos números. Diversas investigações têm vindo a comprovar que as primeiras experiências na aprendizagem da Matemática são as que irão definir a relação das crianças com esta disciplina e que é nos anos mais elementares que os materiais manipuláveis são utilizados com mais sucesso, tendo em conta que quanto mais novas forem as crianças mais tempo e actividades deverão contemplar o uso de materiais.

Sendo o professor, o responsável pela qualidade das actividades matemáticas em que os alunos se envolvem, o mesmo deve encorajar os alunos a utilizar materiais, sempre que essa utilização beneficie a aprendizagem. Neste sentido, o papel do professor é bastante importante, pois é ele que tem de seleccionar os materiais e o tipo de utilização dos mesmos, dada a sua responsabilidade em garantir uma aprendizagem significativa aos seus alunos (Serrazina, 1991). O mais importante não é a utilização do material, mas sim o tipo de utilização que se faz com ele. É crucial também que os alunos tenham o material ao seu dispor para o poderem usar à sua vontade, e à medida das suas necessidades efectivas, para que consigam realizar uma melhor aprendizagem.

### **Organização do Estudo e Abordagem Metodológica**

Dado o objectivo do estudo, a investigação assume uma natureza particularista, descritiva e interpretativa, tendo optado por uma abordagem de tipo qualitativo.

Esta abordagem justifica-se pelo facto de se pretender dar uma especial atenção aos processos e aos significados dos participantes no estudo (Bogdan & Biklen, 1994).

O objecto de análise deste estudo incide em três pares de alunos de uma turma de 1.º ano, no ano lectivo de 2009/2010, de um agrupamento de escolas da zona de Lisboa. Os alunos pertencem a uma turma, cuja professora orienta a sua prática, tendo em conta a especificidade do meio envolvente, e implementando o novo Programa de Matemática.

A presente dissertação encontra-se organizada em cinco capítulos.

O primeiro capítulo é a Introdução onde são apresentados o problema e objectivo do estudo, a pertinência e o enquadramento do estudo e a organização do estudo e abordagem metodológica.

O segundo capítulo é composto pela revisão da literatura. A fundamentação teórica foca (i) o desenvolvimento do sentido de número, e (ii) os materiais manipuláveis (estruturados) na aprendizagem da matemática, sendo que na parte alusiva aos materiais se dá uma especial atenção ao desafio do professor na utilização de materiais na sala de aula, bem como aos modelos estruturados de contagem referidos nas questões do estudo.

O terceiro capítulo apresenta a metodologia de investigação adoptada e as várias opções de natureza metodológica tomadas, com as respectivas fundamentações. Apresenta, em particular, as várias técnicas de recolha de dados efetuada e de análise de dados, bem como a caracterização da amostra e da escola em que se realizou o campo empírico.

O quarto capítulo apresenta os resultados do estudo, fornecendo evidências empíricas, através de transcrições de diversos momentos do trabalho desenvolvidos pelos alunos.

Por fim, o quinto capítulo apresenta as conclusões, relativas às questões atrás enunciadas. Neste capítulo, serão, ainda, feitas algumas recomendações e perspectivadas questões decorrentes do presente estudo, que poderão ser alvo de novas investigações.

## CAPÍTULO II

### REVISÃO DA LITERATURA

#### O desenvolvimento do sentido de número

##### Sentido de número: O que é?

A expressão *sentido de número* é relativamente recente, tendo surgido em finais da década de 80 (Cebola, 2002) como um contraponto ao ensino baseado na memorização sem compreensão dos algoritmos usados (McIntosh, Reys & Reys, 1992). Esta expressão surge como ideia central do tema Números e Operações nos Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2000/2007), sendo também, em Portugal, uma ideia-chave desse tema no Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte, et al., 2007), actualmente em vigor, encontrando-se associada à flexibilidade e compreensão do cálculo. Contudo, a tarefa para a definir não se tem mostrado fácil, sendo que muitos autores recorrem à utilização de diversos adjectivos para caracterizar os indivíduos que possuem sentido de número.

Nesta temática, destacam-se McIntosh, et al. (1992) que consideram que o sentido de número é uma compreensão pessoal do número e operações.

O sentido de número diz respeito a uma compreensão pessoal geral sobre o número e operações, bem como à capacidade e propensão para usar esta compreensão de formas flexíveis para fazer julgamentos matemáticos e desenvolver estratégias úteis para lidar com números e métodos quantitativos como meios de comunicação, processamento e interpretação de informação. Resulta numa expectativa de que os números são úteis e de que a matemática tem uma certa regularidade. (McIntosh, et al., 1992, p. 3)

Segundo estes autores, existem três áreas distintas em que o sentido de número representa um papel importante na aprendizagem do número, operações com números e conseqüentemente a aplicação destes conhecimentos (McIntosh, Reys & Reys, 1992). As três áreas fundamentais do sentido de número descritas por McIntosh, et al. (1992) são as seguintes: (i) conhecimento e destreza com os

números, (ii) conhecimento e destreza com as operações, e (iii) aplicação do conhecimento e da destreza com os números e as operações em contextos de cálculo.

Também Serrazina (2007) realça a existência de vários componentes, focando a compreensão dos significados e situações em que os números podem ser utilizados, o conhecimento das relações entre números, a compreensão da grandeza relativa dos números, o conhecimento do efeito relativo das operações sobre os números, a compreensão das propriedades das operações e o desenvolvimento de um sistema de referência que proporcione comparações mentais.

De acordo com Greeno (1991), o sentido de número refere-se às capacidades que permitem o desenvolvimento de um cálculo rápido e o estabelecimento de noções relativas às quantidades numéricas. Este autor refere, ainda, que o conhecimento associado ao sentido de número torna-se num conhecimento especializado, resultando da interactividade de inúmeros recursos deste domínio de conhecimento para que se consigam aplicar, na prática, na observação e compreensão de padrões, na resolução de problemas e na generalização de resultados. Segundo Baroody (2002), primeiramente, é necessário inculcar o sentido de número para que posteriormente seja possível passar à resolução de problemas com a existência de um sentido manipulativo sobre os números. Greeno (1991) reforça a necessidade de um ambiente propício à aprendizagem, que contemple uma forte interacção social entre os alunos e os professores, no que respeita a um trabalho incidente nas quantidades e números. Convergente com esta ideia, Hope (1989) afirma que para que as crianças desenvolvam o sentido de número, é necessário trabalhar com informação quantitativa quotidiana, garantindo que as crianças sejam envolvidas no trabalho numérico, gastando menos tempo no ensino da aritmética rotineira e irrelevante. Todos estes autores são concordantes de que é fundamental propor tarefas que despertem a curiosidade das crianças e que promovam o seu desenvolvimento matemático.

Para que seja perceptível o sentido de número, é necessário que exista, acima de tudo, compreensão do que é o número nas suas várias dimensões, através do desenvolvimento de competências e do estabelecimento de relações numéricas (Fosnot & Dolk, 2001). Markovits & Sowder (1994) acreditam que as características de sentido de número são baseadas numa natureza intuitiva. Treffers (2001a)

refere que o sentido de número abrange a capacidade de identificação de um número em diversos contextos e representações, compreendendo o que significa esse número.

McIntosh, Reys & Reys (1992) consideram que é o nível de desenvolvimento do sentido de número que torna o Homem diferente das máquinas. A noção de sentido de número está directamente relacionada com a compreensão dos números e operações (nível conceptual) e a rapidez com que se compreende e resolve os problemas (nível operacional). As aprendizagens nestas duas dimensões são facilitadas ao estabelecer-se relações positivas com os números e as operações, sendo que estes autores consideram que a dimensão afectiva é muito importante para o sucesso da aprendizagem. Assim, no nível conceptual, para uma profunda e correta caracterização do sentido de número, é possível afirmar-se que é necessário reconhecer a extensão dos números, as diversas formas de operar com números e o desenvolvimento de referenciais relativamente a quantidades discretas e contínuas. Já no nível operacional, é considerada a capacidade de utilização dos números em cálculos de uma forma maleável, de ponderação dos resultados e a facilidade na manipulação e relação entre as diferentes operações numéricas. E a terceira dimensão do sentido de número respeita as relações afectivas que podem influenciar a forma como as crianças encaram os números, em particular, e a matemática, em geral.

Resumindo, o sentido de número é uma construção de modelos numéricos realizada, evolutivamente, ao longo da vida, e não apenas na escola (Castro & Rodrigues, 2008a; 2008b; McIntosh, Reys & Reys, 1992). Engloba aquilo a que Steen (2002) refere como sendo literacia quantitativa, estando relacionada com o mundo.

### **A contagem nas primeiras aprendizagens do número**

As crianças são confrontadas, desde cedo, com episódios numéricos relacionados principalmente com a contagem de objectos, que normalmente antecedem o início do ensino básico. Geralmente, as crianças conseguem resolver adições e subtracções baseando-se nos conhecimentos informais de aritmética, desenvolvidos a partir das suas capacidades de contagem. Segundo Treffers (2001a), são as primeiras experiências de contagem que introduzem as crianças no vasto mundo da matemática, levando-as à descoberta do número, à percepção de que os números

mudam e se relacionam entre si. Gelman & Gallistel (1978), Baroody (2002) e NRC (2009) são concordantes com o que já tinha sido proposto por Fuson (1987): a aprendizagem do número vai-se processando ao longo do tempo, à medida que a criança vai realizando experiências de contagem e desenvolvendo a capacidade de contar.

De acordo com Schwartz (2005), existem cinco capacidades essenciais que convergem quando as crianças se interessam pela quantificação e que são prévias à contagem:

- sentido de conjunto (reconhecer o crescimento de um conjunto quando se inclui novos elementos no mesmo);
- consciência da quantidade numérica sem uso dos números (usar expressões de quantificação como 'mais do que', 'menos do que', 'algum', 'muito');
- familiaridade com a sequência numérica (recitação da sequência sem referência a objectos ou a acções);
- correspondência termo a termo entre dois conjuntos (esta capacidade vai permitir que, na contagem, as crianças consigam corresponder as palavras dos números aos objectos de um conjunto);
- organização mental (esta capacidade vai permitir que, na contagem, as crianças consigam contar cada um dos elementos de um conjunto apenas uma única vez).

Segundo o autor, não há evidência de que estas capacidades tenham de ser desenvolvidas numa dada sequência, sendo que cada uma delas se desenvolve de modo diverso das restantes. No entanto, todas elas "convergem numa acção coordenada na forma de contagem racional quando as crianças querem quantificar especificamente um conjunto de objectos ou de eventos" (Schwartz, 2005, p. 65). O autor clarifica, ainda, que as crianças não precisam de ler ou escrever numerais por recurso a símbolos convencionais para começar a contagem racional.

As crianças, desde tenra idade, que gostam de ir aprendendo a dizer os números e a recitar a sua sequência ordenada. Para algumas, dizê-los de forma sequencial é difícil mas, através de jogos, cantigas e situações de sala de aula rotineiras, vão adquirindo os termos a usar na contagem oral.

Em crianças de cinco anos, é raro haver enganos nos números até dez, contudo há, para algumas crianças, alguma confusão e engano na recitação da sequência do número sete até ao quinze (Treffers, 2001a), dada a existência de muitas irregularidades até ao número dezasseis, na forma de pronunciar os números. Por

esse motivo, as crianças necessitam de realizar bastantes experiências, durante muito tempo. A contagem um a um exige a utilização da memória imediata; na língua portuguesa, por exemplo, a criança necessita mais desse apoio enquanto procede à nomeação das palavras-número de 1 até 15, já que não existe lógica nem regularidade nos nomes desses números que suportem a contagem oral da criança. De acordo com Gaspar (2004, p.127), “a habilidade das crianças de dizerem a sequência correta das palavras numéricas é fortemente influenciada pelas oportunidades que lhe são dadas de aprender e praticar essa sequência”. Esta autora considera que é no período entre 2 e 6/7 anos que as crianças adquirem a sequência convencional das palavras numéricas, “existindo uma grande variação dentro de cada grupo etário, determinada por diferentes variáveis socioculturais” (p. 127).

Assim, a recitação da sequência numérica compreende o desenvolvimento (i) do conhecimento da sequência dos números com um só dígito, (ii) do conhecimento das irregularidades entre o dez e o vinte, (iii) da compreensão que o nove implica transição dos termos para uma nova série, e (iv) do conhecimento das regras para gerar uma nova série (Gaspar, 2004).

O desenvolvimento da contagem oral inicia-se pela recitação da sequência numérica e processa-se pela contagem de objectos. É fundamental que sejam dadas às crianças oportunidades de contagens com objectos, porque são nestes momentos que estas sentem a necessidade de relacionar os termos que conhecem com os números.

Gelman & Gallistel (1978) e NRC (2009) enumeram uma série de princípios que explicam como as crianças desenvolvem o processo de contagem, estando descritos de seguida: (a) termo a termo (designar um e somente um nome de número para cada item a ser contado); (b) ordem estável (recitar sempre os nomes dos números na mesma ordem); (c) cardinalidade (o último nome de número pronunciado denota o total de itens contados); (d) abstracção (qualquer tipo de entidade pode ser contado); e e) irrelevância da ordem (não importa a ordem em que os objectos são enumerados). Gelman, et al. (1978) afirmam que a aprendizagem do número é iniciada com a capacidade de ordenar, considerando que o princípio da cardinalidade é posterior à ordenação. Segundo NRC (2009), a criança começa por contar itens perceptivos e só depois é capaz de contar itens que não estão visíveis,

audíveis ou tangíveis. Isto é, o seu processo de contagem desenvolve-se, primeiro, numa base de percepção consciente de objectos externos e depois numa base de representações internas.

Assim sendo, consoante os diferentes ritmos, as crianças poderão conseguir, ou não, estabelecer uma correspondência entre o objecto e o termo/número, ou poderão contar, fazendo a correspondência, mas não saberem enumerar a quantidade, o que significa que a noção de cardinalidade ainda não estará consistente. É através de muitas situações de experimentação e observação que as capacidades de contagem se vão desenvolvendo e consolidando. Por exemplo, quando há um grande número de objectos colocados sem qualquer ordem, é difícil para as crianças contá-los sem os repetir ou omitir. Apesar de existirem maneiras de dispor os objectos que facilitam a contagem (como por exemplo, em fila), é importante diversificar as disposições de modo a que as crianças adquiram estratégias de contagem.

Cada criança possui o seu ritmo de aprendizagem e de evolução. Contudo, todas começam a entender que um mesmo número pode ser utilizado para diferentes fins e ter diferentes significados. Por exemplo, no número dez, podemos dizer que temos dez dedos, ou que o João tem dez berlindes ou ainda que a Inês está no lugar número dez na fila (Treffers, 2001a). O desafio desta aprendizagem inicia-se no pré-escolar, ou, para crianças que não frequentem a educação pré-escolar e não experienciem este tipo de situações nos seus meios familiares, no 1º ciclo do ensino básico.

### **A construção de relações numéricas nas primeiras aprendizagens do número**

A fase da contagem permite que as crianças se tornem mais seguras no reconhecimento dos números, o que permite que consigam a partir daqui construir bases aritméticas. Os seus primeiros cálculos são realizados, muitas vezes, por contagem unitária, com recurso a materiais (Treffers, 2001b).

Nas primeiras aprendizagens do número, é muito importante que as crianças reconheçam, perceptiva e globalmente, o valor cardinal de um conjunto de itens, numa dada configuração, sem necessitar de recorrer à contagem um a um (*subitizing*) isto é, que reconheçam padrões numéricos sem proceder à contagem (Wright, Martland & Stafford, 2000). De acordo com Clements & Sarama (2009), as

crianças começam pelo *subitizing* perceptivo, pelo qual conseguem reconhecer o número de elementos sem usar qualquer conhecimento matemático, evoluindo, depois, para o *subitizing* conceptual, pelo qual conseguem perceber globalmente o número de elementos, em disposições diversificadas, através de relações numéricas mentais. O *subitizing* conceptual envolve reconhecer o padrão numérico como um composto de partes e simultaneamente como um todo (Clements, 1999; Clements & Sarama, 2007). Por exemplo, uma criança que consiga realizar o *subitizing* conceptual do 4 representado numa peça de dominó, olha para esse padrão espacial como composto por quatro pintas individuais e também como um 4, ou para a peça do 8, com quatro pintas em cada uma das metades, como composto por dois grupos de quatro e também como um oito. Assim, segundo os autores, é fundamental que as crianças tenham experiências várias de percepção global dos números, potenciadoras da construção de relações numéricas e do desenvolvimento do sentido de número. Isso pode ser feito através de cartões com pontos com padrões numéricos diversificados.

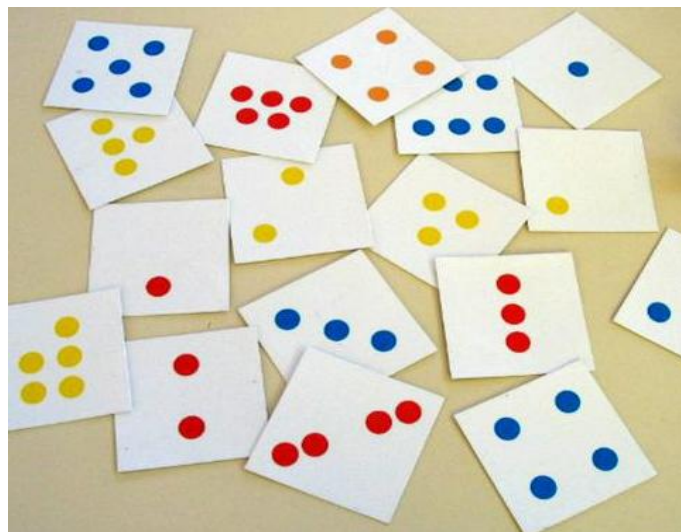


Figura 1. Cartões com pontos

De acordo com o estudo conduzido por Lüken (2011), as competências ao nível da visualização do padrão figurativo e da estruturação numérica diferem bastante entre as crianças que iniciam a escolaridade formal. O autor conclui que algumas das crianças não conseguem sozinhas relacionar os aspectos figurativos e externos com os aspectos matemáticos (por exemplo, relacionar a configuração geométrica com a estruturação numérica), tendo que ser apoiadas pelo professor nesse sentido.

Na construção de relações numéricas, e por o nosso sistema de numeração ser o decimal, o professor deve privilegiar a estrutura dos números com referência aos números cinco e dez, estabelecendo assim factos numéricos de referência (Treffers, 2001b). A compreensão da estrutura numérica, muitas vezes ligada a números específicos como o 5, ajuda na compreensão também do número 10 e por aí em diante.

Novakowski (2007) verificou, em estudos empíricos realizados com crianças, que a presença de padrões com quantidades de cinco permitia que as crianças fossem desenvolvendo a sua capacidade de *subitizing* de 2 ou de 3 grupos, pois partiam de um reconhecimento adquirido, sem necessidade de contar os objectos. Assim, e à medida que iam trabalhando com números superiores, os seus conhecimentos anteriores foram funcionando como alicerce para essas tarefas posteriores.

À medida que se vão desenvolvendo, as crianças começam a realizar cálculos mais complexos, recorrendo a estratégias diversificadas de contagem. O papel dos padrões numéricos é essencial nesta fase de estabelecimento de relações numéricas. A capacidade de *subitizing* desenvolve, nas crianças, a compreensão do princípio da conservação e da cardinalidade. Por exemplo, as crianças conseguem aperceber-se da existência de grupos com o mesmo número de elementos e que apesar de a sua disposição ser diferente não interfere com a quantidade.

Segundo Baroody (1987) e Clements & Sarama (2009), a perícia com que as crianças conseguem contar permite que tenham a noção dos números que antecedem e procedem um determinado número, sendo assim mais fácil resolverem problemas do tipo  $N-1$  ou  $N+1$ . Contudo, é de salientar a dificuldade presente quando os problemas são do tipo  $1+N$ , pois as crianças tendem a perceber que se trata de outro tipo de adição.

Para ultrapassar muitos destes problemas relacionados com as adições e subtracções, muitas vezes é estimulado a utilização dos dedos das mãos para contar, sendo o instrumento mais amplamente utilizado nas aprendizagens iniciais da matemática.

No caso da subtracção, as crianças demonstram problemas em conseguir perceber como se efectua o cálculo. Carpenter, Fennema, Franke, Levi & Empson (1989) debruçaram-se sobre esta problemática, tendo definido um esquema de

classificação para o conjunto de métodos utilizados pelas crianças para ultrapassar os problemas propostos. Os problemas estão categorizados em quatro classes:

- Problemas de juntar: envolvem uma acção directa ou implícita em que um conjunto de objectos é aumentado numa determinada quantidade;
- Problemas de separar: semelhante aos problemas anteriores mas, em vez de se aumentar, retira-se uma determinada quantidade ao conjunto inicial;
- Problemas parte-parte-todo: envolvem uma relação entre um conjunto e dois seus subconjuntos complementares um do outro. Pretende-se encontrar o todo ou uma das suas partes;
- Problemas de comparação: envolvem a comparação entre dois conjuntos disjuntos.

Para os vários problemas propostos, as crianças tendem a escolher duas opções de resolução. Numa primeira fase, avaliam o problema e procedem às contagens necessárias e posteriormente, apoiam-se em estruturas de contagem utilizando objectos ou os dedos (Carpenter et al., 1989).

À medida que as crianças vão adquirindo mais conhecimento sobre operações aritméticas, vão também dominando factos numéricos básicos. Segundo Baroody (2002), existem três níveis em que as crianças progridem no seu conhecimento e domínio da Matemática, sendo que a passagem pelas fases 1 e 2 permitem um desenvolvimento positivo para a fase 3. São os seguintes:

- Fase 1 - Estratégias de contagem (usando objectos ou a contagem oral para responder aos problemas propostos)
- Fase 2 - Estratégias de raciocínio (usando informação conhecida para determinar, por dedução lógica, a resposta a problemas propostos)
- Fase 3 - Domínio (produção rápida e exacta de respostas).

Também Treffers (2001b) propõe três níveis de cálculo envolvendo os números até 20:

- Cálculo por contagem (usando objectos contáveis se necessário)
- Cálculo por estruturação (com o suporte de modelos adequados)
- Cálculo formal (usando números como objectos mentais para cálculos inteligentes e flexíveis sem necessidade de materiais estruturados).

Relativamente às estratégias de contagem, NRC (2009) e Schwartz (2005) distinguem duas: a *contagem de todos* e a *contagem a partir de um número*. Por exemplo, para resolver o problema “Quanto é  $3+5$ ?”, a criança pode contar todos (“1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8”) ou a partir do 5 (“5,... 6, 7, 8”). Neste problema, uma criança que use uma estratégia de raciocínio poderá deduzir a soma ( $3+5$  é como  $4+4$ , então é 8). Estas estratégias usadas em adições de um único dígito correspondem a uma trajetória de aprendizagem. As crianças começam por usar a estratégia de contar todos e só quando este procedimento é internalizado e abstraído, à medida que vão ficando mais experientes no mesmo, é que reparam que não precisam de contar todos os itens e são capazes de contar a partir da primeira parcela ou da parcela maior (NRC, 2009; Schwartz, 2005; Weiland, 2007). De acordo com Clements & Sarama (2007), a composição e a decomposição dos números constitui uma abordagem à adição e à subtração que muitas vezes se sobrepõe às estratégias de contagem. Esta abordagem contribui para o desenvolvimento da relação parte-todo. Assim, com o tempo, as crianças começam a recompor os números noutros números, através de relações numéricas, e a usar estratégias de raciocínio que podem envolver a compensação e os factos numéricos básicos, ou através do uso do dobro (por exemplo,  $6+7 = 6+6+1 = 12+1 = 13$ ) ou de fazer um dez (por exemplo,  $9+6 = 10+5=15$ ) (NRC, 2009). Fosnot & Dolk (2001) identificam as seguintes estratégias como as mais usadas e inventadas pelas crianças:

1. Dobro e mais ou menos - por exemplo,  $6+7 = 6+6 +1$ , ou  $7+7-1$
2. Trabalhar com a estrutura do cinco - por exemplo,  $6+7 = 5+1+5+2 = 10+3 =13$
3. Fazer 10 - por exemplo,  $9+7=10+6=16$
4. Usar a compensação - por exemplo,  $6+8=7+7=14$
5. Usar factos conhecidos - por exemplo,  $6+8=14$ , então  $7+8$  é  $14+1=15$ .

Segundo Wright, et al. (2000), na aritmética inicial, é vantajoso que a base cinco seja usada como uma base adicional simultaneamente ao uso da base dez pois reduz o recurso a estratégias de contagem unitária, por parte das crianças. Os autores dão como exemplos de estratégias de base cinco: (i) para a adição ( $3+6 = 3+2+4 = 9$ ); (ii) na decomposição ( $5-2=3$ ; a criança decompõe o 5 em 3 e 2, e responde 3, sem contar um a um); (iii) na decomposição de números maiores que 5 ( $8-3 = 5+3-3 = 5$ ; responde sem precisar de contar um a um); e (iv) para a

subtracção ( $7-4 = 3$ ; a criança diz 4 e 1 são 5, e 5 e 2 são 7, e responde 3). Estas estratégias podem ser estendidas à base dez.

Fosnot & Dolk (2001) defendem um ensino focado na automatização dos factos numéricos básicos já que a mesma se baseia no pensamento matemático acerca das relações numéricas entre esses factos.

Wright, et al. (2000) propõem um modelo com cinco fases relativamente à aprendizagem da aritmética inicial:

1. *Contagem emergente*. A criança ainda não consegue contar elementos visíveis, ou por não dominar a sequência numérica ou por não conseguir corresponder as palavras dos números aos objectos.
2. *Contagem perceptiva*. A criança consegue contar elementos perceptivos que possa ver, ouvir ou tactear, mas não consegue contar elementos de conjuntos escondidos.
3. *Contagem figurativa*. A criança consegue contar elementos de conjuntos escondidos. Se tiver que contar elementos de dois conjuntos, usa a estratégia de contagem de todos.
4. *Sequência numérica inicial*. A criança usa a estratégia de contagem a partir de um número em adições ou em tarefas de lacunas (por exemplo,  $6 + x = 9$ ). Poderá usar a estratégia de contagem regressiva a partir de (*count-down-from strategy*, no original) em tarefas de subtracção com números pequenos no subtrativo (por exemplo,  $17-3$ : 16,15,14 - resposta, 14) mas não consegue usar a estratégia de contagem regressiva até ao subtrativo (*count-down-to strategy*, no original) em tarefas de subtracção com números elevados no subtrativo (por exemplo,  $17-14$ : 16,15,14 - resposta, 3).
5. *Sequência numérica intermédia*. A criança consegue usar a estratégia de contagem regressiva até (*count-down-to*) e consegue escolher a estratégia mais eficiente de contagem regressiva, ou a partir do aditivo, ou até ao subtrativo, consoante a situação em causa.
6. *Domínio da sequência numérica*. A criança usa estratégias de raciocínio como a compensação, o uso de factos numéricos conhecidos, juntar até 10, a comutatividade, a subtracção como inversa da adição, ou o grupo de 10 num número entre 10 e 20.

Cada criança interpreta uma dada situação à sua maneira. Neste sentido, é primordial que o professor enfatize a comunicação oral, pois esta facilita o desenvolvimento da linguagem e contribui para que a criança organize o seu pensamento, permitindo-a reflectir sobre o mesmo (NRC, 2009).

Tal como a oralidade, o professor deve criar, na criança, hábitos de registo, porque através das suas representações é possível entender a sua percepção, estratégia e raciocínio. Neste caso, é fundamental que o professor faça com que as crianças expliquem o que representaram, devendo-as confrontar com outras hipóteses.

Estes registos são muito importantes na sala de aula, porque o que cada criança representa é o que para ela foi significativo e o confronto dos diferentes registos permite que todas as crianças observem os diferentes tipos de representações e vantagens das mesmas, acabando assim por evoluir na aprendizagem.

## **Os materiais manipuláveis na aprendizagem da Matemática**

### **Perspectiva histórica**

De acordo com Szendrei (1996), antigamente, o ensino, especificamente da matemática, era feito apenas tendo em conta regras e normas. No entanto, a utilização de materiais manipuláveis no ensino da Matemática já data de há muitos anos, sendo que voltou a ser reintroduzida no século XIX, pelos fundadores da Escola Activa, sendo recomendada posteriormente por diversos pedagogos. Este autor traça uma perspectiva histórica da utilização de materiais no ensino, de que farei aqui uma breve síntese.

No século XVIII, surgiu a necessidade de adoptar novos métodos de ensino. Como tal, Comenius criou materiais para a sala de aula, pois para ele, os alunos aprendiam através da realidade e não somente com palavras. Pestalozzi foi o 'pai' de um método que funcionava através de tabelas. Contudo, este método, apesar de ser eficaz, tornava-se cansativo. Tillich e Tuerk melhoraram o método de Pestalozzi, através do desenvolvimento da capacidade intelectual e do exercício do pensamento, sendo que Tuerk envolve a vida real na resolução de problemas. Comenius e Pestalozzi defendiam que era necessário a construção de materiais educacionais. Para o primeiro autor, antes de trabalhar de acordo com regras e normas, os alunos tinham de estar em contacto com objectos que facultassem a aprendizagem. A esta ideia, Pestalozzi acrescentou que os sentidos e a observação consistem na primeira etapa da aprendizagem.

Já no século actual, começou-se a defender a importância da utilização de materiais manipuláveis/concretos na aprendizagem, tendo o professor o papel de auxiliar na construção de conceitos matemáticos, mediada por esses materiais.

Como tal, surgem primeiramente os materiais Montessori que permitiam o ensino da aritmética a crianças doentes. Posteriormente, Dienes, com o objectivo que as crianças entendessem a estrutura do número, através da manipulação, criou o material multibásico.

Com a introdução de materiais manipulativos, começou a ser visível uma evolução nas aulas de matemática relativamente à aprendizagem e, devido às influências das filosofias educacionais no que concerne à sua utilização, começam a evidenciar-se três tipos de materiais:

- os materiais do quotidiano, os concretos;
- os materiais educacionais, que são ferramentas construídas tendo em vista objectivos escolares;
- os jogos nas aulas de matemática.

De acordo com Szendrei (1996), as pesquisas revelam que os materiais mais utilizados no campo da matemática foram os do método de Montessori, que controlavam o erro.

Os materiais educacionais começaram por ser criados de modo a testar os limites das ferramentas normais, tendo-se chegado à conclusão que, com os mesmos, os alunos conseguiam trabalhar de forma autónoma e, através deles, conseguiam adquirir conceitos com mais facilidade. Posteriormente, começaram a ser aconselhados para resolver todas as dificuldades educacionais que surgissem nos alunos e, como tal, começaram a ser utilizados em situações e/ou áreas às quais não se aplicavam. Assim, como não se obtinha o sucesso desejado, os professores começaram a colocar os materiais de parte novamente.

Relativamente ao uso dos materiais na sala de aula, existem posições bastante distintas. Por exemplo, para Boero, referido em Szendrei (1996), o ensino deveria ser feito recorrendo apenas às ferramentas comuns, sendo os conceitos relacionados com o meio envolvente e com a vida real, para assim os professores direccionarem a aprendizagem.

## **Conceito**

Os materiais são vistos na matemática como ferramentas, através das quais (e da sua manipulação) as crianças desenvolvem a aprendizagem. Contudo, a definição de material manipulável não é clara. Existem diversas definições que vão ao

encontro umas das outras, havendo algumas diferenças entre os termos curricular, didáctico, concreto e manipulável.

Bezerra (1962) considerava como material didáctico todos os acessórios que eram utilizados pelo professor durante o processo de ensino e aprendizagem. Como os materiais têm como objectivo "orientar, guiar, exemplificar, ilustrar" (Zabala, 1998, p.168), ou seja, são meios que auxiliam problemas concretos que surjam ao longo da planificação, execução e avaliação das actividades e respectivas aprendizagens, Zabala (1998) considera-os materiais curriculares. Devido a ter esta definição tão vasta, Zabala (1998), estipulou quatro parâmetros para que fosse possível diferenciar os tipos de material. O primeiro parâmetro refere-se ao âmbito da intervenção do professor, ou seja, relaciona-se com os alunos de forma individual, com a turma em geral, com a escola ou com o próprio sistema educativo existente. A intencionalidade, que é o segundo parâmetro, relaciona-se com o objectivo que o professor possui ao utilizar certo material. O terceiro parâmetro relaciona-se com os conteúdos a leccionar propriamente ditos. Por fim, o quarto parâmetro integra os materiais de acordo com o que utilizam.

Convergente com esta definição de Zabala, Graells (2000) afirma que tudo o que puder ser utilizado de modo a auxiliar a aprendizagem é considerado um recurso educativo. Nesta definição, Graells (2000) ressalva os materiais didácticos que, para ele, são criados de modo a facilitar a aprendizagem, classificando-os em materiais convencionais, materiais audiovisuais e novas tecnologias, e separando-os, entre si, através das funções que possuem, tais como: fornecer informação ou avaliar capacidades e conhecimentos, entre outros.

Também Chamorro (2003) apresenta uma definição semelhante à dos autores acima mencionados e refere que os meios utilizados pelos professores no processo de ensino são recursos didácticos. Para esta autora, os recursos criados de modo a apoiar o professor na sua prática são didácticos, ressaltando que estes são meios que favorecem a aprendizagem. Chamorro (2003) diferencia recursos didácticos de materiais didácticos, pois os últimos são aqueles que são manipulados pelos alunos em determinada actividade.

Mansutti (1993) tinha já mencionado a expressão 'material didáctico', afirmando ser benéfico para a aprendizagem a manipulação de objectos por parte das crianças. Mansutti define então material como objectos que formam uma construção e que

servem para instruir, usando assim a terminologia de material didáctico ou instrucional.

Assim, de acordo com as definições de Chamorro e Mansutti, material didáctico é um recurso utilizado pelo professor nas aulas e que é manipulado pelos alunos, conciliando aprendizagem e formação.

Hole (1977/2000), por sua vez, faz uma diferenciação entre materiais didácticos e estruturados. Para este autor, os materiais didácticos ou media consistem em todos os meios para atingir os objectivos do processo de ensino e aprendizagem e os materiais estruturados são os materiais manipuláveis que são construídos de forma a irem ao encontro de conteúdos matemáticos específicos, tendo subjacentes uma ou mais estruturas matemáticas.

Para Ribeiro (1995), o material didáctico pode ser qualquer recurso utilizado pelo professor na sala de aula, desde que favoreça a aprendizagem. Esta autora usa a definição de Hole e afirma que o material estruturado consiste no material manipulável, construído com objectivos específicos para certos conteúdos da matemática. Como tal, todo o outro material usado numa aula de Matemática e manipulado pelos alunos mas que não foi elaborado, tendo em conta uma finalidade ou um conceito matemático, em particular, é denominado de material não estruturado (por exemplo, feijões, palhinhas, botões, berlindes, ou caricas para auxiliar os alunos em actividades de contagem). Para esta autora, o material estruturado é todo aquele que é pensado e elaborado de acordo com os conteúdos matemáticos e que pode ser manipulado.

Em suma, os quatro autores acima mencionados (Chamorro, 2003; Mansutti, 1993; Hole, 1977; e Ribeiro, 1995) concordam ao afirmar que os materiais didácticos são todos aqueles a que o professor pode recorrer. Enquanto Chamorro (2003) e Mansutti (1993) os caracterizam também por serem manipulados pelos alunos, Hole (1977) e Ribeiro (1995) designam de material manipulável o que é manipulado pelos alunos.

Serrazina (1991) e Jacobs (1987) encaram os materiais manipuláveis como materiais didácticos que consistem num conjunto de objectos que servem para auxiliar, ou seja, são meios para atingir os objectivos do processo de ensino e aprendizagem. "Costumam designar-se por materiais, objectos, instrumentos ou outros media que podem ajudar os alunos a descobrir, entender ou consolidar conceitos

fundamentais nas diversas fases de aprendizagem" (Serrazina, 1991, p. 37). Tal como é referido em NCTM (2000/2007), materiais manipuláveis podem ser entendidos como objectos concretos que forneçam uma oportunidade para atingir certos objectivos, quando manipulados ou pelo aluno e/ou professor. Também Reys (1982) corrobora esta definição quando define materiais manipuláveis como objectos que os alunos podem tocar, sentir, movimentar e manipular, ou seja, tudo o que pode ser posto em movimento. Vale (1999), apoiando a ideia de objecto em movimento, define material manipulável como "todo o material concreto, de uso comum ou educacional, que permita, durante uma situação de aprendizagem, apelar para os vários sentidos dos alunos devendo ser manipulados e que se caracterizam pelo envolvimento activo dos alunos" (Vale, 1999, p.112).

Os materiais manipuláveis são instrumentos que favorecem a aprendizagem, pois é através deles que a criança interage. Prado (1998) menciona que através da manipulação e exploração do material, a criança começa a desenvolver capacidades e destrezas. Ou seja, o material é instigador de experiências que levam à formação de conceitos fortes.

Lorenzato (2006a; 2006b) chama de material didáctico o material concreto, considerando todos os materiais úteis no processo de ensino e aprendizagem. Royo (1996) apresenta uma distinção entre material educativo e material didáctico. Para esta investigadora, material educativo é todo aquele que por si só ensina, pois possibilita o desenvolvimento de conceitos na criança. Já o material didáctico é constituído por aquele que, devido à sua construção, auxilia a criança durante o processo de aprendizagem.

É de referir que investigações concluíram que não há materiais específicos para certos conceitos, ou seja, um mesmo material pode ser utilizado para trabalhar diferentes conceitos, assim como um conceito poder ser trabalhado por diversos materiais (Serrazina, 1991).

Os materiais manipuláveis são, assim, objectos com características específicas que permitem trabalhar diferentes conceitos matemáticos e constituem um recurso que pode ser utilizado conciliando aprendizagem e formação (Mansutti, 1993; Hole, 1977). Devido a serem manipulados pelas crianças, enquanto indivíduos activos, recorrem aos sentidos das mesmas e, como tal, beneficiam imenso a construção da sua aprendizagem.

## **A importância dos materiais manipuláveis no ensino da Matemática**

Para Piaget (referido em Vale, 1999), a aprendizagem beneficia dos materiais, através de experiências activas por parte dos alunos, seguidas de posterior reflexão sobre as mesmas. Ou seja, para Piaget, não se aprende, decorando mas sim experimentando, tornando essa experiência significativa para a criança. Segundo Piaget, as crianças mais novas aprendem melhor num ambiente de sala de aula rico em experiências com actividades concretas, porque os alunos que manipulam diferentes objectos possuem imagens mentais mais claras e representam mais facilmente ideias abstractas. A abstracção dos alunos mais novos "inicia-se na sua interacção com o meio, depois com os materiais concretos até chegar aos conceitos matemáticos" (Vale, 1999, p.113). Assim, os materiais eram, para Piaget, cruciais na aprendizagem, em todos os estádios da criança. Para aprender, nomeadamente na Matemática, as crianças dependem bastante do ambiente que as rodeia, assim como dos materiais que têm à sua disposição, porque é através da sua manipulação que muitos dos conceitos matemáticos são explorados.

Actualmente, defende-se que os alunos devem ser capazes de resolver situações diversas, que sejam capazes de reflectir acerca da aprendizagem, que realizem conexões matemáticas, tendo assim mais facilidade de raciocínio e comunicação matemática e, conseqüentemente, mais confiança em si mesmos. Para que os alunos consigam desenvolver estas capacidades, é necessário que usufruam de experiências, na sala de aula, que os levem a envolver-se de forma activa na aprendizagem. Tal como defendiam Nuhrenborger & Steinbring (2008), o conhecimento matemático é ancorado no uso dos materiais.

Os materiais facilitam a aprendizagem dos alunos. Com a utilização destes, os alunos entendem, com mais facilidade, as ideias matemáticas. Assim, o seu uso é, inclusivamente, recomendado e estabelecido, especificamente, para os primeiros anos (NRC, 2001; Stacey, Helme, Archer & Condon, 2002). Segundo diversos autores (por exemplo, Scherer & Steinbring, 1998), nos anos mais elementares, os materiais manipuláveis são utilizados com mais sucesso, tendo em conta que quanto mais novas forem as crianças, mais tempo devem ter acesso aos mesmos.

Nos primeiros anos de escolaridade, é bastante importante que exista nas salas de aula bastante material, que permita a realização de tarefas diversificadas, particularmente as tarefas que envolvam contagens. Assim, as crianças sentem-se

mais apoiadas na aprendizagem e, progressivamente, vão deixando de recorrer ao uso de materiais de suporte ao cálculo. A utilização de materiais manipuláveis é importante em qualquer um dos estádios da criança e representa uma ajuda muito significativa para o seu desenvolvimento, pois contribui para que os alunos construam o seu próprio conhecimento. Tem-se observado, em vários estudos, que os alunos que utilizam materiais, principalmente nos primeiros anos, realizando as actividades de sala de aula interagindo com os mesmos e com o meio que os rodeiam, aprendem de forma mais segura. Isto porque, ao utilizar os materiais, os alunos experimentam e reflectem, comunicando, e assim a aprendizagem é adquirida de forma mais significativa e consolidada. O uso dos materiais, por si só, não é sinal de sucesso, mas a sua utilização tem sido bastante relevante e benéfica para a aprendizagem das crianças (Stacey, et al., 2002).

As novas tendências da matemática apelam à utilização dos materiais no ensino de conceitos básicos, sendo que diversas investigações têm vindo a comprovar que as primeiras experiências na aprendizagem da Matemática são as que irão definir a relação das crianças com esta disciplina. Assim, as orientações metodológicas actuais acerca do ensino da Matemática referem a importância da utilização de materiais manipuláveis na sala de aula, uma vez que estes contribuem positivamente para a aquisição e construção de conceitos matemáticos em todos os níveis de ensino, desde o pré-escolar ao secundário (APM, 1988; NCTM, 1989/1991; NCTM, 1991/1994; NCTM 2000/2007). Também no Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências Essenciais (DEB, 2001), é mencionado que o uso dos materiais manipuláveis é um recurso muito rico para a execução de muitas tarefas escolares. Segundo Nuhrenborger & Steinbring (2008), os materiais, em Matemática, poderão ser bastante benéficos, se utilizados de forma correcta e apropriada, de modo a obter os resultados desejados. A simples utilização de materiais não beneficia a aprendizagem, pois esta utilização só é poderosa quando existe uma relação entre o material e as relações matemáticas, sendo que as crianças podem olhar para o objecto de um modo diferente dos adultos, sem estabelecer qualquer conexão com um conceito matemático (NRC, 2001). Fosnot & Dolk (2001) reforçam esta ideia, referindo que essa relação deve ser construída pelas crianças. Estes autores dão o exemplo de materiais estruturados como o material Cuisenaire, o material com blocos de base 10, ou ainda, o ábaco vertical, que embora tenham sido construídos

com base na estrutura do 10, essa estrutura é clara para os adultos mas não para as crianças. Os autores referem que a criança pode olhar para uma barra encarando-a como uma unidade e não como um dez, uma dezena. "Os materiais não podem transmitir conhecimento; o aluno deve construir as relações" (Fosnot & Dolk, 2001, p. 105). Assim, para estes autores, é importante que os materiais estruturados sejam construídos, não com base nas estruturas matemáticas dos adultos, mas sim com base no apoio e estímulo do desenvolvimento natural da criança.

De acordo com Reys (1982), os materiais manipuláveis, quando usados de forma adequada, possibilitam a diversificação de actividades de ensino, a realização de experiências em torno de situações problemáticas, a representação concreta de ideias abstractas, a oportunidade de descoberta de relações e formulação de generalizações por parte dos alunos e o envolvimento activo dos alunos na aprendizagem. Principalmente nos primeiros anos de aprendizagem, os materiais são imprescindíveis para aprender e entender o conhecimento matemático simbólico e abstracto.

Vários investigadores têm estudado os benefícios do ensino com a utilização de materiais, concluindo que a aprendizagem torna-se mais rentável quando se utiliza materiais manipuláveis (Suydam & Higgins, 1977), sendo mais eficaz quando utilizados por maiores períodos de tempo (NRC, 2001; Sowell, 1989). O professor tem um papel fundamental no processo de utilização de materiais, na sala de aula (Raphael & Wahlstrom, 1989), não colocando limite no tempo de execução das tarefas (Fernandes, 1990). Através de tarefas com utilização de materiais, os alunos acabam por desenvolver a aprendizagem devido à descoberta, exploração e experimentação.

No entanto, é necessário ter em conta que os alunos devem ter os materiais à sua disposição, podendo mexer neles, consoante a sua necessidade. O uso de materiais apenas por parte do professor é insuficiente e ineficaz. O aluno tem de ter tempo para explorar à sua vontade os materiais, manipular e experimentar de forma a descobrir relações (Matos & Serrazina, 1996), sendo que os materiais devem estar disponíveis para o aluno em todo o processo de aprendizagem e não apenas no início.

De acordo com Serrazina (1991), os materiais manipuláveis são essenciais para um professor de Matemática, pois constituem um recurso fulcral para a aprendizagem

e construção de conceitos. Contudo, varia de aluno para aluno a necessidade de os continuar ou não a utilizar, tendo o professor o papel fundamental de conduzir o ensino, de acordo com as necessidades de todos os alunos.

Existem receios relativamente ao uso dos materiais, uma vez que estes podem ser utilizados em diversas situações, com diversos objectivos, mas o professor tem de estar sempre à vontade, sabendo as características de todos os materiais, sendo que há uns materiais de fácil utilização e outros de difícil utilização. É fulcral que os professores saibam como trabalhar com os materiais de forma adequada, de modo a proporcionar uma experiência rica e útil, que favoreça o entendimento e desenvolvimento dos conceitos, assim como dos procedimentos e capacidades. Daí que seja fundamental atender a este aspecto na formação de professores.

Tendo em conta o contributo dos materiais na aprendizagem, já que ao utilizá-los, os alunos estão a intervir activamente na sua aprendizagem, tendo assim experiências significativas, a APM (1988) e NCTM (1985; 1989/1991) referiram, em propostas de renovação curricular, a importância da existência de variados materiais na sala de aula disponíveis para os alunos. As Normas publicadas mais recentemente (NCTM, 2000/2007) mencionam isso mesmo e defendem alterações no que se ensina e como se ensina. Serrazina (1995) refere que deve ser tido em conta que um ensino tradicional, onde se privilegia um ensino formal no qual é utilizado uma abordagem meramente verbal, vai contra os conhecimentos que as crianças já possuem, ao nível da matemática informal e concreta, dificultando-lhes a compreensão e respectiva evolução para um conhecimento formal e abstracto.

Diversas investigações em psicologia da cognição e em educação matemática, tal como Matos & Serrazina (1996), corroboram o acima referido, uma vez que referem que a aprendizagem apenas existe quando os alunos a adquirem activamente, sendo eles próprios a construir os seus significados, modificando ideias à medida que vão interagindo com os materiais, na medida em que estes apelam aos diversos sentidos da criança.

As Normas Profissionais (NCTM, 1991/1994), os Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2000/2007), e os documentos curriculares portugueses (DEB, 2001; Ponte, et al., 2007) têm vindo sempre a colocar o enfoque na utilização de materiais no processo de ensino-aprendizagem. "A selecção de materiais de ensino adequados, de ferramentas e técnicas didácticas, a vivência de

uma prática reflexiva" (NCTM, 2000/2007, p.19), assim como o uso de material disponível na sala de aula é benéfico para a aprendizagem. Também o Programa de Matemática para o Ensino Básico (Ponte, et al., 2007), enfatiza o uso de materiais, referindo que "os alunos devem utilizar materiais manipuláveis na aprendizagem de diversos conceitos, principalmente no 1º ciclo" (p. 9).

Caldeira (2009) apoia a perspectiva de Ribeiro (1995), segundo a qual os materiais devem ser seleccionados de modo a permitir:

- diversificação de actividades;
- realização de experiências em torno de situações problemáticas;
- representação de ideias abstractas;
- análise sensorial de dados necessários à formação de conceitos;
- oportunidade de descoberta de relações e formulação de generalizações por parte dos alunos;
- envolvimento activo dos alunos na aprendizagem;
- respeito pelas diferenças individuais;
- aumento da motivação.

De acordo com Ponte & Serrazina (2000), a Matemática deve ser aprendida num ambiente de trabalho rico que promova a participação e aumente a estimulação dos alunos. Para que estes aprendam de forma eficaz, não basta participarem em actividades concretas; é necessário que também se envolvam no processo de reflexão (Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999).

### **Os materiais utilizados no estudo**

Os materiais que constituem objecto de estudo na presente investigação (colar de contas, moldura do dez e ábaco horizontal) incluem-se nos materiais estruturados, já que foram construídos para servirem de apoio à representação de ideias matemáticas, sendo materiais de suporte à contagem e à estruturação numérica. A utilização habitual deste tipo de material pode levar as crianças a deixarem de sentir necessidade de recorrer à contagem um a um, e a usarem estratégias de cálculo baseadas em agrupamentos conducentes à automatização de factos numéricos (Fosnot & Dolk, 2001).

Podem também contribuir para a transição do uso de *modelos de* situações contextuais significativas para o uso de *modelos para* a resolução de operações

aritméticas, por parte dos alunos, tal como proposto por Gravemeijer (referido em Verschaffel, Greer & De Corte, 2007). Definindo-se modelos como representações que são usadas para resolver problemas, o professor deverá ajudar os alunos a evoluir do uso de modelos de pensar para modelos para pensar. Assim, um modelo de pensar representa a acção dos alunos envolvidos numa dada situação concreta, podendo incorporar elementos contextuais. A recta numérica é um exemplo de um modelo para pensar pois trata-se de um modelo generalizado de estratégias, representando as relações entre os números.

Passo a apresentar uma breve caracterização dos materiais estruturados usados no presente estudo.

Colar de contas - O colar de contas é um modelo estrutural linear de apoio à contagem e ao cálculo que se baseia na sequência numérica (Treffers, 2001b).

Pode ser organizado utilizando duas cores para fazer agrupamentos de, por exemplo, 2 em 2, 5 em 5 ou 10 em 10, conforme os objectivos visados pelo professor.

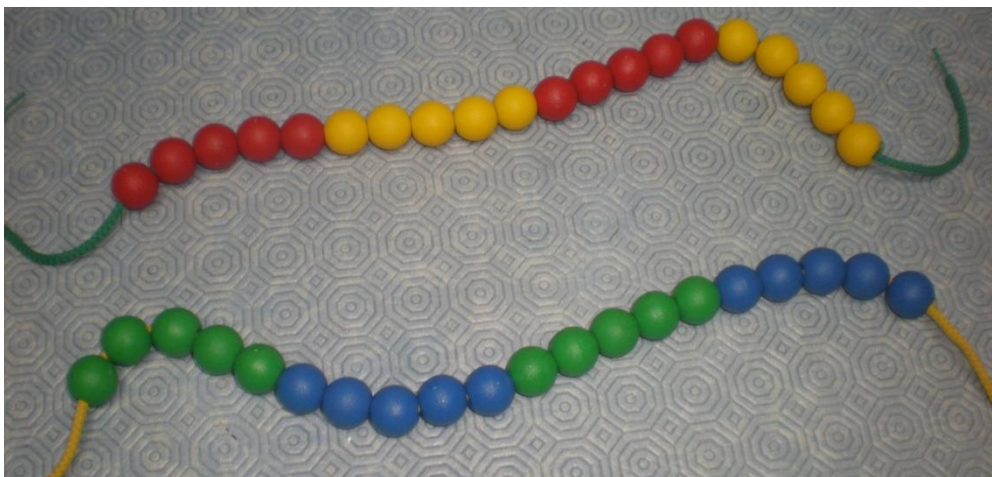


Figura 2. Colares de contas

A organização mais habitual é a dos grupos de cinco em que as crianças escolhem contas de duas cores que vão enfiando, alternadamente, formando grupos de cinco. Começa-se por trabalhar com o colar de contas concreto e à medida que as crianças se vão sentindo confiantes no seu uso passa-se, então, à sua representação em papel.

Com o colar de contas organizado em grupos de cinco, os alunos assimilam os números cinco, dez, quinze e vinte como números de referência. A partir da localização destes números, marcados pela alternância de cores, os alunos

localizam também os números próximos (quatro, seis, nove, onze, catorze e dezasseis), reconhecendo-lhes a sua estrutura com grupos de cinco, dentro da relação  $N+1$ , ou  $N-1$ : o quatro é cinco menos um, o seis é cinco mais um, o nove é dez menos um, o onze é dez mais um, etc.). A alternância de cores também pode facilitar a estratégia de contar a partir de um número: por exemplo, numa situação aditiva de juntar cinco com três, as crianças podem contar a partir do cinco, sabendo que o grupo de uma dada cor corresponde a cinco contas.

Moldura do dez - A moldura do dez é composta por um rectângulo de dois por cinco, dividido em 10 quadrados, cinco em cima e cinco em baixo, e comporta pintas para ilustrar números, que são colocadas nas linhas da moldura, da esquerda para a direita. As molduras do 10 são feitas, regra geral, em papel.

A moldura pode configurar uma disposição linear, enfatizando a estrutura do 5 no grupo de 10, ou uma disposição paritária, enfatizando a relação do dobro. Na disposição linear, as pintas são colocadas na primeira fila, para os números de um a cinco, e continuam a ser colocadas na segunda fila, para os números de seis a dez. Nesta disposição, os alunos podem ver, por exemplo, o seis como cinco e um, ou o oito como cinco e três, ou o oito como dez menos dois. (ver figura 3).



Figura 3. Molduras com seis e oito pintas na disposição linear

Na disposição paritária, as pintas vão sendo colocadas, a par, quer na primeira fila quer na segunda fila. Neste caso, os alunos reconhecem o seis como três e três, ou o oito como quatro e quatro.



Figura 4. Molduras com seis e oito pintas na disposição paritária

Com este material, pode ser realizado dois tipos de exploração, com molduras vazias ou preenchidas. No primeiro caso, usam-se também tampas com duas cores distintas e duas molduras. O objectivo é adicionar números que dêem mais de dez e menos de vinte, tendo como regra, completar primeiro uma moldura, de cima para baixo e da esquerda para a direita, antes de ir para a segunda, e usando uma

cor para cada um dos números. Os alunos podem usar tampas da mesma cor e representar cada número num cartão, arrastando depois as tampas de modo a completar um cartão e, simultaneamente, ir registando as compensações efectuadas.

No segundo caso (o utilizado na recolha de dados do presente estudo), utilizam-se molduras já preenchidas. Estas são mostradas aos alunos e os mesmos são questionados sobre o número de pintas existentes, o modo como foram contadas, ou quantas faltam para o dez. Assim, através deste material, os alunos realizam a composição do dez através da adição e da subtracção, evoluindo para a aquisição de factos numéricos básicos relativos à decomposição do 10 em duas parcelas.

Ábaco horizontal - O ábaco horizontal está organizado em dez filas com dez contas cada; contudo, estas estão separadas por cor, cinco de uma e cinco de outra. Identifica-se facilmente a posição do cinquenta, pois a partir da sexta linha, as cores trocam. Também existem ábacos com apenas duas filas (*rekenrek* é a designação em holandês do ábaco com dois arames que se encontra em Fosnot & Dolk, 2001).

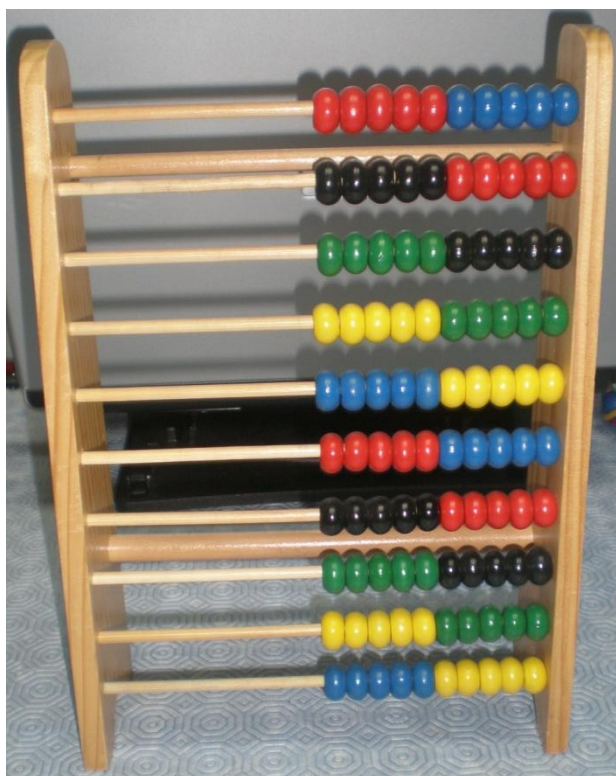


Figura 5. Ábaco horizontal

Inicialmente, as dez contas estão no lado direito, e os alunos deslocam-nas para a esquerda, começando em cima, na primeira fila, de acordo com o número que

pretendam representar. Neste tipo de ábaco, os grupos de dez que constituem o número estão sempre explícitos, pelo que este ábaco não é de posição, como é o caso do vertical em que há a troca de dez unidades por uma dezena e semelhante procedimento nas outras ordens.

O ábaco horizontal permite o desenvolvimento do sentido de número interiorizando os grupos de dez que constituem um número. Pode também potenciar a evolução das estratégias de cálculo, passando da adição de dez em dez para a multiplicação. Este material auxilia os alunos a trabalhar, tendo em conta os números de referência, facilitadores de cálculo, uma vez que em cada fila existem dez contas, pintadas, cinco a cinco, de cores diferentes. Tem ainda a vantagem de permitir trabalhar os números até cem com facilidade.

Assim, este material constitui um modelo combinado: (i) linear, correspondente à estrutura com grupos de cinco e de dez, dada a alternância de cores; e (ii) de agrupamento, correspondente à relação do dobro, uma vez que os alunos podem representar os números como somas de números iguais, ou quase iguais, colocando as contas, a par, no arame de cima e no arame de baixo.

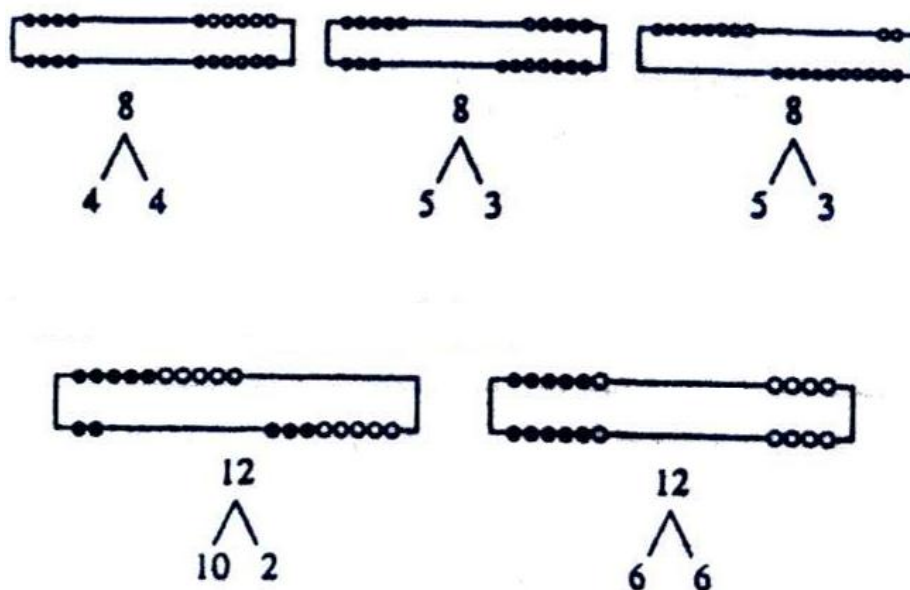


Figura 6. Disposições no ábaco enquanto modelo combinado (Treffers, 2001b, p. 45)

Segundo Fosnot & Dolk (2001), este material encoraja a criança a usar estratégias (o dobro, a estrutura do 5, a compensação, ou fazer 10), em vez de contar. Por exemplo, para calcular  $6+7$ , usando o ábaco, as crianças tanto podem calcular a soma como  $10+3$  (como resultado de  $6+4+3$ , deslocando quatro contas para a

esquerda na fila de cima, juntando-as às seis de modo a perfazer o total de dez, e deslocando para a direita as mesmas quatro contas das sete colocadas na fila de baixo), ou como  $6+6+1$ , ou ainda, como  $5+5+1+2$  (ver figura 7).



Figura 7. O cálculo de  $6+7$  no ábaco horizontal (Verschafel, et al., 2007, p. 600)

Os autores enfatizam a potencialidade deste material no desenvolvimento, por parte das crianças, de um melhor sentido das relações entre os números. E é o desenvolvimento das relações numéricas bem como a automatização de factos numéricos que formam a base para um cálculo eficiente.

### O papel do professor

De acordo com diversos autores (Hyde, 1989; Serrazina, 1993), tudo o que os professores realizam na sala de aula resultam do que pensam sobre a Matemática e como a sentem. Ou seja, toda a actividade matemática na sala de aula é influenciada pelo professor e pela visão que este possui da matemática, a qual influencia a sua forma de ensinar.

A aprendizagem, na sala de aula, quando realizada num ambiente no qual são utilizados materiais manipuláveis é, segundo diversos autores, bastante mais eficaz. Contudo, é muito importante que os professores os saibam utilizar de forma correta. Neste contexto, o professor tem a função de proporcionar ambientes que levem os alunos a utilizar os materiais de forma a atingir os objectivos previstos, e de ajudar os alunos a estabelecer a conexão entre os materiais e as ideias matemáticas (NRC, 2001). De acordo com Cardoso (2002), primeiramente é necessário que os alunos tenham um contacto lúdico com o material, pois é através deste primeiro contacto que as crianças começam a entendê-lo.

Na perspectiva de Ponte & Serrazina (2000), é através da manipulação de materiais, orientada adequadamente pelo professor, que as crianças vão ter mais facilidade em adquirir determinados conceitos. Assim, o professor deve tirar sempre usufruto dos materiais na sua sala, tendo em conta que devem ser os alunos a manipulá-los, sabendo exactamente a tarefa a realizar. A utilização de material na sala sem ser manipulado pelas crianças, ou sem que estas saibam o objectivo da sua utilização é ineficiente.

Apesar dos materiais serem um recurso fundamental na aprendizagem, se forem utilizados por professores que não os conheçam bem, assim como às suas potencialidades, ou se forem utilizados de forma inadequada ou se os alunos não os puderem manipular, poderão acabar por prejudicar a aprendizagem. Como tal, é muito importante que os professores recebam uma boa formação relativamente aos mesmos.

O uso dos materiais, na sala, requer, por parte do professor, uma organização prévia e muita precisão nas tarefas. Isto porque os materiais são ferramentas que dão a oportunidade de descoberta no processo de ensino e aprendizagem, mas o professor tem de ir dando orientações muito precisas do que é necessário fazer.

Os professores têm de criar na sala de aula um ambiente que leve as crianças a explorar, testar, desenvolver, aplicar e discutir ideias (NCTM, 1989/1991). Deverão também ir auxiliando os seus alunos no seu desenvolvimento, de forma a atender aos níveis de cada um e a guiar o desenvolvimento das ideias que vão surgindo. Este é um novo desafio para o professor ao lidar com a tensão entre direccionar e estruturar o pensamento matemático dos alunos, por um lado, e estar aberto às interpretações e interesses dos estudantes, por outro (Verschaffel, et al., 2007).

Assim, no âmbito deste novo desafio, passa a ser objectivo da aprendizagem o desenvolvimento da comunicação e da argumentação nas crianças. Este desenvolvimento é importante não só para uma maior consolidação das aprendizagens das crianças mas também para um maior entendimento do professor sobre o que os seus alunos pensam, de modo a possibilitar-lhe auxiliá-los no progresso da aprendizagem. É através das explicações dos alunos em como fazem e resolvem as tarefas propostas que o professor deve organizar o processo de aprendizagem dos alunos.

Os professores são os responsáveis pela qualidade das actividades matemáticas em que os alunos se envolvem e devem encorajar os mesmos a utilizar materiais, sempre que tal seja adequado e possível. Como tal, Serrazina (1991) realça a importância de seleccionar, de forma cuidadosa, as tarefas e os materiais a utilizar, sendo que o professor é responsável por garantir uma aprendizagem significativa aos seus alunos. Ou seja, o mais importante não é a utilização do material, mas sim o tipo de utilização que se faz com ele.

Também Moyer (2001) refere a importância dos materiais serem usados como ferramentas para que os alunos consigam realizar uma melhor aprendizagem. Para tal, devem ter o material ao seu dispor para o poderem usar à sua vontade.

Fosnot & Dolk (2001) referem algumas ideias que podem auxiliar os professores, nos desafios acima mencionados. O professor deve facilitar o diálogo. No ensino tradicional, o professor tende a efectuar perguntas de resposta directa que, muitas vezes, são influenciadas pelo próprio tom de voz que utiliza aquando da questão. Como tal, é imprescindível que o professor peça sempre aos alunos a explicação das suas respostas. Isto porque os alunos, quando estão a justificar a resposta, estão a apresentar todo o seu raciocínio assim como deixam sobressair as dificuldades que sentiram. Ouvindo sempre as explicações dos alunos, o professor pode e deve aproveitar para utilizar outras estratégias que permitam a clarificação do que ensina, de modo a que o aluno entenda. Assim, o professor deve ensinar e explicar, mas também deve dar aos alunos oportunidades de explicarem sob o seu ponto de vista, para que haja uma aprendizagem mais eficiente. Uma actividade que promove este diálogo entre professor e alunos, referida por Fosnot & Dolk (2001), é o que os autores designam por congresso matemático, no qual é possível discutir ideias e processos matemáticas. Há, contudo, muitos outros tipos de situações em que o professor pode promover o diálogo, facilitando assim a aprendizagem.

É também útil que o professor proponha contextos. O facto de contextualizar as tarefas consiste, também, num processo facilitador da aprendizagem para os alunos. Quando a aprendizagem se relaciona directamente com o seu contexto, ou seja, com algo que os alunos conhecem e lidam, estes sentem-se muito mais motivados para a mesma e conferem-lhe significado.

Assim, a planificação, por parte do professor, é fundamental e consiste também numa das suas funções mais difíceis. O professor tem de planificar, tendo em conta os saberes concretos dos alunos e o objectivo do que se pretende que eles venham a dominar. Deste modo, o professor, ao planificar, tem de atender aos conteúdos matemáticos a ensinar, tem de escolher tarefas que permitam aos alunos atingir as metas previstas e tem de especificar o quê e como os alunos vão aprender, que consiste no aspecto teórico e metodológico da planificação.

Os professores, ao realizarem as tarefas na sala de aula, têm como objectivo garantir que os alunos construam o seu conhecimento acerca do conteúdo matemático em estudo, melhorando o seu processo de matematização. Para tal, o professor deve ter em atenção o processo de matematização, o raciocínio e procedimento e todo o processo de reflexão, no qual o aluno revela a sua organização matemática. Efectivamente, é necessário que o processo de exploração com os materiais, vivido pelos alunos, seja acompanhado da reflexão sobre a experiência realizada. Para garantir que todos estes factos sejam apurados, por parte do professor, Kraemer (2008) formulou cinco princípios de trabalho associados à planificação:

I - Observar e registar a forma de ver, pensar e calcular dos alunos tal como eles vêem, pensam e calculam. Neste primeiro princípio, o professor deve observar bem, de modo a compreender os modelos utilizados pelos alunos, ou seja, todo o processo de apresentação, explicação e justificação dos alunos.

II - Analisar e organizar as soluções a partir das noções, procedimentos e representações usadas pelos alunos. Para isto, o professor tem de relacionar a noção matemática com a estratégia utilizada pelo aluno.

III - Pensar como as condições da tarefa podem estimular os alunos a transformar as suas noções, procedimentos e representações num nível mais alto de compreensão.

IV - Avaliar e diagnosticar para deslocar as suas fronteiras e a dos alunos. Através desta avaliação, o professor recolhe a informação necessária de modo a adequar as tarefas à aprendizagem dos alunos.

V - Formar círculos no âmbito da formação inicial e contínua para inovar e melhorar. Trabalhar em equipa é muito importante para o professor, porque através de um clima de partilha de tarefas e resultados, onde se reflecte sobre os mesmos, a prática do professor vai progredindo e tornando-se mais eficaz.

O professor deve ter o cuidado de apresentar tarefas que, além de se relacionarem com o contexto dos seus alunos, permitam o desenvolvimento de ideias e procedimentos matemáticos, ou seja, “devem exigir do aluno um certo esforço de organização e elaboração” (Equipa do Projecto Desenvolvendo o Sentido de Número, 2007, p.9). Assim, as tarefas contextualizadas representam o ponto de partida e a fonte de aprendizagem da Matemática. Além disso, o professor tem de ter sempre presente a necessidade de diversificar as tarefas que propõe aos seus alunos. Ao diversificar, o professor vai desenvolvendo diferentes áreas da aprendizagem do aluno.

Actualmente, é pedido, aos professores, que ao ensinar Matemática estejam a criar nos alunos hábitos de reflexão (NRC, 2001), valorizando a Matemática e as suas próprias capacidades, conseguindo assim resolver problemas com facilidade, utilizando o raciocínio. Para isto, é necessário que os alunos estejam envolvidos activamente no processo de aprendizagem. Assim, ao utilizar materiais, o professor consegue esta envolvência por parte dos alunos, sendo que qualquer conceito pode ser iniciado de uma forma concreta, através da modelização dos materiais, e depois abstraído, e representado por simbologia adequada. Ou seja, os materiais manipuláveis, ou objectos concretos, permitem e facilitam a passagem para um nível abstracto, desde que utilizados dentro de certas condições, discutidas atrás. E é nesta questão que a intervenção do professor é essencial, pois é ele que vai ser responsável pela mediação de todo o processo.

Tendo em conta o acima referido, é função dos professores proporcionarem "um ambiente que encoraje as crianças a explorar, desenvolver, testar, discutir e aplicar ideias. Têm de ouvir as crianças atentamente e guiar o desenvolvimento das suas ideias. Têm de usar frequentemente materiais manipuláveis em actividades que impliquem o raciocínio" (NCTM, 1989/1991, p.21).

# CAPÍTULO III

## METODOLOGIA

No presente capítulo, vou abordar as opções metodológicas, por mim escolhidas, neste estudo, tendo em conta os objectivos e o quadro teórico do mesmo. Este estudo tem como propósito entender o papel da utilização de materiais estruturados na aprendizagem dos números até 20, por parte de alunos de 1.º ano.

De acordo com esse propósito, pretende-se dar resposta às seguintes questões:

1. De que modo são utilizados o colar de contas, o ábaco horizontal e a moldura do dez?
2. Que relações numéricas emergem da utilização do colar de contas, do ábaco horizontal e da moldura do dez?
3. De que modo o colar de contas, o ábaco horizontal e a moldura do dez intervêm na estruturação do processo de cálculo?

### Opções Metodológicas

Esta investigação pretende ser particularista, descritiva e interpretativa. Assim, optei por uma abordagem de tipo qualitativo.

A investigação qualitativa apresenta, de acordo com Flick (2005), quatro características orientadoras; são elas a:

- adequação dos métodos e teorias ao estudo;

é o objecto a estudar (...) o factor determinante da escolha do método. Os objectos não são reduzidos a simples variáveis, são estudados na sua complexidade (...) a validade do estudo é estabelecida com referência ao objecto estudado (...) tem como critérios centrais a fundamentação dos materiais obtidos no material empírico. (Bortz, 1984, p. 5).

- perspectiva dos participantes, na sua diversidade; de acordo com os diferentes papéis sociais e hábitos de vida, há diferentes perspectivas de uma mesma situação;

- reflexão do investigador sobre a investigação; na medida em que esta investigação é sempre interpretativa, o investigador está em constante interacção com o que está a investigar e vai reflectindo simultaneamente;
- variedade de métodos na investigação qualitativa.

Segundo Bogdan & Biklen (1991/1994), há cinco características que definem um estudo qualitativo:

- 1) Os dados são recolhidos no ambiente natural, pelo seu principal instrumento, o investigador;  
“as acções são melhor compreendidas quando são observadas no seu ambiente habitual de ocorrência” (p.48)
- 2) Este tipo de estudo é descritivo, sob a forma de imagens ou palavras;  
“nada é trivial (...) tudo tem potencial para constituir uma pista que nos permita estabelecer uma compreensão mais esclarecedora do nosso objecto de estudo” (p. 49)
- 3) O processo interessa mais que os resultados;  
“Como é que se começaram a utilizar certos termos e rótulos? Como (...) ? Qual (...)?” (p. 49)
- 4) A análise de dados tende a ser feita de forma indutiva e a informação é construída com base nos dados recolhidos;  
“O processo de análise de dados é como um funil: as coisas estão abertas de início (ou no topo) e vão-se tornando mais fechadas e específicas no extremo” (pág. 50)
- 5) As perspectivas dos participantes ocupam lugar central na investigação.  
“estão interessados no modo como diferentes pessoas dão sentido às suas vidas.” (pág. 51)

## **Técnicas e Instrumentos de Recolha de Dados**

Tendo como objectivo realizar um estudo em contexto natural, a recolha de dados foi feita numa escola, numa turma de 1º ano de escolaridade, tendo estudado o desempenho de três pares de alunos. Tal como defendido por Lessard-Hébert, Goyette & Boutin (2005) e por Bogdan & Biklen (1991/1994), recorri a mais que uma técnica de recolha de dados, para que pudesse efectuar, posteriormente, a

triangulação de dados. Utilizei a observação participante, as gravações áudio e vídeo e também documentos (produções dos alunos).

Assim, foram observadas cinco aulas de Matemática. Estas aulas foram observadas com recurso a equipamento áudio e vídeo, tendo organizado um relatório com as anotações que fiz durante as aulas e também após as conversas informais que fui tendo com a professora participante (a quem atribuí o pseudónimo de Sofia). Isto porque após cada aula e entre as aulas, falávamos bastante das mesmas e reflectíamos sobre o que pensávamos que tinha corrido bem ou mal, e o que podia ser melhorado. Fazíamos uma partilha das aulas em que tinha decorrido a recolha de dados e da nossa rotina enquanto professoras.

Segundo Flick (2005), quando se utiliza a observação como método de recolha de dados, o mais importante é registar as acções e as interações, sendo que o principal consiste no enriquecimento contextual de declarações e actividades, registando-as em notas de campo. Posteriormente, essas notas são transformadas em textos que se tornam a base para uma análise correcta.

Todo este processo, o de registo de dados, pode ser dividido em três partes distintas:

- registo de dados;
- preparação dos dados (transcrição);
- construção de uma nova realidade em texto.

Segundo o autor, esta última parte constitui a dimensão essencial do processo de investigação.

As tarefas usadas na recolha de dados constituíram um importante instrumento de recolha de dados, tendo sido propostas por mim à professora. Todas as propostas visaram o trabalho com os números até 20, tendo quatro delas envolvido o recurso a materiais distintos. Assim, na primeira tarefa<sup>1</sup>, foi usado o colar de contas, na segunda, a moldura do 10, e na terceira, o ábaco horizontal. A quarta tarefa constou da apresentação de três situações problemáticas, nas quais os alunos poderiam ter acesso aos diferentes materiais como meios facilitadores de contagem/cálculo, se de tal sentissem necessidade. Por fim, quis verificar como se processava, no final do ano lectivo, o cálculo mental, sem recurso a materiais, tendo em conta tudo o que tinha sido trabalhado antes; daí ter surgido a última

---

<sup>1</sup> Tarefa da autoria da Equipa da ESE de Setúbal do PFCM.

tarefa. Nesta tarefa, os alunos já não tinham quaisquer materiais na sua frente, e o objectivo era verificar se eles já se encontravam no nível de cálculo formal (Treffers, 2001b), dispensando o uso de materiais estruturados.

As sessões de observação tiveram início no 2º período, em Março, e ocorreram quase mensalmente, à excepção da última. Obviamente que a professora trabalhava com a turma de acordo com o Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte, et al., 2007) e, como tal, as tarefas realizadas na sala de aula eram semelhantes às propostas por mim. Por conseguinte, os alunos não estranhavam as minhas propostas de trabalho, pois eram parte do quotidiano deles. Além disso, o recurso aos diversos materiais estruturados foi uma constante em todo o ano lectivo, desde o início do mesmo, embora com menor frequência, à medida que os alunos iam adquirindo uma maior percentagem de factos matemáticos, em termos do cálculo numérico.

Estive sempre em contacto com a professora titular, a fim de saber a evolução do trabalho dos alunos na sala de aula e falávamos frequentemente do tipo de tarefas que ela colocava à turma, sendo que fiquei com as planificações dela e com alguns exemplos de tarefas.

A professora reunia quinzenalmente com as colegas de ano do agrupamento, para falarem acerca da implementação do novo Programa de Matemática, discutirem ideias e resultados e falei muitas vezes com ela sobre essas reuniões.

A calendarização das tarefas apresentadas aos alunos foi a seguinte:

Colar de Contas (anexo 2) - 11 de Março

Moldura do 10 (anexo 3) - 16 de Abril

Ábaco Horizontal (anexo 4) - 21 de Maio

Situações Problemáticas (anexo 5) - 4 de Junho

Cálculo mental (anexo 6) - 11 de Junho

As sessões foram observadas de forma diferente devido a factores adversos. Três das cinco aulas ocorreram dentro da sala de aula normal e aí estavam duas câmaras de vídeo viradas para os pares seleccionados, contudo, os outros alunos não tinham conhecimento de quem eram os pares seleccionados e todos participavam na tarefa. Assim, eu também ia tirando notas, relativas ao trabalho de outros alunos

que achasse relevantes. No entanto, estas notas não foram integradas na análise de dados, tendo-me focado apenas nos três pares de alunos seleccionados.

Outras duas sessões, a da moldura do 10 e a do ábaco horizontal, foram apenas realizadas com os pares seleccionados, numa sala de estudo. Estas aulas foram realizadas de forma diferente, porque eu e a Sofia pensámos que seria benéfico para as tarefas em questão e respectivas filmagens não haver o barulho de fundo usual, pois a turma era no geral muito ruidosa.

As aulas foram sempre conduzidas pela Sofia, ficando eu responsável por filmar e tirar notas. Contudo, era-me inevitável por vezes tomar parte activa e acabava por participar, estimulando e desafiando os alunos.

Uma vez que nas últimas duas tarefas, existia o objectivo de verificar a transição dos alunos do nível de cálculo estruturado (com recurso a materiais) para o nível de cálculo formal (sem recurso a materiais) (Treffers, 2001b), optei por uma exploração individual. A Sofia chamava cada um dos alunos seleccionados, à vez, para perto de si, e propunha-lhes as tarefas, enquanto a restante turma trabalhava noutra actividade. Ambas as tarefas foram apresentadas aos alunos pela Sofia, sendo que eu observei directamente. Assim, nessas duas últimas aulas observadas, eu fui escrevendo as reacções e os pensamentos que os alunos seleccionados iam expressando, sem recurso ao registo vídeo.

Os alunos trabalhavam a pares ou individualmente e dessas sessões resultou sempre uma ficha de registo produzida pelos mesmos. Todas estas fichas ficaram comigo a fim de me auxiliarem, posteriormente, na análise de dados e a dar respostas às minhas questões iniciais.

## **Técnica de Tratamento de Informação**

Todos os registos áudio e vídeo foram, posteriormente, transcritos a fim de serem utilizados na análise de dados. Para analisar a informação obtida na recolha de dados, optei por, após as sessões, visionar várias vezes as gravações, para que as mesmas fossem transcritas na totalidade, sem quaisquer omissões. Assim, todas as gravações de vídeo foram ouvidas e vistas inúmeras vezes de modo a que a transcrição ficasse o mais fiel, assim como tentei transmitir todas as expressões

que os alunos fizeram. É importante referir que, quando se utilizam dados gravados, há que proceder a uma transcrição cuidada.

Depois de todas as sessões transcritas, li-as na totalidade, mais do que uma vez, de modo a focar-me nos aspectos mais relacionados com o meu estudo. Como “o grau de exactidão da transcrição dilui a forma dos acontecimentos numa multidão de pormenores específicos” (Flick, 2005, p.176), tive, igualmente, necessidade de rever as gravações, durante o processo de escrita, decorrente da análise de dados, o que contribuiu para que eu refinasse as transcrições com o registo mais detalhado de alguns pormenores de gestos, olhares, fulcrais para o processo interpretativo dos dados. De acordo com este autor, a interpretação de dados é o cerne deste tipo de investigação qualitativa. Ao rever as sessões várias vezes, fui definindo, tal como defende Guerra (2006), ‘hipóteses explicativas’ e ‘ideias-tipo’. À medida que ia avançando na interpretação, era possível avançar com ‘novos conceitos’ e ‘proposições teóricas’ que permitissem justificar o fenómeno em estudo, de modo a defender a plausibilidade dos dados recolhidos.

De acordo com Lessard-Hébert, et al. (2005), numa investigação cujo contexto se enquadra no paradigma interpretativo, o objecto da análise é formulado de acordo com a acção desenvolvida. A acção engloba, neste contexto, “o comportamento físico e ainda os significados que lhe atribuem o actor e aqueles que interagem com ele” (Erickson, 1986, p. 127). Assim, o objecto integra toda uma relação de acção - significado. Nesta perspectiva, o investigador tem de se centrar na variabilidade de relações entre a acção, o comportamento e os significados.

Neste estudo, o objecto de análise é constituído pelos três pares de alunos e, na análise de dados, tentei, através do registo e análise do desempenho dos três pares nas tarefas desenvolvidas, dar resposta às questões colocadas. Para tal, foi essencial relacionar o desempenho observado com a parte teórica do capítulo anterior. Organizei os dados obtidos nas seguintes categorias analíticas: estratégias de resolução das tarefas; dificuldades dos alunos; estruturas numéricas modeladas pelos materiais e níveis de cálculo (Treffers, 2001b).

Ao longo de todo o capítulo de apresentação dos resultados, incluí citações dos diálogos que existiram entre os alunos, e também entre os alunos e a professora, obtidos na recolha de dados, para melhor ilustrar as minhas interpretações e para

lhes conferir evidência empírica, sendo esta prática defendida pelos autores acima citados.

## **Contextualização do Estudo**

### **Escola**

A escola onde foi realizado este estudo pertence ao concelho de Lisboa, situada entre o centro e a zona oriental da cidade e é habitada por uma população envelhecida. Existem na zona alguns prédios de habitação social, recentes, que são habitados por uma população mais jovem, o que contribuiu para o aumento da população escolar.

O jardim-de-infância tem duas turmas com cerca de 38 crianças e a E.B.1 possui cerca de 100 crianças com idades compreendidas entre os 5/6 e os 14 anos, distribuídos por cinco turmas dos quatro anos de escolaridade do 1º Ciclo do Ensino Básico. São alunos com percursos escolares difíceis, com retenções repetidas ou portadores de deficiência e/ou doença crónica. Cerca de 20% da população escolar insere-se num quadro de exclusão social.

Como tal, a maioria, da população escolar é proveniente de famílias de nível socioeconómico e cultural médio e médio/baixo, com poucas expectativas de futuro e com diversas problemáticas sociais, demonstrando grande desinteresse pela aprendizagem, níveis de desempenho muito baixos e conseqüentemente, uma taxa de insucesso muito elevada.

A escola está instalada num edifício com cerca de vinte anos, de tipologia P3, composto por dois blocos separados e ligados por um espaço polivalente. Cada bloco é composto por seis salas, sendo que, do lado Sul, onde funciona a E.B.1, cinco são de aulas e uma de Coordenação/Docentes e do lado Norte, no piso zero, três são do jardim-de-infância e outras três, no piso um, estão a cargo da Junta de Freguesia, nomeadamente da componente de apoio à família.

O horário lectivo é o normal, havendo actividades de enriquecimento curricular à tarde.

## Professora Participante

Na altura em que tinha de fazer o trabalho de campo e recolher os dados, eu estava numa escola nova e iria ter um 1º ano de escolaridade. Contudo estava e estou convicta de que seria incapaz de separar o meu papel de professora do de investigadora. Como tal, não quis pôr o meu estudo em prática com a minha turma. Deparei-me então com outra dificuldade que consistia na falta de tempo; isto porque não podia faltar às minhas aulas para assistir a outras. Assim, recorri a colegas que já tivessem frequentado o Programa de Formação Contínua em Matemática, que fossem ter o 1º ano e que fossem leccionar de acordo com o novo Programa de Matemática, o qual prevê a utilização consistente e sistemática de materiais de suporte à contagem nas primeiras aprendizagens do número. O facto de escolher uma docente conhecida facilitava-me nas idas à escola, porque assim conseguia conciliar os meus horários com os dela. Isto porque, actualmente, o 1º ciclo do ensino básico tem em quase todas as escolas horário das 9 horas às 17 horas e 30 minutos, sendo que nós, professoras titulares, temos a turma a nosso cargo uma ou duas tardes completas por semana, consoante o agrupamento. É o actual Apoio ao Estudo. Assim entre o horário curricular, no qual consegui sair da minha escola com a colaboração de colegas minhas, e o horário das actividades extras curriculares (Apoio ao Estudo) da colega que escolhi, consegui ir cinco vezes à escola dela.

A Sofia é uma professora com idade superior a trinta anos e com dez anos de actividade docente, sempre com turma. Por pensar que as suas aulas, na área da Matemática, eram limitadas e pouco interessantes para os alunos, integrou por dois anos a formação do Programa de Formação Contínua em Matemática da Escola Superior de Educação de Lisboa, tendo-se inscrito posteriormente no mestrado em Educação Matemática na Educação Pré-Escolar e no 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico, sendo minha colega de turma.

Todas estas acções por parte de Sofia surgiram de forma natural, tendo em conta que esta é uma pessoa bastante interessada e empenhada, que investe bastante no dia-a-dia na sala de aula, de modo a ir cativando os alunos e assim os ir auxiliando a ultrapassar as suas dificuldades na aprendizagem e aumentar o seu prazer pela escola e por tudo o que esta significa.

## **Turma**

A turma era composta por 22 elementos, dos quais 7 eram raparigas e 15 eram rapazes, todos com 6 anos completos até ao dia 31 de Dezembro de 2009.

A turma caracterizava-se por ser bastante heterogénea, tanto ao nível das competências adquiridas no ensino pré-escolar, como nas suas atitudes do saber ser e saber estar, pois a maioria dos alunos sempre se revelou pouca adicta às regras estipuladas na sala de aula e na escola.

Os alunos eram oriundos de famílias inseridas num meio socioeconómico médio-baixo, dando estas, na sua maioria, pouca importância à vida escolar e académica dos seus educandos. Cerca de metade dos alunos beneficiava do apoio do S.A.S.E. e todos os alunos frequentavam as actividades de enriquecimento curricular. Após este período lectivo, alguns alunos frequentavam actividades desportivas dinamizadas nas instituições da freguesia. Em termos de competências funcionais, académicas e sociais, era preocupante a situação de cerca de metade da turma.

## **Alunos Seleccionados**

Uma vez que os alunos já tinham um trimestre de aulas, foi em conjunto com a professora titular de turma que decidi incidir a pesquisa em apenas seis alunos, de modo a melhor observar a influência da utilização dos materiais estruturados no desenvolvimento do sentido de número.

Optei, em termos da amostra do estudo, por ter pares com alunos que estivessem ao mesmo nível e de três níveis bastantes heterogéneos de aproveitamento, para, posteriormente, entender o papel dos materiais utilizados na aprendizagem de cada um destes pares. A formação dos pares de alunos teve como critérios, a homogeneidade de nível de aprendizagem em Matemática em cada par de alunos, e a heterogeneidade desse mesmo nível entre os pares. Assim, a Sofia indicou três pares de alunos, de acordo com os critérios atrás enunciados e com o seu conhecimento da turma: um par de alunos com desempenho fraco, revelando imaturidade, relativamente à maioria da turma (Santiago e Ivo), um par de alunos com desempenho médio (David e Bela) e um par de alunos com bom desempenho a Matemática (Gil e Márcio).

Passo então a caracterizar cada par, de acordo com o que a professora Sofia mencionou. O Santiago e o Ivo foram alunos que no final do 1º período revelaram algumas dificuldades de cálculo de adições e subtrações, assim como na resolução de problemas, por vezes, devido a muita falta de concentração. Precisavam de desenvolver o sentido de número e os seus raciocínios lógico-matemático. O David e a Bela são alunos que adquiriram as competências estipuladas, precisando contudo de desenvolver mais o seu sentido de número para assim melhorarem o raciocínio lógico-matemático e resolução de problemas. Por fim, o Gil e o Márcio são alunos que nesta área demonstraram imenso interesse e empenho e tinham vindo a realizar um trabalho muito bom.

## Ética

Por questões éticas, todos os nomes dos intervenientes no estudo são fictícios de modo a respeitar a sua identidade, garantindo o respectivo anonimato. Foi, também, solicitada a autorização, por escrito, dos encarregados de educação de todos os alunos da turma (anexo 1), para que se efectuasse a recolha de dados, tendo os mesmos sido informados dos objectivos do estudo e processos metodológicos. Todos eles assinaram e concordaram. Foi, ainda, pedida autorização aos encarregados de educação dos alunos seleccionados para que os mesmos participassem na sessão dedicada à moldura do 10, no dia 16 de Abril, após o horário curricular, nas actividades extra-curriculares. Essa autorização foi concedida por todos os encarregados de educação.

## CAPÍTULO IV

### APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

#### 1.ª Tarefa - Colar de Contas (e recta numérica)

Parte desta primeira tarefa foi realizada na sala de aula com a turma inteira. Contudo, os alunos escolhidos (sem o saberem) estavam colocados lado a lado (pares) e estrategicamente de modo a que uma das duas câmaras conseguisse filmar o que eles iam fazendo.

Nesta primeira ida à sala de aula, apesar de a investigação incidir em três pares de alunos, a tarefa foi entregue a todos os alunos e a minha observação recaiu, além dos seis alunos, também no grupo turma. Contudo, devido à dificuldade de realização da tarefa com toda a turma, a mesma não foi concluída, tendo sido apenas realizada até às 15h:30m (horário curricular) a 1ª parte do trabalho, referente à localização dos números no colar de contas e respectivo registo.

Relativamente, à segunda e terceira partes da tarefa, foram realizadas no tempo das actividades extra curriculares, apenas com os três pares de alunos. Nessa altura, a Sofia optou por realizar o trabalho em conjunto de modo a que o par Ivo/Santiago entendesse o que era pedido. Como tal, nestas duas partes da tarefa, optei por apresentar a descrição da actividade dos alunos sem a estruturar por pares.

A professora Sofia, tal como referi anteriormente, trabalhava desde o início do ano de acordo com o novo Programa de Matemática e, como tal, os alunos conheciam os materiais estruturados. Assim, aquando da minha ida à sala da Sofia, no dia 11 de Março, os alunos dela tinham já realizado trabalhos com o colar de contas, numa aula anterior. No entanto, tratou-se de uma manipulação limitada, uma vez que existia apenas um único colar de contas na sala de aula. Esta foi a primeira aula em que foi disponibilizado um colar de contas por cada par de alunos.

É importante referir que a Sofia tinha, entre outros materiais, uma sequência numérica de 1 a 100, na sala de aula, à qual os alunos recorriam quando possuíam alguma dúvida.

Para o início da tarefa, a Sofia mostrou à turma, primeiramente, um colar de vinte contas azuis e rosas, agrupadas em grupos de cinco. Posteriormente, distribuiu um colar de contas a cada par de alunos assim como molas, para que cada um pudesse mexer no material.

Na aula anterior, a Sofia utilizou as molas com os seus alunos para marcar os números de referência.

### **Primeiras Reacções**

Autonomamente e sem saberem ainda o que era para ser feito, os pares do Gil/Márcio e da Bela/David colocaram logo as molas a separar os grupos de cinco em cinco, ficando o colar com as molas a marcar os números cinco, dez, quinze e vinte. Talvez a sua acção fosse guiada pelo facto de terem visto a professora a fazer o mesmo na aula anterior.

A professora questionou a turma sobre o número total de contas que o fio tinha e os dois pares responderam logo vinte, pelo que a Sofia lhes pediu para eles explicarem aos colegas como pensaram. A Bela diz que pensou cinco, mais cinco, mais cinco, mais cinco. Por isso é que colocou assim as molas a separar os grupos de cinco.

Nesta altura, a professora apontou para o colar de contas do Gil/Márcio e perguntou-lhes se o colar de contas que estava preso no quadro (sem molas) também teria vinte contas. Ao que eles responderam que sim. Vejamos o extracto imediatamente a seguir:

Sofia - (*pegando no colar de contas do Gil/Márcio*) Quando puseste aqui a mola estavas a marcar que número?

Gil - O 5... ah, pus as molas para marcar os grupos.

Sofia - Grupos de quanto?

Gil - Grupos de 5 em 5.

Sofia - Assim, neste colar, é muito fácil percebermos os grupos de 5, porquê?

Gil - Porque estão pintadas de cores diferentes.

Sofia - Pintadas como?

Márcio - 5 rosas, 5 azuis, 5 rosas e 5 azuis.

Como vemos, existe neste diálogo entre a professora e o Gil uma clara explicitação da potencialidade da alternância das cores para marcar a estruturação dos números até 20 em grupos de 5.

Quanto ao par Ivo/Santiago, este limitou-se a brincar com o colar de contas e a 'lutar' pela posse do mesmo assim como das molas.

Esta tarefa (anexo 2) dividiu-se em três partes:

1ª Parte - localização no colar de contas de números de referência e números próximos (5, 10, 15, 20, 4, 9, 14, 19, 6, 11, 16, 7, 12 e 17) e respectivo registo escrito no colar de contas representado no papel;

2ª Parte - localização no colar de contas e representação na linha numérica dos números de referência e números próximos (5, 10, 15, 20, 4, 6, 9 e 11);

3ª Parte - posicionamento na linha numérica de números próximos dos números de referência (12, 16, 19, 8, 14 e 17).

### 1.ª Parte

Para a realização da primeira parte da tarefa, a Sofia optou por iniciar o trabalho com a turma, de forma geral, explicando o que fazer ao grupo-turma.

Foi com facilidade que a turma, no geral, localizou no colar de contas os números cinco, dez, quinze e vinte. Os alunos da turma, na sua grande maioria, sabiam, que cada grupo de cor tinha cinco contas e, como tal, souberam localizar com facilidade no colar de contas e, posteriormente, na folha de registo o lugar correspondente aos números cinco, dez, quinze e vinte, ou seja, aos números de referência na estruturação dos números em grupos de cinco.

O par Ivo/Santiago manifestou dificuldades no registo, tendo sido necessária a ajuda da Sofia. Contudo, mesmo auxiliados, os alunos contaram sempre desde o início (um) e de um em um.

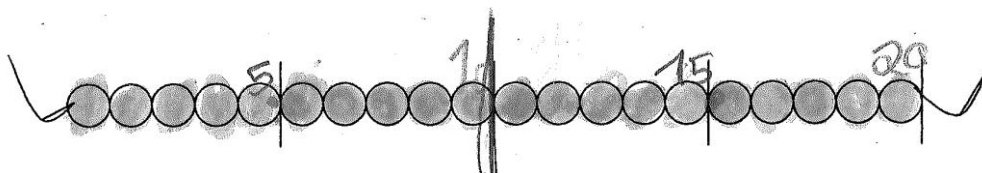


Figura 8. Localização, no colar de contas representado no papel, dos números 5, 10, 15 e 20 (par Ivo/Santiago)

Vejamos como fizeram os alunos a localização dos números quatro, nove, catorze e dezanove.

Par Bela/David - O David disse logo: “É fácil, é andar sempre um para trás!”.

Par Ivo/Santiago - O Ivo e o Santiago só oralmente, recorrendo ao colar de contas e olhando para os colegas, é que conseguiram acompanhar o raciocínio da turma, porque quando iniciaram o registo na folha, iam voltar a marcar os quatros primeiros números pedidos (5, 10, 15 e 20). Após terem sido alertados é que corrigiram.

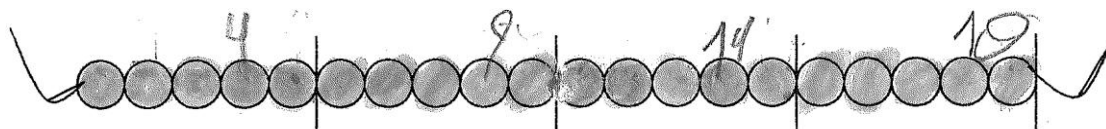


Figura 9. Localização, no colar de contas representado no papel, dos números 4, 9, 14 e 19 (par Ivo/Santiago)

Par Gil/Márcio - Este par realizou a tarefa simultaneamente ao par Bela/David. Respondiam rapidamente às questões colocadas pela Sofia e quando esta questionou “Então como chego ao número 9?”, o Gil concordou com a resposta do colega David, “é andar sempre um para trás”. Assim quando a Sofia lhe interrogou sobre o catorze, ele de imediato respondeu que “Andamos da mola verde (*quinze*) um para trás.”.

Passo a apresentar, agora, o modo como se processou a localização dos números seis, onze e dezasseis feita pelos três pares de alunos.

Par Bela/David - A Bela e o David realizaram prontamente o solicitado. Eles sabiam que cada grupo de cor tinha cinco contas e revelaram ter entendido que bastaria acrescentar uma conta para chegar aos números pretendidos.

Par Ivo/Santiago - Estes dois alunos revelaram saber que cada grupo de cor de contas tem cinco, só que quando lhes foi pedido para indicar o número, eles contaram um a um, voltando quase sempre ao um. Nestes dois alunos, é notório que ainda não dominam a contagem a partir de um certo número. Vejamos um extracto ilustrativo desta parte da tarefa:

*A Sofia pede ao Ivo e ao Santiago para explicarem onde é o 6.*

*Ivo - É antes do 4.*

*Santiago - É antes do 5.*

*Sofia - Então digo 6 e só depois 5? 1, 2, 3, 4, 6...*

*Os dois alunos riem.*

*Ivo - É depois do 5.*

*Sofia - Então se o 5 é quando acabam as azuis, onde é o 6?*

*O Ivo aponta para o sítio certo, no colar de contas.*

Sofia - Então encontrem o número 11.  
*Ambos começam por apontar contas que não correspondem ao 11, sem se preocuparem se estavam a fazer o correcto ou não.*  
Sofia - Pensem lá!  
*O Santiago aponta para o sítio certo.*  
Sofia - Está certo, mas como chegaste lá?  
Santiago - Pensei.  
Sofia - Como?  
Santiago - Pensei no 9..  
Sofia - Mas pensa lá. Pensem lá os dois.  
Santiago - Ah, já sei! O 11 é depois do 10. O 11 está à frente do 10.  
Sofia - Certo, agora vejam lá o 16.  
Ivo - O 16 está à frente do 15.

Eles sabiam que cada grupo de cor tinha 5 bolas e conseguiam relacionar os números pedidos com os números de referência ("O 11 está à frente do 10"; "O 16 está à frente do 15"), mas quando lhes foi pedido para localizar os números, registando na folha de registo, eles necessitaram de contar de um em um para efectuar o registo.

Par Gil/Márcio - O par Gil/Márcio facilmente resolveu o pedido, sendo que o Gil disse: "Tenho cinco contas rosas, preciso de mais uma ... cinco mais um ... quinze mais um é dezasseis!".

Vejamos como foi o desempenho dos pares na localização dos números sete, doze e dezassete.

Par David/Bela - O David conseguiu dizer, de modo imediato, que cinco mais cinco são dez; no entanto, depois contou de um em um até quinze e disse então: "Para ter dezassete faltam dois."

Par Ivo/Santiago - O Ivo continuava a só conseguir através das contagens de um em um mas nem sempre teve necessidade de começar no número 1. Por exemplo, para localizar o número 17, contou de um em um mas começou a contagem a partir do número 12, acabado de localizar. Evidenciou não tirar partido da estruturação subjacente ao colar.

Par Gil/Márcio - O Márcio disse logo que sete é cinco mais dois, contudo nos outros números teve um pouco mais de dificuldade, demonstrando alguma confusão. Como tal, tentei auxiliá-lo, utilizando o colar de contas e através de contagens de cinco em cinco, conseguiu rever que cinco mais cinco são dez, mais cinco são

quinze e depois disse logo: “Eu sei que dez mais dois são doze e que quinze mais dois são dezassete”.

O Gil já possui bastante à vontade na localização dos números no colar de contas e com facilidade diz que cinco mais cinco é dez e com mais dois dá doze, estabelecendo, assim, relações numéricas. Ele e o seu par interiorizaram muito bem as contagens realizadas com os fios de contas e contam “cinco, dez, quinze, o dezassete está mais perto do quinze, por isso é só pôr mais dois”.

As partes seguintes da tarefa foram já realizadas de forma diferente, devido ao barulho e distração que havia na sala de aula. Assim, apenas os três pares realizaram a tarefa até ao final, sendo que eu apenas me conseguia focar num par de cada vez. Pelo mesmo motivo, a filmagem não resultou muito bem nesta fase.

## 2.ª Parte

Mais uma vez, os números cinco, dez, quinze e vinte foram facilmente localizados e representados na recta numérica, pois, para os alunos, com o colar de contas ao pé, era fácil os alunos identificarem, na folha de registo, a localização dos números em questão, inclusive porque a linha se encontrava dividida em quatro partes iguais.

De seguida, passaram aos números quatro, seis, nove e onze. Relativamente ao número quatro, no geral, os alunos resolveram fazendo cinco menos um e representavam na linha um pouco antes do cinco. Já para o número seis, fizeram o oposto, ou seja, cinco mais um, representando-o um pouco depois.

No número nove, através da observação dos diálogos entre os três pares, foram identificadas soluções e raciocínios diferentes. Alguns alunos optaram por fazer dez menos um, outros por fazer cinco mais quatro e houve ainda quem fizesse cinco mais cinco, menos um.

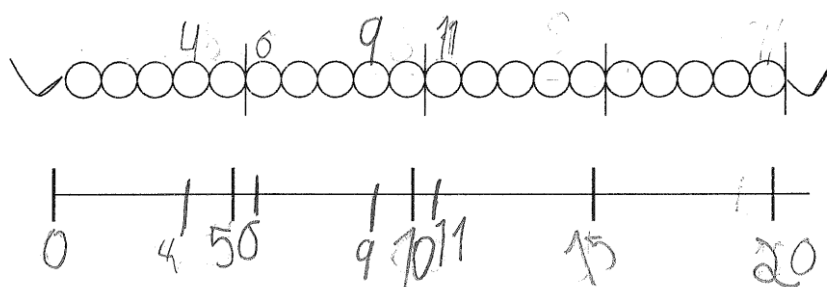


Figura 10. Localização, no colar de contas e na linha numérica, dos números 4, 6, 9 e 11 (par Gil/Márcio)

Conforme se pode ver na figura 10, o par Gil/Márcio teve necessidade de registar primeiro, na linha numérica, a localização dos números de referência, 0, 5, 10 e 15, para conseguir localizar os números pedidos, o que não se verificou no modelo representativo do colar de contas.

O par Ivo/Santiago continuou a contar sempre de um em um, utilizando as localizações anteriores, isto é, quando estavam no número quatro para chegar ao número seis, fizeram quatro mais um, mais um. Nesta situação, este par revela assim já conseguir contar a partir de um dado número, contudo é ainda evidente que não interiorizaram a estruturação dos números em grupos de cinco, que era o objectivo que se visava alcançar com a utilização deste material estruturado.

Obviamente que para resolver estas questões, foi necessário discutir na turma outras localizações próximas dos números de referência.

### **3ª Parte**

Através da observação directa e, tendo em conta a análise do diálogo que ia sendo realizado, foi evidente que os pares em estudo (exceptuando o par Ivo/Santiago que nesta altura já se revelava bastante exausto e, como tal, tinha desistido), para chegarem à posição do número doze, usaram uma diversidade de relações numéricas: dez mais dois, quinze menos três, cinco mais cinco mais dois, cinco mais cinco mais cinco menos três. Para o número dezasseis, utilizaram quinze mais um, dez mais cinco mais um, cinco mais cinco mais cinco mais um, vinte menos cinco mais um, vinte menos quatro. Para o dezanove fizeram vinte menos um, quinze mais quatro, dez mais cinco mais quatro ou cinco mais cinco mais cinco mais quatro.

Em relação ao posicionamento dos números apresentados, os alunos conseguiram efectuar-lo sempre a partir dos números de referência que se encontravam mais próximos. Foi notório que os alunos tiveram sempre necessidade de escrever na linha numérica esses mesmos números de referência e por vezes até os números vizinhos, para só depois chegar aos números pedidos.

Os alunos também tiveram necessidade de recorrer (olhando para lá à medida que iam pensando), por vezes, à sequência numérica de um a cem existente na sala de aula.

Havia ainda três números para serem posicionados na linha numérica vazia, o oito, o catorze e o dezassete. Os alunos ficaram com dificuldades perante a linha numérica vazia. Segue-se um extracto ilustrativo:

Bela - Onde é o dez?  
Gil - Fica no meio?!?  
Márcio - E o cinco?  
Gil - Esse é entre o zero e o dez...  
Sofia - Aqui? (*aponta para perto do zero*)  
David - Não! No meio do zero e dez!  
Sofia - E o quinze?  
Gil - Fica no meio do dez e do vinte.

Os alunos sabiam que o número que iniciava a linha era o zero e que o que terminava era o vinte, mas, ao início, tiveram dificuldade em posicionar os outros números de referência porque não conseguiam dividir a linha vazia identificando os números facilitadores de ordenação. No entanto, com o auxílio da Sofia no desenho dos traços na recta de forma a localizar os números, eles ultrapassaram esta dificuldade inicial. Os alunos começaram por marcar na recta os números de referência correspondentes às metades pois tinham a ideia, embora incerta, de que estariam ao meio, o 10 como metade de 20 ("Fica no meio?!?"), e o 5 como metade de 10 ("Esse é entre o zero e o dez..."). Depois, marcaram o 15 entre o 10 e o 20 ("Fica no meio do dez e do vinte."). Seguidamente, passaram ao posicionamento dos números próximos 8, 14 e 17. Marcaram os números onde lhes parecia que deveriam posicionar-se, sem qualquer preocupação de medição ou de divisão rigorosa em partes precisamente iguais. Conforme se pode observar na figura 11, o 14 foi marcado muito perto do 15 enquanto o 8 e o 17 estão sensivelmente ao meio entre o 5 e o 10, e o 15 e o 20, respectivamente.

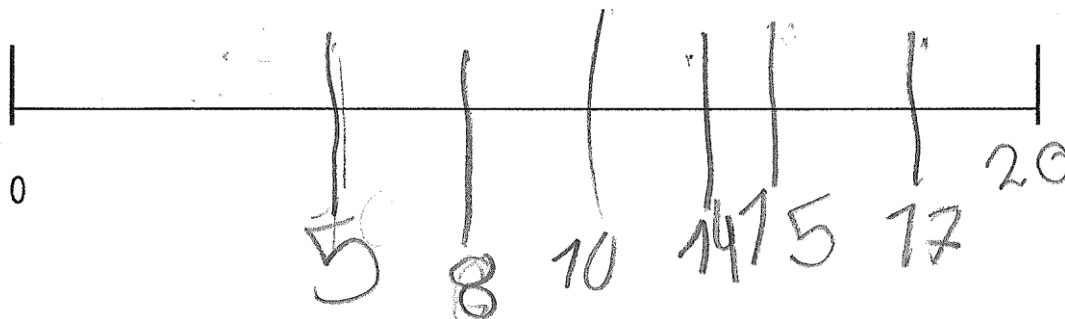


Figura 11. Posicionamento, na linha numérica vazia, dos números 8, 14 e 17 (par David/Bela)

## Síntese

Os pares David/Bela e Gil/Márcio revelaram um nível de desempenho semelhante em toda a tarefa. Conseguiram concretizar o que era solicitado, fazendo as localizações e posicionamentos dos números, através da respectiva estruturação com grupos de 5 ou de 10, e tirando partido da alternância de cores presente no colar de contas. Justificaram o que faziam, recorrendo à expressão dos vários números enquanto somas ou diferenças envolvendo grupos de cinco ou de dez, dando assim visibilidade à sua estrutura (por exemplo, sete é cinco mais dois, dez mais dois são doze, nove é dez menos um, nove é cinco mais quatro).

Como se pode verificar pela descrição apresentada atrás, os alunos conseguiram concretizar o trabalho na linha numérica desde que esta apresentasse os traços divisórios, correspondentes aos números de referência, marcados pela alternância de cores no colar de contas (com os dois modelos colocados paralelamente), embora tivessem sentido necessidade de recorrer à sequência numérica de 1 a 100, existente na sala de aula. Onde se notou francas dificuldades na concretização da proposta foi na parte em que a recta se apresentou aos alunos completamente vazia. Apesar da desorientação inicial perante o esvaziamento da recta, os alunos evidenciaram ter noção do posicionamento dos números de referência e números próximos, pelas relações entre os mesmos.

Ao longo de toda a tarefa, foi notório que estes dois pares de alunos, através da interiorização dos números de referência e dos números próximos, conseguiam, com facilidade, explicar como chegavam aos resultados pedidos. O colar de contas foi bem apropriado por estes alunos, no que respeita à sua estruturação com grupos de cinco, tendo a mesma depois sido transposta para um outro modelo, a linha numérica.

O par Ivo/Santiago manifestou um nível mais baixo de desempenho, tendendo a efectuar contagens de um em um, começando no número um. Por vezes, mostram ser capazes de contar a partir de um dado número, quando conseguem contar a partir dos números acabados de localizar. Apesar de saberem que cada grupo de cor do colar tem cinco contas, não tiram partido deste tipo de estruturação nem para localizar os números de referência nem para localizar os números próximos. Quando contam a partir dos números acabados de localizar, estes não coincidiram com os múltiplos de 5, marcados pelas cores diferentes; foi o caso do 4 ou do 12.

Foi, no entanto, necessária a presença constante da Sofia, assim como a sua ajuda, porque os dois alunos sozinhos tendiam a esquecer a tarefa e a começarem a brincar com o material.

## **2.ª Tarefa - Moldura do 10**

A tarefa ‘Moldura do 10’ foi realizada no dia 16 de Abril, num contexto diferente do da primeira tarefa. Após a primeira sessão, em reunião com a professora Sofia a fim de reflectir acerca desta sessão, foi opinião comum que, dentro da sala de aula, com a turma toda, perdeu-se bastante informação útil. Isto porque é uma turma bastante heterogénea em termos de aproveitamento/aprendizagem e comportamento. São alunos que não conseguem, ainda, estar na sala de aula de acordo com as regras de trabalho adequadas. Assim, pensámos, em conjunto, que o ideal seria realizar esta segunda sessão, numa sala, apenas com os três pares de alunos escolhidos. Como tal, esta sessão ocorreu após o horário curricular, nas actividades extra-curriculares.

Contudo, quando cheguei à escola no dia estipulado, fui confrontada com o facto de um dos pares estar a faltar, a Bela e o David. No entanto, devido à falta de disponibilidade dos alunos, da Sofia e minha de agendar outro dia, a sessão realizou-se na mesma.

Devido a esta tarefa ter sido realizada apenas com quatro alunos, o relato que se segue é feito sobre os dois pares simultaneamente relativamente às reacções que foram tendo, à medida que os cartões iam saindo.

Esta tarefa foi conduzida pela Sofia. Cada um dos alunos tinha uma folha de registo individual (anexo 3), sendo que o trabalho era realizado na mesma a pares, ou seja, toda a discussão para chegarem à resposta era realizada entre ambos.

A sessão teve início com a apresentação deste material, por parte da Sofia. Os alunos já tinham, em aulas anteriores, trabalhado a moldura do 10 em papel, ou seja, em fichas já elaboradas. A Sofia também mostrou que com 2 molduras do 10 se pode trabalhar até ao número 20. De seguida, explicou a folha de registo de modo a que eles entendessem como a tinham de preencher. A Sofia optou por ir

seleccionando as molduras que tirava, para que os números saíssem por ordem crescente.

A Sofia tirou a primeira moldura que estava vazia e perguntou quantas bolas tinham de se colocar para ficar com 10. O Ivo respondeu de forma pronta 10. Mas ao escrever na folha de registo, escreveu o número um.

Quando questionou os alunos sobre a expressão numérica a utilizar de modo a ter 10 com aquela moldura, o Gil disse que tinha de ser  $0 + 10$ , porque "se tenho 0, tenho de juntar 10 para ter 10". O par Ivo/Santiago teve dificuldade em escrever a expressão numérica correcta e na coluna certa.

Houve alguma confusão na folha de registo em entender que na coluna referente à operação de adição, tinha de se fazer o número de bolas mais o número de espaços vazios e na coluna da subtracção era o total de espaços (10) menos o número de bolas do cartão. Após esclarecida esta questão, prosseguiu-se a tarefa.

A Sofia tirou a moldura com 1 bola. E o Gil disse logo que faltavam 9 e conseguiu fazer logo a expressão  $1 + 9 = 10$  sem auxílio. Nesta altura, a Sofia questionou como seria a expressão ao contrário, ou seja, se fosse de subtrair, e acentuou o facto de os alunos terem de pensar na subtracção como a operação inversa da adição. O Márcio disse que "Era  $10 - 1$  bola... sobram 9 espaços". Nesta altura, o par Santiago/Ivo demonstrou que continuava sem entender e limitava-se a olhar para a folha dos colegas e a copiar os resultados.

A Sofia colocou, então, na mesa, a moldura preenchida com duas bolas. O par Gil/Márcio lidou com esta tarefa com facilidade, pois o Márcio afirmou logo que é "8 para chegar ao 10! (...) Pensei que se tenho 2 faltam 8 para chegar ao 10.  $2 + 8$  é 10". E quando a professora lhe perguntou "E se fizéssemos ao contrário? A de subtrair?", ele, sem dificuldades, respondeu " $10 - 2$  é 8".

Na moldura seguinte, preenchida com 3 bolas, a Sofia direccionou a questão para o par Ivo/Santiago, que até aqui se tinham limitado a copiar os resultados, sem entenderem. Para este par, a Sofia, desde o início, foi sempre apontando para a moldura quando os questionava, de modo a que os alunos entendessem o pedido. O Santiago conseguiu responder, de imediato, que a moldura tem três bolas, evidenciando assim ter feito *subitizing*, mas quando questionado acerca das que faltam para ter dez, contou de um em um os espaços em branco. Contudo, quando explicou como pensou, respondeu que contou "5 (*aponta para 2 espaços vazios na*

mesma linha das três bolas e 3 de outro, na linha de baixo vazia) espaços e vi que ainda havia mais 2, por isso dá 7”.

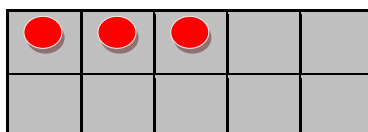


Figura 12. Moldura com três pintas

O Santiago revela estar, ainda, ao nível da contagem unitária. Contudo, quando é levado a explicitar o seu pensamento, revela dominar a estrutura dos números com grupos de cinco (o 7 como  $5+2$ ). Demonstra estar em processo de construção do processo de estruturação numérica, pelo que a utilização do material, juntamente com a explicação oral, favoreceu essa mesma construção. Ou seja, ao reflectir no que está a fazer, o aluno toma consciência e abandona a estratégia de contagem para revelar a construção da estrutura do 5. Nesta fase de desenvolvimento, o aluno recorre a duas estratégias, primeiro a uma mais básica, correspondendo ao nível de cálculo por contagem, e depois a uma outra mais sofisticada, correspondendo ao cálculo por estruturação (Treffers, 2001b). Curiosamente, o Santiago, ao ver sete como cinco mais dois, não visualizou a linha vazia como correspondendo a cinco, já que o facto de ter apontado para 2 espaços numa linha e para 3 espaços vazios noutra, enquanto dizia "5", sugere que, provavelmente, o aluno decompôs mentalmente o cinco em dois e três. Assim, o Santiago está a fazer uma percepção da moldura baseada no emparelhamento: apontou para os dois espaços vazios que completavam a linha onde se encontravam as três pintas e seguidamente para os três espaços que emparelham com as três pintas; e dessa soma 5, viu que ainda restavam dois espaços vazios, emparelhados com os dois vazios da linha das pintas.

Perante a resposta dada por Santiago, a Sofia perguntou aos alunos presentes se algum deles conseguia ver o cinco de outra maneira, e o Ivo respondeu que vê "assim (aponta apenas para um lado)". Com esta resposta, a Sofia realçou o número cinco como número de referência dizendo que "esta moldura do 10 está dividida, tem 5 espaços em cima e 5 em baixo". Enquanto a Sofia referia este facto, o par Gil/Márcio já tinha escrito correctamente a expressão numérica da subtracção e estavam ambos a chegar a uma conclusão. O Márcio disse que "Isto está tudo seguido", mas a Sofia sem dizer mais nada, interrogou este par sobre o porquê desta afirmação. O Márcio disse que os números que a Sofia tinha tirado nas

molduras "são os amigos do 10". Esta expressão já tinha sido abordada na sala de aula, anteriormente. Para os alunos desta turma, esta expressão significava que os amigos do 10 são os números que somados dão dez (por exemplo, nove e um, porque nove mais um é igual a dez).

Assim, após o comentário de Márcio, a Sofia concordou com ele e mencionou o facto de que cada vez que tem mais uma pinta, tem menos 1 espaço. E recapitulou o que fizeram até ali, dizendo "se temos 1 bola faltam 9 espaços, se temos 2 bolas faltam 8 espaços, se temos 3 bolas faltam 7 espaços, se temos 4 bolas,...". O Santiago disse que parecia uma 'escada', e respondeu que no cartão actual, faltavam cinco pintas para o dez. Mas logo corrigiu o que disse, dizendo que era seis, não conseguindo, no entanto, passar para o papel. Mais uma vez, o Márcio disse de imediato a expressão numérica da subtracção "Então vai ser  $10 - 4 = 6$ ".

Este par, Gil/Márcio, estava a realizar com muita facilidade a tarefa. Também foi notando, cada vez mais, nas regularidades à medida que saía outro cartão. Segue-se o extracto dos alunos com a professora quando esta colocou na mesa as molduras com cinco e seis:

Márcio - É a mesma coisa.  $5 + 5$  é 10.  $10 - 5$  é 5.

Santiago - Então agora vem o cartão do 6.

Márcio - Agora vai ser contrário das outras. Começa a descer.

Sofia - Pois é. Porquê? Tem mais pintinhas ou espaços em branco?

Márcio - Mais pintinhas. Agora esta aqui (*coluna das pintas*) começa a subir e esta (*coluna do que falta*) começa a descer.

Sofia - Só agora notas isso?

Márcio - Não, desde o início.

O Márcio entendeu a regularidade crescente dos cartões, antecipando o cartão que a Sofia ia colocar, o aluno estava com bastante facilidade na resolução da tarefa, pois sozinho ia escrevendo os resultados, nomeadamente as expressões numéricas das adições e subtracções. O Márcio escreveu sozinho, ' $6 + 4$ ' e na coluna seguinte ' $10 - 6$ '. O aluno entendeu a adição e a subtracção inversas, assim como a propriedade comutativa e o sentido de completar na subtracção. Assim, este material serviu de suporte à relação parte-todo bem como à compreensão da relação inversa entre adição e subtracção.

Já o par Ivo/Santiago manteve a confusão relativamente à coluna da subtracção, pelo que a Sofia teve de repetir a explicação e necessitou mesmo de escrever, na coluna respectiva, que era sempre 10 menos algo.

Quando a Sofia tirou o cartão seguinte, com 7 pintas, o Santiago olhou para o mesmo e conseguiu escrever na coluna da adição que era '7 + 3', demonstrando que o fez prontamente devido a saber a sequência numérica e, tal como os colegas, se ter apercebido que as respostas estavam a ser como uma 'escada'. A Sofia teve de o auxiliar, dizendo que era dez menos algo, ao mesmo tempo que ia apontando para as colunas, para que ele conseguisse escrever a resposta correcta referente à subtracção.

A dificuldade referente à coluna da subtracção foi sentida pelos dois pares. O sentido inerente à subtracção, neste caso, era o de completar, pelo que foi necessária várias vezes a intervenção da Sofia para que os alunos não fugissem a este sentido, pois para eles era indiferente atender às pintas ou ao espaço vazio (por exemplo, num cartão com 6 pintas, tanto poderiam registar 10-6 como 10-4).

O par Gil/Márcio estava a avançar bastante sem esperar que a Sofia retirasse os cartões das molduras. Este facto relaciona-se com a opção da Sofia em seguir uma regularidade que levou à sua identificação e aplicação por parte dos alunos, sem que fosse necessário pensar no número de espaços vazios nas molduras que se sucediam.

A Sofia decidiu debruçar-se mais sobre o par Ivo/Santiago para o ajudar a efectuar os registos na folha de papel. Antes de continuar, teve de lhe voltar a explicar que a segunda coluna era as pintas que cada cartão tinha e a terceira coluna era o número de espaços em branco. Foi necessário repetir tudo várias vezes para os alunos preencherem bem a folha de registo.

O par Gil/Márcio chegou sozinho, e quase sem necessitar de olhar para as molduras, à linha referente à moldura com dez pintas. Nesta altura, a Sofia decidiu que seria benéfico os dois pares fazerem a moldura ao mesmo tempo, para pensarem em conjunto. Assim, os quatro alunos chegam ao resultado.

Apresento, em seguida, o diálogo entre Sofia e alunos:

Gil - Dez pintas, não falta nada.

Márcio - Dez mais zero dá dez.

Sofia - E a expressão de menos?

Ivo - Dez menos dez dá zero.

Sofia - Sim. Faltam zero espaços para ser preenchidos.

Santiago - Esta é fácil. Tem dez pintas.

Sofia - É! Tem dez. E a conta?

Santiago - Dez mais zero é zero.

Sofia - É zero???

Santiago - Ai! Eu pensei assim... dez mais dez é zero.

Sofia - Pensaste assim...?

Sofia - Tu tens uma moldura cheia de pintinhas. Quantas tens?

Santiago - Dez.

Sofia - Quantas faltam para chegar ao dez?

Santiago - Zero.

Sofia - Zero... Porque já está tudo preenchido, não é?!? (...)

*Santiago acena que sim com pouca convicção.*

Nas respostas e atitudes do Santiago, mesmo após repetir a visualização das filmagens, não é perceptível se o aluno se apercebe que as contas dão sempre 10, nem que sentido operatório ele utiliza ou que valor dá ao 0. Ele tem presente que a moldura dá 10, quando toda cheia e sem espaços vazios. Contudo, revela dificuldade em traduzir em adição espaços cheios ou vazios.

A Sofia percebeu que o Santiago, assim como o seu par, o Ivo, mantinham-se confusos e meio atrapalhados no raciocínio, pelo que, antes de avançar para as molduras seguintes, relativas ao número vinte, optou por, mais uma vez, recapitular o trabalho realizado, de modo a sistematizar o que foi feito. E assim, em conjunto revêem o trabalho feito:

Gil - Aqui na coluna das bolinhas está sempre a subir... a crescer.

Sofia - Os números estão por ordem crescente ou decrescente?

Gil - Decrescente.

Sofia - Vamos lá ler todos os números. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10!

Então agora o que acontece de engraçado na outra coluna?

Ivo - Eu sei!

Márcio - Os números estão por ordem decrescente.

Sofia - Estão Santiago?

Santiago - Sim.

Sofia - Porquê?

Santiago - Estão ao contrário.

Sofia - Como assim? Ivo?

Ivo - Estão 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 10.

Sofia - 10? Não é dez aí. É zero. Entendes porquê?

Ivo - Porque estão ao contrário.

Sofia - Estão por ordem decrescente. Mas olha, se nesta linha tens 10 pintas...

Ivo - Ah! Dez mais zero... Sim.

Analisando o extracto transcrito atrás, vemos que a professora conduz a atenção dos alunos para a ordem crescente dos números numa coluna, correspondente ao aumento do número de pintas, e para a ordem decrescente na outra coluna devido à conseqüente redução de espaços em branco.

A Sofia questionou os alunos se já alguma vez tinham visto as contas que estão na coluna das adições. O Márcio disse logo que "são os amigos do 10". Após esta resposta, a Sofia tentou perceber se, para os alunos era ou não importante saber estas contas, ou seja, se o facto de trabalharem estas contas lhes facilitava ou não o cálculo. O Santiago interveio e disse que "o 3 é amigo do 7" e a Sofia questionou "Para dar o quê?", ao que ele disse imediatamente "10". Aqui o aluno dá evidência de saber que a soma de 3 com 7 dá 10. O Gil referiu que "é para sabermos quando dão 10. Por exemplo  $5+6$ , temos de pôr isso na cabeça". Então, a Sofia questionou os alunos acerca de quanto dá ' $5+6$ '.

Ivo -  $5+5$  é 10.

Gil - E  $5+6$  é 11 (*revela pensamento de compensação*).

Márcio -  $5 + 5$  é 10 e uma parte, um 5, leva mais um, por isso mete-se mais um e é 11.

Ambos os alunos evidenciam o seu entendimento da importância de dominar os 'amigos do 10' enquanto factos matemáticos que são mobilizados noutras adições por recurso à estratégia da compensação: Gil - "Por exemplo  $5+6$ , temos de pôr isso na cabeça"; "E  $5+6$  é 11"; Márcio explicita o funcionamento da estratégia de compensação " $5 + 5$  é 10 e uma parte, um 5, leva mais um, por isso mete-se mais um e é 11". Perante estas conclusões, a Sofia alertou para o facto de ser fundamental saber os amigos do dez, isto é, os números que somados dão dez, mas referiu também a importância de saber os números que dão quase dez, considerando que facilita o cálculo mental saber essas contas. E assim decidiu propor outro cálculo:

Sofia - Então e  $5+9$ , quanto é?

Márcio - É 14.

Sofia - Como fizeram?

Ivo - Contei.

Sofia - Contaste?

Márcio - Mas isso demora muito tempo. (...) Eu pensei. O 9 é antes do 10.

Sofia - Sim, o 9 é antes do 10. Mas como pensaste no  $5+4$ ?

O Márcio fica sem resposta.

A resposta do Márcio mais uma vez evidencia a importância que atribui à mobilização de factos matemáticos no cálculo mental, em desfavor da contagem unitária referida pelo Ivo ("Mas isso demora muito tempo"). O aluno provavelmente partiu de um facto básico ( $10+5=15$ ) e retirando 1 a 10, para obter 9, compensou a

soma, retirando também 1, e obtendo 14. O facto de o Márcio nada ter respondido no final pode dever-se à questão colocada pela professora "Mas como pensaste no 5+4?" não corresponder ao que efectivamente tinha pensado.

A Sofia decidiu passar então para a segunda parte da tarefa que consistia em trabalhar com duas molduras de modo a chegar ao número vinte. Alertou os alunos para o facto de o pensamento ser semelhante e que na linha onde estavam desenhadas as molduras estarem duas e não uma. Assim, estavam lá desenhadas duas molduras de dez a representar dez mais qualquer coisa, estando a primeira sempre preenchida. A Sofia manteve a sua estratégia de ir tirando os cartões de modo a ter números por ordem crescente.

No primeiro que tirou, o par Gil/Márcio disse logo que era onze, porque era dez mais um. Aquando da questão de quantos faltam para o vinte, este par teve necessidade de olhar para a moldura, respondendo de imediato, revelando assim ter feito o *subitizing* do 9. Assim, a moldura do 10 constituiu um suporte de apoio ao desenvolvimento da capacidade de *subitizing*.

O Ivo e o Santiago não estavam a entender, já revelavam cansaço e respondiam meio ao acaso. A Sofia teve de lhes explicar que tinham "dez, porque tem dez bolinhas completas (*aponta para uma moldura toda preenchida*) e uma bolinha aqui. Então (...) e quantas bolinhas nos faltam para termos vinte?" Este par, para saber quantas pintas faltavam, teve necessidade de contar os espaços em branco um a um, mostrando assim que ainda efectuavam uma contagem unitária.

Nas molduras respeitantes ao 11, o par Gil/Márcio não estava a conseguir chegar à expressão numérica de subtracção pretendida. Teve de ser a Sofia a explicar-lhes como seria. Após a explicação, eles entenderam que o raciocínio seria o mesmo; contudo, tinham de pensar no número vinte e não no dez.

Entretanto, o Santiago e o Ivo estavam completamente desconcentrados da tarefa em questão e limitavam-se a preencher as molduras, mas mal. Como o par Gil/Márcio estava a entender a tarefa proposta com muita facilidade, a Sofia pediu ao Márcio para lhes tentar explicar. A explicação do Márcio foi a seguinte: "Eu pinte uma moldura, e mais dois espaços de outra, dá 12. Aqui meto que falta 8 bolinhas para chegar ao 20". No entanto, esta explicação teve pouca repercussão no trabalho do par Santiago/Ivo e a Sofia teve de voltar a recapitular os números onze e doze com eles.

Quando saíram os números treze e catorze, a confusão e o cansaço deste par já era muita e enganavam-se em muita coisa. O Ivo não sabia escrever o número treze, escrevendo três. No número catorze, o Santiago disse catorze e escreveu dez. E depois, não conseguiu entender o que estava mal. Continuaram a contar os números de um em um, mostrando não possuir a estruturação dos números com grupos de 10. Nos números dezoito e dezanove, contaram um a um e responderam vinte, pelo que a Sofia interveio, alertando-os para esse facto. Eles voltaram a contar de um em um, respondendo dezanove.

Nesta altura, a Sofia questionou-os se não há outra forma de contar. O Ivo respondeu que "Nesta tenho 18 (*aponta para o anterior*), é mais 1. Dá 19". O aluno aqui evidencia que consegue dizer o número consecutivo ( $N+1$ ), contudo, depois escreve 18 outra vez.

O par Gil/Márcio realizou, autonomamente e sem quaisquer dificuldades, os outros números até ao 20, revelando apenas alguma dificuldade na expressão relativa à subtracção.

Após a conclusão da tarefa, a Sofia pediu aos alunos que escrevessem a sua opinião sobre a utilização das molduras do 10:

Gil - Este material é muito importante, porque nos ajuda a saber contas muito bem de cabeça, ajuda-nos a pensar mais rápido.

Márcio - Eu acho que é muito importante sabermos fazer estas contas de cabeça e saber logo os resultados.

Ivo - Eu gostei disto porque agora conto com mais facilidade.

Santiago - Este trabalho foi importante, porque ajuda-me a fazer as contas.

As respostas dos alunos evidenciam o diferente nível de aprendizagem em que se encontram: enquanto o Gil e o Márcio se referem ao contributo das molduras na aquisição de factos matemáticos ("saber logo os resultados"), o Ivo centra-se na contagem ("porque agora conto com mais facilidade"). A resposta do Santiago não explicita de que forma o material o ajuda a fazer as contas.

## Síntese

O par Gil/Márcio completou as folhas de registo, assumindo a regularidade da ordem dos cartões tirados pela professora, e evidenciando dominar as somas dos 'amigos do 10' como factos matemáticos, mobilizáveis noutros cálculos, por recurso

à compensação. Os seus registos anteciparam-se ao acto da Sofia de tirar os cartões com as molduras, que acompanhou o ritmo de trabalho do outro par, Ivo/Santiago. Tanto o Gil como o Márcio efectuaram sem dificuldades a transição da moldura do 10 para as molduras do 20, à excepção da coluna da subtracção, que foi preenchida facilmente na moldura do 10, mas com alguma dificuldade nas molduras do 20.

O par Ivo/Santiago revelou pouca autonomia na realização do seu trabalho, tendo sido necessários um grande acompanhamento e apoio da professora. Ambos os alunos continuaram a privilegiar a contagem de um em um, tirando pouco partido do material, no que respeita à emergência do *subitizing* que a sua utilização poderia suscitar. Os alunos fizeram o *subitizing* de números pequenos, como foi o caso do três, mas recorreram à contagem unitária de outros números maiores, como foi o caso do sete. No entanto, ao ser-lhes pedido para explicar, evidenciam o seu processo de construção da estruturação dos números, explicitando, por exemplo, o sete como a soma de cinco com dois. A transição da moldura do 10 para as molduras do 20 foi prematura para este par que revelou muitas dificuldades na concretização da segunda parte da tarefa.

O material contribuiu para que os alunos vissem a relação inversa entre adição e subtracção. Foi notória a necessidade que a Sofia teve de intervir várias vezes para que os alunos não fugissem ao sentido inerente à subtracção nesta tarefa, o de completar, pois os alunos mostraram que lhes era indiferente considerar o espaço das pintas ou o vazio, na coluna da subtracção.

### **3.ª Tarefa - Ábaco Horizontal**

A sessão com ábaco horizontal foi realizada a 21 de Maio de 2010, com a presença apenas dos três pares de alunos.

A Sofia tinha um só ábaco na sala de aula, que era usado algumas vezes, na tentativa de relacionar os variados números (até ao dez) com o próprio dez para explorar as adições. Para esta sessão, eu levei ábacos e, por conseguinte, cada par de alunos teve um ábaco horizontal à sua disposição para realizar a tarefa, além de uma folha de registo (anexo 4).

Esta tarefa dividiu-se em duas partes distintas, que se poderiam ter complementado. Trabalhou-se primeiramente 'Os quase iguais' e depois 'O dobro de ...'. Para cada uma, havia uma folha de registo e o trabalho a realizar foi distinto.

### 1.<sup>a</sup> Parte

A parte da tarefa 'Os quase iguais' tem como objectivo trabalhar a soma de dois números consecutivos. Para esta actividade, cada par tinha um conjunto de cartões até ao dez e um ábaco horizontal só com dois arames visíveis. Um dos alunos retirava um cartão com um número e representava-o num dos arames, o outro aluno retirava o cartão do número antecessor ou sucessor e representava-o no outro arame. Depois faziam a leitura das quantidades representadas nos arames e do seu total.

Esta tarefa foi realizada com os seis alunos, organizados em pares, pelo que o relato que se segue é feito sobre os três pares simultaneamente, atendendo também às suas intervenções individuais, devido a ter havido reacções conjuntas e comentários individuais.


A Sofia iniciou esta sessão relembrando este material, mostrando aos alunos os ábacos, evidenciando a diferença entre o ábaco vertical e o horizontal, dizendo "vamos trabalhar com os ábacos horizontais (...) qual é a posição do ábaco horizontal? (...) Horizontal é como quando estamos deitados". Explicou que iam "fazer cálculos com os números que são quase iguais". Informou os alunos do material que cada par iria ter à sua disposição. Em conjunto verificaram que apenas tinham os números de um a dez. Decidiu então exemplificar a tarefa com o Márcio. Este tirou o 4 e adicionaram-no ao seu sucessor, representando os respectivos números no ábaco. A Sofia tentou então dar ênfase à estratégia de compensação, partindo da relação do dobro, dizendo que "cinco mais cinco dá dez, como o cinco é mais um que o quatro é dez menos um, ou seja nove". Perante este exemplo em que os alunos pareceram entender, a Sofia pediu aos alunos para começarem a trabalhar a pares.

De seguida, vou apresentar algumas reacções e resultados dos pares, à medida que iam avançando na tarefa.

Par Bela/David - O David tirou o nove e representou-o na primeira fila, deslocando nove contas para a esquerda. A Bela tirou o cartão com o dez, e representou-o na segunda fila, deslocando dez contas na segunda fila. Na folha de registo escreveram nove mais dez, ao mesmo tempo que a Bela dizia que dava "dezanove, porque vinte menos um é dezanove", e escreveram no papel as expressões numéricas "9+10=19" e "10 + 10 = 20 - 1", explicitando o uso da estratégia da compensação. Neste registo realizado pelos alunos, o uso do sinal de igual possui o significado de 'dá', revelando também um encadeamento do raciocínio dos alunos.

N.º 1º cartão tirado: 9                      N.º do 2º cartão tirado: 10

Leitura / Representação



The image shows two handwritten mathematical equations. The first equation is  $9 + 10 = 19$  and the second is  $10 + 10 = 20 - 1$ . The equations are written in a simple, slightly slanted cursive style. The numbers are clearly legible, and the equals signs are centered between the terms.

Figura 13. A soma de 9 com 10 (par Bela/David)

A Bela e o David continuavam a fazer sem dúvidas. Até que confundiram um nove com um seis, o que além de não respeitar as condições estabelecidas na tarefa, os deixou confusos. Segue-se o extracto:

David - Ela tirou oito e eu seis. Oito mais seis é catorze.

Sofia - E como chegaram a isso?

Bela - Não é o seis, é o nove.

Sofia - Atenção, já temos aqui um problema. Bela, qual é o problema que temos?

Bela - Porque ele tem de escolher um número antes do oito. Ou depois.

*O David vira então o cartão do seis de modo a ficar nove.*

Nesta situação o David, efectivamente, tirou o número nove, mas colocou-o na mesa ao contrário, ficando assim o seis. Automaticamente, ele iniciou o cálculo mental dizendo oito mais dois é dez mais quatro é catorze, assumindo a soma de oito com seis, e não estava atento à colega, que deslocou nove, e não seis contas para a esquerda. Ficaram assim confusos, pois o David estava preso ao resultado que tinha pensado e a Bela não estava a concordar, pois tinha representado outro número, dando outro resultado. Após esclarecidos e após terem virado o número, ficando o nove, o par conseguiu entender-se.

Este par já tinha entendido como se processava a tarefa e estava a realizá-la com bastante facilidade.

A Bela e o David tiraram o seis e o sete. Representaram, de forma adequada, os dois números nas filas e a Bela disse logo que era treze. A Sofia perguntou como é que ela tinha visto que dava esse resultado, ao que a Bela respondeu: "Vi que sete mais seis são treze".

Sofia - E há outra maneira?

Bela - Sim, seis mais sete.

Sofia - Não, utilizando a compensação no ábaco. Quantos sobram em cima?

David - Ahhh... quatro.

O David deslocou, então, as quatro contas para a esquerda e na segunda fila, retirou quatro. Depois escreveram na folha outras expressões numéricas.

N.º 1º cartão tirado: 6                      N.º do 2º cartão tirado: 7

Leitura / Representação

$$6 + 6 + 1 = 13$$
$$7 + 7 - 1 = 13$$

Figura 14. A soma de 6 com 7 (par Bela/David)

Como se pode verificar pelo registo feito pelos alunos, este par usou a relação do dobro para calcular  $6+7$ , compensando a seguir. E tanto exprime a compensação feita a partir do dobro de 6 como do dobro de 7. Atendendo à fala da Bela, parece que para a aluna a soma de 6 com 7 constitui já um facto numérico básico - "Vi que sete mais seis são treze". Quando a professora perguntou se havia outra maneira visava que os alunos usassem a compensação no ábaco, com base no grupo de 10:  $6+7 = (6+4) + (7-4) = 10+3$ . No entanto, a essa pergunta, a Bela deu evidências do domínio da propriedade comutativa da adição - "Sim, seis mais sete". O David usou depois o ábaco conforme tinha sido sugerido pela professora. Mas tal acção devia ter significado pouco para os alunos uma vez que o seu registo escrito não a traduz mas sim a relação do dobro usada.

Par Ivo/Santiago - Estes alunos escolheram o oito e o nove. Após o Ivo representar o oito na primeira fila, o Santiago utilizou o procedimento sugerido pela professora, no que respeita ao modo de utilização do ábaco horizontal, pois disse, ao mesmo tempo que representava o nove, que ainda podia pôr duas contas em cima e retirar duas de baixo. A Sofia questionou-os então sobre o número total em cima, ao que eles responderam correctamente ser dez, e disseram que então iria ser dez mais sete. Contudo, começaram a contar um a um, revelando não dominarem ainda a soma de 10 com 7, enquanto facto básico. Nesta altura, a Sofia advertiu para o conjunto de 10 e para eles contarem a partir daí, mas estes dois alunos não conseguiram fazê-lo e iniciaram a contagem do um até ao dezassete, de um em um. Apesar de o seu procedimento se basear na compensação com referência ao dez, trata-se de um procedimento rotinizado enquanto modo possível de utilização do ábaco, sem qualquer implicação ao nível de progresso no cálculo mental, uma vez que os alunos ainda se encontram no nível de contagem de todos (NRC, 2009).

Seguidamente, tiraram o oito e o sete. A professora orientou-os no sentido da compensação de dois para cima, ficando com dez na primeira fila e cinco na segunda fila. A Sofia questionou-os acerca do resultado, mas pretendendo saber a expressão numérica correspondente:

Sofia - Quanto dá então?  
Santiago - Quinze!  
Sofia - Não, em cima está...  
Ivo - Dez.  
Sofia - Então é dez mais...  
Santiago - Quinze.  
Ivo - Não, dez mais cinco.  
Sofia - E quanto dá?  
Ivo / Santiago - Quinze!»

O Santiago pareceu ter contado de um em um devido à expressão do seu rosto ao olhar para o ábaco e estava apenas com a ideia do resultado total, mas o Ivo em voz alta diz ser dez mais cinco e em conjunto concluem que dá quinze. Contudo, quando a Sofia lhes pede, não conseguem voltar a explicar. Estes dois alunos demonstram, por vezes, saber os múltiplos de cinco e parece que a anterior utilização do colar de contas os ajudou a adquirir e interiorizar a estrutura do cinco. No geral, demonstram estar ao nível da contagem unitária, contando todos.

Par Gil/Márcio - Os alunos tinham tirado os cartões referentes ao sete e ao oito, tendo representado no ábaco o número quinze, com dez contas em cima e cinco em baixo. Entretanto, a Sofia pediu-lhes para explicarem quanto tinham. O Gil disse "cinco mais cinco são dez, mais cinco são quinze. Porque cada cor são cinco. Por isso contei de cinco em cinco". Partindo da conta inicial, sete mais oito, eles transformaram-na em dez mais cinco e chegaram ao resultado quinze. Este par revela ter interiorizado a estrutura do cinco e dominar os números de referência cinco, dez e quinze. A estratégia utilizada foi também resultado da sugestão da Sofia aquando da explicação da tarefa, assim como do próprio material.

N.º 1º cartão tirado: 8                      N.º do 2º cartão tirado: 7

Leitura / Representação

$$7 + 8 = 15$$

ou

$$10 + 5 = 15$$

Figura 15. A soma de 7 com 8 (par Gil/Márcio)

Contudo, eles hesitaram em passar para o papel o procedimento usado no ábaco horizontal pois não entenderam logo que iria dar o mesmo, ou seja, estranharam que a soma de sete com oito pudesse ser a mesma que a de dez com cinco. Esta hesitação é reveladora de que os alunos deslocavam as contas no ábaco de forma mecânica e que tal acção não traduzia o seu modo de pensar. Perante a hesitação, a Sofia decidiu reconstituir com os alunos o processo de compensar com base no grupo de 10.

Depois, o Márcio tirou o dez e o Gil afirmou logo que tinha de tirar o nove. O Márcio deslocou logo dez para a esquerda na primeira linha e o Gil nove na segunda linha. O Márcio disse que "dá 19, porque temos aqui dez (*apontando para a primeira fila*) e aqui também (*apontando para a segunda fila*), dá vinte. Menos um vai dar dezanove". E escreveram na folha a expressão correspondente. Nesta situação, o Márcio usou a estratégia da compensação, partindo do facto básico '10+10=20', e compensando depois, ao retirar 1 da soma 20.

## 2.ª Parte

Passou-se então à 2ª parte da tarefa com este material, 'O dobro de...'. O objectivo desta actividade é trabalhar a soma de dois números iguais, ou seja, o dobro. Numa primeira fase, foram usados os cartões com números até cinco e cada par tinha os cartões em duplicado. Posteriormente, passou-se para os números até dez. Os alunos trabalharam nas primeiras duas filas do ábaco.

A Sofia começou por dar um exemplo do que é o dobro com um exemplo concreto com bolos e pastilhas. Disse ao Gil para tirar o cartão com o três e questionou: "Se eu tenho de tirar um cartão com o mesmo número vou ficar com o dobro. Se ele tirou o três, eu tiro o três... Vou ficar com o dobro que é...?" O Gil respondeu logo que era seis. Contudo, nem todos entenderam, e como tal a Sofia decidiu realizar outro exemplo.

O Márcio tirou o número cinco e representou-o na primeira fila, a Sofia retirou o cinco e representou-o na segunda fila. Perguntou aos alunos quanto é o dobro de cinco. O Gil disse logo em voz alta que cinco mais cinco é dez.

Com este exemplo, a Sofia aproveitou para introduzir a noção de multiplicação.

Sofia - Quantas vezes tenho aqui grupos de 5?

Márcio - Dois.

Sofia - Então 10, também é ter 2 vezes o 5.

Par Bela/David - O David tirou o cartão com o número sete e representou-o na primeira fila, contando um a um, a Bela representou o mesmo número na segunda fila, mas ambos ficam sem saber o passo seguinte. Perante o seu impasse, a Sofia disse-lhes para eles escreverem na folha de registo o número que tiraram. Eles escreveram o sete e a Sofia auxiliou dizendo que "o dobro de sete é sete mais sete, que é... O David começou então a contar de um em um e respondeu que o dobro é catorze.

Confrontando este desempenho com o que o par teve na soma de 6 com 7, poderemos inferir que provavelmente o impasse aqui manifestado poderá ter a ver com a expressão 'dobro de' que era nova para os alunos. Tal como se pode verificar na figura 14, os alunos tinham partido dos factos básicos de  $6+6=12$  e de  $7+7=14$  para calcular  $6+7$ .

Par Ivo/Santiago - O Ivo tirou o número oito e representou-o na primeira fila, o Santiago representou o mesmo número na segunda fila, tal como se pode observar na figura 16.



Figura 16. A representação no ábaco do dobro de 8 (par Ivo/Santiago)

Quando a Sofia os questionou sobre o total, o Ivo afirmou em voz alta que era oito mais oito e foi contando de um em um, visualmente, olhando para as contas mas sem as apontar, até que respondeu dezasseis e escreveram na folha de registo este primeiro raciocínio. A disposição paritária das contas não os conduziu à visualização de  $10+6$ , olhando para o 10 como dois grupos de cinco (em cima e em baixo) marcados pela alternância de cores, e para o 6 como dois grupos de três (em cima e em baixo). Pelo contrário, a determinação deste dobro em particular foi feita através da contagem das contas uma a uma, desde o início, não mobilizando o seu conhecimento de que um grupo de contas da mesma cor corresponde a cinco.

A Sofia pediu-lhes para fazerem o registo na folha de papel e perguntou-lhes ainda como fariam se compensassem, no ábaco. Ao início, com o auxílio permanente da Sofia, o par estava a entender. O Santiago colocou mais duas contas em cima e retirou duas da fila de baixo. De forma correcta, responderam que ficaram em cima dez contas, mas quando questionados sobre quantas tinham ficado na segunda fila, o Ivo respondeu dezasseis, referindo-se ao total, e o Santiago chamou-o à atenção, dizendo que eram seis. Perante estas respostas, a Sofia pediu-lhes para voltarem ao raciocínio desde o início, mas este par não conseguiu repetir o processo nem dizer que dez mais seis é dezasseis, e muito menos conseguiam

identificar o dezasseis como o dobro de oito. Só com a ajuda da Sofia é que fizeram a compensação e registaram na folha de forma correta, escrevendo “ $8+8=16$  ou  $10+6=16$ ”. Tal é notório na folha de registo que foi apagada imensas vezes.

Par Gil/Márcio - Este par entendeu, de imediato, esta parte da tarefa em que se pretende saber os dobros e não revelaram quaisquer dificuldades na sua realização. Segue-se um extracto de quando o Gil tirou o número dez e o representou, seguido logo pelo Márcio que fez o mesmo.

Sofia - Então quanto é o dobro de dez?

Márcio - Dez mais dez é vinte.

Sofia - O dobro de dez é...?

Gil - Vinte.

Márcio - É duas vezes o dez.

Sofia - Este material é fácil para ver os dobros?

Gil - Sim, porque vemos logo quando os metemos.

A Sofia recapitulou então para os três pares o que era o dobro dizendo que «quando nós pensamos em dobro é duas vezes a mesma coisa. Quando pensamos dois mais dois é quatro, três mais três é seis, quatro mais quatro é oito e por aí fora...». E foi pedindo os dobros aos alunos; contudo, a partir do número seis, eles já não sabiam de cor e confundiam-se.

Assim, a Sofia decidiu representar o dobro de seis no ábaco, colocando seis contas na primeira fila e seis na segunda fila. Em seguida, utilizando a compensação, transformou em dez mais dois levando os alunos a entenderem que o dobro de seis, seria duas vezes o seis, e que usando a compensação, daria doze como soma de dez com dois. Acrescentou ainda, voltando a ter no ábaco a representação do seis mais seis, que para saber o dobro de sete, ou sete mais sete seria só acrescentar uma conta a cada fila, e que continuaria sempre assim, ou seja, oito mais oito acrescentava-se uma conta a cada fila, nove mais nove o mesmo, assim como em dez mais dez.

Após esta recapitulação, a Sofia pediu-lhes que parassem a tarefa, para que em conjunto e oralmente, respondessem às situações que ela ia apresentar. Ela pretendia mostrar dois cartões quase iguais e queria que os alunos lhe dissessem um resultado a partir do dobro. Começou por dar o exemplo dos números quase iguais cinco e quatro, representou-os respectivamente no ábaco, de seguida remeteu para um exemplo que a Bela tinha feito anteriormente, e disse "podem

pôr cinco mais cinco que é dez. Mas vocês têm um quatro, que é menos um. Como fica?". O Gil respondeu correctamente dizendo que "cinco mais cinco é dez menos um dá nove". A Sofia voltou a mostrar um exemplo anterior da Bela em que tinha tirado os números nove e dez. E pediu à aluna para explicar, ao que a Bela disse que "dez mais dez é vinte, menos o um do nove dá dezanove".

A tarefa teve de terminar nesta fase, pois os alunos não podiam ficar mais tempo.

## Síntese

O objectivo inicial das duas partes da tarefa foi um pouco alterado, devido à sequência escolhida e também à maneira como a Sofia abordou a tarefa. Ambas as partes poderiam ter servido para trabalhar o dobro. A soma de dois números consecutivos pode ser feita com recurso à relação do dobro e à compensação de mais ou menos um. Daí que se poderia ter começado pela parte dos dobros e só depois abordado a parte relativa à soma de dois números consecutivos. Contudo, como primeiro se trabalhou 'os quase iguais' com compensações baseadas na estrutura do dez, não foi muito utilizado o dobro, à excepção da estratégia usada pelo par Bela/David. A segunda parte já foi de encontro ao dobro, sendo que, mesmo neste caso, a professora continuou a sugerir a compensação para o grupo de dez.

A acção da professora parece ter como pressuposto uma única forma de utilização do ábaco horizontal, a de compensar para 10, deslocando contas em ambas as filas. O trabalho dos alunos parece ter sido influenciado por essa orientação da professora, existindo alguma evidência de que a deslocação das contas no ábaco correspondeu às regras instruídas de utilização do ábaco e não à forma de cálculo pensada pelos alunos, como aconteceu no caso do par Gil/Márcio quando os alunos hesitaram no registo no papel da igualdade das somas de sete com oito e de dez com cinco. De facto, os alunos tendem a calcular com o 10 quando os números em causa estão próximo de 10 (como no caso do par Gil/Márcio que, ao ter tirado os cartões com os números 9 e 10, raciocinou  $10+10=20$ , "Menos um vai dar dezanove") mas não nos casos em que tal não acontece (como aconteceu com o par Bela/David, ao calcularem a soma de 6 com 7, partindo da relação do dobro do 6 ou do 7).

A tarefa para os pares Gil/Márcio e Bela/David foi relativamente fácil. Estes alunos dominavam as somas de números iguais (pelo menos até ao seis). A primeira fila do ábaco assemelha-se bastante ao colar de contas, que já tinha sido bastante usado anteriormente pelos alunos. Todo o trabalho anterior com o colar de contas tinha deixado a estrutura do cinco e do dez bastante enraizada nos alunos, e como a Sofia tinha sugerido este tipo de resolução, foi sempre bastante evidente o recurso dos alunos a estas estruturas.

O par Ivo/Santiago continua a dar evidências de se encontrar num nível muito básico de contagem, a de contagem de todos. Mesmo respeitando a orientação dada pela professora de deslocação das contas no ábaco, revelam não ter interiorizado as estruturas do cinco e do dez, emergentes no ábaco horizontal, através das cores e das linhas, usando, de forma sistemática a contagem de todas as contas, uma a uma, desde o início, embora já sem a necessidade de as apontar com o dedo, bastando tê-las seguido com o olhar. Este tipo de contagem manteve-se mesmo quando alertados pela Sofia para o facto de uma linha ter dez contas. No entanto, parece que ambos os alunos não se encontram propriamente ao mesmo nível, sendo que o Ivo revela estar em processo de construção da estruturação dos números com grupos de cinco e de dez (por exemplo, quando refere que dez mais cinco dá quinze), embora recorra também à contagem de um em um, enquanto o Santiago recorreu sempre à contagem unitária.

No caso da estratégia da relação do dobro usada pelo par Bela/David, esta foi mobilizada sem recurso ao ábaco horizontal, tendo sido baseada no facto numérico memorizado pela Bela. No caso do par Ivo/Santiago, ao ter disposto as contas no ábaco, de forma paritária, quando colocado na situação de calcular a soma de oito com oito, o material não foi usado na sua função estruturadora dos números, tendo servido apenas para a contagem de um a um, tal como poderia ter sido feito com materiais não estruturados. O ábaco horizontal, ao ser usado para compensar para grupos de 10, conforme sugerido pela professora, não suportou a forma específica e diferenciada de pensamento dos vários alunos, sendo um meio de concretização rotinizada, contribuindo, no entanto, para a estruturação dos números com o grupo de 10, dado o conhecimento dos alunos de que a linha completa tem 10 contas.

#### **4.ª Tarefa - Situações Problemáticas com Recurso a Materiais**

A proposta de situações problemáticas com recurso a materiais foi realizada a 4 de Junho de 2010, no contexto de sala de aula. Esta tarefa diferiu das anteriores porque já não foi realizada a pares, mas sim de forma individual. O grupo turma estava a trabalhar numa tarefa diferente e os seis alunos vieram, um a um, a uma zona da sala de forma a resolver a tarefa que lhes foi apresentada. Para isso, cada aluno recebeu uma folha de registo, na qual estavam registadas três situações problemáticas. A professora Sofia referiu aos alunos que tinham acesso ao colar de contas, à moldura do dez e ao ábaco horizontal, podendo utilizá-los quando quisessem e os que quisessem. Foi-lhes pedido que verbalizassem o processo de resolução em voz alta.

De modo a não os intimidar com a câmara de filmar, uma vez que estavam sozinhos, a observação foi directa, sendo que foram sendo registadas as respectivas reacções.

O Ivo e o Santiago, apesar de terem ido individualmente resolver a situação, junto da Sofia, tiveram uma postura muito semelhante. Não optaram por nenhum material nem se expressaram em voz alta. Na folha de registo, apenas registaram o resultado final, de forma imediata. Quando questionados acerca da maneira como tinham chegado a esse resultado, não souberam responder. Estes dois alunos foram os últimos a ir realizar a tarefa e provavelmente, as suas respostas foram influenciadas pelos resultados dados pelos restantes quatro colegas. O seu lugar, na sala de aula, era muito próximo do sítio onde a tarefa foi realizada e, possivelmente, eles limitaram-se a registar um número visionado nas folhas dos colegas ou ouvido previamente, não tendo realizado qualquer pensamento individual no sentido de resolver as situações problemáticas. Por esse motivo, não serão aqui incluídas as suas resoluções.

##### **1.º Problema**

Após a leitura do enunciado do problema, o Gil escolheu o ábaco horizontal. De forma rápida, representou os números sete na primeira linha e oito na segunda. Oralmente, e ao mesmo tempo que fazia a transformação, disse que «agora ponho

na primeira linha mais três e tiro-os da segunda linha, por isso fica dez mais cinco que dá quinze». Depois a Sofia, pediu-lhe para ele passar esse raciocínio para a folha de registo, e ele apenas escreveu a expressão numérica “ $7+8=15$ ”. Perante esta expressão, a Sofia pediu-lhe que repetisse a maneira como tinha pensado e ele disse que “pus aqui os cinco (*desloca cinco para a esquerda*) mais dois (*desloca dois*) dá sete e em baixo os oito (*desloca primeiro os cinco e depois os três*), mas como sobram ainda três em cima eu passo para aqui e tiro daqui (*da segunda linha*)”.

Também o Márcio, ao ler o enunciado, escolheu o ábaco horizontal. Realizou a representação tal e qual o Gil. Colocou na primeira fila o sete e na segunda o oito. De forma imediata, afirmou “agora tenho de fazer a transformação, tenho aqui três em cima e ponho e tiro três de baixo. Agora isto vai dar quinze, porque cinco mais cinco são dez, e dez mais cinco são quinze (*e aponta para os grupos de cinco que fez*)”. Registou na sua folha “ $10+5=15$ ”.

O David leu o problema, e em silêncio, representou o 7 na primeira fila e o 8 na segunda fila, realizou a transformação, incutida pela professora Sofia, e moveu mais três contas em cima para a esquerda, retirando três de baixo para a direita. Na folha de registo escreveu: “ $7+8=15$ ”. Quando questionado, respondeu que dez mais cinco é quinze, referindo-se ao cálculo após feita a transformação.

A Bela, tal como o Gil e o Márcio, escolheu o ábaco horizontal e representou logo o sete e o oito da mesma forma que os colegas. No entanto, quando a Sofia lhe perguntou o que é que ela tinha representado, ela pareceu não entender o que lhe estava a ser perguntado e respondeu, tendo o cinco como número de referência, «cinco mais dois e cinco mais três». Perante esta resposta, a Sofia pediu-lhe que ela explicasse como é que tinha pensado, após a leitura do enunciado. A Bela revelou confusão. Leu pela segunda vez a situação problemática e disse que “são sete prendas e oito prendas”. No entanto, ela não fez a transformação como os seus colegas. Oralmente, explicou o seu raciocínio, dizendo que “fiz o sete (*na primeira fila*) mais o grupo de cinco (*na segunda fila*) que dá doze”, depois acrescentou os três que faltavam na segunda fila e disse que dava quinze. Na folha de registo, escreveu o mesmo que o Gil: “ $7+8=15$ ”.

Relativamente a este primeiro problema, o ábaco horizontal foi o material de eleição. Todos eles, à excepção da Bela, usaram a mesma estratégia da

compensação, tendo o 10 como número de referência, e usando o ábaco, tal como tinha sido sugerido pela professora nas aulas anteriores. O Márcio foi o único que registou no papel o resultado dessa compensação: “ $10+5=15$ ”. A Bela também utilizou o ábaco mas com um procedimento diferente do sugerido e orientado pela professora. A aluna recorreu à estruturação com grupos de cinco, sem efectuar a compensação. Decompôs o sete em cinco e dois e o oito em cinco e três, e seguidamente fez adições sucessivas:  $7+5=12$ ;  $12+3=15$ . Denota conseguir contar a partir de um número, neste caso, o sete.

Verifica-se que os alunos destes dois pares compreenderam que a situação colocada envolvia a operação da adição e que a mesma foi resolvida acertadamente por todos. Tendo vários materiais acessíveis à sua frente, os quatro alunos usaram o ábaco horizontal. Fica em aberto o que teria levado os alunos a usarem o material: uma efectiva necessidade de suporte de cálculo ou uma acção de corresponder ao que supunham ser as expectativas da professora? Dada a natureza da grandeza dos números envolvidos, eventualmente, para alguns dos quatro alunos, “ $7+8=15$ ” seria já um facto básico memorizado, cuja resposta imediata dispensaria o recurso a materiais estruturados de suporte ao cálculo.

## 2.º Problema

O David leu várias vezes o enunciado como que a consolidar o que lia. Optou pelo ábaco horizontal e na primeira fila deslocou dez para a esquerda, na segunda fila contou seis, um a um, e só depois os deslocou. Quando deparado com a parte do enunciado que dizia ‘deu cinco à Marta’, ia acrescentar na terceira fila, revelando uma acção aditiva; contudo, a Sofia alertou-o para o facto de ter de trabalhar o dezasseis, pois era o número que já estava representado. O aluno, depois deste alerta, tirou cinco contas da primeira fila, deslocando-as para a direita, correspondendo aos ‘cinco da Marta’, mas depois deslocou da segunda fila outros quatro, como acção de subtrair. Nesta altura, o aluno revelou confusão e estava sem saber como continuar, pelo que a Sofia pediu para ele reconstituir a situação problemática e refez com ele, oralmente, o processo de resolução. Assim, após ter deslocado as cinco contas na primeira fila, ele tirou duas e depois três da primeira fila, ficando todas as contas deslocadas para a direita, como correspondendo a uma fila vazia. Ao fazer o registo no papel, mostrou novamente confusão, tentou fazer

por desenhos, mas não conseguiu. Conforme se pode verificar na figura 17, o David representou 18 rebuçados e não 16. Desses, riscou cinco mas os cinco da Marta foram representadas à parte, não tendo entendido que seriam para cortar ao número inicial.



Figura 17. Resolução do 2º problema (David)

O Gil representou, no ábaco, logo, o dezasseis, deslocando de uma vez dez para a esquerda, na primeira fila, e seis para a esquerda, na segunda fila. Depois disse "eu pensei agora que ele deu cinco (*moveu para a direita cinco da segunda fila*), deu dois (*moveu para a direita um da segunda fila e um da primeira fila*) e comeu três (*moveu para a direita três da primeira fila*), por isso ficou com seis". Na folha de registo, ele escreveu: " $16-5-2-3=6$ ". Assim, o Gil começou por deslocar as contas da segunda fila, que tinha menos contas, até deslocar a totalidade das seis contas para a direita, como correspondendo ao esvaziamento dessa fila, e só depois deslocou para a direita as contas da primeira fila, ficando seis contas do lado esquerdo.

O Márcio leu o enunciado e representou o dezasseis no ábaco. Depois foi retirando as contas. Moveu cinco contas para a direita, na segunda linha, e depois duas (uma da segunda linha e uma da primeira linha,) e três (da primeira linha). A Sofia perguntou-lhe quantos rebuçados sobravam, ao que ele respondeu, imediatamente, 'seis', explicando "já sei que cinco mais um é seis (*apontando para as contas*)". Devido à alternância das cores das contas, referiu-se ao número seis, evidenciando a sua estrutura com o grupo de cinco.

A Bela representou o dezasseis no ábaco e escreveu, simultaneamente, na folha, o mesmo número. Lendo novamente o enunciado, entendeu que teria de retirar agora cinco. Ficou hesitante de onde tirar. Decidiu tirar da segunda fila, deixando apenas uma conta do lado esquerdo (escreveu no papel, com ajuda, '-5'), tirou

depois duas contas (uma da segunda linha e uma da primeira linha) e por fim tirou três (da primeira linha). A Sofia questionou quantos ficaram e ela disse 'seis'.

O facto deste segundo problema envolver subtracções sucessivas, tornou-o mais complicado para os alunos. Mais uma vez, os quatro alunos usaram o ábaco horizontal, tendo todos eles, à excepção do David, entendido o problema e usado o mesmo procedimento no modo como deslocaram as contas no ábaco, ao deslocarem, primeiro, a totalidade das seis contas na segunda fila, e só depois, as quatro contas na primeira fila. Este modo de deslocar as contas não suporta raciocínios que poderiam ter emergido da situação em causa, tirando partido dos números em questão: por exemplo, se 3 e 2 são 5, e ao todo, fica com menos 10 rebuçados ( $5+5$ ), então sobram 6 ( $16-10$ ). Neste caso, o ábaco não potenciou a estruturação da situação numérica com grupos de 5 e de 10.

### 3.º Problema

Neste terceiro problema, os dados fornecidos levavam a uma resolução semelhante à do primeiro problema, envolvendo também a adição, embora com quatro parcelas e não duas.

O Gil leu pausadamente o enunciado. Recorreu ao colar de contas e foi deslocando as peças para a esquerda consoante o número de animais. Facilmente, representou o três, o dois, o quatro e o seis, usando sempre como referência as cores e respectivos números cinco, dez e quinze.

Depois de terminar as deslocações das contas, ele deu a resposta de 15 rapidamente. Após deslocar para a esquerda as respectivas quantidades, o Gil utilizou a propriedade associativa, juntando as quantidades duas a duas, ou seja fez " $3+2$ " e " $4+6$ " e, devido a tarefas realizadas anteriormente e ao conhecimento do colar de contas, chegou mentalmente à expressão " $5+10$ " e o resultado final de " $15$ " para ele constituía um conhecimento imediato, dada a localização do 15 no colar de contas.

Quando lhe foi pedido para passar para o papel, não sabia o que era para fazer. A Sofia explicou que ele tinha de escrever o que pensou e ele representou o que tinha feito antes com o colar de contas, através de desenho (figura 18).


$$000 + 00 + 0000 + 000000 = 15$$

Figura 18. Resolução do 3.º problema (Gil)

O Gil, após desenhar as bolas, olhou para o colar de contas e disse "quinze", ao mesmo tempo que escreveu o número. Neste caso, o seu desenho não é uma representação para modelar a situação, enquanto suporte da resolução, mas sim uma forma de representar directamente o colar de contas usado, em resposta à solicitação feita pela professora.

Depois, decidiu fazer também uma recta. Traçou-a e perguntou "Vou pôr os números?" E escreveu vários risquinhos. Começou por dar três saltinhos, seguido de dois, de quatro e de seis. Quando a Sofia lhe perguntou qual o total, ele contou, um a um, até dezasseis. E disse "Ai, está mal!", porque ele já tinha feito antes com o colar e sabia que o resultado não podia ser aquele. A Sofia alertou para o facto de algo faltar na recta, ao que ele logo disse "Ah...aqui é o 0!".

Assim, o Gil usou uma propriedade da adição que lhe facilitou o cálculo, dados os números em causa. O colar de contas foi um recurso que lhe permitiu mobilizar, de forma imediata, somas com os números de referência. No entanto, a solicitação da professora para efectuar um registo no papel levou-o a abordagens matemáticas menos sofisticadas, como o desenho representativo das contas e a contagem de um a um na recta numérica.

Neste problema, o David escolheu o ábaco horizontal para o auxiliar nos cálculos. Representou o número de animais por linhas de ábaco, ou seja, três na primeira linha, duas na segunda linha, quatro na terceira linha e seis na quarta linha.

A Sofia questionou-o sobre quantos animais havia no total, ao que David respondeu 15, após ter contado as contas nas linhas do ábaco, uma a uma. A Sofia perguntou se não havia uma outra maneira mais fácil de chegar ao resultado, sem contar um a um. E falou da estratégia da compensação, de tirar das linhas de baixo contas enquanto houvesse nas linhas de cima.

Assim, ele transformou a disposição inicial das contas, ficando dez contas na primeira linha e cinco na segunda linha. Ao contar, ele disse "5 + 5 é 10 + 5 é... 20". Alertado para o erro, começou a contar um a um, tendo respondido, no final, que os animais eram 15. Quando escreveu na folha, escreveu "5 + 5 + 5" e disse que era

quinze, usando uma entoação de voz que evidenciava incerteza no que estava a afirmar.

Verifica-se aqui uma descontinuidade entre os números colocados na situação problemática e a estratégia da compensação usada com recurso ao ábaco. Essa descontinuidade não contribuiu para que o David abandonasse a sua abordagem de contagem unitária. A apresentação ordenada, no enunciado, dos números 3, 2, 4 e 6, poderia sugerir a aplicação da propriedade associativa, tal como tinha acontecido com o Gil. No entanto, o procedimento rotinizado de passar bolas de um lado para o outro no ábaco levou a obter  $10+5$  ou  $5+5+5$ , sem qualquer ligação significativa com os números apresentados no enunciado. Essa falta de ligação não ajudou o aluno a desenvolver a estruturação numérica, tal como pretendido pela professora, quando lhe perguntou se não havia uma maneira mais fácil de chegar ao resultado, sem contar um a um, tendo-o levado a recorrer, de novo, à contagem unitária, face ao erro da solução 20, e a afirmar, sem convicção, que seria 15 como resultado de  $5+5+5$ , no momento em que registou na folha de papel.

O Márcio leu o enunciado e disse que iria fazer a conta. Releu o problema e foi dizendo "três... dois... já dá cinco! Mais quatro e seis". Ao mesmo tempo que escrevia a expressão numérica " $3+2+4+6=15$ ". Escolheu o colar de contas e começou a representar a situação, começando da direita para a esquerda, tendo separado o três, o dois, o quatro e o seis deixando espaços entre estas quantidades, juntando apenas as duas primeiras de forma a ter o cinco. E disse «Dá quinze!». A Sofia perguntou porquê e ele disse, olhando para o colar de contas: "Já vi isto (*apontando para as cores*), é cinco, dez, quinze".

O modo como formulou a sua resolução sugere a mobilização da propriedade associativa mas não existe uma evidência clara de ter obtido a soma de quatro com seis. O Márcio resolveu a situação, mentalmente, de forma imediata, revelando o domínio das somas em causa, enquanto factos matemáticos, sem qualquer necessidade de utilização de material. O facto de ter usado o colar de contas corresponde ao que ele entendeu que seria suposto fazer. O aluno, ao ser questionado para justificar o resultado 15, fez alusão às tarefas efectuadas na sala de aula, e ao conhecimento que já possui deste material relativamente à maneira como os grupos de cinco estão divididos por cores. Assim, usou uma justificação

baseada na contagem de 5 em 5, sem ligação explícita com os números específicos da situação proposta.

A Bela escolheu o colar de contas e representou o número de animais do enunciado e disse, no final, que dava "quinze, porque dez mais cinco dá quinze (*apontando para as contas*)". Ao escolher este material, ela separou as quatro quantidades, juntando-as de seguida duas a duas, isto é, juntou três contas com duas e, ainda, seis com quatro. Ao afirmar que era "dez mais cinco", evidencia a aplicação das propriedades associativa e comutativa, já que enunciou em primeiro lugar a segunda soma parcial (10) e não a primeira (5). Esta aluna usou o colar de contas de um modo flexível, adequando-o à situação proposta.

### Síntese

O facto de os quatro alunos que resolveram, individualmente, as situações problemáticas propostas terem escolhido um material para suporte do seu trabalho poderá ter resultado de os mesmos terem assumido que deveriam escolher e usar um dos materiais colocados à sua frente. Esta interpretação é apoiada, por exemplo, pelo facto de o Márcio ter efectuado mentalmente o cálculo do 3.º problema e mesmo assim, ter usado depois o colar de contas.

Verifica-se uma escolha dominante dos alunos pelo ábaco horizontal, usando-o de acordo com as orientações da professora, no sentido de o usar com a compensação com o grupo de 10, transformando a disposição das contas de modo a ficar sempre um total de 10 contas, na linha de cima. Esse modo único de uso deste material traduziu-se numa abordagem, por vezes, forçada, criando uma descontinuidade com os números envolvidos nas várias situações propostas. A Bela é a única aluna que o usou de um modo diferente, mais ajustado ao seu modo de pensar com os números específicos em causa. O modo como o ábaco foi usado no 2.º problema pelos quatro alunos, fazendo deslocar sucessivamente as contas correspondentes aos números, não potenciou a estruturação da situação com grupos de 5 e de 10.

No 3.º problema, o colar de contas foi escolhido por três dos quatro alunos que o resolveram. Este material foi usado mobilizando os números de referência pela alternância de cores. A propriedade associativa foi usada na resolução deste problema, tirando partido de somas parciais correspondendo aos números de referência, 5 e 10.

## 5.ª Tarefa - Cálculo Mental

Esta tarefa foi aplicada no dia 11 de Junho. Foi apresentada aos seis alunos, de forma individual, uma folha com 12 cálculos que deveriam ser solucionados, sem recurso a quaisquer materiais. Pedia-se aos alunos que fossem expondo oralmente o seu raciocínio, de modo a que entendêssemos como chegavam aos resultados.

Esta tarefa já foi realizada quase no término do ano lectivo e, como tal, os alunos, no geral, apresentavam-se muito cansados física e psicologicamente, sendo que as condições climatéricas (estava imenso calor na sala e em toda a escola) não eram de todo as ideais para a promoção e estimulação do raciocínio.

Assim, um a um, os alunos dirigiram-se à Sofia, sendo que eu ia apontando o que era dito, respostas e raciocínio. Tendo em conta o tipo de tarefa, vou agora referir as reacções dos alunos cálculo a cálculo.

### Resolução dos Cálculos

Para o primeiro cálculo  $19+8$ , tanto o Ivo como o Santiago escreveram resultados errados, de forma imediata, sem dizerem nada em voz alta. O primeiro escreveu "71" e o segundo "7". Estas respostas escritas por parte de ambos os alunos não favorecem nenhuma conclusão da minha parte em relação à forma como eles terão pensado. Uma hipótese é o Ivo ter adicionado apenas o 9 e 8 e invertido a escrita e o Santiago também parece ter adicionado o 9 e 8, sem concluir o cálculo. Se tiver sido este o caso, ambos os alunos, revelam início de cálculo algorítmico sem qualquer sentido de número, não lidando com os números na sua globalidade, e portanto, não teriam feito cálculo mental. Contudo são apenas hipóteses, pois não foi possível concluir.

O David disse que "estava no 19 e contei com os dedos o número que estava mais à frente e deu 26". Na contagem, um a um, esqueceu-se de algum e errou. Contudo a sua colega Bela, que também usou esta estratégia, da contagem, um a um, a partir do dezanove, auxiliando-se com os dedos, respondeu correctamente.

O Márcio não teve a necessidade de contar um a um, e o seu raciocínio estava certo, contudo, no fim, acabou por errar. Ele disse: "Tenho dezanove mais um é vinte mais quatro são vinte e quatro e mais três são vinte e oito". Partindo do 20, o

Márcio revela preocupação em compensar, transformando o 8 em 7, já que o decompõe em 4 e 3. No entanto, ao adicionar 24 com 3, engana-se e em vez de dizer 27, diz 28. Este engano poder-se-ia dever, provavelmente, ao facto de ter na sua frente o 8 e não o 7, levando-o a dar pulos de 4 em 4, e não de 4 e de 3, conforme verbalizou.

O Gil usou a estratégia da compensação e pensou que tendo "dezanove para chegar a vinte é um, com oito é vinte e oito, com menos um dá vinte e sete".

Para o segundo cálculo  $20+6$ , o Ivo escreveu logo o resultado, acertando no mesmo, mas quando a Sofia lhe pediu para explicar como raciocinou, o aluno não conseguiu explicar.

O Santiago também acertou e escreveu de imediato a resposta e, quando a Sofia lhe pediu que lhe dissesse como tinha pensado, explicou através da contagem pelos dedos, algo que fez por ter conservada a quantidade de vinte, e tendo automatizado o resultado vinte e seis ao adicionar seis.

Tanto o David como a Bela tiveram a necessidade de contar um a um, com o auxílio dos dedos, a partir do vinte até ao resultado correcto de vinte e seis.

Já os alunos Gil e Márcio responderam prontamente vinte e seis, revelando que, para eles, isto era já um facto matemático.

Para o terceiro cálculo  $14+7$ , o Ivo disse logo que não sabia e o Santiago escreveu dezassete meio ao acaso, errando.

Tanto o David como a Bela (esta aluna auxiliou o cálculo com os dedos) contaram um a um, a partir do número catorze, dizendo que não conseguiam de outra maneira e responderam correctamente vinte e um.

O Gil começou por dizer que este cálculo era mais difícil e respondeu catorze, contudo, apercebendo-se do erro, começou a contar de um a um (com o auxílio dos dedos) a partir do catorze, chegando ao resultado certo.

Já o Márcio raciocinou dizendo "tenho catorze, mais cinco é dezanove, mais dois é vinte e quatro". Perante este resultado, a Sofia perguntou-lhe se é mesmo esse, ao que ele reformulou a resposta final, enganando-se mais duas vezes, dizendo outros números, mas a Sofia disse para ele pensar e o aluno acabou por responder vinte e um.

Para o quarto cálculo  $10+7$ , o Ivo respondeu muito rapidamente que dez mais sete é dezoito. Quando questionado sobre a forma como chegou ao resultado, não respondeu.

O Santiago raciocinou tal como no segundo cálculo, parecendo ter a quantidade dez conservada e aparentemente, saberia, automaticamente, que mais sete dá dezassete. Quando questionado acerca da forma como pensou, contou sete pelos dedos, partindo do 10.

Tanto o David como a Bela tiveram a necessidade de manter a contagem um a um, sendo que a Bela ainda necessitava do auxílio dos dedos e o colega apenas realizou a contagem em voz alta.

O Gil e o Márcio revelaram, tal como no segundo cálculo, que este era um facto matemático para ambos e prontamente responderam dezassete.

Para o quinto cálculo  $8+2+5$ , o Ivo respondeu vinte e o Santiago dezoito. Estes alunos continuavam a dizer números ao acaso, errando.

O David adicionou primeiro oito com dois e disse que dava dez (ao número oito juntou dois, um a um, oralmente) e disse que com quatro (aqui enganou-se na parcela a adicionar) dá quinze, acertando no resultado. Também a Bela contou de um a um, com o auxílio dos dedos, adicionando primeiro as duas parcelas, partindo do oito e só depois juntou a terceira ao resultado dez.

O Gil e o Márcio revelavam bastante facilidade e para eles era um facto básico que oito mais dois é dez (amigos do dez), com mais cinco é quinze. O Gil, inclusive, nem mencionou a expressão 'mais cinco', quando referiu que oito mais dois é dez disse logo que "por isso é quinze".

Para o sexto cálculo  $7+3+4$ , o Santiago errou dizendo 17. Contudo, o Ivo tentou executar o cálculo. Com alguma ajuda, realizou a primeira parte da operação, mas errou no resultado, dizendo que sete mais três e mais quatro é quinze. Perante esta resposta, a Sofia questionou-o quanto seria o resultado final, somando mais quatro e o aluno revelou muita confusão e voltou a responder quinze.

Neste cálculo, o David contou pelos dedos sete mais três, levantou sete dedos e depois mais três, respondendo dez e depois, tendo a quantidade dez conservada e contando, de um em um, disse que com mais quatro daria catorze. Já a Bela respondeu prontamente que sete mais três é dez. No entanto, teve a necessidade

de continuar com o auxílio dos dedos, a partir do dez, dizendo oralmente que mais quatro seria catorze.

Os alunos Gil e Márcio continuaram a mostrar muita facilidade nos cálculos apresentados. O Gil disse prontamente que "sete mais três é... dez, dá catorze!" e o Márcio, também muito rápido no seu raciocínio, disse "sete mais três são dez, mais quatro são catorze!".

Para o sétimo cálculo  $9+1+6$ , o Santiago voltou a errar e o Ivo voltou a revelar inconsistência no que disse pois afirmou que "nove mais um é onze e mais seis é dezasseis".

O David começou a revelar cansaço e bloqueou na adição das duas primeiras parcelas. Só com ajuda, respondeu que nove mais um dá dez e depois referiu que dez mais seis dá dezasseis, mas contando sempre um a um e utilizando os dedos. Também Bela contou um a um pelos dedos.

O Gil e o Márcio mantiveram a facilidade de raciocínio, acertando rapidamente na adição de nove mais um, e respondendo dez, mais seis é dezasseis.

Para o oitavo cálculo  $6+4+7$ , os seis alunos revelaram a mesma postura. O Santiago errou. O Ivo tentou resolver o cálculo em voz alta mas sem acertar, referindo que "seis mais quatro é dezanove e mais sete é vinte e sete". O David e a Bela continuavam a demonstrar a necessidade de utilizar os dedos e de contar de um em um, mas acertaram no resultado final. E o Gil e o Márcio eram automáticos a resolver, dizendo que "seis mais quatro são dez, mais sete são dezassete".

A seguir, foram colocadas subtracções que constituíam as operações em que os alunos possuíam mais dificuldades e nas quais estavam menos à vontade.

Para o nono cálculo  $20-7$ , o Ivo afirmou logo que não sabia e não fez. O Santiago não ligou ao sinal de menos e fez a conta como sendo uma adição, mas ao escrever o resultado, acertou, provavelmente, por ter visto ou ouvido o resultado dos colegas.

O David escreveu quinze, de forma imediata. Para o aluno, a resposta estava correcta e quando a Sofia lhe perguntou se ele tinha a certeza, ele revelou confusão e não disse mais nada.

O Gil contou de forma decrescente até ao resultado, apenas usando a oralidade. Já a Bela, que também utilizou esta estratégia, necessitou de utilizar os dedos. Ambos os alunos chegaram ao resultado certo.

O Márcio foi o aluno que neste cálculo revelou à vontade e disse que "vinte menos cinco são quinze e depois menos dois são treze". Mais uma vez, decompôs os números de um modo que lhe facilitasse o cálculo, já que  $20-5=15$  era, para ele, já um facto matemático.

Para o décimo cálculo  $26-13$ , o Ivo manteve a mesma postura de não conseguir realizar e o Santiago voltou a trocar o sinal de menos pelo de mais, mas desta vez errou o resultado, respondendo trinta e seis.

Neste cálculo, foi muito notória a confusão do David. Ele respondeu dezassete, mas como estranhou, assumiu que os seus dez dedos eram vinte e seis e que ia tirar treze. Sendo ambos os números quantidades maiores que o seu número de dedos, o David atrapalhou-se todo e acabou por errar, mantendo o primeiro resultado. Nesta conta específica, pareceu que faltava ao aluno manipulação de material, revelando dificuldade em usar o recurso dos dedos bem como em usar estratégias de cálculo.

A Bela manteve o método de contar um a um, de forma decrescente, sempre auxiliada pelos dedos. O Gil iniciou da mesma forma que a Bela, contudo enganou-se e, com alguma ajuda da Sofia, decidiu tirar dez aos vinte e seis e depois pensou e disse que era treze. Não verbalizou mas provavelmente viu que  $26-10$  seria 16 e  $16-3$  seria 13, decompondo o 13 em 10 e 3.

Tal como os dois colegas anteriores, o Márcio começou por contar de um em um, de forma decrescente, mas pelo meio atrapalhou-se e reformulou o seu raciocínio dizendo "tenho vinte e seis, menos três são vinte e três... depois menos dez (*contou um a um com o auxílio dos dedos*) são treze". Neste caso, o Márcio decompôs o 13 em 3 e 10.

Para o décimo primeiro cálculo  $23-13$ , o Ivo e o Santiago mantinham a mesma postura, como se tivessem desistido da tarefa.

O David, nesta altura, também já revelava cansaço e iniciou bem o cálculo, pois disse que "a vinte e três tiro três e fico com...", mas não conseguiu chegar à resposta. A Bela voltou a contar decrescentemente de um a um com o auxílio dos dedos, chegando ao resultado.

O Márcio fez "vinte e três menos cinco (*contando de um em um*) igual a dezoito e depois menos oito são dez". Revelou facilidade em decompor os números com o grupo de 5, tendo decomposto o 13 em 5 e 8 para o ajudar a efectuar a subtracção proposta.

O Gil revelou imensa perspicácia pois olhando para o cálculo de cima, o anterior, disse "É fácil, é dez" e quando a Sofia lhe perguntou porquê, ele disse que era só tirar três ao resultado ao resultado do cálculo de cima, revelando ter usado a estratégia da compensação, ao verificar que o aditivo 23 era menos 3 do que o aditivo 26, em 26-13.

Para o décimo segundo cálculo 16-5, já o Ivo e o Santiago tinham desistido.

A Bela e o David contaram, novamente, de um em um, de forma decrescente, acertando no resultado.

O Gil confundiu-se. Começou por afirmar que "Está dezasseis, no cinco falta um para chegar ao seis". Depois, questionou a Sofia "É 26?", e apercebeu-se, de imediato, do erro. Contudo, ficou sem conseguir iniciar novo raciocínio. Deu evidência de iniciar um cálculo algorítmico, começando pelo cálculo dos dígitos das unidades – "no cinco falta um para chegar ao seis". Esta abordagem algorítmica acabou por levar o aluno a perder o sentido dos números envolvidos bem como da operação em causa, propondo o número 26 como solução de 16-5.

O Márcio revelou bastante destreza dizendo logo onze, porque "dezasseis menos cinco são onze". Novamente, este é um facto matemático para este aluno.

## Síntese

Apesar desta tarefa ter sido realizada de forma individual, os elementos de cada um dos pares tiveram procedimentos e raciocínios semelhantes no geral.

Os únicos cálculos que foram efectuados acertadamente pelo Santiago e pelo Ivo foram  $10+7$  e  $20+6$ , existindo evidência de os mesmos serem factos matemáticos para eles. Os alunos deram respostas imediatas para estes dois cálculos. O Santiago utilizou a contagem um a um, auxiliando com a contagem pelos dedos, partindo do 10 ou do 20 (o que revela ter conservada a noção de 10 e 20), apenas como uma forma de explicar à professora o resultado obtido e não por uma necessidade própria. Apesar de estes cálculos serem dominados por estes dois alunos como factos matemáticos (Treffers, 2001b), tal não se verifica nas adições com três parcelas, como por exemplo,  $7+3+4$  ou  $8+2+5$ , ficando em aberto, se pela sua dificuldade em fazer adições sucessivas ou se por não dominarem as somas dos 'amigos do dez', conforme designação usada na turma. Foi muito notório que estes

dois alunos deram resultados ao acaso, não conseguindo utilizar estratégias que lhes facilitassem o cálculo.

Nesta tarefa, foi notório que a Bela e o David utilizaram a contagem unitária, muitas vezes, com o auxílio dos dedos, para efectuar os cálculos. A Bela acertou todos os cálculos propostos e o David acertou todos, à excepção das subtracções 20-7, 26-13 e 23-13. Para efectuar as subtracções, a Bela utilizou a contagem decrescente, de um a um. É, ainda, de registar o facto de a Bela ter usado sempre os dedos nas suas contagens enquanto o David, por vezes, contou em voz alta, mentalmente, sem o recurso dos dedos. Estes alunos evidenciam, assim, encontrarem-se no nível de cálculo por contagem (Treffers, 2001b) em situações em que não dispõem de materiais estruturados para suportar o seu cálculo.

O Márcio, ao longo do ano e das tarefas aplicadas, revelou sempre estar ao nível do colega Gil. No entanto, neste dia revelava uma atitude diferente, sinal de cansaço devido ao calor ou por estar no final do ano lectivo. Este aluno teve uma atitude que não era natural nele. Ao longo de todo o ano e das tarefas realizadas na sala de aula, nunca revelou este grau de confusão de raciocínio, assim como raramente errava os cálculos propostos. Nesta tarefa, o Márcio errou  $19+8$  e apesar de ter acertado os restantes cálculos, em dois dos cálculos,  $14+7$  e  $26-13$ , atrapalhou-se durante o processo de resolução. Já o Gil não revelava cansaço, pelo contrário, mostrava-se bastante interessado e empenhado. O Gil acertou em todos os cálculos propostos, à excepção de  $16-5$ . Ambos os alunos efectuaram a maior parte das adições propostas, mobilizando factos matemáticos memorizados, dando uma resposta imediata, sem necessidade de reflexão:  $20+6$ ,  $10+7$ ,  $8+2+5$ ,  $7+3+4$ ,  $9+1+6$ ,  $6+4+7$ . Assim, constituem, no final do ano, factos matemáticos para o Márcio e o Gil, quaisquer somas que dêem 10, bem como as somas de 10 ou de 20 com outro número inferior a 10. Para estes cálculos, os alunos evidenciaram encontrar-se na fase 3 de domínio, segundo Baroody (2002). Apenas nas adições  $19+8$  e  $14+7$  é que os alunos não deram uma resposta imediata.

A utilização prévia de materiais, tal como o colar de contas, a moldura do dez ou o ábaco horizontal, parece ter contribuído para a estruturação numérica destes alunos, revelada quer na forma como os alunos dominam os factos matemáticos baseados na estrutura do 10, quer na forma como usam as estratégias de cálculo mental nalguns dos cálculos propostos. Assim, no caso de  $19+8$ , ambos os alunos

usaram a estratégia da compensação, transformando o 19 em 20: (i)  $20+7$ , no caso do Márcio, decompondo depois o 7 em 4 e 3, e acabando por se confundir e errar; e (ii)  $20+8-1$ , no caso do Gil, que, de modo seguro, mobilizou o facto matemático  $20+8$ . Esta estratégia foi também usada pelo Gil em  $23-13$ , a partir do cálculo anterior  $26-13=13$  registado na sua folha, tendo sido o único aluno a estabelecer relações numéricas entre os diferentes cálculos. Assim, os alunos usaram para estes cálculos, em particular, estratégias de raciocínio, usando informação conhecida para determinar, por dedução lógica, o resultado das operações propostas (Baroody, 2002).

O Gil recorreu à contagem unitária, com o auxílio dos dedos, partindo de um dado número, em  $14+7$ , caso em que não existe qualquer parcela que seja múltiplo de 10. Também usou a contagem unitária em  $20-7$ , mas agora de forma regressiva. Em  $26-13$ , tanto o Gil como o Márcio iniciaram o cálculo pela contagem unitária decrescente, mas ao não serem bem sucedidos com esta estratégia, acabaram por usar a estratégia da decomposição do 13 em 10 e 3: (i)  $26-3-10$ , no caso do Márcio, sendo que teve novamente de contar de um a um, pelos dedos, para calcular  $23-10$ ; e (ii)  $26-10-3$ , no caso do Gil que, embora tenha sido ajudado pela professora nesse sentido, revelou uma vez mais destreza em calcular com a estrutura do 10, não recorrendo à contagem para efectuar as subtracções sucessivas.

O Márcio tende a decompor os números com grupos de cinco, o que também é indiciador do trabalho feito anteriormente com materiais conducentes a este tipo de estruturação numérica. Assim, para calcular  $14+7$  e  $20-7$ , o aluno decompôs o 7 em  $5+2$ , calculando sucessivamente  $14+5+2$ , no primeiro caso, e  $20-5-2$ , no segundo caso, mobilizando aqui  $20-5=15$  que constituía para si um facto matemático. Para calcular  $23-13$ , o Márcio decompôs o 13 em  $5+8$ , revelando um cálculo flexível e ajustado aos números em causa, pois embora tenha necessitado de contar de um a um regressivamente para calcular  $23-5$ , o cálculo  $18-8$  já era um facto matemático que ele dominava.

Em suma, estes dois alunos revelaram encontrar-se no nível de cálculo formal (Treffers, 2001b), usando os números como objectos mentais em cálculos flexíveis, sem necessitar de usar materiais estruturados, principalmente nas adições, evidenciando um desempenho correspondente ao nível de cálculo por contagem principalmente nas subtracções, já que não dispunham de materiais de suporte.

Nas subtracções, a falta de robustez da estratégia de contagem unitária, dada a ordem de grandeza dos números envolvidos, conduziu-os a um nível superior de desempenho, decompondo os números, embora sem abandonar por completo o procedimento de contagem de um a um.

É de referir que nenhum dos alunos lidou com as subtracções propostas pela sua relação com a adição. Assim, nenhum usou estratégias aditivas para as resolver. Pelo contrário, usaram uma estratégia de contagem regressiva, partindo do número maior, ou seja, do aditivo e mesmo quando optaram por decompor o número do subtrativo, a estratégia foi sempre fazer subtracções sucessivas. Este tipo de situações foi o que suscitou mais dificuldades nos alunos seleccionados. Tal como referido por NRC (2001), a contagem para trás é difícil para muitas crianças.

# CAPÍTULO V

## CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

### Conclusões do Estudo

Este estudo assentou na importância da utilização de materiais estruturados na aprendizagem dos primeiros números, no âmbito do desenvolvimento do sentido de número e tinha como objetivo central entender o papel da utilização de materiais estruturados na aprendizagem dos primeiros números, por parte de alunos de 1.º ano.

O trabalho seguiu uma metodologia qualitativa. A recolha de dados foi feita em ambiente natural, interessando primordialmente os processos e não os produtos, e procurando-se interpretar o significado que os participantes davam às tarefas que iam realizando (Bogdan & Biklen, 1991/1994).

Todas as propostas visaram o trabalho com os números até 20, tendo quatro delas envolvido o recurso a materiais distintos. Assim, na primeira tarefa, foi usado o colar de contas, na segunda, a moldura do 10, e na terceira, o ábaco horizontal. A quarta tarefa constou da apresentação de três situações problemáticas, nas quais os alunos poderiam ter acesso aos diferentes materiais como meios facilitadores de contagem/cálculo, se de tal sentissem necessidade. Por fim, com o intuito de verificar o processo de cálculo mental dos alunos, sem recurso a materiais, tendo em conta tudo o que tinha sido trabalhado antes, surgiu a última tarefa, no final do ano lectivo. Nesta tarefa, os alunos já não tinham quaisquer materiais na sua frente, e o objectivo era verificar se eles já se encontravam no nível de cálculo formal (Treffers, 2001b), dispensando o uso de materiais estruturados.

É importante referir que a professora trabalhava com a turma de acordo com o Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte, et al., 2007) e, como tal, as tarefas realizadas na sala de aula eram semelhantes às propostas no estudo. Por conseguinte, os alunos não estranhavam as tarefas de trabalho, pois eram parte do quotidiano deles. Além disso, o recurso aos diversos materiais estruturados foi uma

constante em todo o ano lectivo, desde o início do mesmo, embora com menor frequência, à medida que os alunos iam adquirindo uma maior percentagem de factos matemáticos, em termos do cálculo numérico.

De acordo com o objetivo acima referido, e no âmbito da aprendizagem dos números até 20, pretendeu-se dar resposta a três questões: (1) De que modo são utilizados o colar de contas, o ábaco horizontal e a moldura do dez?; (2) Que relações numéricas emergem da utilização do colar de contas, do ábaco horizontal e da moldura do dez?; (3) De que modo o colar de contas, o ábaco horizontal e a moldura do dez intervêm na estruturação do processo de cálculo?

### **Modo de utilização dos materiais**

Os alunos seleccionados para amostra no estudo trabalhavam desde o início do ano de acordo com o novo Programa de Matemática e, como tal, conheciam os materiais estruturados utilizados.

Na primeira sessão, do colar de contas, a professora iniciou a tarefa, mostrando um colar de vinte contas azuis e rosas, agrupadas em grupos de cinco, e posteriormente, distribuiu um colar de contas a cada par de alunos assim como molas, para que cada um pudesse mexer no material. A manipulação do material pelos alunos é defendida por vários autores (Matos & Serrazina, 1996; Ponte & Serrazina, 2000) que sustentam que a utilização de material na sala de aula sem ser manipulado pelas crianças acaba por ser ineficiente.

As molas foram usadas pelos alunos para marcar, no colar de contas, a localização de números de referência (5, 10, 15, 20) e números próximos (4, 9, 14, 19, 6, 11, 16, 7, 12 e 17). Tudo o que os alunos marcavam no colar de contas era também registado em papel, uma vez que dispunham de representações do colar de contas em papel. Seguidamente, foi pedido aos alunos o registo dos mesmos números na linha numérica, seja em termos de localização, seja em termos do seu posicionamento.

Enquanto os pares Gil/Márcio e Bela/David localizaram os números de referência e os números próximos, guiados pela alternância de cores, sabendo que cada grupo de contas de uma dada cor corresponde a cinco contas, o par Ivo/Santiago utilizou uma estratégia de contagem de todos, contando sempre desde o início (um) e de um em um. No entanto, este par evidenciou conseguir relacionar a localização dos

números próximos com a dos números de referência no trabalho com o colar de contas, desde que orientados pela professora (Santiago-"O 11 é depois do 10"; Ivo-"O 16 está à frente do 15"), passando à estratégia de contagem de todos na localização dos números na folha de papel. Por vezes, o Ivo conseguia fazer a contagem unitária a partir de um dado número. Por exemplo, para localizar o número 17 no colar de contas, contou de um em um a partir do número 12, acabado de localizar. Neste caso, a contagem que usou não tirou partido da estruturação subjacente ao colar, associada aos grupos de cinco, representados com cores diferentes.

A sessão com a moldura do 10 envolveu a utilização de molduras já preenchidas com pintas, tendo tido início com a apresentação deste material, por parte da professora. Os alunos já tinham, em aulas anteriores, trabalhado a moldura do 10 em papel, ou seja, em fichas elaboradas. A professora também mostrou que com 2 molduras do 10 se pode trabalhar até ao número 20. Cada um dos alunos tinha uma folha de registo individual, sendo que o trabalho era realizado na mesma a pares, ou seja, toda a discussão para chegarem à resposta era realizada entre ambos.

A cada moldura que a professora mostrasse, os alunos tinham, não só que identificar o número de pintas representado, mas também dizer quantas bolas faltavam para 10, ou seja, para encher totalmente a moldura. A professora optou por seleccionar as molduras que tirava, de forma a que os números saíssem por ordem crescente. Esta ordem crescente foi notada pelo par Gil/Márcio que acabou por preencher muitas das linhas da sua folha de registo, com base nessa regularidade, sem esperar que a professora mostrasse as diferentes molduras. O par Ivo/Santiago continuou a privilegiar a contagem de um em um. Os alunos deste par fizeram o *subitizing* de números pequenos, como foi o caso do três, mas recorreram à contagem unitária de outros números maiores, como foi o caso do sete. O par Ivo/Santiago conseguiu realizar a tarefa com uma moldura mas precisou do apoio da professora, sendo que já não conseguiu acompanhar o trabalho com duas molduras, envolvendo os números de 11 a 20.

Na terceira sessão, com o ábaco horizontal, cada par de alunos teve um ábaco horizontal à sua disposição para realizar a tarefa, além de uma folha de registo. Esta tarefa dividiu-se em duas partes distintas. Trabalhou-se primeiramente 'Os quase iguais' e depois 'O dobro de ...'. Para cada uma, havia uma folha de registo e

o trabalho a realizar foi distinto. A 1ª parte da tarefa, 'Os quase iguais', teve como objectivo trabalhar a soma de dois números consecutivos. Para esta actividade, cada par tinha um conjunto de cartões até ao dez e um ábaco horizontal só com dois arames visíveis. Um dos alunos retirava um cartão com um número e representava-o num dos arames, o outro aluno retirava o cartão do número antecessor ou sucessor e representava-o no outro arame. Depois faziam a leitura das quantidades representadas nos arames e do seu total. A 2ª parte da tarefa denominava-se 'O dobro de...' e o objectivo foi trabalhar a soma de dois números iguais, ou seja, o dobro. Numa primeira fase, foram usados os cartões com números até cinco e cada par tinha os cartões em duplicado. Posteriormente, passou-se para os números até dez. Os alunos trabalharam nas primeiras duas filas do ábaco.

A utilização que os alunos fizeram do ábaco foi influenciada pela professora que sugeriu-lhes sempre que, após representados os números nas duas filas, deslocassem para a esquerda contas na fila de cima até perfazer 10, e que deslocassem, na fila de baixo, para a direita, tantas contas quantas as deslocadas em cima. Isto é, a professora orientou os alunos para um único modo de utilização do ábaco horizontal (referindo-se-lhe como "a compensação no ábaco"), tendo por base a estratégia de fazer um 10, associada à estratégia da compensação, sugerindo-lhes que acrescentassem contas até fazer um 10 e retirassem depois o que tinham acrescentado.

Este modo de utilização parece ter sido assumido pelos alunos como um procedimento mecanizado, sem ligação evidente com o seu modo de pensar. Por exemplo, o par Gil/Márcio hesitou em registar no papel o procedimento usado no ábaco horizontal, estranhando que a soma de sete com oito pudesse ser a mesma que a de dez com cinco. O par Bela/David registou no papel a sua forma de calcular e não o procedimento de utilização do ábaco sugerido pela professora. O par Ivo/Santiago utilizou o ábaco, tal como sugerido pela professora, mas não conseguiu mobilizar a compensação com referência ao dez para determinar as somas, recorrendo à contagem unitária de todos (NRC, 2009).

Tal como apontado por diversos autores (Fosnot & Dolk, 2001; NRC, 2001; Nuhrenborger & Steinbring, 2008), a utilização dos materiais manipuláveis só é poderosa quando existe uma relação entre o material e as relações matemáticas, sendo que as crianças podem olhar para os materiais de um modo diferente dos

adultos, sem estabelecer as mesmas conexões com as ideias matemáticas. Os resultados do presente estudo são convergentes com resultados de outros estudos que apontam para a disparidade entre a relação matemática vista pelo professor no uso de um dado material e as ideias das crianças durante o processo de manipulação. Para Fosnot & Dolk (2001), o ábaco horizontal constitui um material estruturado que foi construído com a preocupação de não induzir nas crianças as estruturas matemáticas dos adultos mas sim a de apoiar e estimular o desenvolvimento natural de estratégias sofisticadas de cálculo dos alunos. No presente estudo, o facto de existir uma influência forte da professora para um único modo de utilização do ábaco horizontal pode ter criado um hiato entre a estratégia subjacente a esse modo de utilização e as estratégias adoptadas naturalmente pelos alunos.

### **Relações numéricas emergentes da utilização dos materiais**

Para esta pequena amostra de alunos, assim como para a turma, no geral, através da prática da professora, parece ser possível afirmar-se que foi muito importante terem sido sujeitas a tarefas e abordagens diversas, com materiais distintos, que permitiram a flexibilidade no cálculo com números pequenos, tendo como referência a estrutura do dez, o que auxiliará os alunos em cálculos futuros com números maiores.

O número foi sempre analisado, de modo a que os alunos se apropriassem dos grupos de cinco ou de dez em cada número. Foram sobretudo a estrutura do cinco e a do dez que emergiram da utilização tanto do colar de contas, como da moldura do dez ou do ábaco horizontal. Todos estes materiais foram usados privilegiando a disposição linear. Apesar do ábaco horizontal ser um modelo combinado (Treffers, 2001b), a sugestão da professora do uso da compensação no ábaco conduziu o trabalho para a adopção da estratégia de fazer um dez, seguida da compensação. As estruturas do cinco e do dez foram suportadas pelo uso dos materiais, sendo depois mobilizadas pelos alunos no estabelecimento de factos numéricos de referência (Treffers, 2001b). Estes factos numéricos foram, muitas vezes, usados para deduzir somas, através de raciocínios de compensação. Os alunos usaram também as composições dos números de modo a usar as estruturas do cinco e do dez. Por exemplo, no 3.º problema, o Gil, o Márcio e a Bela usaram a propriedade

associativa da adição, de modo a compor o cinco ( $3+2$ ) e o dez ( $4+6$ ) no colar de contas, chegando rapidamente ao resultado, já que os alunos localizavam facilmente o 15 no terceiro grupo de contas.

A moldura do dez constituiu um suporte de apoio ao desenvolvimento da capacidade de *subitizing* (por exemplo, quando o par Gil/Márcio fez o reconhecimento súbito do nove, ao olhar para os espaços vazios da moldura, ao determinar quantos faltavam a 11 para chegar a 20), tal como defendido por Clements (1999) e Clements & Sarama (2007). O par Ivo/Santiago que utilizou estratégias muito elementares como a contagem unitária sem, aparentemente, mobilizar, por sua iniciativa, relações matemáticas subjacentes aos materiais usados, deu evidência de usar a estrutura do cinco quando a professora pedia para explicar em voz alta o pensamento efectuado. Por exemplo, na moldura do dez, o Santiago explicou que havia sete espaços vazios como cinco mais dois, evidenciando, assim, encontrar-se em processo de construção de estruturação numérica.

A localização dos números próximos aos de referência no colar de contas foi feita por recurso a relações do tipo  $N-1$  ou  $N+1$ , ou  $N-2$  ou  $N+2$  (Baroody, 1987; Clements & Sarama, 2009), sendo que a justificação que os alunos davam baseava-se na estrutura do cinco e do dez (par Gil/Márcio- sete é cinco mais dois; “quinze mais um é dezasseis!”; Santiago- “O 11 é depois do 10”; par Bela/David - “é andar sempre um para trás!”).

A relação do dobro foi usada pelo par Bela/David na sessão do ábaco horizontal, embora não tivesse sido suportada pelo uso deste material. Por exemplo, este par usou a relação do dobro para calcular  $6+7$ , compensando a seguir. Tanto mobilizou  $6+6$  como  $7+7$ , dando evidência destas somas serem factos numéricos conhecidos. O procedimento de utilização do ábaco feito pelo David, tal como sugerido pela professora, não estabeleceu qualquer conexão com a relação do dobro pensada pelos alunos.

A compreensão da subtracção como inversa da adição emergiu principalmente no uso da moldura de dez, sendo que para os alunos, era irrelevante assumir para o subtractivo quer o número de pintas quer o número de espaços vazios.

## O papel dos materiais na estruturação do processo de cálculo

A utilização dos materiais foi inicialmente pensada para proporcionar o desenvolvimento do sentido do número, tendo-se revelado uma mais-valia. Neste caso, houve uma preocupação em pensar as tarefas, a ordem em que se apresentavam as e diferentes usos de materiais, de modo a explorar contextos que facilitassem a transição entre o nível de cálculo por contagem e o nível de cálculo por estruturação. Pode concluir-se que estas tarefas, auxiliadas pelos diferentes materiais, ofereceram um contexto motivador e desafiante para os alunos, ao mesmo tempo que permitiram suportar e auxiliar na descoberta da resolução dos problemas e alargar a compreensão das operações, promovendo o uso de estratégias, cada vez mais sofisticadas, em detrimento de estratégias elementares e pouco poderosas.

Em suma, foi evidente que os alunos puderam desenvolver e aprofundar o seu raciocínio e sentido de número através do auxílio dos materiais usados, uma vez que os alunos vão construindo gradualmente os conceitos matemáticos, de forma activa, passando do concreto para o abstracto.

Para além do já referenciado, aplicaram propriedades da adição, ajustando, de forma flexível o seu cálculo aos números específicos em causa. O uso dos materiais, associado ao contexto das tarefas, foi facilitador da existência de estratégias múltiplas para atingir os resultados pretendidos. Estes aspectos, que se relacionam com o conhecimento e a destreza em lidar com os números e as operações em situações de cálculo, podem ser uma ferramenta muito útil na resolução de problemas.

Embora se possa afirmar que as crianças evoluem de níveis mais básicos de cálculo para níveis mais sofisticados, os resultados referentes aos seis alunos seleccionados no presente estudo sugerem que o desempenho de cada um num ou noutro nível se prende não só com o seu nível de desenvolvimento matemático mas também com as situações específicas colocadas. Assim, um mesmo aluno pode numa mesma tarefa evidenciar encontrar-se num nível de cálculo formal e também recorrer a estratégias de contagem unitária, como aconteceu com o Gil e o Márcio na última tarefa relativa ao cálculo mental, sem uso de materiais, em que tiveram um desempenho correspondente ao nível de cálculo formal nas adições, e um desempenho correspondente ao cálculo por contagem nas subtrações. Estas foram

resolvidas por recurso à estratégia de contagem regressiva a partir do aditivo, sem que fosse mobilizada a sua relação inversa com a adição. Dada a dificuldade em usar esta estratégia de forma eficiente em subtracções como 26-13, estes dois alunos usaram decomposições do subtractivo com o grupo de dez (e noutros casos com o grupo de 5), para facilitar as contagens regressivas que fizeram depois, de forma sucessiva. Assim, estes dois alunos parecem encontrar-se na fase de aprendizagem *Sequência numérica inicial*, atendendo ao modo como efectuam as subtracções propostas, e simultaneamente na última fase, *Domínio da sequência numérica*, atendendo ao modo como resolvem as adições propostas (Wright, et al., 2000).

O par Bela/David evidenciou encontrar-se no nível de cálculo por contagem (Treffers, 2001b) na última sessão de recolha de dados em que não teve materiais estruturados para suportar o seu cálculo. No entanto, em todas as situações anteriores em que os dois alunos tiveram acesso a materiais de suporte ao cálculo, o seu desempenho correspondeu ao nível de cálculo estruturado (Treffers, 2001b), uma vez que efectuaram cálculos por recurso a estruturas numéricas, como a relação do dobro, ou a estrutura do cinco e do dez, aplicando propriedades da adição, composições e decomposições numéricas, e a estratégia da compensação, necessitando do suporte dos materiais. No entanto, o atrás referido não deve ser entendido como uma regressão dos alunos na sua aprendizagem, como se no final do ano lectivo tivessem regredido do nível de cálculo estruturado (evidenciado nas sessões anteriores de recolha de dados) para o nível de cálculo por contagem. Afinal, o que o seu desempenho, na última sessão de cálculo mental, sem acesso a materiais, mostra é que os alunos ainda se mantêm precisamente no nível de cálculo estruturado pois precisam dos materiais para calcular de modo mais estruturado, tirando partido das relações numéricas. Sem materiais, recorrem a estratégias de contagem unitária.

O Santiago e o Ivo, pelo desempenho fraco que possuem, necessitam de maior insistência e tempo para conseguirem avançar. Trata-se de um par que se manteve predominantemente no nível de cálculo por contagem, potenciando pouco a estrutura numérica subjacente aos materiais utilizados. O processo de construção da estruturação numérica revelou-se essencialmente nos momentos em que tinham de explicar à professora o seu modo de pensar. No final do ano lectivo, revelaram

dominar alguns factos numéricos baseados na estrutura do dez, como sejam  $10+7$  e  $20+6$ .

Os resultados do estudo apontam para a evolução de cálculo dos alunos, embora se tenha mantido, em todo o ano lectivo, a diferença de desempenho entre os três pares de alunos. Em cada tarefa que ultrapassavam, os alunos transferiam e alargavam os conhecimentos adquiridos nas tarefas anteriores, num processo de resolução de problemas, a partir de situações de conflito cognitivo criadas pela própria tarefa e interação com a professora, evoluindo também no uso de materiais manipuláveis, desde a necessidade da sua utilização até ao uso apenas do raciocínio, sem exploração e contacto dos materiais inicialmente disponibilizados.

As soluções dos alunos para calcular os problemas apresentados permitem perceber como pensam, quais os conhecimentos que usam e a que instrumentos recorrem para resolverem os problemas. Curiosamente, na tarefa de problemas, em que podiam escolher o material manipulável de auxílio, praticamente todos os alunos optaram pelo ábaco horizontal que foi o usado numa última fase das tarefas. A organização das soluções dos alunos, de acordo com os diferentes níveis de cálculo, permite perceber a tendência de evolução através do uso dos materiais escolhidos em cada tarefa e identificar o que os alunos devem mudar e conservar no seu próprio sistema matemático de forma a estarem aptos para transformar a sua maneira de pensar numa outra, no nível superior de formalização mais próximo (Kraemer, 2008).

Assim, os materiais estruturados contemplados no presente estudo constituíram-se como modelos para pensar, sendo um recurso importante na construção de relações numéricas pelas crianças, tendo, por esse motivo, um papel fundamental na evolução dos alunos para formas mais estruturadas de calcular. No entanto, o ritmo de aprendizagem foi diferenciado entre os pares de alunos estudados, sendo que existiu uma reduzida evidência de interiorização das estruturas numéricas subjacentes aos materiais por parte do par de alunos com o nível mais baixo de desenvolvimento matemático. Pode concluir-se, pois, que o uso dos materiais manipuláveis é fundamental, pois auxilia na organização da aprendizagem dos alunos e na sua evolução gradual, sendo que a integração dos mesmos deve acompanhar essa evolução.

## Recomendações e Limitações do Estudo

Neste estudo, uma das limitações foi o tempo disponível para a recolha de dados que interferiu com diversos factores. Por opção e convicção, optei por não efectuar este estudo na minha turma. Como tal, deparei-me com a falta de tempo, porque não podia faltar às minhas aulas para assistir a outras. Assim, apenas consegui ir cinco vezes observar aulas, quando saí da minha escola com a colaboração de colegas minhas durante o horário curricular e o horário das Actividades Extra-curriculares (Apoio ao Estudo). Daí que a recolha de dados tenha sido muito diminuta, tendo tido apenas tempo para recolher dados de cinco tarefas e observar a utilização de cada material uma única vez.

Uma outra limitação na recolha de dados foi o facto de não se ter adoptado sempre o mesmo tipo de procedimentos. Assim, três das cinco aulas observadas ocorreram dentro da sala de aula normal, com toda a turma, e duas delas na sala de estudo, no horário das Actividades Extra-curriculares, com apenas os pares de alunos seleccionados. Essa decisão foi tomada por se ter considerado que a escolha da sala de aula, com todo o grupo, estava a dificultar a recolha de dados, na medida em que o ruído era intenso, não permitindo aos alunos em questão se concentrarem. Por outro lado, em três das cinco aulas observadas, coloquei duas câmaras de vídeo viradas para os pares seleccionados, e em duas delas, fiz apenas registos das notas de campo, à medida que os alunos iam exprimindo a sua forma de pensar, sem recurso ao registo vídeo. A decisão de se efectuar apenas observação directa e notas de campo foi tomada por se ter considerado que o uso das câmaras de filmar poderia ter influência inibitória no desempenho dos alunos.

O presente estudo permite ainda fazer recomendações com implicações ao nível da prática pedagógica no 1.º ano de escolaridade. Uma das recomendações é a importância de reservar o tempo necessário para a exploração de cada uma das etapas das tarefas, de acordo com o nível de desenvolvimento particular de cada um dos alunos. Por exemplo, logo na primeira tarefa, do colar de contas, apesar de até à segunda alínea da tarefa parecer que os alunos estavam a acompanhar o raciocínio, foi evidente que um dos pares (Ivo e Santiago) ainda se encontrava num nível muito concreto. Como tal, foi precoce para estes dois alunos passar para a recta vazia nessa mesma aula pois ainda não tinham o à-vontade necessário,

relativamente às relações entre os números, não conseguindo, nessa altura, trabalhar de forma tão abstracta. Assim, teria sido importante para estes alunos terem trabalhado com o colar de contas durante um período mais alargado de tempo antes de passarem para modelos mais abstractos como a recta numérica vazia. Tal como refere Baroody (2002), a aprendizagem por estádios é necessária para que não se salte etapas, sem estarem os conceitos bem sedimentados. Caso contrário, ao avançar-se precocemente perde-se o trabalho feito anteriormente. Outra recomendação prende-se com a utilização propriamente dita de materiais. Tendo em conta que os alunos vão construindo gradualmente os conceitos matemáticos, de forma activa, passando do concreto para o abstracto, é essencial que, nas salas de aula, professores e alunos tenham acesso, o mais frequentemente possível, a materiais manipuláveis adequados às tarefas que realizam, para que a aprendizagem se torne significativa. É também importante que o professor tenha alguma cautela no modo como orienta a utilização dos materiais, no sentido de não comprometer a conexão necessária entre essa utilização e o modo natural e próprio de pensar de cada uma das crianças, em particular.

Emergente também do estudo é a recomendação da necessidade de incrementar o processo de aprendizagem com mais ou menos reforço e insistência, conforme o nível de desempenho dos alunos, para que com o auxílio dos materiais consigam atingir resultados que os alunos com melhor nível de desempenho mais rapidamente realizam. Para alunos com maiores dificuldades de aprendizagem, é necessário despender alguma atenção acrescida à dos restantes pares.

Uma outra recomendação incide na consistência do trabalho a propor aos alunos. O percurso da aprendizagem feito pelos alunos, onde aprendizagens novas se foram construindo, alicerçadas nas anteriores, leva-me a considerar que, de facto, tarefas isoladas e realizadas de forma pontual e inconsistente, não são a melhor alternativa para auxiliar a aquisição de conhecimento dos alunos, fundamentalmente, o desenvolvimento de aprendizagem significativa que, conseqüentemente, não regrida. Na realidade, e apesar de as sessões de recolha de dados terem tido um carácter pontual e disperso, ao longo do ano lectivo, dadas as limitações de tempo, atrás apresentadas, a professora participante neste estudo deu continuidade ao desenvolvimento do trabalho descrito em cada uma das sessões. Aliás, nesta faixa etária, em que os períodos de concentração das crianças

são ainda muito reduzidos, limitarmo-nos aos momentos de implementação das tarefas, descritos no presente relatório, seria, de todo, insuficiente para uma construção significativa de ideias e procedimentos. É, talvez, correcto dizer que as tarefas apresentaram-se como o mote de início e a motivação para um trabalho que já vinha a ser realizado de forma continuada pela professora e mantido ao longo de todo o ano lectivo.

Por fim, uma última recomendação é a que se relaciona com o papel do professor no desenvolvimento das tarefas. Ao longo do processo de exploração das tarefas propostas, tornou-se evidente a importância da orientação e questionamento feito pela professora. Esta deve procurar que os seus alunos justifiquem os procedimentos e estratégias de cálculo, mostrando o seu raciocínio, e, para isso, tem de formular questões pertinentes, dar pistas, apresentar modelos ou esquemas que ajudem o aluno a pensar. Ou seja, a questão da comunicação é também bastante importante. Aliada a esta prática, é também fundamental que o professor confronte diferentes estratégias utilizadas pelos alunos, uma vez que isso pode ajudar diferentes alunos, com as mesmas características de heterogeneidade dos três pares de alunos do presente estudo, a dar saltos qualitativos, embora eventualmente em tempos diferentes. No presente estudo, verificou-se que, em determinados momentos, as crianças não foram capazes de transferir conhecimentos evidenciados em momentos anteriores. Nesses momentos, a comunicação desempenhou, a par do uso dos materiais, uma função primordial. Saliento aqui as interacções entre a professora e os alunos, orientadas de modo a que fossem as crianças a chegar às suas próprias conclusões. Houve sempre a preocupação de que as questões colocadas fossem facilitando a compreensão e permitissem que as crianças, por si só, dessem as respostas. O ensino da professora visou fazer emergir as competências numéricas das crianças através do uso dos diferentes materiais e do diálogo travado com as crianças.

## **Reflexões Finais**

Diversas investigações têm vindo a concluir que é através das experiências iniciais que é definida a relação das crianças com a Matemática. Assim, numa fase de conclusão deste trabalho, cujo intuito era analisar a influência da adopção dos

materiais estruturados (colar de contas, ábaco horizontal e a moldura do dez) na aquisição das competências numéricas dos três pares de crianças envolvidas, pretendi compreender como se desenvolvem competências e raciocínios e de que forma as crianças os utilizam quando realizam tarefas no âmbito do desenvolvimento do sentido de número.

O conceito de número não é algo que a criança possua ou não. Este pode ser ampliado, ou desenvolvido, se as crianças forem levadas à construção de variadas relações, aumentando assim o seu conhecimento dos números. Para isso, é necessário que as crianças usufruam de experiências ricas, com bastante tempo e utilizando modelos e materiais diversos, conjuntamente com a verbalização constante de todas as relações que vão observando, de forma a desenvolver cada vez mais as relações numéricas de todas as espécies e assim aumentar o seu sentido de número.

A utilização destes materiais enquadra-se no âmbito do desenvolvimento do sentido de número pelas crianças, isto é, no âmbito do desenvolvimento de uma compreensão flexível e global dos números e das operações (McIntosh, Reys & Reys, 1992), assim como das suas relações. Este desenvolvimento contribui para que as crianças consigam desenvolver estratégias que facilitem a utilização dos números e das operações, no dia-a-dia, seja em que contexto for.

No presente estudo, verifiquei que a maioria dos alunos seleccionados evoluiu, desenvolvendo estratégias de cálculo mais complexas e estabelecendo relações numéricas cada vez mais elaboradas. Ambos os pares de alunos, Gil/Márcio e Bela/David, se mostraram flexíveis nos raciocínios e nas estratégias de resolução de problemas, mobilizaram e transferiram conhecimentos de um contexto para outro. Envolveram-se e participaram com entusiasmo em cada uma das tarefas, mostrando, a maior parte das vezes, compreender o que lhes era pedido, tentando dar resposta ao solicitado. O empenho da professora foi um factor fulcral, bem como as ideias que a orientaram, no sentido de recorrer ao quotidiano e ao conhecimento prévio dos seus alunos. Desta forma, pode-se confirmar, com o trabalho realizado, e de acordo com as ideias de Baroody (2002), que a aprendizagem das crianças se desenvolve em espiral, num movimento contínuo, onde as novas aprendizagens se tornam uma realidade, ancoradas nos seus conhecimentos anteriores.

A análise dos resultados do presente estudo contextualiza a compreensão de que o incremento do conhecimento e aquisição de competências numéricas é significativo através do uso dos materiais, auxiliando a evolução dos alunos no seu modo de calcular, sendo convergente com diversos autores (Fosnot & Dolk, 2001; Treffers, 2001b). A forma como são os materiais utilizados e integrados nas tarefas requer uma perspicácia e sensibilidade por parte do professor, que tem um papel muito importante para que a sua utilização não seja em vão. A utilização dos materiais deve acompanhar a forma como as competências dos alunos aumentam e progridem, de modo a fomentar o raciocínio necessário para evoluir (Serrazina, 1991).

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A matemática na educação básica. Reflexão participada sobre os currículos do ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.
- APM (Associação de Professores de Matemática) (1988). *Renovação do currículo de matemática*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Baroody, A. (1987). *Children's mathematical thinking*. New York: Teachers College Columbia University.
- Baroody, A. (2002). Incentivar a aprendizagem matemática das crianças. In B. Spodek (Org.), *Manual de investigação em educação de infância*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.
- Bezerra, M. J. (1962). *O material didático no ensino da matemática*. Rio de Janeiro: Diretoria do Ensino Secundário/Campanha de Aperfeiçoamento e Difusão do Ensino Secundário/MEC.
- Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora. (Obra original em inglês publicada em 1991)
- Botas, D. (2008). *A utilização dos materiais didáticos nas aulas de Matemática: Um estudo no 1º ciclo* (Tese de mestrado). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Cardoso, V. C. (2002). *Materiais didáticos para as quatro operações* (5.ª ed.). São Paulo: CAEM/IME-USP.
- Carpenter, T., Fennema, E., Franke, M., Levi, L., & Empson, S. (1999). *Children's mathematics: Cognitively guided instruction*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

- Castro, J., & Rodrigues, M. (2008a). O sentido de número no início da aprendizagem. In J. Brocardo, L. Serrazina & I. Rocha (Eds.), *O sentido do número: Reflexões que entrecruzam teoria e prática* (pp. 117-133). Lisboa: Escolar Editora.
- Castro, J., & Rodrigues, M. (2008b). *Sentido de número e organização de dados*. Lisboa: DGIDC.
- Cebola, G. (2002). Do número ao sentido do número. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo & A. F. Dionísio (Eds.), *Actividades de investigação na aprendizagem da Matemática e na formação dos professores* (pp. 257-273). Lisboa: Secção de Educação e Matemática da Sociedade Portuguesa da Ciências da Educação.
- Clements, D, & Sarama, J. (2007). Early childhood mathematics learning. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 461-555). Charlotte: Information Age Publishing Inc. & NCTM.
- Clements, D, & Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. New York: Routledge.
- Clements, D. H. (1999). Subitizing: What is it? Why teach it? *Teaching Children Mathematics*, 5(7), 400-405.
- DEB (2001). *Currículo nacional do ensino básico: Competências essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação.
- Equipa do Projecto Desenvolvendo o Sentido de Número (2005). *Desenvolvendo o sentido de número: Perspectivas e exigências curriculares* (Vol. 1). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Equipa do Projecto Desenvolvendo o Sentido de Número (2007). *Desenvolvendo o sentido de número: Perspectivas e exigências curriculares* (Vol. 2). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

- Fernandes, H. (1990). *Efeito de três métodos de ensino na aprendizagem do conceito de número racional no segundo ciclo do ensino básico* (Tese de mestrado). Braga: Instituto de Educação.
- Flick, U. (2005). *Métodos qualitativos na investigação científica*. Lisboa: Monitor.
- Fosnot, C., & Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work: Constructing number sense, addition and subtraction*. Portsmouth: Heinemann.
- Fuson, C. (1987). *Children's counting and concepts of number*. New York: Springer-Verlag.
- Gaspar, M. F. (2004). Aprender a contar, aprender a pensar: As sequências numéricas de contagem abstracta construídas por crianças portuguesas em idade pré-escolar. *Análise Psicológica*, 22(1), 119-138.
- Gelman, R. e Gallistel, C.R. (1978). *The child's understanding of number*. Cambridge: Harvard University Press.
- Graells (2000). *Los medios didácticos*. Retirado em Março de 2010, de <http://dewey.uab.es/pmarques/medios.htm>.
- Greeno, J. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22,(3), 170-217.
- Guerra, I. (2006). *Pesquisa qualitativa e análise de conteúdo: Sentidos e formas de uso*. Cascais: Principia Editora.
- Hole, V. (1977/2000). *Como ensinar matemática no ensino básico e no secundário*. Lisboa: Livros Horizonte. (Obra original em inglês publicada em 1977)
- Hope, J. (1989). Promoting number sense in school. *Arithmetic Teacher*, 36(6), 12-16.
- Hyde, A. (1989). Staff development: Directions and realities. In P. Trafton & A. Shulte (Eds.), *New directions for elementary schools mathematics* (pp. 223-233). Reston, Virgínia: National Council of Teachers of Mathematics.

- Jacobs , H. R. (1987). *Geometry* (2.<sup>a</sup> ed.). New York: W. H. Freeman & Company.
- Kraemer, J. M. (2008). Desenvolvendo o sentido do número: Cinco princípios para planificar. In J. Brocardo, L. Serrazina & I. Rocha (Orgs.), *O sentido do número: Reflexões que entrecruzam teoria e prática* (pp. 3-28). Lisboa: Escolar Editora.
- Léssart-Hérbert, M., Goyette, G., & Boutin, G. (2005). *Investigação qualitativa: Fundamentos e práticas*. Lisboa: Instituto Piaget.
- Lorenzato, S. (2006a). *Educação infantil e percepção matemática*. Campinas, SP: Autores Associados.
- Lorenzato, S. (2006b). *Para aprender matemática*. Campinas, SP: Autores Associados.
- Lüken, M. (1996). School starters' early structure sense. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35<sup>th</sup> Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 153-160). Ankara, Turkey: PME.
- Mansutti, M. A. (1993). Concepção e produção de materiais instrucionais em educação matemática. *Revista de Educação Matemática*, 1, 17-31.
- Markovits, Z., & Sowder, J. (1994). Developing number sense: An intervention study in grade 7. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(1), 4-29.
- McIntosh, A., Reys, B., & Reys, R. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, 12(3), 2-8.
- Moyer, P.S. (2001). Are we having fun yet? How teachers use manipulative to teach mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 47(2), 175-197.
- NCTM (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática*. Lisboa: APM & IIE. (trabalho original publicado em inglês em 1991).
- NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) (1985). *Agenda para a acção*. Lisboa. Associação de Professores de Matemática.

- NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*. Lisboa: APM & IIE. (trabalho original publicado em inglês em 1989).
- NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática. (trabalho original publicado em inglês em 2000).
- Novakowski, J. (2007). Developing “five-ness” in kindergarten. *Teaching Children Mathematics*, 226-231.
- NRC (National Research Council) (2009). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. J. Kilpatrick, J. Swafford & B. Findell (Eds.). Mathematics Learning Study Committee, Center for Education, Division of Behavioral and Social Sciences and Education (7<sup>a</sup> ed.). Washington: National Academy Press.
- Nuhrenborger, M., & Steinbring, H. (2008). Manipulatives as tools in mathematics teacher education. In D. Tirosh, T. Wood (Eds.), *The international handbook of mathematics teacher education*. (vol. 2, pp. 157-181). Rotterdam: Sense Publishers.
- Ponte, J. P., & Serrazina, M. L. (2000). *Didáctica da Matemática no 1º Ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E. G., & Oliveira, P. A. (2007). *Programa de Matemática do ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação, Direção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular.
- Prado, C. S. (1998). Materiales en la educación infantil. In A. G. Castillo (Coord.), *Educación infantil: Desarrollo del niño de 0 a 6 años*. Málaga: Universidad de Andalucía.
- Raphael, D., & Wahlstrom, M. (1989). The influence of instructional aids on mathematics achievement. *Journal of Research in Mathematics Education*, 20(2), 173-190.

- Reys, R. (1982). Considerations for teachers using manipulative materials. In S. Smith & C. Backman (Eds.), *Teacher-made aids for elementary school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Ribeiro, A. (1995). *Concepções de professores do 1º ciclo: A Matemática, o seu ensino e os materiais didáticos* (Tese de mestrado). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Schwartz, S. (2005). *Teaching young children mathematics*. Westport: Praeger Publishers.
- Serrazina, L. (1995). Ensinar/aprender Matemática. In APM (Eds.), *Actas do ProfMat95* (pp. 33-41). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Serrazina, M. L. (1991). Aprendizagem da Matemática: A importância da utilização de materiais. *NOESIS*, 21, 37-38.
- Serrazina, M. L. (1993). Concepções dos professores do 1º Ciclo relativamente à Matemática e práticas de sala de aula. *Quadrante*, 2(1), 127-138.
- Serrazina, M. L. (2007). *Ensinar e aprender Matemática no 1.º ciclo*. Cacém: Texto Editores.
- Serrazina, M. L. (2008). A Matemática nos primeiros anos: Alguns desafios. In A. P. Canavarro (Org.). *20 anos de temas na Educação e Matemática* (pp. 27-39). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Sowell, E. (1989). Effects of manipulative materials in mathematics instruction. *Journal of Research in Mathematics Education*, 20(5), 498-505.
- Steen, L. (2002). A problemática da literacia quantitativa. *Educação e Matemática* 69, 79-88.
- Suydam, M., & Higgins, J. (1977). *Activity-based learning in elementary school mathematics: Recommendations from research*. Columbus: ERIC Center for Science, Mathematics, and Environmental Education.

- Szendrej, J. (1996). Concrete materials in the classroom. In A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (Eds.), *The International handbook of mathematics education* (pp. 411-434). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Treffers, A. (2001a). Kindergarten 1 and 2: Growing number sense. In M. Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Children Learn Mathematics: A learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for calculation with whole numbers in primary school* (pp. 31-42). Netherlands: Freudenthal Institute (FI) Utrecht University and National Institute for Curriculum Development (SLO).
- Treffers, A. (2001b). Grade 1 (and 2): Calculation up to 20. In M. Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Children Learn Mathematics: A learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for calculation with whole numbers in primary school* (pp. 43-60). Netherlands: Freudenthal Institute (FI) Utrecht University and National Institute for Curriculum Development (SLO).
- Vale, I. (1999). Materiais manipuláveis na sala de aula: O que se diz, o que se faz. In APM (Eds.), *Actas do ProfMat99* (pp. 111-120). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2007). Whole number concepts and operations. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 557-628). Charlotte: Information Age Publishing Inc. & NCTM.
- Weiland, L. (2007). Experiences to help children learn to count on. *Teaching Children Mathematics*, 188-192.
- Wright, R., Martland, J., & Stafford, A. (2000). *Early numeracy: Assessment for teaching and intervention*. Thousand Oaks: Sage Publications.
- Zabala, A. (1998). *A Prática educativa: Como ensinar*. Porto Alegre: Editora Artes Médicas Sul Lda.

# ANEXOS

## Anexo 1

### Encarregados de Educação

Sou uma professora do 1º CEB que se encontra a frequentar o Mestrado em Educação Matemática na Educação Pré-Escolar e nos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico na Escola Superior de Educação de Lisboa. A minha dissertação tem como tema 'O sentido do número e os materiais estruturados', ou seja, pretendo entender a importância do uso de materiais estruturados na aprendizagem dos primeiros números. Para tal, precisarei de observar algumas aulas da professora do seu (a) educando (a).

Os dados para o meu estudo serão as aulas que gravarei em áudio e vídeo (mantendo sempre o anonimato das crianças em todas as situações), a minha observação e os trabalhos dos alunos.

Assim, gostaria de ter a sua colaboração permitindo que o seu (a) educando (a) participe neste estudo.

Autorizo a participação do meu (a) educando (a) neste estudo de matemática.

Assinado: \_\_\_\_\_, encarregado de educação do (a) aluno (a)\_\_\_\_\_.

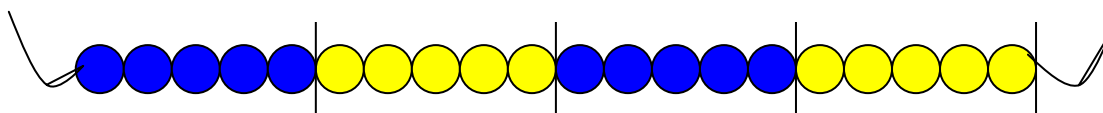
Muito obrigada,  
Sílvia Pinto

Anexo 2

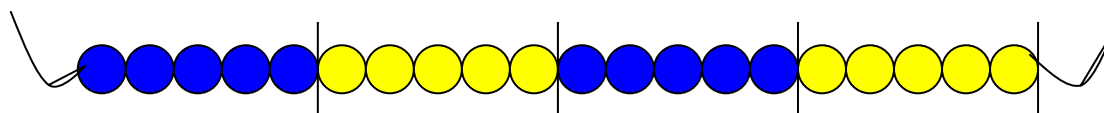
Nomes: \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_\_\_

1 - Localizar no colar de contas os números:

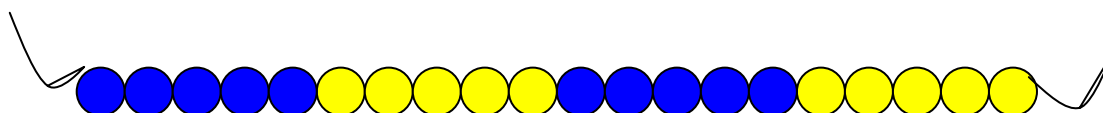
- 5, 10, 15 e 20



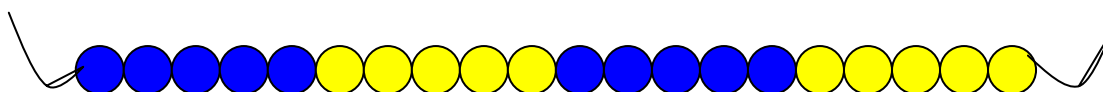
- 4, 9, 14 e 19



- 6, 11 e 16

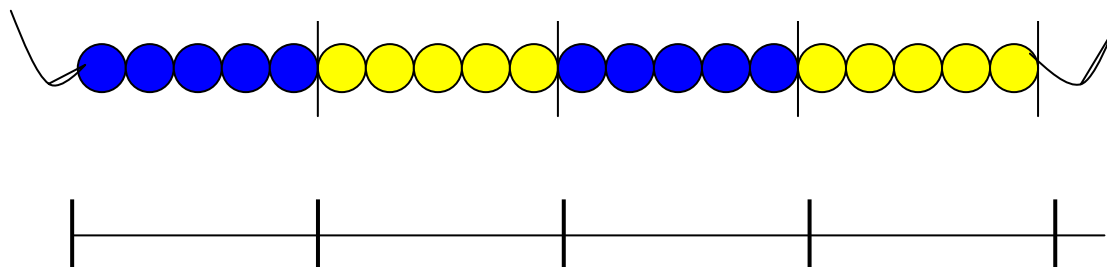


- 7, 12 e 17

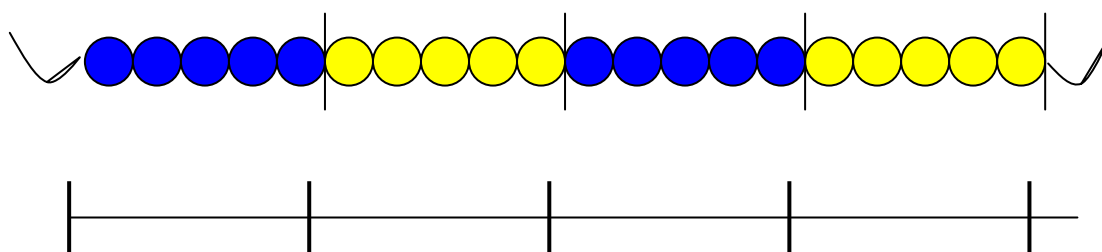


2 – Localiza no colar de contas e representa na linha numérica os números:

- 5, 10, 15 e 20

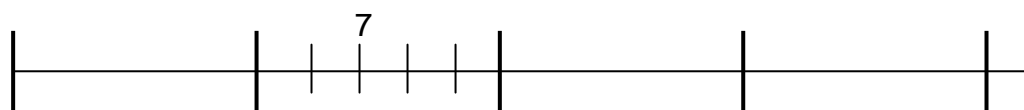


- 4, 6, 9 e 11

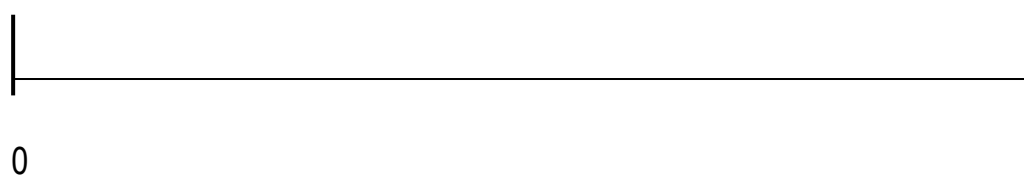


3 – Posiciona na linha numérica os números:

- 12, 16 e 19

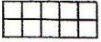
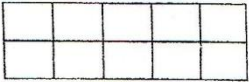
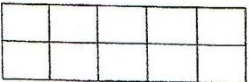
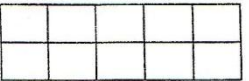
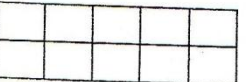

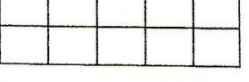
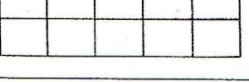
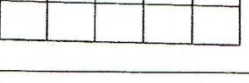
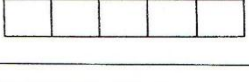
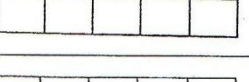
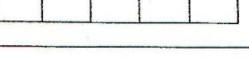


- 8, 14 e 17


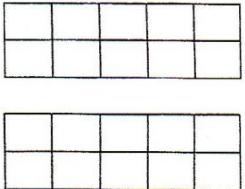
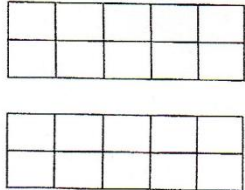
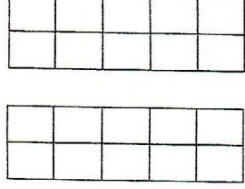
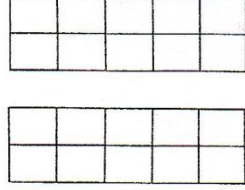
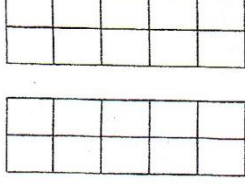


Anexo 3

Nome: \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_\_\_

<b>Molduras</b>	<b>Número de • na</b> 	<b>Quantos faltam para 10?</b>	<b>__+__=10</b>	<b>10-__=__</b>
				
				
				
				
				
				
				
				
				
				
				

Nome: \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_\_\_

<b>Molduras</b>	<b>Número de • na</b> 	<b>Quantos faltam para 20?</b>	<b>__ + __ = 20</b>	<b>20 - __ = __</b>
				
				
				
				
				

Nomes: _____ _____
-----------------------

## Os quase iguais

N.º 1º cartão tirado: \_\_\_\_\_

N.º do 2º cartão tirado: \_\_\_\_\_

Leitura / Representação

N.º 1º cartão tirado: \_\_\_\_\_

N.º do 2º cartão tirado: \_\_\_\_\_

Leitura / Representação

N.º 1º cartão tirado: \_\_\_\_\_

N.º do 2º cartão tirado: \_\_\_\_\_

Leitura / Representação

Nomes: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

## O dobro de...

N.º do cartão tirado: \_\_\_\_\_

Leitura / Representação

N.º do cartão tirado: \_\_\_\_\_

Leitura / Representação

N.º do cartão tirado: \_\_\_\_\_

Leitura / Representação

Nome: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

### **Tarefa 4 – Situações Problemáticas**

Data: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

Na manhã do dia do seu aniversário, a Ângela recebeu dos seus familiares 7 prendas. À tarde, durante a sua festa, a Ângela recebeu dos seus amigos 8 prendas. Quantas prendas recebeu ao todo a Ângela?

O António tinha 16 rebuçados. Deu 5 rebuçados à Marta, 2 ao Luís e comeu 3. Com quantos rebuçados ficou o António?

O Rui tem muitos animais de estimação: 3 gatos, 2 cães, 4 periquitos e 6 peixes. Quantos animais tem, no total, o Rui?

Anexo 6

Nome: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

**Tarefa 5 – Cálculo Mental**

Data: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

Descobre o resultado e diz como pensaste para lá chegar.

$19 + 8 =$

$9 + 1 + 6 =$

$20 + 6 =$

$6 + 4 + 7 =$

$14 + 7 =$

$20 - 7 =$

$10 + 7 =$

$26 - 13 =$

$8 + 2 + 5 =$

$23 - 13 =$

$7 + 3 + 4 =$

$16 - 5 =$

